wo sich links und rechts je eine Integration sofort ausführen lässt. Damit die so gewonnenen einfachen Integrale einander gleich sind, dürfen — und das war eine bis dahin ganz übersehene Bedingung — die Integranden in dem ganzen Integrationsgebiete, das als Rechteck in der xy-Ebene aufgefasst werden kann, nirgends unbestimmt werden.

Cauchy zeigte auch, wie man in gewissen Fällen, in denen Stellen der Unbestimmtheit auftreten, den Unterschied der beiden Integrale bestimmen kann, und kam dabei auf den Begriff der singulären Integrale, den er später (Résumé des leçons, Leçon 25 und die 1825 bei der Drucklegung hinzugefügte Note XVIII der Preisschrift vom Jahre 1815) noch etwas erweitert hat. Wird nämlich das unbestimmte Integral von $f(x)$ mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

den Werth $\varphi(X) - \varphi(x_0)$, sobald $f(x)$ in dem Intervalle $(x_0 \ldots X)$ eindeutig, endlich und stetig ist. Wird $f(x)$ für eine Stelle a dieses Intervalles unendlich, so verliert das bestimmte Integral seinen ursprünglichen Sinn, man kann aber jenem Zeichen auch in diesem Falle eine Bedeutung beilegen, indem man definirt, dass alsdann

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{x_0}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon\nu}^{X} f(x)\,dx \right\}$$

sein soll, wo μ und ν irgend welche positive Constanten bedeuten. Als Hauptwerth H des Integrales auf der linken Seite bezeichnet *Cauchy* den Grenzwerth, der sich für $\mu = \nu = 1$ ergiebt, es ist also

$$H = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx \right\}$$

und daher

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - H = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Die beiden letzten Integrale nennt *Cauchy* singuläre Integrale. Wird $f(x)$ in der Weise unendlich, dass

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{x-a}$$