bezeichnet, so wird diese letztere Gleichung auch befriedigt, wenn man an Stelle von x irgend eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ setzt.

Die linke Seite der Gleichung (3) ist eine rationale Function von x, daher hat man:

(4) $$\varphi(\Theta x) = 0\,, \quad \text{wenn } \varphi x = 0\,,$$

d. h. wenn x irgend eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ ist, so ist es auch die Grösse Θx.

Da Θx_1 eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$ ist, so ist jetzt infolge des Voraufgegangenen auch $\Theta \Theta x_1$ eine Wurzel; ebenso sind $\Theta \Theta \Theta x_1$ und die weiteren Grössen, die man erhält, indem man die Operation, welche mit Θ bezeichnet ist, eine beliebige Anzahl mal wiederholt, Wurzeln. Es sei zur Abkürzung:

$$\Theta \Theta x_1 = \Theta^2 x_1\,; \quad \Theta \Theta^2 x_1 = \Theta^3 x_1\,; \quad \Theta \Theta^3 x_1 = \Theta^4 x_1 \text{ u. s. w.}$$

gesetzt, dann hat man die Reihe:

(5) $$x_1\,, \quad \Theta x_1\,, \quad \Theta^2 x_1\,, \quad \Theta^3 x_1\,, \quad \Theta^4 x_1\,, \ldots$$

und alle diese Grössen sind Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$. Die Reihe (5) wird eine unendliche Anzahl von Gliedern haben, aber da die Gleichung $\varphi x = 0$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Wurzeln hat, so müssen mehrere Grössen der Reihe (5) unter einander gleich sein.

Wir setzen daher z. B. voraus:

$$\Theta^m x_1 = \Theta^{m+n} x_1\,,$$

oder:

(6) $$\Theta^n(\Theta^m x_1) - \Theta^m x_1 = 0\,,$$

indem man beachtet, dass $\Theta^{n+m} x_1 = \Theta^n \Theta^m x_1$ ist.

Die linke Seite der Gleichung (6) ist eine rationale Function von $\Theta^m x_1$; nun ist diese Grösse eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$, daher kann man infolge des oben ausgesprochenen Theorems x_1 an die Stelle von $\Theta^m x_1$ setzen. **[134]** Dies ergiebt:

(7) $$\Theta^n x_1 = x_1\,,$$

hierbei kann man voraussetzen, dass n den kleinsten möglichen Werth bezeichnet, so dass die Grössen:

(8) $$x_1\,, \quad \Theta x_1\,, \quad \Theta^2 x_1\,, \ldots \Theta^{n-1} x_1$$

alle unter einander verschieden seien.