DE FORMA RADICVM EX AEQVATIONIBVS QVADRATICIS EI SIMILI, QVAM CVBICAE PER METHODVM CARDANI OBTINENT,

DISSERIT

ET

PRO CELEBRANDA

IN AVDITORIO PHILOSOPHICO

MEMORIA

HENRICIANA, RIDELIANA

ET

SEYFERTIANA

AD DIEM VI. NOVEMBRIS ANNO CIƆIƆCCLXXI.

TRES ORATIONES

INDICIT

GEORGIVS HENRICVS BORTZ

ORD. PHIL.

EXDECANVS

LIPSIAE

EX OFFICINA LANGENHEMIA.

Cum mihi, data hac ſcribendi occaſione, propoſitum ſit oſtendere, radices aequationum quadratico — affectarum exhiberi poſſe formulis, quae ſunt iis ſimiles, quae ex aequationibus cubicis per regulas CARDANI eliciuntur: declaranda erit breuibus, harum vis atque natura, vt tanto euidentius id deſignetur, in quo cum illis radices quadraticarum aequationum conueniant.

Omnes eiecto termino ſecundo aequationes cubicae ſunt hae:

$x^3 + px + q = 0$
$x^3 - px - q = 0$
$x^3 + px - q = 0$
$x^3 - px + q = 0$, quarum vel ſingulae ex cognitis CARDANI regulis euolutae peculiares radices exhibent, prout prolixe CARDANVS ipſe in artis magnae, ſeu de regulis algebraicis libro et nuperrime b. HENRICVS KÜHNIVS in opere poſtumo, cui titulus: tentamen de aequationibus cubicis quibuscunque perfecte reſoluendis, egerunt, vel compendioſius cum CLERAVT in elementis Algebrae a b. MYLIO in germanicam linguam conuerſis P. V. §. 6, et cum Ill. KAESTNERO in progr. de formula CARDANI aequationum cubicarum radices omnes tenente, reſoluta vna

ſupra recenſitarum aequationum forma, attenta ſignorum mutatione reliquarum habentur radices.

Sumta itaque $x^3 + px + q = 0$

erit, obſeruata in ſubſtitutione coefficientium ex aliis formis ſignorum mutatione vniuerſalis radix

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Cum quaelibet cubica aequatio tres habeat radices ex theoria aequationum, atque quantitas $\sqrt[2]{\tfrac{1}{4}q^3 + \tfrac{1}{27}p^3}$ contenta in radice cubica vtriusque ſigni $\pm$ ſit capax: ecquis aſſuetus conſequendis, etiamſi id non intenderit, in reſolutione aequationum quadraticarum, vtrisque earum radicibus, non maximopere mirabitur, radices formula exhibita, reliquas variatis ante quantitates $\sqrt[2]{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}$ ſignis, non obtineri? cf. COLLIN MACLAVRIN c. X. §. 91. edit. gall. quae Pariſiis 1753. prodiit; ſed ad conſequendas reliquas duas radices neceſſe eſſe, vt aequatio reſoluta per radicem reducto eius valore ad partem alteram diuidatur. Quod iam obſeruare licet reſoluendo aequationem cubicam puram $x^3 = a^3$ Eſt enim $x = a$. Reliquae vero radices alia ratione haberi nequeunt, quam ſi $x - a^3 = 0$, diuidatur per $x - a$; diuiſione inſtituta quotus erit $x^2 + ax + a^2 = 0$, et ex hac demum deducentur.

$$x = \frac{-a + \sqrt[2]{-3a^2}}{2}$$

$$\text{et } x = \frac{-a - \sqrt[2]{-3a^2}}{2}$$

Sit $a = 1$ erit $x^3 = 1$ et cubicae radices vnitatis $= 1$; $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

quae poſtremae duae radices imaginariae in reſoluendis

dis aequationibus cubicis negligi plane nequeunt. Eadem arte procedendum eſt in eruendis radicibus ex aequationibus cubicis caeteris. Etiamſi hoc phaenomenon non poteſt non animum eius percellere, qui primum accedit ad reſolutionem harum aequationum; maior tamen exoritur in eo admiratio, vel potius terror, dum in accuratiori formularum cubicarum conſideratione, earumque ad varios caſus applicatione deprehendit, illas, quoties aequatio contineat radices reales, eas exhibere omnes ſub forma imaginaria quantitatis $\sqrt[2]{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}$; in aequationibus contra duas radices, ſi fuerint imaginariae, ſub forma quantitatis $\sqrt{\frac{1}{4} q + \frac{1}{27} p^3}$ reali apparere. Exercuit phaenomenon realium radicum ſub forma imaginaria, quod merito cum Ill. KAESTNERO ſpectrum vocari poteſt, per duo fere ſaecula excelſiſſima ſummorum virorum ingenia, donec tandem poſt varia parum felicia tentamina noſtra demum aetate, detracta ei impoſſibilitatis larua, verum, quod ſub ea latuit, detectum eſt. Singularum harum propoſitionum demonſtrationes, methodum ex valore imaginariis ex quantitatibus conſtante reales radices eruendi, et exempla haec illuſtrantia afferre, limites huius ſcripti non permittunt, praeſertim cum mihi viri ſummi ac inprimis Ill. KAESTNERVS in programmate laudato atque in analyſi finitorum §. 699. ſeq. otium in eo fecerint, et ex dictis ſatis conſtet, radices cubicas

I) compoſitas eſſe ex duobus binomiis inaequalibus, quorum vna pars rationalis, altera ſurda quadratica, ex quibus radix cubica extrahenda, eaque forma in iis adeo neceſſaria, vt eadem prodeat, licet plane diuerſis methodis reſolutio earum tentetur.

II) Maxime id in iis ſingulare, quod radices, reales ſi fuerint, omnes exhibeantur ſub forma imaginaria.

Oſtenſuro iam mihi, primo poſſe radices quadraticarum aequationum exprimi ſimiliter duobus binomiis, quorum vna pars rationalis, altera ſurda quadratica, ex quibus radix quadratica extrahenda; ſecundo vero poſſe in his formulis radices reales comparere ſub forma imaginaria, tanto minus laborandum eſſe cenſeo in explicanda aequationum quadraticarum indole, quo magis cuiuis illae ſint cognitae. Continentur purae aequationes quadraticae omnes formula.

$$Z^2 \mp A = 0;$$

impurae ſeu affectae $Z^2 - PZ + Q = 0;$

illarum radices ſunt $Z = \pm \sqrt{\pm A};$

$$\text{harum } Z = -\tfrac{1}{2} P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} P^2 - Q}.$$

In vtroque caſu duplex ipſius Z valor oritur, vterque vel realis vel imaginarius.

Vt vero radices cuiuslibet quadraticae aequationis affectae ex binomiis duobus, quibus non niſi coefficientes per aequationem dati inſunt, conſtent, nulla id ratione obtineri poteſt, quam eliminato termino ſecundo, quod, theoria aequationum docente, ſemper fieri poteſt, e. g. ſumta canonica omnium quadraticarum aequationum

$Z^2 - PZ + Q$, ac poſita $Z = Y + \frac{1}{2} P$, erit

$$\begin{array}{rcl} Z^2 & = & Y^2 + PY + \tfrac{1}{4} P^2 \\ -PZ & = & - PY - \tfrac{1}{2} P^2 \\ Q & = & \phantom{Y^2 - PY - \tfrac{1}{2}} Q \\ \hline \end{array}$$

hinc $Z^2 - PZ + Q = Y^2 - \frac{1}{4} P^2 + Q = 0$

hinc $Y = \sqrt{\frac{1}{4} P^2 - Q}$. ac ſubſtituto valore Y prodibit vt ante: $Z = -\frac{1}{2} P \pm \sqrt{\frac{1}{4} P^2 - Q}$.

Concipiatur proinde in vniuerſum aequatio quadratica $x^2 = aK$ atque ſit $K = \pm 2Q - P$, ea lege, vt Q ſit

ſem-

semper positiua quantitas, P vero potest positiua vel negatiua esse; atque aequationis $x^2 \pm 2aQ - P = 0$, radix x proponatur diuidenda in duas partes inaequales, quarum vna dicatur m, altera n; necessario

$x = m + n$, hinc quadrando

$x^2 = m^2 + 2mn + n^2$, ac translatis terminis

$x^2 - 2mn - n^2 - m^2 = 0$; quae cum proposita cogitetur esse identica. Instituta itaque comparatione.

$\pm 2aQ = -2mn$

$mn = \mp aQ$

$m^2 n^2 = a^2 Q^2$

hinc $m^2 = \frac{a^2 Q^2}{n^2}$ & $n^2 = \frac{a^2 Q^2}{m^2}$

$-n^2 - m^2 = -aP$

$n^2 + m^2 = aP$

Si in $m^2 + n^2 = aP$ substitueris valorem m^2

erit $m^2 + \frac{a^2 Q^2}{m^2} = aP$

$m^4 + a^2 Q^2 = aPm^2$

$m^4 - aPm^2 = -a^2 Q^2$

$\frac{1}{4} a^2 P^2 = \frac{1}{4} a^2 P^2$

$m^4 - aPm^2 + \frac{1}{4} a^2 P^2 = \frac{1}{2} a^2 P^2 - a^2 Q^2$

$m^2 - \frac{1}{2} aP = \pm a \sqrt[2]{\frac{P^2}{4} - Q^2}$

$m^2 = +\frac{1}{2} aP \pm a \sqrt[2]{\frac{P^4}{4} - Q^2}$

$m = \sqrt{\frac{1}{2} aP \pm a \sqrt{\frac{P^4}{4} - Q^2}}$

Eadem ratione substituatur in $n^2 + m^2 = aP$ valor n^2

erit $n^2 + \frac{a^2 Q^2}{n^2} = aP$

et $n^4 - aP^2 n^2 = -a^2 Q^2$

$n - \frac{1}{2} aP = \pm a \sqrt[2]{\frac{P^2}{4} - Q^2}$

$n = \sqrt{\frac{1}{2} aP \pm a \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}}$

Cum

Cum inuenti valores m & n ob signorum, quae ipsis ex natura radicis quadraticae competunt, multitudinem in combinatione plures valores incognitae x, quam ex theoria aequationum aequationibus $x^2 - 2aQ - aP = 0$ et
$x^2 + 2aQ - aP = 0$ inesse possunt, ex pluribus combinationibus m er n eligendae sunt eae, quae tantum vtrique satisfaciunt.

Vt vero constet, quae primam, quae secundam constituant reliquis reiectis: recurrendum est ad $mn = \mp aQ$, cuius signa collata cum signis propositae aequationis indicant, pro formanda $x^2 + aQ - aP$, combinandos esse eos m et n valores, qui in se multiplicati efficiunt productum $- aQ$; pro aequatione vero $x^2 - 2aQ - aP$, illi, quorum productum aQ signum habet positiuum.

aequationis itaque
$x^2 - 2aQ - aP = 0$ erunt radices

$$x = + \sqrt{\frac{aP}{2} + a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} + \sqrt{\frac{aP}{2} - a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} = + m + n$$

$$x = - \sqrt{\frac{aP}{2} + a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} - \sqrt{\frac{aP}{2} - a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} = - m - n.$$

Aequationis vero
$x^2 + 2aQ - aP = 0$ radices sunt:

$$x = \sqrt{\frac{aP}{2} + a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} - \sqrt{\frac{aP}{2} - a\sqrt{\frac{P}{4} - Q^2}} = m - n$$

$$x = - \sqrt{\frac{aP}{2} - a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} + \sqrt{\frac{aP}{2} - a\sqrt{\frac{P^2}{4} - Q^2}} = - m + n.$$

Quodsi alicui placuerit multiplicationes instituere, 1) ipsorum m et n vna cum eorum valoribus 2) radicum translatarum ad partem alteram deprehendet in primo casu $mn = - \mp aQ$; in secundo casu, vt ex theoria aequationum fieri debet, restitui aequationes propositas. Quod vltimum com-
modius

modius trenslatis m et n ad partes x probabitur, ac omnes aequationes quadraticas posse ad eiusmodi formulas reduci constat, quae similes sunt, quantum natura aequationum quadraticarum fert, formulis Cardaneis.

Deinde in hac exprimendi radices aequationum quadraticarum ratione perspectu non est difficile, reales radices earum exhiberi saepe sub forma imaginaria. Examinanti enim formulas aequationes $x^2 - 2aQ - P = 0$ illico patet, eius radices esse, etiamsi fuerit $Q7\frac{1}{2}P$, reales. Prodit enim ex ipsa aequatione

$x = \pm\sqrt{P + 2aQ}$, quae, cum Q debet esse semper positiuum, necessario est realis. Idem obtinetur quadrando alterutrum radicis valorem, e. g. ex

$$x = \sqrt{\frac{aP}{2} + a\frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{4}} + \sqrt{\frac{aP}{2} - a\frac{\sqrt{P^2 - Q}}{4}}$$

$$\text{est } x^2 = \frac{aP}{2} + a\frac{\sqrt{P - Q^2}}{4} + 2\sqrt{\frac{a^2P^2}{4} - \frac{a^2P^2}{4} + a^2Q^2}$$

$$+ \frac{aP}{2} - a\frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{4} \qquad \begin{array}{l} x^2 = aP + 2aQ \\ x = \sqrt{aP + aaQ} \end{array}$$

Reliquae duae formae sunt semper imaginariae.

Haec, quae exposui, ac plura, quae addi facile potuissent, licet sint verissima, attamen non mimerito suspicor, fore multos, quibus haec ita comparata videantur, vt solutionem aequationum quadraticarum non solum non faciliorem reddant, sed eam potius difficultatibus obruant. Ipse id non diffiteor, non eo enim animo haec proposui, vt faciliorem redderem aequationum quadraticarum resolutionem, sed potius vt conuenientiam inter has atque cubicas, in qua non exigua

pars

pars elegantiae ſyſtematicae conſiſtit, declararem, inprimis cum ea apta ſit ad praeparandum animum tanto facilius comprehendendi expreſſiones radicum Cardanicas, et reducendi aequationes ſuperiorum ordinum, in quibus, ſi fuerint imparis gradus, omnes termini, in quibus incognita eſt gradus paris, et contra, ſi paris gradus fuerint, omnes termini incognitae gradus imparis ſetuato vbique termino abſoluto, eliminari poſſint, ac coefficientes certis conditionibus praediti ſint.

Sic e. g. in forma generali $x^3 + px + q = 0$, in qua p et q poſſunt eſſe quantitates poſitiuae vel negatiuae ſi ponatur $x = m + n$ et ad cubum euehatur vt ſit

$$x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$$
$$x^3 = m^3 + 3mn(m + n) + n^3$$
$$\text{ſed } m + n = x$$

Erit ergo $x^3 = m^3 + 3mnx + n^3$, translatus ad partem vnam omnibus terminis, vt ſit

$$\begin{array}{l} x^3 - mnx - m^3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad - n^3 \end{array}$$

ac comparatis, coefficientibus huius cum propoſita eruentur binomia inaequalia duo

$$m = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} \quad \text{et} \quad n = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

aſſumtis, radicibus vnitatis 1; $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

ac cum quolibet combinatis; ex variis combinationibus eruentur tres ſolum radices, quae cubicis ſatisfaciunt; altiorumque

aequa-

aequationum radices designatarum conditionum ex similibus constabunt duobus binomiis, de quibus nihil dicere attinet, Indicendae sunt potius orationes, quibus

IOH. DANIELIS AEGIDII HENRICI,

ICTI.

GEORGII RIDELII

A LOEWENSTEIN ET SEYFERSDORF

M. CHRISTOPHORI SEYFERTI,

PAST. GORL.

Virorum de republica et ecclesia atque orbe litterario praeclare meritorum, memoriam celebrabunt ab horum Virorum munificentia profectis stipendiis ornati, doctrinaeque studiis clarissimi Iuuenes

IOH. TRAVGOTT SCHOEN, I. V. CAND.

LESCHVIZIO-LVS.

CAROLVS LVDOVICVS LOHDIVS

GRVNBERGA MISN.

IOH. CRISTIANVS THILISCH

TESCHINIO-SILESIVS

quorum primus de vsu vitarum ICtorum elegantiorum in colenda Iurisprudentia; secundus de linguae latinae neglectu, magno litterarum detrimento disserent; tertius vero demonstrare annitetur, vere Lutherum dixisse, Theologiam

totam

totam esse grammaticam. Ad hos igitur Oratores futuro die VI. Nouembris hora IX. beneuole audiendos RECTOREM ACADEMIAE MAGNIFICVM, ILLVSTRISSIMOS COMITES, VTRIVSQVE REIPVBLICAE PROCERES ET GENEROSISSIMOS AC NOBILISSIMOS ACADEMIAE CIVES, ea, qua decet, obseruantia inuitamus. P. P. Lipsiae die III. Nouembris Anno MDCCLXXI.