Man kann dies von vorn herein analytisch so zeigen. Es ist

$$dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{a\,dx - 2\,x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Es ist aber $(a\,dx - 2\,x\,dx) : 2\sqrt{ax-x^2}$ das Differential von $\sqrt{ax-x^2}$ oder LO und $a\,dx : 2\sqrt{ax-x^2}$ das Differential von dem Bogen GL. Aus der Gleichung

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

folgt also durch Integration:

$$CM = \text{arc}\; GL - LO.$$

Mithin ist

$$MO = CO - \text{arc}\; GL + LO.$$

Da aber

$$CO = \text{arc}\; GLK,$$
$$CO - \text{arc}\; GL = \text{arc}\; LK$$

ist, so erhält man:

$$MO = \text{arc}\; LK + LO,$$

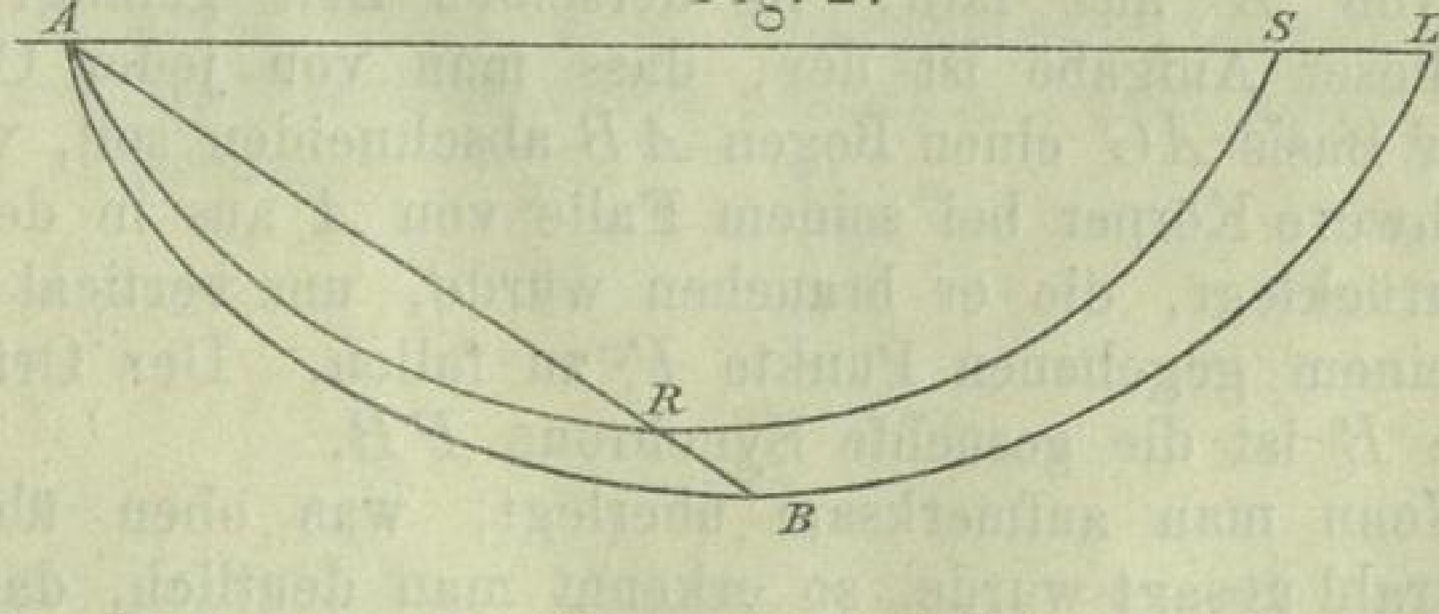
und, indem man auf beiden Seiten LO abzieht:

$$ML = \text{arc}\; LK,$$

was lehrt, dass die Curve KMA eine Cycloide ist.

Um dem Probleme vollständig zu genügen, bleibt noch zu

Fig. 2.



zeigen, wie man von einem gegebenen Punkte als Scheitel die Brachistochrone oder Cycloide beschreiben kann, welche