

Bat 1 APR 08
— TU —

N^o 90.

N. 10.

Die

Biegungslehre

und das

Gusseisen.

Von

C. Bach.



Technische Universität
Chemnitz
Universitätsbibliothek

WA: 42495-10

(Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Band XXXII, Seite 193.)

Berlin 1888.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade)

Stallschreiber-Str. 45, 45.

Handwritten initials

H
2495-
10

Technische Universität
Chemnitz
Universalbibliothek

WA: H2495-10

WA

H. v. B. ...



Die Biegelshre und das Gusseisen.

Von
C. Bach.

(Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Band XXXII, Seite 193 u. f.)

Erster Abschnitt.

Unsicherheit bei Anwendung der Sätze der Biegelshre auf gusseiserne Körper.

Ein gerader stabförmiger Körper ist bekanntlich dann auf Biegung beansprucht, wenn die auf ihn einwirkenden äußeren Kräfte seine Achse rechtwinklig treffen und für jeden Querschnitt ein Kräftepaar geben, dessen Ebene senkrecht auf demselben steht. Dabei pflegt vorausgesetzt zu werden, dass diese Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet. Die Schubkraft wird vernachlässigt.

Mit den Bezeichnungen

M das biegende Moment, d. h. das Moment des bezeichneten Kräftepaars für den in betracht gezogenen Querschnitt,

θ das Trägheitsmoment des letzteren in bezug auf diejenige Hauptachse, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaars steht,

σ die durch M wachgerufene Normalspannung im Abstände η von der Biegungsachse (Nullachse),

k_1, k_2 die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zug bzw. gegenüber Druck,

e_1 der größte positive Wert von η (Abstand der am stärksten gezogenen Faser),

e_2 der größte negative Wert von η (Abstand der am stärksten gedrückten Faser),

σ_1, σ_2 die Normalspannungen im Abstände e_1 bzw. e_2 von der Biegungsachse,

liefert die Biegelshre die Hauptbeziehung

$$M = \sigma \frac{\theta}{\eta} \text{ oder } \sigma = \frac{M}{\theta} \eta \dots (1),$$

woraus

$$\sigma_1 = \frac{M}{\theta} e_1 \quad \sigma_2 = \frac{M}{\theta} e_2 \dots (2),$$

$$k_2 \geq \frac{M}{\theta} e_1 \quad k_1 \geq \frac{M}{\theta} e_2 \dots (3).$$

Da Gusseisen, mit dem wir uns hier, wenn nicht ausdrücklich ein anderes Material genannt wird, allein beschäftigen wollen, bei Zugbeanspruchung weit weniger als bei Inanspruchnahme auf Druck angestrengt werden darf, so folgt hieraus

1) bei Querschnitten, für welche $e_1 \geq e_2$, dass die zulässige Zuganstrengung

$$k_2 \geq \frac{M}{\theta} e_1$$

die Abmessungen bestimmt,

2) bei Querschnitten, für welche $e_1 < e_2$, dass die zulässige Zuganstrengung

$$k_2 \geq \frac{M}{\theta} e_1$$

maßgebend wird, so lange

$$e_1 \geq e_2 \frac{k_1}{k_2},$$

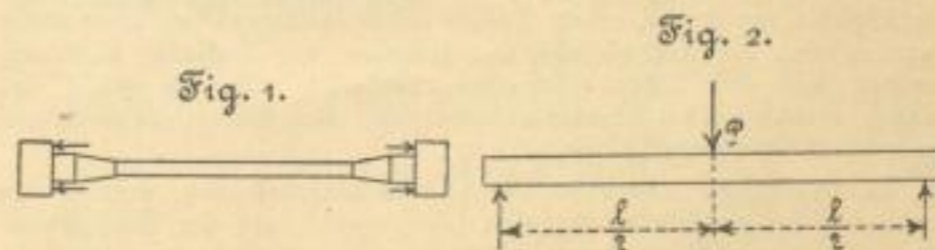
während die zulässige Druckanstrengung in Rechnung zu stellen ist, wenn

$$e_2 \geq e_1 \frac{k_1}{k_2}.$$

Dieser seit reichlich 6 Jahrzehnten feststehenden Grundlage der Berechnung auf Biegung in Anspruch genommener Stäbe haftet hinsichtlich des Gusseisens der Mangel ungenügender Uebereinstimmung mit den Ergebnissen von Bruchversuchen an, wodurch die Sicherheit der Rechnung stark beeinträchtigt wird.

Zur Klarstellung in dieser Beziehung fertigen wir aus einem und demselben Gusseisen

- Rundstäbe nach Fig. 1 zu Zugversuchen,
- quadratische Stäbe nach Fig. 2 zu Biegungsversuchen.



Wir ermitteln

zu a) dass der Durchmesser des Rundstabes 20 mm misst, und dass das Zerreißen der Stäbe bei durchschnittlich 4650 kg vor sich geht,

zu b) dass die Seite des quadratischen Querschnitts 30 mm, die Entfernung l der Stützen 1000 mm beträgt, und dass der Bruch bei durchschnittlich $P = 486$ kg erfolgt.

Aus der Versuchsreihe a berechnet sich die Zugfestigkeit zu

$$\frac{4650}{\frac{\pi}{4} 2^2} = 1480 \text{ kg.}$$

Aus der Versuchsreihe b folgt nach Gl. 2 die Normalspannung der am stärksten gezogenen Fasern beim Bruche

$$\frac{486 \cdot \frac{100}{4} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{12} \cdot 3^4} = 2700 \text{ kg.}$$

Hiernach erweist sich die aufgrund der Sätze der Biegelehre ermittelte größte Zugspannung beim Bruche für ein und dasselbe Gusseisen fast doppelt so groß, als die Zugspannung, welche beim Zerreißen des Stabes vorhanden ist. Der auf Biegung beanspruchte Stab trägt also fast doppelt soviel als die Gleichung

$$M = \frac{\theta}{e_1} \sigma_1$$

erwarten lässt, wenn wir für σ_1 , wie es die Biegelehre folgerichtig wollen muss, die Zugfestigkeit des Materiales einführen.

Sofort erhebt sich die Frage: Deutet dieser Unterschied nicht darauf hin, dass die Voraussetzungen, welche die Biegelehre bei der Entwicklung ihrer Gleichungen macht, ungenügend zutreffen? Und im Anschluss hieran entsteht der Zweifel: Ist es richtig, in die Gleichung zur Ermittlung der Abmessungen eines auf Biegung in Anspruch genommenen Körpers als zulässige Anstrengung des Materiales Werte einzuführen, welche aus den Ergebnissen von Zugversuchen abgeleitet wurden?

Im allgemeinen half man sich rasch über diese Ungewissheit hinweg, indem folgende Erwägung als maßgebend betrachtet wurde.

Die Gleichungen der Biegelehre seien auf Grund des Elastizitätsgesetzes entwickelt, infolge dessen seien sie nur richtig innerhalb der Elastizitätsgrenze; ihre Anwendung auf den Bruch sei deshalb nicht statthaft und müsse zu unrichtigen Ergebnissen führen. Es könne nicht die Absicht sein, einen Träger so zu konstruieren, dass seine Vorzüge erst im Augenblicke des Bruches zur Geltung gelangen; sondern man wolle den Träger nie stärker belasten, als es die Erhaltung der vollkommenen Elastizität der Fasern erlaube. Dementsprechend sei davon auszugehen, dass die Inanspruchnahme des Materiales in der am stärksten gezogenen Faser innerhalb der Elastizitätsgrenze gegenüber Zug und in der am stärksten gepressten Faser innerhalb der Elastizitätsgrenze gegenüber Druck bleibe¹⁾. Als zulässige Anstrengung des Materiales sei hiernach zu nehmen ein Bruchteil der Spannung bzw. Pressung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht.

¹⁾ In der Konstruktionslehre für den Maschinenbau von Moll und Reuleaux, Braunschweig 1859 bis 62, heißt es gegenüber den bekannten, zu den bezeichneten Zweifeln anregenden Ergebnissen der von Hodgkinson vor reichlich einem halben Jahrhundert angestellten Versuche mit gusseisernen Trägern, S. 65: »Da es nicht die Absicht sein kann, einen Träger so zu konstruieren, dass seine Vorzüge erst im Augenblicke des Bruches zur Geltung kommen, sondern man den Träger nie stärker belasten will, als es die Erhaltung der vollkommenen Elastizität der Fasern erlaubt, so kann es nicht zweifelhaft seine usw.«

In demjenigen Abschnitt der »Konstruktionslehre«, welcher die für den Maschinenbau wichtigsten Gleichungen aus der Festigkeitslehre giebt, wird der Bezug auf die Elastizitätsgrenze als der einzig richtige für die Zwecke des Maschinenbaues durchgeführt. Wegen dieser Eigentümlichkeit wurde dieser Abschnitt (vergl. Vorwort S. IX) in besonderem Abdruck bereits 1854 veröffentlicht. (Die Festigkeit der Materialien, namentlich des Gusses und Schmiedeeisens, Braunschweig.)

In der Arbeit: Höhere Ingenieurwissenschaften, Theorie der eisernen Träger mit Doppelflanschen, von A. H. Klose, Hannover 1862, findet sich in § 27 gegenüber den Hodgkinson'schen Versuchen die Aeußerung: »Bei tragenden Konstruktionen ist es niemals die Absicht, einen Konstruktionsteil zu brechen oder auch nur dem Bruche nahe zu bringen; vielmehr beabsichtigt man, die sogenannte Elastizitätsgrenze des Materiales nicht zu überschreiten; hieraus folgt aber, dass ein solcher Träger ganz anders konstruiert sein muss, als ein anderer, der den größten Widerstand gegen Bruch leisten soll.«

Wir wollen diese Erwägung etwas schärfer ins Auge fassen.

Maßgebend soll sein die Elastizitätsgrenze. Was wird unter Elastizitätsgrenze verstanden? Soll es die Spannung sein, bis zu welcher die Dehnungen bzw. Zusammendrückungen proportional den Spannungen sind? Oder soll es diejenige Spannung sein, über welche hinaus bleibende Formänderungen eintreten, während für unterhalb dieser Grenze bleibende Spannungen der Körper wieder vollständig in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, sobald die äußeren Kräfte aufhören zu wirken?

Hinsichtlich der ersteren, von Fairbairn herrührenden Auffassung ist festzustellen, dass bei Gusseisen Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen überhaupt nicht besteht, selbst nicht angenähert. Die Dehnungen nehmen stärker zu als die Spannungen, infolge dessen der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung sich vermindern muss (vergl. Z. 1887 S. 222; auch wird später noch auf die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls einzugehen sein). Wenn also Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen überhaupt nicht besteht, so kann auch eine Grenze dieser Proportionalität nicht vorhanden sein.

Was sodann die andere, ältere und wohl verbreitetste Auffassung anbelangt, welche innerhalb der in Frage stehenden Grenze vollkommene Elastizität voraussetzt und mit derjenigen der unten genannten Autoren übereinstimmt¹⁾, so ist darauf hinzuweisen, dass die meisten Körper schon bei verhältnismäßig sehr kleinen Beanspruchungen bleibende Formänderungen erfahren, so dass die derart bestimmte Elastizitätsgrenze bei Verwendung genügend weit reichender Messinstrumente oder genügend langer Probestäbe an Null heranrückt. Von den üblichen Konstruktionsmaterialien des Maschinenbaues ist es nur sehr harter Stahl, wie er z. B. für Werkzeuge benutzt wird, bei dem die bleibenden Formänderungen anfangs so klein sind, dass sie mit den heute verwendeten Messinstrumenten nicht bestimmt werden können. Ganz besonders früh aber stellen sich bei auf Biegung beanspruchten Gusseisenkörpern bleibende Formänderungen ein.

Greifen wir aus einer größeren Anzahl von Versuchen, welche ich in dieser Richtung mit verschiedenen Querschnittsformen angestellt habe, und die sämtlich den soeben ausgesprochenen Satz bestätigen, den folgenden heraus.

Flachstab von Gusseisen, gehobelt.

Breite 30,0 mm, Höhe 90,0 mm, Länge 1050 mm; der Stab wird nach Maßgabe der Fig. 2 auf Biegung beansprucht. Entfernung der Auflagestützen $l = 1000$ mm.

Reuleaux sagt in der neuesten Auflage des »Konstruktors« (1882) S. 24: »Die Elastizitätsgrenze wird in einem gebogenen Stabe auf Zug- und Druckseite einzeln erreicht, wenn die dort eintretende Spannung \mathcal{S} gleich dem betreffenden Tragmodul wird«, d. h. nach S. 1 des Werkes gleich der Spannung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht. »Man darf daher für \mathcal{S} nie einen so großen Wert einsetzen, dass auf einer der beiden Seiten der Tragmodul überschritten würde. Diese Bedingung wird bei zweiachsig symmetrischem Querschnitt erfüllt, wenn man für \mathcal{S} den durch die Sicherheit dividierten kleineren Tragmodul setzt, bei Gusseisen also die Sicherheit stets auf den Zugmodul bezieht.«

Hiernach wird also empfohlen, als zulässige Anstrengung des Materiales einen Bruchteil des Tragmodules zu nehmen, dessen Größe der Sicherheitskoeffizient bestimmt.

Für den Zugtragmodul des Gusseisens giebt Reuleaux 750 kg und für den Drucktragmodul 1500 kg/qcm. Demgemäß werden dann S. 25 für gusseiserne Träger als »Querschnitte von gleicher Festigkeit« solche Querschnitte empfohlen, bei welchen die oben bezeichneten Faserabstände e_1 und e_2 in dem Verhältnisse $e_1 : e_2 = 1 : 2$ stehen.

¹⁾ »Die Grenze, bis zu der eine Faser über den Normalzustand hinaus verlängert werden darf, ohne ihre vollkommene Elastizität zu verlieren, nennen wir die Elastizitätsgrenze der Verlängerung, und im Gegensatze dazu die Grenze, bis zu welcher eine Faser unter den Normalzustand verkürzt werden darf, ohne ihre vollkommene Elastizität einzubüßen, die Elastizitätsgrenze der Verkürzung.« (Moll und Reuleaux, Konstruktionslehre für den Maschinenbau S. 3.)

Belastung in kg P	$\sigma = \frac{P \cdot 100}{4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 9^2}$	Durchbiegung in der Mitte in Zehntelmillimeter		
		gesamte	bleibende	federnde
100	62	0	0	0
300	185	2,52	0,25	2,27
600	370	6,72	0,77	5,95
900	556	11,10	1,22	9,88
1200	741	15,75	1,87	13,88
1500	926	20,45	2,27	18,18

Ueber die Bestimmung der Durchbiegung vergl. dritten Abschnitt Ziff. 2.

Wird die Durchbiegung bei einer Belastung $P = 100$ kg, entsprechend einer Normalspannung der am stärksten gezogenen Faser von 62 kg/qcm, mit 0 bezeichnet, und nach jeder Belastung wieder auf $P = 100$ kg zurückgegangen, so findet sich hiernach, dass bereits bei einer Spannung von 185 kg, d. i. ungefähr ein Viertel der von Realeaux zu 750 kg angegebenen Elastizitätsgrenze gegenüber Zug, eine bleibende Durchbiegung von 0,25 mm eintritt, d. h. fast 10 pCt. der gesammten Durchbiegung von 0,252 mm. Bei der Spannung $\sigma = 741$ kg, welche noch um ein geringes unter jener Grenze von 750 kg liegt, beträgt die bleibende Durchbiegung 0,187 mm, d. h. $100 \frac{0,187}{15,75} = \approx 12$ pCt. der gesammten Durchbiegung. Würde man die Durchbiegungen von $P = 0$ aus gemessen haben, so wären sie verhältnismäßig noch weit bedeutender ausgefallen.

Das vorstehende befindet sich in Uebereinstimmung mit der täglichen Erfahrung, dass gusseiserne Stäbe oder Träger schon bei verhältnismäßig geringer Belastung eine bleibende Durchbiegung gegenüber ihrem ursprünglichen Zustande erleiden. Dass dieselbe mit der Zeit zunimmt, ist ebenfalls eine bekannte Thatsache.

Aus dem vorstehenden erhellt, dass eine Elastizitätsgrenze weder im Sinne der ersten noch im Sinne der zweiten Auffassung für auf Biegung beanspruchte Gusseisenstäbe vorhanden ist. Diese Thatsache entzieht — jedenfalls für Gusseisen — der Vorschrift, als zulässige Anstrengung des Materials einen Bruchteil der Spannung zu nehmen, welche der Elastizitätsgrenze entspricht, allen Boden.

Diese Klarstellung führt uns zurück auf die Frage: Deutet der große Unterschied, welcher für Gusseisen zwischen der Zugspannung beim Zerreißen und zwischen der größten Zugspannung beim Bruch eines gebogenen Stabes, ermittelt auf grund der Sätze der Biegungslehre, besteht, nicht darauf hin, dass die Voraussetzungen, welche diese Lehre bei der Entwicklung ihrer Gleichungen macht, wenigstens für Gusseisen ungenügend zutreffen?

Diese Frage ist mit ja zu beantworten, wie sich aus dem folgenden ergeben wird.

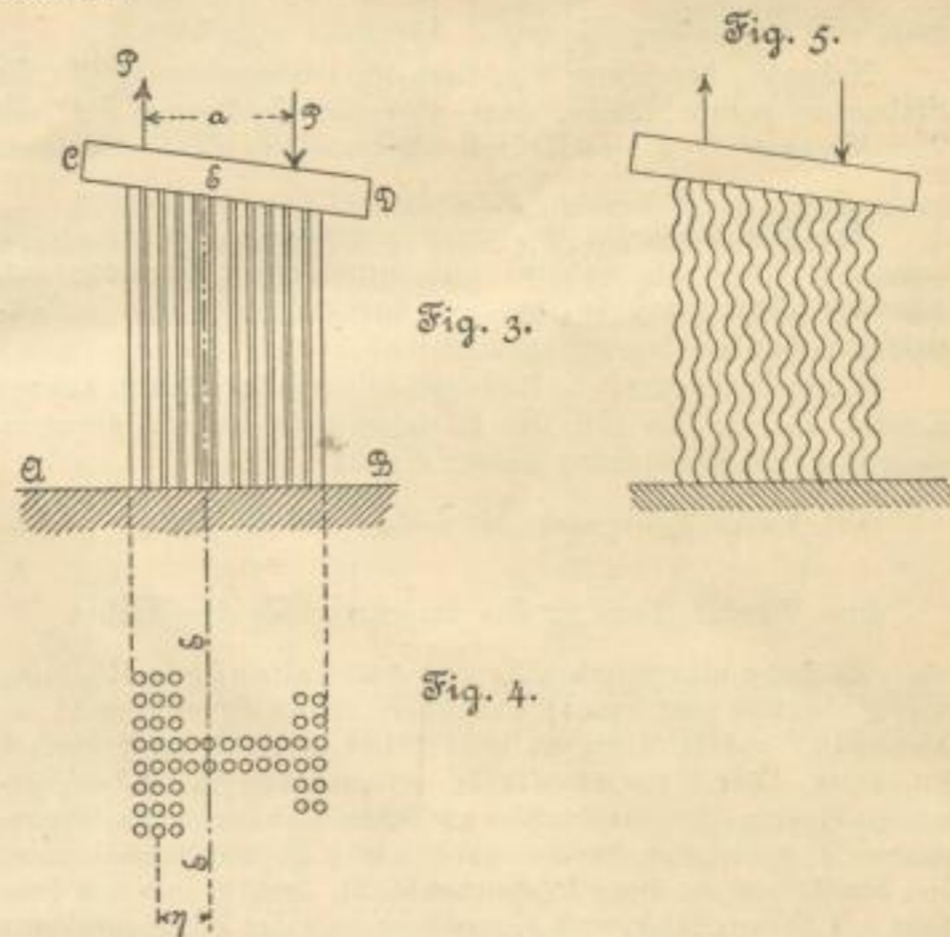
Zweiter Abschnitt.

Die Voraussetzungen der Biegungslehre und ihre Zulässigkeit, namentlich gegenüber Gusseisen.

Die Voraussetzungen, welche zur Bestimmung der Biegungsanstrengung, Gl. 1 bis 3, führen, und welche schon vor einem halben Jahrhundert Gegenstand der Bemängelung waren, sind:

- das System der äußeren Kräfte giebt für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht schneidet;
- die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, wirken nicht aufeinander ein, sind also unabhängig von einander;
- die ursprünglich ebenen Querschnitte des Stabes bleiben eben;
- der Elastizitätsmodul ist für alle Fasern gleich groß, also auch unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen der Dehnungen oder Spannungen.

Diese Annahmen treten am deutlichsten vor das Auge, wenn wir uns einen Körper so ausgeführt und beansprucht denken, dass sie erfüllt sind. Zu dem Zwecke stellen wir uns vor, der Stab bestehe aus einzelnen, von einander unabhängigen, ursprünglich gleich langen Fasern, etwa wie die Fig. 3 und 4 (Durchschnitt) erkennen lassen. Mit dem einen Ende seien dieselben im Boden AB befestigt, mit dem anderen an der Platte CD . Die letztere, welche wir uns gewichtslos denken wollen, werde von einem Kräftepaar PP , dessen Moment $M = P \cdot a$ ist, ergriffen. Sie dreht sich infolgedessen um eine Achse EE , deren Lage auf ganz dieselbe Weise zu bestimmen ist, wie diejenige der Nullachse (neutralen Achse) eines gebogenen Stabes. Die links von EE gelegenen Fasern werden gedehnt, die rechts befindlichen erfahren eine Verkürzung. Von den gedrückten Fasern werde vorausgesetzt, dass sie sich nach der Seite hin nicht ausbiegen. Die Auffassung der Fasern als vollkommen gleicher Spiralfedern, etwa wie in Fig. 5 gezeichnet, wird diese Vorstellung erleichtern.



Wie ohne weiteres ersichtlich, sind bei dieser Sachlage die Dehnungen der Fasern proportional dem Abstände von der Achse, so dass also, wenn die Dehnung, d. h. die auf die Einheit der ursprünglichen Länge bezogene Verlängerung im Abstände 1 von der Achse ϵ' beträgt, die um η davon abgelegenen Fasern eine Dehnung

$$\epsilon = \epsilon' \eta$$

erfahren, womit, sofern E den Elastizitätsmodul der Fasern bezeichnet, eine Spannung

$$\sigma = E\epsilon = \epsilon' \eta E$$

verknüpft ist, der bei dem Faserquerschnitt f_0 eine Kraft

$$\sigma f_0 = \epsilon' \eta E f_0$$

entspricht.

Die abgebräuschte Summe dieser inneren Kräfte muss gleich Null sein, d. h.

$$\sum \sigma f_0 = \sum \epsilon' \eta E f_0 = 0,$$

woraus bei Unveränderlichkeit von E

$$\sum \eta f_0 = 0,$$

d. h. die Nullachse EE geht durch den Schwerpunkt sämtlicher Faserquerschnitte, bildet also die zweite Hauptachse des Querschnittes.

Ferner muss sein

$$\begin{aligned} \sum \sigma f_0 \cdot \eta &= M \\ M &= \sum E \epsilon' f_0 \eta^2 \end{aligned}$$

Da E constant und $\Sigma f_0 \eta^2 = \theta$, so folgt

$$M = E \varepsilon' \theta$$

$$E \varepsilon' = \frac{M}{\theta}$$

Unter Beachtung, dass im Abstände $+e_1$ die Spannung

$$\sigma_1 = E \varepsilon' e_1,$$

findet sich für diese

$$\sigma_1 = \frac{M}{\theta} e_1$$

und für die Spannung σ_2 im Abstände $-e_2$

$$\sigma_2 = -\frac{M}{\theta} e_2,$$

so dass

$$k_1 \geq \frac{M}{\theta} e_1 \quad k_2 \geq \frac{M}{\theta} e_2$$

ganz wie zu Anfang im ersten Abschnitt angeführt.

Nebenbei bemerken wir, dass im vorliegenden Falle die Stabachse gerade bleibt, dass also das Kräftepaar PP mit dem Momente $P \cdot a$ eine Krümmung derselben nicht veranlasst.

Was nun zunächst die unter b genannte Voraussetzung anbelangt, dass die Fasern eine gegenseitige Wirkung aufeinander nicht ausüben, so ist nachstehendes zu berücksichtigen.

Wird ein Rundstab in Richtung seiner Achse durch äußere Kräfte, die sich an ihm das Gleichgewicht halten, gezogen, so tritt unter Einwirkung dieser Kräfte

eine Vergrößerung der Länge des Stabes

und

eine Verminderung des Durchmessers des Stabes

ein. Es findet also gleichzeitig eine Ausdehnung in Richtung der Stabachse und eine Zusammenziehung senkrecht zu derselben, welche übrigens weit (etwa 3 bis 4 mal) kleiner ist, statt. Bei Materialien, für welche innerhalb einer gewissen Grenze Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen angenommen werden darf, wie z. B. bei Schmiedeeisen und Stahl, besteht diese Proportionalität, derart, dass das Produkt aus Elastizitätsmodul E und Dehnung der Längeneinheit ε gleich der Normalspannung σ , d. h. $\sigma = E\varepsilon$, nur so lange, als die Quersammenziehung unbehelligt vor sich gehen kann. Die bei einer bestimmten Normalspannung eintretende Dehnung des Stabes in Richtung der Achse fällt geringer aus, wenn die Quersammenziehung (etwa durch radial auswärts wirkende Kräfte) gehemmt wird, dagegen größer, wenn sie durch radial einwärts auf die Mantelfläche des Stabes wirkende Kräfte verstärkt wird. In Uebereinstimmung hiermit weist ein unter mehr oder minder vollständiger Hinderung der Quersammenziehung zerrissener Stab eine größere Zugfestigkeit auf, wie ich bereits früher in dieser Zeitschrift 1880 S. 285 u. f. erörtert habe.

Wird der Stab in Richtung seiner Achse gedrückt, so ändern sich einfach die Vorzeichen der Verlängerung und der Zusammenziehung: Der Stab erfährt gleichzeitig eine Verkürzung in Richtung der Achse und eine Ausdehnung senkrecht zu derselben (Querdehnung).

Dem gesagten entsprechend, werden die gedehnten, links von EE liegenden Fasern ihren Querschnitt zu vermindern bestrebt sein, während die gedrückten, rechts von EE befindlichen Fasern auf eine Vergrößerung ihres Querschnittes hinstreben. Diese Formänderungen senkrecht zur Faserachse sind, falls sie sich ausbilden können, um so bedeutender, je mehr die Dehnungen (positiv oder negativ) in Richtung der Fasern betragen.

Da nun hier diese Längsdehnungen mit dem Abstände von der Nullachse absolut zunehmen, so werden die von letzterer weiter abstehenden Fasern sich quer auch mehr zusammenziehen bzw. weiter ausdehnen wollen, als die unmittelbar benachbarten, nach der Nullachse hin gelegenen;

infolgedessen werden diese die Quersammenziehung bzw. Ausdehnung zu einem Teile hindern. Dieser gegenseitige Einfluss der Fasern senkrecht zu einander muss die oben genannte Beziehung $\sigma = E\varepsilon$ beeinträchtigen und die Festigkeit etwas erhöhen.

Außerdem werden aber auch die fest miteinander verbundenen Fasern noch dadurch auf einander einwirken müssen, dass sich die weiter von der Nullachse abstehenden mehr ausdehnen und deshalb gegenüber den unmittelbar benachbarten, dieser Achse näher liegenden ein Gleitungsbestreben haben.

Inbezug auf den gegenseitigen Einfluss der Fasern werden sich verschiedene Querschnittsformen verschieden verhalten. Vergleichen wir beispielsweise den rechteckigen Querschnitt Fig. 6 mit dem H-förmigen Fig. 7, so erkennt man sofort, dass die auf der Linie GG liegenden Fasern des ersteren

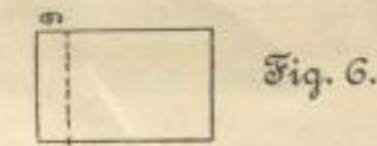


Fig. 6.

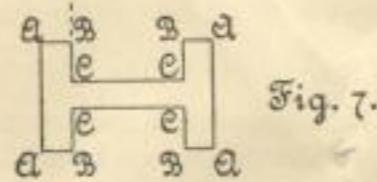


Fig. 7.



Fig. 8.

von ihren benachbarten inneren Fasern mehr beeinflusst werden müssen, als die in gleichem Abstände liegenden Fasern $BCCB$ des anderen Querschnittes. Diese sind eben zum größten Teile nach innen frei. Wird beispielsweise aus einem und demselben Material ein Stab vom Querschnitt Fig. 6 und ein solcher vom Querschnitt Fig. 7 hergestellt, alsdann für beide auf grund der Biegungslehre, d. h. aus der Gleichung

$$M = \sigma_1 \frac{\theta}{e_1}$$

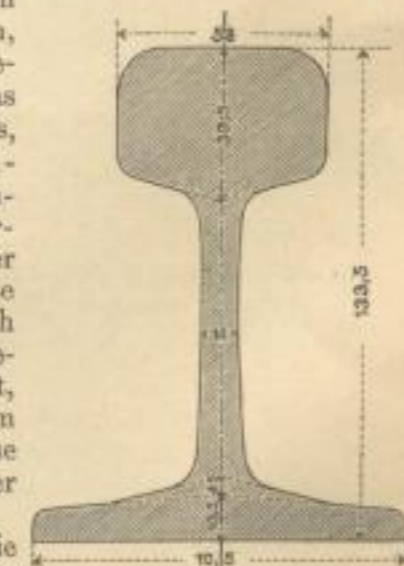
die bei der Bruchbelastung eintretende größte Faserspannung ermittelt, so muss sich nach dem Erörterten für den ersten Stab ein etwas größerer Wert ergeben, als für den letzteren¹⁾.

Je mehr sich die Querschnittsfläche in zwei schmale, der Nullachse parallele Streifen zusammendrängt (Fig. 8), um so geringer wird der gegenseitige Einfluss der Fasern aufeinander, um so zutreffender werden die Sätze der Biegungslehre unter sonst gleichen Verhältnissen.

Was die unter c) aufgeführte Voraussetzung betrifft, dass die Querschnitte eben bleiben, so trifft sie auch nicht streng zu. Die Schubkraft, welche mit dem biegenden Moment unvermeidlich verknüpft zu sein pflegt, muss selbst bei unver-

¹⁾ Hieraus folgt z. B. für die breitbasige Eisenbahnschiene, dass die im Kopfe des Profils zusammengedrückte Masse der Dehnung (positiv oder negativ) einen verhältnismäßig (im Vergleich zu dem, was die Biegungslehre annimmt) größeren Widerstand entgegengesetzt, als das Material in dem breiten, wenig hohen Fuß, und dass infolge dessen die tatsächliche Nullachse oberhalb der horizontalen Schwerpunktsachse des Querschnittes gelegen sein muss. Wird der letztere so bestimmt, dass diese Achse in halber Höhe liegt, so kann hiernach der Querschnitt nicht als rationell bezeichnet werden, namentlich dann nicht, wenn der Fuß sehr breit ist. In diesem Falle muss die wagerechte Hauptachse des Querschnittes entsprechend tiefer als in halber Höhe sich befinden.

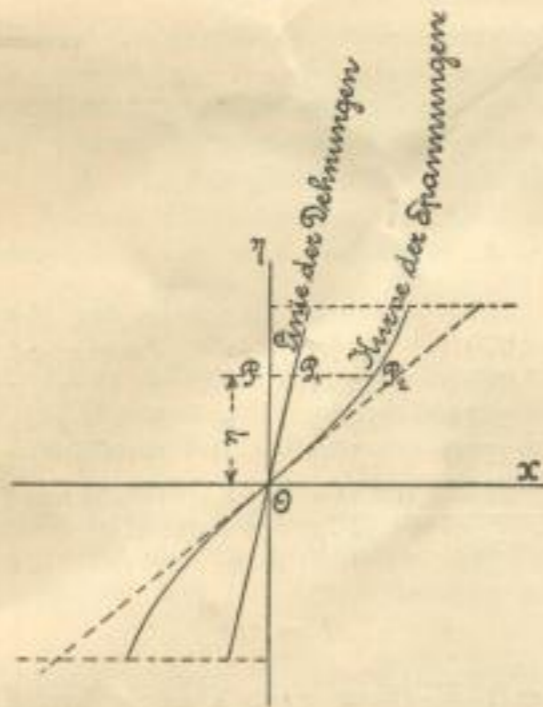
Das Vorstehende liefert auch die Erklärung für eine verhältnismäßig größere Widerstandsfähigkeit starkköpfiger Stahlschienen u. s. w. sowohl gegenüber gewöhnlicher Biegungsbeanspruchung als auch gegenüber Schlagproben.



änderlichem Elastizitätsmodul auf Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte hinwirken. Doch scheint, soweit das bis heute vorliegende Material ein Urteil gestattet, die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte innerhalb gewisser Grenzen bei manchen Materialien zulässig; ob bei Gusseisen, ist allerdings fraglich.

Die Voraussetzung endlich, dass der Elastizitätsmodul konstant ist, also unabhängig von der Größe und dem Vorzeichen der Dehnung oder Spannung, kann nur bei manchen Materialien, wie z. B. bei Schmiedeseisen und Stahl, als zulässig bezeichnet werden; bei Gusseisen ist sie selbst angenähert nicht zutreffend. Für einen Stab aus diesem Material werden unter der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, zwar die Dehnungen proportional mit dem Abstände von der Nullachse wachsen, nicht aber die Spannungen; letztere müssen vielmehr langsamer zunehmen, entsprechend dem Umstande, dass der Elastizitätsmodul mit wachsender Spannung abnimmt. Fig. 9

Fig. 9.



veranschaulicht dies. Für den beliebigen Querschnittspunkt P sei PP_1 die Dehnung und PP_2 die Spannung; dann ist für Gusseisen der geometrische Ort aller Punkte P_2 eine gegen die Achse der η gekrümmte Fläche, wenn auch die Punkte P_1 auf einer durch die Nullachse O gehenden Ebene liegen. Die Spannungen sind also in den am stärksten gespannten Fasern tatsächlich kleiner, als sie sich nach den Gleichungen 1 bis 3 ergeben. Hierin liegt eine Erklärung für den im ersten Abschnitt hervorgehobenen Unterschied der Bruchfestigkeiten, ermittelt aus Zug- und aus Biegeversuchen.

Daraus folgt dann weiter, dass das nach der Nullachse hin gelegene Material im Verhältnis zu seinem Abstände von dieser stärker gespannt ist, als das weiter auswärts befindliche. Es ist also das erstere bei der Biegung nicht ganz so schlecht ausgenutzt, als man bisher annahm. Daher wird z. B. ein Stab mit kreisförmigem Querschnitt eine größere Bruchspannung, bestimmt aus der Gleichung

$$M = \sigma_1 \frac{\theta}{e_1},$$

liefern müssen, als ein Stab mit quadratischem Querschnitt; bei ersterem liegt eine verhältnismäßig größere Materialmasse in der Nähe der Nullachse als bei letzterem. Der quadratische Stab wird dagegen eine größere Biegefestigkeit aufzuweisen haben, als der \mathbf{I} -förmige Stab, usw.

Dritter Abschnitt.

Versuchsergebnisse zur Beurteilung der Erörterungen im ersten und zweiten Abschnitt.

Um die Sache durch Versuche klarzulegen oder wenigstens mit mehr Sicherheit festzustellen, als dies auf dem Wege der einfachen Ueberlegung möglich ist, liefs ich im Januar 1886

aus einem und demselben Gusseisen¹⁾ 1050 mm lange Stäbe von kreisförmigem, quadratischem, rechteckigem Querschnitt sowie Träger mit gleichen und ungleichen Doppelflanschen herstellen. Ueber die erlangten Ergebnisse giebt das nachstehende Auskunft.

1. Einfluss der Querschnittsform auf die Biegefestigkeit.

a) Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt aus Gusseisen, gedreht.

α) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

No.	Durchmesser d cm	Bruchbelastung P kg	Biegefestigkeit $25 P : \frac{\pi}{32} d^3$	Bemerkungen
1	3,00	305	2877	Bruch 22mm aus der Mitte, gesund
2	3,00	310	2925	» 12 » » » » »
3	3,02	315	2913	» 21 » » » » »
Durchschnitt 2905				

β) Die bei der Versuchsreihe α entstandenen Bruchstücke wurden, falls es ihre Länge zuliefs, nochmals der Biegeprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen. Vom Stabe No. 1 und 3 konnte je nur das eine Stück verwendet werden, da die Länge des anderen zu knapp war.

No.	d cm	P kg	$12,5 P : \frac{\pi}{32} d^3$	Bemerkungen
1	3,00	585	2759	Bruch 5 mm aus der Mitte, gesund
2	3,00	665	3137	» 1 » » » » »
	3,00	645	3042	» 2 » » » » »
3	3,02	650	3006	» 2 » » » » »
Durchschnitt 2986				

γ) Aus den 4 Bruchstäben des Stabes No. 2 wurden 4 Rundstäbe zu Zugversuchen durch Drehen herausgearbeitet (Fig. 1).

No.	Durchmesser d cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Bruchbelastung Z kg	Zugfestigkeit $Z : \frac{\pi}{4} d^2$ kg	Bemerkungen
1	1,98	3,08	4450	1445	Bruch gesund
2	1,99	3,11	4220	1355	» »
3	1,98	3,08	4340	1409	» »
4	1,98	3,08	4240	1377	» »
Durchschnitt 1396					

Wird die aus 3 Biegeversuchen mit dem Stabe No. 2 und dessen Bruchstücken erhaltene Biegefestigkeit, d. i.

$$\frac{2925 + 3137 + 3042}{3} = 3035,$$

verglichen mit dem Durchschnitt der Zugfestigkeiten, welche die 4 Bruchstücke lieferten, d. i.

$$1396,$$

so ergibt sich das Verhältnis

$$3035 : 1396 = 2,17 : 1.$$

Der Vergleich des Durchschnittsergebnisses unter α führt zu

$$2905 : 1396 = 2,08 : 1.$$

Demnach beträgt die Biegefestigkeit kreisförmiger Gusseisenstäbe, ermittelt in der wiederholt bezeichneten Weise, um 117 bzw. 108 pCt. mehr als die Zugfestigkeit.

¹⁾ Zur Beurteilung der Güte des Materiales darf auf die Versuche unter Ziff. 1 b α verwiesen werden. Die Durchbiegungen lassen erkennen, dass Elastizität und Zähigkeit in reichlichem Mafse vorhanden ist. Spez. Gewicht durchschnittlich 7,17.

b) Stäbe mit quadratischem Querschnitt aus Gusseisen, gehobelt.

α) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

No.	Breite b cm	Höhe h cm	Bruch- belastung P kg	Bruch- festigkeit $25 P: \frac{1}{6} b h^2$ kg	Bemerkungen
1	3,08	3,05	465	2435	Durchbiegung bei $P = 400$ kg : 21,3 mm gesammte, 5,0 mm bleibende, » $P = 465$ » : 30,0 » » Bruch 11 mm aus der Mitte, gesund,
2	3,03	3,03	455	2453	Durchbiegung bei $P = 400$ kg : 22,8 mm gesammte, 5,8 mm bleibende, » $P = 455$ » : 29,2 » » Bruch 2 mm aus der Mitte, gesund,
3	3,04	3,05	420	2228	Durchbiegung bei $P = 400$ kg : 20,7 mm gesammte, 4,8 mm bleibende, » $P = 420$ » : 23,5 » » Bruch nahe der Mitte, gesund.
Durchschnitt				2372 kg.	

β) Die bei der Versuchsreihe α entstandenen Bruchstücke wurden nochmals der Biegungsprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen.

No.	b	h	P	$12,5 P: \frac{1}{6} b h^2$	Bemerkungen
1	3,08	3,05	1020	2671	Bruch in der Mitte, gesund,
	3,08	3,05	800	—	Bruchfl. zeigt ungesunde Stellen,
2	3,03	3,03	980	2642	Bruch 8 mm v. d. Mitte, gesund,
	3,03	3,03	1000	2695	» 5 » » » » »
3	3,04	3,05	855	2268	» 7 » » » » »
	3,04	3,05	910	2414	» 2 » » » » »
Durchschnitt				2538.	

γ) Aus den 4 Bruchstücken des Stabes No. 2 wurden 4 Rundstäbe zu Zugversuchen (Fig. 1) durch Drehen herausgearbeitet.

No.	Dmr. d cm	Quer- schnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Bruch- belastung Z kg	Zug- festigkeit $Z: \frac{\pi}{4} d^2$ kg	Bemerkungen
1	2,04	3,27	3530	—	Bruchfl. zeigt ungesunde Stellen,
2	2,04	3,27	4475	1369	Bruch gesund,
3	2,02	3,20	4170	1303	» »
4	2,03	3,24	4390	1355	» »
Durchschnitt				1342.	

Der unter a) γ. gemachte Vergleich liefert hier

$$\frac{2453 + 2642 + 2695}{3} : 1342 = 2597 : 1342 = 1,94 : 1$$

beziehungsweise $2372 : 1342 = 1,77 : 1.$

c) Stäbe mit rechteckigem Querschnitt aus Gusseisen, gehobelt.

α) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

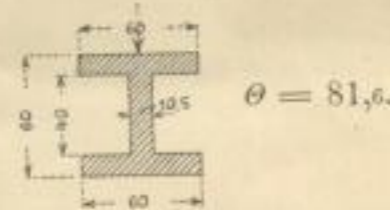
No.	Breite b cm	Höhe h cm	Bruch- belastung P kg	Bruch- festigkeit $25 P: \frac{1}{6} b h^2$ kg	Bemerkungen
1	3,00	9,00	3950	2438	Bruch 5 mm aus der Mitte, gesund,
2	3,00	9,00	3880	2395	» 7 » » » » »
3	9,00	3,00	1270	2352	» 5 » » » » »
Durchschnitt				2395.	

Hieraus ist ersichtlich, dass es bei dem rechteckigen Querschnitt so gut wie gleich ist, ob die große Seite die Höhe oder die Breite bildet.

β) Die bei der Versuchsreihe α erhaltenen Bruchstücke wurden nochmals der Biegungsprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen.

No.	b	h	P	$12,5 P: \frac{1}{6} b h^2$	Bemerkungen
1	9,00	3,00	2895	2681	Bruch in der Mitte, gesund,
	9,00	3,00	2710	2509	» 7 mm aus d. Mitte, gesund,
2	9,00	3,00	2850	2639	» 6 » » » » »
	9,00	3,00	2810	2602	» 5 » » » » »
3	9,00	3,00	2710	2509	» in der Mitte, gesund,
	9,00	3,00	2650	2454	» 10 mm aus d. Mitte, gesund.
Durchschnitt				2566.	

d) Stäbe mit I-förmigem Querschnitt aus Gusseisen, gehobelt.



α) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

No.	Bruch- belastung P	Bruch- festigkeit $25 P: \frac{81,6}{3}$	Bemerkungen
1	2090	1921	Bruch 30 mm aus der Mitte, gesund,
2	2130	1958	» in der Mitte,
3	2240	2059	» 20 mm aus der Mitte, gesund.
Durchschnitt			1979.

β) Die bei der Versuchsreihe α erhaltenen Bruchstücke wurden, falls es ihre Länge erlaubte, nochmals der Biegungsprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen.

No.	P	$12,5 P: \frac{81,6}{3}$	Bemerkungen
1	4800	2206	Bruch nahe der Mitte, gesund,
	—	—	—
2	4570	2100	Bruch nahe der Mitte, gesund,
	4550	2091	» 10 mm aus der Mitte, gesund,
3	4550	2091	» nahe der Mitte, gesund,
	4420	2031	» 5 mm aus der Mitte, gesund.
Durchschnitt			2104.

Aus dem vorstehend unter a bis d aufgeführten Versuchsmaterial folgt, dass für ein und dasselbe Gusseisen, dessen Zugfestigkeit im Durchschnitt

$$= \frac{1396 + 1342}{2} = 1369 \text{ kg,}$$

die aus der Gleichung $\sigma_1 = \frac{M}{\theta} e_1$ ermittelten Biegefestigkeiten betragen



für die Querschnittsformen

1. wenn der Stab zum ersten Male zerbrochen wird (α)	2905	2372	2395	1979 kg,
in Teilen der Zugfestigkeit	2,12	1,73	1,75	1,43
2. wenn der Stab zum zweiten Male zerbrochen wird (β)	2986	2538	2566	2106 »
in Teilen der Zugfestigkeit	2,18	1,85	1,87	1,54 1)

Diese Ergebnisse bestätigen die Schlussfolgerungen, welche sich aus dem Vergleich der Voraussetzungen der Biegelehre mit den tatsächlichen Verhältnissen im zweiten Abschnitt ergaben, vollständig: Deutlich zeigt sich, wie die Biegefestigkeit die für das gleiche Material ermittelte Zugfestigkeit um so stärker überschreitet, je mehr sich das Material verhältnismäßig nach der Nullachse hin zusammendrängt, und ihr um so näher kommt, je mehr das Material von der Nullachse abliegt.

Nach diesem Satze müsste beispielsweise ein quadratischer Stab, in der Weise belastet, dass die Kraftebene den Querschnitt in der Diagonale schneidet, eine größere Biegefestigkeit liefern, als wenn diese Ebene parallel mit den Seitenflächen läuft. Ebenso müsste ein Stab mit I-förmigem Querschnitt, senkrecht zum Steg belastet, eine größere Biegefestigkeit ergeben, als bei der Belastung senkrecht zur Flansche.

Zur Kontrolle nach dieser Richtung hin wurden aus Gusseisenstäben, welche mit den bereits besprochenen bei demselben Guss hergestellt und in Reserve gehalten worden waren, zwei solche Stäbe gehobelt.

e) Stab mit quadratischem Querschnitt, Seitenlänge 35,0 mm,

belastet in Richtung der Diagonale.

$$\theta = \frac{1}{12} \cdot 3,5^4 = 12,50 \quad \frac{\theta}{e} = \frac{12,50}{3,5 \sqrt{0,5}} = \frac{12,50}{2,475} = 5,05.$$

An den Auflagerstellen waren je 5 mm breite Flächen angehobelt worden.

a) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

Bruchbelastung	Bruchfestigkeit	
P	$25 P: 5,05$	
kg	kg	
650	3218	Bruch nahe der Mitte, gesund,

d. i. das $\frac{3218}{1369} = 2,35$ -fache der Zugfestigkeit.

1) Die Bruchversuche, durchgeführt mit $l = 500$ mm, müssen notwendigerweise eine etwas größere Biegefestigkeit liefern, schon aus zweierlei Gründen, einmal, weil die in der folgenden Fußbemerkung besprochene Verminderung des biegenden Momentes $\frac{Pl}{4}$ durch die Kraft R der Auflagerentfernung l umgekehrt proportional ist (vergl. Gl. 11), zweitens, weil es eine ziemlich allgemeine Eigenschaft der Körper ist, dass, nachdem der Stab bereits einmal gebrochen wurde, das zweite Zerbrechen in der gleichen Richtung eine etwas größere Bruchfestigkeit ergibt.

β) Die beim Versuch α erhaltenen Bruchstücke wurden nochmals der Biegeprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen.

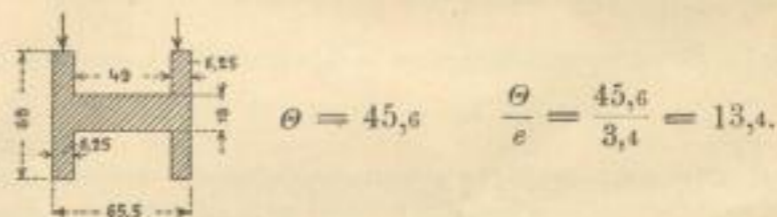
Bruchbelastung	Bruchfestigkeit	
P	$12,5 P: 5,05$	
kg	kg	
1380	3416	Bruch nahe der Mitte, gesund,
1305	3230	> > > > >

Durchschnitt 3323,

d. i. das $\frac{3323}{1369} = 2,43$ -fache der Zugfestigkeit.

f) Stab mit H-förmigem Querschnitt,

belastet parallel zu den Flanschen.



a) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm.

Bruchbelastung	Bruchfestigkeit	
P	$25 P: 13,4$	
kg	kg	
1570	2929	Bruch 4 mm a. d. Mitte, gesund,

d. i. das $\frac{2929}{1369} = 2,14$ -fache der Zugfestigkeit.

β) Die beim Versuch α erhaltenen Bruchstücke wurden nochmals der Biegeprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2) unterworfen.

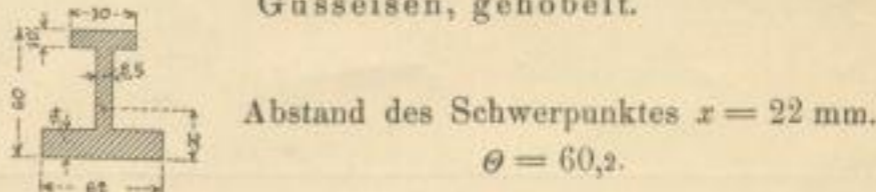
Bruchbelastung	Bruchfestigkeit	
P	$12,5 P: 13,4$	
kg	kg	
3420	3190	Bruch genau in d. Mitte, gesund,
3340	3116	> > > > >

Durchschnitt 3153,

d. i. das $\frac{3153}{1369} = 2,30$ -fache der Zugfestigkeit.

Die unter e und f gefundenen Zahlen bestätigen die Richtigkeit des am Schlusse von d ausgesprochenen Satzes.

g) Stäbe mit unsymmetrischem I-Querschnitt aus Gusseisen, gehobelt.



a) Entfernung der Auflager (Fig. 2) $l = 1000$ mm. Die breite Flansche ist die gezogene.

Bruchbelastung	Bruchfestigkeit	Bemerkungen
No. P	$25 P: \frac{60,2}{2,3}$	
kg	kg	
1 2350	2147	Bruch 9 mm aus der Mitte, gesund
2 2105	1923	> 30 > > > fehlerhafte Stelle
3 2205	2015	> 7 > > > gesund.

Durchschnitt 2028 mit Einschluss des Stabes No. 2
> 2081 > Ausschluss > > >

β) Die bei der Versuchsreihe α erhaltenen Bruchstücke wurden, falls es ihre Länge gestattete, nochmals der Biegeprobe unter Anwendung von $l = 500$ mm (Fig. 2), jedoch in entgegengesetzter Richtung, unterworfen. Die schmale Flansche ist also die gezogene.

No.	P	$12,5 P: \frac{60,2}{3,8}$	Bemerkungen
1	2600	2050	Bruch 8 mm aus der Mitte
	2620	2065	> 10 > > > >
2	2760	2178	> 8 > > > >
	—	—	—
3	2580	2036	> 5 > > > >
	2600	2050	> 8 > > > >

Durchschnitt 2076.

Die breite Flansche brach hierbei nicht, wenn der Versuch nach Zerreißen der schmalen Flansche und der Rippe sofort unterbrochen wurde.

Die für den unsymmetrischen I-Querschnitt erlangten Zahlen

α) 2028 bzw. 2081, β) 2076

weichen nur sehr wenig ab von denjenigen, welche unter d) für den symmetrischen I-Querschnitt gefunden worden sind, d. i.

α) 1979, β) 2111.

2. Durchbiegung gusseiserner Körper.

Die im zweiten Abschnitt angestellten Betrachtungen berechnen zu dem Schlusse, dass das ungenügende Zutreffen der Voraussetzungen der Biegelehre bei Gusseisen auch die Genauigkeit beeinträchtigen muss, mit welcher die Durchbiegung auf dem Wege der Rechnung bestimmt werden kann. Infolgedessen wurden die Stäbe, über deren Festigkeit unter 1) berichtet worden ist, mit einigen Ausnahmen vor dem Zerbrechen Biegeproben zur Feststellung der Durchbiegung unterworfen.

Die Messung der Durchbiegung des an den Enden aufgelagerten und in der Mitte belasteten Stabes erfolgt nach dem Vorgange Bauschinger's dem Wesen nach in der Weise, dass von den als fest zu denkenden Punkten $A_1 B_1$ und C_1 (Fig. 10) jeweils die Abstände der Stabpunkte $A B$ und C ermittelt werden. Bei der Anfangsbelastung P seien diese Abstände

$$\overline{AA_1} = a_0 \quad \overline{BB_1} = b_0 \quad \overline{CC_1} = c_0$$

Wird nun die Belastung um ΔP gesteigert, so wird im allgemeinen nicht bloß der mittlere Punkt C fortrücken, sondern auch die Punkte A und B werden sich gegen die Auflagerstellen hin bewegen, schon infolge der Eigenschaft des Materials, sich zusammenzudrücken.

Sind nun die neuen Werte der Abstände

$$\overline{AA_1} = a \quad \overline{BB_1} = b \quad \overline{CC_1} = c,$$

so ist die gerade Linie, welche durch die beiden Punkte A und B bestimmt wird, fortgerückt um

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a_0+b_0}{2} = \Delta \frac{a+b}{2}$$

während der Punkt C um

$$c - c_0 = \Delta c$$

vorwärts gegangen ist. Die Durchbiegung infolge der Erhöhung der Belastung um ΔP beträgt demnach

$$\Delta c - \Delta \frac{a+b}{2}$$

Fig. 10.



Soll bestimmt werden, wie viel von dieser Durchbiegung bleibt und wie viel wieder verschwindet, so ist der Stab um ΔP zu entlasten und abermals Messung der erwähnten Abstände vorzunehmen usw.

Als Anfangsbelastung liegt es nahe, Null zu nehmen; doch ziehe ich es vor, nicht von Null auszugehen, weil die jeweilige Wiedererlangung des Anfangszustandes mit größerer Genauigkeit erfolgen kann, wenn die Belastung hierbei bereits eine gewisse Größe besitzt.

Auf dem bezeichneten Wege wurden beispielsweise für den Flachstab No. 3 folgende Werte erhalten.

Flachstab No. 3.

Breite 30 mm, Höhe 90 mm, Länge 1050 mm, Gewicht 20,31 kg,

$$\gamma = \frac{20,31}{0,3 \cdot 0,9 \cdot 10,50} = 7,16; \quad I = 1000 \text{ mm (Fig. 10).}$$

P kg	a	b	a+b	$\frac{a+b}{2}$	$\Delta \frac{a+b}{2}$	c	Δc	Durchbiegung in Zehntelmillimeter		
								$\Delta c - \Delta \frac{a+b}{2}$ gesamte	bleibende	federnde
100	18,05	23,95	42,00	21,00	0	58,00	0	0		
300	18,50	26,25	44,75	22,38	1,38	61,00	3,00	2,52	0,25	2,27
100	17,75	24,95	42,70	21,35	0,35	58,60	0,60	0,25		
300	18,30	26,40	44,70	22,35	1,35	61,90	3,90	2,55		
600	18,90	27,35	46,25	23,13	2,13	66,85	8,85	6,72	0,77	5,95
100	17,40	25,85	43,25	21,63	0,63	59,40	1,40	0,77		
600	18,85	27,45	46,30	23,15	2,15	66,90	8,90	6,75		
900	19,70	28,10	47,80	23,90	2,90	72,00	14,00	11,10	1,22	9,88
100	17,50	26,05	43,55	21,78	0,78	59,00	2,00	1,22		
900	19,70	28,10	47,80	23,90	2,90	72,10	14,10	11,20		
1200	20,60	28,50	49,10	24,55	3,55	77,30	19,30	15,75	1,87	13,88
100	17,50	26,25	43,75	21,88	0,88	60,75	2,75	1,87		
1200	20,55	28,50	49,05	24,53	3,53	77,10	19,30	15,77		
1500	21,40	28,80	50,20	25,10	4,10	82,55	24,55	20,45	2,27	18,18
100	17,70	26,35	44,05	22,03	1,03	61,30	3,30	2,27		
1500	21,45	28,75	50,20	25,10	4,10	82,55	24,55	20,45		

Die Biegungslehre liefert für die Durchbiegung y des prismatischen Stabes Fig. 10 ohne Rücksicht auf Eigengewicht die Gleichung

$$y = \frac{P \cdot l^3}{48 E \theta} \quad (4)$$

worin E den als konstant vorausgesetzten Elastizitätsmodul bedeutet. Hieraus lässt sich dann der letztere, sofern y gemessen worden ist, berechnen. So ergibt sich

$$E = \frac{P \cdot l^3}{48 \theta y} \quad (5)^1$$

und im vorliegenden Falle mit der Genauigkeit, mit welcher diese Beziehung für Gusseisen gilt,

für die Belastungsgrenzen	100/300	300/600	600/900	900/1200	1200/1500 kg
entsprechend den Spannungsgrenzen	62/185	185/370	370/556	556/741	741/926 auf 1 qcm
bei den gesamten Durchbiegungen	0,0252	0,0420	0,0438	0,0465	0,0470 cm
den Elastizitätsmodul	907 000	816 000	783 000	737 000	729 000 kg

also entschieden abnehmend mit zunehmender Belastung.

¹⁾ Diese Gleichung wird vielfach zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls verwendet, gleichgiltig, wie groß die Höhe des Stabes im Verhältnis zur Entfernung der Auflager ist. Ist sie verhältnismäßig bedeutend, so verliert die Gleichung 4 und damit auch Gleichung 5 an Genauigkeit, da die Durchbiegung eines Stabes, streng genommen, nicht bloß von dem biegenden Moment, sondern auch von den Schubkräften abhängt, worauf schon Poncelet aufmerksam gemacht hat.

Die von dem biegenden Moment $M = \frac{P \cdot l}{4}$ (Fig. 10) herrührende Durchbiegung in der Mitte beträgt

$$y_1 = \frac{P \cdot l^3}{48 E \theta}$$

Die von der Schubkraft $\frac{P}{2}$ bewirkte Durchbiegung der Achse ist

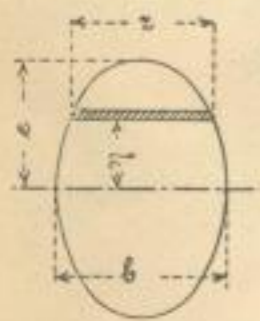
$$y_2 = \int_0^{\frac{l}{2}} \gamma dx = \frac{1}{G} \int_0^{\frac{l}{2}} \tau dx$$

worin bedeutet

G den als konstant betrachteten Schubelastizitätsmodul, und für einen um x von der Mitte C des Stabes abstehenden Punkt der ursprünglich geraden Achse

γ die Schiebung, d. h. die Strecke, um welche sich zwei ursprünglich um 1 von einander abstehende parallele Flächenelemente unter Einwirkung der Schubkraft gegen einander verschieben,

$\tau = \gamma G$ die Schubspannung.



Nach der Lehre von der Schubelastizität ist die Schubspannung in der Nullachse (vergl. nebenstehende Figur)

$$\tau = \frac{P}{\theta b} \int_0^x \eta dF, \quad dF = z d\eta$$

insbesondere für einen rechteckigen Stab

$$\theta = \frac{1}{12} b h^3, \quad \int_0^x \eta dF = \frac{1}{8} b h^2$$

wegen

$$\tau = \frac{3}{4} \frac{P}{b h}$$

$$y_2 = \frac{1}{G} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{3}{4} \frac{P}{b h} dx = \frac{3}{8} \frac{P l}{G b h}$$

$$E = \frac{P \cdot 100^3}{48 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 9^3 \cdot y} = \frac{1000000 P}{8748 y}$$

Für das Belastungsgebiet $P = 100$ und $P = 300$ kg, entsprechend den Spannungsgrenzen

$$\frac{100 \cdot 25}{\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 9^3} = 62 \text{ kg und } \frac{300 \cdot 25}{\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 9^3} = 185 \text{ kg,}$$

ergibt sich mit $y = 0,0252$ cm

$$E = \frac{1000000 (300 - 100)}{8748 \cdot 0,0252} = \sim 907000 \text{ kg.}$$

Diese Rechnung, auch für die übrigen Belastungen durchgeführt, liefert

Mit $G = \frac{3}{8} E$
wird $y_2 = \frac{P l}{E b h}$;

folglich die gesamte Durchbiegung

$$y = y_1 + y_2 = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot \frac{1}{12} b h^3 E} + \frac{P l}{E b h}$$

$$y = \frac{P l}{E b h} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 1 \right] \quad (6)$$

Das Verhältnis des in der Regel unbeachtet bleibenden Wertes y_2 zu dem allein berücksichtigten y_1 beträgt

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{\frac{1}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2} = 4 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (7)$$

Bei den Versuchen, über welche oben berichtet wurde, ist die größte Höhe $h = 90$ mm bei $l = 1000$ mm; infolgedessen

$$y_2 : y_1 = 4 \left(\frac{9}{1000} \right)^2 : 1 = 0,0324 : 1.$$

Da nach Gleichung (6)

$$E = P \frac{l}{b h y} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{l}{h} \right)^2 + 1 \right] \quad (8)$$

so ist in diesem Falle bei Benutzung der Gleichung (5) zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls ein Fehler von rund 3 pCt. gemacht worden.

Bei den bekannten Bauschinger'schen Versuchen mit Ternitzer Bessemerstahl (Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. polytechnischen Schule zu München, 3. Heft 1874 S. 8 u. f.) beträgt

$$h = 140 \text{ mm} \quad l = 1000 \text{ mm}$$

$$y_2 : y_1 = 4 \left(\frac{14}{1000} \right)^2 : 1 = 0,0784 : 1.$$

Da auch hier der aus den Biegungsversuchen festgestellte Elastizitätsmodul von Bauschinger auf Grund der Gleichung (5) berechnet worden ist, so sind die betreffenden Elastizitätsmodule um nahezu 8 pCt. zu klein bestimmt worden.

Thatsächlich ermittelte Bauschinger den Elastizitätsmodul aus den Zugversuchen zu

$$(2,27 + 2,24 + 2,21 + 2,13 + 2,24 + 2,27 + 2,30 + 2,12 + 2,20 + 2,11 + 2,25 + 2,19 + 2,14 + 2,18 + 2,22 + 2,34 + 2,30 + 2,42 + 2,14 + 2,16 + 2,22 + 2,15 + 2,25 + 2,10) \frac{1000000}{24} = 2215000,$$

aus den Biegungsversuchen nach Gl. (5) zu

$$(2,00 + 2,05 + 2,00 + 2,09 + 2,03 + 2,13 + 2,06 + 2,26 + 2,12 + 2,32 + 2,14 + 2,06) \frac{1000000}{12} = 2105000;$$

Wie ersichtlich und wie auch bereits im ersten Abschnitte bemerkt, tritt eine bleibende Durchbiegung schon bei sehr geringer Belastung des Stabes ein.

Der soeben bestimmte Elastizitätsmodul, welcher auf grund der gesammten Durchbiegung ermittelt wurde, bildet deshalb kein Maß der eigentlichen Elastizität d. h. der Federung des Stabes. Wird die Aufstellung eines Maßes für diese beabsichtigt, so könnten hierzu die Werte aus der Reihe für die federnde Durchbiegung herangezogen werden; doch erscheint es rätlich, vorher zu untersuchen, in wie weit diese federnden Durchbiegungen als unveränderlich angesehen werden dürfen, wenn die Belastung wiederholt wird. Wir führen dies aus und erhalten bei Aufeinanderfolge der Belastungen in Zeiträumen von 2 Minuten:

für die Belastungsgrenzen	100/300	300/600	600/900	900/1200	1200/1500 kg	
entsprechend den Spannungsgrenzen	62/185	185/370	370/556	556/741	741/920 >	
die federnden Durch- biegungen nach der	ersten Versuchsreihe	0,0227	0,0368	0,0393	0,0400	0,0430 cm
	zweiten >	0,0222	0,0373	0,0395	0,0410	0,0420 >
	im Durchschnitt	0,0225	0,0370	0,0394	0,0405	0,0425 >
die Werte des Elastizitätsmodul von	1 016 000 bis herab auf				807 000 kg	

also abermals abnehmend mit wachsender Belastung.

also den ersteren um $100 \frac{2215 - 2105}{2105} = \text{rund } 5 \text{ pCt.}$ größer als den letzteren, während mit Rücksicht darauf, dass der Druckelastizitätsmodul etwas bedeutender als der Zugelastizitätsmodul gefunden war, sowie in Hinblick auf den oben im zweiten Abschnitt besprochenen gegenseitigen Einfluss der Fasern des Stabes der Biegeelastizitätsmodul eher größer als kleiner wie derjenige gegenüber Zug zu erwarten stand. Durch die Berücksichtigung des Einflusses der Schubkraft, wie soeben erörtert, findet dieser Widerspruch seine Erklärung.

Bei hohen I-Trägern kann, da hier die Querschnittsbreite in der Nullachse verhältnismäßig gering ist, also τ und γ groß ausfallen, der Einfluss der Schubkraft auf die Durchbiegung ganz bedeutend werden.

Hierdurch erklärt sich auch, wenn wir noch Versuche aus neuester Zeit heranziehen, die von Tetmajer bei der Durchführung seiner wertvollen und interessanten Untersuchung über den Wert des Thomas-Flussschmiedeeisens als Konstruktionsmaterial (Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgen. Polytechnikum in Zürich 1886 S. 95 u. f., sowie Tab. 1, 2 u. 8) gefundene Eigentümlichkeit, dass der Elastizitätsmodul aus den Biegeversuchen sich weit niedriger ergab, als aus den Zugversuchen, und zwar war der Unterschied um so größer, je höher der Träger.

Tetmajer fand z. B. den Elastizitätsmodul für Flusseisen

a) aus Zugversuchen, wobei die Versuchsstäbe entnommen sind:

Deutsches Normalprofil No.	den Flanschen der Träger (Tab. 1 S. 120 u. 121)	den Stegen der Träger (Tab. 2 S. 122 u. 123)	Durchschnitt
24 (24 cm hoch)	2101000	2143000	2122000
19 (19 > >)	2174000	2083000	2128500
14 (14 > >)	2162000	2127000	2144500

b) aus Biegeversuchen mit den ganzen Trägern bei 1500 mm Entfernung der Auflager (Tab. 8 S. 134 u. 135.)

24 (24 cm hoch)	1673000	} berechnet aus der Gl. (5).
19 (19 > >)	1787000	
14 (14 > >)	1983000	

Hiernach wäre der Elastizitätsmodul des ganzen Trägers No. 24, ermittelt aus Biegeversuchen, um $2122000 - 1673000 = 449000$ kleiner als der aus Zugversuchen abgeleitete, also dieser um $449000 : 1673 = 27 \text{ pCt.}$ größer.

Wird der Einfluss der Schubkraft berücksichtigt, so ergibt sich zunächst, da für das Profil No. 24

P	a	b	a+b	$\frac{a+b}{2}$	$\Delta \frac{a+b}{2}$	c	Δc	$\Delta c - \Delta \frac{a+b}{2}$
100	17,80	26,40	44,20	22,10	0	61,35	0	0
300	18,55	26,90	45,45	22,73	0,63	64,20	2,85	2,22
600	19,50	27,50	47,00	23,50	1,40	68,70	7,35	5,95
900	20,30	28,10	48,40	24,20	2,10	73,35	12,00	9,90
1200	21,05	28,55	49,60	24,80	2,70	78,05	16,70	14,00
1500	21,50	28,90	50,40	25,20	3,10	82,65	21,30	18,20
100	17,80	26,50	44,30	22,15	0,05	61,45	0,10	0,05

Die bleibende Durchbiegung hat sich hiernach nur noch um 0,0005 cm (d. i. 0,3 pCt. von 0,1820 cm) vermehrt. Es gilt also auch für das Gusseisen der Satz, dass durch vorhergegangene entsprechend hohe Anstrengung die bleibenden Formänderungen bei wiederholter Inanspruchnahme in gleichem Sinne ganz bedeutend vermindert werden. Wird die Durchbiegung statt nach der gleichen in der entgegengesetzten Richtung vorgenommen, so stellen sich zunächst wieder größere bleibende Formänderungen ein.

Nach dem vorstehenden ergeben sich:

für die Belastungsgrenzen	100/300	300/600	600/900	900/1200	1200/1500 kg	
entsprechend den Spannungsgrenzen	62/185	185/370	370/556	556/741	741/920 >	
die federnden Durch- biegungen nach der	ersten Versuchsreihe	0,0227	0,0368	0,0393	0,0400	0,0430 cm
	zweiten >	0,0222	0,0373	0,0395	0,0410	0,0420 >
	im Durchschnitt	0,0225	0,0370	0,0394	0,0405	0,0425 >
die Werte des Elastizitätsmodul von	1 016 000 bis herab auf				807 000 kg	

also abermals abnehmend mit wachsender Belastung.

$$\theta = 4308 \quad b = 0,87 \text{ cm}$$

$$\int_0^l \eta dF = 10,6 \cdot 1,31 (12 - 0,655) + \left(\frac{12 - 1,31}{2}\right)^2 \cdot 0,87 = 207,2$$

$$\tau = \frac{P}{2\theta b} \int_0^l \eta dF = 0,0276 P$$

und hiermit

$$y_2 = \frac{1}{G} \cdot 0,0276 P \cdot \frac{l}{2}$$

woraus mit

$$G = \frac{3}{8} E$$

$$y_2 = 0,0368 \frac{P}{E} l$$

Die vom biegenden Momente $P \frac{l}{4}$ herrührende und von Tetmajer allein berücksichtigte Durchbiegung beträgt

$$y_1 = \frac{P \cdot l^3}{48 E \theta} = \frac{150^3}{48 \cdot 4308} \cdot \frac{P}{E} l = 0,1089 \frac{P l}{E}$$

Die Vernachlässigung von y_2 kommt also im vorliegenden Fall auf einen Fehler von $100 \frac{368}{1089} = 34 \text{ pCt.}$ heraus.

Es ist genau

$$y = y_1 + y_2 = (0,1089 + 0,0368) \frac{P}{E} l = 0,1457 \frac{P}{E} l$$

woraus

$$E = 0,1457 P \cdot \frac{l}{y}$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Schubkraft findet sich demnach

$$1 673 000 \frac{1457}{1089} = 2 238 000 \text{ kg,}$$

welches Ergebnis unter Rücksichtnahme auf den im zweiten Abschnitt erörterten gegenseitigen Einfluss der Fasern und in Erwägung, dass die im nachstehenden besprochene Kraft R unbeachtet geblieben war, in sehr guter Uebereinstimmung mit dem Ergebnisse der Zugversuche steht. Je niedriger die Träger, umso mehr tritt, da l konstant war, der Einfluss der Schubkraft zurück, umso mehr nähern sich auch die von Tetmajer aus den Biegeversuchen gefundenen Elastizitätsmodule den aus Zugversuchen entwickelten.

Nach Gleichung (4) kommt es bei der Durchbiegung nur auf das Trägheitsmoment des Querschnittes an; infolge dessen es bei dem unsymmetrischen Γ -Querschnitt (s. Ziff. 1 unter g) gleichgültig ist, ob die breite oder die schmale Flansche als die gezogene auftritt, sofern nur P in beiden Fällen die gleiche Größe besitzt. Wenn auch die Richtigkeit dieser Behauptung meines Wissens noch nirgends in der Litteratur angezweifelt worden ist, so schien doch ihre Prüfung gegenüber Gusseisen angezeigt. Die Prüfung gelangte derart zur

Ausführung, dass für die bereits unter 1 g besprochenen Stäbe die Durchbiegung bestimmt wurde

- α) mit der schmalen Flansche als gezogener Gurtung
- β) » » breiten » » » » » »

Die Ergebnisse, welche in der oben besprochenen Weise gewonnen wurden, sind im nachstehenden zusammengestellt. Die Punkte A , B und C , Fig. 10, liegen bei dem noch nicht gebogenen Stabe auf der Achse des Stabes, also im Abstände 22 mm von der äußeren Fläche der breiten Flansche.

Stäbe mit unsymmetrischem Γ -Querschnitt.

(Ueber die Abmessungen des Querschnitts vergl. Ziff. 1 g).
 $l = 1000 \text{ mm}$ (Fig. 10).

α) Die schmale Flansche ist die gezogene.

P kg	Durchbiegung in Zehntelmmillimeter							
	gesamte				bleibende			
	Stab No. 1	Stab No. 2	Stab No. 3	Durch- schnitt	Stab No. 1	Stab No. 2	Stab No. 3	Durch- schnitt
50	0	0	0	0	0	0	0	0
200	6,50	5,65	5,70	5,95	1,00	0,40	0,10	0,50
50								
200								
400	17,35	14,35	15,90	15,87	3,00	0,90	1,90	1,93
50								
400								
600	30,80	26,70	28,90	28,80	6,20	3,30	4,50	4,67
50								
200	5,50	5,15	5,35	5,33				
400	14,50	13,90	14,60	14,33				
600	24,60	23,45	24,25	24,10				

β) Die Stäbe werden um 180° gewendet, so dass die breite Flansche die gezogene ist.

P kg	Durchbiegung in Zehntelmmillimeter							
	gesamte				bleibende			
	Stab No. 1	Stab No. 2	Stab No. 3	Durch- schnitt	Stab No. 1	Stab No. 2	Stab No. 3	Durch- schnitt
50	0	0	0	0	0	0	0	0
200	6,95	6,75	6,65	6,78	1,85	1,70	1,00	1,52
50								
200								
400	16,50	16,05	15,55	16,03	3,10	3,30	2,75	3,05
50								
400								
600	25,95	25,95	25,20	25,70	4,45	5,15	4,40	4,67
50								
200	5,15	4,95	4,85	4,98				
400	13,25	12,65	12,80	12,90				
600	21,60	20,80	20,95	21,12				

Hieraus ergeben sich:

		α		
für die Belastungsgrenzen P	=	50/200	200/400	400/600
entsprechend gezogene Faser		$\frac{25P}{60,2} \cdot 3,8 = 79/316$	$\frac{316}{631}$	$\frac{631}{947}$
den gedrückten Faser		$\frac{25P}{60,2} \cdot 2,2 = 46/183$	$\frac{183}{366}$	$\frac{366}{548}$
Spannungsgrenzen				
die federnden Durchbiegungen im Durchschnitt	=	0,0533	0,0900	0,0977
der Elastizitätsmodul	$E = \frac{1\,000\,000 \Delta P}{48 \cdot 60,2 \cdot y}$	= 974 000	769 000	708 000

		β			
		50/200	200/400	400/600	kg
$\frac{25P}{60,2} \cdot 2,2$	=	46/183	183/366	366/548	für 1 qem
$\frac{25P}{60,2} \cdot 3,8$	=	79/316	316/631	631/946	" "
		0,0498	0,0792	0,0822	cm
		1 042 000	874 000	842 000	kg

Wir erhalten also den Elastizitätsmodul, berechnet aus Gl. 5:

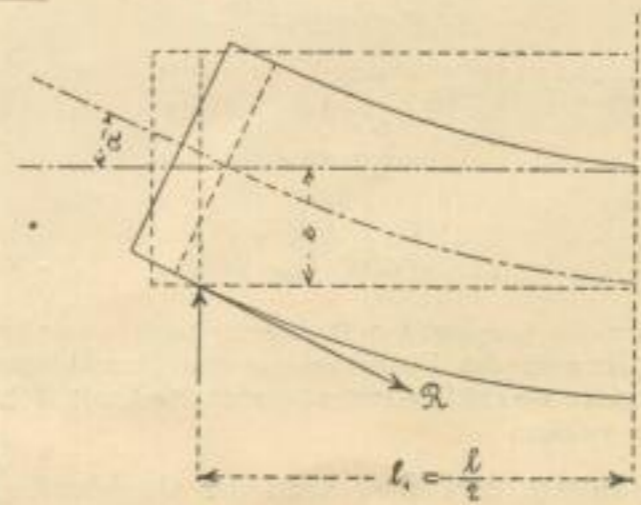
α) wenn die schmale Flansche die gezogene ist	974 000	769 000	708 000 kg
β) » » breite » » » » » » » » » » » » » » » »	1 042 000	874 000	842 000 kg
d. h. mehr	7 pCt.	13,6 pCt.	18,9 pCt.

Hieraus folgt, dass bei gusseisernen Stäben mit unsymmetrischem Γ -Querschnitt die Durchbiegung nicht unabhängig ist davon, ob die breite oder

die schmale Flansche die gezogene ist. Im letzteren Fall ist sie größer, und zwar wächst dieses Mehr mit der Größe der Belastung.

Im Anschluss hieran sei noch auf einen anderen Umstand aufmerksam gemacht, welcher unter gewissen Verhältnissen die Ergebnisse der Biegungsversuche wesentlich beeinträchtigen kann.

Der Stab im ursprünglichen Zustande berührt die beiden Auflager mit bestimmten Teilen seiner Mantelfläche. Wenn er sich durchzubiegen beginnt, so muss derjenige Punkt der Stabachse, welcher ursprünglich über dem einen, etwa dem linken, Auflager sich befand (s. Fig.) nach der Mitte rücken, da die Achse, d. i. die elastische Linie, ihre Länge nicht ändern soll. Diese Verrückung Δ nach einwärts lässt sich auffassen als Differenz zwischen der halben Stablänge $\frac{l}{2}$ und der halben Sehne des Bogens, dessen Länge konstant, nämlich gleich l_1 , und dessen Pfeilhöhe gleich der Durchbiegung y ist. Nun darf bekanntlich für einen flachen Parabelbogen,



Vierter Abschnitt.

Zusammenfassung.

1. Für auf Biegung beanspruchte Gusseisenstäbe ist eine Elastizitätsgrenze nicht vorhanden, gleichgiltig, ob man die letztere auffasst als die Spannung, bis zu welcher Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht, oder ob man sie als die Grenze vollkommener Elastizität ansieht. Diese Thatsache entzieht — jedenfalls für Gusseisen — der Vorschrift, als zulässige Anstrengung des Materiales einen Bruchtheil derjenigen Spannung zu nehmen, welche der Elastizitätsgrenze entspricht, allen Boden.

2. Die Voraussetzung der Biegungslehre, dass die Fasern, aus denen der gebogene Stab bestehend gedacht werden kann, auf einander nicht einwirken,

dessen halbe Sehne a , dessen halbe Länge s und dessen Pfeilhöhe δ ist, gesetzt werden

$$s = a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{a^2} \right)$$

demnach beträgt der Unterschied zwischen s und a

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \cdot a = \infty \frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{s} \right)^2 \cdot s;$$

dementsprechend ist hier

$$d = \frac{2}{3} \left(\frac{y}{l} \right)^2 l = \frac{4}{3} \left(\frac{y}{l} \right)^2 l$$

Gleichzeitig mit dieser Verrückung des Endpunktes der elastischen Linie nach einwärts neigt sich derjenige Stabquerschnitt, welcher über dem Auflager stand, unter den kleinen Winkel α . Hiermit ist eine Auswärtsbewegung der Linie, in welcher der Stab vorher das Auflager berührte, um $e\alpha$ verknüpft. Für α liefert die Biegungslehre die Gleichung

$$\alpha = \frac{P \cdot l}{E \Theta \cdot 16}$$

so dass diese Auswärtsbewegung beträgt

$$e \cdot \frac{P \cdot l}{E \Theta \cdot 16}$$

Hiernach ergibt sich, dass diejenigen Teile der Mantelfläche des Stabes, mit welchen er bei gerader Achse die Auflager berührte, nach auswärts rücken um den Betrag

$$x = e \frac{P \cdot l}{E \Theta \cdot 16} - \frac{4}{3} \left(\frac{y}{l} \right)^2 l$$

woraus mit

$$y = \frac{P \cdot l}{48 E \Theta}$$

$$x = \frac{1}{16} \frac{P \cdot l}{E \Theta} \left(e - \frac{P \cdot l}{108 E \Theta} \right) \dots (9)$$

Solange x positiv ist, d. h., wenn

$$e \geq \frac{P \cdot l}{108 E \Theta}$$

$$P \leq 108 \frac{E \Theta}{l} e$$

oder nach Einführung von

$$\frac{P l}{4} = \alpha \frac{\Theta}{e}$$

$$\frac{e}{l} > \sqrt{\frac{\alpha}{27 E}} \dots (10)$$

so lange wird die besprochene Bewegung nach auswärts erfolgen und damit während des Vorsichgehens der Durchbiegung eine auf den Versuchsstab wirkende einwärts gerichtete Kraft R (vergl. Figur) wachgerufen werden.

Im allgemeinen darf diese Kraft der Gegenkraft $\frac{P}{2}$ des Auf-

lagers proportional gesetzt werden, etwa

$$R = \mu \cdot \frac{P}{2}$$

ist um so zutreffender, je mehr die Querschnittsfläche sich in zwei schmalen, von der Nullachse abstehenden, ihr jedoch parallelen Streifen (Flanschen) zusammendrängt. (Fig. 8.)

Umsomehr nähert sich dann auch die auf grund der Biegungslehre aus der Bruchbelastung berechnete Biegungsfestigkeit der Zugfestigkeit des gleichen Materiales, sowie der Biegungselastizitätsmodul dem Zugelastizitätsmodul.

3. Die weitere Voraussetzung der Biegungslehre, dass der Elastizitätsmodul für alle Fasern des gebogenen Stabes gleich groß, also insbesondere unabhängig ist von der Größe und dem Vorzeichen der Dehnung oder Spannung, trifft bei Gusseisen auch nicht angenähert zu. Hier nimmt derselbe ab mit wachsender Dehnung oder Spannung. Infolgedessen sind die Spannungen in den am stärksten beanspruchten Fasern thatsächlich bedeutend kleiner als für Rollenauflager usw.

Für den Fall, dass sich die festen Auflager in den Stab eindrücken, hat man es in R nicht mehr mit einer Reibung, sondern mit einem weit größeren Widerstande zu thun.

Die Kraft R wirkt nun, abgesehen von ihrem Einfluss auf die Länge der Achse, bei kleiner Durchbiegung mit dem Momente

$$R \cdot e = \frac{P}{2} \mu e$$

auf den Stab, so dass das für den mittleren Stabquerschnitt sich ergebende Moment nicht $\frac{P l}{4}$, sondern

$$M = \frac{P l}{4} - \frac{P}{2} \mu e = \frac{P l}{4} \left(1 - 2 \mu \frac{e}{l} \right) \dots (11)$$

ist. Deutlich zeigt sich hierin der Einfluss der verhältnismäßigen Höhe des Stabes und des Koeffizienten μ .

Für $e = 50$ mm, $l = 1000$ mm beträgt diese Verminderung des Momentes

bei $\mu = 0,1$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,5$	$\mu = 1$
1 pCt.	3 pCt.	5 pCt.	10 pCt.

Man ersieht, dass bei Verwendung von festen Auflagern, welche die Form einer — wenn auch etwas abgerundeten — Schneide haben und sich vielleicht gar in den Stab eindrücken, wodurch μ einen verhältnismäßig hohen Wert erlangen muss, der mit dem Gleiten des Stabes gegenüber den Auflagern verknüpfte Widerstand selbst bei nicht hohen Körpern entschieden Einfluss nehmen kann.

Für die oben erwähnten Versuche mit Flusseisensträgern waren feste, cylindrisch abgerundete Auflager von Gusseisen verwendet. Die Träger waren roh.

Bei einem Koeffizienten $\mu = 0,25$ ergibt sich für den 240 mm hohen Träger No. 24 die besprochene Verminderung des Momentes

$$100 \cdot 2 \cdot 0,25 \frac{12}{150} = 4 \text{ pCt.}$$

Bei Entlastung des Körpers vermindert sich die Durchbiegung; damit kehrt die Kraft R ihre Richtung und das Moment $\frac{P}{2} \mu e$ seinen Sinn um.

Wenn man den Stab so auflagert, dass μ genügend groß ist, so lässt sich der Einfluss dieser Umkehrung bei Ermittlung der Durchbiegungen deutlich beobachten.

Die ziffernmässige Berücksichtigung von R unterblieb bei den im vorstehenden besprochenen Versuchen mit Gusseisen, weil bei den bearbeiteten Gusseisenstäben μ nicht bedeutend sein konnte. Setzen wir μ groß, etwa 0,15, so ergibt sich bei dem größten Wert von $e = 3,8$ cm und dem kleinsten Werte von $l = 50$ cm die Verminderung des Momentes nach Gl. (11)

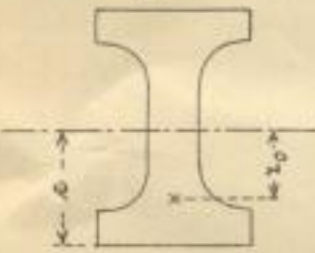
$$100 \cdot 2 \cdot 0,15 \frac{3,8}{50} = 2,3 \text{ pCt.}$$

In allen anderen Fällen ist der begangene Fehler wesentlich kleiner. Durch Wahl einer genügend grossen Entfernung der Auflager und durch Anwendung von Rollenauflagern, wodurch μ vermindert wird, lässt sich die Notwendigkeit der Rücksichtnahme auf die Schubkraft und auf den Einfluss von R beseitigen.

ner, als sie sich nach den Sätzen der Biegungslehre ergeben, während das nach der Nullachse hin gelegene Material im Verhältnis zu seinem Abstand von dieser stärker gespannt ist, als das weiter auswärts befindliche. Das erstere wird demnach durchaus nicht so schlecht ausgenutzt, als man bisher annahm.

Die aus Biegungsversuchen aufgrund der Sätze der Biegungslehre bestimmte Biegungsfestigkeit überschreitet die für dasselbe Material ermittelte Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material verhältnismäßig nach der Nullachse hin zusammendrängt; sie kommt ihr um so näher, je mehr der Querschnitt die Form Fig. 8 annimmt, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 11, je mehr sich der Abstand z_0 des Schwerpunktes der

Fig. 11.



auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittsfläche dem Abstände e der am stärksten gespannten Faser nähert. Für das untersuchte Guss-eisen, dessen Zugfestigkeit durch Zerreißen zu 1369 kg gefunden worden war, fand sich die Biegungsfestigkeit

für die Querschnitte:



	(e)	(f)	(a)	(b)	(c)	(d)
zu	3218	2929	2905	2372	2395	1979 kg
also größer	2,35	2,14	2,12	1,73	1,75	1,45 mal
bezw. zu . . .	3323	3153	2986	2538	2566	2111 kg
demnach						
größer . .	2,43	2,30	2,18	1,85	1,87	1,54 mal

Will man unter Beibehaltung der Gleichungen 1 bis 3 bei Wahl der zulässigen Anstrengung des Materiales der hiermit festgestellten Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit von der Querschnittsform Rechnung tragen, so wird sie um so größer zu nehmen sein, je größer der Quotient

$$\frac{e}{z_0} = \frac{\text{Abstand der am stärksten gespannten Faser}}{\text{Abstand des Schwerpunktes}}$$

4. Die aufgrund der Biegungslehre aus den Biegungsversuchen des dritten Abschnittes ermittelten Biegungsfestigkeiten von Stäben mit unsymmetrischem Γ -Querschnitt weichen nur wenig ab von den in gleicher Weise bestimmten Biegungsfestigkeiten der im dritten Abschnitt unter d besprochenen Stäbe mit symmetrischem Γ -Querschnitt, gleichgiltig, ob die schmale oder die breite Flansche die gezogene ist.

5. Nach der für die Durchbiegung y eines in der Mitte mit P belasteten prismatischen Stabes geltenden Gleichung:

$$y = \frac{P \cdot l^3}{48 E \theta}$$

kommt es nur auf das Trägheitsmoment des Querschnittes an; infolgedessen es z. B. bei dem unsymmetrischen Γ -Querschnitt gleichgiltig erscheint, ob die breite oder die schmale Flansche als die gezogene auftritt, insofern nur P und l die gleichen Werte besitzen. Thatsächlich ist bei gusseisernen Trägern die Durchbiegung im letzteren Fall entschieden größer als im ersteren.

6. Bei Feststellung des Elastizitätsmoduls bzw. auch bei Ermittlung der Biegungsfestigkeit aus Biegungsversuchen mit Stäben, deren Höhe verhältnismäßig groß erscheint (im Vergleich zur Entfernung der beiden Auflager) sind zu beachten:

a) der Einfluss der Schubkraft;

die Nichtberücksichtigung der Schubkraft führt bei Bestimmung des Elastizitätsmoduls, wie beispielsweise nachgewiesen,

für rechteckige Stäbe von 140 mm Höhe und $l = 1000$ mm zu einem Fehler von 8 pCt.,

für Träger, deutsches Normalprofil No. 24 und $l = 1500$, zu einem Fehler von 34 pCt;

b) die Kräfte, mit welchen die Auflager infolge der Gleitung des sich durchbiegenden Stabes auf die Mantelfläche des letzteren in Richtung der Stabachse einwirken.

Stuttgart, Ende Dezember 1887.

