gegen die Verticale gleich $dy : dz$. Nun ist, wie eben gesagt wurde, das Verhältniss dieses Sinus zu HC constant, also

$$dy : t = dz : a,$$

woraus

$$a\,dy = t\,dz$$

und

$$a^2 dy^2 = t^2 dz^2 = t^2 dx^2 + t^2 dy^2$$

folgt, und dies giebt umgeformt als allgemeine Differentialgleichung der gesuchten Curve AMB:

$$dy = \frac{t\,dx}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

So habe ich mit einem Schlage zwei ausgezeichnete Probleme, ein optisches und ein mechanisches gelöst und mehr geleistet, als ich von anderen verlangte; ich zeigte, dass die beiden Aufgaben, welche ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik entnommen sind, dennoch dieselbe Beschaffenheit besitzen.

Betrachten wir jetzt einen besonderen Fall, nämlich die gewöhnliche Hypothese, welche zuerst Galilei einführte und bewies, wonach die Geschwindigkeiten fallender schwerer Körper sich wie die Quadratwurzeln der durchmessenen Höhen verhalten; denn das ist ja eigentlich die Aufgabe. Unter dieser Voraussetzung ist die gegebene Curve AHE eine Parabel und daher $t = \sqrt{ax}$. Setzt man diesen Werth in die allgemeine Gleichung ein, so kommt:

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

woraus ich schliesse, dass die Brachistochrone die gewöhnliche Cycloide ist. Wälzt sich nämlich der Kreis GLK vom Durchmesser a auf AG und beginnt das Wälzen in A, so beschreibt der Punkt K eine Cycloide, als deren Differentialgleichung, wenn

$$AC = x, \; CM = y$$

gesetzt wird, man gerade

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

findet.