Dreieck, welches den Anfangspunkt zur Spitze und die Strecke, welche die Punkte (m, n) und (m', n') verbindet, zur Basis hat, hat als Flächeninhalt das Product des Flächeninhalts des elementaren Dreiecks in den absoluten Werth des Factors $mn' - nm'$.

Der erste Theil des Satzes ist klar; die Flächeninhalte der elementaren Dreiecke haben als gemeinsamen Werth $\frac{1}{2}\,\omega$.

Seien nun P und P' (Fig. 2) die Gitterpunkte mit den Zahlen-Coordinaten (m, n) und (m', n'), so wird man nach dem zweiten Beweise des [23] Satzes III haben:

$$\text{Flächeninhalt des } \triangle\, OPP' = \tfrac{1}{2}\, ab \sin\delta (nm' - mn').$$

Nun ist

$$ab \sin\delta = \omega\,;$$

folglich

$$\text{(27)}\quad \text{Flächeninhalt des } \triangle\, OPP' = \tfrac{1}{2}\omega(nm' - mn').$$

Wenn man m und n mit einem gemeinsamen Factor D multiplicirt, so werden das erste und das zweite Glied beide Dmal grösser, so dass die Gleichung (27) nicht gestört wird; sie wird es ebenso wenig in dem Fall, wo man m' und n' mit einem Factor D' multiplicirte. Also findet diese Gleichung immer statt, selbst wenn m, n oder m', n' nicht relative Primzahlen sind.

Aufgabe XIII. — Das Haupt-Dreieck eines Netzes zu finden.

Man wähle willkürlich einen Gitterpunkt O (Fig. 4) und suche unter allen anderen Gitterpunkten den O zunächst liegenden.

Sei A dieser Gitterpunkt, OA also der kleinste Parameter des Netzes. In O und A errichte man die Geraden Op und Am senkrecht auf OA, und suche in dem nicht allseitig begrenzten Raume $pOAm$ den der Geraden OA zunächst gelegenen Gitterpunkt. Man wird ihn nothwendigerweise in B, auf der an OA angrenzenden Punktreihe finden. Verbindet man OB und BA, so wird OAB das Haupt-Dreieck des Netzes sein.

Satz VI. — Das Haupt-Dreieck ist das einzige elementare Dreieck, dessen drei Winkel spitz sind.

In der That, sei OAB (Fig. 5) das Haupt-Dreieck. Ziehen wir die Gerade COF parallel zu BA; die drei Punktreihen AOD, BOE, COF sind paarweise conjugirt. Also wird jedes Elementar-Dreieck, das seine Spitze in O hat,