und A_1 kommt auf A_0. Das Endresultat ist dasselbe, wie wenn das Polyeder um 180° um den Radius OG gedreht wäre, der in der Mitte des Bogens $A_0 A_1$ endigt. Nun sind die scheinbaren Orte der Ecken nicht geändert; folglich ist G der Endpunkt einer Axe von gerader Ordnung, die augenscheinlich eine binäre Axe ist. Da das regelmässige Dodekaeder dreissig paarweise gegenüberliegende Seiten hat, so ist die Gesammtzahl der binären Axen gleich fünfzehn.

Kein anderer Durchmesser der Kugel kann eine binäre Axe sein, denn welches auch seine Stellung sein mag, so würde er die ternären Axen zwingen sich zu wiederholen, und man würde mehr als zehn ternäre Axen erhalten, was wie wir wissen unmöglich ist. (Satz XLIII).

[58] Man könnte die fünfzehn binären Axen auch erhalten, indem man die Mitten der gegenüberliegenden Kanten des Ikosaeders MM_0M_1 ... paarweise mit einander verbindet.

Satz LIV. — Die decemternären Polyeder können die fünfzehn Ebenen, welche durch die paarweise verbundenen sechs quinären Axen gehen, zu Symmetrieebenen haben. Im entgegengesetzten Falle haben diese Polyeder gar keine Symmetrieebene.

Betrachten wir speciell eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Ecken M und M_3 geht, Fig. 12. Diese Ebene wird eine Symmetrieebene für das Punktsystem (A_0, A_1), (A_4, A_2) ..., (M_2, M_4), (M_1, M_0) etc. sein; sie zieht also nicht die Verdoppelung der Zahl der Axen nach sich, folglich widerspricht Nichts der Existenz einer solchen Symmetrieebene.

Nun liegt die Ebene MM_3 normal zu der Geraden KK', die eine binäre Axe des Systems ist. Die Homologen dieser Ebene sind im Ganzen fünfzehn an Zahl, nämlich MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4; M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1; M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Dies sind augenscheinlich die einzigen Symmetrieebenen, welche das Polyeder besitzen kann; für jede andere Stellung würde die Anzahl der ternären Axen 10 übersteigen, was nicht der Fall sein kann (Satz XLIII).

Die Figur 12 zeigt die Anordnung der sechzig homologen Ecken von S um die Pole A_0, A_1, etc. in dem Falle, wo das Polyeder gar keine Symmetrieebene besitzt.

Wenn aber die fünfzehn Symmetrieebenen, welche oben angegeben sind, im Polyeder existiren, so wird das Dreieck $SS'S''$