Arithmetik-Heft

des

Werkmeisterschülers.

Bearbeitet

von

Max Meyer,

Lehrer der Mathematik an den technischen Staatslehranstalten
zu Chemnitz.

2. Auflage.

(Als Manuscript gedruckt.)

1888.

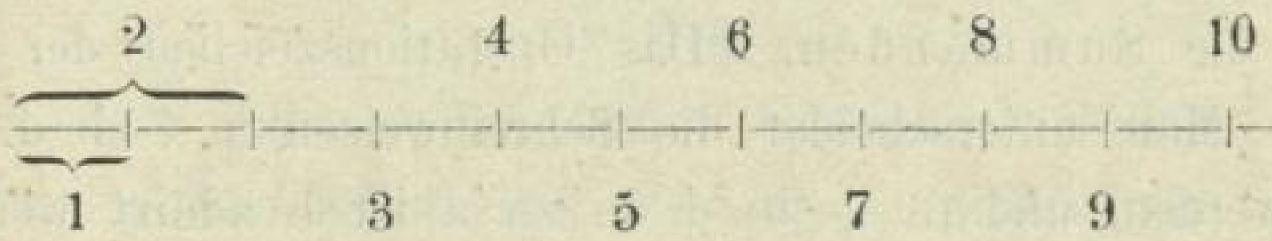
Druck von W. Adam in Chemnitz.

I. Allgemeine Arithmetik.

Einleitung.

§ 1.

Der Gegenstand der Arithmetik ist die Zahl. Die Zahl entsteht durch Zählen. Natürliche Zahl, natürliche Zahlenreihe; Zahlensystem.



Zwei Zahlen nach bestimmten Gesetzen so mit einander verbinden, dass eine dritte Zahl entsteht, heisst rechnen. Es giebt sieben Rechnungsarten (Operationen): das Addiren, das Subtrahiren, das Multipliciren, das Dividiren, das Potenziren, das Radiciren und das Logarithmiren. Die ersten vier Operationen nennt man auch die vier Species.

§ 2.

Rechengesetze gelten nicht für einige bestimmte, sondern für alle Zahlen. Für die Darstellung eines Rechengesetzes mittelst Zahlzeichen sind die üblichen Ziffern nicht geeignet, weil diese stets eine bestimmte Zahl ausdrücken, es muss vielmehr zu jenem Zwecke ein Zahlzeichen eingeführt werden, welches der Ausdruck einer beliebigen Zahl ist. Man benutzt dazu die kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c etc.; innerhalb derselben Rechnung hat wiederkehrend derselbe Buchstabe unveränderte Bedeutung.

§ 3.

Der Ausdruck

$$a = b \text{ (a ist gleich b)}$$

heisst eine Gleichung; er sagt aus, dass die beiden Zahlzeichen a und b dieselbe Zahlengrösse bedeuten. a heisst die linke, b die rechte Seite der Gleichung.

Eine Gleichung ist das arithmetisch ausgedrückte Urtheil der Gleichheit zweier Zahlengrössen.

Wenn $a = b$, so ist auch $b = a$, d. h. die Seiten einer Gleichung lassen sich vertauschen.

Der Ausdruck

$$a > b \text{ (a ist grösser als b)}$$

heisst eine Ungleichung; wenn $a > b$, so ist umgekehrt $b < a$ (b kleiner als a) d. h. beim Vertauschen der Seiten einer Ungleichung muss das Ungleichheitszeichen gewechselt werden.

I. Abtheilung.

Die vier Species.

1. Addition.

§ 4.

Zu einer Zahl a eine Zahl b addiren heisst, diejenige neue Zahl finden, welche b Einheiten mehr enthält, als a hat. Hierbei nennt man a und b die Summanden. Das Operationszeichen der Addition ist $+$ (plus). Man unterscheidet die Schreibweisen $a + b$ d. h. zu a soll b addirt werden, und $(a + b)$ d. h. zu a ist b addirt worden und dieses Ergebniss der Addition heisst Summe. In der Gleichung

$$a + b = c$$

sind a und b die Summanden, $(a + b)$ ist die Summe und c ist der Werth dieser Summe; man findet c, indem man von der Zahl a aus b Einheiten aufwärts zählt. Da man denselben Werth c findet, wenn man umgekehrt von b aus a Einheiten aufwärts zählt, so gilt das Grundgesetz der Addition: die Summe ist unabhängig von der Anordnung der Summanden. Es ist also

$$a + b = c \text{ und auch } b + a = c$$

folglich

(1) $$a + b = b + a$$

Sind mehrere Zahlen durch Addition zu verbinden, so werden zunächst zwei addirt, zu der entstandenen Summe die dritte Zahl addirt, zu der neuen Summe die vierte Zahl addirt u. s. f.; das Schlussergebniss hängt nur von der Anzahl aller zusammengezählten Einheiten ab, folglich gilt obiges Grundgesetz auch für mehr als zwei Summanden:

(1*) $$u + v + w = v + u + w = w + v + u$$
$$m + n + p + q + x + y = x + p + n + m + y + q \text{ u. s. f.}$$

Der Rechner kann sich also bei einer Addition mehrerer Summanden die Reihenfolge so wählen, wie sie für die schnelle und sichere Auffindung der Summe vortheilhaft ist.

Benannte Zahlen können nur addirt werden, wenn sie gleichartig und gleichbenannt sind; die Summe erhält dann dieselbe Benennung, welche die Summanden haben.

§ 5.

Es gelten jetzt folgende Additionssätze:

1. Sind zu einer Zahl zwei oder mehrere andere Zahlen zu addiren, so kann man deren Summe auf einmal addiren:

(2) $$a + b + c = a + (b + c)$$

2. Statt eine Summe zu einer Zahl zu addiren, kann man deren Summanden einzeln addiren:

$$m + (p + q) = m + p + q \qquad (3)$$

3. Statt eine Zahl zu einer Summe zu addiren, kann man sie zu dem einen Summanden addiren:

$$(x + y) + z = (x + z) + y \qquad (4)$$

2. Subtraktion.

§ 6.

Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahiren heisst, diejenige neue Zahl finden, welche b Einheiten weniger enthält, als a hat. Hierbei heisst a Minuend und b Subtrahend. Das Operationszeichen der Subtraktion ist — (minus). Man unterscheidet die Schreibweisen a — b d. h. von a soll b subtrahirt werden und (a — b) d. h. von a ist b subtrahirt worden und dieses Ergebniss der Subtraktion heisst Differenz (Rest). In der Gleichung

$$a - b = c$$

ist a der Minuend, b der Subtrahend, (a — b) die entstandene Differenz und c der Werth dieser Differenz; man findet c, indem man von a aus b Einheiten abwärts zählt (abziehende Subtr.) oder auch, indem man von b aus solange aufwärts zählt, bis die Zahl a entsteht (ergänzende Subtr.); die letztere Subtraktionsweise ist der ersteren vorzuziehen. Jedenfalls ist c richtig gefunden, wenn

$$b + c = a$$

daher die Erklärung: Die Differenz zweier Zahlen ist diejenige Zahl, durch deren Addition zum Subtrahenden der Minuend entsteht. Weiter folgt auch, dass

$$a - c = b$$

d. h. dass Minuend minus Differenz gleich Subtrahend sein muss.

Die Subtraktion ist nur möglich, wenn der Minuend grösser als der Subtrahend ist; deshalb dürfen auch Minuend und Subtrahend nie vertauscht werden.

Zählt man von einer Zahl a aus b Einheiten aufwärts und hierauf b Einheiten abwärts oder umgekehrt, erst abwärts und dann aufwärts, so gelangt man immer wieder zur Zahl a; daher der Satz: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn eine andere erst addirt und dann wieder subtrahirt wird, oder umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{l}(a + b) - b = a \\ (a - b) + b = a\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Man sagt wohl auch: Addition und Subtraktion mit gleichen Zahlen heben sich auf, oder: Addition und Subtraktion sind entgegengesetzte Rechnungsarten.

Benannte Zahlen können nur subtrahirt werden, wenn sie gleichartig und gleichbenannt sind: die Differenz erhält dann dieselbe Benennung, welche Minuend und Subtrahend haben.

§ 7.

Es gelten jetzt folgende Subtraktions- beziehentlich Additionssätze:

1. Hat man von einer Zahl mehrere andere Zahlen nacheinander zu subtrahiren, so ist die Reihenfolge beliebig:

(6) $$f - g - h = f - h - g$$

2. Hat man von einer Zahl mehrere andere Zahlen nacheinander zu subtrahiren, so kann man ihre Summe auf einmal subtrahiren:

(7) $$z - x - y = z - (x + y)$$

3. Hat man von einer Zahl eine Summe zu subtrahiren, so kann man die Summanden einzeln subtrahiren:

(8) $$m - (p + q) = m - p - q$$

4. Hat man mehrere Zahlen theils zu addiren, theils zu subtrahiren, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht:

(9) $$b - c + d = b + d - c$$

5. Statt zu einer Zahl eine Differenz zu addiren, kann man den Minuenden addiren und den Subtrahenden subtrahiren:

(10) $$k + (l - m) = k + l - m$$

6. Statt von einer Zahl eine Differenz zu subtrahiren, kann man den Minuenden subtrahiren und den Subtrahenden addiren:

(11) $$k - (l - m) = k - l + m$$

7. Hat man eine Zahl b zu addiren und eine Zahl c zu subtrahiren, so kann man $\begin{cases} \text{wenn } b > c, \text{ die Differenz dieser Zahlen addiren:} \\ \text{wenn } b < c, \text{ die Differenz dieser Zahlen subtrahiren:} \end{cases}$

(12) $$a + b - c = a + (b - c)$$

(13) $$a + b - c = a - (c - b)$$

8. Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man Minuenden und Subtrahenden gleichzeitig um dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert.

(14) $$(a \pm m) - (b \pm m) = a - b$$

§ 8.

In den §§ 4 und 6 wurde die Klammer als ein Zeichen kennen gelernt, welches die eingeschlossenen Zahlen als eine einzige Zahl betrachtet wissen will. Solche Klammern können in einer Rechnung mehrere vorhanden sein, nebeneinander oder auch eine die andere umschliessend. Durch jede Klammer wird dem Rechner die Reihenfolge der Ausrechnung vorgeschrieben. Die Formeln 3, 8, 10 und 11 gestatten, sich dieses Klammerzwanges zu entledigen, um wieder von der beliebigen

Reihenfolge der Zahlenzusammenstellung Gebrauch machen zu können oder mit anderen Worten: jene vier Formeln gestatten die Klammern einzeln aufzulösen, wobei es sich empfiehlt, mit der innersten Klammer zu beginnen. Es stellt sich bald folgende Regel ein, welche den geübten Rechner leicht in den Stand setzt, alle Klammern mit einem Male aufzulösen:

Steht vor einer Klammer + (plus), so behalten bei Auflösung derselben alle in ihr stehenden Zahlen die Operationszeichen unverändert bei, steht aber vor einer Klammer — (minus), so müssen bei Auflösung derselben die Operationszeichen der Klammerzahlen gewechselt werden.

Diese Regel ist entsprechend zu beachten, wenn Klammern gesetzt werden; vergleiche hierfür die Formeln 2, 7, 12 und 13.

§ 9.

Die Zahlen, mit welchen bisher gerechnet wurde, haben die Eigenschaft, dass durch ihre Addition ein vorhandener Werth vermehrt und durch ihre Subtraktion vermindert wird. In diesem Sinne stand die Gleichung

$$a - b = c, \qquad (\alpha)$$

für welche zur Erklärung der Differenz c gleichzeitig die Gleichungen gelten:

$$b + c = a \qquad (\beta)$$

$$\text{und } a - c = b, \qquad (\gamma)$$

unter der Bedingung, dass $a > b$ ist.

Hebt man diese Beschränkung auf und setzt $a = b$ voraus, so wird aus (α)

$$b - b = c$$

und die Gleichungen (β) und (γ) bekommen die Formen

$$b + c = b$$

$$\text{und } b - c = b,$$

die Differenz c gewinnt somit die Bedeutung einer Zahl, durch deren Addition zu und Subtraktion von b diese Zahl b weder vermehrt, noch vermindert wird, sondern unverändert bleibt. Eine solche Zahl nennt man Null und bezeichnet sie mit der Ziffer 0. Erklärung?

$$\begin{aligned} z - z &= 0 \\ z + 0 &= z \\ z - 0 &= z. \end{aligned} \qquad (15)$$

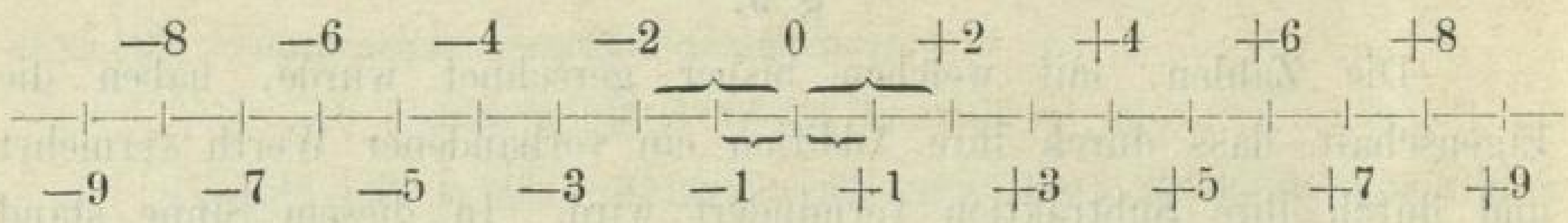
Setzt man in Gleichung (α) voraus, dass $a < b$, so gewinnt zu Folge der Gleichungen (β) und (γ) die Differenz c jetzt die Bedeutung einer Zahl, durch deren Addition zum grösseren b das kleinere a und durch deren Subtraktion vom kleineren a das grössere b entsteht. Eine solche Zahl nennt man eine negative Zahl und im Gegensatz dazu die bisher gekannten Zahlen **positive Zahlen**. Erklärung? — Die **Vorzeichen** plus (+) und minus (—). —

$$w + (+z) = w + z$$
(16)
$$w + (-z) = w - z$$
$$w - (+z) = w - z$$
$$w - (-z) = w + z$$

Bezüglich des Zusammentretens der Operationszeichen $\pm$ mit den Vorzeichen $\pm$ hat man mithin die praktische Regel:

Vorzeichenregel d. A. u. S. Zwei gleiche Zeichen geben plus, zwei ungleiche Zeichen geben minus. — **Relative** (algebraische) und **absolute** Zahlen.

Die natürliche Zahlenreihe erweitert sich jetzt zur **allgemeinen Zahlenreihe**, in welcher von jeder positiven oder negativen Zahl oder von Null aus unbeschränkt aufwärts und abwärts gezählt werden kann.



Jede positive Zahl ist grösser, jede negative Zahl ist kleiner als Null — und zwar ist eine positive Zahl um so grösser, dagegen eine negative Zahl um so kleiner, je grösser ihr absoluter Zahlenwerth ist.

Positive Zahlen unter sich, wie auch negative Zahlen unter sich heissen **gleichartige** Zahlen — negative und positive Zahlen heissen **entgegengesetzte** Zahlen.

Die Addition zweier gleichartigen Zahlen schafft eine Summe derselben Art:

(17)
$$(+a) + (+b) = +(a + b)$$
$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Die Addition zweier entgegengesetzten Zahlen schafft eine Differenz aus der grösseren absoluten Zahl minus der kleineren absoluten Zahl mit dem Vorzeichen des Minuenden:

(18)
$$(+a) + (-b) = +(a - b) \text{ oder } -(b - a)$$
$$(-a) + (+b) = -(a - b) \text{ oder } +(b - a)$$

Die Subtraktion einer relativen Zahl führt sich auf eine Addition mit entgegengesetztem Vorzeichen zurück:

(19)
$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b)$$

§ 10.

Ein Ausdruck, welcher entsteht, wenn man mehrere Zahlen addirt oder subtrahirt, heisst ein **Polynom** oder auch eine **algebraische Summe**, insofern immer die Subtraktion einer absoluten Zahl in eine

Addition der negativen Zahl verwandelt werden kann. So ist z. B. das Polynom

$$a + b - c + d - e - f$$

gleichwerthig mit der algebraischen Summe

$$(+a) + (+b) + (-c) + (+d) + (-e) + (-f).$$

Die einzelnen Zahlen oder Summanden heissen hierbei Glieder und unterscheidet man dieselben als positive und negative Glieder, je nachdem ihnen das Zeichen + oder — vorsteht. Der Werth eines Polynoms und also auch einer algebraischen Summe ist unabhängig von der Anordnung der Glieder [§ 7 (9)]; es ist üblich, mit einem positiven Gliede zu beginnen und dieses ohne Vorzeichen zu schreiben. Je nach der Anzahl der Glieder spricht man von Monom (1 Glied), Binom (2 Glieder), Trinom (3 Glieder), Polynom (mehrere Glieder).

Das Addiren und Subtrahiren der algebraischen Summen entspricht zu Folge vorstehender Erklärung in Verbindung mit § 9 (16) ganz der Addition und Subtraktion der Polynome und die Regel des Klammerauflösens (§ 8) lässt sich jetzt auch so aussprechen:

Eine algebraische Summe wird zu einem vorhandenen Werthe addirt, wenn man diesem die einzelnen Glieder in beliebiger Reihenfolge mit unveränderten Vorzeichen zugesellt:

$$w + \left[(+a) + (-b) + (+c)\right] = w + a - b + c; \tag{20}$$

eine algebraische Summe wird von einem vorhandenen Werthe subtrahirt, wenn man diesem die einzelnen Glieder in beliebiger Reihenfolge mit entgegengesetzten Vorzeichen zugesellt:

$$w - \left[(+a) + (-b) + (+c)\right] = w - a + b - c. \tag{21}$$

3. Multiplikation.

§ 11.

Eine Zahl a mit einer Zahl b multipliciren heisst, aus b Summanden von der Grösse a die Summe bilden. Hierbei wird a der Multiplikand, b der Multiplikator und das Ergebniss der Multiplikation das Produkt genannt. Das Operationszeichen der Multiplikation ist . (mal). In der Gleichung

$$a . b = c$$

ist a Multiplikand, b Multiplikator, a.b das Produkt und c dessen Werth. Ein Produkt ist folglich immer ein Vielfaches des Multiplikanden. Man hat also

$$a . 1 = a; \; a . 2 = a + a; \; a . 3 = a + a + a \text{ u. s. f.}$$

allgemein ist

$$a . b = a + a + a + \cdots + \text{ bis zum } b^{\text{ten}}\, a \tag{22}$$

d. h. jede Multiplikation lässt sich in eine Addition gleicher Summanden verwandeln; umgekehrt ist

(23) $$m + m + m + \cdots + \text{bis zum } n^{\text{ten}}\, m = m \cdot n$$

d. h. jede Addition gleicher Summanden lässt sich in eine Multiplikation verwandeln.

Wenn somit zwischen Multiplikand und Multiplikator ein wesentlicher Unterschied besteht, so muss umsomehr das Grundgesetz der Multiplikation überraschen: in jedem Produkte lassen sich Multiplikand und Multiplikator vertauschen. Wenn also die Gleichung gilt

$$a \cdot b = c$$

so gilt auch $$b \cdot a = c$$

(24) und folglich $$a \cdot b = b \cdot a$$

Beweis?

Wegen dieses Grundgesetzes führen Multiplikand und Multiplikator den gemeinschaftlichen Namen Faktoren. Formel (24) spricht nunmehr den Satz aus: das Produkt ist unabhängig von der Anordnung seiner Faktoren.

Die Multiplikation mit benannten Zahlen hat nur dann einen Sinn, wenn allein der Multiplikand, nie aber der Multiplikator benannt ist; das Produkt hat die Benennung des Multiplikanden.

In folgenden Fällen pflegt man das mal-Zeichen wegzulassen: man schreibt ab statt $a \cdot b$, 3m statt $3 \cdot m$, 5x statt $x \cdot 5$; — Coëfficient. —

Beim Multipliciren mehrstelliger Zifferfaktoren ist es nöthig, die Vielfachen der Zahlen 1 bis 20 zu wissen (kleines und grosses Einmaleins); im übrigen empfiehlt es sich, die Faktoren nebeneinander zu schreiben und mit der höchsten Einheit des Multiplikators zu beginnen, also die Theilprodukte nach rechts hin auszurücken; nur bei Benutzung eines Täfelchens der Vielfachen des Multiplikanden beginnt man besser mit den Einern (Napier'sche Stäbchen). — Abgekürzte Multiplikation (vergl. § 22). — Symmetrische Multiplikation.

Anmerkung: Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren nennt man eine Potenz. Z. B. $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ ist eine Potenz von a und zwar die fünfte Potenz; $b \cdot b \cdot b$ ist die dritte Potenz von b u. s. w. Man pflegt den Faktor der Potenz nur einmal hinzuschreiben und rechts oben die Ziffer, welche die Anzahl der Faktoren nennt. Also

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 \text{ (a zur fünften)}$$

$$b \cdot b \cdot b = b^3 \text{ (b zur dritten).}$$

§ 12.

Die Bedeutung des Multiplicirens mit einer natürlichen Zahl überträgt sich ohne weiteres auch auf die positive Zahl, sodass „multiplicirt mit positivem Multiplikator" heisst, es soll der Multiplikand so oft als Summand gesetzt werden, als der Multiplikator Einheiten hat. Da die negative Zahl im gegentheiligen Sinne wirkt, so wird „multiplicirt mit negativem Multiplikator“ heissen müssen, es soll der Multiplikand so oft als Subtrahend gesetzt werden, als der Multiplikator Einheiten hat.

Darnach entwickeln sich folgende vier Fälle:

$$
\begin{aligned}
&1)(+a)\cdot(+b) = +(+a)+(+a)+(+a)+\cdots = +(a+a+a+\cdots) = +(a.b) = +ab \\
&2)(-a)\cdot(+b) = +(-a)+(-a)+(-a)+\cdots = -(a+a+a+\cdots) = -(a.b) = -ab \\
&3)(+a)\cdot(-b) = -(+a)-(+a)-(+a)+\cdots = -(a+a+a+\cdots) = -(a.b) = -ab \\
&4)(-a)\cdot(-b) = -(-a)-(-a)-(-a)-\cdots = +(a+a+a+\cdots) = +(a.b) = +ab
\end{aligned} \qquad (25)
$$

und man erhält als Vorzeichen-Regel der Multiplikation: zwei relative Zahlen multiplicirt geben, wenn sie gleiche Vorzeichen haben, ein positives, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben, ein negatives Produkt — oder kurz: Zwei gleiche Vorzeichen geben plus, zwei ungleiche minus. Vorzeichenregel der Multiplikation.

Es gelten ferner folgende Entwicklungen:

$$
\begin{array}{ll}
1)\ (+a)\cdot 3 = a\cdot 4 - a & 2)\ (-a)\cdot 3 = -a\cdot 4 + a \\
(+a)\cdot 2 = a\cdot 3 - a & (-a)\cdot 2 = -a\cdot 3 + a \\
(+a)\cdot 1 = a\cdot 2 - a & (-a)\cdot 1 = -a\cdot 2 + a \\
(+a)\cdot 0 = a\cdot 1 - a = a - a = 0 & (-a)\cdot 0 = -a\cdot 1 + a = -a + a = 0 \\
3)\ 0\cdot(+b) = +0+0+0+\cdots = 0 & 4)\ 0\cdot(-b) = -0-0-0-\cdots = 0,
\end{array}
$$

woraus sich die Regel ableitet: Jede positive oder negative Zahl mit Null multiplicirt, wie auch umgekehrt, Null mit jeder positiven oder negativen Zahl multiplicirt, giebt Null. In Formel:

$$
\begin{aligned}
\pm z\cdot 0 &= 0 \\
0\cdot \pm x &= 0
\end{aligned} \qquad (26)
$$

Ist ein Produkt Bestandtheil einer algebraischen Summe, so muss es als ein Glied gerechnet werden. Z. B.

$a + b\cdot c - d$ oder $16\cdot 5 - 42 + 37x$ ist dreigliederig

und $m\cdot n - pq$ „ $136z + 2\cdot 5$ ist zweigliederig.

§ 13.

Folgende Sätze gestatten — einzeln oder combinirt oder wiederholt angewendet — die Auflösung aller jetzt aufzustellenden Multiplikationsaufgaben und deren Umkehrungen.

1. Eine algebraische Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied einzeln mit der Zahl multiplicirt und die entstandenen Produkte addirt oder subtrahirt, je nachdem die Vorzeichenregel der Multiplikation (22) zur Geltung kommt:

$$(a + b - c - d)\cdot z = az + bz - cz - dz \qquad (27)$$

umgekehrt ist

$$a\cdot(m - n + p - q) = am - an + ap - aq;\ \text{in Worten?} \qquad (27^*)$$

2. Produkte, welche einen gleichen Faktor haben, werden addirt bez. subtrahirt, indem man die ungleichen Faktoren addirt bez. subtrahirt und die entstandene algebraische Summe mit dem gleichen Faktor multiplicirt: Satz des Faktorenzeichens.

$$ax + bx - cx - dx = (a + b - c - d)\cdot x \qquad (28)$$

3. Algebraische Summen werden miteinander multiplicirt, indem man jedes Glied der einen algebraischen Summe mit jedem Glied der anderen algebraischen Summe multiplicirt und die entstandenen Produkte addirt oder subtrahirt, je nachdem die Vorzeichenregel der Multiplikation zur Geltung kommt:

(29)
$$\begin{aligned}(a - b + c - d) \cdot (m - n + p) = {} & am - bm + cm - dm \\ & - an + bn - cn + dn \\ & + ap - bp + cp - dp\end{aligned}$$

4. Hat man ein Produkt mit einer Zahl zu multipliciren, oder umgekehrt, so wird die Zahl den Faktoren des Produkts als neuer Faktor zugesellt:

(30) $$ab \cdot c = ac \cdot b = a \cdot bc = abc$$

Dieser Satz erweitert die Grundregel der Multiplikation dahin, dass auch bei drei und mehr Faktoren das Produkt unabhängig ist von der Anordnung derselben. Bei Buchstabenfaktoren pflegt man alphabetische Reihenfolge einzuhalten.

4. Division.

§ 14.

Die Division löst die Aufgabe, aus Produkt und dessen einem Faktor den anderen Faktor zu bestimmen. Eine Zahl a durch eine Zahl b dividiren heisst mithin, diejenige Zahl finden, welche mit b multiplicirt das Produkt a giebt. Hierbei wird a der Dividend, b der Divisor und das Ergebniss der Division Quotient genannt. Das Operationszeichen der Division ist : (dividirt durch).

In der Gleichung

$$a : b = c$$

ist a Dividend, b Divisor, a : b der Quotient und c dessen Werth. Man findet c auf zweifache Weise, je nachdem der Faktor b als Multiplikand oder als Multiplikator des Produktes gedacht wird.

Ist b Multiplikand, so muss diese Zahl b von a so oft als möglich subtrahirt werden und die Division hat dann den Charakter einer Messung, durch welche festgestellt wird, wie oft b in a enthalten ist; bedeutet b den Multiplikator, so muss a in soviele gleiche Summanden zerlegt werden, als b Einheiten hat, und dann besitzt die Division den Charakter einer Theilung, durch welche die Grösse eines jener b Summanden ermittelt wird.

Jedenfalls ist der Quotient c richtig gefunden, wenn die Gleichung erfüllt wird

Quotient mal Divisor = Dividend,

also $c \cdot b = a;$

(31) daraus folgt $(a : b) \cdot b = a,$

welche Formel erkennen lässt, dass die Division eine der Multiplikation entgegengesetzte Rechnungsart und zwar in solcher Weise ist, dass auch gilt

$$(a \cdot b) : b = a \tag{31*}$$

d. h. eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer anderen erst dividirt und dann wieder multiplicirt, oder umgekehrt. — Division und Multiplikation mit gleichen Zahlen heben sich auf.

Wegen der Grundregel der Multiplikation (24) folgt: bei einer Division lassen sich Divisor und Quotient vertauschen, also gilt drittens

Dividend durch Quotient = Divisor.

§ 15.

In vorstehender Erklärung der Division wurde der Dividend als ein Vielfaches des Divisors gedacht und es musste folglich der Quotient eine ganze Zahl sein; man sagt in diesem Falle: die Division geht auf. Sind indess zwei beliebige Zahlen zur Division gegeben, so wird in den meisten Fällen die Division nicht aufgehen. Verfährt man dabei im Sinne des Messens, so ergiebt sich eine ganze Zahl und ein Rest, welcher grösser als Null und kleiner als der Divisor ist; verfährt man im Sinne des Theilens, so muss der Dividend in eine gebrochene Zahl umgewandelt werden und es ergiebt sich ein Bruch, dessen Zähler dem Dividenden und dessen Nenner dem Divisor gleich ist. Angenommen die Division a durch b geht nicht auf, so hat man

entweder $a : b = c$ mit einem Reste r,

$$\text{wobei dann} \begin{cases} bc + r = a \\ (a - r) : c = b \end{cases} \text{ist (Probe);}$$

oder $$a : b = \frac{ab}{b} : b = \frac{a}{b}$$

Im übrigen ist es für die theoretische Arithmetik gleichbedeutend, ob das Ergebniss der Division als Quotient oder als Bruch aufgefasst wird. Die Formeln (31) lassen sich daher auch so schreiben:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

$$\text{und} \qquad \frac{ab}{b} = a \tag{32}$$

d. h. multiplicirt man einen Bruch mit seinem Nenner, so entsteht der Zähler, und: ist der Zähler ein Vielfaches des Nenners, so ist der Bruch einer ganzen Zahl gleich.

Bei der Division zweier Zifferzahlen wird meist im Sinne des Messens verfahren, also der Divisor wiederholt subtrahirt; hierbei gewährt die ergänzende Subtraktionsmethode den Vortheil, die Hinschreibung der

Theilprodukte unnöthig zu machen, vielmehr gleich die Reste hinsetzen zu können. — Abgekürzte Division (vergl. 22).

Die Division mit gleichartigen, gleichbenannten Zahlen ergibt, wenn sowohl Dividend als Divisor benannt sind, eine unbenannte Zahl, die sogenannte Verhältnisszahl; wenn nur der Dividend benannt ist, trägt der Quotient die gleiche Benennung. Eine Division, bei welcher allein der Divisor benannt wäre, ist unmöglich.

Tritt ein Quotient oder Bruch als Bestandtheil einer algebraischen Summe auf, so gilt er als ein Glied. Z. B.

$$a + b : c - d \text{ und } \frac{m}{n} - pq + \frac{xy}{z} \text{ ist dreigliedrig.}$$

§ 16.

Aus $a \cdot 1 = a$ (§ 11) folgt jetzt

(33) $$a : a = 1$$

(33*) und $$a : 1 = a$$

d. h. jede Zahl durch sich selbst dividirt, gibt Eins — und: eine Zahl durch Eins dividirt, bleibt unverändert.

Wenn ein Produkt pq eine unveränderliche Grösse behalten soll (constante Zahl), während der eine Faktor p beständig kleiner wird, so muss nothwendiger Weise der andere Faktor q beständig grösser werden. Dieser Satz, auf die Division übertragen, gibt die Folgerung: Ein Quotient (Bruch) wird um so grösser, je kleiner der Divisor (Nenner) ist. Ist Null der Divisor, so ist der Quotient eine unendlich grosse Zahl (∞). Dies führt auf die Formeln

(33**) $$a : 0 = \infty \qquad a : \infty = 0 \qquad 0 : a = 0$$

In Worten?

Gestützt auf die Formeln 25 (§ 12) leitet sich bezüglich der Division zweier relativen Zahlen folgende Vorzeichenregel der Division ab: Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen geben einen positiven, zwei Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen einen negativen Quotienten — oder kurz: zwei gleiche Vorzeichen geben plus, zwei ungleiche minus:

Vorzeichenregel der Division.

(34)
$$(+a) : (+b) = +(a : b) \qquad \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$
$$(+a) : (-b) = -(a : b) \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$
oder
$$(-a) : (+b) = -(a : b) \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$
$$(-a) : (-b) = +(a : b) \qquad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$$

§ 17.

Es gelten nunmehr folgende Divisions- bez. Bruchrechnungssätze:

1) Eine algebraische Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man jedes Glied einzeln dividirt und die entstandenen Quotienten addirt oder subtrahirt, je nachdem die Vorzeichenregel dies verlangt:

$$(a + b - c) : d = a : d + b : d - c : d$$

$$\frac{a + b - c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} \qquad (35)$$

2) Brüche (Quotienten), welche gleiche Nenner (Divisoren) haben, werden addirt bez. subtrahirt, wenn man die Zähler (Dividenden) addirt oder subtrahirt:

$$\frac{a}{n} - \frac{f}{n} + \frac{k}{n} = \frac{a - f + k}{n} \qquad (36)$$

3) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, indem man irgend einen Faktor durch die Zahl dividirt:

$$abc : z = (a : z) \cdot bc = a \cdot (b : z) \cdot c = ab \cdot (c : z)$$

$$\frac{mn}{x} = \frac{m}{x} \cdot n = m \cdot \frac{n}{x} \qquad (37)$$

Folgerung: Hat man mit einigen Zahlen zu multipliciren und mit anderen zu dividiren, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht.

4) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, indem man mit den Faktoren einzeln nach einander dividirt:

$$a : bc = (a : b) : c$$

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c \qquad (38)$$

5) Ein Bruch (Quotient) wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Zähler (Dividend) multiplicirt:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \qquad (39a)$$

Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einem Bruche (Quotienten) multiplicirt, indem man sie mit dem Zähler (Dividend) multiplicirt und mit dem Nenner (Divisor) dividirt:

$$z \cdot \frac{m}{n} = \frac{zm}{n} \qquad (40)$$

6) Ein Bruch (Quotient) wird durch eine Zahl dividirt, indem man seinen Zähler (Dividend) durch die Zahl dividirt, vorausgesetzt, dass diese Division aufgeht — andernfalls wird der Nenner (Divisor) mit der Zahl multiplicirt:

$$\frac{a}{b} : f = \frac{a : f}{b} \qquad (41a)$$

oder

$$\frac{a}{b} : f = \frac{a}{bf} \qquad (41b)$$

Folgerung aus (41a): Hat man mit zwei Zahlen nach einander zu dividiren, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge man dies thut.

7) Ein Bruch (Quotient) wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Nenner (Divisor) durch die Zahl dividirt, vorausgesetzt, dass diese Division aufgeht (vergl. [5]):

(39b) $$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b:c}$$

8) Eine Zahl wird durch einen Bruch (Quotienten) dividirt, indem man sie mit dem Zähler (Dividend) dividirt und mit dem Nenner (Divisor) multiplicirt:

(42) $$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} \cdot n = \frac{an}{m}$$

9) Ein Bruch (Quotient) wird mit einem Bruche (Quotient) multiplicirt, indem man Zähler (Dividend) mit Zähler (Dividend) und Nenner (Divisor) mit Nenner (Divisor) multiplicirt:

(43) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$$

10) Ein Bruch (Quotient) wird durch einen Bruch (Quotienten) dividirt, indem man den Zähler (Dividend) des ersteren mit dem Nenner (Divisor) des letzteren und den Nenner (Divisor) des ersteren mit dem Zähler (Dividend) des letzteren multiplicirt:

(44) $$\frac{c}{d} : \frac{p}{q} = \frac{cq}{dp}$$

11) Ein Bruch (Quotient) bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man Zähler (Dividend) und Nenner (Divisor) gleichzeitig mit derselben Zahl multiplicirt (erweitert) oder dividirt (kürzt):

(45) $$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

12) Produkte, welche gleiche Faktoren haben, werden durch einander dividirt, indem man nur die ungleichen Faktoren dividirt:

(46) $$\frac{abcd}{bdfg} = \frac{ac}{fg}$$

Man sagt, die gleichen Faktoren heben sich.

13) Brüche (Quotienten) mit gleichen Nennern (Divisoren) werden dividirt, indem man nur die Zähler (Dividenden) dividirt:

(47) $$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$$

oder: Brüche mit gleichen Nennern verhalten sich wie die Zähler.

14) Hat man Brüche mit ungleichen Nennern zu addiren bez. subtrahiren, so bringe man sie mittelst des Erweiterns auf gleichen Nenner (Generalnenner) und verfahre dann nach Formel (35)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{f}{g}=\frac{adg+bcg-bdf}{bdg} \quad \text{(vergl. § 19 Schluss)} \qquad (48)$$

15) Hat man eine algebraische Summe durch eine andere algebraische Summe zu dividiren, so achte man zunächst darauf, die Glieder beider möglichst nach gleichem Gesetze zu ordnen und dividire dann das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors, multiplicire hierauf mit dem erhaltenen Quotienten sämmtliche Glieder des Divisors und subtrahire die erhaltenen Einzelprodukte vom Dividendus; dann dividire man das erste Glied des Restes wieder durch das erste Glied des Divisors, multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten abermals sämmtliche Glieder des Divisors und subtrahire die entstehenden Einzelprodukte vom jetzigen Dividenden; dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis die Division aufgeht oder bis der als algebraische Summe erhaltene Quotient sammt dem letzten Reste dem Zwecke der Aufgabe genügt.

II. Abtheilung.

Theilbarkeit der Zahlen; grösster gemeinschaftlicher Theiler, kleinstes gemeinschaftliche Vielfache. Näherungswerthe.

§ 18.

Geht die Division einer (ganzen) Zahl a durch eine (ganze) Zahl b auf, so heisst a ein Vielfaches von b — und umgekehrt: b ein aliquoter Theil oder ein Theiler oder ein Maass von a; man sagt auch, a kann durch b getheilt werden. Darnach lassen sich die Zahlen als einfache und zusammengesetzte Zahlen unterscheiden. Unter einfachen Zahlen, Primzahlen genannt, versteht man diejenigen Zahlen, welche nur durch sich selbst und durch 1 theilbar sind; jede Zahl, welche ausser durch sich selbst und durch 1 noch durch eine oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heisst eine zusammengesetzte Zahl. Alle Zahlen, welche ein Vielfaches von 2 sind, heissen gerade Zahlen, die übrigen ungerade. Alle Primzahlen ausser der 2 sind ungerad.

Die Primzahlen von 1 bis 200?

Ist eine Zahl Theiler mehrerer Zahlen, so heisst sie der gemeinschaftliche Theiler derselben; die 1 ist folglich gemeinschaftlicher Theiler aller Zahlen. Zwei oder mehrere Zahlen, welche ausser der 1 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heissen relative Primzahlen. Ein Theiler einer Zahl ist auch Theiler irgend eines Vielfachen dieser Zahl.

Die äusseren Kennzeichen für die Theilbarkeit einer Zahl sind folgende:

theilbar durch 2, wenn der Einer eine gerade Zahl oder Null ist,
" " 3, " die Quersumme durch 3 theilbar ist,
" " 4, " die vom Zehner und Einer gebildete Zahl durch 4 theilbar ist,
" " 5, " der Einer eine Fünf oder Null ist,
" " 8, " die vom Hunderter, Zehner und Einer gebildete Zahl durch 8 theilbar ist,
" " 9, " die Quersumme durch 9 theilbar ist,
" " 11, " die Quersumme der ungeraden Stellen gleich ist der Quersumme der geraden Stellen oder wenn die eine Quersumme die andere um 11 oder ein Vielfaches von 11 übertrifft.

Hat eine Zahl gleichzeitig zwei oder mehrere dieser Kennzeichen, so ist sie durch das Produkt der betreffenden Maasse theilbar; so lässt sich z. B. eine Zahl durch 12 theilen, wenn sie durch 3 und 4 getheilt werden kann.

Um alle Primzahlen zu finden, durch welche sich eine gegebene Zahl theilen lässt — oder wie man auch sagt: um eine gegebene Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen — dividire man sie zuerst durch ihren kleinsten Theiler, den erhaltenen Quotienten wieder durch seinen kleinsten Theiler und wiederhole dieses Verfahren solange, bis der Quotient 1 entsteht. Nunmehr lassen sich auch alle zusammengesetzten Zahlen angeben, durch welche die gegebene Zahl theilbar sein muss, indem man von dem Satze Gebrauch macht: Ein Produkt ist sowohl durch jeden seiner Faktoren, als auch durch die aus den Faktoren zu bildenden Produkte theilbar.

§ 19.

Hat man zu untersuchen, ob zwei oder mehrere Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so zerlege man die Zahlen in ihre Primfaktoren: alle diejenigen Primfaktoren, welche gemeinschaftlich sind, sowie die aus ihnen sich bildenden Produkte sind gemeinschaftliche Theiler der Zahlen und das Produkt, welches sich aus sämmtlichen gemeinschaftlichen Theilern bildet, ist der grösste gemeinschaftliche Theiler.

Um für zwei Zahlen den grössten gemeinschaftlichen Theiler aufzufinden, kann man auch so verfahren, dass man die grössere Zahl durch die kleinere dividirt und den Rest bestimmt, hierauf die kleinere Zahl durch die Restzahl dividirt und den neuen Rest bestimmt, hierauf den ersten Rest durch den neuen Rest dividirt u. s. f. bis der Rest 0 entsteht. Der letzte Divisor ist der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen. Ist dieser letzte Divisor die Eins, so sind die beiden Zahlen relativ prim.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch jede der gegebenen Zahlen theilbar ist. Um diese Zahl aufzufinden, zerlege man die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und bilde das Produkt aller gemeinschaftlichen und nicht gemeinschaftlichen Faktoren oder man nehme von jedem Primfaktor die höchste vorkommende Potenz desselben und bilde das Produkt dieser Potenzen.

Der Generalnenner zu addirender bez. subtrahirender Brüche, welche ungleiche Nenner haben, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Nenner. Vergl. § 17, Satz 14.

§ 20.

Näherungswerthe für einen Bruch, dessen Zähler und Nenner grössere Zahlen sind und welcher sich nicht kürzen lässt, sind solche Brüche, welche den Werth des gegebenen Bruches in den kleinsten Zahlen möglichst genau angeben. So sind z. B. $\frac{1}{8}$ und $\frac{2}{17}$ Näherungswerthe für den Bruch $\frac{1485}{12637}$.

Um solche Näherungswerthe aufzufinden, kürze man den gegebenen Bruch durch seinen eignen Zähler und den im Nenner entstehenden Restbruch kürze man wieder durch seinen Zähler und den jetzt im Nenner des Restbruches entstehenden neuen Restbruch kürze man wieder durch seinen Zähler u. s. f. bis einmal die Division eines Nenners durch seinen Zähler aufgeht. Es wird auf diese Weise der gegebene Bruch in einen Kettenbruch verwandelt. So ist z. B.

$$\frac{1485}{12637} = \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Die der Reihe nach gewonnenen Quotienten (8, 1, 1, 25, 9, 1, 2) heissen die Glieder des Kettenbruchs. Bricht man den Kettenbruch bei irgend einem Gliede ab und rechnet ihn in einen gemeinen Bruch um, so erhält man einen Näherungswerth. Vorstehender Kettenbruch, nach dem ersten Gliede abgebrochen, gibt als 1. Näherungswerth $\frac{1}{8}$; nach dem zweiten Gliede abgebrochen, erhält man als 2. Näherungswerth $\cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1}} = \frac{1}{9}$; als 3., 4., 5. und 6. Näherungswerth entstehen $\frac{2}{17}$.

$\frac{51}{434}, \frac{461}{3923}, \frac{512}{4357}$. Von den aufeinander folgenden Näherungswerthen ist der erste kleiner, der zweite grösser, der dritte wieder kleiner, der vierte grösser u. s. f. als der gegebene Bruch; es liegt daher der Werth des gegebenen Bruches immer zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen, so zwar, dass jeder folgende Näherungswerth dem Werthe des gegebenen Bruches näher kommt, als der vorhergehende.

Anmerkung. — Für das praktische Rechnen genügt zur Bestimmung eines Näherungswerthes die Verwandlung des gemeinen Bruches in einen Dezimalbruch und dessen zweckmässige Abkürzung. (Vergl. § 21, 5 und § 22.)

Dezimalbruchrechnung.

§ 21.

Da ein Dezimalbruch seinem Wesen nach nichts anderes ist, als eine ganze Zahl auch ist, nämlich eine nach dekadischem Systeme ausgemessene und dargestellte Zahlengrösse, so übertragen sich die Rechenmethoden der ganzen Zahlen ohne weiteres auf die Dezimalbruchrechnung, nur dass man hier der richtigen Setzung des Dezimalkommas besondere Aufmerksamkeit zu schenken hat.

§ 11, Anmerkung, gestattet die Erklärung abzugeben: ein Dezimalbruch ist ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz der Zahl 10 ist.

Für die Dezimalbruchrechnung gelten folgende Regeln:

1) Ein Dezimalbruch bleibt ungeändert, wenn man ihm rechts eine oder mehrere Nullen anhängt; verschiedenstellige Dezimalbrüche lassen sich also leicht gleichnamig machen.

2) Um Dezimalbrüche zu addiren bez. zu subtrahiren, schreibe man dieselben so unter einander, dass Komma unter Komma zu stehen kommt und addire bez. subtrahire hierauf, wie mit ganzen Zahlen; das Resultat erhält das Komma an derselben Stelle. Darnach wird man auch leicht im Stande sein, neben einander stehende Dezimalbrüche zu addiren und zu subtrahiren.

3) Um einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. f. zu multipliciren oder durch 10, 100, 1000 u. s. f. zu dividiren, rücke man das Komma um 1, 2, 3 u. s. f. Stellen nach rechts bez. nach links.

4) Um zwei Dezimalbrüche miteinander zu multipliciren, multiplicire man zunächst ohne Rücksicht auf das Komma, wie mit ganzen Zahlen und schneide im Produkte so viele Bruchstellen ab, als die Faktoren zusammen haben. Diese Regel gilt auch für die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem Dezimalbruche, oder umgekehrt.

Soll die Division zweier ganzer Zahlen durcheinander auf Dezimalbrüche übergeführt werden, so ist diese Rechnung gleichbedeutend mit der Lösung der Aufgabe

5) einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln. Man ermittele zunächst die Ganzen des Quotienten und setze hinter diese das Komma; ist der Dividend kleiner als der Divisor, so beginnt der Quotient mit 0 Ganzen. Dann setze man die Division unter beständiger Anhängung von Nullen an den Rest fort. Es können nun zwei Fälle eintreten, entweder die Division geht auf, wenn nämlich der Divisor keine anderen Primfaktoren enthält, als 2 oder 5, oder die Division geht nicht auf.

Im letzteren Falle zeigt sich die Erscheinung, dass von irgend einer Stelle an die nämlichen Ziffern in der nämlichen Reihenfolge wiederkehren. Ein solcher Dezimalbruch heisst ein periodischer Dezimalbruch und die wiederkehrenden Ziffern bilden die Periode. Je nachdem der Dezimalbruch sogleich hinter dem Komma oder erst an späterer Stelle mit der Periode beginnt, unterscheidet man rein periodische und gemischt periodische Dezimalbrüche.

Rationale und irrationale Dezimalbrüche.

6) Um einen Dezimalbruch durch einen Dezimalbruch zu dividiren, mache man, sofern dies nicht schon der Fall ist, beide gleichnamig, indem man dem weniger Stellen habenden Bruch entsprechend Nullen anhängt, und dividire dann unter Weglassen der Komma, wie mit ganzen Zahlen.

Setzt man hinter eine ganze Zahl ein Komma und hängt Nullen an, so bleibt ihr Werth unverändert, aber sie kann jetzt als Dezimalbruch behandelt werden. Auf diese Weise gilt obige Divisionsregel auch für „ganze Zahl durch Dezimalbruch“ und umgekehrt.

7) Um einen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, bedarf es besonderer Regeln nur für den Fall, dass der Dezimalbruch ein periodischer ist; dieselben lauten

für einen rein periodischen Dezimalbruch: schreibe die Periode als Zähler und als Nenner soviele Neunen, als die Periode Stellen hat;

für einen gemischt periodischen Dezimalbruch: schreibe in den Zähler den Dezimalbruchzähler bis einschliesslich der ersten Periode minus der Zahl, welche von den vor der ersten Periode stehenden Bruchstellen gebildet wird — und als Nenner soviele Neunen, als die Periode Stellen hat mit sovielen Nullen daran, als der Periode Bruchstellen vorausgehen.

§ 22.

Die in der Praxis zur Verwerthung kommenden Zahlengrössen werden genau bis auf nur wenige Stellen des Dezimalbruches gefordert.

Ist nun ein Dezimalbruch genauer angegeben, als er gebraucht wird, so kürzt man denselben ab, d. h. von einer gewissen Stelle an streicht man die letzten Ziffern des Bruches weg; dabei ist die letzte der beibehaltenen Ziffern um eine Einheit zu erhöhen, wenn die folgende also zunächst gestrichene Ziffer 5 oder grösser als 5 ist.

Beim Rechnen mit solchen abgekürzten oder unvollständigen Dezimalbrüchen bestimmt man das Resultat immer auf eine Stelle mehr, als verlangt wird, um eben zu wissen, ob die letzte geltende Ziffer des Bruches zu erhöhen ist oder nicht.

Die Addition und Subtraktion unvollständiger Dezimalbrüche geschieht wie die der vollständigen Dezimalbrüche.

Bei der Multiplikation kann von einem Abkürzen nur dann die Rede sein, wenn die Faktoren zusammen mehr Dezimalstellen haben, als für das Produkt verlangt werden. In solchem Falle rechne man nach folgender Regel: Ist der Multiplikator ein unechter Dezimalbruch, so benutze man vom Multiplikanden so viele Bruchstellen, als die Anzahl der verlangten plus der Anzahl der ganzen Stellen des Multiplikators beträgt. Ist der Multiplikator ein echter Dezimalbruch, so benutze man vom Multiplikanden nur soviele Bruchstellen als die Anzahl der verlangten minus der Anzahl der im Multiplikator unmittelbar hinter dem Komma stehenden Nullen beträgt. Im übrigen beginne man die Multiplikation mit der höchsten Stelle des Multiplikators und kürze bei jeder folgenden Multiplikation den Multiplikanden um eine Stelle, so dass die letzten Stellen aller Theilprodukte unter einander zu stehen kommen; auch beachte man, ob wegen einer gekürzten Ziffer die letzte geltende Ziffer zu erhöhen ist.

Für die abgekürzte Division gelten folgende Regeln: Man rücke das Komma in beiden Dezimalbrüchen um soviele Stellen nach rechts, als der Divisor Bruchstellen hat und dividire wie gewöhnlich. Nachdem die Einer des Dividenden benutzt sind, kürze man den Divisor nach und nach um eine Stelle, ziehe also zu keinem Reste eine Ziffer des Dividenden herunter und hänge auch keine Nullen an, berücksichtige jedoch bei der Bildung des Theilproduktes die gestrichene Ziffer bezüglich ihres Einflusses auf die letzte geltende Ziffer. Damit der Quotient immer die verlangte Anzahl Dezimalstellen bekommt, muss der Divisor mindestens 2 Ziffern mehr haben, als jene verlangte Anzahl; man beginne daher nöthigenfalls die Abkürzung um soviele Stellen später, als der Divisor zu wenig Ziffern hat, hänge also, wenn die Ziffern des Dividenden nicht ausreichen, entsprechend Nullen an denselben.

Sind Dividend und Divisor selbst unvollständige Dezimalbrüche, so wird die erste Stelle des Quotienten wie gewöhnlich bestimmt und hierauf das abgekürzte Verfahren sofort begonnen. Ist der Divisor genauer, als der Dividend, so muss er soweit abgekürzt werden, dass das erste Theilprodukt vom Dividend subtrahirt werden kann. Ist dagegen der Dividend genauer als der Divisor, so ist ersterer auf soviele Stellen abzukürzen, als zur Subtraktion des ersten Theilproduktes gebraucht werden und hierauf das abgekürzte Verfahren vorzunehmen.

Reciproke Zahlen.

§ 23.

Zwei Zahlen, deren Produkt = 1 ist, heissen reciproke Zahlen und die eine wird die Reciproke der anderen genannt. So ist z. B.

$$\text{zu } 3 \text{ die Reciproke} = \frac{1}{3}, \text{ weil } 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ ist,}$$

$$\text{„ } \frac{7}{5} \text{ „ „ } = \frac{5}{7}, \text{ „ } \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1 \text{ „}$$

$$\text{„ } \frac{1}{8} \text{ „ „ } = 8, \text{ „ } \frac{1}{8} \cdot 8 = 1 \text{ „}$$

Zu einer gegebenen Zahl wird die Reciproke gefunden, wenn man 1 durch die gegebene Zahl dividirt.

Man hat zu den ganzen Zahlen von 1 bis 1000 die Reciproken in Form fünfstelliger Dezimalbrüche berechnet und die reciproken Zahlen paarweise in einer Tabelle zusammengestellt, so dass man diese gelegentlich mit Vortheil benutzen kann, gestützt auf den Satz: Statt durch eine Zahl zu dividiren, kann man auch mit ihrer Reciproken multipliciren. Sind z. B. eine grössere Anzahl Divisionen mit immer demselben Divisor auszuführen, so bestimme man sich die Reciproke des Divisors, berechne deren Vielfachen bis zum Neunfachen und kann nun sämmtliche Divisionen in schnell auszuführende Multiplikationen umwandeln.

Die Reciproke einer ganzen Zahl beginnt mit so vielen Nullen, die Null vor dem Komma mitgerechnet, als die ganze Zahl Stellen hat, umgekehrt hat die Reciproke eines echten Dezimalbruches soviele ganze Stellen, als der Bruch Anfangsnullen hat, die Null vor dem Komma mitgerechnet.

III. Abtheilung.

Quadrat und Quadratwurzel, Cubus und Cubikwurzel.

§ 24.

Das Produkt aus den zwei gleichen Faktoren a schreibt man a^2 (a zur zweiten, a Quadrat) und nennt es die Quadratzahl von a oder kurz: das Quadrat dieser Zahl; a ist die Basis des Quadrats. Eine Zahl a quadriren heisst, sie mit sich selbst multipliciren.

Die Quadrate aller Zahlen, der positiven sowohl als der negativen sind positiv; in Formel

(49) $$(+a)^2 = +(a^2)$$
$$(-a)^2 = +(a^2)$$

Das Quadrat eines Binomens besteht aus drei Gliedern: aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkte beider Glieder und aus dem Quadrate des zweiten Gliedes; in Formel

(50) $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Das Quadrat eines n gliedrigen Polynomens besteht aus $\frac{n.(n+1)}{2}$ Gliedern: aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus den doppelten Produkten des ersten Gliedes mit jedem folgenden Gliede, aus dem Quadrate des zweiten Gliedes, aus den doppelten Produkten des zweiten Gliedes mit jedem folgenden Gliede u. s. f., schliesslich aus dem Quadrate des letzten Gliedes; in Formel

(51) $$(a+b-c-d+\cdots+z)^2 = \begin{cases} +a^2+2ab-2ac-2ad+\cdots\cdots+2az \\ +b^2-2bc-2bd+\cdots\cdots+2bz \\ +c^2+2cd-\cdots\cdots-2cz \\ +d^2-\cdots\cdots-2dz \\ \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \\ +z^2 \end{cases}$$

Ein Produkt wird quadrirt, indem man jeden Faktor einzeln quadrirt:

(52) $$(a.b)^2 = a^2.b^2$$

Ein Quotient (Bruch) wird quadrirt, indem man Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) einzeln quadrirt:

(53) $$(a:b)^2 = a^2:b^2$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Quadrate werden mit einander multiplicirt bez. durch einander dividirt, indem man die Multiplikation bez. Division an den Basen ausführt und hinterher quadrirt:

(54) $$m^2.n^2 = (m.n)^2$$
$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

§ 25.

Eine Zahl, deren Quadrat eine gegebene Grösse hat, nennt man die Quadratwurzel aus der gegebenen Zahl. Aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen, heisst, die Zahl in zwei gleiche Faktoren zerlegen. Man bezeichnet die Quadratwurzel aus a mit

$$\sqrt{a}$$

und nennt in diesem Ausdrucke a den Radikanden.

Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist zweideutig d. h. kann ebensowohl positiv als negativ angenommen werden.

Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist unmöglich, da sie weder durch eine positive, noch negative Zahl, noch durch Null angegeben werden kann.

Reelle und imaginäre Ausdrücke. — Rationale und irrationale Wurzeln. —

Das Quadriren und das Quadratwurzelziehen sind entgegengesetzte Rechnungsarten, daher die Formeln:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a \qquad (55)$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

Aus einem Binomen kann niemals die Quadratwurzel gezogen werden (vergl. Formel 49, 50 und 51).

Aus einem Produkt wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus den Faktoren einzeln zieht:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad (56)$$

Aus einem Quotienten (Bruch) wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) einzeln zieht:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (57)$$

Quadratwurzeln werden mit einander multiplicirt bez. durch einander dividirt, indem man die Multiplikation bez. Division an den Radikanden ausführt und hinterher die Wurzel zieht:

$$\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{m \cdot n}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad (58)$$

Das numerische Ausziehen der Quadratwurzel beginnt damit, dass man die Zahl in den Ganzen von rechts nach links und in den Dezimalen von links nach rechts von 2 zu 2 Stellen abtheilt. Hierauf zieht man aus der ersten Zifferngruppe links, welche ebensowohl aus 2 als auch aus nur einer Ziffer bestehen kann, die Wurzel, d. h. man gibt diejenige einstellige Zahl an, deren Quadrat gleich der Gruppenzahl ist oder ihr so nahe wie möglich kommt. Nennt man die gefundene Zahl a, so liegt nunmehr das weitere Verfahren in der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, insofern man a^2 subtrahirt, zum Reste die nächste Ziffer des Radikanden heruntersetzt und durch 2a dividirt, wodurch man die zweite Ziffer b der gesuchten Wurzel findet und nun 2ab subtrahirt; nachdem zum Reste die nächste Ziffer des Radikanden heruntergesetzt ist, wird b^2 subtrahirt. Die aus den Ziffern a und b gebildete Zahl ist für die Folge das neue a der Formel, nach welcher sich das Verfahren wiederholt. Statt die beiden Glieder 2ab und b^2 nacheinander kann man auch $(2a + b) \cdot b$ auf einmal subtrahiren, es würden in diesem Falle stets zwei Ziffern des Radikanden heruntergesetzt werden müssen. Bei Anwendung der ergänzenden Subtraktion vermindert sich die Anzahl der zur Rechnung nöthigen Ziffern erheblich.

Beispiel: $\sqrt{579,653\,776}$;

$$\sqrt{5|79,|65|37|76} = \overset{a\,b}{24},076$$

$$\begin{array}{rl} a^2 = & 4 \\ & 17 : 2a = 4 \\ 2ab = & 16 \\ & 19 \\ b^2 = & 16 \\ & 36 : 48 \\ & 3653 : 480 \\ & 3360 \\ & 2937 \\ & 49 \\ & 28887 : 4814 \\ & 28884 \\ & 36 \\ & 36 \end{array}$$

$$\sqrt{5|79,|65|37|76} = 24,076$$

$$\begin{array}{l} 179 : 44 \\ 365 : 48 \\ 36537 : 4807 \\ 288876 : 48146 \end{array}$$

Beim Quadratwurzelziehen aus einer algebraischen Summe wird das gleiche Verfahren zur Anwendung gebracht.

§ 26.

Das Produkt aus den drei gleichen Faktoren a schreibt man a^3 (a zur dritten) und nennt es eine Kubikzahl. Eine Zahl a kubiren heisst, sie mit ihrer Quadratzahl multipliciren.

Die Kubikzahlen der positiven Zahlen sind wieder positive, die Kubikzahlen der negativen Zahlen sind wieder negative Zahlen:

(59) $$(+a)^3 = +a^3 \qquad (-a)^3 = -a^3$$

Ferner gelten folgende Formeln:

(60) $$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

(61) $$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3 \text{ und } (a : b)^3 = a^3 : b^3$$

(62) $$a^3 \cdot b^3 = (ab)^3 \text{ und } a^3 : b^3 = (a : b)^3$$

Eine Zahl, deren Kubus eine vorgeschriebene Grösse hat, nennt man die Kubikwurzel aus der gegebenen Zahl. Aus einer Zahl die Kubikwurzel ziehen heisst, die Zahl in drei gleiche Faktoren zerlegen.

Man bezeichnet die Kubikwurzel aus a mit

$$\sqrt[3]{a}$$

und nennt in diesem Ausdrucke a den Radikanden.

Die Kubikwurzeln aus positiven Zahlen sind wieder positive, die Kubikwurzeln aus negativen Zahlen sind wieder negative Zahlen:

$$\sqrt[3]{+z} = +\sqrt[3]{z} \qquad (62)$$

$$\sqrt[3]{-z} = -\sqrt[3]{z}$$

Rationale und irrationale Kubikwurzeln. —

Das Kubiren und das Kubikwurzelziehen sind entgegengesetzte Rechnungsarten, daher die Formeln:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a \qquad (63)$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

Ferner gelten die Formeln:

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ und } \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b} \qquad (64)$$

und deren Umkehrungen.

Das numerische Ausziehen der Kubikwurzel beginnt damit, dass man die Zahl in den Ganzen von rechts nach links und in den Dezimalen von links nach rechts von 3 zu 3 Stellen abtheilt. Hierauf zieht man aus der ersten Zifferngruppe links, welche sowohl 3- als 2- als auch 1 stellig sein kann, die Kubikwurzel d. h. man gibt diejenige einstellige Zahl an, deren Kubus gleich der Gruppenzahl ist oder ihr so nahe wie möglich kommt. Nennt man die gefundene Zahl a, so liegt nunmehr das weitere Verfahren in der Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, insofern man a^3 subtrahirt, zum Reste die nächste Ziffer des Radikanden herunterstellt und durch $3a^2$ dividirt, wodurch man die zweite Ziffer b der gesuchten Kubikwurzel findet und dann $3a^2b$ subtrahirt; weiter subtrahirt man unter jedesmaligem Heruntersetzen einer Ziffer des Radikanden die Glieder $3ab^2$ und b^3. Die aus den Ziffern a und b gebildete Zahl ist für die Folge das neue a der Formel, nach welcher sich jetzt das Verfahren wiederholt. Statt die Glieder $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 nacheinander zu subtrahiren kann man auch $(3a^2 + 3ab + b^2) . b$ auf einmal subtrahiren, nur müssen dann sogleich 3 Ziffern des Radikanden heruntergestellt werden. Bei Anwendung der ergänzenden

Subtraktion vermindert sich die Anzahl der zur Rechnung nöthigen Ziffern erheblich.

Beispiel: $\sqrt[3]{43\,614,208}$;

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{43|614,|208} = \overset{a\,b}{35}{,}2 \\
a^3 = & 27 \\
 & 166 : 3a^2 = 27 \\
3a^2b = & 135 \\
 & 311 \\
3ab^2 = & 225 \\
 & 864 \\
b^3 = & 125 \\
 & 7392 : 3675 \\
 & 7350 \\
 & 420 \\
 & 420 \\
 & 8 \\
 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\sqrt[3]{43|614,|208} = 35{,}2 \\
16\,614 : 27 \\
45 \\
25 \\
3175 \cdot 5 \\
739208 : 3675 \\
210 \\
4 \\
369604 \cdot 2
\end{array}$$

Beim Kubikwurzelausziehen aus einer algebraischen Summe wird das gleiche Verfahren zur Anwendung gebracht.

Die „mathematischen Tabellen“ enthalten zur schnellen Bestimmung der Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen von 1 bis 1000 zwei mit $\sqrt{n}$ und $\sqrt[3]{n}$ überschriebene Spalten; doch können mit Vortheil auch die mit n^2 und n^3 überschriebenen Spalten zur Auffindung der Quadrat- und Kubikwurzeln benutzt werden.

Verhältnisse, Proportionen.

§ 27.

Unter einem Verhältniss versteht man das Ergebniss der Vergleichung zweier gleichartigen Grössen. Eine solche Vergleichung kann in zweifacher Weise geschehen. Entweder man fragt: um wieviel oder: wie viele mal ist die eine Grösse grösser als die andere; im ersten Falle giebt die Differenz, im anderen Falle der Quotient die Antwort.

$a - b$ heisst das arithmetische Verhältniss der Grössen a und b,
$a : b$ heisst das geometrische Verhältniss der Grössen a und b; in beiden Fällen liest man: a verhält sich zu b; a heisst das Vorderglied, b das Hinterglied des Verhältnisses. Je nachdem $a \gtrless b$ heisst das Verhältniss fallend oder steigend.

Die Differenz zweier benannten Zahlen ist wieder eine benannte Zahl, der Quotient zweier benannten Zahlen dagegen kann immer durch den Quotienten der entsprechenden unbenannten Zahlen ersetzt werden. (Verhältnisszahl § 15.) Deshalb benutzt die angewandte Arithmetik selten arithmetische, vorzugsweise aber geometrische Verhältnisse, welche sie gegebenen Falls bestrebt ist, in den kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken.

Der Werth eines geometrischen Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt (vergl. Formel 45).

Eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen derselben Art heisst eine Proportion und zwar wird

$a - b = c - d$ eine arithmetische Proportion,

$a : b = c : d$ eine geometrische Proportion genannt;

in beiden Fällen liest man: a verhält sich zu b, wie c zu d; man nennt a, b, c, d das erste, zweite, dritte, vierte Glied, ferner heissen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder, endlich a und d die äusseren und b und c die inneren Glieder der Proportion. Das vierte Glied heisst noch besonders die vierte Proportionale zu den ersten drei Gliedern. Sind mehrere Proportionen gegeben, so heissen die gleichvielten Glieder homologe Glieder. Sind die inneren oder die äusseren Glieder gleich, so hat man eine stetige Proportion und jedes der gleichen Glieder wird die mittlere Proportionale der beiden anderen Glieder genannt.

Man unterscheidet Grössenproportionen und Zahlenproportionen, je nachdem die Glieder benannte oder unbenannte Zahlen sind.

In einer arithmetischen Grössenproportion müssen alle vier Glieder gleichartig und gleichbenannt sein, in einer geometrischen Grössenproportion nur die Glieder, welche ein Verhältniss bilden.

Für die arithmetischen Proportionen sind folgende 2 Sätze bemerkenswerth:

1) die Summe der äusseren Glieder ist gleich der Summe der inneren Glieder; wenn also gilt

$$a - b = c - d$$

so ist
$$a + d = b + c \tag{65}$$

2) in einer stetigen arithmetischen Proportion ist die mittlere Proportionale gleich der halben Summe der beiden ungleichen Glieder; wenn also gilt

$$a - m = m - d$$

so ist
$$m = \frac{a + d}{2} \tag{66}$$

Man nennt daher die halbe Summe zweier Zahlen ihr arithmetisches Mittel.

Zahlreicher und wichtiger sind die Sätze über

geometrische Proportionen;

dieselben beziehen sich lediglich auf Zahlenproportionen, denn die geometrische Grössenproportion lässt sich immer in eine Zahlenproportion umwandeln.

1) Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkte der inneren Glieder: gilt also

(67) $$a : b = c : d,$$
so ist $$ad = bc$$

2) Eine Gleichung zwischen 2 Produkten lässt sich immer in eine Proportion umwandeln, wobei die Faktoren des einen Produkts die äusseren, die Faktoren des anderen Produkts die inneren Glieder bilden: hat man also

(68) $$m \cdot n = p \cdot q,$$
so ist $$m : p = q : n$$

3) In jeder Proportion lassen sich die Vorder- und Hinterglieder vertauschen (die Verhältnisse umkehren): gilt also

(69) $$a : b = c : d,$$
so ist auch $$b : a = d : c$$

4) In jeder Proportion lassen sich die inneren Glieder vertauschen: gilt also

(70) $$a : b = c : d$$
so ist auch $$a : c = b : d$$

5) In jeder Proportion lassen sich die äusseren Glieder vertauschen gilt also

(71) $$a : b = c : d$$
so ist auch $$d : b = c : a$$

6) In jeder Proportion lassen sich die inneren und äusseren Glieder zugleich vertauschen (die Proportion lässt sich rückwärts lesen): gilt also:

(72) $$a : b = c : d$$
so ist auch $$d : c = b : a$$

7) In jeder Proportion darf man ein inneres und ein äusseres Glied mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren: gilt also:

$$a : b = c : d$$
(73) so ist auch $$am : bm = c : d$$
oder $$a : b = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$$

8) In jeder Proportion darf man sämmtliche Glieder mit derselben Zahl multipliciren oder potenziren oder durch dieselbe Zahl dividiren oder radiciren: gilt also

$$a : b = c : d$$

so ist auch

$$\begin{gathered} am : bm = cm : dm \\ \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n} \\ a^x : b^x = c^x : d^x \\ \sqrt[y]{a} : \sqrt[y]{b} = \sqrt[y]{c} : \sqrt[y]{d} \end{gathered} \tag{74}$$

9) In jeder Proportion, sowie bei beliebig vielen gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede: gilt also

$$a : b = c : d,$$

so ist auch $$(a \pm c) : (b \pm d) = \begin{matrix} a : b \\ c : d \end{matrix}$$

oder, wenn man hat $a : b = c : d = m : n = x : y$,

so ist auch $$(a \pm c \pm m \pm x) : (b \pm d \pm n \pm y) = \begin{matrix} a : b \\ x : y \end{matrix} \tag{75}$$

10) Zwei Proportionen lassen sich zu einer Proportion dadurch vereinigen, dass man ihre homologen Glieder miteinander multiplicirt oder durch einander dividirt: gelten also

$$a : b = c : d$$

und

$$p : q = m : n,$$

so ist auch

$$ap : bq = cm : dn \tag{76}$$

und

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$$

11) Sind in mehreren Proportionen drei homologe Glieder gleich, so sind auch die vierten Glieder gleich: gilt also

$$a : b = c : d$$

und

$$a : b = c : f \tag{77}$$

so ist

$$d = f$$

12) Die vierte Proportionale wird aus den drei anderen Gliedern berechnet, indem man das Produkt der inneren Glieder durch das erste Glied dividirt: wenn also

$$a : b = c : x$$

so ist

$$x = \frac{bc}{a} \tag{78}$$

13) Die mittlere Proportionale einer stetigen Proportion wird aus den beiden ungleichen Gliedern berechnet, indem man aus dem Produkte derselben die Quadratwurzel zieht: gilt also

(79) $$a : m = m : d,$$

so ist $$m = \sqrt{a \cdot d}$$

Man nennt daher die Quadratwurzel aus dem Produkte zweier Zahlen das geometrische Mittel derselben.

IV. Abtheilung.

1. Potenzirung und Radicirung.

A. Mit ganzen, positiven Exponenten.

§ 28.

Unter einer Potenz versteht man ein Produkt aus gleichen Faktoren. Ist die Grösse des Faktors a und die Anzahl der Faktoren m, so schreibt man die Potenz a^m (a zur m^{ten}, a hoch m): hierbei heisst a die Basis und m der Exponent der Potenz.

$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$; $a^3 = a \cdot a \cdot a$; $a^2 = a \cdot a$; $a^1 = a$ (jede Zahl in ihrer einfachen Form kann eine „erste Potenz“ genannt werden).

Eine Zahl a mit einer Zahl m potenziren heisst, aus m Faktoren von der Grösse a das Produkt bilden; es kann also der Exponent immer nur eine ganze, positive Zahl sein.

Basis und Exponent einer Potenz dürfen nicht vertauscht werden: es ist also

$$a^m \text{ nicht gleich } m^a.$$

§ 29.

Gesetze des Potenzirens:

1) Null in jede beliebige Potenz erhoben, gibt immer wieder Null — Eins in jede beliebige Potenz erhoben, gibt immer wieder Eins:

(80) $$0^m = 0;\ 1^m = 1$$

2) Ist die Basis eine positive Zahl, so ist auch die Potenz positiv — ist die Basis eine negative Zahl, so ist die Potenz entweder positiv oder negativ, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist:

(81) $$\begin{aligned} (+a)^{2n} &= +(a^{2n}) \\ (+a)^{2n+1} &= +(a^{2n+1}) \\ (-a)^{2n} &= +(a^{2n}) \\ (-a)^{2n+1} &= -(a^{2n+1}) \end{aligned}$$

3) Ein Produkt wird potenzirt, wenn man die Faktoren einzeln potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad (82)$$

4) Ein Quotient (Bruch) wird potenzirt, wenn man Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) einzeln potenzirt und erstere Potenz durch letztere dividirt:

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \qquad (83)$$

5) Potenzen, welche gleiche Exponenten haben, werden miteinander multiplicirt oder durch einander dividirt, wenn man die Multiplikation bez. Division an den Basen ausführt und hinterher potenzirt:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$p^x : q^x = (p : q)^x \qquad (84)$$
$$\frac{u^y}{v^y} = \left(\frac{u}{v}\right)^y$$

6) Potenzen, welche gleiche Basis haben, werden miteinander multiplicirt oder durch einander dividirt, wenn man ihre Exponenten addirt, bez. subtrahirt.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^x : a^y = \begin{cases} a^{x-y}, \text{ wenn } x > y \\ 1 : a^{y-x}, \text{ wenn } x < y \end{cases} \qquad (85)$$
$$\frac{a^p}{a^q} = \begin{cases} a^{p-q}, \text{ wenn } p > q \\ \frac{1}{a^{q-p}}, \text{ wenn } p < q \end{cases}$$

7) Eine Potenz wird potenzirt durch Multiplikation des Exponenten:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (86)$$

8) Eine Zahl wird mit einem Produkt potenzirt, wenn man sie mit den Faktoren einzeln nach einander potenzirt, wobei die Reihenfolge beliebig ist:

$$z^{p \cdot q} = (z^p)^q = (z^q)^p \qquad (87)$$

§ 30.

Stellt man sich in der Gleichung $a^m = b$ m und b als gegebene Zahlen, a als die gesuchte Zahl vor, so heisst a die m^te^ Wurzel aus b und die Rechnungsart, welche a finden lehrt, wird Wurzelausziehung oder Radiciren genannt. Man kann auch sagen: aus einer Zahl b die m^te^ Wurzel ziehen heisst, die Zahl b in m gleiche Faktoren zerlegen. Statt „m^te^ Wurzel aus b" schreibt man

$$\sqrt[m]{b}$$

und nennt in diesem Ausdrucke m den Wurzelexponenten und b den Radikanden.

Der Wurzelexponent muss stets eine ganze, positive Zahl sein.

Das Radiciren ist also eine Umkehrung des Potenzirens und es folgen aus $a^m = b$ und $\sqrt[m]{b} = a$ die Formeln

(88)
$$\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = b$$
$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

d. h. Potenziren und Radiciren sind entgegengesetzte Rechnungsarten.

Jede Wurzel mit geradem Exponenten ist
zweideutig, wenn der Radikand positiv —
imaginär, wenn der Radikand negativ ist:

(89)
$$\sqrt[2n]{+z} = \pm \sqrt[2n]{z}$$
$$\sqrt[2n]{-z} = \text{imaginär};$$

jede Wurzel mit ungeradem Exponenten ist
positiv, wenn der Radikand positiv —
negativ, wenn der Radikand negativ ist:

(90)
$$\sqrt[2n+1]{+z} = +\sqrt[2n+1]{z}$$
$$\sqrt[2n+1]{-z} = -\sqrt[2n+1]{z}$$

§ 31.

Gesetze des Radicirens, gültig für rationale, wie für irrationale Wurzeln:

1) Ein Produkt wird radicirt, wenn man die Faktoren einzeln radicirt und die erhaltenen Wurzeln multiplicirt:

(91)
$$\sqrt[m]{p \cdot q} = \sqrt[m]{p} \cdot \sqrt[m]{q}$$

2) Ein Quotient (Bruch) wird radicirt, wenn man Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner) einzeln radicirt und die erstere Wurzel durch die letztere dividirt:

(92)
$$\sqrt[m]{p : q} = \sqrt[m]{p} : \sqrt[m]{q}$$
$$\sqrt[m]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[m]{p}}{\sqrt[m]{q}}$$

3) Wurzeln, welche gleiche Exponenten haben, werden miteinander multiplicirt oder durch einander dividirt, wenn man die Multiplikation bez. Division an den Radikanden ausführt und hinterher radicirt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[x]{u} : \sqrt[x]{v} = \sqrt[x]{u : v} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sqrt[p]{m}}{\sqrt[p]{n}} = \sqrt[p]{\frac{m}{n}} \tag{93}$$

4) Eine Potenz wird radicirt durch Division ihres Exponenten durch den Wurzelexponenten:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \tag{94}$$

Bedingung: Die Division n : m muss aufgehen.

5) Hat man eine Zahl zu potenziren und gleichzeitig zu radiciren, so ist es einerlei, in welcher Reihenfolge dies geschieht:

$$\sqrt[m]{b^n} = \left(\sqrt[m]{b}\right)^n \tag{95}$$

6) Mit einem Produkt wird radicirt, wenn man mit den Faktoren einzeln nacheinander radicirt, wobei die Reihenfolge beliebig ist:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \tag{96}$$

7) Eine Wurzel wird radicirt durch Multiplikation ihres Exponenten:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \tag{97}$$

8) Die Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man beide Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot x]{a^{n \cdot x}} = \sqrt[n : y]{a^{n : y}} \tag{98}$$

Dieser Satz wird mit Vortheil angewendet, um Wurzeln mit verschiedenen Exponenten auf gleiche Exponenten umzuformen, worauf die Multiplikation und Division dieser Wurzeln möglich wird.

Entsprechend dem in den §§ 25 und 26 mitgetheilten Verfahren des Ausziehens der Quadrat- und Kubikwurzel aus einer Zifferzahl, lässt sich für jede andere Wurzel eine Potenzformel entwickeln, nach welcher das Ausziehen zu erfolgen haben würde. Uebrigens kann die vierte Wurzel durch zweimaliges Ausziehen der Quadratwurzel, die sechste Wurzel durch aufeinander folgendes Quadrat- und Kubikwurzelziehen, die achte Wurzel durch dreimaliges Quadratwurzelziehen, die neunte Wurzel durch zweimaliges Kubikwurzelziehen gewonnen werden etc. etc. Indess ist für höhere Wurzeln das Verfahren so weitläufig, das man immer zu dem bequemeren Hilfsmittel der Logarithmenrechnung greifen wird.

B. Mit gebrochenen und negativen Exponenten.

§ 32.

Die Formel (94) des § 31 $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ gilt bisher nur unter der Bedingung, dass die Division $\frac{n}{m}$ aufgeht. Man pflegt indessen diese Formel auch ganz allgemein anzuwenden, ohne Rücksicht darauf, ob $\frac{n}{m}$ eine ganze oder eine gebrochene Zahl bedeutet; es heisst dann der Ausdruck

$$a^{\frac{n}{m}}$$

eine **gebrochene Potenz** und man versteht darunter nichts anderes als die abgekürzte Schreibweise für $\sqrt[m]{a^n}$. — Die Potenzen mit positiven, ganzen Exponenten nennt man nunmehr **ganze Potenzen.**

Auch für die gebrochenen Potenzen gelten die in § 29 gegebenen Gesetze, man hat also insbesondere die Formeln:

(99)
$$(a \cdot b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{n}{m}}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}$$
$$a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$$
$$a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}}$$
$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{mq}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{n}{m}}$$

Die Formel (85) des § 29 $a^x : a^y = a^{x-y}$ gilt bisher nur unter der Bedingung, dass $x > y$. Man pflegt sich indessen der Formel auch ganz allgemein zu bedienen, mag nun $x \lesseqgtr y$ sein; es heisst dann der Ausdruck

$$a^{x-y}$$

eine **Differenz-Potenz** und man versteht darunter nichts anderes, als die abgekürzte Schreibweise für $a^x : a^y$. Im übrigen gelten auch für die Differenz-Potenzen die Gesetze des § 29; also

(100)
$$(a \cdot b)^{m-n} = a^{m-n} \cdot b^{m-n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$$
$$a^{m-n} \cdot a^{p-q} = a^{(m-n) + (p-q)}$$
$$a^{m-n} : a^{p-q} = a^{(m-n) - (p-q)}$$
$$(a^{m-n})^{p-q} = a^{(m-n) \cdot (p-q)} = a^{(p-q)(m-n)} = (a^{p-q})^{m-n}$$

Ferner hat man noch die beiden Formeln

$$a^0 = 1 \tag{101}$$

$$\text{und } a^{-m} = \frac{1}{a^{+m}} \tag{102}$$

2. Das Logarithmiren.

A. Von den Logarithmen im Allgemeinen.

§ 33.

Wegen a^m nicht gleich m^a (§ 28 Schluss) lassen sich aus der Gleichung

$$a^m = b$$

drei verschiedene Aufgaben ableiten:

1) Gegeben a und m; gesucht b. Auflösung: $b = a^m$ (Potenziren),

2) Gegeben b und m; gesucht a. Auflösung: $a = \sqrt[m]{b}$ (Radiciren),

3) Gegeben a und b; gesucht m. Auflösung: $m = {}^a\log b$ (Logarithmiren).

Die Gleichung $m = {}^a\log b$ ist richtig, wenn $a^m = b$.

Ein Logarithmus (m) ist also ein gesuchter Potenzexponent und richtig gefunden, wenn die gegebene Logarithmenbasis (a) mit dem Logarithmus potenzirt, den gegebenen Numerus (b) entstehen lässt.

Der Werth eines Logarithmus hängt demnach ab von der Basis und dem Numerus. Unter dem Numerus versteht man immer eine natürliche (ganze, positive) Zahl; als Basis eignet sich dann jede positive Zahl grösser als Eins.

Die Gesammtheit aller in Bezug auf einerlei Basis berechneten Logarithmen nennt man ein Logarithmensystem; es gibt unzählig viele Logarithmensysteme. Solche Logarithmen, deren Basis die irrationale Zahl $e = 2{,}71828 \cdots$ ist, heissen natürliche Logarithmen, während alle Logarithmen, deren Basis irgend eine andere Zahl ist, künstliche Logarithmen genannt werden. Die Logarithmen mit der Basis 10 heissen Brigg'sche Logarithmen. Die zweckmässige Zusammenstellung der Logarithmen eines Systems geschieht in einer Logarithmentafel. Unter Logarithmiren versteht man dann das Aufsuchen des Logarithmus zu einem gegebenen Numerus.

Soll eine numerische Rechnung, welche das Bilden von Produkten oder Quotienten, von Potenzen oder Wurzeln, die einzeln oder in Verbindung unter einander auftreten, verlangt, mit Hilfe der Logarithmen ausgeführt werden, so sind drei Einzeloperationen vorzunehmen: zuerst sind die gegebenen Zahlenwerthe zu logarithmiren, hierauf ist mit den gefundenen Logarithmen zu rechnen und schliesslich ist zu dem Resultat der Numerus aufzuschlagen.

Was das Rechnen mit Logarithmen anlangt, so gelten folgende 3 Regeln:

1) Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren:

(103) $$^{a}\log(m \cdot n) = {}^{a}\log m + {}^{a}\log n$$

2) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividenden vermindert um den Logarithmus des Divisors:

(104) $$^{a}\log(m : n) = {}^{a}\log m - {}^{a}\log n$$

3) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich Potenzexponent mal Logarithmus der Potenzbasis:

(105) $$^{a}\log(m^{x}) = x \cdot {}^{a}\log m$$

Beispiel:

Berechne: $\dfrac{(m-n)^5 \cdot \sqrt[3]{c}}{x^3 \cdot y \cdot \sqrt{(f+g)^3}}$;

$$^{a}\log \frac{(m-n)^5 \cdot \sqrt[3]{c}}{x^3 \cdot y \cdot \sqrt{(f+g)^3}}$$

$$= {}^{a}\log\left[(m-n)^5 \cdot \sqrt[3]{c}\right] - {}^{a}\log\left[x^3 \cdot y \cdot \sqrt{(f+g)^3}\right]$$

$$= {}^{a}\log(m-n)^5 + {}^{a}\log\sqrt[3]{c} - {}^{a}\log x^3 - {}^{a}\log y - {}^{a}\log\sqrt{(f+g)^3}$$

$$= 5 \cdot {}^{a}\log(m-n) + \frac{1}{3}\,{}^{a}\log c - 3 \cdot {}^{a}\log x - {}^{a}\log y - \frac{3}{2}\,{}^{a}\log(f+g);$$

$^{a}\log(m-n)$ und $^{a}\log(f+g)$ lassen sich nicht weiter zerlegen. — Aus Regel 1 folgt, dass sich die Logarithmen aller Zahlen aus den Logarithmen der Primzahlen berechnen lassen.

Bezüglich der Abhängigkeit des Logarithmus vom Numerus gelten folgende Sätze:

1) Der Logarithmus zu einem negativen Numerus ist imaginär;

2) Der Logarithmus zu einem positiven echten Bruch ist negativ;

3) Der Logarithmus zum Numerus Eins ist Null;

4) Ist der Numerus grösser als Eins, aber kleiner als die Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus ein positiver, echter Bruch;

5) Ist der Numerus gleich der Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus gleich Eins;

6) Ist der Numerus grösser als die Logarithmenbasis, so ist der Logarithmus grösser als Eins;

7) Ueberhaupt bedingt ein Wachsen des Numerus ein gleichzeitiges Wachsen des Logarithmus, und umgekehrt;

8) Der Logarithmus von Null ist in jedem System gleich minus Unendlich.

Die Logarithmen zweier verschiedener Systeme stehen in solchem Zusammenhang, dass jeder Logarithmus des einen Systems das nämliche Vielfache ist von dem entsprechenden Logarithmus des anderen Systems. Um daher die Logarithmen des einen Systems umzuwandeln in Logarithmen eines anderen Systems, hat man sie einzeln mit einem und demselben Faktor zu multipliciren und zwar ist dieser Faktor gleich dem Reciproken desjenigen Logarithmus des alten Systems, dem die Basis des neuen Systems als Numerus zugehört.

$$^{a}\log z = {^{b}\log z} \cdot \frac{1}{^{b}\log a} \qquad (106)$$

Dieser Faktor $\frac{1}{^{b}\log a}$, welcher die b-Logarithmen umwandelt in a-Logarithmen, heisst der Modulus. Der Modulus, welcher die b-Logarithmen umwandelt in a-Logarithmen ist reciprok dem Modulus, welcher die a-Logarithmen umwandelt in b-Logarithmen.

$$^{b}\log a = \frac{1}{^{a}\log b} \qquad (107)$$

Unter den unzählig vielen möglichen Logarithmensystemen haben sich das Brigg'sche und das natürliche als zweckmässig und ausreichend erwiesen. Das natürliche System findet seine Anwendung meistens in der höheren Mathematik, das Brigg'sche System dagegen dient besonders den Zwecken der elementaren Mathematik und ist wegen der ihm innewohnenden Rechenvortheile das allgemein gebräuchliche; daher auch der Name gemeine Logarithmen.

B. Die Brigg'schen Logarithmen.

§ 34.

Der Brigg'sche Logarithmus einer Zahl z wird einfach bezeichnet mit

$$\log z$$

Im Allgemeinen hat ein solcher Logarithmus folgende Beschaffenheit:

I. Wenn der Numerus eine ganze (positive oder negative) Potenz von 10 ist, so ist auch der Logarithmus eine ganze (positive oder negative) Zahl und zwar stets gleich dem bezüglichen Exponenten:

Ist k eine ganze Zahl, so gilt

$$\log(10^k) = k \cdot \log 10 = k \cdot 1 = k$$

$$\log(10^{-k}) = \log\left(\frac{1}{10^k}\right) = \log 1 - \log 10^k = 0 - k = -k \qquad (108)$$

$$\log(10^0) = \log 1 = 0$$

II. Ist der Numerus keine ganze Potenz von 10, so ist auch der Logarithmus keine ganze Zahl, kann aber auch nicht durch eine ganze Zahl mit angehängtem gemeinen Bruch angegeben werden, sondern er ist irrational also nur näherungsweise angebbar.

III. Ein Logarithmus besteht also im Allgemeinen aus einer ganzen Zahl (oder Null) — Charakteristik oder Kennziffer, mit einem angehängten Dezimalbruch — Mantisse oder Zugabe.

Die Vortheile, welche die Brigg'schen Logarithmen dem Rechner gewähren, liegen in folgenden zwei Sätzen:

1) Für den Logarithmus jedes beliebigen Numerus lässt sich die Charakteristik ohne Weiteres angeben, wie auch umgekehrt die Charakteristik eines Logarithmus sofort den dekadischen Werth des Numerus erkennen lässt;

> Regel: Der Logarithmus einer Zahl $<$ 1 hat eine negative Charakteristik und diese so viel Einheiten, als der Bruch Anfangsnullen; der Logarithmus einer Zahl $>$ 1 hat eine positive Charakteristik und diese so viel Einheiten weniger eine, als der Numerus Ziffern vor dem Komma hat.

Z. B. $\log 0{,}00478 = 0, \text{Mantisse} - 3$
$\log 187{,}24 = 2, \text{Mantisse}$;

deshalb geben die Logarithmentafeln nur die Mantissen an, es dem Rechner überlassend, in jedem einzelnen Falle die richtige Charakteristik zu bestimmen.

2) Numeri, welche mit denselben Ziffern in derselben Reihenfolge geschrieben werden, welche sich also nur in der Stellung des Dezimalkommas unterscheiden, haben die nämliche Mantisse; umgekehrt bestimmt die Mantisse allein die Ziffernreihe des Numerus (die Charakteristik bestimmt den Ort des Dezimalkommas).

Z. B.:
$$\begin{aligned} \log 1885 &= 3{,}27531 \\ \log 18{,}85 &= 1{,}27531 \\ \log 1{,}885 &= 0{,}27531 \\ \log 0{,}1885 &= 0{,}27531 - 1. \end{aligned}$$

Um die Logarithmentafeln, welche nur positive Mantissen enthalten, benutzen zu können, ist es nothwendig, dass man sich einen jeden Logarithmus in Charakteristik und Mantisse trennt, so zwar, dass die Mantisse stets als positiver Werth auftritt. Die Rechnung mit Logarithmen führt nämlich dann auf negative Mantissen, wenn ein grösserer Logarithmus von einem kleineren Logarithmus zu subtrahiren ist; in solchem Falle muss man durch gleichzeitiges Addiren und

Subtrahiren ein und derselben ganzen Zahl die Mantisse positiv machen. Z. B. 0,66211 minus 3,17825 = — 2,51614 = (+ 3—2,51614) — 3 = 0,48386 — 3

Es ist vielfach üblich, bei Logarithmen mit negativer Charakteristik diese auf 10 zu erhöhen, wobei die zur Erhöhung nöthigen Einheiten gleichzeitig als positive Charakteristik auftreten; bequem ist es, die — 10 zu ersetzen durch einen über die positive Charakteristik gezogenen Strich.

Z. B. $0,84516 - 1 = 9,84516 - 10 = \overline{9},84516$

$0,84516 - 3 = 7,84516 - 10 = \overline{7},84516$

Auch findet man anstatt 0,.... — k die Schreibweise $\overline{k},\ldots$; hierbei wird durch den Strich die Charakteristik selbst als negativ gekennzeichnet.

Z. B. $0,84516 - 1 = \overline{1},84516$

$0,84516 - 3 = \overline{3},84516.$

§ 35.

Unter dem arithmetischen Complement einer Zahl versteht man die durch deren Subtraktion von Null erhaltene Differenz, für welche der sich ergebende echte Dezimalbruch positiv gefordert wird. Man bezeichnet dieses arithmetische Complement durch c.; z. B.

c. 3,458 = 0,542—4

c. 0,278 = 0,722—1

c. log 18,85 = c. 1,27531 = 0,72469—2.

Unter der dekadischen Ergänzung einer Zahl versteht man die durch deren Subtraktion von 10 erhaltene Differenz. Man bezeichnet die dekadische Ergänzung durch D. E.; z. B.

D. E. 4 = 6

D. E. 7,2 = 2,8

D. E. 0,3 = 9,7

D. E. log 18,85 = D. E. 1,27531 = 8,72469.

Hat ein Logarithmus eine negative Charakteristik, so wird sein arithmetisches Complement, wie auch seine dekadische Ergänzung erhalten, wenn man zum Complement bez. zur Ergänzung der Mantisse die Einheiten der Charakteristik addirt: z. B.

c. log 0,01885 = c. (0,27531—2) = (0,72469 — 1) + 2 = 1,72469

D. E. log 0,01885 = D. E. (0,27531—2) = 9,72469 + 2 = 11,72469

Es empfiehlt sich für logarithmische Rechnungen jede Subtraktion von Logarithmen zu vermeiden, indem man von dem Satze Gebrauch macht:

Anstatt eine Zahl zu subtrahiren, kann man auch deren arithmetisches Complement bez. dekadische Ergänzung addiren.

Beispiel:

Zu berechnen:

$$\log 1{,}345 + \log 3147 - \log 249{,}3 + \log 0{,}725 - \log 0{,}84 + \log 11 - \log 82{,}03 =$$

1) auf gewöhnlichem Wege

$$\begin{array}{rl}
\log\ 1{,}345 = & 0{,}12872 \\
\log\ 3147 = & 3{,}49790 \\
\log\ 0{,}725 = & 0{,}86034-1 \\
\log\ 11 = & 1{,}04139 \\
\hline
& 4{,}52835 \\
\\
\log\ 249{,}3 = & 2{,}39672 \\
\log\ 0{,}84 = & 0{,}92428-1 \\
\log\ 82{,}03 = & 1{,}91397 \\
\hline
& 4{,}23497
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
+\ 4{,}52835 \\
-\ 4{,}23497 \\
\hline
0{,}29338
\end{array}$$

2) mit Hilfe des arith. Complements:

$$\begin{array}{rl}
\log\ 1{,}345 = & 0{,}12872 \\
\log\ 3147 = & 3{,}49790 \\
\text{c.}\ \log\ 249{,}3 = & 0{,}60328-3 \\
\log\ 0{,}725 = & 0{,}86034-1 \\
\text{c.}\ \log\ 0{,}84 = & 0{,}07572 \\
\log\ 11 = & 1{,}04139 \\
\text{c.}\ \log\ 82{,}03 = & 0{,}08603-2 \\
\hline
& 0{,}29338
\end{array}$$

3) mit Hilfe der dek. Ergänzung:

$$\begin{array}{rr}
\log\ 1{,}345 = & 0{,}12872 \\
\log\ 3147 = & 3{,}49790 \\
\text{D. E.}\ \log\ 249{,}3 = & \overline{7}{,}60328 \\
\log\ 0{,}725 = & \overline{9}{,}86034 \\
\text{D. E.}\ \log\ 0{,}84 = & \overline{10}{,}07572 \\
\log\ 11 = & 1{,}04139 \\
\text{D. E.}\ \log\ 82{,}03 = & \overline{8}{,}08603 \\
\hline
& 0{,}29338
\end{array}$$

Der Vortheil der beiden letzten Rechnungsweisen fällt in's Auge.

Beim Dividiren eines Logarithmus mit negativer Charakteristik muss man diese um so viele Einheiten erhöhen, dass die Division für sie aufgeht; die zur Erhöhung nöthigen Einheiten sind gleichzeitig als positive Charakteristik anzubringen; z. B.

$$(\log 0{,}1885) : 3 = \frac{0{,}27531-1}{3} = \frac{2{,}27531-3}{3} = 0{,}75844-1;$$

diese Regel kommt besonders häufig in Anwendung bei Berechnung von Wurzelwerthen.

Auch bei der Multiplikation eines Logarithmus mit negativer Charakteristik muss das Resultat so umgeformt werden, dass Mantisse und Charakteristik getrennt erscheinen und letztere eine ganze Zahl ist; z. B.

$$\begin{aligned}
7{,}12 \cdot \log 0{,}317 &= 7{,}12 \cdot (0{,}50106-1) = 3{,}56755-7{,}12 \\
&= 3 + 0{,}56755-7-0{,}12 = 0{,}44755-4
\end{aligned}$$

II. Algebra.

Von den Gleichungen.

§ 36.

vergl. § 3.

Eine Gleichung, welche bedingungslos richtig ist, deren beide Seiten also unter allen Umständen gleichwerthig sind, heisst eine analytische Gleichung. Beispiele hierfür bieten alle die Formeln der Arithmetik, welche allgemeingültige Rechengesetze darstellen. Hat eine solche Gleichung insbesondere die Form $a = a$, spricht sie also den Grundsatz aus „jede Grösse ist sich selbst gleich“, so heisst sie eine identische Gleichung.

Eine Gleichung, welche nur bedingungsweise richtig ist, deren beide Seiten also nur dann gleichwerthig sind, wenn für die eine oder andere vorkommende Grösse oder für mehrere Grössen zugleich ein bestimmter Werth gesetzt wird, heisst eine algebraische Gleichung. Die Grösse, an welcher die Bedingung für die Richtigkeit der Gleichung haftet, heisst die Bedingungsgrösse oder, insofern die Aufgabe vorliegt, den Werth dieser Grösse zu bestimmen, die Unbekannte. Wenn der Werth der Unbekannten ermittelt ist, so sagt man: es ist die Wurzel der Gleichung gefunden und die Gleichung selbst ist aufgelöst worden.

Aus einer Gleichung können unter Anwendung des Grundsatzes: „Gleiches (die Seiten d. Gl.) auf gleiche Weise (arithmetisch) behandelt, gibt Gleiches“ beliebig viele neue Gleichungen abgeleitet werden; man nennt dies die Gleichung umformen. Beim Umformen einer Gleichung bezweckt man immer die Ueberführung derselben in die möglich einfachste Form und damit hat man dann die Gleichung geordnet; das Verfahren hierfür ergibt sich aus der Anwendung folgender Regeln:

1. Wenn Glieder der Gleichung Brüche sind, so multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner; dieser selber bleibt weg.

2. Kommen Klammern vor, so werden diese, insbesondere wenn sie die Unbekannte enthalten, aufgelöst: entweder nach § 8 oder nach § 13, Formel 27 und 29.

3. Es wird transponirt d. h. durch beiderseitige Addition bez. Subtraktion werden die negativen bez. positiven Glieder von einer Seite auf die andere Seite der Gleichung gebracht, so dass links (rechts) nur Glieder mit der Unbekannten, rechts (links) nur bekannte Glieder zu stehen kommen.

4. Die Glieder, welche die Unbekannte in gleicher Potenzform haben, werden nach § 13, Formel 28 zusammengezogen; zugleich werden

überhaupt alle sich darbietenden Vereinfachungen in der Rechnung ausgeführt.

Anmerkung. In der Gleichung vorkommende Wurzeln müssen auf eine Seite der Gleichung allein gebracht und dann durch Potenzirung beider Seiten mit dem Wurzelexponenten weggeschafft werden.

Z. B. Gegeben sei

1) $\frac{7a}{5b} + \frac{4a - x}{3b} = \frac{a}{15b} + 3 - \frac{2b - x}{b}$ 2) $\frac{4x - 4bd}{ac} + 1 = \frac{x - 2bd}{x + ac}$

Umformung zu 1)

multiplicirt mit 15b

$$21a + 5 \cdot (4a - x) = a + 45b - 15 \cdot (2b - x);$$

Klammern aufgelöst

$$21a + 20a - 5x = a + 45b - 30b + 15x;$$

transponirt

$$21a + 20a - a - 45b + 30b = 15x + 5x;$$

zusammengezogen

$$40a - 15b = 20x$$

gekürzt mit 5

$$8a - 3b = 4x.$$

Umformung zu 2)

multiplicirt mit $ac \cdot (x + ac)$

$$(4x - 4bd) \cdot (x + ac) + ac \cdot (x + ac) = (x - 2bd) \cdot ac;$$

Klammern aufgelöst

$$4x^2 - 4bdx + 4acx - 4abcd + acx + a^2c^2 = acx - 2abcd;$$

transponirt

$$4x^2 - 4bdx + 4acx + acx - acx = 4abcd - a^2c^2 - 2abcd;$$

zusammengezogen

$$4x^2 + 4(ac - bd) \cdot x = - ac(ac - 2bd).$$

Nach der Form, in welcher die Unbekannte in der geordneten Gleichung auftritt, unterscheidet man

lineare Gleichungen oder Gleichungen des ersten Grades,

quadratische Gleichungen oder Gleichungen des zweiten Grades,

cubische Gleichungen oder Gleichungen des dritten Grades u. s. f.

nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer geordneten Gleichung auftreten, theilt man ferner ein in

Gleichungen mit einer Unbekannten und

Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§ 37.

I. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten.

Eine Gleichung mit einer Unbekannten heisst vom ersten Grade, wenn sie geordnet die Form hat

$$a \cdot x = b;$$

die Auflösung geschieht einfach durch Division beider Seiten durch den der Unbekannten x anhaftenden Faktor a, also

$$\mathbf{x = \frac{b}{a}} \tag{109}$$

Beispiel 1) des vorigen § hat die Auflösung $x = \frac{8a-3b}{4}$.

II. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

α) Rein quadratische Gleichungen.

Eine Gleichung mit einer Unbekannten heisst rein quadratisch, wenn sie geordnet die Form hat

$$a \cdot x^2 = b;$$

Um aufzulösen, dividirt man beide Seiten durch a und zieht alsdann beiderseits die Quadratwurzel; man hat hier stets zwei Auflösungen (vergl. § 25); also

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

$$\mathbf{x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}} \tag{110}$$

Z. B.: die gegebene Gleichung sei:

$$\frac{x-2}{3x+14} = \frac{3 \cdot (8-x)}{28-x};$$

Auflösung: $(x-2) \cdot (28-x) = 3 \cdot (8-x) \cdot (3x+14)$

$$28x - 56 - x^2 + 2x = 72x - 9x^2 + 336 - 42x$$

$$-x^2 + 9x^2 + 28x + 2x - 72x + 42x = 336 + 56$$

$$8x^2 = 392$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm \sqrt{49}$$

$$x_1 = +7; \quad x_2 = -7$$

β) Unrein quadratische Gleichungen.

Eine Gleichung mit einer Unbekannten heisst unrein quadratisch, wenn sie geordnet die Form hat

$$ax^2 + bx = c;$$

um aufzulösen, dividirt man zunächst die ganze Gleichung durch a

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = \frac{c}{a};$$

hierauf addirt man auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, wodurch die linke Seite zu einem vollständigen Quadrat ergänzt wird

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

oder $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2};$$

jetzt wird beiderseits die Quadratwurzel gezogen

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{4ac + b^2};$$

durch transponiren des Gliedes $\frac{b}{2a}$ erhält man die Auflösung

(111) $$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac + b^2}}{2a};}$$

auch hier ist die Wurzel der Gleichung zweideutig. — Wenn reell, wenn imaginär?

Beispiel: $$a + x = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$$

$$a^2x + ax^2 = x + a$$

$$ax^2 + (a^2 - 1)\,x = a \quad \text{(geordnete Gl.)}$$

Auflösung $$x^2 + \frac{a^2-1}{a}\,x = 1$$

$$x^2 + \frac{a^2-1}{a} \cdot x + \left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2 = 1 + \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{a^2-1}{2a}\right)^2 = \frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^2}$$

$$x + \frac{a^2-1}{2a} = \pm \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{a^2-1}{2a} \pm \frac{a^2+1}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-a^2 + 1 + a^2 + 1}{2a} = +\frac{1}{a};\; x_2 = \frac{-a^2 + 1 - a^2 - 1}{2a} = -a;$$

Beispiel 2) des § 36 hat folgende Auflösung (direkt nach Formel 111, worin für a, b und c beziehungsweise zu setzen ist 4, 4(ac — bd), — ac (ac — 2bd):

$$x = \frac{-4\,(ac - bd) \pm \sqrt{-16a^2c^2 + 32abcd + 16\,(ac - bd)^2}}{8}$$

$$\text{oder } x = \frac{-4ac + 4bd \pm \sqrt{-16a^2c^2 + 32abcd + 16a^2c^2 - 32abcd + 16b^2d^2}}{8}$$

$$\text{oder } x = \frac{-4ac + 4bd \pm \sqrt{16b^2d^2}}{8} = \frac{-4ac + 4bd \pm 4bd}{8}$$

$$x_1 = \frac{-4ac + 4bd + 4bd}{8} = bd - \frac{1}{2}ac;\; x^2 = \frac{-4ac + 4bd - 4bd}{8} = -\frac{1}{2}ac.$$

III. Lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Eine Gleichung mit 2 Unbekannten heisst vom ersten Grade, wenn sie geordnet die Form hat

$$ax + by = c;$$

eine einzige solche Gleichung reicht zur Bestimmung der beiden Unbekannten x und y nicht aus, es müssen zu diesem Zwecke 2 von einander unabhängige Gleichungen dieser Art gegeben sein.

Sind

$$1)\ ax + by = c$$
$$\text{und }2)\ a'x + b'y = c'$$

die aufzulösenden Gleichungen, so bestimme man eine Unbekannte nach der andern. Angenommen die Rechnung richte sich zunächst auf x, so muss y eliminirt werden. Dies geschieht durch Multiplikation der Gleichung 1) mit b' und der Gleichung 2) mit b und darauf folgende Subtraktion der erhaltenen Gleichungen; also

$$\begin{array}{l} ab'x + bb'y \;= b'c \\ a'bx + bb'y \;= bc' \\ \hline (ab' - a'b) \cdot x = b'c - bc' \end{array}$$

folglich $$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \qquad (112a)$$

Um nun y zu finden, gehe man zu den gegebenen Gleichungen zurück und eliminire x durch Multiplikation der Gleichung 1) mit a' und der Gleichung 2) mit a und folgender Subtraktion:

$$\begin{array}{l} aa'x + a'by \;= a'c \\ aa'x + ab'y \;= ac' \\ \hline (a'b - ab') \cdot y = a'c - ac' \end{array}$$

folglich $$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \qquad (112b)$$

Vorstehendes Auflösungsverfahren heisst das Additionsverfahren; ausser diesem empfiehlt sich noch das Substitutionsverfahren, nach welchem die Auflösung der beiden gegebenen Gleichungen 1) und 2) auf folgende Weise geschieht:

Man bestimmt den Werth der einen Unbekannten z. B. des y aus der Gleichung 1):

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad (\alpha)$$

und setze diesen Werth in Gleichung 2) ein:

$$a'x + b' \cdot \frac{c - ax}{b} = c',$$

wodurch eine Gleichung vom ersten Grade mit der einen Unbekannten x erhalten wird, zu deren Auflösung man auf bekanntem Wege gelangt:

$$a'bx + b'c - ab'x = bc'$$

$$x \cdot (a'b - ab') \quad = bc' - b'c$$

(112c) $$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$$

Um noch y zu bestimmen, wiederholt man entweder das Verfahren, indem man zunächst x eliminirt oder man setzt den gefundenen Werth des x in Gleichung (α) ein:

$$y = \frac{c - a \cdot \dfrac{bc' - b'c}{a'b - ab'}}{b}$$

$$= \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$$

$$= \frac{a'bc - \cancel{ab'c} - abc' + \cancel{ab'c}}{b\,(a'b - ab')}$$

(112d) $$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$$

Schlussbemerkung: Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so eliminirt man nach einem der kennen gelernten Verfahren eine Unbekannte nach der anderen, so dass man zunächst n—1 Gleichungen mit n—1 Unbekannten und endlich 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten erhält; nachdem diese bestimmt worden sind, ermittelt man, die ganze Rechnung zurücklaufend, durch Substitution eine Unbekannte nach der andern, die zuerst eliminirte Unbekannte zuletzt.

Wenn insbesondere zur Bestimmung zweier Unbekannten eine quadratische und eine lineare Gleichung gegeben sind, so ziehe man aus letzterer den Werth der einen Unbekannten x und führe denselben in die quadratische Gleichung ein; nach Auflösung derselben ergeben sich zwei Werthe für y; substituirt man diese nach einander in die lineare Gleichung, so finden sich die zwei zu den y Werthen gehörigen x Werthe.

26