In dem letzteren Falle sei x_3 eine Wurzel, welche von den in (8) und (10) enthaltenen Wurzeln verschieden sei, dann hat man eine neue Reihe von Wurzeln:

$$x_3\,,\quad \Theta x_3\,,\quad \Theta^2 x_3\,,\ \ldots\ \Theta^{n-1} x_3\,,\ \ldots$$

Man beweist genau auf dieselbe Art, dass die n ersten dieser Wurzeln unter einander und von den Wurzeln (8) und (10) verschieden sind.

Indem man diesen Process fortsetzt, bis alle Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ erschöpft sind, sieht man, dass die μ Wurzeln dieser Gleichung sich in mehrere Gruppen theilen, die aus n Termen bestehen; daher ist μ durch n theilbar; bezeichnet man mit m die Zahl der Gruppen, so hat man:

$$\mu = m \cdot n\,. \tag{11}$$

Die Wurzeln selbst sind:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1\,, & \Theta x_1\,, & \Theta^2 x_1\,, & \ldots & \Theta^{n-1} x_1\,, \\ x_2\,, & \Theta x_2\,, & \Theta^2 x_2\,, & \ldots & \Theta^{n-1} x_2\,, \\ x_3\,, & \Theta x_3\,, & \Theta^2 x_3\,, & \ldots & \Theta^{n-1} x_3\,, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\,, & \Theta x_m\,, & \Theta^2 x_m\,, & \ldots & \Theta^{n-1} x_m\,. \end{array}\right. \tag{12}$$

Wenn $m = 1$ ist, so hat man $\mu = n$ und die μ Wurzeln der Gleichung $\varphi x = 0$ sind durch:

$$x_1\,,\quad \Theta x_1\,,\quad \Theta^2 x_1\,,\ \ldots\ \Theta^{\mu-1} x_1 \tag{13}$$

ausgedrückt. In diesem Falle ist, wie man weiter sehen wird, die Gleichung $\varphi x = 0$ algebraisch auflösbar. Aber diese Eigenschaft findet nicht immer statt, wenn m grösser als die Einheit ist. Man kann dann nur die Auflösung der Gleichung $\varphi x = 0$ auf diejenige einer Gleichung n-ten Grades reduciren, deren Coefficienten von einer Gleichung m-ten Grades abhängen; dies wollen wir im folgenden Paragraphen beweisen.

§ 2.

Betrachten wir irgend eine der Gruppen (12), z. B. die erste, und setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{l} (x - x_1)(x - \Theta x_1)(x - \Theta^2 x_1)\ldots(x - \Theta^{n-1} x_1) \\ = x^n + A_1' x^{n-1} + A_1'' x^{n-2} + \cdots + A_1^{(n-1)} x + A_1^{(n)} = 0, \end{array}\right. \tag{14}$$