

FREIBERGER  
FORSCHUNGSHEFTE

**C 62**

GEOPHYSIK

WOLFGANG BUCHHEIM

**Theoretische Grundlagen  
für die Messung von elektrischem Gesteinswiderstand  
und Gesteins-D.-K. in Bohrlöchern  
durch Induktion nach dem Rückwirkungsverfahren**

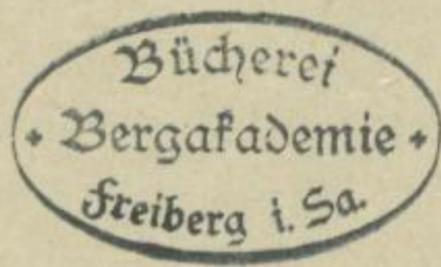


AKADEMIE-VERLAG BERLIN

1959

FFH  
C 62  
b

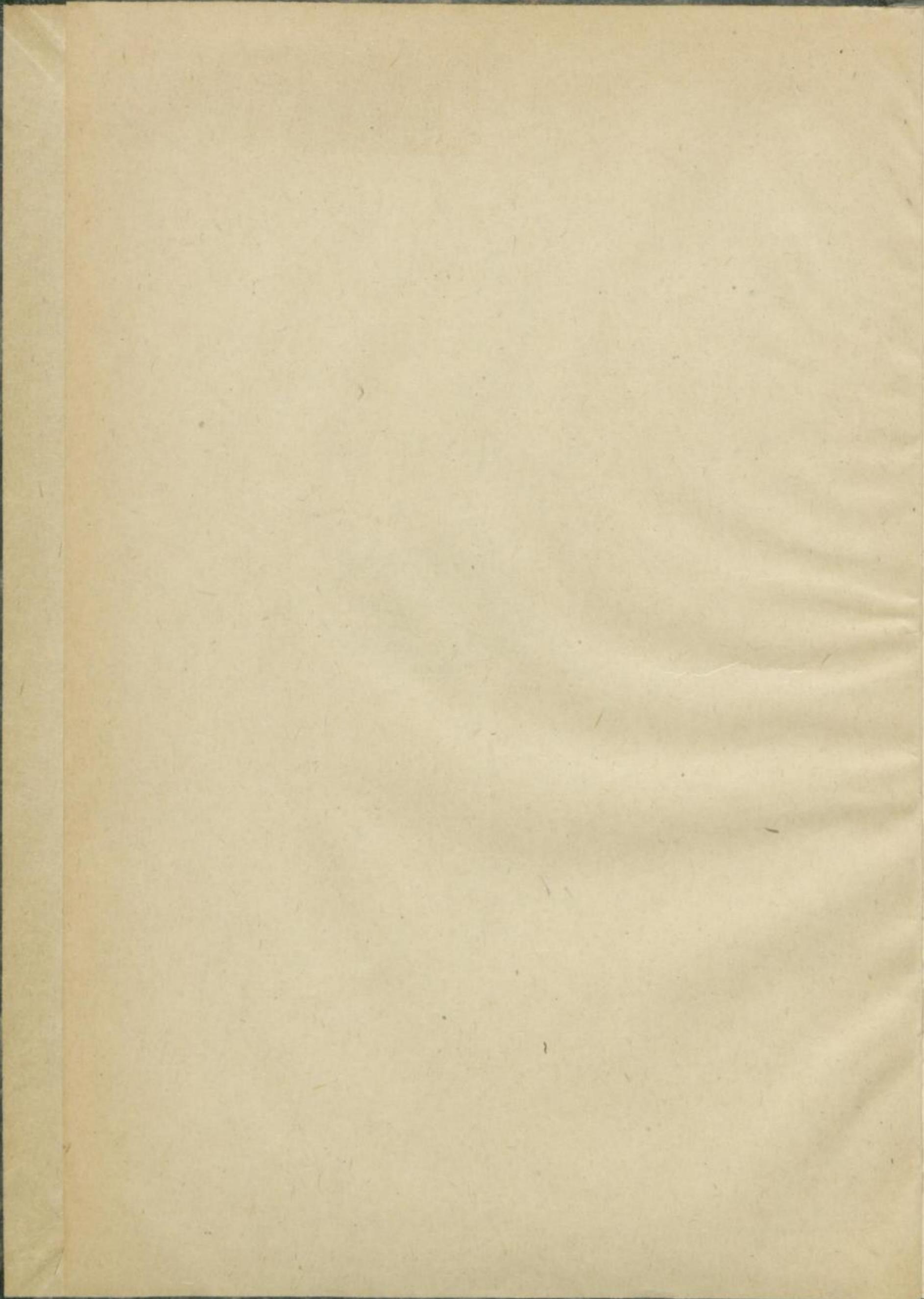
XVI 1142



TU BERGAKADEMIE FREIBERG



XVI 1142 . C62B 2 b



FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

C 62



# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der Bergakademie Freiberg

C 62

GEOPHYSIK

**Theoretische Grundlagen  
für die Messung von elektrischem Gesteinswiderstand  
und Gesteins-D.-K. in Bohrlöchern  
durch Induktion nach dem Rückwirkungsverfahren**

Von WOLFGANG BUCHHEIM



A k a d e m i e - V e r l a g · B e r l i n

Freib. Forsch.-H.	C 62	S. 1—67	7 Bilder	2 Tabellen	Berlin, Dezember 1959
-------------------	------	---------	----------	------------	-----------------------



III 1142 (62) b

## I N H A L T

1. Das praktische Problem. Theoretische Möglichkeiten seiner Lösung	5
2. Theorie der unendlichlangen Zylinderspule, die in einen homogenen Halbleiter eingebettet ist . . . . .	11
a) Allgemeine Formulierung des Problems . . . . .	11
b) 1. Fall: Spulenkern nichtleitend. Skineffekt in der Spulenwicklung schwach (Niederfrequenz) . . . . .	17
c) 2. Fall: Spulenkern nichtleitend. Skineffekt in der Spulenwicklung stark (Hochfrequenz) . . . . .	20
d) 3. Fall: Spulenkern leitend. Skineffekt in der Wicklung und im Spulenkern stark (Hochpermeabler Spulenkern bei Hochfrequenz)	22
e) Vergleich und numerische Diskussion der unter b), c) und d) behandelten Fälle . . . . .	25
3. Theorie des Dipoloszillators, der sich in einem kugelförmigen Hohlraum innerhalb eines homogenen Halbleiters befindet . . . . .	37
a) Allgemeine Formulierung des Problems . . . . .	37
b) Punktförmiger Dipol. Energieverlust im Halbleiter . . . . .	39
c) Kugeldipol von endlichem Radius. Theorie seines Wechselstromwiderstandes . . . . .	43
d) Ableitung einer Näherung für Niederfrequenz und mittlere Hochfrequenz. Numerische Diskussion . . . . .	47
4. Abschätzung des Wechselstromwiderstandes für die Spule und die zylindrische Kapazität von endlicher Länge. Angenäherte Theorie der induktiven und der kapazitiven Rückwirkungs-Bohrlochsonde	52
5. Folgerungen für die praktischen Lösungsmöglichkeiten des Problems	58
Liste der Bezeichnungen . . . . .	64
Literatur . . . . .	66

„Freiberger Forschungshefte“, Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften. Herausgeber: Der Rektor der Bergakademie Freiberg, Prof. Dr.-Ing. habil. O. Oelsner. — Chefredakteur: Dipl.-Ing. R. Wendler, Freiberg, Klubhaus der Bergakademie, A.-Bebel-Str. 5 (Ruf 2497). — Verlag: Akademie-Verlag, GmbH, Berlin W 1, Leipziger Straße 3—4 (Ruf 220441), Postscheckkonto Berlin 350 21. — Die Freiberger Forschungshefte erscheinen in zwangloser Folge in den Reihen A, B, C und D. Ausführliches Verzeichnis aller lieferbaren Hefte von der Redaktion der Bergakademie oder dem Akademie-Verlag. — Preis dieses Heftes: 6,— DM, Bestell- und Verlags-Nr. 2062/236/C 62. — Vertrieb: Für das Gebiet der Deutschen Demokratischen Republik durch den Buchhandel; für das Gebiet der Deutschen Bundesrepublik durch den Buchhandel (Auslieferung KUNST UND WISSEN, Erich Bieber, Stuttgart S, Wilhelmstraße 4—6); für das gesamte Ausland durch eine Importbuchhandlung, den Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig C 1, Postschließfach 276, oder den Verlag. Satz und Druck: Druckwerkstätten Stollberg VOB, Stollberg (Erzgeb.), August-Bebel-Str. 16 - VOB UNION - III/6/50 1 1259 (1515). — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 202·100/503/59 des Ministeriums für Kultur, HV Verlagswesen, der Deutschen Demokratischen Republik. — Printed in Germany. Alle Rechte vorbehalten.

(60.221)

## 1. Das praktische Problem

### Theoretische Möglichkeiten seiner Lösung

Die elektrische Leitfähigkeit räumlicher Leiter wird bekanntlich klassisch aus dem Potentialgefälle bestimmt, das stets mit einer stationären elektrischen Durchströmung des Leiters verbunden ist (FRANZ NEUMANN [20]). Von diesem Prinzip wird nach F. WENNER [31] und C. und M. SCHLUMBERGER [25] [26] [27] in der geophysikalischen Praxis weitgehend Gebrauch gemacht, wenn der mittlere spezifische elektrische Widerstand geologischer Schichten von der Erdoberfläche aus oder längs Bohrungen ermittelt werden soll. Für die geoelektrische Kartierung und Tiefensondierung (vgl. etwa J. N. HUMMEL [9]), bei der es auf die Bestimmung des Mittelwertes von größeren Raumgebieten (Größenordnung m bis km) ankommt, hat sich diese „galvanische“ Methode der Widerstandsbestimmung gut bewährt. Bei ihrer Anwendung auf kleinere Räume, z. B. bei Bohrlochmessungen im „Nahverfahren“ nach SCHLUMBERGER, treten gewisse Schwierigkeiten auf. Diese bestehen einerseits darin, daß man den Abstand der Potentialsonden entsprechend verkleinern und schließlich der Größenordnung des Bohrlochdurchmessers anpassen muß. Andererseits geht die wechselnde und örtlich nicht bekannte Leitfähigkeit der Spülung in das Meßresultat mit ein und belastet es mit einem Unsicherheitsfaktor. Schließlich stört der nicht immer gute galvanische Kontakt der Elektrode mit ihrer Umgebung, da die Elektrode sich in unkontrollierbarer Weise an das Gestein mehr oder weniger stark anlegt. Hierdurch erleidet die Potentialverteilung in der nächsten Umgebung, auf die es ankommt, eine Streuung, die immer stärker ins Gewicht fällt. Wenn das Bohrloch nicht mit Spülung gefüllt ist, versagt das übliche „SCHLUMBERGER-Verfahren“ ganz. Durch eine Reihe wohlbekannter sinnreicher Verbesserungen, besonders durch das „Mikrolog“ [38] und das „Laterolog“ [39], wurden diese Mängel neuerdings weitgehend behoben, ohne daß das Prinzip der Messung geändert wurde.

Die genannten Übelstände lassen sich aber grundsätzlich vermeiden, wenn man rein elektromagnetisch Wirbelstromwirkungen nach dem Induktionsprinzip mißt und damit auf einzelne galvanische Kontaktstellen verzichten kann. Dabei lassen sich die Abmessungen der Sonden recht klein halten. Der Einfluß der Spülung tritt zurück, und schließlich können Messungen auch in spülungsfreien oder trockenen Bohrlöchern vorgenommen werden.

Wirbelströme werden zur Bestimmung der Leitfähigkeit der Erde oder von Gesteinspartien in der angewandten Geophysik bei den sogenannten Induktionsverfahren über Tage, nämlich beim Zentralinduktionsverfahren nach KOENIGSBERGER und NUNIER [11] [12] [13] [21] und beim Dipolinduktionsverfahren

nach GIBSONE, GRAF [6] und RÖSSIGER [24], mit Erfolg angewandt. Von MARTIENSSEN [17] [18] wurde ein erster praktischer Versuch unternommen, auf dieser Grundlage auch Bohrlöcher elektrisch zu untersuchen. Ihm schwebte vor allem eine Unterscheidung der Schichten hinsichtlich ihrer dielektrischen Eigenschaften vor. Diese erweist sich aber bei kritischer Betrachtung seiner Meßanordnung als nur sehr beschränkt möglich. Daß dieses Verfahren im Gegensatz zu den oben genannten Induktionsverfahren mit Hochfrequenz ( $10^6$  Hz) arbeitet, ist prinzipiell unwesentlich. MARTIENSSEN gibt auch bereits die beiden Sondentypen an, die hier möglich sind, nämlich den kapazitiven Typ (gestreckte „Antenne“, stabförmiger Kondensator, Bild 1a) und den induktiven Typ (Zylinderspule, Bild 1b).

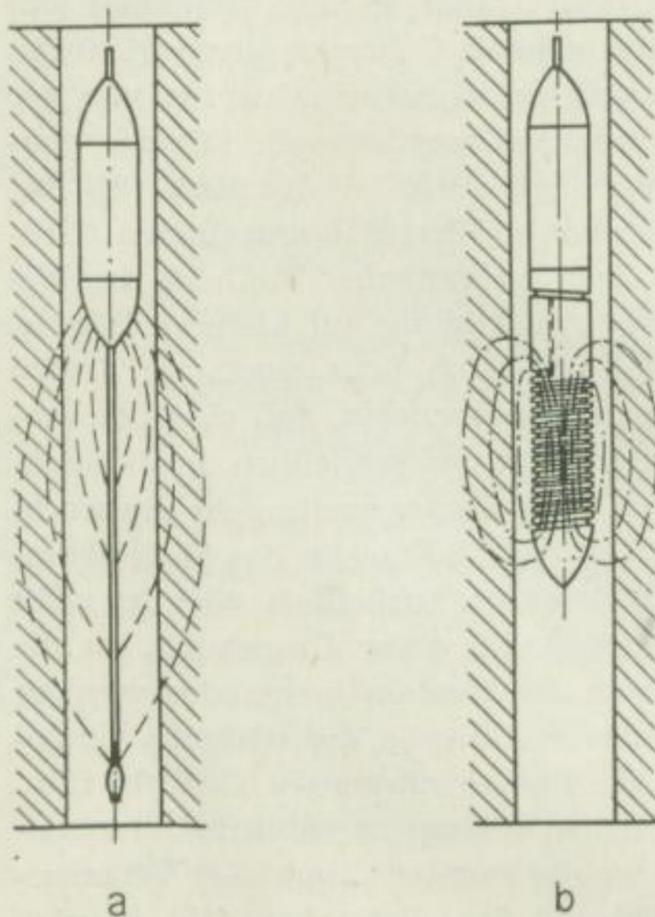


Bild 1. Die beiden Grundtypen von Sonden bei elektromagnetischer Widerstandsmessung in Bohrlöchern

(Nach MARTIENSSEN [17])

- a) kapazitiv wirkende Sonde
- b) induktiv wirkende Sonde

--- elektrische,  
- · - · - magnetische Kraftlinien

Diese Sonden liegen als Kapazität bzw. Induktivität in einem hochfrequenten Schwingkreis und werden ohne Abschirmung in das Bohrloch versenkt. Die elektromagnetische Wechselwirkung mit dem umgebenden Gebirge bewirkt eine Verstimmung des Schwingkreises, die quantitativ gemessen wird. Es handelte sich also um die Ausnützung der elektrodynamischen Rückwirkung des Gebirges auf die Geberanordnung. Die Methode sollte insbesondere auf Änderungen der Dielektrizitätskonstante in der Umgebung des Bohrloches ansprechen. Hierfür erwies sich die Anordnung bei ihrem Einsatz durch das frühere Reichsamt für Bodenforschung als unzureichend. Es zeigte sich aber, daß die Verstimmung meistens ein brauchbares Maß für die Leitfähigkeit ergab und daß das Gerät das gleiche wie die SCHLUMBERGERSche Anordnung [26] [27] lieferte, nämlich das Profil des spezifischen elektrischen Gebirgs widerstandes längs der Bohrung.

DOLL [36] [37] griff diesen Gedanken später wieder auf und entwickelte unter Verzicht auf das Rückwirkungsprinzip das bekannte „Induktlog“, das mit getrennter Geber- und Empfangsspule nur die Gesteinsleitfähigkeit zu messen gestattet.

Die – im Hinblick auf das angestrebte Ziel – unbefriedigenden Ergebnisse des MARTIENSSENSCHEN Rückwirkungsverfahrens beruhten hauptsächlich auf dem Mangel an einer ausreichenden theoretischen Fundierung des ganzen Verfahrens und einer Durchrechnung des Gerätes. Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist, ganz allgemein die Voraussetzungen einer solchen elektromagnetischen Bohrlochsondierung theoretisch zu klären und so Hinweise für eine praktischere und zweckmäßigere Meßanordnung zu geben. Die Messung von Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit ohne galvanischen Kontakt mit dem zu untersuchenden Material erfordert jedenfalls die Anwendung von Wechselströmen. Die in den Bildern 1a und 1b gezeigten Sondentypen stellen ganz allgemein die prinzipiellen Möglichkeiten für Meßverfahren nach dem Rückwirkungsprinzip dar. Die geometrische Ausbildung kann weitgehend variiert werden. Für den Typ a bleibt bezeichnend, daß die Sonde hauptsächlich als Kapazität wirkt. Sie kann in erster grober Annäherung durch einen schwingenden elektrischen Dipol dargestellt werden. Im Falle b dagegen wirkt die Spule in erster Linie als Induktivität und verkörpert näherungsweise einen magnetischen Dipol. In elektrodynamischer bzw. in mathematischer Hinsicht lassen sich die beiden Fälle am besten durch die Symmetrie des elektromagnetischen Feldes kennzeichnen, das ein Strom, der der Antenne bzw. der Spule zugeführt wird, im Außenraume hervorruft. Der Fall a ist dadurch charakterisiert, daß das magnetische Feld sich auf eine azimutale Komponente reduziert, die kreisförmig um die Achse der Anordnung bzw. des Bohrloches verläuft. Diese Komponente zeigt in jeder Meridianebene (z. B. in der Zeichenebene) die gleiche Verteilung. Das elektrische Feld andererseits liegt ganz in diesen Meridianebenen. Im Falle b dagegen sind die Verhältnisse nahezu umgekehrt: das elektrische Feld beschränkt sich hauptsächlich auf seine azimutale Komponente, das magnetische ist vorwiegend meridional gerichtet. Diese Symmetrie ist indessen nur näherungsweise erfüllt. Dem elektromagnetischen Felde des Spulenstromes, das die genannten Eigenschaften streng besitzt, überlagert sich ein – im allgemeinen nur schwaches – Feld vom Typ a. Es rührt von den Ladungen her, die auf der Wicklungsfläche gebunden sind, und hängt mit der Kapazität der Spule eng zusammen. In beiden Fällen wird der Wechselstromwiderstand der Sonde von den elektrischen und magnetischen Eigenschaften des umgebenden Materials abhängig sein, also von Leitfähigkeit, Dielektrizitätskonstante (D.-K.) und magnetischer Suszeptibilität innerhalb wie außerhalb des Bohrlochzylinders. Diese Abhängigkeit wird sich grundsätzlich zur quantitativen Bestimmung dieser Materialkonstanten, besonders der des Außenraumes, ausnutzen lassen. Es soll im folgenden versucht werden, Umfang und Bedingungen dieser Abhängigkeit theoretisch zu klären.

Die in der Literatur veröffentlichten theoretischen Untersuchungen über Feld und Wechselstromwiderstand von offenen Oszillatoren [1] und Spulen [3] [4] [5]

[7] [15] [16] [28] [29] [33] [34] wurden hauptsächlich angeregt durch Fragestellungen der Elektrotechnik bzw. Funktechnik. Diese Arbeiten behandeln daher sämtlich den Fall des materiefreien oder mindestens nichtleitenden Außenraumes. Es wird daher dort sozusagen nur das Primärfeld behandelt, während uns hier gerade die Sekundärwirkungen, die Rückwirkungen des Außenmediums auf die Sonde, interessieren. Die strenge Behandlung konkreter Fälle (vgl. ABRAHAM [1]) wie der endlichen Zylinderspule erfordert schon im Falle umgebenden Vakuums einen erheblichen analytischen Aufwand (vgl. ZUHRT [33][34] und HALLÉN [7]). Die Durchführung der entsprechenden Rechnung für den Fall, daß der Raum außerhalb des Bohrlochzylinders elektrisch leitet und polarisierbar ist, wird wegen dieser zusätzlichen Diskontinuitätsfläche noch erheblich kompliziert. Wir vereinfachen daher für eine erste orientierende theoretische Betrachtung das Problem im gleichen Sinne, wie es z. B. in den Arbeiten von SOMMERFELD [28] [29] und LENZ [15] [16] über die Theorie der Spule im Vakuum geschehen ist. Es kommt uns hier auf einen Überblick nur über die Größenordnung der Effekte an. Entsprechend den beiden möglichen Grundtypen der Sonde zerfällt unsere Untersuchung in die Behandlung eines geeigneten Oszillator-Modells und eines Spulenmodells. Wir behandeln den zweiten Fall zuerst (Abschnitt 2). Die einschneidendste Vereinfachung, die wir hierbei vornehmen, ist die Annahme, daß die Spule unendlich lang sei. Unter dieser Annahme hat es nur einen Sinn, von Widerstand bzw. Selbstinduktivität pro Längeneinheit (cm) zu sprechen. Für eine Spule von endlicher Länge lassen sich die genannten Eigengrößen dann näherungsweise durch Multiplikation der Werte pro Längeneinheit mit der Spulenlänge und einem Gestaltfaktor berechnen. Dieser Faktor wurde für Zylinderspulen von ROSA und GROVER [23] angegeben (vgl. auch KOHLRAUSCH [14]). Die Wicklung ersetzen wir nach HEAVISIDE [8, S. 356] und SOMMERFELD [28] durch einen dünnwandigen, leitenden Hohlzylinder. Das ergibt nach den Untersuchungen von LENZ [15] [16], HALLÉN [7] und ZUHRT [33] [34] bei genügend dichter Wicklung eine hinreichende Annäherung. Dem Raume außerhalb dieses Hohlzylinders legen wir die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des zu untersuchenden Gebirges bei. Dem Inneren geben wir nacheinander die Eigenschaften des Vakuums, eines magnetisierbaren, aber nichtleitenden bzw. eines magnetisierbaren leitenden Spulenkernelnes.

Die Einführung der treibenden elektromotorischen Kraft bedarf besonderer Erläuterung. Um den Wechselstromwiderstand zu definieren, ist die Spannung zwischen zwei Punkten der Spulenwicklung mit dem Spulenstrom zu vergleichen (Ohmsches Gesetz für Wechselstrom). Bei der strengeren Lösung des Problems, wie sie von SOMMERFELD [28] und LENZ [16] für die endliche im Vakuum eingebettete Spule gewonnen wurde, geht man von der Stromverteilung längs der Wicklung aus. Sie wird zunächst in unbestimmter Form angesetzt. Die Stetigkeitsbedingungen für die Feldkomponenten auf der Wicklung führen dann zu einer Integralgleichung für die Stromdichte. Dazu gesellen sich Randbedingungen für die Spulenenden, die von der Schaltung der Spule abhängen (vgl. HALLÉN [7]). Liegt die Spule in einem geschlossenen Kreise, so können Ein- und Aus-

trittswert für die Stromstärke willkürlich vorgeschrieben werden. Die Spannung zwischen den Enden der Wicklung ist dann bestimmt und der Wechselstromwiderstand durch die vorgeschriebenen Stromwerte an den Spulenden festgelegt. Dieses physikalisch befriedigende Vorgehen führt aber bereits für den leeren Außenraum zu außerordentlichen analytischen Schwierigkeiten (Auflösung von unendlichen Gleichungssystemen bzw. von Integralgleichungen). Wir bevorzugen daher für eine erste orientierende Betrachtung ein vereinfachtes, weniger strenges Vorgehen. Wir denken uns nämlich die treibende elektrische Kraft als „eingeprägte“ elektromotorische Kraft gleichmäßig längs des Wicklungsdrahtes verteilt. Da sie zeitlich periodisch sein soll, ist sie zwar in dieser Form praktisch nicht realisierbar. Doch widerspricht eine solche Annahme nicht den Prinzipien der Elektrodynamik. Sie findet ihre Rechtfertigung nachträglich dadurch, daß sich im Grenzfall niederer Frequenzen die richtigen Ausdrücke für Wirk- und Blindwiderstand der Spule ergeben. Man darf also hoffen, daß so der Einfluß des Außenmediums wenigstens größenordnungsmäßig richtig erfaßt wird. Unter dieser Annahme wird eine geschlossene Behandlung des Problems möglich. Allerdings muß die Spulenkapazität zwangsläufig vernachlässigt werden, da das elektrische Feld nur eine azimutale Komponente rings um die Spulenachse herum aufweist und deshalb nirgends elektrische Kraftlinien auf der Wicklung beginnen oder enden. Es ist daher vorauszusehen, daß auf diese Weise der Wechselstromwiderstand nur für solche Frequenzen richtig erhalten wird, die weit genug unterhalb der Grundeigenfrequenz der Spule liegen. Das Verhalten einer realen Spule von endlicher Länge wird dann näherungsweise durch Annahme eines parallelgeschalteten offenen Oszillators vom Typ Bild 1a beschrieben werden können. Seine Kapazität wird gleich der Spulenkapazität zu wählen sein. Wir behandeln einen solchen Oszillator im Abschnitt 3.

Um die Rückwirkungen des umgebenden Halbleiters auf eine Kapazität theoretisch zu untersuchen, legen wir das Modell eines elektrischen Dipoloszillators zugrunde, der im Zentrum eines kugelförmigen materiefreien Hohlraumes sitzt. Die Annahme eines punktförmigen (Hertzschen) Dipols führt indessen nur zur Berechnung des Wirkwiderstandes, den der oszillierende Strom auf Grund seiner Wechselwirkung mit dem Äußeren der Kugel findet. Will man aber zu einer Abschätzung des Blindwiderstandes oder, bei hinreichend niederer Frequenz, von Kapazität und Selbstinduktion in getrennter Form gelangen, so sind dem Oszillator endliche Dimensionen beizulegen. Wir nehmen ihn daher in einfachster Weise als ideal leitende Kugel an. Um den analytischen Schwierigkeiten auszuweichen, die eine Stromzufuhr von außen her bedingen würde, nehmen wir auch hier die elektromotorische Kraft als „eingeprägt“ und über das Kugelinere gleichmäßig verteilt an. Im Gegensatz zur Spule ist hier ein isolierender Zwischenraum zwischen Kugel und Halbleiter wesentlich. Sonst würden Leitungsströme auf der Kugeloberfläche entspringen und enden, und dieses würde galvanischen Kontakt mit dem Gebirge bedeuten. Auch für einen solchen Kugeloszillator kann man einen Wechselstromwiderstand definieren, nämlich als Verhältnis der eingepprägten Spannung, die zwischen den Polen der Kugel herrscht, und der Strom-

stärke senkrecht zur Äquatorebene. Die Ersetzung des Bohrloches durch eine Hohlkugel stellt zwar eine starke Idealisierung dar. Doch besitzt dieses Modell den Vorzug, daß die Maxwellschen Gleichungen ebenfalls durch bekannte Funktionen gelöst werden. Im Falle des Vakuums ergeben sich leicht deutbare Glieder für den Wechselstromwiderstand. Trotz dieser Vereinfachung darf man hoffen, das Verhalten einer realen, etwa zylinderförmigen Kapazität in einem unendlichlangen zylindrischen Hohlraume wenigstens qualitativ und größenordnungsmäßig richtig dargestellt zu erhalten.

Im 4. Abschnitt werden wir eine angenäherte Theorie der Wechselwirkung einer endlichen Spule mit dem Außenmedium geben. Wir tragen hierbei der Spulenkapazität durch Parallelschaltung der idealisierten, kapazitätsfreien Spule nach Abschnitt 2 mit einem Kugeloszillator nach Abschnitt 3 Rechnung. Der 5. Abschnitt bringt die Diskussion der Ergebnisse für die praktische Lösung der Aufgabe und die Konstruktion von Meßanordnungen.

## 2. Theorie der unendlichlangen Zylinderspule, die in einen homogenen Halbleiter eingebettet ist

### a) Allgemeine Formulierung des Problems

Wir legen nach SOMMERFELD [28] das folgende vereinfachte Modell zugrunde (Bild 2): Die  $z$ -Achse eines Zylinderkoordinatensystems  $(r, z, \varphi)$  sei die Achse einer unendlichlangen Zylinderspule von kreisförmigem Querschnitt. Die Wicklung nehme den Raum zwischen den Radien  $r = b - a$  und  $r = b + a$  ein, wobei  $a \ll b$  sei, und bestehe aus eng aneinanderliegenden Windungen von sehr dünnem Draht. Gibt man diesem Draht nach HEAVISIDE [8] einen rechteckigen Querschnitt mit den Seitenlängen  $2a$  und  $1/n$  ( $n$  die Zahl der Windungen pro cm), so füllt er, wenn man die Isolation zwischen den Windungen als unendlich dünn annimmt, den ganzen Wicklungsraum lückenlos aus (siehe Bild 2). Dann kann

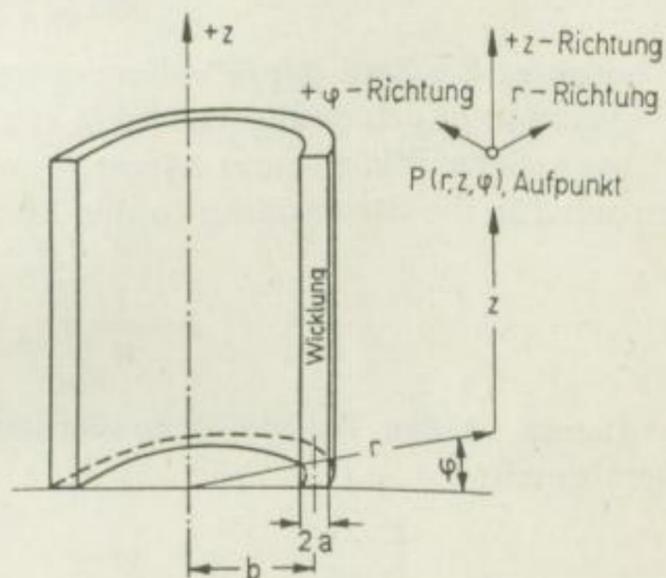


Bild 2. Schnitt durch das vereinfachte Modell der Spule. Koordinatenbezeichnung

- 2a Dicke der Wicklung
- b mittlerer Radius der Wicklung

von der endlichen Ganghöhe der Windungen abgesehen werden und die Wicklung als anisotrop leitender Hohlzylinder vom mittleren Radius  $b$  und der Wandstärke  $2a$  gelten. Die Leitfähigkeit ist in der  $\varphi$ -Richtung endlich oder unendlich, in der  $z$ -Richtung aber null. Der Außenraum der Spule,  $r > b + a$ , sei elektrisch und magnetisch homogen und isotrop. Er werde durch die Leitfähigkeit  $\sigma$ , die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Permeabilität  $\mu$  gekennzeichnet. Im Wicklungsraum  $b - a < r < b + a$  sei die Leitfähigkeit in der  $\varphi$ -Richtung  $\sigma_1$ , die Permeabilität  $\mu_1$  und die D.-K. wegen der Vernachlässigung von Verschiebungsströmen im metallischen Leiter, wie wir sie üblicherweise vornehmen, ohne Bedeutung. Der homogene und isotrope Innenraum der Spule  $r < b - a$  sei durch die entsprechenden Konstanten  $\sigma_0$ ,  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  charakterisiert.

In der Wicklung herrsche nun die eingeprägte elektromotorische Kraft  $\mathcal{E}^{(e)}$ , die sich auf die azimutale Komponente:

$$\mathcal{E}_\varphi^{(e)} = \frac{D}{r} \cdot e^{i\omega t} \quad (1)$$

beschränke,  $D$  sei eine Konstante,  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz,  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit und  $t$  die Zeit. Wir schreiben im folgenden alle vorkommenden Größen nach Art von (1) komplex, wobei man in physikalischer Hinsicht nur ihren Realteil zu betrachten hat. (Eine Ausnahme macht nur der Wechselstromwiderstand, bei dem in bekannter Weise auch der Imaginärteil physikalische Bedeutung hat.) Alle elektromagnetischen Größen werden auf das absolute Gaußsche Maßsystem bezogen, wenn nichts anderes ausdrücklich bemerkt wird.

Mit Ansatz (1) läßt sich eine eingeprägte Spannung pro Windung definieren, nämlich:

$$v^{(e)} = 2\pi r \cdot \frac{D}{r} \cdot e^{i\omega t} = 2\pi D \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$(b-a \leq r \leq b+a)$$

und entsprechend eine solche pro cm Spulenlänge:

$$V^{(e)} = 2\pi n D e^{i\omega t} \quad (3)$$

$n$  bedeutet die Zahl der Windungen pro cm Spulenlänge. Fließt in dem Wicklungsraume in azimutaler Richtung ein Strom von der räumlichen Stromdichte  $j_\varphi \cdot e^{i\omega t}$  (siehe Bild 2), und hängt  $j_\varphi$  nur von  $r$ , nicht aber von  $z$  ab, so erhalten wir für die Stromstärke in der Einzelwindung:

$$I = \frac{1}{n} \cdot \int_{b-a}^{b+a} j_\varphi(r) dr \cdot e^{i\omega t} \quad (4)$$

Damit ist der Wechselstromwiderstand der Spule pro Längeneinheit definiert durch:

$$w = \frac{2\pi n^2 D}{\int_{b-a}^{b+a} j_\varphi(r) dr} \quad (5)$$

Das Problem läuft also im wesentlichen auf die Bestimmung von  $j_\varphi(r)$  im Intervall  $b-a \leq r \leq b+a$  hinaus.

Wir suchen die einem solchen Spulenstrom entsprechende zeitlich periodische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für die drei Teilräume. Wir beschreiben das elektrische Feld durch die Komponenten:

$$\mathcal{E}_r = E_r \cdot e^{i\omega t} \quad \mathcal{E}_z = E_z \cdot e^{i\omega t} \quad \mathcal{E}_\varphi = E_\varphi \cdot e^{i\omega t} \quad (6a)$$

und das magnetische Feld durch die Komponenten:

$$\mathcal{H}_r = H_r \cdot e^{i\omega t} \quad \mathcal{H}_z = H_z \cdot e^{i\omega t} \quad \mathcal{H}_\varphi = H_\varphi \cdot e^{i\omega t} \quad (6b)$$

in der  $r$ -,  $z$ - bzw.  $\varphi$ -Richtung.  $E_r$ ,  $E_z$ ,  $E_\varphi$  und  $H_r$ ,  $H_z$ ,  $H_\varphi$  sind dann komplex-

wertige Funktionen des Ortes allein. Die Maxwell'schen Gleichungen lauten mit diesen Koordinaten für das Gauß'sche absolute Maßsystem (vgl. [2]) im Außenraum  $r > b + a$ :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma + i\omega\varepsilon}{c} \cdot E_r \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{4\pi\sigma + i\omega\varepsilon}{c} \cdot E_z \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma + i\omega\varepsilon}{c} \cdot E_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega\mu}{c} \cdot H_r \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{i\omega\mu}{c} \cdot H_z \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{i\omega\mu}{c} \cdot H_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. \quad (7a)$$

Für den Innenraum  $r < b - a$  gelten die Gleichungen unverändert mit den Materialkonstanten  $\sigma_0, \varepsilon_0, \mu_0$  an Stelle von  $\sigma, \varepsilon$  bzw.  $\mu$ . Für den Wicklungsraum  $b - a < r < b + a$  dagegen lauten sie nach unseren Voraussetzungen Gl. (1) und unter Vernachlässigung der Verschiebungsströme:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma_1}{c} \cdot E_r \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = 0 \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma_1}{c} \cdot \left( E_\varphi + \frac{D}{r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega\mu_1}{c} \cdot H_r \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{i\omega\mu_1}{c} \cdot H_z \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{i\omega\mu_1}{c} \cdot H_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. \quad (7b)$$

Eine von  $z$  und  $\varphi$  unabhängige Lösung, wie wir sie suchen, ist:

$$\begin{array}{ll} E_r = 0 & H_r = 0 \\ E_z = 0 & H_z = \frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A(r)) \\ E_\varphi = -\frac{i\omega}{c} \cdot A(r) & H_\varphi = 0 \end{array} \quad (8)$$

Der Ansatz Gl. (8) gilt für alle drei Teilräume, wobei  $\mu$  entsprechend durch  $\mu_1$  bzw.  $\mu_0$  zu ersetzen ist, und  $A(r)$  folgenden Differentialgleichungen jeweils genügen muß:

Im Außenraume

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) A = 0 \quad (9a)$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu}{c^2}$$

innerhalb der Wicklung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \left( k_1^2 - \frac{1}{r^2} \right) A = - \frac{4 \pi \sigma_1 \mu_1}{c} \cdot \frac{D}{r} \quad (9b)$$

$$k_1^2 = - \frac{4 \pi i \omega \sigma_1 \mu_1}{c^2}$$

im Innenraume

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \left( k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) A = 0 \quad (9c)$$

$$k_0^2 = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - 4 \pi i \omega \sigma_0 \mu_0}{c^2}$$

Unsere Annahme, daß die radiale Komponente  $E_r$  des elektrischen Feldes überall null ist, rechtfertigt die Voraussetzung, daß die Wicklung ohne isolierenden Zwischenraum unmittelbar an den umgebenden Halbleiter grenzt. Die Annahme einer solchen Zwischenschicht wäre bei geringer Dicke ohne wesentlichen Einfluß auf die Stromverteilung und würde das Problem rechnerisch nur unnötig komplizieren.

Die Differentialgleichung (9a) wird bekanntlich allgemein gelöst [10, S. 146] durch:

$$A(r) = C^{(1)} \cdot H_1^{(1)}(k r) + C^{(2)} \cdot H_1^{(2)}(k r) \quad (10a)$$

Hierbei bedeuten  $H_1^{(1)}(k r)$  und  $H_1^{(2)}(k r)$  die beiden Hankelschen Zylinderfunktionen 1. Ordnung vom Argument  $k r$  und  $C^{(1)}$  und  $C^{(2)}$  willkürliche Konstanten. Die allgemeine Lösung für den Innenraum lautet entsprechend:

$$A_0(r) = C_0^{(1)} \cdot H_1^{(1)}(k_0 r) + C_0^{(2)} \cdot H_1^{(2)}(k_0 r) \quad (10b)$$

$$r \leq b - a$$

diejenige für das Innere der Wicklung hingegen:

$$A_1(r) = C_1^{(1)} \cdot H_1^{(1)}(k_1 r) + C_1^{(2)} \cdot H_1^{(2)}(k_1 r) + \frac{c}{i \omega} \cdot \frac{D}{r} \quad (10c)$$

$$b - a \leq r \leq b + a$$

$C_0^{(1)}$ ,  $C_0^{(2)}$ ,  $C_1^{(1)}$  und  $C_1^{(2)}$  bedeuten ebenfalls willkürliche Konstanten. Versteht man unter  $k$  diejenige Wurzel aus  $k^2$ , deren Realteil negativ ist, so ist  $C^{(2)}$  in (10a) gleich null zu setzen, wenn dem Spulenfeld in großer Entfernung  $r$  eine Ausstrahlung von Energie in das Unendliche entsprechen soll:

$$A(r) = C^{(1)} \cdot H_1^{(1)}(k r) \quad (11)$$

Andererseits muß  $C_0^{(1)} = C_0^{(2)}$  gewählt werden, wenn  $A_0(r)$  sich für  $r = 0$  regulär verhalten, wenn also dort ein endliches Feld herrschen soll, was aus physikalischen Gründen zu verlangen ist. Setzt man:

$$C_0^{(1)} = C_0^{(2)} = \frac{C_0}{2} \quad (12)$$

so kommt wegen:

$$\frac{1}{2}(H_1^{(1)}(k_0 r) + H_1^{(2)}(k_0 r)) = J_1(k_0 r) \quad (13)$$

statt (10b):

$$A_0(r) = C_0 \cdot J_1(k_0 r) \quad (14)$$

$J_1(k_0 r)$  bedeutet die Besselsche Funktion 1. Ordnung von  $k_0 r$ . Die noch unbestimmt gebliebenen vier Konstanten  $C^{(1)}$ ,  $C_1^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ ,  $C_0$  werden durch die Randbedingungen festgelegt, denen die Feldkomponenten an der Oberfläche der Wicklung,  $r = b - a$  bzw.  $r = b + a$ , genügen müssen und die die Stetigkeit von  $H_z$  und  $E_\varphi$  dort verlangen. Berücksichtigt man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r J_1(k_0 r)) &= k_0 r \cdot J_0(k_0 r) & \frac{\partial}{\partial r}(r H_1^{(1)}(k_1 r)) &= k_1 r \cdot H_0^{(1)}(k_1 r) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r H_1^{(2)}(k_1 r)) &= k_1 r \cdot H_0^{(2)}(k_1 r) & \frac{\partial}{\partial r}(r H_1^{(1)}(k r)) &= k r \cdot H_0^{(1)}(k r) \end{aligned} \quad (15)$$

(vgl. JAHNKE-EMDE [10, S. 145]), so nehmen die Randbedingungen nach (8), (10c), (11) und (14) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} J_1(k_0(b-a)) \cdot C_0 - H_1^{(1)}(k_1(b-a)) \cdot C_1^{(1)} - H_1^{(2)}(k_1(b-a)) \cdot C_1^{(2)} &= \frac{c}{i\omega} \cdot \frac{D}{b-a} \\ \frac{k_0}{\mu_0} \cdot J_0(k_0(b-a)) \cdot C_0 - \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(1)}(k_1(b-a)) \cdot C_1^{(1)} - \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(2)}(k_1(b-a)) \cdot C_1^{(2)} &= 0 \\ -H_1^{(1)}(k_1(b+a)) \cdot C_1^{(1)} - H_1^{(2)}(k_1(b+a)) \cdot C_1^{(2)} & \\ + H_1^{(1)}(k(b+a)) \cdot C^{(1)} &= \frac{c}{i\omega} \cdot \frac{D}{b+a} \\ -\frac{k_1}{\mu_1} H_0^{(1)}(k_1(b+a)) \cdot C_1^{(1)} - \frac{k_1}{\mu_1} H_0^{(2)}(k_1(b+a)) \cdot C_1^{(2)} & \\ + \frac{k}{\mu} H_0^{(1)}(k(b+a)) \cdot C^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Durch die Gleichungen (16) werden  $C_0$ ,  $C_1^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$  und  $C^{(1)}$  eindeutig festgelegt.

Die Dichte des Stromes, der unter dem Einfluß der eingepprägten und der induzierten elektromotorischen Kraft in azimuthaler Richtung in der Wicklung fließt, berechnet sich unter Berücksichtigung von (1) zu:

$$j_\varphi = \sigma_1 (E_\varphi + E_\varphi^{(e)}) = \sigma_1 \left( E_\varphi + \frac{D}{r} \right) \quad (17)$$

oder, nach (8) und (10c), zu:

$$j_\varphi = -\frac{i\omega\sigma_1}{c} (C_1^{(1)} \cdot H_1^{(1)}(k_1 r) + C_1^{(2)} \cdot H_1^{(2)}(k_1 r)) \quad (18)$$

Damit erhalten wir für das in den Wechselstromwiderstand (5) eingehende Integral, das den Gesamtstrom pro Längeneinheit der Wicklung angibt:

$$\begin{aligned} \int_{b-a}^{b+a} j_{\varphi} dr &= -\frac{i \omega \sigma_1}{c} \cdot \left[ C_1^{(1)} \cdot \int_{b-a}^{b+a} H_1^{(1)}(k_1 r) dr + C_1^{(2)} \cdot \int_{b-a}^{b+a} H_1^{(2)}(k_1 r) dr \right] = \\ &= \frac{i \omega \sigma_1}{c} \cdot [C_1^{(1)} \cdot \{H_0^{(1)}(k_1(b+a)) - H_0^{(1)}(k_1(b-a))\} + C_1^{(2)} \cdot \{H_0^{(2)}(k_1(b+a)) \\ &\quad - H_0^{(2)}(k_1(b-a))\}] \end{aligned} \quad (19)$$

(vgl. JAHNKE-EMDE [10, S. 146]). Der Wechselstromwiderstand pro cm Länge der Spule wird damit nach (5):

$$w = \frac{2 \pi n^2 c k_1 D}{\sigma_1 i \omega [C_1^{(1)} \cdot \{H_0^{(1)}(k_1(b+a)) - H_0^{(1)}(k_1(b-a))\} + C_1^{(2)} \cdot \{H_0^{(2)}(k_1(b+a)) - H_0^{(2)}(k_1(b-a))\}]} \quad (20)$$

Drücken wir  $C_1^{(1)}$  und  $C_1^{(2)}$  nach den Bestimmungsgleichungen (16) durch die folgenden Determinanten aus:

$$C_1^{(1)} = \frac{c}{i \omega} \cdot \frac{D}{b} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad C_1^{(2)} = \frac{c}{i \omega} \cdot \frac{D}{b} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (21a)$$

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} J_1(k_0(b-a)) & \frac{1}{1-\frac{a}{b}} & H_1^{(2)}(k_1(b-a)) & 0 \\ \frac{k_0}{\mu_0} \cdot J_0(k_0(b-a)) & 0 & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(2)}(k_1(b-a)) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\frac{a}{b}} & H_1^{(2)}(k_1(b+a)) & H_1^{(1)}(k(b+a)) \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(2)}(k_1(b+a)) & \frac{k}{\mu} \cdot H_0^{(1)}(k(b+a)) \end{vmatrix} \quad (21b)$$

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} J_1(k_0(b-a)) & H_1^{(1)}(k_1(b-a)) & \frac{1}{1-\frac{a}{b}} & 0 \\ \frac{k_0}{\mu_0} \cdot J_0(k_0(b-a)) & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(1)}(k_1(b-a)) & 0 & 0 \\ 0 & H_1^{(1)}(k_1(b+a)) & \frac{1}{1+\frac{a}{b}} & H_1^{(1)}(k(b+a)) \\ 0 & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(1)}(k_1(b+a)) & 0 & \frac{k}{\mu} \cdot H_0^{(1)}(k(b+a)) \end{vmatrix} \quad (21c)$$

$$A = \begin{vmatrix} J_1(k_0(b-a)) & H_1^{(1)}(k_1(b-a)) & H_1^{(2)}(k_1(b-a)) & 0 \\ \frac{k_0}{\mu_0} \cdot J_0(k_0(b-a)) & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(1)}(k_1(b-a)) & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(2)}(k_1(b-a)) & 0 \\ 0 & H_1^{(1)}(k_1(b+a)) & H_1^{(2)}(k_1(b+a)) & H_1^{(1)}(k(b+a)) \\ 0 & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(1)}(k_1(b+a)) & \frac{k_1}{\mu_1} \cdot H_0^{(2)}(k_1(b+a)) & \frac{k}{\mu} \cdot H_0^{(1)}(k(b+a)) \end{vmatrix} \quad (21d)$$

so erhalten wir für  $w$  nach (20):

$$w = \frac{2\pi n^2 k_1 b}{\sigma_1} \frac{\Delta}{A_1 \cdot [H_0^{(1)}(k_1(b+a)) - H_0^{(1)}(k_1(b-a))] + A_2 \cdot [H_0^{(2)}(k_1(b+a)) - H_0^{(2)}(k_1(b-a))]} \quad (22)$$

In diesem Ausdruck hebt sich die Konstante  $D$  der eingepprägten elektromotorischen Kraft hinweg, wie zu verlangen ist.

Bis zu diesem Punkte wurde die Rechnung völlig streng und frei von jeder Vernachlässigung geführt. Im folgenden sollen nun spezielle Fälle behandelt werden. Dabei mögen je nach den Voraussetzungen gewisse Vernachlässigungen vorgenommen werden, um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten und zunächst Wechselwirkungseffekte 1. Ordnung zu erhalten.

Eine solche Vernachlässigung, die in jedem Falle erlaubt sein wird, ist die von  $a/b$  gegen 1 in der 2. Spalte der Determinante (21b) bzw. in der 3. Spalte von (21c), denn wir hatten die Stärke  $2a$  der Wicklung als klein gegen den Windungsradius  $b$  vorausgesetzt. Wir ersetzen daher in jedem der nun zu behandelnden besonderen Fälle  $1:(1-a/b)$  bzw.  $1:(1+a/b)$  durch 1.

#### b) 1. Fall: Spulenkern nichtleitend.

##### Skineffekt in der Spulenwicklung schwach (Niederfrequenz)

Wir präzisieren die Voraussetzungen durch folgende Beziehungen:

$$\sigma_0 = 0 \quad k_0 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad |k_0 b| = \frac{b \omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \ll 1 \quad (23a)$$

$$|k_1 a| = \frac{a}{c} \sqrt{4\pi \omega \sigma_1 \mu_1} \ll 1 \quad (23b)$$

$$|k_1 b| = \frac{b}{c} \sqrt{4\pi \omega \sigma_1 \mu_1} \gg 1 \quad (23c)$$

$$|k b| = \frac{b}{c} \sqrt{\epsilon^2 \mu^2 \omega^4 + (4\pi \sigma \mu \omega)^2} \ll 1 \quad (23d)$$

Die Ungleichung (23a) besagt, daß die Wellenlänge im Spulenkern sehr groß gegen den Spulenzradius sein soll. Die Ungleichungen (23b) und (23c) besagen, daß die Eindringtiefe  $\tau_1$  in die Wicklung

$$\tau_{1[\text{cm}]} = \frac{c}{\sqrt{2\pi \omega \sigma_1 \mu_1}} = 5033 \cdot \sqrt{\frac{\rho}{r \mu}} \quad (\rho \text{ spezif. Widerstand in } \Omega \cdot \text{cm}) \quad (24)$$

sehr groß gegen die Stärke der Wicklung, aber klein gegen den Spulenradius sein soll. Wellenlänge und Eindringtiefe im Außenraum dagegen sollen nach (23d) stets groß gegen den Spulenradius bleiben.

Die Bedingungen (23) bedeuten praktisch Beschränkung auf Niederfrequenz von einigen Tausend Hertz. Nimmt man nämlich  $\mu_0$  maximal zu 500,  $\varepsilon_0$  zu 20 an, so besagt die Bedingung (23a), daß  $\nu \ll 5 \cdot 10^7$  Hz sein muß. Schärfer indessen ist die Bedingung (23b): Für eine Spule von  $b = 1$  cm und  $a = 0,01$  cm aus Kupferdraht vom spezifischen Widerstand  $1,6 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$  muß nämlich  $\nu \ll 10^6$  Hz sein. Die Frequenz darf also höchstens von der Größenordnung  $10^4$  Hz, andererseits aber nicht kleiner als  $10^3$  Hz sein. Hieraus folgt, daß unter dieser Bedingung für die praktisch bei Gesteinen vorkommenden Werte von  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  die Bedingung (23d) erfüllt ist.

Unter den Voraussetzungen (23a–23d) geht man zweckmäßig in die Determinanten (21b, 21c, 21d) mit annähernden Ausdrücken für die Zylinderfunktionen ein. Man ersetzt wegen Bedingung (23a) die Besselschen Funktionen durch die ersten Glieder ihrer Potenzreihenentwicklung nach  $k_0 r$ , die Hankelschen Funktionen für das Innere der Wicklung aber wegen Bedingung (23c) durch ihre asymptotischen Ausdrücke für großes Argument. Die Hankelschen Funktionen für den Außenraum hingegen werden wegen (24d) durch ihr logarithmisches und konstantes Glied bzw. ihren Pol angenähert (vgl. etwa R. WEYRICH [32]):

$$\begin{aligned}
 J_0(k_0(b-a)) &\approx 1 \\
 J_1(k_0(b-a)) &\approx \frac{1}{2} k_0 b \\
 H_0^{(1)}(k_1(b \pm a)) &\approx \frac{1-i}{\sqrt{\pi} k_1 b} \cdot e^{i k_1(b \pm a)} \\
 H_0^{(2)}(k_1(b \pm a)) &\approx \frac{1+i}{\sqrt{\pi} k_1 b} \cdot e^{-i k_1(b \pm a)} \\
 H_1^{(1)}(k_1(b \pm a)) &\approx -\frac{1+i}{\sqrt{\pi} k_1 b} \cdot e^{i k_1(b \pm a)} \\
 H_1^{(2)}(k_1(b \pm a)) &\approx -\frac{1-i}{\sqrt{\pi} k_1 b} \cdot e^{-i k_1(b \pm a)} \\
 H_0^{(1)}(k(b+a)) &\approx 1 - 0,074 i + \frac{i}{\pi} \cdot \ln k^2 b^2 = M(k b) \\
 H_1^{(1)}(k(b+a)) &\approx -\frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{k b}
 \end{aligned} \tag{25}$$

In dieser Näherung erhält man für die Determinanten (21b, 21c, 21d):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{k_0}{\sqrt{\pi} k_1 b} \cdot \left[ \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{k b} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} (1+i) - \frac{k}{\mu} \cdot M(k b) \cdot (1-i) \right\} \cdot e^{-i k_1 a} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{k b}{2\mu_1} \cdot (1+i) + \frac{1}{\mu_0} \cdot (1-i) \right\} \cdot \frac{k}{\mu} \cdot M(k b) \cdot e^{i k_1 a} \right] \cdot e^{-i k_1 b}
 \end{aligned} \tag{26a}$$

$$A_2 = -\frac{k_0}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot \left[ \frac{k}{\mu} \left\{ \frac{k_1 b}{2 \mu_1} \cdot (1-i) + \frac{1}{\mu_0} \cdot (1+i) \right\} \cdot M(kb) \cdot e^{-ik_1 a} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{kb} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} (1-i) - \frac{k}{\mu} M(kb) \cdot (1+i) \right\} e^{ik_1 a} \right] \cdot e^{ik_1 b} \quad (26b)$$

$$A = \frac{k_0}{\pi k_1 b} \cdot \left[ \left( \frac{i}{\mu_0} + \frac{k_1 b}{2 \mu_1} \right) \left( \frac{4i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{kb} + \frac{2ik}{\mu} \cdot M(kb) \right) \cdot e^{-2ik_1 a} \right. \\ \left. + \left( \frac{i}{\mu_0} - \frac{k_1 b}{2 \mu_1} \right) \left( \frac{4i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{kb} - \frac{2ik}{\mu} \cdot M(kb) \right) \cdot e^{2ik_1 a} \right] \quad (26c)$$

Da  $|k_1 a| \ll 1$  vorausgesetzt wird, entwickeln wir  $e^{\pm ik_1 a}$  bzw.  $e^{\pm 2ik_1 a}$  nach Potenzen von  $k_1 a$  und brechen mit dem linearen Gliede ab. Wir erhalten damit:

$$A_1 = \frac{k_0}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot \left[ \frac{k_1}{\mu_1} \left( \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{kb} + \frac{kb}{2\mu} \cdot M(kb) \right) (1+i) + ik_1 a \left\{ \frac{2k}{\mu\mu_0} \cdot M(kb) \cdot (1-i) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \left( \frac{kb}{2\mu} \cdot M(kb) - \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{kb} \right) (1+i) \right\} \right] \cdot e^{-ik_1 b} \quad (27a)$$

$$A_2 = \frac{k_0}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot \left[ -\frac{k_1}{\mu_1} \left( \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{kb} + \frac{kb}{2\mu} \cdot M(kb) \right) (1-i) \right. \\ \left. + ik_1 a \left\{ \frac{2k}{\mu\mu_0} \cdot M(kb) \cdot (1+i) + \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \left( \frac{kb}{2\mu} \cdot M(kb) - \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{kb} \right) (1-i) \right\} \right] \cdot e^{ik_1 b} \quad (27b)$$

$$A = \frac{k_0}{\pi k_1 b} \cdot \left[ \frac{2ik k_1}{\mu} \left( \frac{b}{\mu_1} + \frac{4a}{\mu_0} \right) \cdot M(kb) + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{kb} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \cdot k_1 a \cdot k_1 b \right) \right] \quad (27c)$$

Entwickeln wir auch die Ausdrücke für  $H_0^{(1)}(k_1(b \pm a))$  und  $H_0^{(2)}(k_1(b \pm a))$ , die im Nenner von (22) auftreten, entsprechend den Näherungen (25) in der gleichen Weise nach  $k_1 a$ , so erhalten wir:

$$H_0^{(1)}(k_1(b+a)) - H_0^{(1)}(k_1(b-a)) = \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot 2i k_1 a \cdot e^{ik_1 b} \quad (28a)$$

$$H_0^{(2)}(k_1(b+a)) - H_0^{(2)}(k_1(b-a)) = -\frac{1+i}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot 2i k_1 a \cdot e^{-ik_1 b} \quad (28b)$$

Damit ergibt sich für den Ausdruck (22) als Näherung, die unter den Voraussetzungen (23a–23d) gilt, unter Berücksichtigung von  $k_1^2 = -4\pi i \omega \sigma_1 \mu_1$ :

$$w = \frac{\pi n^2 b}{\sigma_1 a} + \frac{i \omega \cdot \frac{4\pi^2 n^2 b^2 \mu_0}{c^2}}{1 - \pi i \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \left( \frac{kb}{2} \right)^2 \cdot \left( 1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2 \right) \left( 1 + 4 \frac{a}{b} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_0} \right)} \quad (29)$$

Hierbei kann die letzte Klammer im Nenner wegen  $a/b \ll 1$ ,  $\mu_0 \geq \mu_1 = 1$  (dünne Wicklung im Vergleich zum Spulradius, unmagnetischer Spulendraht)

durch eins ersetzt werden. Das erste Glied von (29):

$$R_0 = \frac{\pi n^2 b}{\sigma_1 a} \quad (30a)$$

stellt den Ohmschen Widerstand pro Längeneinheit der Spule bei verschwindendem Skineffekt dar. Die Einzelwindung, als Kreisring vom Radius  $b$  und von rechteckigem Querschnitt mit den Seitenlängen  $2a$  und  $1/n$  aufgefaßt, hat im Falle  $a \ll b$  einen Ohmschen Widerstand:

$$r_0 = \frac{2\pi b}{2a \cdot \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sigma_1} = \frac{\pi n b}{\sigma_1 a} \quad (30b)$$

$n$  derartige Windungen hintereinander geschaltet haben also einen Widerstand  $R_0$  nach (30a). Das zweite Glied von (29) dagegen stellt den induktiven Widerstand der Spule einschließlich des durch Wirbelstromverluste im Außenraume bedingten zusätzlichen Wirkwiderstandes dar.

Man erkennt in dem Faktor:

$$\frac{4\pi^2 n^2 b^2 \mu_0}{c^2} = \mu_0 L_0 \quad (30c)$$

den im absoluten elektromagnetischen Maßsystem gemessenen Koeffizienten der Selbstinduktion pro Längeneinheit einer unendlichlangen Spule, die außen vom Vakuum umgeben und innen von einem Kern mit der Permeabilität  $\mu_0$  ausgefüllt ist (vgl. KOHLRAUSCH [14, S. 205]). Die gesamte Wechselwirkung mit dem Halbleiter außen kommt in dieser Näherung durch ein Zusatzglied  $\mu_0 g$  im Nenner zum Ausdruck:

$$w = R_0 + \frac{i \omega L_0 \mu_0}{1 - \mu_0 g} \quad (31a)$$

$$g = \frac{\pi i}{\mu} \cdot \left(\frac{kb}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2\right) \quad (31b)$$

### c) 2. Fall: Spulenkern nichtleitend Skineffekt in der Spulenwicklung stark (Hochfrequenz)

In diesem Falle gelten die Bedingungen (23a) und (23c) ungeändert. Als Bedingung für starken Skineffekt in der Wicklung tritt an die Stelle von (23b) jedoch:  $|k_1 a| \gg 1$ . Das bedeutet für Wicklung aus Kupfer von 0,02 cm Stärke, daß die Frequenz  $\nu \gg 10^5$  Hz sein, also im Hochfrequenzgebiet liegen muß. Nach den Voraussetzungen (23d) muß andererseits  $\nu \ll 10^8$  Hz sein, falls (23d) noch für gutleitendes Erz von 10  $\Omega$ cm spezifischem Widerstand gelten soll. Die Vor-

aussetzungen, die wir hiermit nochmals zusammenstellen:

$$|k_0 b| = \frac{b \omega}{c} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \ll 1 \quad (32a)$$

$$|k_1 a| = \frac{a}{c} \cdot \sqrt{4 \pi \omega \sigma_1 \mu_1} \gg 1 \quad (32b)$$

$$|k_1 b| = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{4 \pi \omega \sigma_1 \mu_1} \gg 1 \quad (32c)$$

$$|k b| = \frac{b}{c} \cdot \sqrt[4]{(\epsilon \mu \omega^2)^2 + (4 \pi \omega \sigma \mu)^2} \ll 1 \quad (32d)$$

beschränken mithin die Frequenzlage auf  $10^6$  bis  $10^7$  Hz, also auf das 10- bis 100-m-Wellen-Gebiet.

Unter den Voraussetzungen (32a, 32b, 32c, 32d) dürfen wiederum die Näherungsausdrücke (25) in die Determinanten (21b, 21c, 21d) eingesetzt werden. Wir erhalten damit erneut die Ausdrücke (26a, 26b, 26c). Da indessen jetzt  $|k_1 a| \gg 1$  angenommen wird, ist wegen

$$i k_1 a = -(1+i) \cdot \frac{a}{c} \sqrt{2 \pi \omega \sigma_1 \mu_1} \quad (33)$$

jetzt: 
$$|e^{i k_1 a}| \ll |e^{-i k_1 a}| \quad (34)$$

Die Koeffizienten von  $e^{i k_1 a}$  bzw.  $e^{-i k_1 a}$  in (26a, 26b, 26c) sind für die in Frage kommende Frequenz im allgemeinen von gleicher Größenordnung, so daß wir die Glieder mit  $e^{i k_1 a}$  gegen die mit  $e^{-i k_1 a}$  vernachlässigen können. Man hat nun zu berücksichtigen, daß wegen (32c) für unmagnetischen Spulendraht in jedem Falle gilt:

$$\frac{|k_1 b|}{2} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_1} \gg 1 \quad (35)$$

$$\left| \frac{k b}{2} \cdot M(k b) \right| \ll \frac{\mu}{\mu_1} \cdot \left| \frac{k_1}{k} \right| \quad (36)$$

Man erhält unter Vernachlässigung von  $\frac{1+i}{\mu_0}$  gegen  $\frac{k_1 b}{2} \frac{1-i}{\mu_1}$  in (26b) und von  $\frac{1}{\mu_0}$  gegen  $\frac{b k_1}{2 \mu_1}$  in (26c) näherungsweise:

$$\Delta_1 = -\frac{k_0 k_1}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot \frac{1-i}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_0 \mu_1} \cdot \frac{2}{k b} \cdot e^{-i k_1 (b+a)} \quad (37a)$$

$$\Delta_2 = -\frac{k_0 k_1}{\sqrt{\pi k_1 b}} \cdot (1-i) \cdot \frac{k b}{2} \cdot M(k b) \cdot e^{i k_1 (b+a)} \quad (37b)$$

$$\Delta = \frac{k_0 k_1}{\pi^2} \cdot \frac{i}{\mu_1^2} \cdot \frac{2}{k b} \cdot e^{-2 i k_1 a} \quad (37c)$$

Mit den asymptotischen Darstellungen (25) für  $H_0^{(1)}(k_1 (b \pm a))$  und  $H_0^{(2)}(k_1 (b \pm a))$  ergibt sich für den Wechselstromwiderstand pro Längeneinheit nach (22) und

(37a, 37b, 37c) schließlich:

$$w = i \omega \cdot \frac{4 \pi^2 n^2 b^2}{c^2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{1}{1 - \pi i \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \left(\frac{kb}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2\right)} \quad (38)$$

Vergleicht man (38) mit (29), so sieht man, daß (38) aus (29) lediglich durch Streichung des ersten Gliedes (Gleichstromwiderstand) hervorgeht. Der zusätzliche Wirk- bzw Blindwiderstand wird also bei schwachem wie bei starkem Skineffekt im Spulendraht in erster Annäherung durch den gleichen Ausdruck dargestellt. Dieser Ausdruck enthält die Materialkonstanten des Drahtes nicht. Der Realteil von (38) entspricht in bekannter Weise dem Wirkwiderstand, der Imaginärteil dem Blindwiderstand der Spule pro Längeneinheit. Da wegen  $E_r = 0$  auf der Wicklung keine Ladung gebunden ist, ist der Blindwiderstand rein induktiv aufzufassen.

Dieses wichtige Ergebnis (38) wird physikalisch verständlich, wenn man bedenkt, daß das elektromagnetische Feld der Spule im Außen- wie im Innenraum weitgehend von der Verteilung des Stromes über dem Querschnitt der Wicklung unabhängig sein muß, sofern die Wicklung sehr dünn ist. Während der induktive Widerstand proportional mit  $\omega$  wächst, steigt der Wirkwiderstand nach den Rechnungen, die SOMMERFELD [28] unter den gleichen Vereinfachungen durchgeführt hat, für starken Skineffekt nur proportional  $\sqrt{\omega}$  an. Der Blindwiderstand überwiegt daher für hohe Frequenzen den Wirkwiderstand zunehmend. Daher kommt es, daß dieser im Schlußergebnis (38) unserer Näherungsrechnung als kleine Größe wegfällt. Wohl zu unterscheiden vom „inneren“ Wirkwiderstand des Spulendrahtes bleibt natürlich immer der „äußere“ Wirkwiderstand, der durch die Rückwirkung der Wirbelströme im Außenraume auf die Spule hervorgerufen wird. Er wird durch den Realteil von (38) angegeben.

d) 3. Fall: Spulenkern leitend.  
Skineffekt in der Wicklung und im  
Spulenkern stark

(Hochpermeabler Spulenkern bei Hochfrequenz)

Ist die Rückwirkung der Wirbelströme nur schwach, so gilt für das Wechselwirkungsglied in (29) bzw. in (38):

$$|\mu_0 g| = \left| \pi i \cdot \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \left(\frac{kb}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2\right) \right| \ll 1 \quad (39)$$

Falls die Spule außen vom Vakuum umgeben ist, wird

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (40)$$

und das Rückwirkungsglied (39):

$$\mu_0 g = \pi i \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \left(\frac{\omega b}{2c}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.074 i + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\omega b}{c}\right) \quad (41)$$

Für Hochfrequenz ( $\omega = 10^6$  bis  $10^8$  Hz) ergibt sich also:

$$|\mu_0 g| \approx \frac{\mu_0}{\mu} \cdot 10^{-5} \text{ bis } \frac{\mu_0}{\mu} \cdot 10^{-9} \quad (42)$$

Selbst für sehr hohe Permeabilität  $\mu_0$  (bis 1000) wird daher (39) noch weitgehend erfüllt sein, auch wenn der Außenraum nicht leer ist, sondern von einem Halbleiter mit genügend geringer Leitfähigkeit (spezifischer Widerstand  $\rho > 10^4 \Omega\text{cm}$ ) erfüllt wird. Entwickelt man daher (31) nach  $g$  und bricht mit dem linearen Gliede ab, so erhält man:

$$w = \omega L_0 \left( i \mu_0 - \pi \cdot \frac{\mu_0^2}{\mu} \cdot \left( \frac{kb}{2} \right)^2 \cdot M(kb) + \dots \right) \quad (43)$$

Für die Änderung von  $w$  durch die Wechselwirkung ergibt sich also ein in  $\mu_0$  quadratisches Glied. Man kann daher den Wechselwirkungseffekt durch das Einbringen eines magnetisierbaren Kernes in die Spule um mehrere Zehnerpotenzen steigern. Da mit hoher Permeabilität jedoch Leitfähigkeit verbunden zu sein pflegt, gewinnt der Fall Interesse, daß der Spulenkern nicht, wie im 1. und 2. Falle geschehen, als Nichtleiter, sondern als Leiter zu behandeln ist.

Leicht erledigt ist zunächst der Fall sehr geringen Skineffektes im Spulenkern, also  $|k_0 b| \ll 1$ . Dann können wieder die Näherungsausdrücke (25) für  $J_0(k_0(b-a))$  bzw.  $J_1(k_0(b-a))$  in (21b, 21c, 21d) eingesetzt werden. Damit fällt aber, wie im ersten und zweiten Falle,  $k_0$  aus dem Ausdruck (38) für den Wechselstromwiderstand heraus. Bei schwachem Skineffekt bleiben also die Wirbelströme im Spulenkern in 1. Annäherung ohne Einfluß auf den Wechselstromwiderstand der Spule.

Anders dagegen liegen die Verhältnisse, wenn der Skineffekt im Spulenkern sehr stark ist, wenn also:

$$\text{Realteil } (i k_0 (b-a)) \gg 1 \quad (44a)$$

und damit auch

$$|k_0 (b-a)| \gg 1 \quad (44b)$$

ist. Dann können auch für die Besselschen Funktionen die asymptotischen Ausdrücke für großes Argument eingesetzt werden, nämlich (vgl. etwa WEYRICH [32, S. 47]):

$$\begin{aligned} J_1(k_0(b-a)) &\approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi k_0(b-a)}} \{ (1+i) \cdot e^{i k_0(b-a)} + (1-i) \cdot e^{-i k_0(b-a)} \} \\ J_0(k_0(b-a)) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi k_0(b-a)}} \{ (1-i) \cdot e^{i k_0(b-a)} + (1+i) \cdot e^{-i k_0(b-a)} \} \end{aligned} \quad (45)$$

Wegen der Wahl der Wurzel  $k_0 = \sqrt{k_0^2}$  mit  $\text{Re}(k_0) < 0$  ergibt sich  $\text{Im}(k_0) > 0$  und wegen (44):

$$|e^{-i k_0(b-a)}| \gg |e^{i k_0(b-a)}| \quad (46)$$

Indem wir die Glieder mit  $e^{ik_0(b-a)}$  vernachlässigen, setzen wir näherungsweise statt (45):

$$\begin{aligned} J_1(k_0(b-a)) &\approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{\pi k_0 b}} \cdot e^{-ik_0(b-a)} \\ J_0(k_0(b-a)) &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{\pi k_0 b}} \cdot e^{-ik_0(b-a)} \end{aligned} \quad (47)$$

Im übrigen wollen wir die gleichen Voraussetzungen wie im 2. Falle (Abschnitt c) – nämlich starken Skineneffekt in der Wicklung und schwachen Skineneffekt im Außenraume – machen. Damit lauten die Bedingungen insgesamt:

$$|k_0(b-a)| \gg 1 \quad (48a)$$

$$|k_1 a| \gg 1 \quad (48b)$$

$$|k_1 b| \gg 1 \quad (48c)$$

$$|k b| \ll 1 \quad (48d)$$

Gehen wir mit (47) und mit den Näherungsausdrücken (25) für die Hankel'schen Funktionen in die Determinanten (21b, 21c, 21d) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi b \sqrt{k_0 k_1}} \cdot \left[ -\frac{k_0}{\mu_0} \left\{ \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{k b} + \frac{k}{\mu} \cdot M(kb) \right\} \cdot e^{-ik_1 a} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{k_0}{\mu_0} - \frac{k_1}{\mu_1} \right) \cdot \frac{k}{\mu} \cdot M(kb) \cdot e^{ik_1 a} \right] \cdot e^{-ik_0(b-a) - ik_1 b} \end{aligned} \quad (49a)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{\pi b \sqrt{k_0 k_1}} \cdot \left[ -i \left( \frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_1}{\mu_1} \right) \frac{k}{\mu} \cdot M(kb) \cdot e^{-ik_1 a} - 2i \frac{k_0}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{k b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k}{2\mu} \cdot M(kb) \right\} \cdot e^{ik_1 a} \right] \cdot e^{-ik_0(b-a) + ik_1 b} \end{aligned} \quad (49b)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi k_1 b \sqrt{\pi k_0 b}} \cdot \left[ 2i \left( \frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_1}{\mu_1} \right) \left\{ \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} (1+i) - \frac{k}{\mu} (1-i) M(kb) \right\} e^{-2ik_1 a} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( \frac{k_0}{\mu_0} - \frac{k_1}{\mu_1} \right) \left\{ \frac{2i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} (1-i) \frac{1}{k b} - \frac{k}{\mu} (1+i) M(kb) \right\} e^{2ik_1 a} \right] \cdot e^{-ik_0(b-a)} \end{aligned} \quad (49c)$$

In diesen Ausdrücken vernachlässigen wir wieder wie im 2. Falle die Glieder mit  $e^{ik_1 a}$  gegen die mit  $e^{-ik_1 a}$ , ferner in (49a) und (49c)  $k/\mu \cdot M(kb)$  gegen  $\frac{2i}{\pi} \cdot \frac{k_1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{k b}$ . Damit ergibt sich:

$$A_1 = -\frac{2i \sqrt{k_0 k_1}}{\pi^2 \mu_0 \mu_1 k b^2} \cdot e^{-ik_0(b-a) - ik_1(b+a)} \quad (50a)$$

$$A_2 = -\frac{ik \left( \frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_1}{\mu_1} \right)}{\pi b \mu \cdot \sqrt{k_0 k_1}} \cdot e^{-ik_0(b-a) + ik_1(b-a)} \quad (50b)$$

$$A = -\frac{2(1+i) \left( \frac{k_0}{\mu_0} + \frac{k_1}{\mu_1} \right)}{\pi^2 \mu_1 k b^2 \cdot \sqrt{\pi k_0 b}} \cdot e^{-ik_0(b-a) - 2ik_1 a} \quad (50c)$$

Mit den asymptotischen Darstellungen (25) für  $H_0^{(1)}(k_1(b \pm a))$  und  $H_0^{(2)}(k_1(b \pm a))$  erhalten wir für den Wechselstromwiderstand nach (22):

$$w = \frac{i \omega \cdot \frac{4 \pi^2 n^2 b^2 \mu_0}{c^2}}{-i \cdot \frac{kb}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu_1 \cdot k_0}{\mu_0 \cdot k_1}} - \pi i \cdot \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \left(\frac{kb}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2\right)} \quad (51)$$

Ist  $\mu_0 \gg \mu_1$  (unmagnetischer Wicklungsdraht) und  $|k_1| \gg |k_0|$ , d. h., ist nach (9b, 9c) die Leitfähigkeit der Wicklung groß gegen die des Spulenkernes, so kann  $\frac{\mu_1 \cdot k_0}{\mu_0 \cdot k_1}$  gegen eins vernachlässigt werden. Wir erhalten mit (51) also einen Ausdruck für  $w$ , der sich von dem im 2. Falle gewonnenen (Gl. (29)) nur durch das 1. Glied im Nenner unterscheidet. Statt 1 tritt hier  $-i \frac{k_0 b}{2}$  auf.

#### e) Vergleich und numerische Diskussion der unter b), c) und d) behandelten Fälle

Wir diskutieren im folgenden die Näherungsformeln (29), (38) und (51) für den Wechselstromwiderstand pro Längeneinheit. Zunächst lassen sich die Ausdrücke (38) und (51) dadurch noch etwas verbessern, daß man den in unserer Näherung weggefallenen Term für den Ohmschen Widerstand des Spulendrahtes nach den Ergebnissen von SOMMERFELD [28] hinzufügt. Nach SOMMERFELD (a.a.O.) erhält man den Ohmschen Widerstand  $R$  pro cm Spulenlänge im Falle extremen Skineffektes durch Multiplikation des Gleichstromwiderstandes  $R_0$  nach (30a) mit dem Faktor:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{2a}{c} \cdot \sqrt{2 \pi \omega \sigma_1} \quad (\mu_1 = 1) \quad (52)$$

also

$$R = R_0 \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{n \pi^2 b}{\sigma_1 a} \cdot \frac{2a}{c} \sqrt{2 \pi \omega \sigma_1} = \frac{\sqrt{2 \pi^3}}{c} \cdot n^2 b \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_1}} \quad (53)$$

Eine Korrektur in dieser Form, die sich unter Mitnahme der vernachlässigten Glieder selbstverständlich auch aus unserer Rechnung ergeben muß, wird erlaubt sein, sofern die Rückwirkung des Außenraumes bzw. des Kernes auf die Stromverteilung im Wicklungsquerschnitt noch schwach ist. An sich gilt (52) und (53) nach SOMMERFELDS Voraussetzung nur für eine Spule im leeren Raum.

Um die Ergebnisse (29), (30) und (51) einheitlich und übersichtlich darzustellen, dividieren wir Zähler und Nenner mit  $\mu_0$ . Der Ausdruck  $w$  nimmt dann die Form an:

$$w = R + \frac{i \omega L_0}{f - g} \quad (54)$$

Hierbei hängen  $R$  (Ohmscher Widerstand der Wicklung) und  $L_0$  (Selbstinduktivität unter quasistationären Bedingungen für den materiefreien Raum) nur

von den Parametern der Wicklung,  $f$  nur von den Materialkonstanten des Spuleninneren und  $g$  nur von den Materialkonstanten des Spulenäußeren ab. Die folgende Tabelle 1 gibt die Formeln für  $R$ ,  $f$ ,  $L_0$  und  $g$  in den drei behandelten Fällen an.

Tabelle 1

	$R$	$f$	$L_0, g$
1. Fall (Abschnitt b) Skinneffekt in der Wicklung und im Spulenkern schwach	$\frac{\pi n^2 b}{\sigma_1 a}$	$\frac{1}{\mu_0}$	$L_0 = \frac{4 \pi^2 n^2 b^2}{c^2}$ $g = \frac{\pi i}{\mu} \left( \frac{k b}{2} \right)^2 \left( 1 - 0.074 i + \frac{i}{\pi} \ln k^2 b^2 \right)$
2. Fall (Abschnitt c) Skinneffekt in der Wicklung stark, im Spulenkern schwach	$\frac{\sqrt{2 \pi^3}}{c} n^2 b \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_1}}$	$\frac{1}{\mu_0}$	
3. Fall (Abschnitt d) Skinneffekt in der Wicklung und im Spulenkern stark	$\frac{\sqrt{2 \pi^3}}{c} n^2 b \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_1}}$	$-\frac{i k_0 b}{2 \mu_0}$	

In dieser Darstellung kommt die Wechselwirkung der Spule mit dem Außenmedium nur in  $g$  zur Geltung, und zwar bemerkenswerterweise in allen Fällen in gleicher Weise. Mit der numerischen Auswertung des Termes  $g$  wird daher gleichzeitig die Grundlage für die Diskussion aller drei Fälle geliefert. Für die numerische Diskussion ist es zweckmäßig, die komplexe Konstante  $k$  durch reelle Parameter mit physikalisch anschaulicher Bedeutung darzustellen. Als solche empfehlen sich:

1. die elektromagnetische Eindringtiefe  $\tau$ , berechnet unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes und für  $\mu_1 = 1$ ,
2. das Verhältnis  $\kappa$  der Verschiebungsstromdichte zur Leitungsstromdichte,
3. die magnetische Permeabilität  $\mu$ .

Es gilt (vgl. etwa R. BECKER [2]):

$$k = \frac{\sqrt{\mu}}{\tau} \cdot \left\{ -\sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} + \kappa} + i \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} - \kappa} \right\} \quad (55)$$

mit der Bedeutung:

$$\tau_{[\text{cm}]} = \frac{c}{\sqrt{2 \pi \omega \sigma}} = 5033 \cdot \sqrt{\frac{\rho_{[\Omega \text{cm}]}}{\nu_{[\text{Hz}]}}} \quad (56a)$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon \omega}{4 \pi \sigma} = 5,56 \cdot 10^{-13} \cdot \varepsilon \cdot \rho_{[\Omega \text{cm}]} \cdot \nu_{[\text{Hz}]} \quad (56b)$$

( $\sigma$  in absoluten elektrostatischen Einheiten gemessen;  $\kappa$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  reine Zahlen.)

Zerlegt man den Term  $g$  ((54), Tabelle 1) in Real- und Imaginärteil:

$$g = u + i v \quad (57)$$

so erhält man mit (56a, 56b):

$$u = \frac{b^2}{2 \tau^2} \cdot \left\{ z \left( \ln \frac{2 \tau^2}{b^2} - \ln \mu - \frac{1}{2} \ln (1 + z^2) + 0.232 \right) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z \right\} \quad (58a)$$

$$v = \frac{b^2}{2 \tau^2} \cdot \left\{ -\ln \frac{2 \tau^2}{b^2} + \ln \mu + \frac{1}{2} \ln (1 + z^2) - 0.232 - z \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} z \right) \right\} \quad (58b)$$

Diese Formeln eignen sich besonders gut zur numerischen Berechnung. Die Eindringtiefe  $\tau$  bedeutet für  $z \ll 1$  anschaulich diejenige Tiefe, in welcher die Amplitude der ebenen elektromagnetischen Welle auf den  $e$ -ten Teil abgesunken ist. Ist hingegen  $z$  nicht gegen eins zu vernachlässigen, so erhält man die wahre Eindringtiefe durch Division von  $\tau$  mit  $\sqrt{1 + z^2} - z$ , wie aus (55) hervorgeht (vgl. R. BECKER [2, S. 186 f.]).

In der folgenden Tabelle 2 werden die Werte für  $u$  und  $v$  nach (58a, 58b), für  $b = 1$  cm und für  $\nu = 10^4$  bzw.  $10^6$  Hz entsprechend den Bedingungen (23a bis 23d), (32a bis 32d) bzw. (48a bis 48d) in Abhängigkeit vom spezifischen Widerstande des Außenraumes für  $\varepsilon = 2$  bzw.  $\varepsilon = 20$  und  $\mu = 1$  gegeben. Der Bereich von  $\rho$  entspricht den im Bergbau praktisch vorkommenden Gesteinen, angefangen bei gutleitenden sulfidischen Erzen ( $\rho \approx 10 \Omega\text{cm}$ ) bis zum Steinsalz ( $\rho > 10^7 \Omega\text{cm}$ ). Schränkt man diesen Bereich nach unten hin etwas ein, etwa durch die Bedingung  $\rho > 10^2 \Omega\text{cm}$ , so sind die Bedingungen (23), (32) bzw. (48) auch für höhere Frequenzen noch erfüllt. In der Tabelle 2 sind daher auch Werte für  $10^7$  und  $10^8$  Hz (30-m- bzw. 3-m-Welle) und  $\varepsilon = 20$  angegeben. In Bild 3 sind  $u$  und  $v$  graphisch in doppeltlogarithmischer Auftragung dargestellt. Die schraffierten Bereiche zwischen den Kurven werden durch diejenigen Kurven überdeckt, die jeweils Zwischenwerten der D.-K. zwischen 2 und 20 entsprechen.

Wir befassen uns zunächst mit dem 1. und 2. Fall (siehe Tabelle 1). Das 2. Glied in (54), welches hauptsächlich interessiert, ist in beiden Fällen das gleiche:

$$\begin{aligned} \frac{i \omega L_0}{\mu_0 g} &= \frac{i \omega L_0 \mu_0}{1 - \mu_0 g} = \frac{i \omega L_0 \mu_0}{1 - \mu_0 (u + i v)} = \frac{1 - \mu_0 u + i \mu_0 v}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \cdot i \omega L_0 \\ &= i \omega L_0 + R_W + i R_B \end{aligned} \quad (59)$$

Die Wechselwirkung mit der Umgebung bedingt also das Auftreten eines zusätzlichen Wirkwiderstandes pro Längeneinheit von der Größe:

$$R_W = - \frac{\omega L_0 \mu_0^2 v}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \quad (60a)$$

( $v$  ist stets negativ)

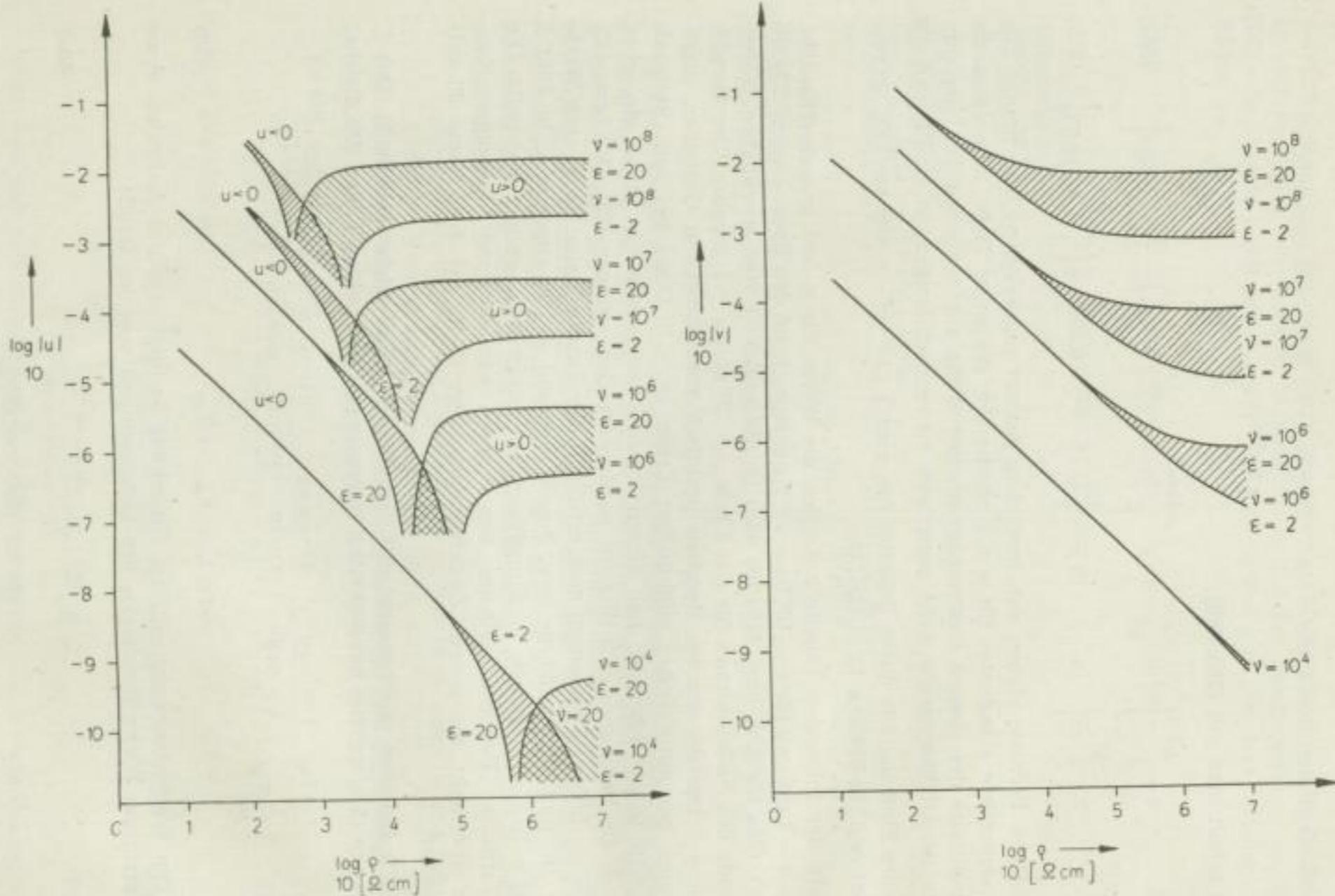


Bild 3. Die charakteristischen Funktionen  $u$  und  $v$  des Gebirgswiderstandes  $\rho$  für eine Spule von 1 cm Radius in logarithmischer Darstellung

Tabelle 2. Die charakteristischen Funktionen  $u$  und  $v$  des Gebirgs widerstandes  $\rho$ , aus denen sich der Wechselstromwiderstand einer Spule von 1 cm berechnen läßt; für  $\varepsilon = 2$  bzw.  $\varepsilon = 20$

$\rho$ [Ohm]	$\nu = 10^4$ Hertz				$\nu = 10^6$ Hertz			
	$u$		$v$		$u$		$v$	
	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 20$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 20$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 20$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 20$
$10^1$	$-3,10 \cdot 10^{-5}$	$-3,10 \cdot 10^{-5}$	$-2,19 \cdot 10^{-4}$	$-2,19 \cdot 10^{-4}$	$-3,11 \cdot 10^{-5}$	$-3,11 \cdot 10^{-5}$	$-1,23 \cdot 10^{-2}$	$-1,23 \cdot 10^{-2}$
$10^2$	$-3,10 \cdot 10^{-6}$	$-3,10 \cdot 10^{-6}$	$-2,64 \cdot 10^{-5}$	$-2,64 \cdot 10^{-5}$	$-3,10 \cdot 10^{-4}$	$-3,08 \cdot 10^{-4}$	$-1,73 \cdot 10^{-2}$	$-1,73 \cdot 10^{-2}$
$10^3$	$-3,10 \cdot 10^{-7}$	$-3,10 \cdot 10^{-7}$	$-3,09 \cdot 10^{-6}$	$-3,09 \cdot 10^{-6}$	$-3,07 \cdot 10^{-5}$	$-2,88 \cdot 10^{-5}$	$-2,21 \cdot 10^{-4}$	$-2,19 \cdot 10^{-4}$
$10^4$	$-3,10 \cdot 10^{-8}$	$-3,06 \cdot 10^{-8}$	$-3,55 \cdot 10^{-7}$	$-3,55 \cdot 10^{-7}$	$-2,83 \cdot 10^{-6}$	$-3,85 \cdot 10^{-7}$	$-2,65 \cdot 10^{-5}$	$-2,68 \cdot 10^{-5}$
$10^5$	$-3,06 \cdot 10^{-9}$	$-2,68 \cdot 10^{-9}$	$-4,01 \cdot 10^{-8}$	$-4,01 \cdot 10^{-8}$	$+1,16 \cdot 10^{-6}$	$+2,87 \cdot 10^{-6}$	$-3,13 \cdot 10^{-6}$	$-3,54 \cdot 10^{-6}$
$10^6$	$-2,63 \cdot 10^{-10}$	$+1,39 \cdot 10^{-10}$	$-4,46 \cdot 10^{-9}$	$-4,49 \cdot 10^{-9}$	$+3,38 \cdot 10^{-7}$	$+3,35 \cdot 10^{-6}$	$-4,00 \cdot 10^{-7}$	$-9,67 \cdot 10^{-7}$
$10^7$	$+2,06 \cdot 10^{-11}$	$+4,90 \cdot 10^{-10}$	$-4,89 \cdot 10^{-10}$	$-5,36 \cdot 10^{-10}$	$+3,96 \cdot 10^{-7}$	$+3,41 \cdot 10^{-6}$	$-1,02 \cdot 10^{-7}$	$-7,17 \cdot 10^{-7}$

$\rho$ [Ohm]	$\nu = 10^7$ Hertz				$\nu = 10^8$ Hertz			
	$u$		$v$		$u$		$v$	
	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 20$						
$10^3$	$-3,09 \cdot 10^{-3}$	$-2,99 \cdot 10^{-2}$	$-1,28 \cdot 10^{-2}$	$-1,28 \cdot 10^{-2}$	$-3,03 \cdot 10^{-2}$	$-2,53 \cdot 10^{-2}$	$-8,24 \cdot 10^{-2}$	$-8,75 \cdot 10^{-2}$
$10^2$	$-2,93 \cdot 10^{-4}$	$-1,40 \cdot 10^{-4}$	$-1,73 \cdot 10^{-3}$	$-1,77 \cdot 10^{-3}$	$-1,90 \cdot 10^{-2}$	$+6,72 \cdot 10^{-2}$	$-1,31 \cdot 10^{-2}$	$-1,72 \cdot 10^{-2}$
$10^4$	$-8,92 \cdot 10^{-6}$	$+1,87 \cdot 10^{-4}$	$-2,22 \cdot 10^{-4}$	$-2,63 \cdot 10^{-4}$	$+1,36 \cdot 10^{-3}$	$+1,14 \cdot 10^{-2}$	$-2,18 \cdot 10^{-3}$	$-7,94 \cdot 10^{-3}$
$10^5$	$+2,37 \cdot 10^{-5}$	$+2,34 \cdot 10^{-4}$	$-3,09 \cdot 10^{-5}$	$-8,95 \cdot 10^{-5}$	$+1,84 \cdot 10^{-3}$	$+1,19 \cdot 10^{-2}$	$-8,42 \cdot 10^{-4}$	$-7,00 \cdot 10^{-3}$
$10^6$	$+3,29 \cdot 10^{-5}$	$+2,39 \cdot 10^{-4}$	$-9,71 \cdot 10^{-6}$	$-7,08 \cdot 10^{-5}$	$+1,89 \cdot 10^{-3}$	$+1,20 \cdot 10^{-2}$	$-7,89 \cdot 10^{-4}$	$-6,90 \cdot 10^{-3}$
$10^7$	$+3,78 \cdot 10^{-5}$	$+2,40 \cdot 10^{-4}$	$-7,22 \cdot 10^{-6}$	$-6,91 \cdot 10^{-5}$	$+1,90 \cdot 10^{-3}$	$+1,20 \cdot 10^{-2}$	$-6,91 \cdot 10^{-4}$	$-6,90 \cdot 10^{-3}$

Vergleich der behandelten Fälle

und eines induktiv bedingten zusätzlichen Blindwiderstandes  $R_B$  pro Längeneinheit von der Größe:

$$R_B = \omega L_0 \mu_0^2 \cdot \frac{u - \mu_0 (u^2 + v^2)}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \quad (60b)$$

Wie Tabelle 2 bzw. Bild 3 zeigt, sind die Funktionen  $u$  und  $v$  innerhalb des interessierenden Variablenbereiches klein gegen eins. Eine extrem hohe Permeabilität des Spulenkernes ist hier auszuschließen, da eine solche mit geringer Leitfähigkeit, wie wir für den Spulenkern angenommen hatten, nicht verbunden zu sein pflegt. Setzen wir also z. B.  $\mu_0 < 100$ , so bleiben auch die Produkte  $\mu_0 u$  und  $\mu_0 v$  im allgemeinen klein und erreichen nur in Extremfällen die Größenordnung eins. Ist also  $|\mu_0 u| \ll 1$  und  $|\mu_0 v| \ll 1$ , so gilt angenähert:

$$R_W = -\omega L_0 \mu_0^2 v \quad (61a)$$

$$R_B = \omega L_0 \mu_0^2 u \quad (61b)$$

Tabelle 2 gibt dann, bis auf den Faktor  $\mu_0^2$ , unmittelbar den zusätzlichen Wirk- und Blindwiderstand in Einheiten der Induktanz  $\omega L_0$  an. Für kleine Werte von  $u$  und  $v$ , besonders also für niedere Frequenzen ( $\nu < 10^5$  Hz) ist die Änderung des Wechselstromwiderstandes dem Quadrat der Permeabilität proportional. Wenn also die Rückwirkung des Außenmediums ohne Spulenkern auch sehr gering ist, kann sie doch durch einen Kern aus hochpermeablem Material nach (61a, 61b) eine Steigerung um mehrere Zehnerpotenzen erfahren. Physikalisch verständlich wird dieses Resultat, wenn man bedenkt, daß die im Außenraume induzierten Ströme um so stärker sind, je stärker der Spulenkern magnetisiert wird. Die Änderung der magnetischen Induktion im Spulennieren durch diese Ströme wächst ebenfalls mit  $\mu_0$ . Die durch Rückwirkung in der Spulenwicklung induzierte Spannung muß also in erster Annäherung proportional  $\mu_0^2$  sein.

Ein weiteres Ergebnis betrifft das Vorzeichen von  $R_W$  bzw.  $R_B$ . Wie aus Tabelle 2 ersichtlich, ist  $v$  stets negativ und damit  $R_W$  nach (60a) bzw. (61a) stets positiv, wie es das Energieprinzip verlangt. Die Änderung  $R_B$  des Blindwiderstandes dagegen kann verschiedenes Vorzeichen haben. Man entnimmt Tabelle 2, daß  $u$  für niedere Werte von  $\rho$  negativ, für höhere dagegen positiv ist. Nach (60b) bzw. (61b) wird daher die Selbstinduktivität bei hinreichend niederem spezifischen Widerstande des Außenmediums verringert, bei höherem dagegen etwas vergrößert. Der physikalische Grund hierfür ist, daß bei hinreichend geringer Leitfähigkeit die Wirbelströme in nächster Umgebung der Spule nur um eine Viertelperiode gegen den Spulenstrom phasenverschoben sind. Ihr magnetisches Feld im Inneren der Spule eilt daher dem Felde des Spulenstromes ebenfalls um eine Viertelperiode nach. Die Wirbelströme induzieren daher in der Wicklung eine Spannung, die der treibenden Kraft in erster Annäherung entgegengesetzt gerichtet ist und daher merklich nur eine Erhöhung des Wirkwiderstandes bedingt. Ist dagegen die Leitfähigkeit außerhalb der Spule groß, so bleiben die Wirbelströme um mehr als eine Viertelperiode hinter dem Spulen-

stromen zurück. Es resultiert dann ein zusätzliches magnetisches Feld im Spulenninneren, das dem Felde des Spulenstromes phasengleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Eine Verringerung der Selbstinduktivität ist die Folge.

Sind  $\mu_0 u$  und  $\mu_0 v$  klein gegen eins, so betragen die Änderungen  $R_W$  und  $R_B$  nach (60a, 60b) nur Bruchteile der Induktanz  $\omega L_0 \mu_0$ . Rücken  $\mu_0 u$  und  $\mu_0 v$  dagegen in die Größenordnung der Einheit, so werden diese Zusatzglieder von gleicher Größenordnung wie  $\omega L_0 \mu_0$  selbst. Während der gesamte Wirkwiderstand  $R + R_W$  natürlich stets positiv bleibt, kann der gesamte Blindwiderstand  $\omega L_0 \mu_0 + R_B$  unter Umständen negativ sein. Die Spule zeigt dann eine negative Selbstinduktivität und verhält sich wie ein Kondensator.

Wie man Tabelle 2 oder Bild 3 entnimmt, geht die D.-K. erst bei höherem spezifischem Widerstand merklich in die Wechselwirkung ein. Der hierfür kritische Wert von  $\rho$  liegt um so niedriger, je höher die Frequenz ist. Bei  $10^4$  Hz spricht eine Spule von 1 cm Radius unterhalb  $\rho = 10^4 \Omega\text{cm}$  praktisch nur auf Änderungen von  $\rho$  an. Beim Übergang zu  $10^6$  Hz verschiebt sich diese Grenze in das Gebiet zwischen  $10^2$  und  $10^3 \Omega\text{cm}$ . Bei hinreichend hohem spezifischem Widerstande schließlich wirken praktisch nur noch Änderungen von  $\varepsilon$  (horizontale, asymptotische Äste rechts, Bild 3). Man ersieht aus dem Diagramm, daß für die Bestimmung des spezifischen Widerstandes niedere Frequenzen ( $10^4$  bis  $10^6$  Hz), für eine solche der Dielektrizitätskonstante dagegen höhere Frequenzen ( $\nu > 10^7$  Hz) erforderlich sind. Der Mißerfolg, den MARTIENSSEN hinsichtlich der Messung von D.-K.-Unterschieden erlitt, beruhte hauptsächlich auf der unzureichenden Wahl der Frequenz.

Als praktisches Beispiel möge eine unendlichlange Spule von  $b = 1$  cm Radius und  $n = 50$  Windungen je cm Länge gewählt werden. Die einlagige Wicklung bestehe aus Kupferdraht von  $\rho_1 = 1,7 \cdot 10^6 \Omega\text{cm}$  spezifischem Widerstand und quadratischem Querschnitt. Die Windungen liegen ohne Zwischenraum nebeneinander;  $a$  beträgt dann 0,01 cm. Wir erhalten im 1. Fall (Abschnitt 2b) für den Ohmschen Widerstand pro cm Spulenlänge nach (30a) unter Umrechnung auf Ohm:

$$R_0 = 1,34 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (62a)$$

Die Selbstinduktivität pro cm ergibt sich nach (30c) unter Umrechnung auf HENRY zu:

$$L_0 = 0,985 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Henry}}{\text{cm}} \quad (62b)$$

Der induktive Widerstand pro cm der kernfreien Spule beträgt für  $\nu = 10^4$  Hz demnach:

$$\omega L_0 = 6,20 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (62c)$$

Ist die Spule mit magnetisierbarem Material von  $\mu_0 = 100$  gefüllt, so erhalten wir:

$$\omega L_0 \mu_0 = 620 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (62d)$$

Nach Tabelle 2 und (61a, 61b) ergibt sich für einen spezifischen Widerstand des Außenmediums von  $\rho = 100 \Omega\text{cm}$  (z. B. Sulfiderz oder Lauge):

$$R_W = 1,64 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (63a)$$

$$R_B = -0,19 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (63b)$$

Die Erhöhung des Wirkwiderstandes durch Wirbelstromverluste im Außenmedium ist also von der Größenordnung des Wirkwiderstandes der Wicklung, während der Blindwiderstand sich um nur 0,3‰ verringert. Mittels der Formeln:

$$\omega L_0 = 6,20 \cdot 10^{-4} \cdot \nu \quad (64a)$$

$$R_W = -6,20 \cdot 10^{-4} \cdot \mu_0^2 \cdot \nu \cdot v \quad (64b)$$

$$R_B = 6,20 \cdot 10^{-4} \cdot \mu_0^2 \cdot \nu \cdot u \quad (64c)$$

lassen sich unter der Voraussetzung  $|\mu_0 u| \ll 1$  und  $|\mu_0 v| \ll 1$  im 1. und 2. Falle für das gleiche Spulenmodell entsprechende Werte  $R_W$  und  $R_B$  für andere  $\nu$ ,  $\mu_0$  und  $\rho$  berechnen.

Im 2. Falle (Skinneffekt in der Wicklung stark) ist  $R_0$  nach (53b) mit dem Skinneffektfaktor  $2a/\tau_1$  zu multiplizieren. Wir erhalten für  $\nu = 10^7 \text{ Hz}$  nach (24):

$$\frac{2a}{\tau_1} = 9,65 \quad (65a)$$

$$R = 12,9 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (65b)$$

Der induktive Widerstand indessen beträgt nach (64a) für die kernfreie Spule:

$$\omega L_0 = 6200 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (65c)$$

Der Ohmsche Widerstand (65b) macht also im Höchsthalle ( $\mu_0 = 1$ ) nur etwa 2‰ der Induktanz aus, und man versteht, wieso er bei unserer Näherungsrechnung in Abschnitt 2b wegfallen konnte. Für  $R_W$  und  $R_B$  ergibt sich nach (64b, 64c) und Tabelle 2 für  $\rho = 100 \Omega\text{cm}$  und  $\varepsilon = 20$ :

$$R_W = 78,7 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (65d)$$

$$R_B = -18,5 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (65e)$$

Die Erhöhung des Wirkwiderstandes durch Wirbelstromverluste beträgt also trotz der durch Skinneffekt bedingten Vergrößerung des Ohmschen Spulenwider-

standes nach (65b) ein Mehrfaches von  $R$ . Der Blindwiderstand der Spule aber verringert sich nach (65e) nur erst um 3%. Die Änderung der Impedanz durch das Außenmedium ist wegen des großen Betrages von  $\omega L_0$  gering. Sie beträgt selbst in günstigen Fällen ( $\rho = 100 \Omega\text{cm}$ ) nicht mehr als 3%. Man sieht, daß im 2. Falle bereits schwach magnetisierbares Material ( $\mu_0 \sim 10$ ) im Spulenkern recht deutliche Effekte hervorrufen müßte. Die Berechnung von  $R_W$  und  $R_B$  muß sich dann, wegen  $\mu_0 u \sim 1$  und  $\mu_0 v \sim 1$ , auf die strengeren Formeln (60a, 60b) gründen.

Der 3. Fall, der nun diskutiert werden soll, ist aus folgendem Grunde wichtig: Um die Wechselwirkungseffekte zwischen Spule und Außenmedium zu steigern, die auch bei Hochfrequenz im allgemeinen sehr klein sind, könnte man auch in diesem Falle mit magnetisierbaren Spulenkernen arbeiten. Während die Leitfähigkeit des Spulenkernes bei Niederfrequenz, genauer gesagt bei schwachem Skineffekt im Spulenkern, ohne Einfluß bleibt, bedingt der Skineffekt, der bei Hochfrequenz stärker ist, eine wesentliche Änderung der Verhältnisse.

Um die numerische Diskussion zu erleichtern, wollen wir Verschiebungsströme im Spulenkern vernachlässigen und nach (9c) schreiben:

$$k_0^2 = -i \frac{4 \pi \omega \sigma_0 \mu_0}{c^2} \quad (66a)$$

und entsprechend (24):

$$k_0 = \frac{1}{c} \sqrt{2 \pi \omega \sigma_0 \mu_0} \cdot \sqrt{-2i} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\tau_0} (-1+i) \quad \tau_0 = \frac{c}{\sqrt{2 \pi \omega \sigma_0}} \quad (66b)$$

Der Ausdruck (54) nimmt dann mit der Zerlegung von  $g$  nach (57) die Form an:

$$\begin{aligned} w &= R_0 \cdot \frac{2a}{\tau_1} + \frac{i \omega L_0 \sqrt{\mu_0}}{\frac{b}{2 \tau_0} (1+i) - \sqrt{\mu_0} (u+i v)} = \\ &= R_0 \cdot \frac{2a}{\tau_1} + \frac{(1+i) \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}}}{1 - (1-i) \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} \cdot \mu_0 (u+i v)} \end{aligned} \quad (67)$$

Da  $|k_0 b| \gg 1$  vorausgesetzt wird, ist nach (66b)  $\frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} \ll 1$ . Man darf also auch im Falle  $|\mu_0 u| \sim 1$ ,  $|\mu_0 v| \sim 1$  noch in guter Annäherung schreiben:

$$\begin{aligned} w &= R_0 \cdot \frac{2a}{\tau_1} + (1+i) \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} \cdot \left\{ 1 + (1-i) \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} \cdot \mu_0 (u+i v) \right\} = \\ &= R_0 \cdot \frac{2a}{\tau_1} + \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} + 2 \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0^2}{b^2} \cdot u + i \left\{ \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} + 2 \omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0^2}{b^2} \cdot v \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

Der Wirkwiderstand der unbeeinflussten Spule erfährt also durch Wirbelstromverluste im Kern eine Erhöhung, die durch das 2. Glied in (68) angegeben wird. Den Einfluß des Außenmediums beschreibt das 3. Glied: An die Stelle von (61a) tritt:

$$R_W = \omega L_0 \mu_0 \cdot 2 \frac{\tau_0^2}{b^2} \cdot u \quad (69a)$$

Der Blindwiderstand  $\omega L_0 \mu_0$  der unbeeinflussten Spule erscheint jetzt mit dem Skineffektfaktor  $\frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}}$  multipliziert, ist also stark verkleinert. Da der Skineffekt das magnetische Feld auf die Randpartie des Spulenkernes verdrängt, wird der Induktionsfluß durch den Spulenquerschnitt und damit die Selbstinduktivität verringert. Das 5. Glied schließlich gibt den Einfluß der äußeren Wirbelströme an und vertritt jetzt (61b):

$$R_B = \omega L_0 \mu_0 \cdot 2 \frac{\tau_0^2}{b^2} \cdot v \quad (69b)$$

$R_B$  ist wegen  $v < 0$  stets negativ.

Vergleicht man (69a, 69b) mit (61a, 61b), so fällt auf, daß  $u$  und  $v$  ihre Rollen getauscht haben. Das hat nach Tabelle 2 zur Folge, daß jetzt  $R_B$  im allgemeinen  $R_W$  um eine Größenordnung übertrifft. Im 2. Falle findet das Umgekehrte statt. Der Vergleich zeigt ferner, daß die Ersetzung eines niederpermeablen, schlechtleitenden Spulenkernes mit  $\mu_0'$  durch einen hochpermeablen, gutleitenden mit  $\mu_0$  nur dann größere Effekte gibt, wenn

$$2 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0^2}{b^2} > \mu_0'^2 \quad (70)$$

Als praktisches Beispiel wählen wir wieder das gleiche Modell für die Spule wie oben und geben ihm einen Kern mit  $\mu_0 = 900$  und  $\rho_0 = 10^{-3} \Omega\text{cm}$ . Die Frequenz möge wie im vorigen Beispiel  $\nu = 10^7$  Hz betragen. Die Eindringtiefe im Spulenkern ist dann nach (66b) und (24):

$$\tau_0 = 0,0503 \text{ cm} \quad (71a)$$

Wir erhalten:

$$\frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} = 1,68 \cdot 10^{-3} \quad (71b)$$

$$2 \frac{\tau_0^2}{b^2} = 5,06 \cdot 10^{-3} \quad (71c)$$

Wenn wir wieder  $\rho$  zu  $100 \Omega\text{cm}$  annehmen, ergibt sich damit:

$$R_0 \cdot \frac{2a}{\tau_1} = 12,9 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (72a)$$

$$\omega L_0 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0}{b \sqrt{\mu_0}} = 9360 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (72b)$$

$$\omega L_0 \mu_0 \cdot 2 \frac{\tau_0^2}{b^2} u = -84,4 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (72c)$$

$$\omega L_0 \mu_0 \cdot 2 \frac{\tau_0^2}{b^2} v = -358 \frac{\Omega}{\text{cm}} \quad (72d)$$

Während also die Änderung des Wirkwiderstandes nach (72c) bis auf das Vorzeichen die gleiche geblieben ist wie im 2. Falle, ist diejenige des Blindwiderstandes nach (72d) jetzt auf das 20fache gestiegen. Die Größenordnung des Blindwiderstandes und der Impedanz der unbeeinflussten Spule ist indessen die gleiche wie im 2. Falle. Die durch Wirbelströme im Spulenkern bedingte Erhöhung des Wirkwiderstandes (72b) übertrifft den Ohmschen Widerstand der Wicklung (72a) bei weitem. Die Änderung des gesamten Wirkwiderstandes der unbeeinflussten Spule durch das Außenmedium beträgt infolgedessen jetzt nur 0,9%, diejenige des Blindwiderstandes jedoch 3,8% gegenüber 3% im 2. Falle. Das Beispiel zeigt, daß eine Füllung der Spule mit hochpermeablem Material, z. B. Permalloy, selbst bei den starken Wirbelstromverlusten, die bei Hochfrequenz im Spulenkern eintreten, den Rückwirkungseffekt der außen fließenden Wirbelströme beträchtlich erhöht. Die Bedingung (70) wird indessen nicht erfüllt, so daß ein niederpermeables Material von geringer Leitfähigkeit schon mit  $\mu_0 = 10$  weit größere Änderungen als (72c, 72d) liefert. Allerdings ist damit auch eine stärkere Erhöhung des induktiven Widerstandes gegeben, der im 3. Falle gerade durch den Skineffektfaktor (71b) in erträglichen Grenzen gehalten wird.

Vergleicht man die drei behandelten Fälle miteinander, so zeigt sich, daß die Wechselwirkung der Spule mit dem umgebenden Medium mit zunehmender Frequenz steigt, wie zu erwarten ist. Die Änderungen, die dadurch für Wirk- und Blindwiderstand resultieren, wachsen, absolut wie auch relativ genommen, beträchtlich an, wenn man von Niederfrequenz ( $< 10^4$  Hz) zu Hochfrequenz ( $10^6$  bis  $10^7$  Hz) übergeht. Hohe magnetische Permeabilität des Spulenkerns bewirkt stets eine Vergrößerung der Effekte. Diese betragen bei unmagnetischen Spulenkernen für Niederfrequenz im günstigsten Falle nur das  $10^{-4}$ fache der Impedanz, können aber für Hochfrequenz die Größenordnung von 10% erreichen (vgl. Tabelle 2). Für die Steigerung der Wechselwirkung durch Füllung der Spule mit magnetisierbarem Material ist dessen Leitfähigkeit maßgebend. Ist diese so gering, daß ein nur schwacher Skineffekt im Kern auftritt, erfahren die Wechselwirkungseffekte eine Steigerung proportional  $\mu_0^2$ , während der Blindwiderstand der unbeeinflussten Spule nur proportional  $\mu_0$  zunimmt. Dieser Fall ist für Niederfrequenz von Bedeutung: Durch hochpermeable Kerne lassen sich Änderungen in Wirk- und Blindwiderstand erzielen, die in günstigen Fällen, z. B. bei  $\rho = 10 \Omega\text{cm}$  (Erz), mehr als 10% betragen. Bei Hochfrequenz ( $10^6$  bis  $10^8$  Hz) dagegen lassen sich bereits durch mittlere Permeabilität ( $\mu_0 \sim 100$ ) Effekte von der Größenordnung der Impedanz selbst erzielen. Doch wird man den Skineffekt im Spulenkern hier meist nicht vernachlässigen dürfen. Unter dieser Bedingung erhält man bei schwacher Wechselwirkung theoretisch ein Anwachsen des Blind-

widerstandes nur mit  $\sqrt{\mu_0}$  und der Widerstandsänderung mit  $\mu_0$  (vgl. (68)). Beide Größen erfahren durch die Leitfähigkeit des Spulenkernes eine weitere Reduktion. Für hinreichend schwach leitende Kerne ( $\rho_0 > 100 \Omega\text{cm}$ , Skineffekt schwach) zeigt die Impedanz im interessierenden Bereiche von  $\rho$  (10 bis  $10^5 \Omega\text{cm}$ ) theoretisch eine Änderung um eine Zehnerpotenz (vgl. die Beispiele Kurvenblatt II). Wegen seines monotonen Charakters dürfte sich dieser Verlauf u. U. zu einer quantitativen Bestimmung von  $\rho$  ausnützen lassen.

Bei allen Schlüssen, die für Frequenzen  $\nu > 10^6 \text{ Hz}$  aus den bisherigen theoretischen Ableitungen gezogen werden, bleibt zu bedenken, daß die Kapazität der – notwendig nur endlichlangen – Spule mit unseren Ansätzen (1) und (8) nicht berücksichtigt wird. Die Spulenkapazität spielt aber eine um so größere Rolle, je näher die Frequenz der Grundeigenfrequenz der offenen Spule kommt. Unser Spulenmodell ist daher für dieses Frequenzgebiet nicht ausreichend und bedarf der Ergänzung durch eine parallel geschaltete Kapazität bzw. durch ein zusätzliches elektromagnetisches Feld vom Symmetrietypp Bild 1a. Wir behandeln daher im folgenden 3. Abschnitt die kapazitiv wirkende Sonde und nehmen im 4. Abschnitt die fehlende Ergänzung des Spulenmodells in behelfsmäßiger Form vor.

Bergakademie  
- BÜCHER -  
Freiberg i. Sa.

### 3. Theorie des Dipoloszillators, der sich in einem kugelförmigen Hohlraum innerhalb eines homogenen Halbleiters befindet

#### a) Allgemeine Formulierung des Problems

Um theoretische Unterlagen für die Wechselwirkung einer irgendwie gestalteten, kapazitiv wirkenden Bohrlochsonde vom Typ Bild 1a zu gewinnen, liegt es nahe, die klassische Bezeichnung des elektromagnetischen Feldes einer Stabantenne (gestrecktes Rotationsellipsoid) nach N. ABRAHAM [1] auf den Fall eines umgebenden Halbleiters auszudehnen. Man könnte daran denken, die Konstante  $k_0 = -\omega/c$  im Endresultat einfach durch die dem Halbleiter entsprechende Konstante  $k = 1/c \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu}$  zu ersetzen. Indessen würde eine solche Umrechnung gerade der wichtigsten Voraussetzung widersprechen, die wir hier machen, nämlich dem Fortfall jedes galvanischen Kontaktes zwischen Sonde und Außenmedium. Der Einschluß der Stabantenne in einen zylindrischen oder sonstwie gestreckten, nichtleitenden Hohlraum, den Leitungsströme nicht zu durchdringen vermögen, wäre also wesentlich. Man würde den in Bild 1a dargestellten Fall wahrscheinlich sehr weitgehend durch die Annahme einer zweiten, ellipsoidförmigen Grenzfläche annähern können, die konfokal mit der Oberfläche des „Stabes“ verläuft und die den isolierenden Zwischenraum, das „Bohrloch“, vom Halbleiter, dem Gebirge, abgrenzt (Bild 4a). Durch Einführung einer periodisch wechselnden, über das innere Ellipsoid gleichmäßig verteilten eingepprägten elektrischen Kraft könnte, wie im Falle der Spule, analytischen Schwierigkeiten ausgewichen und ein Wechselstromwiderstand auch für die Antenne oder Stabkapazität definiert werden.

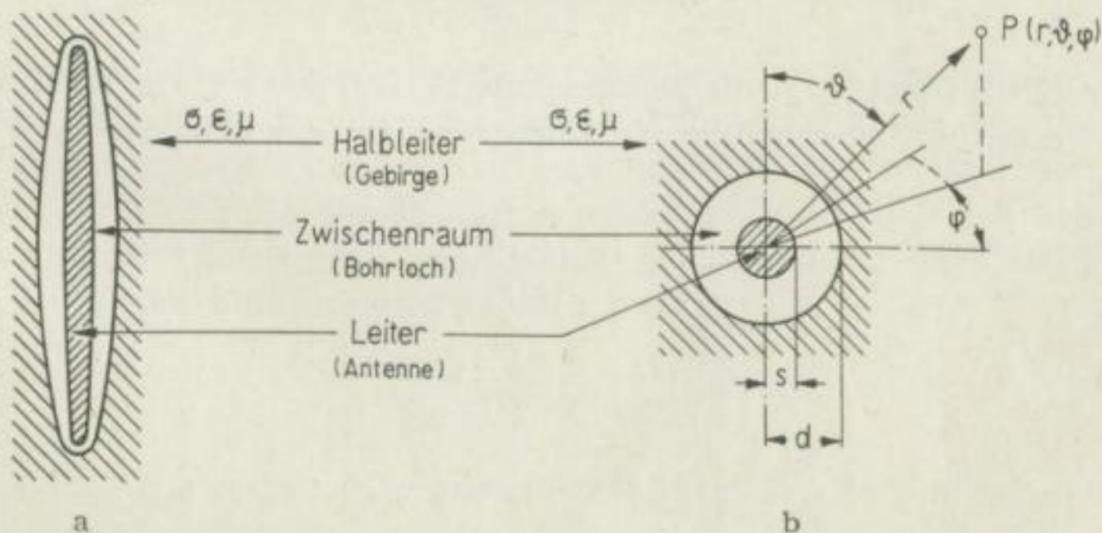


Bild 4. Idealisierung der kapazitiv wirkenden Sonde durch eine ellipsoidförmige Stabantenne (a) und durch einen Kugeloszillator (b). Das Bohrloch wird durch einen ellipsoidförmigen bzw. kugelförmigen Hohlraum ersetzt

Da es uns aber hier nur auf eine qualitative und größenordnungsmäßige Betrachtung ankommt, treiben wir die Idealisierung noch um einen Schritt weiter und nehmen beide Grenzflächen als Kugeln an (Bild 4b). Die Radien seien  $s$  und  $d$ . Wir führen räumliche Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  ein derart, daß  $\vartheta = 0$  die Richtung der eingepprägten Kraft  $\mathfrak{E}^{(e)}$  angibt, und daß die  $r$ -Richtung, die  $+\vartheta$ -Richtung und die  $+\varphi$ -Richtung ein Rechtssystem bilden (Bild 4b). Der Raum  $r < s$  werde von einem unendlich gutleitenden Material eingenommen, in welchem die eingepprägte Kraft  $\mathfrak{E}^{(e)}$  mit den Komponenten

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_r^{(e)} &= E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot e^{i\omega t} \\ \mathfrak{E}_\vartheta^{(e)} &= -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \\ \mathfrak{E}_\varphi^{(e)} &= 0 \quad (E_0 \text{ eine Konstante})\end{aligned}\quad (73)$$

wirksam sei. Der Zwischenraum  $s < r < d$  (das „Bohrloch“) sei leer, also durch  $\varepsilon = \mu = 1, \sigma = 0$  charakterisiert, während für den Außenraum  $r > d$  (das „Gebirge“) die beliebigen Materialkonstanten  $\sigma, \varepsilon, \mu$  gelten mögen.

Wir suchen nun eine zeitlich periodische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, die dem Feldtypus Bild 1a entspricht. Diese werden mit dem Ansatz (6a, 6b) für Räume, in denen  $\sigma, \varepsilon$  und  $\mu$  Konstanten sind, bekanntlich allgemein gelöst durch:

$$\mathfrak{E} = -k^2 \cdot \mathfrak{Z} - \text{grad div } \mathfrak{Z} \quad (74a)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{k^2 c}{i\omega} \cdot \text{rot } \mathfrak{Z} \quad (74b)$$

Hierbei müssen die nach rechtwinkligen Koordinaten gebildeten Komponenten  $\mathfrak{Z}_l$  des Vektors  $\mathfrak{Z}$  einzeln der Schwingungsgleichung genügen:

$$\begin{aligned}\Delta \mathfrak{Z}_l + k^2 \cdot \mathfrak{Z}_l &= 0 \\ k^2 &= \frac{\varepsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu}{c^2}\end{aligned}\quad (74c)$$

Wenn sich  $\mathfrak{Z}$  überall auf die Komponente  $\mathfrak{Z}_z = \Pi(r) \cdot e^{i\omega t}$  in Richtung  $\vartheta = 0$  (Bild 3b) reduziert, so erhalten wir nach (74a, 74b) ein Feld des Typs Bild 1a, nämlich:

$$\mathfrak{E}_r = -\left(k^2 \Pi + \frac{d^2 \Pi}{dr^2}\right) \cos \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (75a)$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \left(k^2 \Pi + \frac{1}{r} \frac{d\Pi}{dr}\right) \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (75b)$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = 0 \quad (75c)$$

$$\mathfrak{H}_r = 0 \quad (75d)$$

$$\mathfrak{H}_\vartheta = 0 \quad (75e)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = -\frac{k^2 c}{i\omega} \cdot \frac{d\Pi}{dr} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (75f)$$

mit der „Hertzschen Funktion“:

$$H = \frac{1}{r} (C_+ \cdot e^{ikr} + C_- \cdot e^{-ikr}) \quad (75g)$$

( $C_+$ ,  $C_-$  willkürliche Konstanten)

Wie man sieht, führen bei kugelförmigen Grenzflächen die bekannten Randbedingungen, die die Stetigkeit von  $E_\theta$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\theta$ ,  $H_\varphi$  und  $\mu H_r$  verlangen, zu linearen Gleichungen für die Konstanten  $C$  einer jeden Kugelschale. Unter  $+k$  verstehen wir diejenige Wurzel aus  $k^2$ , deren Realteil positiv, deren Imaginärteil also, nach (74c), negativ ist.

### b) Punktförmiger Dipol Energieverlust im Halbleiter

Wir wollen zunächst annehmen, daß der Radius  $s$  der inneren Kugel verschwindend klein sei, der Oszillator also einen Hertzschen Dipol im Mittelpunkt des Hohlraumes darstelle. Wir setzen dann die Lösung  $H_i$  für den Hohlraum in der Form an:

$$H_i = \frac{1}{r} (C_+ \cdot e^{ik_0 r} + C_- \cdot e^{-ik_0 r}) \quad (76a)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad r \leq d$$

die für den Außenraum,  $H_a$ , dagegen, wegen des Verschwindens des Feldes im Unendlichen, in der Form:

$$H_a = \frac{C_a}{r} \cdot e^{-ikr} \quad (76b)$$

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu}, \quad r \geq d$$

Für dieses Modell kann der mittlere Energieverlust  $\eta$  pro Sekunde abgeleitet werden, der durch Stromwärme im Halbleiter oder durch Ausstrahlung in das Unendliche eintritt. Damit wird ein „äußerer Wirkwiderstand“ des Oszillators analog der Größe  $R_W$  für das Spulenmodell definiert. Dieser Energieverlust ist bekanntlich der Energieströmung gleich, die durch die Kugelfläche  $r = d$  im Mittel pro Sekunde hindurchtritt, nämlich (vgl. R. BECKER [2]):

$$\eta = 2\pi s^2 \cdot \int_0^\pi \bar{S}_r \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (77)$$

$\bar{S}_r$  bedeutet die radiale Komponente des (reellen) Poyntingschen Vektors, gemittelt über eine Periode:

$$\bar{S}_r = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_\theta + \mathfrak{E}_\theta^*) \cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{H}_\varphi + \mathfrak{H}_\varphi^*) \quad (78a)$$

Der waagerechte Strich bedeutet das zeitliche Mittel, der Stern den konjugiert komplexen Wert. Da wegen des Periodizitätsfaktors  $e^{\pm 2i\omega t}$ :

$$\overline{\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{H}_\varphi} = \overline{\mathfrak{E}_\vartheta^* \mathfrak{H}_\varphi^*} = 0 \quad (78b)$$

ist, gilt mit unserer Bezeichnungsweise:

$$\overline{S_r} = \frac{c}{16\pi} \cdot (\overline{\mathfrak{E}_\vartheta \mathfrak{H}_\varphi^*} + \overline{\mathfrak{E}_\vartheta^* \mathfrak{H}_\varphi}) \quad (78c)$$

Wenn wir wieder analog zu (6) die Schreibweise einführen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_r &= E_r \cdot e^{i\omega t} & \mathfrak{H}_r &= H_r \cdot e^{i\omega t} \\ \mathfrak{E}_\vartheta &= E_\vartheta \cdot e^{i\omega t} & \mathfrak{H}_\vartheta &= H_\vartheta \cdot e^{i\omega t} \\ \mathfrak{E}_\varphi &= E_\varphi \cdot e^{i\omega t} & \mathfrak{H}_\varphi &= H_\varphi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (79)$$

erhalten wir aus (77) und (78):

$$\eta = \frac{c}{8} \cdot s^2 \cdot \int_0^\pi (E_\vartheta H_\varphi^* + E_\vartheta^* H_\varphi) \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (80)$$

Nach (75b, 75f), (76b und 79) ergibt sich für den Außenraum  $r \geq d$  allgemein:

$$E_\vartheta = C_a \cdot \left( \frac{k^2}{r} - \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cdot e^{-ikr} \cdot \sin \vartheta \quad (81a)$$

$$H_\varphi = C_a \cdot \frac{k^2 c}{i\omega \mu} \cdot \left( \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{-ikr} \cdot \sin \vartheta \quad (81b)$$

also für  $\eta$  nach (80) für  $r = d$ :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2c^2}{3\omega\mu} \cdot \frac{1}{d^7} \cdot C_a C_a^* \cdot \{ i(k^2 - k^{*2})d^2 + (kk^* \cdot (k + k^*) - k^3 - k^{*3})d^3 \\ &\quad + ikk^* \cdot (k^2 - k^{*2})d^4 + k^2 k^{*2} \cdot (k + k^*)d^5 \} \cdot e^{-i(k - k^*)d} \end{aligned} \quad (82)$$

Um den Ausdruck (82) völlig bestimmt zu machen, muß  $C_a$  berechnet werden. Wir setzen fest, daß sich  $E_\vartheta$  und  $H_\varphi$  an der Grenze zwischen Hohlraum und Halbleiter stetig verhalten sollen und der elektrische Dipol im Mittelpunkt der Kugel die Amplitude 1 (in elektrostatischen absoluten Einheiten gemessen) haben soll. Damit ergeben sich als Bestimmungsgleichungen für  $C_+$ ,  $C_-$  und  $C_a$  nach (75b, 75f) und (76a, 76b):

$$\begin{aligned} (1 + ik_0 d - k_0^2 d^2) \cdot x + (1 - ik_0 d - k_0^2 d^2) \cdot y - (1 + ikd - k^2 d^2) \cdot z &= 0 \\ k_0^2 d^2 (1 + ik_0 d) \cdot x + k_0^2 d^2 (1 - ik_0 d) \cdot y - \frac{k^2 d^2}{\mu} (1 + ikd) \cdot z &= 0 \\ e^{ik_0 d} \cdot x + e^{-ik_0 d} \cdot y &= 1 \end{aligned} \quad (83)$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt:

$$x = C_- \cdot e^{-ik_0 d} \quad y = C_+ \cdot e^{ik_0 d} \quad z = C_a \cdot e^{-ikd} \quad (84)$$

Aus (83) bestimmt sich  $C_a$  zu:

$$C_a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 - i k_0 d - k_0^2 d^2 & -(1 + i k d - k^2 d^2) \\ 0 & 1 - i k_0 d & -\frac{k^2}{\mu k_0^2} \cdot (1 + i k d) \\ 1 & e^{-i k_0 d} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + i k_0 d - k_0^2 d^2 & 1 - i k_0 d - k_0^2 d^2 & -(1 + i k d - k^2 d^2) \\ 1 + i k_0 d & 1 - i k_0 d & -\frac{k_0^2}{\mu k^2} \cdot (1 + i k d) \\ e^{i k_0 d} & e^{-i k_0 d} & 0 \end{vmatrix}} \cdot e^{i k d} =$$

$$= \frac{e^{i k d}}{2 i} \cdot \frac{k^2}{\mu k_0^2} \frac{(1 - i k_0 d)(1 + i k d - k^2 d^2) - \frac{k^2}{\mu k_0^2} \cdot (1 + i k d)(1 - i k_0 d - k_0^2 d^2)}{(1 + i k d)(k_0 d \cdot \cos k_0 d - (1 - k_0^2 d^2) \cdot \sin k_0 d) - (1 + i k d - k^2 d^2)(k_0 d \cdot \cos k_0 d - \sin k_0 d)}$$
(85)

Beschränkt man sich auf solche Wellenlängen  $\lambda_0 = c/\nu$ , die sehr groß gegen  $d$  sind, so gilt:

$$k_0 d = 2\pi \frac{d}{\lambda_0} \ll 1 \quad (86)$$

Damit wird der Frequenz bei einem Hohlraumradius von 1 cm eine obere Grenze mit  $\nu \sim 10^8$  Hz gesetzt. Dann können die trigonometrischen Ausdrücke im Nenner von (85) nach  $k_0 d$  entwickelt werden. Die Entwicklung kann in hinreichender Näherung mit den quadratischen Gliedern abgebrochen werden. Vernachlässigt man  $k_0 d$  und  $k_0^2 d^2$  gegen 1,  $k d$  und  $k^2 d^2$ , so ergibt sich

$$C_a = \frac{3 e^{i k d}}{2 i k_0^3 d^3} \cdot \frac{1 + i k d - k^2 d^2 - \frac{k^2}{\mu k_0^2} \cdot (1 + i k d)}{1 + i k d - k^2 d^2 + 2 \frac{k^2}{\mu k_0^2} \cdot (1 + i k d)} \quad (87)$$

Wir wollen ferner voraussetzen, daß

$$\left| \frac{k^2}{\mu k_0^2} \right| \gg 1 \quad \text{oder} \quad \varrho \nu < 10^{10} \quad (88)$$

( $\varrho$  in  $\Omega\text{cm}$ ,  $\nu$  in Hz gemessen)

ist. Dann ergibt sich annähernd:

$$C_a \approx \frac{3}{4} i \cdot \frac{e^{i k d}}{k_0^3 d^3} \quad (89)$$

Unter den beiden Voraussetzungen (86) und (88) resultiert näherungsweise für den Energieverlust pro Sekunde (82), indem wir wieder die reellen Para-

meter  $\tau$  und  $\kappa$  nach (56a, 56b) einführen:

$$\eta = \frac{3c^8}{8\omega^7} \cdot \frac{1}{d^9} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{\mu} (\sqrt{1+\kappa^2} - \kappa) \left\{ \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} + \kappa} + \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} - \kappa} \right\} \cdot \frac{d}{\tau} + 2\mu \sqrt{1+\kappa^2} \cdot \left(\frac{d}{\tau}\right)^2 + 2\sqrt{\mu}^3 \cdot (1+\kappa^2) \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} + \kappa} \cdot \left(\frac{d}{\tau}\right)^3 \right] \quad (90)$$

Dieser Ausdruck gilt für einen Dipol von der Amplitude 1. Hat diese den Betrag  $q$ , so gilt zwischen  $q$  und der Stromstärkeamplitude  $I_0$ , dem Polabstand  $l$  und  $\omega$  die Beziehung:

$$q = \frac{I_0 l}{\omega} \quad (91)$$

(90) ist also rechts mit  $q^2$  zu multiplizieren. Aus der bekannten Beziehung zwischen Wirkleistung  $\eta$ , Stromamplitude  $I_0$  und Wirkwiderstand  $R_W$  für sinusförmigen Wechselstrom:

$$\eta = \frac{1}{2} R_W I_0^2 \quad (92)$$

ergibt sich der „äußere“ Wirkwiderstand des Oszillators nach (90) unter Umrechnung auf Ohm zu:

$$R_W = \frac{45}{2(2\pi)^9} \cdot \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_0}{d}\right)^9 \cdot \left[ 1 + \sqrt{\mu} \cdot (\sqrt{1+\kappa^2} - \kappa) \left( \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} + \kappa} + \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} - \kappa} \right) \cdot \frac{d}{\tau} + 2\mu \sqrt{1+\kappa^2} \cdot \left(\frac{d}{\tau}\right)^2 + 2\sqrt{\mu}^3 \cdot (1+\kappa^2) \sqrt{\sqrt{1+\kappa^2} + \kappa} \cdot \left(\frac{d}{\tau}\right)^3 \right] \Omega \quad (93)$$

Für die numerische Diskussion dieses Ergebnisses wollen wir wieder den Radius der Kugel, die das Bohrloch darstellt, zu  $d = 1$  cm annehmen. Für Niederfrequenz ( $\nu < 10^4$  Hz) sind für den interessierenden Bereich von  $\rho$  (10 bis  $15^5 \Omega\text{cm}$ ) und  $\varepsilon$  (2 bis 80)  $d/\tau$  und  $\kappa$  klein gegen eins. Infolgedessen sind die Glieder mit  $d/\tau$  in der eckigen Klammer von (93) gegen eins zu vernachlässigen. Man erhält in diesem Falle:

$$R_W = 1,147 \cdot 10^{81} \cdot \frac{1}{r^8} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{l^2}{d^9} \Omega \quad (94)$$

Der Wirkwiderstand ist also dem spezifischen Widerstand im Außenraum umgekehrt proportional und zeigt eine äußerst scharfe Abhängigkeit von  $\nu$  und  $d$ . Die Abnahme wie  $1:\rho$  wird physikalisch verständlich, wenn man die beiden Grenzfälle unendlich niedrigen und unendlich hohen spezifischen Widerstandes betrachtet. Im ersten Falle muß  $R_W$  verschwinden, weil wegen der idealen Spiegelungswirkung der Hohlrauminnenfläche keine Energie in den Außenraum eindringen kann. Das Feld des Oszillators bleibt daher ganz auf den Innenraum beschränkt. Für unendlich hohen spezifischen Widerstand außen muß  $R_W$  in den Strahlungswiderstand für den reinen Isolator übergehen. Im Zwischengebiet endlicher Leitfähigkeit muß also  $R_W$  zunächst anwachsen und sich asymptot-

tisch dem Strahlungswiderstand nähern, wenn  $\varrho$  zunimmt. Offensichtlich stellt (94) eine Näherungsformel für den fallenden Teil dieses Verlaufes dar, ohne jedoch wegen der Voraussetzungen (86) und (88) für  $\varrho \rightarrow \infty$  noch gültig zu sein.

Der entgegengesetzt liegende Grenzfall, der mit den Voraussetzungen (86) und (88) verträglich ist, ist derjenige sehr starken Skinneffektes im Außenraume. Dieser Fall wird gekennzeichnet durch die Bedingungen:

$$|kd| \gg 1 \quad \frac{d}{\tau} \gg 1 \quad (95)$$

Wegen der Frequenzbeschränkung nach (86) ist (95) nur für  $\varrho < 10^{-3} \Omega\text{cm}$ , also nur für metallische Leitung bei Hochfrequenz verwirklicht. Da  $\kappa$  wieder gegen eins zu vernachlässigen ist, wird die Größenordnung der Glieder in der eckigen Klammer (93) durch  $d/\tau$  bestimmt, und man kann sich wegen (95) auf die höchste Potenz von  $d/\tau$  beschränken. Es ergibt sich damit näherungsweise:

$$R_w = \frac{45}{(2\pi)^9} \cdot \left(\frac{l}{\tau}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_0}{d}\right)^9 \cdot \left(\frac{d}{\tau}\right)^3 \cdot \sqrt{\mu}^3 = 1,798 \cdot 10^{70} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2} \cdot \frac{l^2}{d^6} \Omega \quad (96)$$

Die Empfindlichkeit von  $R_w$  gegen Frequenzänderung und Änderung von  $d$  ist also gegenüber (94) etwas gemildert, dagegen ist die Abhängigkeit von  $\varrho$  ausgeprägter. Auch im Falle starken Skinneffektes nimmt unter den Voraussetzungen (86) und (88) der Wirkwiderstand monoton ab, wenn  $\varrho$  zunimmt. Der Grenzfall (96) bietet jedoch wegen der Beschränkung auf  $\varrho < 10^{-3} \Omega\text{cm}$  hier wenig Interesse.

Ein punktförmiger Dipol im Mittelpunkt der Kugel stellt natürlich nur ein äußerst vereinfachtes Modell für eine kapazitiv wirkende Bohrlochsonde dar. Immerhin darf aus den Ergebnissen (94) bzw. (96) geschlossen werden, daß allgemein bei geringem Durchmesser der Sonde (verglichen mit  $d$ ) die Abhängigkeit des Wirkwiderstandes von  $d$  und  $\nu$  sehr scharf sein wird (hohe Potenzen im Nenner).

Über den Blindwiderstand sind aus dem zugrunde gelegten Modell (Dimensionen unendlich klein gegen  $d$ ) naturgemäß keine Angaben zu gewinnen. Hierzu müssen die Abmessungen der Sonde als endlich angenommen werden.

### c) Kugeldipol von endlichem Radius.

#### Theorie seines Wechselstromwiderstandes

Unter der Voraussetzung, daß die Leitfähigkeit im Inneren der Kugel unendlich groß sei, muß das Feld sich auf eine elektrische Komponente beschränken, die der eingepprägten Kraft (73) genau gleich und entgegengesetzt zu ihr gerichtet ist. Eine unendlich hohe Stromdichte würde sonst die Folge sein. Das Problem reduziert sich also auf die Bestimmung des Feldes im Zwischenraume  $s < r < d$  und im Außenraume  $r > d$ .

Wir setzen für den Zwischenraum nach (75g) wieder an:

$$H_z = \frac{1}{r} (C_+ \cdot e^{ik_0 r} + C_- \cdot e^{-ik_0 r}) \quad (97a)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad s \leq r \leq d$$

für den Außenraum dagegen, wegen der Ausstrahlungsbedingung, wieder:

$$H_a = \frac{C_a}{r} \cdot e^{-ikr} \quad k = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - 4\pi i \omega \sigma \mu} \quad (97b)$$

Realteil ( $k$ )  $> 0$

Nach (75a–75f) ergeben sich die Feldkomponenten für den Zwischenraum zu:

$$\mathfrak{E}_r^{(z)} = -2 \left\{ C_+ \cdot \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik_0}{r^2} \right) \cdot e^{ik_0 r} + C_- \cdot \left( \frac{1}{r^3} + \frac{ik_0}{r^2} \right) \cdot e^{-ik_0 r} \right\} \cdot \cos \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (98a)$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta^{(z)} = \left\{ C_+ \cdot \left( \frac{k_0^2}{r} + \frac{ik_0}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cdot e^{ik_0 r} + C_- \cdot \left( \frac{k_0^2}{r} - \frac{ik_0}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cdot e^{-ik_0 r} \right\} \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (98b)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi^{(z)} = \frac{k_0^2 c}{i\omega} \cdot \left\{ C_+ \cdot \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik_0}{r} \right) \cdot e^{ik_0 r} + C_- \cdot \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik_0}{r} \right) \cdot e^{-ik_0 r} \right\} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (98c)$$

$$\mathfrak{H}_r^{(z)} = \mathfrak{H}_\vartheta^{(z)} = \mathfrak{E}_\varphi^{(z)} = 0 \quad (98d)$$

und für den Außenraum zu:

$$\mathfrak{E}_r^{(a)} = -2 C_a \cdot \left( \frac{1}{r^3} + \frac{ik_0}{r^2} \right) \cdot e^{-ikr} \cdot \cos \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (99a)$$

$$\mathfrak{E}_\vartheta^{(a)} = C_a \cdot \left( \frac{k^2}{r} - \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cdot e^{-ikr} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (99b)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi^{(a)} = C_a \cdot \frac{k^2 c}{i\omega} \cdot \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) \cdot e^{-ikr} \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (99c)$$

$$\mathfrak{H}_r^{(a)} = \mathfrak{H}_\vartheta^{(a)} = \mathfrak{E}_\varphi^{(a)} = 0 \quad (99d)$$

An der Oberfläche  $r = s$  des Oszillators müssen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes beiderseits gleich sein. Da im Inneren aber gelten muß:

$$\mathfrak{E}_\vartheta^{(i)} + \mathfrak{E}_\vartheta^{(e)} = 0 \quad (100a)$$

$$\mathfrak{E}_\varphi^{(i)} = 0 \quad (100b)$$

folgt nach (73):

$$\mathfrak{E}_\vartheta^{(z)} = \mathfrak{E}_\vartheta^{(i)} = -\mathfrak{E}_\vartheta^{(e)} = E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot e^{i\omega t} \quad (r = s) \quad (101)$$

Für die magnetischen Tangentialkomponenten fällt die Randbedingung weg, da wir einen flächenhaften Leitungsstrom mit den Flächendichte-Komponenten:

$$\mathfrak{J}_\vartheta = -\frac{c}{4\pi} \cdot \mathfrak{H}_\varphi^{(z)} \quad (102a)$$

$$\mathfrak{J}_\varphi = 0 \quad (102b)$$

auf der Kugeloberfläche zulassen dürfen. Dieser Oberflächenstrom hat nur der Kontinuitätsgleichung der Elektrizität zu genügen. Diese lautet mit unseren Bezeichnungen:

$$-\frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi^{(z)}) + \frac{i\omega}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}_r^{(z)} = 0 \quad (r=s) \quad (103)$$

und wird durch die Ansätze (98b, 98c) identisch erfüllt.

Zu (101) treten noch die Randbedingungen für die äußere Grenzfläche  $r = d$  hinzu:

$$\mathfrak{E}_\vartheta^{(z)} = \mathfrak{E}_\vartheta^{(a)} \quad (104a)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi^{(z)} = \mathfrak{H}_\varphi^{(a)} \quad (r=d) \quad (104b)$$

Die Bedingungen für die radiale Komponente der Induktion,  $\mu \mathfrak{H}_r$ , und für die übrigen tangentiellen Komponenten sind nach (98d) und (99d) von selbst erfüllt. Mit (101) und (104a, 104b) ergeben sich als Bestimmungsgleichungen für  $C_+$ ,  $C_-$  und  $C_a$ :

$$\begin{aligned} C_+ \cdot \left( \frac{k_0^2}{s} + \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) \cdot e^{ik_0 s} + C_- \cdot \left( \frac{k_0^2}{s} - \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) \cdot e^{-ik_0 s} &= E_0 \\ C_+ \cdot \left( \frac{k_0^2}{d} + \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3} \right) \cdot e^{ik_0 d} + C_- \cdot \left( \frac{k_0^2}{d} - \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3} \right) \cdot e^{-ik_0 d} - C_a \cdot \left( \frac{k^2}{d} - \frac{ik}{d^2} - \frac{1}{d^3} \right) \cdot e^{-ikd} &= 0 \\ C_+ \cdot k_0^2 \left( -\frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2} \right) \cdot e^{ik_0 d} + C_- \cdot k_0^2 \left( \frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2} \right) \cdot e^{-ik_0 d} - C_a \cdot \frac{k^2}{\mu} \left( \frac{ik}{d} + \frac{1}{d^2} \right) \cdot e^{-ikd} &= 0 \end{aligned} \quad (105)$$

Als Wechselstromwiderstand des Kugeloszillators wird entsprechend dem Spulenmodell zweckmäßig der Quotient von eingepprägter Spannung  $V^{(e)}$  definiert, die zwischen den Polen der Kugel ( $\vartheta = 0$  bzw.  $\vartheta = \pi$ ) herrscht, und dem Gesamtstrom  $I$ , der durch den Äquator ( $\vartheta = \pi/2$ ) in meridionaler Richtung vom Pole  $\vartheta = \pi$  in Richtung auf den Pol  $\vartheta = 0$  fließt:

$$V^{(e)} = 2s E_0 \quad (106a)$$

$$I = -2\pi s \cdot \mathfrak{J}_\vartheta \quad (106b)$$

$$W = \frac{V^{(e)}}{I} = -\frac{E_0}{\pi \mathfrak{J}_\vartheta} \quad (107)$$

Nach (102a) wird:

$$W = \frac{4 E_0}{c H_\varphi^{(z)} \left( r=s, \vartheta=\frac{\pi}{2} \right)} \quad (108)$$

Setzt man  $H_\varphi^{(z)}$  nach (98c) ein, so ergibt sich mit  $k_0 = \omega/c$ :

$$W = \frac{4 i E_0 s^2}{\omega \cdot \{ C_+ \cdot (1 - i k_0 s) e^{ik_0 s} + C_- \cdot (1 + i k_0 s) e^{-ik_0 s} \}} \quad (109)$$

Die Konstanten  $C_+$  und  $C_-$  bestimmen sich nach (105) zu:

$$C_+ = \frac{\Theta_+}{\Theta} \cdot E_0 \quad C_- = \frac{\Theta_-}{\Theta} \cdot E_0 \quad (110a)$$

mit der Bedeutung:

$$\Theta_+ = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{k_0^2}{s} - \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) e^{-ik_0 s} & 0 \\ 0 & \left(\frac{k_0^2}{d} - \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{-ik_0 d} & \left(\frac{k^2}{d} - \frac{ik}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{-ikd} \\ 0 & k_0^2 \left(\frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{-ik_0 d} & \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{ik}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{-ikd} \end{vmatrix} \quad (110b)$$

$$\Theta_- = \begin{vmatrix} \left(\frac{k_0^2}{s} + \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) e^{ik_0 s} & 1 & 0 \\ \left(\frac{k_0^2}{d} + \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{ik_0 d} & 0 & \left(\frac{k^2}{d} - \frac{ik}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{-ikd} \\ k_0^2 \left(-\frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{ik_0 d} & 0 & \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{ik}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{-ikd} \end{vmatrix} \quad (110c)$$

$$\Theta = \begin{vmatrix} \left(\frac{k_0^2}{s} + \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) e^{ik_0 s} & \left(\frac{k_0^2}{s} - \frac{ik_0}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) e^{-ik_0 s} & 0 \\ \left(\frac{k_0^2}{d} + \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{ik_0 d} & \left(\frac{k_0^2}{d} - \frac{ik_0}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{-ik_0 d} & \left(\frac{k^2}{d} - \frac{ik}{d^2} - \frac{1}{d^3}\right) e^{-ikd} \\ k_0^2 \left(-\frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{ik_0 d} & k_0^2 \left(\frac{ik_0}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{-ik_0 d} & \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{ik}{d} + \frac{1}{d^2}\right) e^{-ikd} \end{vmatrix} \quad (110d)$$

Mit (110a–110d) wird (109):

$$W = \frac{4is^2}{\omega} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_+ \cdot (1 - ik_0 s) + \Theta_- \cdot (1 + ik_0 s)} \quad (111)$$

Sehr leicht gewinnt man den Ausdruck für  $W$  im Falle  $k = k_0$ , d. h. für materiefreien Außenraum. Da dann die Grenzfläche  $r = d$  gegenstandslos ist, wird nach (105):

$$C_+ = 0 \quad C_- = C_a = \frac{E_0 \cdot s^3}{k_0^2 s^2 - ik_0 s - 1} \quad (112)$$

und

$$W = \frac{4}{i\omega s} \cdot \frac{1 + ik_0 s - k_0^2 s^2}{1 + ik_0 s} = \frac{4}{i\omega s} \cdot \left(1 - \frac{k_0^2 s^2}{1 + ik_0 s}\right) \quad (113a)$$

Für  $k_0 s < 1$  konvergiert die Entwicklung:

$$\begin{aligned} W &= \frac{4}{i\omega s} \cdot (1 - k_0^2 s^2 + ik_0^3 s^3 + k_0^4 s^4 + \dots) = \\ &= \frac{4}{i\omega s} + i\omega \cdot \frac{4s}{c^2} + \omega^2 \cdot \frac{4s^2}{c^3} + \dots \end{aligned} \quad (113b)$$

Bergakademie  
-Bücherei-  
Freiberg i. Sa

Beschränkt man sich auf die drei ersten Glieder, so läßt sich  $W$  als Widerstandsoperator eines Kreises deuten, in welchem eine Kapazität von  $s/4$  in Reihe mit einer Selbstinduktion vom Betrage  $\frac{4s}{c^2}$  und einem Ohmschen Widerstande von der Größe  $4\omega^2 s^2 : c^2$  liegt. Natürlich kann man in dem Gliede  $i\omega \frac{4s}{c^2}$ , wie allgemein in allen höheren imaginären Gliedern der Entwicklung (113b), auch eine Frequenzabhängigkeit der Kapazität erblicken.

d) Ableitung einer Näherung für Niederfrequenz  
und mittlere Hochfrequenz.  
Numerische Diskussion

Es gilt nun, den Einfluß des Halbleiters außerhalb  $r = d$  auf die Kenngrößen des Ersatzschemas zu ermitteln, das dem Oszillator in jedem Falle zugeordnet werden kann. Man erhält für die Determinanten (110b, 110c, 110d):

$$\Theta_+ = \left\{ \frac{k^2}{\mu} \cdot (1 + ikd)(1 + ik_0d - k_0^2 d^2) - k_0^2 (1 + ik_0d)(1 + ikd - k^2 d^2) \right\} \cdot s^3 \cdot e^{-i(k_0+k)d} \quad (114a)$$

$$\Theta_- = \left\{ -\frac{k^2}{\mu} (1 + ikd)(1 - ik_0d - k_0^2 d^2) + k_0^2 (1 - ik_0d)(1 + ikd - k^2 d^2) \right\} \cdot s^3 \cdot e^{-i(k-k_0)d} \quad (114b)$$

$$\begin{aligned} \Theta &= (1 - ik_0s - k_0^2 s^2) \left\{ k_0^2 (1 + ik_0d)(1 + ikd - k^2 d^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{\mu} (1 + ikd)(1 + ik_0d - k_0^2 d^2) \right\} e^{i(k_0s - k_0d - kd)} \\ &\quad - (1 + ik_0s - k_0^2 s^2) \left\{ k_0^2 (1 - ik_0d)(1 + ikd - k^2 d^2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{\mu} (1 + ikd)(1 - ik_0d - k_0^2 d^2) \right\} e^{-i(k_0s - k_0d + kd)} \quad (114c) \end{aligned}$$

Wir gehen mit (114a–114c) in (111) ein und entwickeln unter den Voraussetzungen:

$$k_0 d \ll 1 \quad (115a)$$

$$|kd| \ll 1 \quad (115b)$$

entsprechend (113b) nach  $k_0 d$  und  $kd$ . (115a) bedeutet, daß die Wellenlänge  $\lambda_0$  im Vakuum groß gegen  $d$  ist. (115b) besagt, daß für die Eindringtiefe  $\tau$  nach (56a) und für das Verhältnis  $\varkappa$  nach (56b) gilt:

$$\tau \gg d \sqrt{\mu} \quad \varkappa \ll 1 \quad (116a)$$

Diese Bedingungen beschränken die Frequenz etwa auf:

$$\nu < \frac{2,5}{\mu} \cdot 10^5 \text{ Hz} \quad (116b)$$

Die Entwicklung des Zählers und Nenners von (111) nach Potenzen von  $k_0 d$  und  $k d$  lautet:

$$W = \frac{4}{i \omega s} \{ A_1 \cdot (k d)^2 \cdot k_0 d + B_1 \cdot (k_0 d)^3 + C_1 \cdot k_0 d (k d)^3 + D_1 \cdot (k_0 d)^3 \cdot k d + E_1 \cdot (k_0 d)^3 \cdot (k d)^2 + \\ + F_1 (k_0 d)^5 + G_1 \cdot (k_0 d)^3 \cdot (k d)^3 + H_1 \cdot (k_0 d)^5 \cdot k d + \dots \} : \{ A_2 \cdot k_0 d \cdot (k d)^2 + B_2 \cdot (k_0 d)^3 + \\ + C_2 \cdot k_0 d \cdot (k d)^3 + D_2 \cdot (k_0 d)^3 \cdot k d + E_2 \cdot (k_0 d)^3 \cdot (k d)^2 + F_2 \cdot (k_0 d)^5 + \\ + G_2 \cdot (k_0 d)^3 \cdot (k d)^3 + H_2 \cdot (k_0 d)^5 \cdot k d + \dots \} \quad (117a)$$

mit der Bedeutung  $p = \frac{s}{d} < 1$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4i}{3} (1 - p^3) & A_2 &= \frac{2i}{3} (2 + p^3) \\ B_1 &= \frac{2i}{3} (1 + 2p^3) & B_2 &= \frac{2i}{3} (1 - p^2) \\ C_1 &= -\frac{4}{3} (1 - p^3) & C_2 &= -\frac{2}{3} (2 + p^3) \\ D_1 &= -\frac{2}{3} (1 + 2p^3) & D_2 &= -\frac{2}{3} (1 - p^3) \\ E_1 &= -\frac{2i}{15} (7 + 5p^2 + 5p^3 - 2p^5) & E_2 &= -\frac{i}{15} (14 - 10p^2 - 5p^3 + p^5) \\ F_1 &= -\frac{i}{15} (1 + 5p^2 - 10p^3 + 4p^5) & F_2 &= -\frac{i}{15} (1 - 5p^2 + 5p^3 - p^5) \\ G_1 &= -\frac{1}{15} (2 + 5p^2 - 5p^3 - 2p^5) & G_2 &= \frac{1}{15} (4 - 10p^2 + 5p^3 + p^5) \\ H_1 &= \frac{1}{15} (1 + 5p^2 - 10p^3 + 4p^5) & H_2 &= \frac{1}{15} (1 + 5p^2 + 5p^3 - p^5) \end{aligned} \quad (117b)$$

Unter der Voraussetzung (116a) ist:

$$k d = \frac{d}{\tau} \sqrt{\mu} \cdot (1 - i) = (1 - i) \cdot \beta \cdot \sqrt{\omega} \quad \beta = \frac{1}{c} \sqrt{2 \pi \sigma} \quad (118)$$

Der Ausdruck (117a) läßt sich daher als Potenzreihe nach  $\sqrt{\omega}$  schreiben. Da die Glieder mit  $\sqrt{\omega}$  und  $\sqrt{\omega}^3$  ausfallen, wird:

$$W = \frac{4}{i \omega s} \cdot \frac{2(1 - p^3)}{2 + p^3} + \frac{2}{\beta^2 c^2 s} \cdot \frac{9}{(2 + p^3)^2} + \\ + i \omega \frac{4s}{c^2} \cdot \left\{ \frac{20 + 36p - 10p^3 - p^6}{5(2 + p^3)^2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\beta^4 c^2} \cdot \frac{p^3(1 - p^3)}{(2 + p^3)^3} \right\} \quad (119)$$

Dieser Ausdruck geht für  $p \rightarrow 0$ , d. h. für  $d \rightarrow \infty$  in (113b) über, wie verlangt werden muß.

Das 1. Glied in (119) entspricht dem ersten in (113b) und stellt den kapazitiven Teil des Blindwiderstandes unter dem Einflusse des einhüllenden Halb-

leiters dar. Dieser äußert sich also durch den Faktor  $\frac{2(1-p^3)}{2+p^3}$ . Das 3. Glied entspricht dem 2. Glied in (113b) und gibt den induktiven Teil des Blindwiderstandes an, der jetzt durch einen ähnlichen, nur von  $p$  abhängigen Faktor modifiziert wird. Charakteristisch für (119) ist das Auftreten von Gliedern, die mit  $p$  verschwinden und deshalb in (113b) nicht vorkommen. In 2. Ordnung tritt in (119) ein frequenzunabhängiges Glied für den Wirkwiderstand auf:

$$\delta \mathfrak{R}_W = \frac{18}{\beta^2 c^2 s} \cdot \frac{p^3}{(2+p^3)^2} \quad (120a)$$

und in 3. Ordnung ein Zusatzglied zum Blindwiderstand:

$$\delta \mathfrak{R}_B = -i \omega \cdot \frac{9 s}{\beta^4 c^4} \cdot \frac{p^3(1-p^3)}{(2+p^3)^2} \quad (120b)$$

(120b) wird sinngemäß kapazitiv aufgefaßt. Diese Deutung wird durch die Abhängigkeit der einzelnen Glieder von der D.-K.  $\epsilon_0$  des Zwischenraumes nahegelegt, die wir gleich eins gesetzt hatten. Legt man ihr aber einen beliebigen Wert  $\epsilon_0$  bei und geht man mit  $k_0 = \omega/c \sqrt{\epsilon_0}$  in (117a) ein, so wird außer dem 1. auch das 4. Glied in (119) von  $\epsilon_0$  abhängig. Wir müssen daher dieses Glied als kapazitiven Zusatzterm auffassen und schreiben, indem wir zu praktischen Einheiten übergehen und wieder  $\epsilon_0 = 1$  setzen (leerer Zwischenraum):

$$W = \frac{1}{i \omega \mathfrak{C}} + \delta \mathfrak{R}_W + i \omega \mathfrak{L} + \dots \quad (121)$$

mit der Bedeutung:

$$\mathfrak{C}_{[\text{Farad}]} = \frac{s_{[\text{cm}]} \cdot 0,2778 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{2+p^3}{2(1-p^3)}}{1 + 0,0889 \cdot (v_{[\text{Hz}]} \cdot \varrho_{[\Omega \text{cm}]} \cdot 10^{-12})^2 \cdot \frac{p^3}{\left(1 + \frac{p^3}{2}\right)^2}} \quad (122a)$$

$$\delta \mathfrak{R}_{W[\Omega]} = \frac{9}{4\pi} \cdot \frac{\varrho_{[\Omega \text{cm}]} \cdot p^3}{s_{[\text{cm}]} \cdot \left(1 + \frac{p^3}{2}\right)^2} \quad (122b)$$

$$\mathfrak{L}_{[\text{Henry}]} = 4 s_{[\text{cm}]} \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1 + \frac{9}{5} p - \frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{20} p^5}{\left(1 + \frac{p^3}{2}\right)^2} \quad (122c)$$

Der Einfluß des halbleitenden Vollraumes außerhalb äußert sich also in 1. Ordnung durch eine Vergrößerung der (dynamischen) Kapazität  $\mathfrak{C}$  gegenüber ihrem Werte  $\mathfrak{C}_0$  für Vakuum um den Faktor:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0} = \frac{1 + \frac{p^3}{2}}{1 - p^3} \quad (123)$$

Erst für  $\varrho \cdot \nu \lesssim 10^{12}$  erfährt  $\mathcal{C}$  eine merkliche Verringerung um einen weiteren Faktor

$$\frac{1}{1 + 0,0889 \cdot (\nu \cdot \varrho \cdot 10^{-12})^2 \cdot \frac{p^3}{\left(1 + \frac{p^3}{2}\right)^2}}$$

Für  $\varrho \cdot \nu \ll 10^{12}$  wirkt daher der halbleitende Außenraum wie eine ideal leitende Gegenbelegung zur Oszillatroroberfläche. Der spezifische Widerstand des Außenraumes geht hierbei nicht wesentlich in das Resultat ein. Überschreitet dagegen  $\varrho \cdot \nu$  die Größenordnung  $10^{12}$ , so nimmt  $\mathcal{C}$  nach (122a) annähernd wie  $\frac{1}{\varrho^2 \nu^2}$  ab. Die Wandung des Hohlraumes verliert dann mehr und mehr ihre Wirkung als Gegenbelegung, und damit verringert sich die Kapazität. (122a) stellt dann nur soweit noch eine gute Näherung für das kapazitive Verhalten dar, als  $\kappa \ll 1$  bleibt, gilt also für  $\varrho \rightarrow \infty$  nicht.

In 2. Ordnung tritt zum kapazitiven Widerstand der frequenzunabhängige Wirkwiderstand  $\delta \mathcal{R}_W$  nach (120a) bzw. (122b). Er geht für  $p = 1$  ( $d = s$ , galvanischer Kontakt mit dem Außenmedium) in den „Ausbreitungswiderstand“

$$\mathcal{R}_{[1, \Omega]} = \frac{\varrho_{[\Omega \text{ cm}]}}{\pi s_{[\text{cm}]}} \quad (124)$$

des Oszillators über. In 3. Ordnung erst macht sich außer der schon besprochenen Frequenzabhängigkeit der Kapazität die Selbstinduktion  $\mathcal{L}$  nach (122c) geltend.

Bei der durch (116b) auferlegten Beschränkung der Frequenz auf das Gebiet  $\nu < 250\,000$  Hz (für unmagnetisches Material) haben die einzelnen Glieder in (119) folgende Größenordnung:

$$\frac{1}{\omega \mathcal{C}} \gtrsim 10^6 \Omega \quad (125a)$$

$$\delta \mathcal{R}_W \sim 10 \text{ bis } 10^5 \Omega \quad (125b)$$

$$\omega \mathcal{L} \lesssim 10^{-3} \Omega \quad (125c)$$

Hierbei ist für  $d$  und  $s$  die Größenordnung 1 cm angenommen und für  $\varrho$  wieder ein Bereich von 10 bis  $10^5 \Omega \text{ cm}$  zugrunde gelegt, wie er Erzen und Gesteinen im natürlichen Vorkommen entspricht. Für trockenes Steinsalz ( $\varrho > 10^7 \Omega \text{ cm}$ ) gilt jedoch wegen  $\kappa > 1$  für Hochfrequenz die Näherung (121) nicht mehr. In diesem Falle muß an die Stelle von (118) der exakte, die D.-K. berücksichtigende Ausdruck (97b) für  $k$  treten. Nach (125a–125c) wird also die Impedanz des Kugeloszillators für Frequenzen unterhalb  $10^5$  Hz im wesentlichen durch seine Kapazität und durch die Wirbelstromverluste im umgebenden Medium bestimmt. Die Induktivität ist zu vernachlässigen. Das frequenzabhängige Glied für den kapazitiven Widerstand ist von 3. Ordnung und ebenfalls gegen die Glieder

1. und 2. Ordnung zu vernachlässigen. Während  $\varrho$  zum kapazitiven Widerstand  $\frac{1}{\omega \mathcal{C}}$  nur sehr wenig beiträgt, ist der Wirkwiderstand  $\delta \mathcal{R}_W$  in 1. Näherung unabhängig von der Frequenz und proportional  $\varrho$ . Dieses Ergebnis ist für die praktischen Möglichkeiten der Bestimmung von  $\varrho$  mittels kapazitiv wirkender Sonden von großer Bedeutung.

#### 4. Abschätzung des Wechselstromwiderstandes für die Spule und die zylindrische Kapazität von endlicher Länge.

##### Angenäherte Theorie der induktiven und der kapazitiven Rückwirkungs-Bohrlochsonde

Die im 2. und 3. Abschnitt behandelten Sondenmodelle stellen starke Idealisierungen der realen Gebilde dar, die praktisch als Sonden dienen könnten. Es fragt sich nun, welche Schlüsse quantitativ oder qualitativ aus den bisher abgeleiteten Ergebnissen auf das Verhalten realer Sonden gezogen werden dürfen.

Wir behandeln zunächst den Fall der kapazitiv wirkenden Sonde (Bild 1a). Die stärkste Abweichung unseres Modells von der Wirklichkeit besteht in der Gestalt des Hohlraumes: In Wirklichkeit ist dieser Hohlraum ein unendlichlanger Zylinder, und der Ausdehnung der Sonde in Richtung der Zylinderachse sind theoretisch keine Grenzen gesetzt. Die Abmessung in dieser Richtung wird daher diejenige quer zur Bohrlochachse erheblich übertreffen können, wie im Beispiel der Stabantenne (Bild 1a) bereits angedeutet ist. Wir haben daher anstatt mit einem kugelförmigen mit einem zylindrischen, stabförmigen Kondensator- oder Antennengebilde zu rechnen. Die einzelnen Glieder im Ausdruck für den Wechselstromwiderstand werden indessen qualitativ und größenordnungsmäßig in gleicher Weise von den Parametern  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $d$  und  $s$  abhängen, wobei  $d$  mit dem Bohrlochradius und  $s$  mit dem Radius des Kondensators oder der Stabantenne gleichzusetzen ist.

Man wird eine 1. Annäherung für die Wechselwirkung eines solchen stabförmigen Oszillators, über dessen Inneres eine eingeprägte, in Richtung der Stabachse wirkende Kraft gleichmäßig verteilt ist, erhalten, wenn man in (117a) zunächst den Faktor  $\frac{4}{i\omega s}$  durch  $\frac{1}{i\omega K}$  ersetzt.  $K$  muß hierbei die (in cm gemessene) dynamische Kapazität des Stabes bedeuten, also z. B. einen Ausdruck der Form (vgl. KOHLRAUSCH [14, S. 176]):

$$K = \gamma \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{l}{s}\right)} \quad (126)$$

$l$  bedeutet die Länge,  $s$  den Radius des als gestrecktes Rotationsellipsoid angenommenen Stabes ( $l \gg s$ ),  $\gamma < 1$  einen Zahlenfaktor. Damit erhält man als Ausdruck für eine überschlagsmäßige und größenordnungsmäßige Betrachtung von  $W$  zunächst:

$$W_{[\Omega]} \approx \frac{1,8 \cdot 10^{12}}{i\omega l_{[\text{cm}]} \cdot \gamma} \cdot \ln\left(\frac{l}{s}\right) \cdot \frac{1-p^3}{1+\frac{1}{2}p^3} + \frac{\rho_{[\text{cm}]}}{2\pi l_{[\text{cm}]} \cdot \gamma} \cdot \ln\left(\frac{l}{s}\right) \cdot \frac{9p^3}{\left(1+\frac{p^3}{2}\right)^2}$$

$$p = \frac{s}{d} \quad (127)$$

Glieder 3. Ordnung sind weggelassen. (127) geht in beiden Grenzfällen  $p = 0$  (Außenraum Vakuum) und  $p = 1$  (Außenraum in galvanischem Kontakt mit der Sonde) in den exakten Ausdruck für den Widerstand des Oszillators über. Den – bis auf Glieder 3. Ordnung – strengen Ausdruck wird man formal erhalten, wenn man die Zahlenfaktoren

$$\frac{1-p^3}{1+\frac{1}{2}p^3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{9p^3}{\left(1+\frac{1}{2}p^3\right)^2}$$

die speziell nur für die Kugelgestalt gelten, durch allgemeinere Faktoren  $M(p)$  und  $N(p)$  ersetzt mit den Eigenschaften:

$$M(0) = 1 \quad M(1) = 0 \quad (128a)$$

$$N(0) = 0 \quad N(1) = 1 \quad (128b)$$

Im übrigen müssen  $M$  und  $N$  von der Größenordnung der Einheit sein, wenn  $p$  von dieser Größenordnung ist. Damit wird schließlich:

$$W_{[\Omega]} = \frac{1,8 \cdot 10^{12}}{i \omega l_{[\text{cm}]} \cdot \gamma} \cdot \ln\left(\frac{l}{s}\right) \cdot M(p) + \frac{Q_{[\Omega \text{ cm}]}}{2 \pi l_{[\text{cm}]}} \cdot \ln\left(\frac{l}{s}\right) \cdot N(p) + \dots \quad (129)$$

Die Näherung (129) gilt wiederum nur für Frequenzen, die genügend weit unterhalb der Eigengrundfrequenz des elektrisch frei, d. h. ohne eingeprägte Kraft, schwingenden Stabes liegen.

Der Typ der induktiv wirkenden Sonde wird durch eine Zylinderspule von endlicher Länge verwirklicht (Bild 1b). An den Ergebnissen des 2. Abschnittes, die für die unendlich lange Zylinderspule gelten, sind daher gewisse Korrekturen anzubringen, wenn wir das Verhalten der endlichen Spule annähernd richtig beschreiben wollen. Die Annäherung kann nur dann befriedigend sein, wenn auch die endliche Spule ein stark gestrecktes Gebilde darstellt, ihre Länge  $h$  groß gegen ihren Halbmesser  $b$  ist. Für Spulen im Vakuum gilt bekanntlich nach ROSA und GROVER [23] (vgl. auch KOHLRAUSCH [14, S. 204]), daß die Selbstinduktion  $\mathfrak{L}(h)$  bei dichter Wicklung in der Bezeichnungsweise des Abschnittes 2 geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{L}_0(h) = \frac{4 \pi^2 n^2 b^2 h}{c^2} \cdot S\left(\frac{b}{h}\right) \quad (130)$$

$S\left(\frac{b}{h}\right)$  bedeutet einen Zahlenfaktor, der kleiner als eins ist und sich für  $h \rightarrow \infty$  asymptotisch dem Werte eins nähert ( $S$  hängt mit dem bei ROSA und GROVER (a. a. O.) tabellierten Faktor  $Q$  zusammen nach  $S\left(\frac{b}{h}\right) = \frac{1}{4 \pi^2} \cdot \frac{h}{b} \cdot Q\left(\frac{2b}{h}\right)$ ).

Man wird in erster Annäherung auch die Selbstinduktivität  $\mathfrak{L}$  bei Einbettung in einen Halbleiter und bei Füllung der Spule mit einem magnetisierbaren Kern in der gleichen Form (130) darstellen können. Damit ergibt sich als Näherungs-

ausdruck für den induktiven Widerstand einer endlichlangen Spule, die von einem homogenen Halbleiter umgeben ist:

$$i\omega \mathfrak{L} \approx i\omega L_0 \mu_0 h \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \cdot \frac{1}{f-g} \quad L_0 = \frac{4\pi^2 n^2 b^2}{c^2} \quad (131)$$

Diese Korrektur reicht jedoch nicht aus, wenn das Verhalten auch bei Hochfrequenz richtig dargestellt werden soll. Es muß dann noch die endliche Kapazität der Spule berücksichtigt werden, die bekanntlich auf der Bindung von Ladungen auf den Windungen der Wicklung beruht. Die Spulenkapazität  $c_0$  wirkt nach neueren Untersuchungen [14, S. 198] [19] [22] [30] [35] bei Frequenzen, die genügend weit unterhalb der Grundfrequenz der freischwingenden Spule liegen, wie ein der Spule parallel geschalteter Kondensator. Für stark gestreckte und dicht gewickelte Spulen in Vakuum ist  $c_0$  in der ersten Annäherung von den Eigenschaften der Wicklung und von der Spulenlänge unabhängig und etwa der Hälfte des Spulenradius (im absoluten Maßsystem) gleich [3] [7] [35]:

$$c_0 \approx \frac{b}{2} \quad (132)$$

Das elektromagnetische Feld, das von den oszillierenden Ladungen auf der Wicklung hervorgerufen wird, ist vom Typ Bild 1a. Es entspricht in erster Annäherung einem elektrischen schwingenden Dipol, dessen Polabstand etwa  $h$  ist. Die Wechselwirkung dieses Dipols mit dem Halbleiter entspricht daher näherungsweise derjenigen eines Kugeloszillators, der der Spule parallel geschaltet zu denken ist und dessen dynamische Kapazität mit der Spulenkapazität  $c_0$  übereinstimmt. Indem man nach dem Kirchhoffschen Verzweigungsgesetz den Wechselstromwiderstand für die endliche Spule ohne Kapazität

$$\mathfrak{B}_{\text{Sp.}} = R \cdot h + i\omega L_0 \mu_0 \cdot S \cdot \frac{1}{f-g} \quad (133a)$$

mit derjenigen eines Kugeloszillators nach (119) mit  $s = b/2$  kombiniert

$$\mathfrak{B}_{\text{Osz.}} \approx \frac{8}{i\omega b} \cdot \frac{1-p^3}{1+\frac{1}{2}p^3} + \frac{36}{\beta^2 c^4 b} \cdot \frac{p^3}{\left(1+\frac{1}{2}p^3\right)^2} \quad (133b)$$

erhält man für den Wechselstromwiderstand  $\mathfrak{B}$  der endlichen Spule mit Kapazität näherungsweise

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} \approx \frac{1}{\mathfrak{B}_{\text{Sp.}}} + \frac{1}{\mathfrak{B}_{\text{Osz.}}} \quad (133c)$$

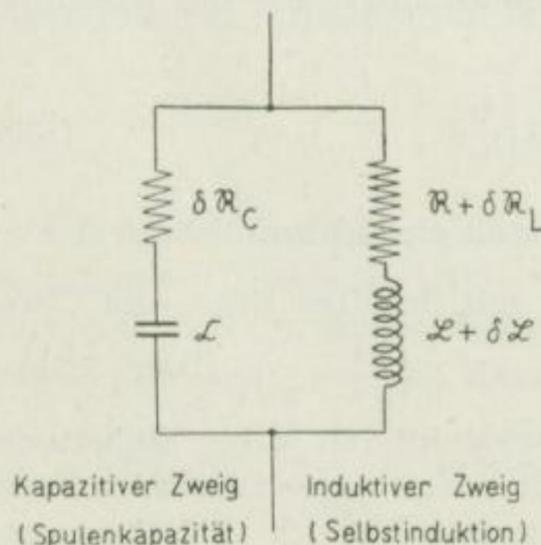


Bild 5. Ersatzschma für die reale Spule endlicher Länge, die sich in Wechselwirkung mit einem umgebenden Halbleiter befindet

Der Spule kann somit das in Bild 5 dargestellte Ersatzschema mit den Bezeichnungen (134a–134f) zugeordnet werden. Die mit  $\delta$  bezeichneten Änderungen der Kenngrößen bedeuten Änderungen auf Grund der Wechselwirkung mit dem Außenmedium, soweit diese nur durch Änderung der Materialkonstanten bedingt werden. Glieder 3. Ordnung für den Widerstand des kapazitiven Zweiges sind vernachlässigt. Im 1. oder 2. Falle (vgl. Abschnitte 2, b und c) ergibt sich nach (54) und Tabelle 1:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \cdot h = \frac{\pi b n^2 h}{\sigma_1 a} \quad \text{bzw.} = \frac{\sqrt{2} \pi^3}{c} \cdot n^2 b h \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\sigma_1}} \quad (134a)$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{4 \pi^2 n^2 b^2 h \mu_0}{c^2} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \quad (134b)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1 + \frac{p^3}{2}}{1 - p^3} \quad \left( p = \frac{s}{d} \right) \quad (134c)$$

$$\delta \mathfrak{R}_L = \frac{4 \pi^2 \omega n^2 b^2 h}{c^2} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \cdot \frac{\mu_0^2 v}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \quad (134d)$$

$$\delta \mathfrak{R}_C = \frac{9}{\pi^2 \sigma_1 b} \cdot \frac{p^3}{\left( 1 + \frac{p^3}{2} \right)^2} \quad (134e)$$

$$\delta \mathfrak{Q} = \frac{4 \pi^2 n^2 b^2 h}{c^2} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \cdot \frac{\mu_0^2 u - \mu_0^3 (u^2 + v^2)}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \quad (134f)$$

Im 3. Falle (Abschnitt 2, d) dagegen heißt es statt (134a, 134b, 134d, 134f) nach (54) und Tabelle 1:

$$\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{2} \pi^3}{c} \cdot n^2 b h \sqrt{\omega \mu_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \right) \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \quad (134g)$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{\sqrt{2} \pi^3}{c} \cdot n^2 b h \sqrt{\frac{\mu_0}{\omega \sigma_0}} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \quad (134h)$$

$$\delta \mathfrak{R}_L = 4 \pi^2 n^2 h \cdot \frac{\mu_0}{\sigma_0} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \cdot \frac{u - \sqrt{\mu_0} \cdot \frac{\tau_0}{b} (u^2 + v^2)}{1 - 2 \sqrt{\mu_0} \cdot \frac{\tau_0}{b} (u + v) + 2 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0^2}{b^2} (u^2 + v^2)} \quad (134i)$$

$$\delta \mathfrak{Q} = 4 \pi^2 n^2 h \cdot \frac{\mu_0}{\omega \sigma_0} \cdot S \left( \frac{b}{h} \right) \cdot \frac{v - \sqrt{\mu_0} \cdot \frac{\tau_0}{b} (u^2 + v^2)}{1 - 2 \sqrt{\mu_0} \cdot \frac{\tau_0}{b} (u + v) + 2 \mu_0 \cdot \frac{\tau_0^2}{b^2} (u^2 + v^2)} \quad (134k)$$

Mit den Ansätzen (133a–133e) kann die Frage nach der Rückwirkung eines halbleitenden Mediums auf eine reale Spule von gegebenen Eigenschaften, die sich isoliert in einer zylindrischen Höhlung innerhalb dieses Mediums befindet, wenigstens qualitativ und größenordnungsmäßig beantwortet werden. Man ge-

langt so zu einer annähernden Theorie der induktiven Bohrlochsonde nach Bild 1b. Es gilt nach (133e), (134a–134f) und nach dem Ersatzschema Bild 5:

$$\frac{1}{\mathfrak{B} + \delta \mathfrak{B}} \approx \frac{1}{\mathfrak{R} + \delta \mathfrak{R}_L + i \omega (\mathfrak{L} + \delta \mathfrak{L})} + \frac{1}{\frac{1}{i \omega \mathfrak{C}} + \delta \mathfrak{R}_C} \quad (135)$$

$\delta \mathfrak{B}$  bedeutet die Änderung des Wechselstromwiderstandes der Spule auf Grund der Wechselwirkungseffekte. Nach (134a–134f) und (135) kann die Änderung von Wirk- und Blindwiderstand in jedem konkreten Falle mindestens größenordnungsmäßig angegeben werden.

Wir behandeln als Beispiel eine Spule von  $h = 10$  cm Länge und  $b = 1$  cm Radius, die in ein Bohrloch von  $d = 1,25$  cm Radius coaxial eingesetzt ist und mit niederfrequentem Strom von  $\nu = 10^4$  Hz gespeist wird. Die Permeabilität des Spulenkernes sei  $\mu_0 = 100$ , der Skineneffekt im Spulenkern sei zu vernachlässigen. Man darf dann die Veränderungen  $\delta \mathfrak{R}_L$ ,  $\delta \mathfrak{R}_C$  und  $\delta \mathfrak{L}$  als sehr kleine Größen behandeln und  $\mathfrak{R} : \omega \mathfrak{L}$  wie auch  $\omega^2 \mathfrak{L} \mathfrak{C}$  gegen eins vernachlässigen. Die Impedanz der Spule wird damit sehr angenähert gleich  $\omega \mathfrak{L} = 5700 \Omega$ , und es gilt

$$\delta \mathfrak{B} \approx \omega \mathfrak{L} \cdot \left\{ \frac{\delta \mathfrak{R}_L}{\omega \mathfrak{L}} + i \cdot \frac{\delta \mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} + \omega^2 \mathfrak{L} \mathfrak{C} \left( \omega \mathfrak{C} \cdot \delta \mathfrak{R}_C + i \cdot \frac{\delta \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} \right) \right\} \quad (136)$$

Im Bereich  $10 \Omega \text{cm} < \varrho < 10^5 \Omega \text{cm}$  ist:

$$\frac{\delta \mathfrak{R}_L}{\omega \mathfrak{L}} \sim 10^{-2} \text{ bis } 10^{-5} \quad (137a)$$

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} \sim -10^{-2} \text{ bis } -10^{-6} \quad (137b)$$

$$\omega^2 \mathfrak{L} \mathfrak{C} \cdot \omega \mathfrak{C} \cdot \delta \mathfrak{R}_C \sim 10^{-8} \text{ bis } 10^{-12} \quad (137c)$$

$$\omega^2 \mathfrak{L} \mathfrak{C} \cdot \frac{\delta \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} \sim 10^{-14} \text{ bis } 10^{-20} \quad (137d)$$

Die beiden letzten, kapazitiv bedingten Glieder in (136) sind gegen die beiden ersten, induktiv bedingten zu vernachlässigen. Die Veränderung des Wechselstromwiderstandes durch Beeinflussung der Spulenkapazität spielt also bei  $10^4$  Hz keine Rolle. Der physikalische Grund ist offensichtlich. Wegen  $\frac{1}{\omega \mathfrak{C}} = 3,19 \cdot 10^7 \Omega$  ist der Widerstand des kapazitiven Zweiges, Bild 5, so groß wegen den des induktiven, daß eine kleine Veränderung des erstgenannten völlig unwirksam wird. Man ersieht hieraus, wie sich die Verhältnisse beim Übergang zu Hochfrequenz ändern müssen: Je höher die Frequenz gewählt wird, um so stärker wird einerseits der „kapazitive Nebenschluß“ der Spule über das Außenmedium und andererseits die Drosselwirkung. Beide Effekte wirken im gleichen Sinne dahin, daß der Spulenstrom sich in steigendem Maß auf den kapazitiven Zweig verlagert. Der Wechselstromwiderstand wird damit stärker von  $\delta \mathfrak{C}$  und  $\delta \mathfrak{R}_C$ , schwächer von  $\delta \mathfrak{L}$  und  $\delta \mathfrak{R}_L$  abhängig. Die Formeln (134a–134f) und (135) zeigen, daß für  $\nu \sim 10^6$  bis  $10^7$  Hz alle Wechselwirkungseffekte im allgemeinen

die gleiche Größenordnung erreichen, die Spulenkapazität also nicht mehr vernachlässigt werden darf. Eine direkte Umkehrung der Verhältnisse  $\left(\frac{1}{\omega C} < \omega L\right)$  könnte erst nach Überschreiten des Resonanzpunktes  $\omega^2 LC = 1$  eintreten. Doch würde damit die Frequenz in das Gebiet der Eigenschwingungen der Spule rücken, für das das primitive Ersatzschema Bild 4 seinen Sinn verliert. Diesem Fall kann unsere stark idealisierende und qualitative Betrachtungsweise nicht mehr gerecht werden.

## 5. Folgerungen für die praktischen Lösungsmöglichkeiten des Problems

Das technische Problem der kontaktfreien Bohrlochsondierung nach dem Rückwirkungsverfahren besteht darin, mittels einer möglichst einfachen Anordnung einen möglichst großen Effekt zu messen, der sich zur quantitativen Bestimmung gut eignet. Da hier nur periodisch wechselnde, sinusförmig verlaufende elektromagnetische Vorgänge in Betracht gezogen werden sollen, wird jede Wechselwirkung der Apparatur mit dem Gebirge erschöpfend durch die Änderung des Wirk- bzw. Blindwiderstandes der Sonde gekennzeichnet. Diese Änderungen können durch Messung der Impedanz, eines Phasenwinkels oder durch gleichzeitige Bestimmung beider Widerstandskomponenten erfaßt werden. Die Frequenz kann im Niederfrequenz-, Hochfrequenz- oder eventuell im Kurzwellenbereich gewählt werden. Hinsichtlich des Typs der verwendeten Sonde sind kapazitive und induktive Sondierung zu unterscheiden.

Es fragt sich nun, welche Kombinationen von Meßgröße, Frequenz und Sondentyp sich nach den Ergebnissen der Abschnitte 2, 3 und 4 theoretisch am besten eignen. Wir vergleichen deshalb das Verhalten der induktiv wirkenden Sonde (J-Sonde) mit der kapazitiv wirkenden Sonde (K-Sonde) in verschiedenen Frequenzbereichen. Für beide Sondentypen gilt allgemein, daß die Änderung des Widerstandes um so stärker ist, je höher die Frequenz liegt. Das würde an sich in jedem Falle für den Hochfrequenzbereich sprechen. Niederfrequente Ströme bieten aber den Vorteil leichterer Herstellung, Wartung und Messung. Diesen technischen Vorteilen steht indessen als Nachteil die außerordentliche Kleinheit der Wechselwirkungseffekte gegenüber. Die Erhöhung des Wirk- bzw. Blindwiderstandes beträgt für eine enggewickelte Zylinderspule von 1 cm Radius und 10 cm Länge selbst im Extremfalle ( $\rho \sim 10 \Omega\text{cm}$ ) bei 100 Hz nur  $10^{-4}\%$ , bei 1000 Hz  $10^{-3}\%$  und bei 10 000 Hz erst ein Zehntel Promille der Impedanz und sinkt in 1. Annäherung mit wachsendem  $\rho$  wie  $1 : \rho$ . Bei einer zylindrischen Kapazität, deren Durchmesser von der Größenordnung des Bohrlochdurchmessers ist, ist die Abhängigkeit von  $\rho$  die umgekehrte, und es treten die größten Effekte bei den größten  $\rho$ -Werten auf. Für  $\rho = 10^5 \Omega\text{cm}$  liegen die entsprechenden Verhältniszahlen in der Größenordnung von  $10^{-2}\%$  bzw.  $0,1\%$  bzw.  $1\%$  und nehmen proportional  $\rho$  ab. Da die Kapazität der Sonde aber höchstens von der Größenordnung 100 cm sein kann, haben K-Sonden bei Niederfrequenz den Nachteil außerordentlich hoher Impedanz, nämlich von der Größenordnung  $10^7 \Omega$  für 100 Hz,  $10^6 \Omega$  bei 1000 Hz usw. Für die Spule dagegen liegen die entsprechenden Impedanzwerte zwischen 10 und  $100 \Omega$ , also in einer völlig anderen Größenordnung. Das gleiche gilt erst recht für die Absolutwerte der Änderung, die Wirk- und Blindwiderstand durch die Wechselwirkung erfahren. Der Spuleneffekt läßt sich durch einen Spulenkern von hoher magnetischer Permeabilität

relativ um 2 bis 3 Zehnerpotenzen, absolut sogar um 4 bis 6 Zehnerpotenzen steigern. Damit würde sich die relative Änderung für den günstigsten Fall ( $\rho \sim 10 \Omega\text{cm}$ ) in der Größenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-10}\%$  für 100 Hz, 0,1 bis 1% für 1000 Hz und 1 bis 10% für 10 000 Hz verlagern. Die Größenordnung für die entsprechenden Impedanzwerte würde damit auf  $10^2$  bis  $10^3$  bzw.  $10^3$  bis  $10^4$  bzw.  $10^4$  bis  $10^5 \Omega$  anwachsen. Für  $10^4$  Hz liegen daher sowohl Impedanz wie auch Änderung der Widerstandskomponenten für  $J$ -Sonden und  $K$ -Sonden in der gleichen Größenordnung, wenn man jeweils maximale Effekte in Betracht zieht. Die beiden Sondentypen unterscheiden sich wesentlich durch die Abhängigkeit des Effektes von  $\rho$ : Beim Kondensator ist dieser direkt, bei der Spule dagegen angenähert umgekehrt proportional  $\rho$ . Das bedeutet praktisch, daß sich der kapazitive Typ mehr für die Messung hoher spezifischer Widerstände ( $10^3$  bis  $10^6 \Omega\text{cm}$ ), der induktive Typ mehr für die Messung niedrigerer  $\rho$ -Werte (10 bis  $10^3 \Omega\text{cm}$ ) eignen wird.

Um die Wechselwirkungseffekte bequem nach der Brückenmethode messen zu können, wäre es äußerst wertvoll, den hohen Blindwiderstand der Sonde durch eine zusätzliche Kapazität bzw. Spule herabzudrücken, die in Reihe geschaltet und auf Resonanz abgestimmt ist. Für die  $J$ -Sonde mit hochpermeablem Kern wäre je nach der Frequenzlage ein Kondensator von 1 bis 10,  $10^{-2}$  bis  $10^{-1}$  bzw.  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  Mikrofarad erforderlich, für die  $K$ -Sonde dagegen eine Induktivität von der Größenordnung  $10^4$  bzw.  $10^3$  bzw.  $10^2$  Henry. Eine solche Kompensation wäre also für eine  $J$ -Sonde leicht, für eine  $K$ -Sonde dagegen technisch nur sehr schwer zu verwirklichen. Der Wirkwiderstand, der als Maß für den spezifischen Widerstand des Gebirges dienen müßte, würde für die  $J$ -Sonde im Extremfalle ( $\rho \sim 10 \Omega\text{cm}$ ) nur eine Erhöhung von 0,1 bis  $10 \Omega$  bei 100 Hz, von 1 bis  $100 \Omega$  bei 1000 Hz und von 10 bis  $1000 \Omega$  bei 10 000 Hz erfahren. Diese Erhöhung nimmt umgekehrt proportional mit  $\rho$  ab. Hierbei ist zu bedenken, daß der Wirkwiderstand der Wicklung für die zugrunde gelegten Spulendimensionen in der Größenordnung  $10 \Omega$  liegt.

Aus diesen zahlenmäßigen Ergebnissen folgt, daß im Tonfrequenzbereich praktisch nur die induktiv wirkende Sonde (Spule) Aussichten für die Lösung des Problems eröffnet. Durch Verwendung eines hochpermeablen Spulenkernes und bei Resonanzabstimmung mittels einer in Reihe geschalteten Kapazität kann der Meßeffect in die geeignete Größenordnung gehoben werden. Der Meßbereich bleibt indessen auch dann auf niedrigen spezifischen Widerstand des Gebirges (10 bis  $10^3 \Omega\text{cm}$ ) beschränkt. Es wäre daher denkbar, daß  $J$ -Sonden, mit Tonfrequenz betrieben, als Anzeigergeräte für Zonen niedrigsten spezifischen Gebirgs-widerstandes (Vererzung, Lauge) verwendet werden könnten.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse für Hochfrequenz ( $\nu > 10^5$  Hz). Bei der  $J$ -Sonde können die Änderungen von Wirk- und Blindwiderstand schon bei Spulenkernen mittlerer Permeabilität ( $\mu_0 \sim 10$  bis 100) die Größenordnung der Impedanz erreichen. Im Gebiete niedriger  $\rho$ -Werte (10 bis  $1000 \Omega\text{cm}$ ) sollte theoretisch eine starke Erniedrigung der Impedanz eintreten (vgl. Bild 6). Die Impedanz selbst könnte also ein geeignetes Maß für den spezifischen Wider-

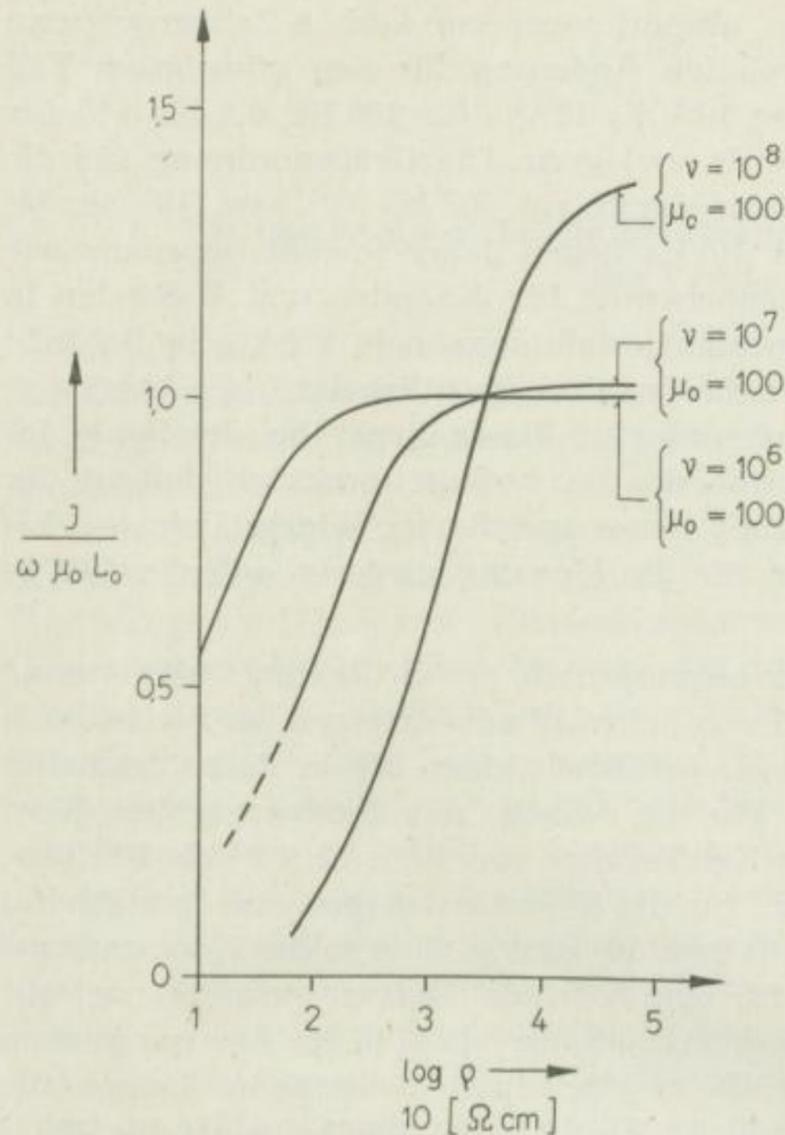


Bild 6. Impedanz  $J$  einer Spule von 1 cm Radius mit Kern von  $\mu_0 = 100$  als Funktion des Gebirgswiderstandes  $\rho$  unter Vernachlässigung der Spulenkapazität für  $10^6$ ,  $10^7$  und  $10^8$  Hertz

stand des Gebirges abgeben. Komplikationen entstehen durch die Verwendung stark magnetisierbaren Kernmaterials in hochfrequenten Feldern. Starker Skin-Effekt im Spulenkern, wie er bei den in Frage kommenden Materialien zu erwarten ist, erhöht den Wirkwiderstand der Sonde und erniedrigt gleichzeitig ihren Blindwiderstand stark. Dadurch werden die Kennlinien im Bild 6 erheblich abgeflacht. Die Impedanzwerte liegen wegen der Drosselwirkung des Kernes in der Größenordnung  $10^3$  bis  $10^5 \Omega$  bei  $10^5$  Hz,  $10^4$  bis  $10^6 \Omega$  bei  $10^6$  Hz usw. Eine quantitative Bestimmung von  $\rho$  mittels einer  $J$ -Sonde dürfte wiederum nur im Bereich von  $10$  bis  $10^3 \Omega\text{cm}$  möglich sein. — Eine  $K$ -Sonde der oben beschriebenen Art besitzt bei Hochfrequenz den Vorteil, daß sie eine niedrigere Impedanz als die  $J$ -Sonde hat. Die Wechselwirkung mit dem Gebirge kommt auch bei Hochfrequenz in erster Annäherung nur im Wirkwiderstand zur Geltung, und zwar proportional  $\rho$ . Während die Größenordnung für den Blindwiderstand bei  $10^5$  Hz  $10^5 \Omega$ , bei  $10^6$  Hz  $10^4 \Omega$  usw. beträgt, ist der Wirkwiderstand von der Größenordnung  $\rho/10$  unabhängig von der Frequenz. Im Gegensatz zum Niederfrequenzbereich ist es bei  $10^5$  oder  $10^6$  Hz leicht, den Blindwiderstand einer  $K$ -Sonde durch eine passend gewählte Selbstinduktivität zu kompensieren. Dieses leisten bereits Induktivitäten von der Größenordnung 1 bis 100

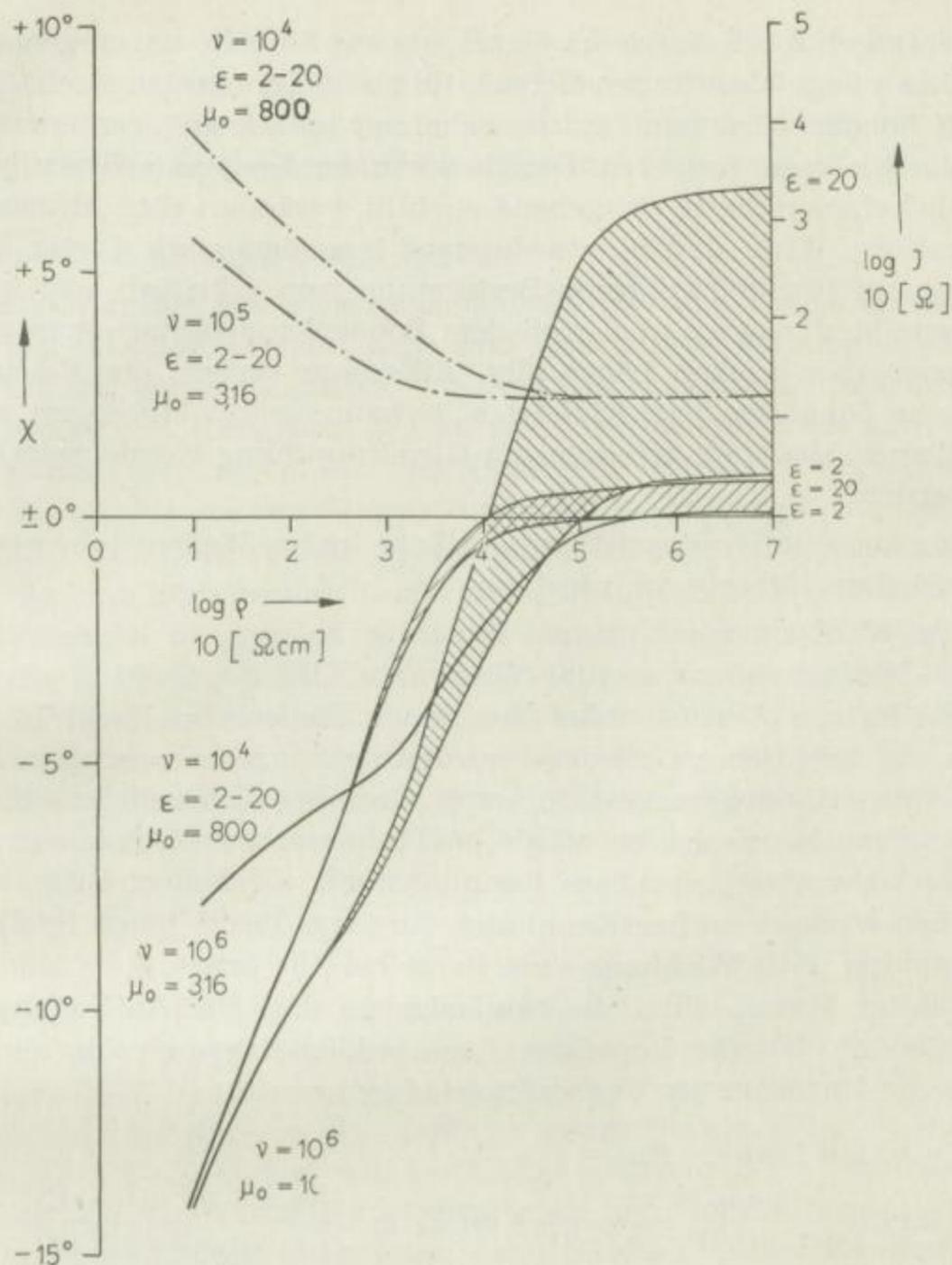


Bild 7. Theoretischer Verlauf der Impedanz  $J$  (---) und des Verlustwinkels  $\chi$  (—) einer Spule von 1 cm Radius,  $17 \Omega$  Wirkwiderstand und 1 mH Selbstinduktivität (ohne Kern) als Funktion des Gebirgswiderstandes. Die Spule ist dabei durch eine in Reihe geschaltete Kapazität auf Resonanz abgestimmt zu denken

Millihenry. Es wäre daher theoretisch möglich, die Impedanz auf den Wirkwiderstand, der in 1. Annäherung proportional  $\rho$  ist, zu reduzieren. Läuft die Messung auf eine Bestimmung der Impedanz hinaus, ohne daß der Blindwiderstand besonders abgeglichen werden kann (Brückenmethode), so ist ausreichende Konstanz der Frequenz, der Sondenkapazität und der Zuleitungsinduktivität bzw. -kapazität wichtig. Bei  $10^6$  Hz wird eine solche von 1‰ im allgemeinen noch ausreichend sein, besonders wenn man auf eine genauere Messung sehr niedriger spezifischer Widerstände verzichtet. Auch im Hochfrequenzbereiche

müßte theoretisch die  $K$ -Sonde im Gegensatz zur  $J$ -Sonde um so genauer arbeiten, je höher  $\varrho$  liegt, also für den Bereich  $10^3$  bis  $10^6 \Omega\text{cm}$  geeignet sein. Der Nachteil von  $K$ -Sonden wird sein, daß sie sehr empfindlich auf Veränderungen des Bohrlochdurchmessers reagieren. Gerade wenn der Sondenkondensator den normalen Bohrlochquerschnitt weitgehend ausfüllt, verändert eine Abweichung von der Normalform Wirk- und Blindwiderstand besonders stark. Dieser Effekt, der für eine quantitativ befriedigende Bestimmung von  $\varrho$  kritisch sein wird, kann dadurch gemildert werden, daß man dem Sondenkondensator einen geringeren Durchmesser, aber größere Länge gibt. Allerdings verliert die Messung damit notwendig an Lokalisierungsschärfe, d. h., es kann nur der Mittelwert von  $\varrho$  über einen größeren Abschnitt der Bohrung (Größenordnung Kondensatorlänge) gemessen werden.

Für eine quantitative Beurteilung der Lage im cm-Wellen-Gebiet reichen die hier entwickelten Näherungen nicht aus.

Was die Wahl einer geeigneten Meßgröße anlangt, so können theoretisch hierzu bei Niederfrequenz sowohl Wirk- bzw. Blindwiderstand als auch die Impedanz oder der Verlustwinkel der Sonde dienen. Im Hochfrequenzgebiet wird man aus technischen Gründen Impedanzmessungen bevorzugen. Besonders wenn man den Blindwiderstand in erster Ordnung durch die erwähnte Resonanzabstimmung kompensieren würde, müßte man theoretisch in der Impedanz und im Verlustwinkel brauchbare Kennlinien für  $\varrho$  erhalten. Bild 7 stellt den theoretischen Verlauf solcher Kennlinien für eine 10 cm lange Spule von 500 Windungen und  $17 \Omega$  Wicklungswiderstand bei  $10^4$  bzw.  $10^6$  Hz und bei passend gewählter Permeabilität des Spulenkernes dar. Die Auftragung ist doppeltlogarithmisch für die Impedanz  $J$ , einfachlogarithmisch für den Phasenwinkel  $\chi$ . Die Impedanz ist hier definiert durch:

$$J = h \cdot \sqrt{(R + R_W)^2 + R_B^2} = \left( R - \frac{\omega L_0 \mu_0^2 v}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \right)^2 + \omega^2 L_0^2 \mu_0^2 \cdot \left( \frac{\mu_0 u - \mu_0^2 (u^2 + v^2)}{(1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2} \right)^2 \quad (138a)$$

und der Phasenwinkel durch:

$$\text{tg } \chi = \frac{R_B}{R} = \frac{\mu_0 u - \mu_0^2 (u^2 + v^2)}{\frac{R}{\omega_0 L_0 \mu_0} ((1 - \mu_0 u)^2 + \mu_0^2 v^2) - \mu_0 v} \quad (138b)$$

Man sieht, daß sämtliche Kurven im Bereich  $10 < \varrho < 10^4 \Omega\text{cm}$  einen monotonen und genügend steilen Verlauf zeigen, um sie für eine quantitative Bestimmung von  $\varrho$  ausnutzen zu können. Während die Impedanz bemerkenswerterweise auch bei  $10^6$  Hz keine nennenswerte Abhängigkeit von der D.-K. zeigt, spricht  $\chi$  im Gebiete höheren spezifischen Widerstandes stark auf Änderungen von  $\varepsilon$  an. Zu beachten ist die ausgeprägte Abhängigkeit dieses Effektes von  $\mu_0$ .

Im Hochfrequenzgebiet ( $\nu > 10^5$  Hz) zeigt die Impedanz als Funktion von  $\varrho$  bereits ohne Kompensation des Eigenblindwiderstandes der Spule für mittlere Permeabilität einen sehr charakteristischen Verlauf. Bild 6 stellt theoretisch Im-

pedanzkurven für  $\nu = 10^6, 10^7$  bzw.  $10^8$  Hz und für  $\mu_0 = 100$  dar. Aufgetragen ist die Impedanz  $J$  pro cm, bezogen auf den Blindwiderstand  $\omega L_0 \mu_0$  pro cm der (kapazitätsfrei angenommenen) Spule. Die Kurven haben jedoch nur qualitative Bedeutung, da die Spulenkapazität in diesem Frequenzgebiete nicht zu vernachlässigen ist.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

Theoretisch müßte eine elektromagnetische Messung des Gesteinswiderstandes ohne galvanischen Kontakt nach dem Rückwirkungsprinzip sowohl mittels induktiv als auch mittels kapazitiv wirkender Bohrlochsonden möglich sein. Die Messung müßte sich theoretisch sowohl mit Niederfrequenz als auch mit Hochfrequenz durchführen lassen. Für den Niederfrequenzbereich hat nur ein induktives Verfahren mit solchen Spulen Aussicht, die mit stark magnetisierbarem Kern gefüllt sind. Für den Hochfrequenzbereich hingegen kommen auch kapazitiv wirkende Sonden (stabförmige Kapazitäten) in Betracht. Allgemein ist die Spulensonde mehr für Messungen im niederohmigen Gebiet (spezifischer Gebirgs-widerstand  $\rho < 10^3 \Omega\text{cm}$ ), die Kondensatorsonde mehr für das hochohmige Gebiet ( $\rho > 10^3 \Omega\text{cm}$ ) geeignet. Die Dielektrizitätskonstante des Außenraumes spielt bei Niederfrequenz keine Rolle. Im Bereiche  $10 < \rho < 10^5 \Omega\text{cm}$  sind alle Meßeffekte praktisch unabhängig von  $\epsilon$ . Im Hochfrequenzgebiet dagegen geht die D.-K. für größere  $\epsilon$ -Werte merklich in die Kenngrößen der Spule ein und macht eine Messung von  $\rho$  u.U. unsicher. Im Meter- bzw. Zentimeter-Wellenbereich dagegen liegen die Verhältnisse umgekehrt: Für  $\rho > 10^2$  bis  $10^3 \Omega\text{cm}$  hängen die Wechselwirkungseffekte praktisch nur von der D.-K. ab. Das gilt für beide Sondentypen. Allerdings werden die praktischen Möglichkeiten einer reinen D.-K.-Sondierung mittels so hoher Frequenzen durch die geringe Eindringtiefe der Felder in das Gebirge eingeschränkt (für  $10^8$  Hz z. B. bei  $\rho = 10^3 \Omega\text{cm}$  im D.-K.-Gebiet von  $\epsilon = 2$  bis  $\epsilon = 20$  nur 6 bis 7 cm). Der Einfluß der Spülung, die sich zwischen Sondenkörper und Bohrlochwand befindet und der hier unberücksichtigt blieb, kann dann merklich in die Resultate mit eingehen.

## LISTE DER BEZEICHNUNGEN

Vorbemerkung: Die Feldgrößen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $A$ ,  $\Pi$ ,  $j$ ,  $\mathfrak{J}$ ,  $v^{(e)}$ ,  $V^{(e)}$  werden als komplexwertige Funktionen angesetzt.  $E$  und  $H$  hängen hierbei nur von den Raumkoordinaten, nicht von der Zeit ab. Die physikalisch wirksame Komponente wird jeweils durch den Realteil angegeben.

$\nu$	Frequenz
$\omega$	Kreisfrequenz ( $= 2\pi\nu$ )
$t$	Zeit
$\mathcal{E}_l$	$= E_l \cdot e^{i\omega t}$ $l$ -Komponente der elektrischen Feldstärke
$\mathcal{H}_l$	$= H_l \cdot e^{i\omega t}$ $l$ -Komponente der magnetischen Feldstärke
$\mathfrak{J}_l$	$= Z_l \cdot e^{i\omega t}$ $l$ -Komponente des Hertzschen Vektors
$\Pi$	$z$ -Komponente des Hertzschen Vektors („Hertzsche Funktion“)
$\mathcal{S}_l$	$l$ -Komponente des Poyntingschen Vektors der Energieströmung
$A$	elektromagnetisches Vektorpotential
$j_l$	räumliche Stromdichte
$\mathfrak{J}_l$	flächenhafte Stromdichte
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit
$\epsilon$	Dielektrizitätskonstante (D.-K.)
$\mu$	magnetische Permeabilität
$c$	Lichtgeschwindigkeit
$\kappa$	Amplitudenverhältnis von Verschiebungsstromdichte zu Leitungsstromdichte $\left( = \frac{\epsilon\omega}{4\pi\sigma} \right)$
$\tau$	elektromagnetische Eindringtiefe für $\kappa = 0$ und $\mu = 1$
$\alpha$	Skineffektfaktor für den Ohmschen Widerstand der Spule nach Sommerfeld $\left( = \frac{4a}{c} \sqrt{2\pi\omega\sigma} \right)$
$\varrho$	spezifischer Widerstand in Ohm $\cdot$ cm
$i$	$= \sqrt{-1}$ Imaginäre Einheit
$k$	die komplexe Wellenzahl $\left( = \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega^2 - 4\pi i\mu\sigma\omega}{c^2}} \right)$
$\mathcal{E}_l^{(e)}$	Feldstärkekomponenten der eingepprägten elektromotorischen Kraft
$v^{(e)}$	eingepprägte elektromotorische Kraft pro Windung der Spulenwicklung

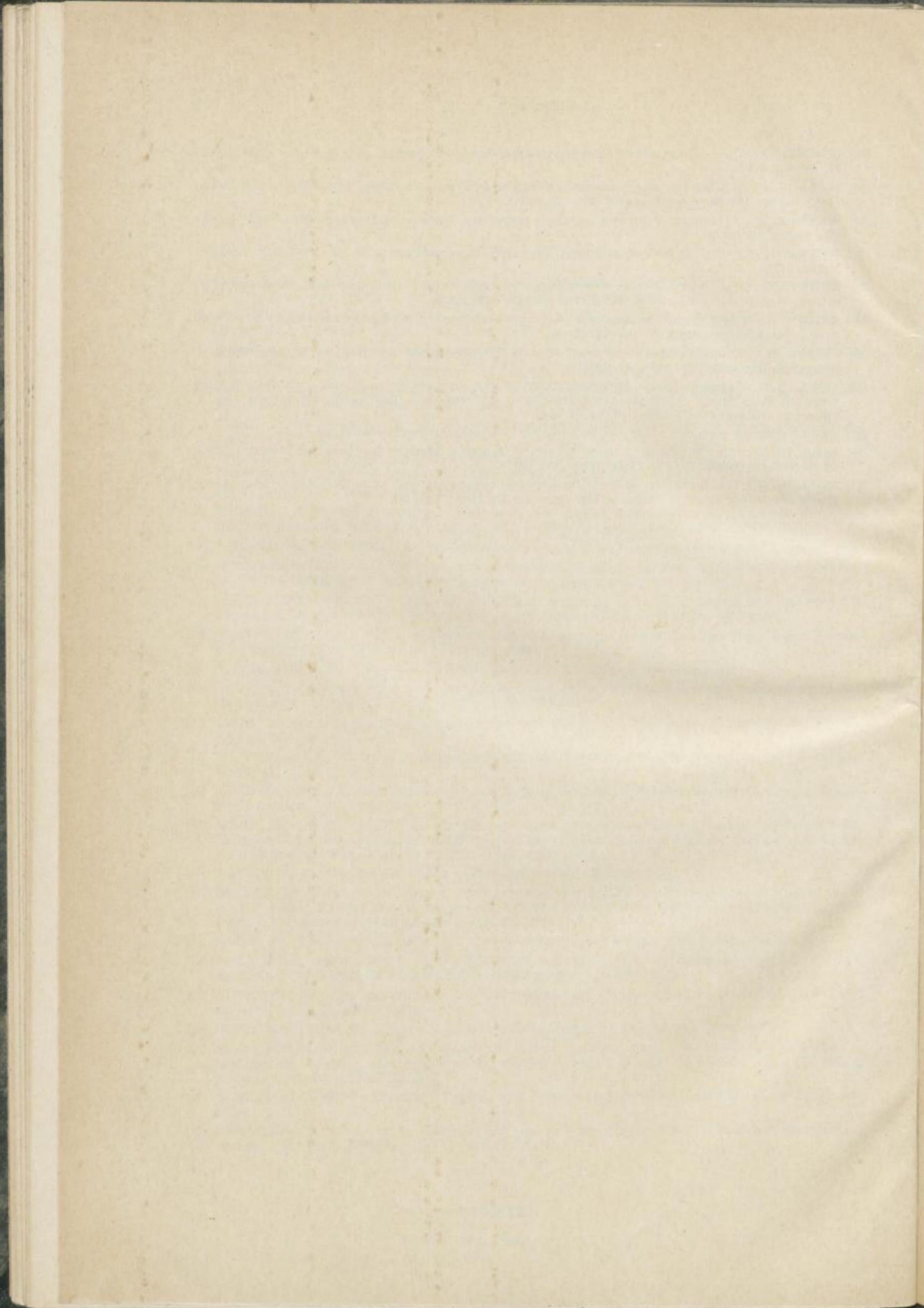
- $V^{(e)}$  eingeprägte elektromotorische Kraft pro cm Länge der Spule  
 $D$  Konstante der eingepägten Kraft im Inneren der Spulenwicklung  
 $E_0$  Amplitude der eingepägten elektrischen Feldstärke im Inneren des Kugeloszillators  
 $n$  Zahl der Windungen pro cm Länge der Spule  
 $a$  halbe Dicke  
 $b$  mittlerer Radius } der Spulenwicklung  
 $h$  Länge der Spule  
 $s$  Radius des Kugeloszillators  
 $d$  Radius des umgebenden Hohlraumes bzw. des Bohrloches  
 $l$  Länge der Kondensatorsonde  
 $I$  Stromstärke  
 $I_0$  Strömstärkenamplitude  
 $R_0$  Ohmscher Widerstand der Spulenwicklung pro cm Länge der Spule für Gleichstrom  
 $R$  Ohmscher Widerstand der Spulenwicklung pro cm Länge der Spule für Wechselstrom  
 $L_0$  Selbstinduktionskoeffizient pro cm Länge der Spule für leeres Spulrauminneres  
 $R_W$  Erhöhung des Wirkwiderstandes der Spule pro cm Länge  
 $R_B$  Erhöhung des Blindwiderstandes der Spule pro cm Länge } durch Wechselwirkung mit dem Spulenkern und dem Außenmedium  
 $w$  totaler Wechselstromwiderstand der Spule pro cm Länge  
 $(= R + R_W + i(\omega L_0 + R_B))$   
 $J$  Impedanz der Spule pro cm Länge  $(= |w|)$   
 $\mathcal{L}$  Selbstinduktionskoeffizient der endlichen Spule  
 $\mathcal{R}$  Ohmscher Widerstand der Wicklung der endlichen Spule  
 $\delta\mathcal{R}_L$  Änderung des Wirkwiderstandes der endlichen Spule durch das Außenmedium  
 $\mathfrak{B}$  Wechselstromwiderstand der endlichen Spule  
 $c_0$  Spulenkapazität  
 $W$  Wechselstromwiderstand des Kugeloszillators  
 $\mathcal{C}_0$  dynamische Kapazität des Kugeloszillators im freien Raume  
 $\mathcal{C}$  dynamische Kapazität des Kugeloszillators im Halbleiter  
 $K$  dynamische Kapazität des stabförmigen Oszillators im freien Raume  
 $\delta\mathcal{R}_C$  Wirkwiderstand des Kugeloszillators, verursacht durch Außenmedium

## Literatur

- [1] ABRAHAM, M.: Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. *Annalen der Physik* 66, 435—472 (1898).
- [2] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Band I: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität. Teubner, Leipzig und Berlin 1933.
- [3] BREIT, G.: The distributed capacity of inductance coils. *The Physical Review* 17, 649—677 (1921).
- [4] BREIT, G.: The distributed capacity of inductance coils. *The Physical Review* 18, 133—135 (1921).
- [5] DRUDE, P.: Zur Konstruktion von Tesla-Transformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduktion von Drahtspulen. *Annalen der Physik (IV)* 9, 293—339 (1902).
- [6] GRAF, A.: Theoretische Grundlagen der Ringsendemethode. *Beiträge zur angewandten Geophysik* 4, 1—75 (1934).
- [7] HALLEN, E.: Die Kapazität einer einlagigen Spule mit Berücksichtigung der Drahtstärke und des Windungsabstandes. *Archiv für Elektrotechnik* 31, 690—700 (1937).
- [8] HEAVISIDE, O.: *Electrical Papers*, Band I.
- [9] HUMMEL, J. N.: Die elektrischen Methoden der angewandten Geophysik. Theorie der elektrischen Methoden. Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Band XXV, 3. Leipzig 1938.
- [10] JAHNKE, E., und EMDE, F.: *Funktionstabeln. Tables of functions.* 3. Auflage, Teubner 1938.
- [11] KOENIGSBERGER, J. G.: Induktionsmessung im Zentrum einer Kreisschleife zur Leitfähigkeitsbestimmung der Erde. *Gerlands Beiträge, Ergänzt.-Hefte* 3, 392—407 (1933).
- [12] KOENIGSBERGER, J. G.: Elektrische Vertikalsondierung von der Erdoberfläche aus mit der Zentralinduktionsmethode. *Beiträge zur angewandten Geophysik* 7, 112—161 (1938).
- [13] KOENIGSBERGER, J. G.: Zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde durch Induktion. *Physikalische Zeitschrift* 31, 487—498 (1930).
- [14] KOHLRAUSCH, F.: *Praktische Physik.* Band II. 18. Auflage, Teubner 1943.
- [15] LENZ, W.: Über die Kapazität der Spulen und deren Widerstand und Selbstinduktion bei Wechselstrom. *Annalen der Physik (IV)* 37, 923—974 (1912).
- [16] LENZ, W.: Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Zylinderspulen. *Annalen der Physik (IV)* 43, 749—797 (1914).
- [17] MARTIENSSEN, O.: Gebirgsschichtenprüfung im Bohrloch mit Hochfrequenzströmen. *Öl und Kohle* 13, 913—915 (1937).
- [18] MARTIENSSEN, O.: Gebirgsschichtenbestimmung in Tiefbohrlöchern. *Zeitschrift für praktische Geologie* 48, 73—78 (1940).
- [19] MARX, E., und KAROLUS, A.: Messung der Kapazität dünnadrätiger Spulen von hoher Windungszahl und die Abhängigkeit des Faktors der Thomsonschen Gleichung von der Größe der Zusatzkapazität. *Physikalische Zeitschrift* 24, 67—70 (1923).
- [20] NEUMANN, F.: *Vorlesungen über elektrische Ströme.* Leipzig 1884.
- [21] NUNIER, W.: Messung der elektrischen Leitfähigkeit der Erde in verschiedenen Tiefen durch die von einem Kreisstrom induzierten Ströme (mit Vermeidung merklichen Skineffektes). *Beiträge zur angewandten Geophysik* 3, 370—391 (1933).
- [22] RIETZ, W.: Über die Kapazität von Spulen. *Annalen der Physik (IV)* 41, 543—569 (1913).
- [23] ROSA, E. B., und GROVER, F. W.: Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self-Inductance. *Bulletin of the Bureau of Standards* 8, 1—237 (1912).
- [24] RÖSSIGER, M.: Die experimentellen Grundlagen des Dipolinduktionsverfahrens. *Zeitschrift für Geophysik* 15, 83—87 (1939).
- [25] SCHLUMBERGER, C.: *Étude sur la prospection électrique du sous-sol.* Paris 1930.
- [26] SCHLUMBERGER, C., und LEONARDON, E. G.: Electrical coring, a method of determining bottomhole data by electrical measurements. *Amer. Institute of Mining and Metallurg. Engineers. Techn. Publ.* 462 (1932).
- [27] SCHLUMBERGER, C.: *Electrical Coring. The Science of Petroleum* 1 (1938). Oxford University Press.
- [28] SOMMERFELD, A.: Über das Wechselfeld und den Wechselstromwiderstand von Spulen und Rollen. *Annalen der Physik (IV)* 15, 673—708 (1904).

Bergakademie  
- Bücherei -  
Freiberg i. Sa

- [29] SOMMERFELD, A.: Über den Wechselstromwiderstand der Spulen. *Annalen der Physik* (IV) 24, 609—634 (1907).
- [30] WALLOT, J.: Induktivität und Kapazität einlagiger Drahtspulen. (Nach Versuchen von K. Schäfer.) *Archiv für Elektrotechnik* 10, 233—256 (1921).
- [31] WENNER, F.: A Method of measuring earth-resistivity. National Bureau of Standards, Scientific Paper 258 (1917).
- [32] WEYRICH, R.: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1937.
- [33] ZUHRT, H.: Eine quasistationäre Berechnung der Eigenwellen einlagiger Flach- und Zylinder-spulen. *Archiv für Elektrotechnik* 17, 613—636, 729—742 (1933).
- [34] ZUHRT, H.: Theoretische Behandlung ein- und mehrlagiger Spulen in beliebiger Schaltung. *Archiv für Elektrotechnik* 18, 109—121 (1934).
- [35] ZUHRT, H.: Einfache Näherungsformel für die Eigenkapazität mehrlagiger Spulen. *Elektrotechnische Zeitschrift* 55, 662—665 (1934).
- [36] DOLL, H. G.: Introduction to Induction Logging and Application to Logging of Wells Drilled with Oil Base Mud. a) *Trans. AIME* 186 (1949); b) *Petroleum Technology* (Juni 1949), Vol. 1, Nr. 6; c) *Oil and Gas Journal*, Febr. 24, 1949.
- [37] DOLL, H. G.: L'inductolog. *Revue de l'Institut Français du Pétrole* 10 (1955) 11.
- [38] DOLL, H. G.: The Microlog, A New Electrical Logging Method for Detailed Determination of Permeable Beds. *Trans. AIME* (1950) Vol. 189.
- [39] DOLL, H. G.: The Laterolog, A New Resistivity Logging Method with Electrodes Using Automatic Focusing System. *Trans. AIME Petr. Techn.* (1951) Vol. 192.







✓  
Günter Seidler  
Buchbinderei  
Freiberg / Sa.  
Waisenhausstr. 6

Bücherei  
• Bergakademie •  
Freiberg i. Sa.

