233. Flathern:

ERSTES BUCH

DER

ELEMENTE

DES

EUKLIDES

FÜR DEN ERSTEN UNTERRICHT

IN DER GRIECHISCHEN SPRACHE
UND MATHEMATIK;

GRIECHISCH UND DEUTSCH MIT ANMERKUNGEN UND EINEM WORTREGISTER.

WEIMAR, 1800.

BEY DER HOFFMANNISCHEN BUCHHANDLUNG.

ERSTES BUCH
DER
ELEMENTE
DES
EUKLIDES
GRIECHISCH,
MIT EINEM WORTREGISTER.

Das Studium der Mathematik
reiniget und belebet das Organ der Seele.
PLATO.

WEIMAR, 1800,
BEY DER HOFFMANNISCHEN BUCHHANDLUNG.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὅροι.

1.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

2.

Γραμμὴ δε, μῆκος ἀπλατές.

3.

Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

4.

4.

Ἐυθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

5.

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

6.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

7.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξίσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

8.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

9.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

10.

Fig. 1. Ὅτ ν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ

ἐφ-

ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

11.

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς. Fig. 2.

12.

Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

13.

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

14.

Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

15.

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι ἁι προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Fig. 3.

16.

Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τό σημεῖον καλεῖται.

17.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη

μένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

18.

Ἡμικύκλιον δέ ἐστί, τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

19.

Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

20.

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

21.

Fig. 4. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

22.

Fig. 5. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

23.

Fig. 6. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

24.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσο- Fig. 7.
πλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

25.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τό τὰς δύο μόνας ἴσας Fig. 8.
ἔχον πλευράς.

26.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας Fig. 9.
ἔχον πλευράς.

27.

Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐστι, τό ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

28.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

29.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

30.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τε- Fig. 10.
τράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

31.

Fig. 11. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

32.

Fig. 12. Ῥόμβος δὲ, ὅ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

33.

Fig. 13. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

34.

Fig. 14. Τά δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

35.

Fig. 15. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτη-

Αιτηματα.

1.

Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

2.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

3.

Καὶ παντὶ κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κοιναι ἐννοιαι.

1.

Τὰ τῷ ἀυτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

2.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Fig. 16.

3.

3.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

4.

Fig. 17. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

5.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

6.

Fig. 18. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

7.

Fig. 19. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοίς ἐστί.

8.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

9.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

10.

Καὶ πᾶσαι ἁι ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

11.

Καὶ ἐὰν ἐις δύο ἐυθείας ἐυθεῖα ἐμπί- Fig. 19.
πτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ ἀυτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι ἁι δύο ἇυται ἐυθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη ἐισὶν ἁι τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

12.

Καὶ δύο ἐυθεῖαι χωρίον ὀυ περιέχουσιν.

Προτασεις.

1.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐυθέιας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἡ Α Β Fig. 20.
δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς Α Β ἐυθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ Α Β, κύκλος γεγράφθω ὁ Β Γ Δ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

2.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Fig. 22. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπε-

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ· καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

3.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Fig. 24. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

4.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τό τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καί αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γονίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Fig. 23.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην ἔιναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην ἔιναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν ἔιναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· ἐι γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τό Ε ἐφαρμοσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τό Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον ἄυτῷ ἔσται, καὶ ἁι λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι ἀυταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καί, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τό ΑΒΓ, Fig. 25 ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τό Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

ὑφ'

ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴσῃ. Fig. 28.

Ἐι

Ἐι γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ ἁι ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον, ὅπερ ἄτοπον· ὀυκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἁι δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ ἁι ὑπὸ τὰς γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

7.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέ-

ρα

ρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπί τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐι γὰρ δύνατον, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἁι ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὥστε ἴσην ἒιναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ, τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. Fig. 27.

Ἐπεὶ ὖυν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ὀυκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθέιαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξαρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Fig. 28. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τῆν δέ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου

μένου

μένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην ἒιναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ ἁι ΒΑ, ΑΓ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. [ἐι γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, ἁι δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ ὀυκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς ἁι ΕΗ, ΗΖ· συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς ἀυτῆς ἐυθείας, δυσὶ ταῖς ἀυταῖς ἐυθέιαις ἄλλαι δύο ἐυθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ ἀυτὰ μέρη, τὰ ἀυτὰ πέρατα ἔχουσαι. ὀυ συνίστανται δέ· ὀυκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, ὀυκ ἐφαρμόσουσι] καὶ ἁι ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσι ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση ἀυτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει

ἴσην

ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Fig. 29. Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὲ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία διχα τέτμηται ὑπό τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

10.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Fig. 30. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

11.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖ..ν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω

Fig. 31. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δε δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐιλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΓ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστίν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα ἡ ΖΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

12.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπί τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Fig. 32.

Ἐιλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς: κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

13.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Ευ-

Ἐυθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' ευθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ λέγω ὅτι ἀι ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Fig. 33.

Εἰ μὲν ὄυν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ δύο ὀρθαί εισιν. ει δὲ ὀυ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· ἀι ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εισιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ παρακείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· ἀι ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ εἰσὶν ἴσαι. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ παρακείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ἀι ἄρα γωνίαι ἀι ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἀι ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αυταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αυτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἀι ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ ἀι ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ἐαν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Fig. 34. Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Ἐι γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒ

Γ,

Γ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσί· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέ- Fig. 35.

γω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐαν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς

τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

16.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν. Fig. 36.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ·

γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ὁμοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Fig. 37. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσ-

ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

18.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι Fig. 39.

καὶ

καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΔΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Fig 39. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓ

Α

Α· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Ἐι γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μεν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἴση γὰρ ἂν ἦ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀυκ ἔστι δέ· ὀυκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. ὀυδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· ὀυκ ἔστι δέ· ὀυκ ἄ α ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐδείχθη δὲ, ὅτι ὀυδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20.

Παντὸς τριγώνου ἁι δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές ἐισι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἁι δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές ἐισι, πάντῃ μετα- Fig. 40.

λαμ-

λαμβανόμεναι, ἀι μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, ἀι δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, ἀι δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ· μείζονες ἄρα ἀι ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἀι μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· ἀι δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἀι δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εισι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Fig. 41.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι· τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσί, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ

μεί-

μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν ἁι ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα ἁι ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτός γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ τὰ ἀυτὰ ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο ἁι εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· ἁι συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

22.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, ἅι εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστή-

συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ της Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι. Fig. 42.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέστηκε τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

23.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Fig. 43. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Τι-

Ἐιλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, Γ Ε τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Επεὶ ὖυν αἱ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι ἐστίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑ Η ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓ Ε ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

24.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην·

νην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Fig. 44. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ Β Γ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση

ἴση ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Fig. 45. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς Δ Ε, Δ Ζ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.

Ἐι γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μενοῦν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐκ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν της βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἐυθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μιὰν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, Fig. 46. τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐι γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία ἀυτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ ὄυν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ ἁι ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΓΒ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ ἁι λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς ἁι ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ· ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον· ὀυκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ

τῇ

τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω, εἰ δύνατον, μείζων ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι·

βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τό ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία η ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

γω-

γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

27.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ εὐθείᾳ. Fig. 47.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ· ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ

ἀπ-

ἀπεναντίον γωνίας, τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἁι ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· ἁι δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοί ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεία ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Fig. 48. Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καί ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΕΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσί· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

29.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Fig. 49. Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τὰς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῃ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν· ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καί αἱ ἄρα

ὑπὸ

ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές ἐισιν. ἁι δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι ἐις ἄπειρον συμπίπτουσιν· ἁι ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι ἐις ἄπειρον συμπεσοῦνται. ὀυ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους ἀυτὰς ὑποκεῖσθαι· ὀυκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἴση ἄρα.

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ἁι ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι ἐισίν. ἀλλὰ ἁι ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐισί· καὶ ἁι ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐισίν.

Ἡ ἄρα ἐις τὰς παραλλήλους ἐυθείας ἐυθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ ἀυτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ ἀυτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

30.

30.

Ἁι τῇ αὐτῇ ἐυθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις ἐισὶ παράλληλοι.

Fig. 50. Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ ἐις αὐτὰς ἐυθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἐις παραλλήλους ἐυθέιας τὰς ΑΒ, ΕΖ ἐυθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἐις τὰς παραλλήλους ἐυθειας τὰς ΕΖ, ΓΔ ἐυθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐισιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἁι ἄρα τῇ αὐτῇ ἐυθεῖᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις ἐισὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

31.

Δία τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, δία τοῦ Α σημείου, τῇ ΓΒ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν αγαγεῖν. Fig. 51.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΕ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Δία τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

32.

32.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ ἁι ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Fig. 58. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ ἁι ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, ἁι ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ· ἁι ἐναλλὰξ γωνίαι ἁι ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον

τῇ

τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓ Ε τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓ Δ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ Α ΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

33.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· Fig. 35.

λέγω

λέγω ὅτι κ ὶ ἁι ΑΓ, ΒΔ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ· ἁι ἐναλλὰξ γωνίαι ἁι ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ ἁι ΑΒ, ΒΓ, δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστίν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἁι λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς ἁι ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δ' αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

34.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Fig. 54.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΓΒΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα

τέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ. Fig. 55.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· καὶ κοινῃ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἔντος· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω

Ἔστω παραλληλόγραμμα, τὰ ΑΒ ΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ. Fig. 56.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε εἰσι καὶ παράλληλοι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ

τῶν

τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

37.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Fig. 57. Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καὶ ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς

αὐ-

αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καί ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Fig. 58.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα

τὰ

τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΖΔ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βά-

βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. Fig. 69.

Ἐι γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν παράλληλος.

Τὰ

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Fig. 60. Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Ἐι γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ·

γώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ παράλληλός ἐστι.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

41.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου. Fig. 61.

Ἐπε-

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Fig. 62. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία Δ· δεῖ

δὴ

δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΖΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

43.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Fig. 63. Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ, τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ

ΚΖΓ

ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, Fig. 64. τὸ τὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συν-

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥσπερ ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΘΖ, ἁι ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἁι ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· ἁι δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· ἁι ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἁι ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ

τῷ

τῷ ΒΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

45.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ Ε. Fig. 65.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν.

σίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΘΖ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση δοθείσῃ τῇ Ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

46.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Fig. 66. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΒΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν·

νιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

47.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, Fig. 67.
ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι

θεῖαι ἁι ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ ἀυτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ ἐυθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ ἀυτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ᾽ ἐυθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο ἁι ΔΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι ἐισὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν ἀυτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς ἀυταῖς ἐισι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν ἀυτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς ἀυταῖς παραλλήλοις ἐισι ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ·

γώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒΓΕ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ΒΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία. Fig. 68.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσι, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Wör-

Wörterbuch.

A.

Ἀγαγεῖν von ἄγω.

Ἄγω ich führe; von Linien, ich ziehe.

Ἀδύνατος, ον unmöglich.

Αἰτέω ich verlange, fordere.

Αἴτημα, ατος, τὸ eine Forderung.

Ἀμβλυγώνιος, ον ſtumpfwinklicht.

Ἀμβλύς, εῖα, ὺ ſtumpf.

Ἀναγεγραμμένον von ἀναγράφω.

Ἀναγράφω ich beſchreibe.

Ἄνισος, η, ον ungleich, nicht gleich.

Ἄπειρος, ον wer keine Grenzen hat, unbegrenzt. ἐπ᾽ ἄπειρον, ins Unendliche.

Ἀπεναντίον adv. gegenüber. ἡ ἀπεναντίον (οὖσα) γωνία oder πλευρὰ der gegenüberſtehende Winkel, od. die gegenüberſt. Seite.

Ἀπὸ

Ἀπὸ praep. mit d. gen. von, auf.
Ἀπολαμβάνω ich nehme hinweg.
Ἅπτομαι ich werde verbunden, berühre.
Ἄρα conj. nun, alſo, folglich, mithin.
Ἀρχὴ, ῆς, ἡ der Anfang. ἐξ ἀρχῆς vom Anfange, urſprünglich.
Ἄτοπος, ον nicht Statt findend, unſtatthaft, ungereimt.
Ἀφαιρέω ich nehme hinweg.
Ἀφῃρήσθω von ἀφαιρέω.
Ἀφελεῖν vom Ungewöhnlichen ἀφέλω, welches eben das bedeutet, was ἀφαιρέω bedeutet.

B.

Βάσις, εως, ἡ die Grundlinie.

Γ.

Γραμμὴ, ῆς, ἡ eine Linie.
Γράφω ich ſchreibe, beſchreibe.
Γωνία, ας, ἡ ein Winkel.

Δ.

Δεῖ verb. imperſ. man ſoll.
Δείκνυμι ich zeige, beweiſe.

Δεῖξαι von δείκνυμι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι welches zu erweisen war.

Δὴ conj. so, folglich.

Διὰ τὸ εἶναι weil ist.

Διάγω ich führe weiter, verlängere.

Διάμετρος, ον, durchmessend. ἡ διάμετρος (γραμμή) der Durchmesser, Diameter.

Διάστημα, ατος, τὸ die Entfernung, Weite.

Δίδωμι ich gebe.

Διήχθω von διάγω.

Διπλάσιος, α, ον doppelt, zweifach. τὸ διπλάσιον das Doppelte.

Δίχα adv. entzwei, in zwei Theile. δίχα τέμνειν halbiren.

Δοθεὶς, εῖσα, ὲν von δίδωμι.

Δυνατὸς, ὴ, ὸν möglich. εἰ δυνατόν (ἐστι) wo möglich.

E.

Ἐδείχθη — ἐδείχθησαν von δείκνυμι.

Εἰλήφθω von λαμβάνω.

Ἑκάτερος, α, ον ein jeder. ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴση ἐστίν (γωνία od. πλευρά) jeder Winkel od. jede Seite, einzeln genommen, ist gleich.

Ἐκβάλλω ich verlängere; von Linien.

Ἐκβεβλήσθω von ἐκβάλλω.

Ἔκκειμαι von Linien; ich werde gezogen. S. κεῖμαι.

Ἐκτὸς adv. auſſerhalb. ἡ ἐκτὸς (οὖσα) γωνία, auch wohl nur ἡ ἐκτὸς der äuſsere Winkel.

Ἐλάσσων, ον kleiner.

Ἐμπίπτω ich falle auf, darauf.

Ἐναλλὰξ adv. wechſelsweiſe, abwechſelnd. ἡ ἐναλλὰξ γωνία ein Wechſelwinkel.

Ἐντὸς adv. innerhalb. ἡ ἐντὸς (οὖσα) γωνία, oder ἡ ἐντὸς der innere Winkel.

Ἐξίσου adv. auf gleiche Weiſe.

Ἐπεζεύχθω — ἐπεζεύχθωσαν von ἐπιζεύγνυμι.

Ἐπεὶ conj. weil.

Ἐπὶ praep. mit d. gen. auf; mit d. acc. nach, an. ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη an beiden Seiten.

Ἐπιζεύγνυμι ich verbinde, füge hinzu.

Ἐπίπεδος, ον eben. τὸ ἐπίπεδον (χωρίον) eine Ebene.

Ἐπιφάνεια, ας, ἡ die Oberfläche, Fläche.

Ἑτερομήκης, ες an einer Seite länger, länglicht.

Ἔτι adv. ferner, weiter.

Εὐθύγραμμος, ον geradlinicht.

Εὐθὺς, εῖα, ὺ gerade. ἡ εὐθεῖα (γραμμὴ) eine gerade Linie.

Ἐφαρμόζω ich paſſe an. τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα Dinge, die auf einander paſſen, ſich decken.

Ἐφεξῆς adv. zunächſt, neben. ἡ ἐφεξῆς (οὖσα) γωνία ein Nebenwinkel.

Ἐφεστηκυῖα von ἐφίστημι.

Ἐφηρμόκει von ἐφαρμόζω.
Ἐφίστημι ich ſtelle auf; im Praeter. ich ſtehe auf.

H.

Ἠγμένη von ἄγω.
Ἦκται von ἄγω.
Ἡμικύκλιον, ου, τὸ ein Halbkreis, halber Zirkel.
Ἥμισυς, εια, υ halb τὸ ἥμισυ die Hälfte.
Ἠτήσθω von αἰτέω.
Ἤτοι mit darauffolgenden ἤ entweder — oder
Ἤχθω von ἄγω.

Θ.

Θέσθαι von τίθημι.

I.

Ἰσόπλευρος, ον gleichſeitig.
Ἴσος, η, ον gleich.
Ἰσοσκελὴς, ές gleichſchenklicht.
Ἵστημι, ich ſtelle; im Praeter. ich ſtehe.

K.

Κάθετος, ον wer niedergelaſſen wird, niederfällt.

ἡ κάἡ κάθετος (γραμμὴ) eine niederfallende Linie, eine Perpendikular-Linie, Kathete.

Καλέω ich rufe, nenne.

Καταλείπω ich laſſe übrig. τὸ καταλειπόμενον der Reſt.

Κεῖμαι ich bin geſetzt, geſtellt; ich liege.

Κέντρον, ου, τὸ der Mittelpunkt, das Centrum; vom Kreiſe.

Κλίσις, εως, ἡ die Neigung.

Κοινὸς, ἡ, ὸν gemeinſchaftlich. ἡ κοινὴ (γωνία oder γραμμὴ) der gemeinſchaftliche Winkel oder Linie. τὸ κοινὸν (τρίγωνον).

Κορυφὴ, ῆς, ἡ der Scheitel. ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία der Scheitelwinkel.

Κύκλος, ου, ὁ ein Zirkel, Kreis.

Λ.

Λαμβάνω ich nehme. εἰλήφθω es werde genommen, es ſey.

Λέγω ich ſage, behaupte. λεγόμενος, η, ον genannt.

Λοιπὸς, ἡ, ὸν übrig. τὸ λοιπὸν der Reſt, ἡ λοιπὴ (γραμμὴ oder γωνία.)

M.

Μείζων, ον gröſser.

Μενοῦν adv. nun aber.

Μέρος, εος, τὸ ein Theil, eine Seite. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, nach einerley Seite.

Μεταλαμβάνω ich nehme zuſammen.

Μηδέτερος, α, ον keiner, von zweien.

Μῆκος, εος, τὸ die Länge.

Μόνον adv. nur, allein.

Ο.

Ὅλος, η, ον, ganz. τὸ ὅλον das Ganze.

Ὁμοίως adv. auf gleiche Weiſe.

Ὀξυγώνιος, ον ſcharfwinkelicht.

Ὀξὺς, εῖα, ὺ ſcharf.

Ὁπότερος, α, ον einer, von zweien.

Ὀρθογώνιος, ον rechtwinkelicht.

Ὀρθὸς, ἡ, ὸν recht. ἡ ὀρθὴ (γωνία) ein rechter Winkel.

Ὅρος, ου, ὁ eine Grenze, Erklärung.

Ὅσος, η, ον ſo viel als ſeyn mögen.

Οὐθεὶς, έν keiner.

Οὖν conj. nun, alſo, deswegen.

Οὔτε mit darauffolgendem οὔτε entweder — oder.

Π.

Πάλιν adv. ferner, desgleichen.

Παρὰ praep. mit d. acc außer. τὰ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα die übrigen vierseitigen Figuren.

Παραλλάσσω ich mache einen Unterschied; von Figuren, sich nicht decken, nicht auf einander passen.

Παραβάλλω in werfe, lege an, παρ' εὐθεῖαν σχῆμά τι παραβάλλειν auf einer geraden Linie eine Figur errichten.

Παραλληλόγραμμος, ον parallellinigt. τὸ παραλληλόγραμμον (χωρίον) ein Parallelogramm.

Παράλληλος, ον gleichlaufend, parallel. ἡ παράλληλος (γραμμὴ) eine Parallellinie.

Παραπλήρωμα, ατος, τὸ die Ergänzung, Ausfüllung.

Πεπερασμένος von περαίνω.

Περαίνω ich begrenze.

Πέρας, ατος τὸ das Ende, die Grenze.

Περατόω ich begrenze, endige.

Περιέχω ich umfasse, schliesse ein.

Περιφέρεια, ας, ἡ der Umfang, die Peripherie; vom Zirkel.

Πλάτος, εος, τὸ die Breite.

Πλὴν adv. auſser, ausgenommen.

Πλείων, ον mehr.

Πλευρὰ, ᾶς, ἡ die Seite.

Ποιέω ich mache.

Πολύπλευρος, ον vielſeitig.

Πόρισμα, ατος, τὸ die Folgerung, Zuſatz.

Πρὸς praep. mit d. dat. an, über; mit d. acc. zu-nach, an.

Προσεκβάλλω ich verlängere.

Πρόσκειμαι, ich lege, thue hinzu.

Προσπίπτω, ich falle herab, von Linien.

Προστίθημι ich thue, ſetze hinzu.

Πρότασις, εως, ἡ ein Satz.

Πρότερος, α, ον der erſtere.

Ρ.

Ρομβοειδὴς, ὲς was einer Raute, einem Rhombus ähnlich iſt. τὸ ῥομβοειδὲς (σχῆμα) eine länglichte Raute.

Ρομβος, ου, ὁ eine Raute, ein Rhombus.

Σ.

Σημεῖον, ου, τὸ ein Punkt.

Σκαληνὸς, ἡ, ὸν ungleichſeitig.

Στα-

Σταθεῖσα von ἵστημι.

Συμπίπτω ich falle, treffe zusammen.

Συνεχὴς, ἐς zusammenhängend. κατὰ τὸ συνεχὲς ununterbrochen.

Συνίστημι ich errichte.

Συστήσασθαι — σισταθήσονται — συσταθῶσιν von συνίστημι.

Σχῆμα, ατος, τὸ eine Figur.

T.

Τέμνω ich schneide.

Τετράγωνος, ον vierwinkelicht. τὸ τετράγωνον (σχῆμα oder χωρίον) eine Figur, mit vier Winkeln, ein Viereck.

Τετράπλευρος, ον vierseitig.

Τίθημι ich setze, stelle.

Τμῆμα, ατος, τὸ ein Abschnitt, Segment.

Τομὴ, ῆς, ἡ der Schnitt.

Τραπέζιον, ου, τὸ ein Trapezium.

Τρίγωνος, ον dreiwinkelicht. τὸ τρίγωνον (σχῆμα oder χωρίον) ein Dreieck.

Τρίπλευρος, ον dreiſeitig.

Τυγχάνω ich bin. τυχὼν beliebig, nach Gefallen.

Υ.

Ὑπὸ praep. m. d. gen. von; mit dem accuſ. unter. bei. ἡ ὑπὸ ΑΒΓ (οὖσα γωνία) der Winkel ΑΒΓ.

Ὑπόκειμαι ich werde geſetzt, angenommen.

Ὑποτείνω ich ſpanne über etwas, ſchlieſse ein. ὑποτείνουσα πλευρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, eine Seite die einen rechten Winkel einſchlieſst; Hypotenuſe.

Φ.

Φανερὸς, ὰ, ον deutlich, klar.

Χ.

Χωρίον, ου, τὸ ein Raum.

Ω.

Ὡς ἂν wenn.

Ὦσι von εἰμί.

Ὥστε so daſs.

Verbesserungen.

Seite	15.	Lin.	6.	μήρη	l.	μέρη.
—	24.	—	19.	δεῖζαι	l.	δεῖξαι.
—	25.	—	22.	ὅπες	l.	ὅπερ.
—	64.	—	20.	πεποίκεν	l.	πεποίηκεν.

Erstes Buch

der

Elemente des Euklides

Deutsch,

mit erläuternden Anmerkungen.

Das Studium der Mathematik reiniget und belebet das Organ der Seele.

Plato.

Weimar, 1800.

bey der Hoffmannischen Buchhandlung.

Vorrede.

Es sind vielleicht folgende Punkte, worüber der Leser, am Eingange dieser Schrift, Auskunft erwartet. Was veranlaßte den Verfasser dazu; gehört Geometrie für Kinder, und zwar in griechischer Sprache; wozu die Uebersetzung mit den Anmerkungen?

Die Veranlassung dazu gaben die wiederhohlten öffentlichen Aufforderungen des Herrn Hofrath Kästner. Noch neulich erst lies er drucken: "Käme Euklid wiederum auf die

Welt, und lernte französisch oder deutsch, so verstände er jeden französischen oder deutschen Schriftsteller von der Elementargeometrie; unsere Rechnungen mit Ziffern oder Buchstaben wären das einzige ihm fremde, und die würden ihm bald bekannt werden. Manchen Beweisen würde er freilich seinen Beifall nicht geben.*)" Und in der Geschichte der Mathematik, 1 B. S. 264. „Ich habe manchmahl den Gedanken gehabt, der freilich nur Gedanke bleiben wird, man könnte auf Schulen den Anfang im Griechischen mit Euklids erstem Buche machen, wozu ein Abdruck dienen könnte, wie Steinmetz zu den ersten sechs Büchern geliefert hat.

In den Wörtern blieb keine Dunkelheit, weil man sie durch sinnliche Bilder erläutern kann, und in Absicht auf die Schreibart, ist wohl kein Autor leichter.

Frei-

*) In der Vorrede zu Blumhofs Dasypodius. Götting. 1796. S. 11.

Freilich wäre von Euklid noch ein weiter Weg bis zum Homer; aber ich getraute mir das geometrische Paradoxe wohl zu behaupten: dieser Weg sey nicht so weit, als der vom Homer zum Euklid, wenn man mir nur gestattet Auslegung zu machen, wie man bei Paradoxen immer macht, daß der vom Euklid anfängt, — wenn ihm sonst epische Poesie gefällt, das kommt auf seinen Geschmack an, — es leichter finden wird, zum Homer zu gehen, als umgekehrt.

Ein Jüngling verlies seines Vaters einträgliche Profession; Wolfs deutsche mathematische Lehrbücher hatten ihn verführt. Er kam hieher zu studiren, nahm im Lateinischen Unterricht, und pries den glücklich, der es als Knabe gelernt hatte. Einst bat er mich, ihm den Sallust zu leihen. Er habe gehört, es sey ein schwerer Autor, wollte versuchen, ob er ihn verstehen könnte. — So denke ich auch. Wen etwas vom griechischen Euklid zur anhaltenden Geduld und Arbeitsamkeit gewöhnet hat, der wird eher versuchen, ob er den Homer verstehen kann, als der Leser Homers sich an den Euklid wagen wird. Meinen Einfall zu berichtigen, überlasse ich der Erfahrung."

Aber dürfen Kinder und Knaben auch schon mit Geometrie behelliget werden? — Soll diese Frage soviel heißen: können Kinder und Knaben Geometrie treiben; habeu sie das Vermögen dazu? So verweise ich deshalb auf die weiter unten, vor den Anmerkungen, angeführten Stellen aus Kästners Aufsatze: Wie Kindern Geometrie und Arithmetik beyzubringen sey. Heißt diese Frage aber: sind geometrische Uebungen für Kinder und Knaben nützlich und ihrem Alter angemessen; so beantwortet sie sich wohl am besten durch eine oder die andere der folgenden: darf man ihr Wahrheitsgefühl schärfen und erhalten? Dürfen sie ihren Verstand eben so mechanisch zur Erfindung der Wahrheit üben, als ihre Füße zum Gehen? Dürfen sie von den unzähligen Fällen des spätern menschlichen Lebens wenigstens einen Vorschmack erhalten? "Denn offenbar dient Geometrie häufig, wo man nicht ans Messen denkt, Lagen und Gestalten betrachtet, gerad und krum, senkrecht und schief, dreyeckigt und viereckigt, kreisrund, länglichtrund, Kugel, Walze, Kegel, Würfel ꝛc. Wer findet nicht Bestimmung dieser Begriffe nöthig, lange ehe er ans Messen denkt? Selbst kann man ja nicht von Messen reden, ehe gesagt wird, was man mißt." *)

Alles gut; aber warum in einer fremden Sprache? Warum nicht gerade zu deutsch? Ein griechisches Lehrbuch, statt der bisher üblichen lateinischen, heißt ein altes Uebel verdoppeln? — Wahr, wenn von Verspäteten, von Handwerkern, Professionisten ꝛc. die Rede ist; aber bey früherem Unterrichte möchte ich doch lieber Lehrbüchern in fremden, und zwar in alten Sprachen abgefaßt, die gewissermaßen mit stehend-

*) Kästners Gesch. d. Mathem. 1 B. 391.

stehendbleibenden Schriften da sind, das Wort reden. Fast alles vereiniget sich bey ihnen, rasche und langsame Denkkräfte zu zügeln oder anzuspornen; Sprachstudium und Assiduität zu erwecken und zu stärken; mithin für jede künftige Bestimmung einen sichern Grund zu legen.

Ich trage daher kein Bedenken, obigen Vorschlag des Herrn Hofrath Kästner durch gegenwärtigen Versuch der Ausführung etwas näher zu bringen. Ein Haupthinderniß war bisher der Mangel an einer schicklichen Handausgabe; denn die Arbeiten eines Steinmetz, Dasypod ꝛc. sind längstens nicht mehr zu haben, und enthalten gewöhnlich auch nur die Sätze ohne die Beweise.

Gegenwärtiger Abdruck ist genau nach der bekannten Oxforder Folio-Ausgabe gemacht worden; ein Paar seltsame Druckfehler ausgenommen, z. E. Satz 26. im Anfange ἤτοι statt ἥτον; oder S. 38. st. ἐπι τῶν ἴσων βάσεων — ἐπι τῆς αὐτῆς βάσεως; ἄρα statt ὥρα ꝛc. und ich hoffe nicht, daß sich statt ihrer viel andere werden eingeschlichen haben.

Aus dem kurzen Wortregister, das von einem Freunde herrührt, sieht man ohne weiteres Erinnern, wie geschickt das Lesen dieses Buchs für die bestimmten Anfänger sey, die sich im richtig und fertig Lesen, in der Formenlehre und im Uebersetzen üben sollen; denn wer weiß nicht, wie sehr ein leichter Fortgang bey solchen Gemüthern zur Fortsetzung einladet?

Braucht man dieses Büchelchen abwechselnd, bald für die Sprache, bald für den Inhalt, mit fortgesetzter Munterkeit, so können die darauf zu verwendenden Stunden vielleicht Belohnungsstunden werden. Von Langerweile wenigstens müssen Stunden frey bleiben, wo das eine ermuntert, wenn das andere ermüdet. Selbst die Formen kehren so oft wieder, daß nur die ersten Stunden einige Mühe kosten können.

Zu

Zu diesem Behuf betrachte man auch die hinzugefügten Anmerkungen. Es ist vielleicht keine für alle; man wähle und vermehre nach Zeit und Umständen. Der Herr Verleger hat deswegen anch dafür gesorgt, daß jedes, das Original und die Uebersetzung mit den Anmerkungen, einzeln zu haben seyn wird.

Zu gegenwärtiger Absicht war eine Uebersetzung vielleicht nöthiger, als von jedem andern Autor. Die gute Hauffische hat ein anderes Publikum.

Ueber Methode sollte vielleicht noch etwas gesagt seyn; aber wer will bey Euklides etwas über Methode sagen, wo alles Methode ist. Ich schließe daher lieber mit der Umschrift eines wirklichen Schulsiegels: Licht, Liebe, Leben; als dem einzigen, was noch Noth seyn könnte.

Weimar, im Januar 1800.

Erstes Buch

der

Elemente des Euklides.

Elemente des Euklides.

Erstes Buch.

Erklärungen.

1.

Ein Punkt ist, was keine Theile hat.

2.

Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.

3.

Die Enden einer Linie sind Punkte.

4.

Eine gerade Linie liegt gleichförmig zwischen ihren Punkten.

Eine

5.

Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

6.

Die Enden einer Fläche sind Linien.

7.

Eine ebene Fläche liegt gleichförmig zwischen ihren Linien.

8.

Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer Linien auf einer Ebne, die sich berühren und nicht in Einer geraden Linie liegen.

9.

Sind die Linien, die den Winkel einschließen, gerade Linien, so heißt er ein geradlinigter Winkel.

10.

Fig. 1. Macht eine auf einer geraden Linie stehende gerade Linie gleiche Nebenwinkel, so ist jeder dieser gleichen Winkel ein rechter Winkel, und die aufstehende gerade Linie heißt ihre senkrechte Linie.

11.

Ein **stumpfer** Winkel ist größer als ein rechter. Fig. 2.

12.

Ein **spitzer** Winkel ist kleiner als ein rechter.

13.

Eine **Grenze** ist das Ende einer Sache.

14.

Eine **Figur** ist, was durch eine oder mehrere Grenzen eingeschlossen ist.

15.

Ein **Kreis** ist eine ebne Figur, die von Fig. 8. einer einzigen Linie, die ihr Umfang (—) oder **Peripherie** heißt, so eingeschlossen wird, daß alle gerade Linien, die von einem der Punkte innerhalb der Figur nach der Peripherie gezogen werden, einander gleich sind.

16.

Dieser Punkt heißt der **Mittelpunkt** des Kreises.

17.

Ein **Durchmesser** des Kreises ist eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt des Krei-

Kreises gezogen, an beyden Seiten von dem Umfange des Kreises begrenzt wird; sie halbiret auch den Kreis.

18.

Ein Halbkreis ist eine Figur, die von dem Durchmesser, und der dadurch abgeschnittenen Peripherie, eingeschlossen wird.

19.

Ein Abschnitt des Kreises, wird von einer geraden Linie, und von der dadurch abgeschnittenen Peripherie eingeschlossen.

20.

Geradlinigte Figuren werden von geraden Linien eingeschlossen;

21.

Fig. 4. Dreyseitige, von dreyen;

22.

Fig. 5. Vierseitige, von vieren;

23.

Fig. 6. Vielseitige, von mehr als vieren.

24.

Fig. 7. Unter den dreyseitigen Figuren hat das gleichseitige Dreyeck drey gleiche Seiten.

25.

25.

Das gleichschenklichte zwey gleiche; Fig. 8.

26.

Das ungleichseitige aber drey un- Fig. 9.
gleiche Seiten.

27.

Ferner gehört zu den dreyseitigen Figuren das rechtwinklichte Dreyeck, das einen rechten Winkel;

28.

Das stumpfwinklichte, das einen stumpfen Winkel;

29.

Das spitzwinklichte, das drey spitze Winkel hat.

30.

Unter den vierseitigen Figuren, ist das Fig. 10.
Quadrat gleichseitig und rechtwinklicht;

31.

Das Rechteck, rechtwinklicht aber nicht Fig. 11.
gleichseitig;

32.

Fig. 12. Die Raute, gleichseitig aber nicht rechtwinklicht.

33.

Fig. 13. Die länglichte Raute, hat zwar gleiche gegenüberstehende Seiten und Winkel, ist aber weder gleichseitig noch rechtwinklicht.

34.

Fig. 14. Die übrigen vierseitigen Figuren heisen ungleichseitige Vierecke (Trapezien).

35.

Fig. 15. Gleichlaufende Parallellinien, liegen in einerley Ebne, und treffen, so weit sie auch an beyden Seiten verlängert werden, an keiner Seite zusammen.

Forderungen.

1.

Man fordere: Von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie zu ziehen;

2.

Eine begrenzte gerade Linie ununterbrochen in derselben Richtung zu verlängern;

3.

Und aus jedem Mittelpunkte und mit jeder Weite einen Kreis zu beschreiben.

Grundsätze.

1.

Dinge, die einem Dritten gleich, sind sich selber gleich.

2.

Gleiches zu Gleichem gesetzt, giebt gleiche Summen. Fig. 16.

3.

Gleiches von Gleichen abgezogen, giebt gleiche Reste.

4.

Gleiches zu Ungleichem gesetzt, giebt ungleiche Summen. Fig. 17.

5.

Gleiches von Ungleichem abgezogen, giebt ungleiche Reste.

6.

Dinge, die von einem dritten das doppelte sind, sind einander gleich. Fig. 18.

7.

Fig. 19. Dinge, die von einem Dritten die Hälften sind, sind einander gleich.

8.

Dinge, die sich decken, sind einander gleich.

9.

Das Ganze ist größer, als ein Theil desselben.

10.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

11.

Fig. 20. Wenn eine gerade Linie zwey andere schneidet, und die zwey innern, an einerley Seite liegenden Winkel, kleiner als zwey rechte Winkel macht, so fallen die zwey geraden Linien, gehörig verlängert, an der Seite zusammen, wo die zwey Winkel liegen, die kleiner als zwey rechte sind.

12.

Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein.

1 Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu errichten.

Die gegebene begrenzte gerade Linie sey Fig. 21.
A B; man soll auf dieser geraden Linie A B ein gleichseitiges Dreyeck errichten.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte A und mit der Weite AB den Kreis ΒΓΔ (Forder. 3.); desgleichen aus dem Mittelpunkte B und mit der Weite BA den Kreis ΑΓΕ, und ziehe vom Punkte Γ, wo sich die beyden Kreise schneiden, nach den Punkteu A, B die geraden Linien ΓΑ, ΓΒ. (Forder. 1.)

Weil nun der Punkt A der Mittelpunkt des Kreises ΓΔΒ ist, so ist ΑΓ gleich AB. (Erklär. 15.) Desgleichen, weil der Punkt B der Mittelpunkt des Kreises ΓΑΕ ist, so ist ΒΓ gleich BA. Es ist aber bewiesen, daß auch ΓΑ gleich sey AB; folglich ist jede Seite ΓΑ, ΓΒ gleich AB. Dinge aber, die einem dritten gleich, sind sich selber gleich. (Grds. 1.) Folglich ist auch ΓΑ gleich ΓΒ. Die drey Seiten ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sind also sich selber gleich.

Das Dreyeck ΑΒΓ ist also ein (Erkl. 24.) gleichseitiges und auf der gegebenen,

be-

begrenzten geraden Linie AB errichtet. Welches zu verrichten war.

2 Satz. Aufgabe.

An einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu setzen, die einer gegebenen gleich ist.

Fig. 22. Der gegebene Punkt sey A, und die gegebene gerade Linie BΓ; man soll an den Punkt A eine gerade Linie setzen, die der gegebenen BΓ gleich ist.

Man ziehe von dem Punkte A nach dem Punkte B die gerade Linie AB, und errichte darauf ein gleichseitiges Dreyeck, (Satz 1.) nehml. ΔAB; verlängere die geraden Linien ΔA, ΔB in derselben Richtung (Forder. 2.) nach E, Z, u. beschreibe aus dem Mittelpunkte B und mit der Weite BΓ den Kreis ΓHΘ; desgleichen beschreibe man aus dem Mittelpunkte Δ und mit der Weite ΔH den Kreis HKΛ.

Weil nun der Punkt B der Mittelpunkt des Kreises ΓHΘ ist, (Erkl. 15.) so ist BΓ gleich BH. Desgleichen, weil der Punkt Δ der Mittelpunkt des Kreises HKΛ ist, so ist ΔΛ gleich ΔH. Von diesen ist (Erkl. 15) ΔA gleich ΔB. Folglich ist der Rest (Grds. 3.) AΛ gleich dem Reste BH. Es ist aber bewiesen, (Erkl. 15.) daß

daß auch ΒΓ gleich ist ΒΗ. Es ist also jede der Linien ΑΛ, ΒΓ gleich ΒΗ. (Grds. 1) Dinge aber, die einem dritten gleich, sind sich selber gleich; folglich ist ΑΛ auch ΒΓ gleich.

Es ist also an einen gegebenen Punkt Α eine gerade Linie ΑΛ gesetzt worden, die der gegebenen ΒΓ gleich ist. Welches zu verrichten war.

3. Satz. Aufgabe.

Von der größern zweyer gegebenen ungleichen geraden Linien ein Stück abzuschneiden, das der kleinern gleich ist.

Die zwey gegebenen ungleichen geraden Linien sollen ΑΒ und Γ seyn, wovon ΑΒ die größere ist; man soll von der größern ΑΒ ein Stück abschneiden, das der kleinern Γ gleich ist. Fig. 24.

Man setze an den Punkt Α die Linie ΑΔ, die der Linie Γ gleich (Satz 2.) ist, und beschreibe aus dem Mittelpunkte Α und mit der Weite ΑΔ den Kreis ΔΕΖ. (Ford. 3.)

Weil

Weil nun der Punkt A der Mittelpunkt des Kreises ΔEZ ist, (Erkl. 15.) so ist AE gleich AΔ; aber auch Γ war gleich AΔ. (Grds. 1.) Folglich sind beyde AE und Γ gleich AΔ; daß also auch AE gleich ist Γ.

Es ist also von der größern AB, zweyer gegebenen ungleichen geraden Linien AB, Γ, ein Stück AE abgeschnitten, das der kleinern Γ gleich ist. Welchs zu verrichten war.

4 Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen, zweyen Seiten des andern, gleich sind, jede einzeln genommen, und auch die von diesen gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel, so ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich, das Dreyeck dem Dreyecke, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüber stehen.

Fig. 23. Die zwey Dreyecke mögen ABΓ, ΔEZ seyn, worin die zwey Seiten AB, AΓ den zwey Seiteu ΔE, ΔZ gleich sind, und zwar jede einzeln genommen, nehmlich

AB

AB ist gleich ΔE, AΓ aber ΔZ; worin ferner der Winkel BAΓ gleich ist dem Winkel EΔZ, so behaupte ich, daß auch die Grundlinie BΓ der Grundlinie EZ gleich sey; desgleichen, das Dreyeck AB Γ dem Dreyeck ΔEZ, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie er gleichen Seiten gegenüber stehet, nehmlich der Winkel ABΓ dem Winkel ΔEZ, der Winkel AΓB, dem Winkel ΔZE.

Denn legt man das Dreyeck ABΓ so auf das Dreyeck ΔEZ, daß der Punkt A auf den Punkt Δ, die Seite AB aber auf die Seite ΔE fällt, so muß auch der Punkt B auf dem Punkte E liegen; weil AB gleich ist ΔE. Liegt aber die Seite AB auf der Seite ΔE, so liegt auch die Seite AΓ auf der Seite ΔZ; weil der Winkel BAΓ dem Winkel EΔZ gleich ist, und der Punkt Γ muß auf dem Punkte Z liegen, weil, zweytens, die Seite AΓ der Seite ΔZ gleich ist. Nun lag aber auch der Punkt B auf dem Punkte E; die Grundlinie BΓ muß also auch auf der Grundlinie EZ liegen. Denn läge der Punkt B nicht auf dem Punkte E, und der Punrt Γ nicht auf dem Punkte Z, die Grundlinie BΓ läge aber auf der Grundlinie

linie EZ, so müßten zwey gerade Linien einen Raum einschließen, (Grds. 12.) welches unmöglich ist. Die Grundlinie BΓ liegt also auf der Grundlinie EZ, und ist ihr gleich; folglich liegt auch das ganze Dreyeck ABΓ auf dem ganzen Dreyecke ΔEZ, und ist ihm (Grds. 8.) gleich, und auch die übrigen Winkel liegen auf den übrigen Winkeln und sind ihnen gleich, nehml. der Winkel ABΓ dem Winkel ΔEZ und der Winkel AΓB dem Winkel ΔZE.

Wenn also in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen, zweyen Seiten des andern gleich sind, jede einzeln genommen, und auch die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, so ist auch die Grundlinie des einen der Grundlinie des andern gleich; das Dreyeck dem Dreyecke, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüber stehen. Welches zu erweisen war.

5. Satz. Lehrsatz.

In gleichschenklichten Dreyecken sind die Winkel über der Grundlinie und, werden die gleichen Seiten verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Das

Des gleichschenklichte Dreyeck sey ΑΒΓ, Fig. 25.
worin die Seite ΑΒ gleich ist der Seite ΑΓ; man verlängere (Ford. 2.) die beiden Seiten ΑΒ und ΑΓ nach ΒΔ und ΓΕ, so behaupte ich, daß der Winkel ΑΒΓ dem Winkel ΑΓΒ, und der Winkel ΓΒΔ dem Winkel ΒΓΕ gleich sey.

Man nehme auf der Linie ΒΔ einen beliebigen Punkt, den Punkt Ζ, und (Satz 3.) schneide von der längern ΑΕ ein Stück ΑΗ ab, das der kürzern ΑΖ gleich ist, und ziehe die Linien ΖΓ, ΗΒ.

Weil nun ΑΖ gleich ist ΑΗ, und ΑΒ gleich ΑΓ, so sind die zwey Seiten ΖΑ, ΑΓ gleich den zwey Seiten ΗΑ, ΑΒ, jede einzeln genommen, und schließen den gemeinschaftlichen Winkel ΖΑΗ ein; (Satz 4.) mithin ist die Grundlinie ΖΓ der Grundlinie ΗΒ gleich, und das Dreyeck ΑΖΓ dem Dreyeck ΑΗΒ, u. die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüberstehen, nehmlich ΑΓΖ ist gleich ΑΒΗ u. ΑΖΓ gleich ΑΗΒ. Und weil die ganze Seite ΑΖ der ganzen Seite ΑΗ gleich ist, davon ΑΒ gleich war ΑΓ, (Grds. 3.) so ist auch

auch ihr Rest BZ dem Reste ΓH gleich. Es ist aber bewiesen, daß auch ZΓ gleich ist HB; folglich sind die zwey Seiten BZ, ZΓ den zwey Seiten ΓH, HB gleich, jede einzeln genommen, und die Grundlinie BΓ haben sie gemeinschaftlich; (Satz 4.) folglich ist auch das Dreyeck B ZΓ dem Dreyecke ΓHB gleich, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüber stehen. Mithin ist der Winkel ZBΓ dem Winkel HΓB gleich, und der Wintel BΓZ dem Winkel ΓBH. Weil nun erwiesen ist, daß der ganze Winkel ABH dem ganzen Winkel AΓZ gleich ist, davou der Winkel ΓBH dem Winkel BΓZ gleich, (Grds. 3.) so ist auch der übrige ABΓ dem übrigen AΓB gleich, die über der Grundlinie des Dreyecks ABΓ stehen, so wie erwiesen ist, daß der Winkel ZBΓ dem Winkel HΓB gleich ist, die unter der Grundlinie stehen.

Folglich sind in gleichschenklichten Dreyecken die Winkel über der Grundlinie, und werden die gleichen Seiten verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich. W. z. e. w.

6 Satz.

6 Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Das Dreyeck sey ΑΒΓ, worin der Winkel ΑΒΓ, dem Winkel ΑΓΒ gleich ist, so behaupte ich, daß auch die Seite ΑΓ der Seite ΑΒ gleich ist. Fig. 26.

Denn ist die Seite ΑΓ der Seite ΑΒ ungleich, so ist eine davon größer. ΑΒ sey größer; man (Satz 3.) schneide von der größern ΑΒ das Stück ΔΒ ab, das der kleinern ΑΓ gleich ist, und ziehe ΔΓ.

Weil nun (in den Dreyecken ΔΒΓ, ΑΒΓ) ΔΒ gleich ΑΓ, und ΒΓ beiden gemeinschaftlich ist, (Satz 4.) so sind die zwey Seiten ΔΒ, ΒΓ den zwey Seiten ΑΓ, ΓΒ gleich, jede einzeln genommen, der Winkel ΔΒΓ dem Winkel ΑΓΒ und die Grundlinie ΔΓ der Grundlinie ΑΒ, und das Dreyeck ΑΒΓ dem Dreyecke ΔΓΒ, das größere dem kleinern, welches (Grds. 9.) ungereimt ist. ΑΒ ist also ΑΓ nicht ungleich, folglich gleich.

Wenn

Wenn also in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten einander gleich. W. z. erw. w.

7 Satz. Lehrsatz.

Fig. 27. Auf derselben geraden Linie lassen sich nicht noch zwey andere errichten, die, jede einzeln genommen, zwey errichteten gleich sind, nach verschiedenen Punkten und nach einerley Seite gehen, und auch einerley Endpunkte haben.

Denn errichte, wenn möglich, auf derselben geraden Linie ΑΒ außer den zweyen ΑΓ, ΓΒ, noch zwey andere ΑΔ, ΔΒ, die, jede einzeln genommen, jenen gleich sind, nach verschiedenen Punkten, nach Γ und Δ, nach einerley Seite, nach Γ, Δ und laß sie mit den vorigen einerley Endpunkte haben, nehmlich Α, Β, so daß ΓΑ gleich ΔΑ und Α ihr gemeinschaftlicher Endpunkt sey, und daß ΓΒ gleich ΔΒ und Β ihr gemeinschaftlicher Endpunkt sey, und ziehe ΓΔ, (so behaupte ich, daß der Punkt Δ nicht auf den Punkt Γ falle.)

Denn weil ΑΓ gleich ist ΑΔ, so ist auch (Satz 5.) der Winkel ΑΓΔ gleich dem

Winkel $A\Delta\Gamma$, und der Winkel $A\Delta\Gamma$ ist größer als $\Delta\Gamma B$ (um den Winkel $B\Gamma A$), und noch weit größer ist $\Gamma\Delta B$ (um $A\Delta B$), als $\Delta\Gamma B$. Ferner, weil ΓB gleich ist ΔB, so ist (Satz 5.) auch der Winkel $\Gamma\Delta B$ gleich dem Winkel $\Delta\Gamma B$ Es ist aber erwiesen, daß er weit größer ist, und das ist unmöglich.

Auf derselben geraden Linie lassen sich also nicht noch zwey andere errichten, die, jede einzeln genommen, zwey errichteten gleich sind, nach verschiedenen Punkten und nach einerley Seite gehen und auch einerley Endpunkte haben. W. z. e. w.

8 Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten zweyen Seiten, jede einzeln genommen, die Grundlinie der Grundlinie, gleich ist; so ist auch der Winkel dem Winkel gleich, der von gleichen Seiten eingeschlossen ist. Fig. 28.

Die zwey Dreyecke mögen $AB\Gamma$, ΔEZ seyn, worin die zwey Seiten AB, $A\Gamma$ den zwey Seiten ΔE, ΔZ, jede einzeln genommen, gleich sind, AB nehmlich ΔE und $A\Gamma$ dagegen ΔZ, und die Grundlinie $B\Gamma$ der Grundlinie EZ, so behaupte te ich, daß auch der Winkel BAΓ dem Winkel EΔZ gleich sey.

Denn deckt man das Dreyeck ABΓ auf das Dreyeck ΔEZ, und legt den Punkt B auf den Punkt E, die Linie BΓ aber auf die Linie EZ, so deckt auch der Punkt Γ den Punkt Z, weil BΓ gleich ist EZ. Deckt BΓ aber EZ, so decken auch AB, AΓ die Seiten EΔ, ΔZ. Denn wenn die Grundlinie BΓ die Grundlinie EZ deckt, (und die Seiten BA, AΓ die Seiten EΔ, ΔZ nicht deckten, sondern von ihnen abwichen, wie EH, HZ, so würden auf derselben geraden Linie, noch zwey andere errichtet, die, jede einzeln genommen, zwey errichteten gleich wären, nach verschiedenen Punkten und nach derselben Seite gingen und auch einerley Endpunkte hätten, die sich nicht errichten lassen. (Satz. 7.) Da nun die Grundlinie BΓ EZ deckt), so müssen auch BA, AΓ nothwendig EΔ, ΔZ decken. Sie decken sie also, und zwar so, daß auch der Winkel BAΓ den Winkel EΔZ deckt und ihm (Grds. 8.) gleich ist.

Wenn also in zwey Dreyecken zwey Seiten zweyen Seiten, jede einzeln genommen, die Grundlinie der Grundlinie, gleich ist; so so ist auch der Winkel dem Winkel gleich, der von gleichen Seiten eingeschlossen ist. W. z. e. w.

9 Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigten Winkel zu halbiren.

Der gegebene geradlinigte Winkel sey ABΓ; man soll ihn halbiren. Fig. 29.

Man nehme auf der Linie AB einen willkührlichen Punkt Δ, und schneide von der Linie (Satz 3.) AΓ das Stück AE, gleich AΔ, ab, und ziehe ΔE, und errichte auf ΔE das (Satz 1.) gleichseitige Dreyeck ΔEZ und ziehe AZ; so behaupte ich, daß der Winkel BAΓ durch die Linie AZ halbiret ist.

Denn weil AΔ gleich AE; und AZ beiden gemeinschaftlich ist, so sind die zwey Seiten ΔA, AZ den zwey Seiten EA, AZ gleich, jede einzeln genommen, und die Grundlinie ΔZ der Grundlinie EZ; (Satz 8.) folglich ist der Winkel ΔAZ gleich dem Winkel EAZ.

Der gegebene geradlinigte Winkel B A Γ ist also durch die Linie A Z halbiret. W. z. e. w.

10 Satz. Aufgabe.

Fig. 10. Eine gegebene begrenzte gerade Linie zu halbiren.

Die gegebene begrenzte gerade Linie sey AB; diese Linie soll halbiret werden.

Man errichte darauf (Satz 1.) das gleichseitige Dreyeck ABΓ, und (Satz 9.) halbire den Winkel AΓB durch die Linie ΓΔ, und ich behaupte, daß AB bey Δ halbiret ist.

Denn weil AΓ gleich ΓB, und ΓΔ beyden gemeinschaftlich ist, so sind die zwey Seiten AΓ, ΓΔ gleich den zwey Seiten BΓ, ΓΔ, jede einzeln genommen, und der Winkel AΓΔ ist gleich dem Winkel BΓΔ; folglich auch die (Satz 4.) Grundlinie AΔ gleich der Grundlinie BΔ.

Die gegebene begrenzte gerade Linie AB ist also bey Δ halbiret. W. z. e. w.

11 Satz.

11 Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie von einem darauf gegebenen Punkte, eine gerade Linie rechtwinklicht zu ziehen.

Die gegebene gerade Linie sey AB, der Fig. 31.
darauf gegebene Punkt Γ; man soll vom Punkte Γ auf der geraden Linie AB eine gerade Linie rechtwinklicht ziehen.

Man nehme auf AΓ den beliebigen Punkt Δ, (Satz 3.) mache ΓE gleich ΓΔ und errichte (Satz 1.) auf ΔE das gleichseitige Dreyeck ZΔE und verbinde Z und Γ, und ich behaupte, daß die Linie ZΓ auf der gegebenen geraden Linie AB von dem darauf gegebenen Punkte Γ rechtwinktlicht gezogen ist.

Denn weil ΓΔ gleich ΓE, und ΓZ beiden gemeinschaftlich ist, so sind die zwey Seiten ΔΓ, ΓZ gleich den zwey Seiten EΓ, ΓZ, jede einzeln genommen, und die Grundlinie ΔZ ist gleich der Grundlinie EZ; folglich (Satz 8.) der Winkel ΔΓZ gleich dem Winkel EΓZ, und beyde sind Nebenwinkel. Wenn aber (Erkl. 10.) eine gerade Linie auf einer geraden Linie gleiche Nebenwinkel macht, so ist jeder von beyden gleichen

Nebenwinkeln, ein rechter Winkel; folglich ist jeder von den beyden Winkeln ΔΓΖ, ΖΓΕ ein rechter Winkel.

Die gerade Linie ΖΓ ist also auf der gegebenen gerader Linie ΑΒ, von dem darauf gegebenen Punkte Γ, rechtwinktlicht gezogen. W. z. v. w.

12 Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie, von einem nicht darauf gegebenen Punkte, eine senkrechte gerade Linie fallen zu lassen.

Fig. 32. Die gegebene unbegrenzte gerade Linie sey ΑΒ, der nicht darauf gegebene Punkt Γ; man soll auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie ΑΒ, von dem nicht darauf gegebenen Punkte Γ, eine senkrechte gerade Linie fallen lassen.

Man nehme auf der andern Seite der Linie ΑΒ einen beliebigen Punkt Δ und beschreibe aus dem Mittelpunkte Γ und mit der Weite ΓΔ den Kreis ΕΖΗ und (Satz 10.) halbire ΕΗ bey Θ und ziehe die Linien ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ; so behaupte ich,

ich, daß auf die gegebene unbegrenzte gerade Linie AB, von einem nicht darauf gegebenen Punkte Γ, die senkrechte Linie ΓΘ gefället ist.

Denn weil HΘ gleich ΘE, und ΘΓ gemeinschaftlich ist, so sind die zwey HΘ, ΘΓ gleich den zweyen EΘ, ΘΓ, jede einzeln genommen, und die Grundlinie (Erkl. 15.) ΓH ist gleich der Grundlinie ΓE; folglich (Satz 8.) ist der Winkel ΓΘH gleich dem Winkel EΘΓ und diese Winkel sind Nebenwinkel. Wenn aber eine gerade Linie auf einer geraden Linie gleiche Nebenwinkel macht, so ist jeder dieser gleichen Nebenwinkel, ein rechter Winkel, und die aufstehende gerade Linie heißt (ihre senkrechte Linie,) ihr Perpendikel.

Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie AB, ist also, von einem nicht darauf gegebenen Punkte Γ, die senkrechte Linie ΓΘ gefället worden. W. z. v. w.

13 Satz. Lehrsatz.

Steht eine gerade Linie auf einer geraden Linie, und macht Winkel, so sind es

zwey

zwey rechte, oder zwey rechten gleiche Winkel.

Fig. 33. Die eine gerade Linie, die auf ΓΔ stehet, sey AB, und mache die Winkel ΓBA und ABΔ, und ich behaupte: daß die Winkel ΓBA, ABΔ, zwey rechte, oder zwey rechten gleiche Winkel sind.

Ist nun der Winkel ΓBA gleich dem Winkel ABΔ, so sind es zwey (Erkl. 10.) rechte Winkel; wenn aber nicht, so errichte (Satz 11.) vom Punkte B auf ΓΔ den Perpendikel BE, so sind die Winkel ΓBE, EBΔ (Erkl. 10.) zwey rechte Winkel. Und weil der Winkel ΓBE den zwey Winkeln ΓBA, ABE gleich ist, so setze den gemeinschaftlichen EBΔ noch zu, und die Winkel ΓBE, EBΔ müssen den drey Winkeln ΓBA, ABE, EBΔ gleich seyn.

Ferner, weil der Winkel ΔBA den zwey Winkeln ΔBE, EBA gleich ist, so setze man noch den gemeinschaftlichen ABΓ zu, (Grds. 2.) und die Winkel ΔBA, ABΓ sind den dreyen ΔBE, EBA, ABΓ gleich. Es ist aber bewiesen, daß auch ΓBE, EBΔ denselben drey Winkeln gleich waren; Dinge aber, (Grds. 1.) die einem Dritten gleich, sind sich selber gleich;

gleich; folglich sind auch ΓBE, EBΔ gleich ΔBA, ABΓ. Aber ΓBE, EBΔ sind zwey rechte Winkel; folglich sind auch ΔBA, ABΓ zwey rechten gleiche Winkel.

Steht also eine gerade Linie auf einer geraden Linie, und macht Winkel, so sind es zwey rechte, oder zwey rechten gleiche Winkel. W. z. e. w.

14 Satz. Lehrsatz.

Wenn an einem Punkte einer geraden Linie zwey andere gerade Linien, nicht nach einerley Seite gezogen, Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegen sie in einer geraden Linie an einander.

Denn man ziehe an dem Punkte B, der geraden Linie AB, die geraden Linien, BΓ, BΔ, die nicht nach einerley Seite gehen, und Nebenwinkel machen ABΓ, ABΔ, die zwey rechten gleich sind, so behaupte ich, daß BΔ mit ΓB in einer geraden Linie liegt. Fig. 34.

Denn liegt BΔ mit ΓB nicht in einer geraden Linie, so liege (Fordr. 2.) BE mit ΓB in einer geraden Linie.

Weil

Weil nun AB auf der geraden Linie ΓBE stehet, so sind (Satz 13.) die Winkel ABΓ, ABE zwey rechten gleich; aber auch ABΓ, ABΔ sind zwey rechten gleich. Die Winkel ΓBA, ABE sind also den Winkeln ΓBA, ABΔ gleich. Man ziehe den gemeinschaftlichen ABΓ ab, (Grds. 3.) so ist der übrige Winkel ABE dem übrigen ABΔ gleich; der kleinere dem größern, (Grds. 9.) das unmöglich ist. BE liegt also mit ΓB nicht in einer geraden Linie. Auf ähnliche Art läßt sichs beweisen, daß es auch keine andere ausser BΔ seyn kann; folglich liegt BΔ mit ΓB in einer geraden Linie.

Wenn also an einem Punkte einer geraden Linie, zwey andere gerade Linien, nicht nach einerley Seite gezogen werden, und Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegen sie in einer geraden Linie an einander. W. z. e. w.

15 Satz. Lehrsatz.

Wenn sich zwey gerade Linien schneiden, so machen sie gleiche Scheitelwinkel.

Fig. 35. Die zwey geraden Linien AB, ΓΔ mögen sich am Punkte E schneiden, so behaup-

haupte ich, daß der Winkel ΑΕΓ dem Winkel ΔΕΒ, und der Winkel ΓΕΒ dem Winkel ΑΕΔ gleich ist.

Denn weil die gerade Linie ΑΕ auf der geraden Linie ΓΔ stehet, und die Winkel ΓΕΑ, ΑΕΔ macht, so (Satz 13.) sind diese Winkel ΓΕΑ, ΑΕΔ zwey rechten gleich. Ferner, weil die gerade Linie ΔΕ auf der geraden Linie ΑΒ stehet, und die Winkel ΑΕΔ, ΔΕΒ macht, so sind auch diese Winkel zwey rechten gleich. Es ist aber bewiesen, daß auch die Winkel ΓΕΑ, ΑΕΔ zwey rechten Winkeln gleich sind: folglich sind die Winkel ΓΕΑ, ΑΕΔ gleich den Winkeln ΑΕΔ, ΔΕΒ. Man ziehe (Grds. 3.) den gemeinschaftlichen Winkel ΑΕΔ davon ab, so bleibt der Winkel ΓΕΑ, gleich dem Winkel ΔΕΒ, übrig. Auf ähnliche Art wird auch bewiesen, daß der Winkel ΓΕΒ dem Winkel ΔΕΑ gleich sey.

Wenn sich also zwey gerade Linien schneiden, so machen sie gleiche Scheitelwinkel. W. z. e. w.

Zusatz.

Hieraus ergiebt sich, daß gerade Linien, so viel ihrer sind, die sich schneiden, am Schnit-

Schnitte Winkel machen, die vier rechten gleich sind.

16 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äußere Winkel größer, als jeder der beyden innern und gegenüberstehenden.

Fig. 36. Das Dreyeck sey ABΓ, man verlängere die eine Seite desselben BΓ nach Δ, und ich behaupte: daß der äußere Winkel AΓΔ größer sey, als jeder der beyden innern und gegenüberstehenden Winkel ΓBA, BAΓ.

Man (Satz 10.) halbire die Seite AΓ bey E, ziehe BE, verlängere sie bis Z und mache EZ gleich BE; verbinde ZΓ und verlängere AΓ bis H.

Da nun AE gleich EΓ, und BE gleich EZ ist, so sind die zwey Seiten AE, EB gleich den zwey Seiten ΓE, EZ, jede einzeln genommen, und der Winkel AEB gleich (Satz 15.) dem Winkel ZEΓ; denn es sind Scheitelwinkel. Mithin (Satz 4.) ist die Grundlinie AB gleich

gleich der Grundlinie ZΓ, und das Dreyeck ABE ist gleich dem Dreyeck ZEΓ, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüberstehen; folglich auch der Winkel BAE dem Winkel EΓZ. Es ist (Grds. 9.) aber EΓΔ größer als EΓZ, folglich ist auch der Winkel AΓΔ größer als der Winkel BAE.

Halbiret man auch BΓ, so wird auf ähnliche Art bewiesen, daß auch der Winkel BΓH, das ist, (Satz 15.) der Winkel AΓΔ (als Scheitelwinkel von ihm) größer sey als ABΓ.

In jedem Dreyeck also, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äußere Winkel größer, als jeder der beyden innern und gegenüberstehenden. W. z. e. w.

17 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke sind jede zwey Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte.

Fig. 37. Das Dreyeck sey ΑΒΓ, so behaupte ich, daß jede zwey Winkel darinn zusammengenommen kleiner sind als zwey rechte.

Denn man verlängere ΒΓ bis Δ. Weil nun der äußere Winkel ΑΓΔ des Dreyecks ΑΒΓ größer ist, (Satz 16.) als der innere und gegenüberstehende ΑΒΓ, so setze man den gemeinschaftlichen ΑΓΒ hinzu, so sind die Winkel ΑΓΔ, ΑΓΒ größer als ΑΒΓ, ΒΓΑ. Aber ΑΓΔ, ΑΓΒ sind zwey rechten gleich, (Satz 13.) folglich sind ΑΒΓ, ΒΓΑ kleiner als zwey rechte. Auf ähnliche Art beweiset man, daß auch ΒΑΓ, ΑΓΒ kleiner als zwey rechte sind, und außerdem auch ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Es sind daher in jedem Dreyecke jede zwey Winkel zusammengenommen kleiner als zwey rechte. W. z. e. w.

18 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber.

Fig. 38. Das Dreyeck sey ΑΒΓ, in welchem die Seite ΑΓ größer seyn soll, als ΑΒ,

und

und ich behaupte, daß auch der Winkel ΑΒΓ größer seyn muß, als der Winkel ΒΓΑ.

Denn wenn ΑΓ größer ist, als ΑΒ, so mache (Satz 3.) ΑΔ gleich ΑΒ und ziehe ΒΔ.

Weil nun der Winkel ΑΔΒ ein äußerer Winkel des Dreyecks ΒΔΓ ist, so ist er auch größer, (Satz 16.) als der innere und gegenüberstehende ΔΓΒ. Aber der Winkel ΑΔΒ ist gleich dem Winkel ΑΒΔ, (Satz 5.) weil die Seite ΑΒ auch der Seite ΑΔ gleich ist. ΑΒΔ ist also auch größer als ΑΓΒ; folglich muß der Winkel ΑΒΓ noch weit größer seyn als ΑΓΒ. (denn ΔΒΓ ist dazu gekommen.)

In jedem Dreyecke steht also der größern Seite der größere Winkel gegenüber. W. z. e. w.

19 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke steht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Das Dreyeck sey ΑΒΓ, in welchem der Winkel ΑΒΓ größer ist als der Win- Fig. 39.
kel

kel ΒΓΑ, und ich behaupte, daß auch die Seite ΑΓ größer ist, als die Seite ΑΒ.

Denn ist sie es nicht, so ist die Seite ΑΓ der Seite ΑΒ entweder gleich oder kleiner. Die Seite ΑΓ sey der Seite ΑΒ gleich; so muß auch der Winkel ΑΒΓ dem Winkel ΑΓΒ gleich seyn. (Satz 5.) Er ist es aber nicht; die Seite ΑΓ ist also der Seite ΑΒ nicht gleich. ΑΓ aber ist auch nicht kleiner, als ΑΒ; sonst müßte auch der Winkel ΑΒΓ kleiner, (Satz 18.) als der Winkel ΑΓΒ seyn. Er ist es aber nicht, folglich ist auch ΑΓ nicht kleiner als ΑΒ. Es ist schon erwiesen, daß sie auch nicht gleich sind; ΑΓ muß also größer als ΑΒ seyn.

In jedem Dreyecke steht also dem grössern Winkel auch die größere Seite gegenüber. W. z. e. w.

20 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammengenommen größer, als die dritte.

Das Dreyeck sey ΑΒΓ, und ich be- Fig. 40.
haupte, daß in dem Dreyeck ΑΒΓ jede zwey Seiten zusammengenommen größer sind, als die dritte; ΒΑ, ΑΓ ist also größer als ΒΓ; ΑΒ, ΒΓ größer als ΑΓ; ΒΓ, ΓΑ größer als ΑΒ.

Denn man verlängere ΒΑ bis Δ, und mache ΔΑ (Satz 3.) gleich ΓΑ, und verbinde ΔΓ.

Weil nun ΔΑ gleich ist ΑΓ, so ist auch der Winkel ΑΔΓ gleich (Satz 5.) dem Winkel ΑΓΔ; aber der Winkel ΒΓΔ ist größer als der Winkel ΑΓΔ, folglich ist derselbe Winkel ΒΓΔ auch größer als der Winkel ΑΔΓ. Weil nun in dem Dreyeck ΔΓΒ der Winkel ΒΓΔ größer ist als der Winkel ΒΔΓ, und dem größern (Satz 19.) Winkel die größere Seite gegenübersteht: so ist die Seite ΔΒ größer als die Seite ΒΓ. Aber ΔΒ ist gleich ΑΒ, ΑΓ; folglich ist ΑΒ, ΑΓ größer als ΒΓ. Auf ähnliche Art läßt sich auch beweisen, daß ΑΒ, ΒΓ größer sind, als ΓΑ, und ΒΓ, ΓΑ größer, als ΑΒ.

In jedem Dreyecke sind also jede zwey Seiten zusammengenommen größer, als die dritte. W. z. e. w.

21 Satz.

21 Satz. Lehrsatz.

Wenn von den Endpunkten irgend einer Seite eines Dreyecks innerhalb desselben zwey gerade Linien errichtet werden, so werden diese geraden Linien zwar kleiner, als die zwey übrigen Seiten des Dreyecks seyn, aber einen größern Winkel einschließen.

Fig. 41. Man lasse von den Endpunkten B, Γ, irgend einer Seite, als BΓ, des Dreyecks ABΓ, zwey gerade Linien BΔ, ΔΓ, innerhalb desselben sich vereinigen; so behaupte ich, daß BΔ, ΔΓ zwar kleiner sind, als die zwey übrigen Seiten BA, AΓ, des Dreyecks, aber einen größern Winkel einschließen, nehmlich den Winkel BΔΓ, der größer ist, als der Winkel BAΓ.

Man verlängere nur BΔ nach E.

Weil nun in jedem Dreyecke zwey Seiten zusammen genommen größer (Satz 20.) sind, als die dritte, so sind in dem Dreyecke ABE die zwey Seiten AB, AE größer, als BE; man setze die gemeinschaftliche EΓ hinzu, so ist BA, AΓ größer als BE, EΓ.

Weil

Weil ferner die zwey Seiten ΓE, EΔ des Dreyeckes ΓEΔ (Satz 20.) größer sind als ΓΔ, so setze man die gemeinschaftliche ΔB hinzu, und ΓE, EB sind größer, als ΓΔ, ΔB. Es ist aber bewiesen, daß BA, AΓ größer sind als BE, EΓ; folglich müssen BA, AΓ noch weit größer seyn, als BΔ, ΔΓ.

Weil ferner in jedem Dreyecke der äußere Winkel größer (Satz 16.) ist, als der innere und gegenüberstehende, so ist also in dem Dreyecke ΓΔE der äußere Winkel BΔΓ größer als der Winkel ΓEΔ, und aus demselben Grunde in dem Dreyeck ABE auch der äußere Winkel ΓEB größer als BAΓ. Es ist aber bewiesen, daß BΔΓ größer ist, als ΓEB; folglich muß der Winkel BΔΓ noch weit größer seyn als BAΓ.

Wenn also von den Endpunkten irgend einer Seite eines Dreyecks innerhalb deßelben zwey gerade Linien errichtet werden, so werden diese geraden Linien zwar kleiner als die zwey übrigen Seiten des Dreyecks seyn, aber einen größern Winkel einschliessen. W. z. e. w.

22 Satz. Aufgabe.

Aus drey geraden Linien, die drey gegebenen gleich sind, ein Dreyeck zu errichten; davon aber je zwey, wie man sie auch nimmt, zusammengenommen größer als die dritte seyn müssen.

Fig. 42. Die drey gegebenen geraden Linien sollen A, B, Γ seyn; davon je zwey, wie man sie auch nimmt, zusammengenommen größer als die dritte sind; A, B also ist größer als Γ, und A, Γ größer als B und endlich B, Γ größer als A; man soll aus drey A, B, Γ gleichen Linien ein Dreyeck errichten.

Man ziehe eine gerade Linie ΔE, bey Δ begrenzt, bey E aber unbegrenzt und schneide ΔZ (Satz 3.) gleich A ab; ZH aber gleich B und HΘ gleich Γ. Nun beschreibe man aus dem Mittelpunkte Z und mit der Weite ZΔ den (Fordr. 3.) Kreis ΔKΛ. Ferner beschreibe man aus dem Mittelpunkte H und mit der Weite HΘ den Kreis KΛΘ und ziehe die Linien KZ, KH, so behaupte ich, daß aus drey geraden Linien, die A, B, Γ gleich sind, das Dreyeck KZH errichtet ist.

Denn weil der Punkt Z der Mittelpunkt des Kreises ΔKΛ ist, so ist ZΔ (Erkl. 15.) gleich ZK; aber ZΔ ist gleich A und also auch KZ gleich A. Ferner weil der Punkt H der Mittelpunkt des Kreises ΛKΘ ist, so ist HΘ gleich HK; aber HΘ ist gleich Γ und also auch KH gleich Γ. Aber auch ZH ist gleich B; folglich sind die drey geraden Linien KZ, ZH, HK, gleich den drey gegebenen geraden Linien A, B, Γ.

Es ist also aus drey geraden Linien KZ, ZH, HK, die drey gegebenen A, B, Γ gleich sind, ein Dreyeck KZH errichtet. W. z. v. w.

23 Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie und auf einem sich darauf befindlichen Punkte einen geradlinigten Winkel zu errichten, der einem gegebenen geradlinigten Winkel gleich ist.

Die gegebene gerade Linie sey AB, und der sich darauf befindliche Punkt A; der gegebene geradlinigte Winkel aber ΔΓE: man soll auf der gegebenen geraden Linie AB und auf dem sich darauf befindlichen Fig. 43.

Punkte A einen geradlinigten Winkel errichten, der dem gegebenen geradlinigten ΔΓE gleich ist.

Man nehme auf den Linien ΓΔ, ΓE beliebige Punkte, etwa Δ, E, und verbinde Δ, E, und (Satz 22.) errichte aus drey geraden Linien, die den dreyen ΓΔ, ΔE, ΓE gleich sind, ein Dreyeck AZH so, daß ΓΔ gleich ist AZ, und ΓE gleich AH und ΔE endlich ZH.

Weil die zwey Seiten ΔΓ, ΓE den zwey Seiten ZA, AH gleich sind, jede einzeln genommen, und auch die Grundlinie ΔE der Grundlinie ZH gleich ist, so muß auch der Winkel ΔΓE dem (Satz 8.) Winkel ZAH gleich seyn.

Es ist also auf einer gegebenen geraden Linie AB, und auf einem sich darauf befindlichen Punkte A, ein geradlinigter Winkel ZAH, der einem gegebenen geradlinichten Winkel ΔΓE gleich ist, errichtet worden. W. z. v. w.

24 Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen, zwey Seiten des andern gleich sind, jede einzeln genommen; der Winkel aber

aber, den die gleichen Seiten einschließen, in dem einen größer ist, als in dem andern, so ist auch die Grundlinie des einen größer als die Grundlinie des andern.

Die Dreyecke sollen ABΓ, ΔEZ seyn, Fig. 44.
in welchen zwey Seiten AB, AΓ des einen, zwey Seiten ΔE, ΔZ des andern gleich sind, jede einzeln genommen, die eine AB nehmlich ΔE, die andere AΓ aber ΔZ; aber der Winkel BAΓ ist größer als der Winkel EΔZ, so behaupte ich: daß auch die Grundlinie BΓ größer ist, als die Grundlinie EZ.

Denn weil der Winkel BAΓ größer ist, als der Winkel EΔZ, so (Satz 23.) errichte man auf der geraden Linie ΔE und auf dem sich darauf befindlichen Punkte Δ den Winkel EΔH der dem Winkel BAΓ gleich ist, und ziehe ΔH gleich den (Satz 3.) zwey Seiten AΓ, ΔZ und verbinde HE, ZH.

Weil nun AB gleich ΔE, und AΓ gleich ΔH ist, so sind die zwey Seiten BA, AΓ gleich den zwey Seiten EΔ, ΔH, jede einzeln genommen, und der Winkel BAΓ ist gleich dem Winkel EΔ
H,

H, folglich die (Satz 4.) Grundlinie B Γ gleich der Grundlinie EH.

Weil ferner ΔH gleich ΔZ, so ist auch der Winkel ΔZH gleich (Satz 5.) dem Winkel ΔHZ, folglich ist der Winkel ΔZH größer als der Winkel EHZ, und noch weit größer ist der Winkel EZH, als der Winkel EHZ. Und weil EZH ein Dreyeck ist, so ist der Winkel EZH größer als der Winkel EHZ; dem größern (Satz 19.) Winkel steht aber die größere Seite gegenüber; die Seite EH ist also größer als EZ. EH aber ist BΓ gleich, folglich ist BΓ größer als EZ.

Wenn daher in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen, zwey Seiten des andern gleich sind, jede einzeln genommen, der Winkel aber, den die gleichen Seiten einschliessen, in dem einen größer ist, als in dem andern, so ist auch die Grundlinie des einen größer als die Grundlinie des andern. W. z. e. w.

25 Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen zwey Seiten des andern gleich sind,

sind, jede einzeln genommen, die Grundlinie des einen aber größer ist, als die Grundlinie des andern: so ist auch der Winkel, den die gleichen Seiten einschliessen, in dem einen größer als in dem andern.

Die zwey Dreyecke sollen ΑΒΓ, ΔΕΖ seyn, worin die zwey Seiten ΑΒ, ΑΓ den zwey Seiten ΔΕ, ΔΖ gleich sind, jede einzeln genommen, nehmlich die Seite ΑΒ der Seite ΔΕ, und die Seite ΑΓ der Seite ΔΖ; aber die Grundlinie ΒΓ sey größer als die Grundlinie ΕΖ; so behaupte ich, daß auch der Winkel ΒΑΓ größer ist als der Winkel ΕΔΖ. Fig. 45.

Denn ist er es nicht, so ist er ihm gleich, oder ist kleiner als er. Gleich ist nun aber der Winkel ΒΑΓ dem Winkel ΕΔΖ nicht; denn sonst müßte auch die (Satz 4.) Grundlinie ΒΓ der Grundlinie ΕΖ gleich seyn; die ist es aber nicht, folglich ist auch der Winkel ΒΑΓ dem Winkel ΕΔΖ nicht gleich. Er ist aber auch nicht kleiner; denn sonst würde auch die Grundlinie ΒΓ kleiner (Satz 24.) als die Grundlinie ΕΖ seyn; sie ist es aber nicht, folglich ist auch der Winkel ΒΑΓ nicht kleiner als der Winkel ΕΔΖ. Es ist bewiesen, daß er ihm auch nicht gleich

gleich ist; folglich muß der Winkel BAΓ größer seyn, als der Winkel EΔZ.

Wenn also in zwey Dreyecken zwey Seiten des einen zwey Seiten des andern gleich sind, jede einzeln genommen, die Grundlinie des einen aber größer ist, als die Grundlinie des andern: so ist auch der Winkel, den die gleichen Seiten einschließen, in dem einen größer als in dem andern. W. z. e. w.

26 Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel zwey Winkeln gleich sind, jeden einzeln genommen, und eine Seite einer Seite, sie liege nun an den gleichen Winkeln selber, oder stehe einem dieser gleichen Winkel gegenüber: so sind auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich, jede einzeln genommen und der dritte Winkel dem dritten Winkel.

Fig. 46. Die zwey Dreyecke sollen ABΓ, ΔEZ seyn, worinne die zwey Winkel ABΓ, BΓA den zwey Winkeln ΔEZ, EZΔ gleich sind jeden einzeln genommen, nehmlich der Winkel ABΓ ist gleich dem Winkel ΔEZ,

der

der Winkel ΒΓΑ dem Winkel ΕΖΔ; aber auch eine Seite sey einer Seite gleich, nehmlich Einmahl die Seite ΒΓ der Seite ΕΖ, die an den gleichen Winkeln liegen; so behaupte ich, daß auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sind, jede einzeln genommen, nehmlich ΑΒ gleich ΔΕ, und ΑΓ gleich ΔΖ und der übrige Winkel ΒΑΓ dem übrigen Winkel ΕΔΖ.

Denn wenn die Seite ΑΒ der Seite ΔΕ ungleich ist, so ist eine von ihnen größer. Die größere sey ΑΒ, und man schneide (Satz 3.) ein Stück ΗΒ, das ΔΕ gleich ist, davon ab, und ziehe ΗΓ.

Weil nun ΒΗ gleich ist ΔΕ, und ΒΓ gleich ΕΖ, so sind auch die zwey ΒΗ, ΒΓ gleich den zweyen ΔΕ, ΕΖ, jede einzeln genommen, und der Winkel ΑΒΓ ist gleich dem Winkel ΔΕΖ, mithin die Grundlinie ΗΓ gleich (Satz 4.) der Grundlinie ΔΖ, und das Dreyeck ΗΓΒ dem Dreyeck ΔΕΖ, und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, die gleichen Seiten gegenüberstehen, folglich der Winkel ΗΓΒ dem Winkel ΔΖΕ. Aber der Winkel ΔΖΕ ist nach der Voraussetzung gleich dem

Win-

Winkel ΒΓΑ, und ΒΓΗ ist also ΒΓΑ, der kleinere dem größern gleich, und das ist unmöglich. ΑΒ ist also ΔΕ nicht ungleich; folglich gleich. Aber auch ΒΓ ist gleich ΕΖ, und die zwey Seiten ΑΒ, ΒΓ den zwey Seiten ΔΕ, ΕΖ jede einzeln genommen, und der Winkel Β Γ gleich dem Winkel ΔΕΖ; folglich auch die Grundlinie ΑΓ der (Satz 4.) Grundlinie ΔΖ, und der übrige Winkel ΒΑΓ dem übrigen Winkel ΕΔΖ.

Aber zweytens mögen die Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberstehen, gleich seyn, nehmlich ΑΒ sey gleich ΔΕ, und ich behaupte wieder, daß auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sind, als ΑΓ gleich ΔΖ, und ΒΓ gleich ΕΖ, und ausserdem noch der übrige Winkel ΒΑΓ dem übrigen Winkel ΕΔΖ.

Denn wenn ΒΓ ungleich ist ΕΖ, so ist eine von ihnen größer; es sey, wenn möglich, Β Γ größer. Man schneide daher (Satz 3.) ein Stück ΒΘ, gleich ΕΖ ab, und ziehe ΑΘ.

Weil nun ΒΘ gleich ist ΕΖ, und ΑΒ gleich ist ΔΕ, und also die zwey Seiten ΑΒ, ΒΘ gleich den zwey Seiten ΔΕ, ΕΖ, jede ein-

einzeln genommen, und auch gleiche Winkel einschließen, so ist auch die Grundlinie ΑΘ gleich der (Satz 4.) Grundlinie ΔΖ, und das Dreyeck ΑΒΘ ist gleich dem Dreyecke ΔΕΖ, und die übrigen Winkel sind gleich den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüberstehen; mithin ist der Winkel ΒΘΑ gleich dem Winkel ΕΖΔ. Aber der Winkel ΕΖΔ ist gleich dem Winkel ΒΓΑ, und der Winkel ΒΘΑ also gleich dem Winkel ΒΓΑ, also des Dreyecks ΑΘΓ äußerer (Satz 16.) Winkel, nehmlich ΒΘΑ, ist gleich dem innern und gegenüberstehenden ΒΓΑ; welches unmöglich ist. ΒΓ ist also ΕΖ nicht ungleich; mithin gleich. Aber auch ΑΒ ist gleich ΔΕ, und die zwey Seiten ΑΒ, ΒΓ den zwey Seiten ΔΕ, ΕΖ, jede einzeln genommen, und schließen gleiche Winkel ein; folglich ist die Grundlinie ΑΓ gleich (Satz 4.) der Grundlinie ΔΖ, und das Dreyeck ΑΒΓ ist gleich dem Dreyeck ΔΕΖ, und der übrige Winkel ΒΑΓ dem übrigen Winkel ΕΔΖ.

Wenn daher in zwey Dreyecken zwey Winkel zwey Winkeln gleich sind, jeden einzeln genommen, und eine Seite einer Seite, sie liege nun an den gleichen Winkeln

keln selber oder stehe einem dieser gleichen Winkel gegenüber: so sind auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich, jede einzeln genommen, und der dritte Winkel dem dritten Winkel. W. z. e. w.

27 Satz. Lehrsatz.

Wenn auf zwey gerade Linien eine dritte fällt und gleiche Wechselwinkel macht, so sind die geraden Linien einander parallel.

Fig. 47. Denn es falle auf die zwey geraden Linien AB, ΓΔ eine dritte EZ und mache gleiche Wechselwinkel, nehmlich AEZ, EZΔ, so behaupte ich, daß AB mit ΓΔ parallel ist.

Sind sie es nicht, so werden die verlängerten AB, ΓΔ an der Seite BΔ oder AΓ zusammenfallen. Man verlängere sie, und lasse sie an der Seite BΔ bey H zusammen fallen.

Nun ist der äußere Winkel AEZ des Dreyecks EHZ größer (Satz 16.) als der innere und gegenüberstehende Winkel EZH; aber auch gleich, und das ist unmöglich. Die verlängerten AB, ΓΔ fallen

fallen also an der Seite BΔ nicht zusammen. Auf ähnliche Art wird auch bewiesen, daß sie nicht an der Seite ΑΓ zusammenfallen können. Linien aber die an keiner Seite, wenn sie verlängert werden, zusammenfallen, sind (Erkl. 35.) Parallellinien; AB ist also mit ΓΔ parallel.

Wenn also auf zwey gerade Linien eine dritte fällt und gleiche Wechselwinkel macht, so sind die geraden Linien einander parallel.

28 Satz. Lehrsatz.

Wenn auf zwey gerade Linien eine dritte fällt, und den äußern Winkel dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden Winkel gleich macht, oder auch die innern und an einer Seite liegenden zwey rechten gleich macht, so sind die geraden Linien einander parallel.

Denn es falle auf die beyden geraden Linien AB, ΓΔ, die dritte EZ, und mache den äußern Winkel EHB gleich dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden Winkel HΘΔ, oder auch die beyden innern an einer Seite liegenden Winkel BHΘ, HΘΔ zwey rechten gleich, so behaupte ich, daß AB parallel sey ΓΔ. Fig. 48

Denn weil der Winkel EHB gleich ist HΘΔ, aber EHB dem

(Satz

(Satz 15.) Scheitelwinkel $AH\Theta$ gleich ist, so ist auch $AH\Theta$ gleich $H\Theta\Delta$, denn sie sind Wechselwinkel; folglich ist AB (Satz 27.) parallel $\Gamma\Delta$.

Weil ferner $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$, zwey rechten Winkeln gleich sind; es sind (Satz 13.) aber $AH\Theta$, $BH\Theta$ auch zwey rechten Winkeln gleich, mithin sind auch $AH\Theta$, $BH\Theta$ gleich $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$. Man ziehe den gemeinschaftlichen $BH\Theta$ davon ab, so bleibt $AH\Theta$ übrig, der dem übrigen $H\Theta\Delta$ gleich ist; es sind auch Wechselwinkel; folglich (Satz 27.) ist AB parallel $\Gamma\Delta$.

Wenn daher auf zwey gerade Linien eine dritte fällt, und den äußern Winkel dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden Winkel gleich macht, oder auch die innern und an einer Seite liegenden zwey rechten gleich macht, so sind die geraden Linien einander parallel.

29 Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die auf Parallelen fällt, macht die Wechselwinkel einander gleich;

gleich; den äußern macht sie dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden Winkel gleich, und die innern, an derselben Seite liegenden, zwey rechten Winkeln.

Denn es falle auf die Parallelen AB, ΓΔ die dritte EZ, so behaupte ich, daß sie die Wechselwinkel AHΘ, HΘΔ einander gleich macht; den äußern Winkel EHB dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden HΘΔ; und endlich die innern an einer Seite liegenden BHΘ, HΘΔ zwey rechten Winkeln. Fig. 49.

Denn ist der Winkel AHΘ dem Winkel HΘΔ ungleich, so ist einer davon größer; AHΘ sey größer. Und weil AHΘ größer ist als HΘΔ, so setze man einen gemeinschaftlichen dazu, den Winkel BHΘ. Folglich sind AHΘ, BHΘ größer als BHΘ, HΘΔ. Aber AHΘ, BHΘ sind (Satz 13.) zwey rechten gleich, mithin sind auch BHΘ, HΘΔ kleiner als zwey rechte Winkel. Linien aber, die von kleinern als zwey rechten Winkeln aus verlängert werden, fallen, (Grds. 11.) wenn sie gehörig verlängert werden, zusammen. Sie fallen aber nicht zusammen,

men, weil sie als Parallelen angenommen sind; folglich ist der Winkel AHΘ dem Winkel HΘΔ nicht ungleich, sondern gleich.

Aber AHΘ ist (Satz 15.) gleich EHB, folglich ist auch EHB gleich HΘΔ.

Man nehme den gemeinschaftlichen Winkel BHΘ dazu; so sind die Winkel EHB, BHΘ gleich den Winkeln BHΘ, HΘΔ. Aber auch EHB, BHΘ sind zwey rechten (Satz 13.) gleich, folglich sind auch BHΘ, HΘΔ zwey rechten Winkeln gleich.

Wenn daher eine gerade Linie auf Parallelen fällt, so macht sie die Wechselwinkel einander gleich; den äußern macht sie dem innern und gegenüberstehenden und an derselben Seite liegenden Winkel gleich, und die innern, an derselben Seite liegenden, zwey rechten Winkeln. W. z. e. w.

30 Satz. Lehrsatz.

Linien, die einer dritten parallel sind, sind unter einander parallel.

Es

Es sey eine von den Parallelen AB, ΓΔ parallel EZ, so behaupte ich, daß auch AB parallel ist ΓΔ. Fig. 50.

Man lasse die gerade Linie HK auf sie fallen.

Weil nun auf die geraden Parallelen AB, EZ die gerade Linie HK gefallen ist, so ist der Winkel AHΘ gleich (Satz 27.) dem Winkel HΘZ

Ferner, weil auf die geraden Parallelen EZ, ΓΔ die gerade Linie HK gefallen ist, so ist auch der Winkel HΘZ gleich (Satz 28.) dem Winkel HKΔ. Es ist aber bewiesen, daß auch der Winkel AHK gleich sey dem Winkel HΘZ; folglich ist auch der Winkel AHK gleich HKΔ; denn sie sind Wechselwinkel. Folglich (Satz 29.) ist AB parallel ΓΔ.

Linien also, die einer dritten parallel sind, sind unter einander parallel. W. z. e. w.

31 Satz. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie mit einer gegebenen parallel ziehen.

Fig. 51. Der gegebene Punkt sey A, die gegebene gerade Linie BΓ, man soll durch den gegebenen Punkt A mit der gegebenen geraden Linie ΓB eine gerade Linie parallel ziehen.

Man nehme auf BΓ einen beliebigen Punkt Δ und verbinde AΔ. Man errichte (Satz 23.) an der geraden Linie ΔA und an dem darauf gegebenen Punkte A einen Winkel ΔAE der AΔΓ gleich ist und verlängere AE in derselben Richtung nach Z. Weil nun die gerade Linie AΔ auf zwey gerade Linien fällt und gleiche Wechselwinkel EAΔ, AΔΓ macht, so muß EZ parallel (Satz 27.) seyn BΓ.

Es ist also durch einen gegebenen Punkt A eine gerade Linie EAZ mit einer gegebenen geraden Linie BΓ parallel gezogen worden. W. z. v. w.

32 Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreyeck, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äußere Winkel den zwey innern und gegenüberstehenden Winkeln gleich, und die drey innern Winkel des Dreyecks zusammengenommen zwey rechten.

Das Dreyeck sey ΑΒΓ, man verlängere die eine Seite desselben ΒΓ nach Δ, und ich behaupte, daß der äußere Winkel ΑΓΔ den beyden innern und gegenüberstehenden ΓΑΒ, ΑΒΓ gleich ist, und die drey innern Winkel des Dreyecks, ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ zwey rechten Winkeln. Fig. 32.

Denn man ziehe (Satz 31.) durch den Punkt Γ die Linie ΓΕ parallel mit ΑΒ.

Weil nun ΑΒ parallel ist mit ΓΕ, und ΑΓ auf sie fällt, so sind (Satz 29.) die Wechselwinkel ΒΑΓ, ΑΓΕ einander gleich.

Ferner, weil ΑΒ mit ΓΕ parallel ist und ΒΔ auf sie fällt, so ist der äußere Winkel ΕΓΔ gleich dem innern und gegenüberstehenden ΑΒΓ. Es ist schon bewiesen, daß auch ΑΓΕ dem Winkel ΒΑΓ gleich ist; folglich ist der ganze äußere Winkel ΑΓΔ den zwey innern und gegenüberstehenden ΒΑΓ, ΑΒΓ gleich.

Man setze den gemeinschaftlichen ΑΓΒ dazu, so sind ΔΓΑ, ΑΓΒ den drey Winkeln ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ gleich. Aber ΑΓΔ, ΑΓΒ sind zwey (Satz 13.) rechten Winkeln gleich; folglich sind auch ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ zwey rechten Winkeln gleich.

In jedem Dreyeck also, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äußere Winkel den zwey innern und gegenüberstehenden Winkeln gleich, und die drey innern Winkel des Dreyecks zusammengenommen zwey rechten. W. z. e. w.

33 Satz. Lehrsatz.

Gerade Linien, die gleiche Parallelen nach einerley Seite verbinden, sind selbst gleich und parallel.

Fig. 53. Die gleichen Parallelen mögen AB, ΓΔ seyn, und die geraden Linien, die sie nach einerley Seite verbinden AΓ, BΔ, so behaupte ich, daß auch AΓ, BΔ gleich und parallel sind.

Man verbinde BΓ.

Weil nun AB parallel ist ΓΔ, und BΓ auf sie fällt, so sind (Satz 29.) die Wechselwinkel ABΓ, BΓΔ einander gleich; und weil AB gleich ist ΓΔ, und BΓ gemeinschaftlich, so sind die zwey Seiten AB, BΓ gleich den zwey Seiten ΓΔ, BΓ, und der Winkel ABΓ gleich dem Winkel BΓΔ, mithin die (Satz 4.) Grundlinie AΓ, gleich der Grundlinie BΔ, BΔ, und das Dreyeck ABΓ gleich dem Dreyeck BΓΔ, und die übrigen Winkel gleich den übrigen Winkeln, jeden einzeln genommen, so wie sie gleichen Seiten gegenüberstehen. Folglich ist der Winkel AΓB gleich dem Winkel ΓBΔ. Und weil die gerade Linie BΓ, die auf die zwey geraden Linien AΓ, BΔ fällt, gleiche Wechselwinkel macht, nehmlich AΓB, ΓBΔ, so ist (Satz 27.) also AΓ parallel BΔ, und, wie schon bewiesen ist, ihr auch gleich.

Gerade Linien also, die gleiche Parallelen nach einerley Seite verbinden, sind selber gleich und parallel. W. z. e. w.

34 Satz. Lehrsatz.

In Parallelogrammen sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich, und die Diagonale halbiret die Parallelogramme.

Das Parallelogram sey ABΓΔ, die Diagonale BΓ, und ich behaupte, daß die gegenüberstehenden Seiten und Winkel des Parallelogramms ABΓΔ einander gleich sind, und daß es die Diagonale BΓ halbiret. Fig. 54.

Denn

Denn weil AB parallel ist ΓΔ, und die gerade Linie BΓ darauf fällt, so sind die Wechselwinkel ABΓ, BΓΔ einander gleich.

Ferner, weil AΓ parallel ist BΔ, und die gerade Linie BΓ darauf fällt, so sind (Satz 29.) die Wechselwinkel AΓB, ΓBΔ wieder einander gleich. ABΓ, ΓBΔ sind also zwey Dreyecke, in welchen die zwey Winkel ABΓ, BΓA den zwey Winkeln BΓΔ, ΓBΔ gleich sind, jeden einzeln genommen, und die eine Seite der einen Seite, die nehmlich, die gleichen Winkeln gegenüberstehet, und beyden gemeinschaftlich ist, BΓ; mithin sind auch die übrigen Seiten (Satz 26.) den übrigen Seiten, und der noch übrige Winkel dem übrigen Winkel gleich. Folglich ist die Seite AB gleich ΓΔ, AΓ gleich BΔ und der Winkel BAΓ gleich dem Winkel BΔΓ. Und weil der Winkel ABΓ dem Winkel BΓΔ gleich ist, der Winkel ΓBΔ aber dem Winkel AΓB, so ist auch der ganze Winkel ABΔ gleich dem ganzen Winkel AΓΔ. Es ist aber schon bewiesen, daß der Winkel BAΓ dem Winkel BΔΓ gleich ist.

In

In Parallelogrammen sind also die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich.

Ich behaupte aber ferner, daß die Diagonale die Parallelogrammen auch halbiret.

Denn weil AB gleich ist ΓΔ, und BΓ beyden gemein ist, so sind die zwey Seiten AB, BΓ gleich den zwey Seiten ΔΓ, ΓB, jede einzeln genommen, und der Winkel ABΓ ist gleich dem Winkel BΓΔ, mithin (Satz 4.) die Grundlinie AΓ gleich der Grundlinie BΔ, und folglich auch das Dreyeck ABΓ gleich dem Dreyecke BΓΔ.

Die Diagonale BΓ halbiret also auch das Parallelogramm ABΓΔ, W. z. e. w.

35 Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Die Parallelogramme mögen ABΓΔ, EBΓZ seyn, die auf einerley Grundlinie Fig. 55.

BΓ

ΒΓ, und zwischen einerley Parallelen ΑΖ, ΒΓ stehen, und ich behaupte, daß ΑΒΓΔ gleich ist ΕΒΓΖ.

Denn weil ΑΒΓΔ ein Parallelogramm ist, so (Satz 34.) ist ΑΔ gleich ΒΓ; mithin aus derselben Ursache auch ΕΖ gleich ΒΓ, so daß auch ΑΔ gleich ist ΕΖ, und ΔΕ ist beyden gemeinschaftlich. Mithin ist die ganze (Grds. 2.) Linie ΑΕ gleich der ganzen Linie ΔΖ. Es ist aber auch ΑΒ gleich ΔΓ, also zwey Seiten ΕΑ, ΑΒ, den zwey Seiten ΖΔ, ΔΓ, jede einzeln genommen; und der Winkel ΖΔΓ ist gleich (Satz 29.) dem Winkel ΕΑΒ, der äußere dem innern; folglich ist die (Satz 4.) Grundlinie ΕΒ gleich der Grundlinie ΖΓ, und das Dreyeck ΕΑΒ gleich dem Dreyeck ΖΔΓ. Man ziehe das gemeinschaftliche ΔΗΕ davon ab, so bleibt das Trapezium ΑΒΗΔ übrig, das (Grds. 3.) dem andern Trapezium ΕΗΓΖ gleich ist. Man setze das gemeinschaftliche Dreyeck ΗΒΓ dazu, so ist das ganze Parallelogramm ΑΒΓΔ dem ganzen Parallelogramm ΕΒΓΖ gleich.

Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind also einander gleich. W. z. e. w.

36 Satz

36 Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Die Parallelogramme mögen ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ seyn, die auf gleichen Grundlinien ΒΓ, ΖΗ und zwischen einerley Parallelen ΑΘ, ΒΗ stehen, und ich behaupte, daß das Parallelogramm ΑΒΓΔ dem Parallelogramm ΕΖΗΘ gleich sey. Fig. 56.

Man ziehe die Linien ΒΕ, ΓΘ.

Weil nun ΒΓ gleich ist ΖΗ, und ΖΗ gleich ΘΕ, so ist auch ΒΓ gleich ΕΘ. Sie sind aber auch Parallelen; ΒΕ, ΓΘ verbinden sie; Linien aber, die (Satz 33.) gleiche Parallelen nach einerley Seite verbinden, sind auch gleiche Parallelen; folglich sind ΕΒ, ΓΘ gleiche Parallelen, und ΕΒΓΘ ist ein Parallelogramm, ΑΒΓΔ (Satz 35.) gleich; denn es hat mit ihm einerley Grundlinie ΒΓ, und steht mit ihm zwischen einerley Parallelen ΒΓ, ΑΘ.

Aus derselben Ursache ist auch ΕΖΗΘ dem nehmlichen ΕΒΓΘ gleich, so daß also auch das Parallelogramm ΑΒΓΔ dem Parallelogramm ΕΖΗΘ gleich ist.

Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind also auch einander gleich. W. z. e. w.

37 Satz. Lehrsatz.

Dreyecke auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Fig. 57. Die Dreyecke ΑΒΓ, ΔΒΓ mögen auf einerley Grundlinie ΒΓ und zwischen einerley Parallelen ΑΔ, ΒΓ sich befinden, so behaupte ich, daß das Dreyeck ΑΒΓ dem Dreyeck ΔΒΓ gleich ist.

Denn man verlängere ΑΔ nach beyden Seiten, nach den Punkten Ε, Ζ und ziehe von Β, parallel (Satz 31.) mit ΓΑ, die Linie ΒΕ; und von Γ, parallel mit ΒΔ, die Linie ΓΖ.

Jedes Dreyeck ist nun ein Parallelogramm geworden ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ, und ΕΒΓΑ ist (Satz 35.) gleich ΔΒΓΖ; denn

denn sie stehen auf einerley Grundlinie B Γ und zwischen einerley Parallelen BΓ, EZ, und das Dreyeck ABΓ ist die Hälfte des Parallelogramms EBΓA; denn die Diagonale AB halbiret es.

Das Dreyeck ΔBΓ aber ist die Hälfte des Parallelogramms ΔBΓZ; denn (Satz 34.) die Diagonale ΔΓ halbiret es auch. Die Hälften von gleichen Dingen sind aber einander gleich; folglich ist auch das Dreyeck ABΓ dem Dreyeck ΔB Γ gleich.

Dreyecke auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen sind also einander gleich. W. z. e. w.

38 Satz. Lehrsatz.

Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind einander gleich.

Die Dreyecke ABΓ, ΔEZ mögen auf gleichen Grundlinien BΓ, EZ und zwischen einerley Parallelen BZ, AΔ stehen, so behaupte ich, daß das Dreyeck ABΓ dem Dreyecke ΔEZ gleich ist. Fig. 58.

Man

Man verlängere $A\Delta$ an beyden Seiten bis H, Θ und ziehe von B, parallel (Satz 31.) mit ΓA, die Linie BH, und von Z, parallel mit ΔE die Linie $Z\Theta$.

Jedes ist nun ein Parallelogramm geworden, $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$, und $HB\Gamma A$ ist (Satz 36.) gleich $\Delta EZ\Theta$; denn sie stehen auf gleichen Grundlinien $B\Gamma$, EZ und zwischen einerley Parallelen, BZ, $H\Theta$, und das Dreyeck $AB\Gamma$ ist die Hälfte des Parallelogramms $HB\Gamma A$; denn (Satz 34.) die Diagonale AB halbiret es.

Das Dreyeck $ZE\Delta$ ist auch die Hälfte des Parallelogramms $\Delta EZ\Theta$; denn die Diagonale $Z\Delta$ halbiret es auch. Die Hälften von gleichen Dingen sind aber einander gleich, das Dreyeck $AB\Gamma$ ist folglich auch dem Dreyeck ΔEZ gleich.

Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind also einander gleich. W. z. e. w.

39 Satz. Lehrsatz.

Gleiche Dreyecke auf einerley Grundlinie und nach einerley Seite, stehen zwischen einerley Parallelen.

Die

Die gleichen Dreyecke mögen ΑΒΓ, ΔΒΓ seyn, die auf einerley Grundlinie ΒΓ und nach einerley Seite stehen, und ich behaupte, daß sie auch zwischen einerley Parallelen sich befinden. Fig. 59.

Denn man ziehe ΑΔ und ich behaupte, daß ΑΔ parallel ist ΒΓ.

Denn wenn nicht, so ziehe vom Punkte A die Linie ΑΕ parallel (Satz 31.) mit ΒΓ, und verbinde ΕΓ.

Das Dreyeck ΑΒΓ ist also (Satz 37.) gleich dem Dreyecke ΕΒΓ; denn es steht mit ihm auf einerley Grundlinie ΒΓ und zwischen einerley Parallelen ΒΓ, ΑΕ. Aber ΑΒΓ ist gleich ΔΒΓ, und folglich auch das Dreyeck ΔΒΓ dem Dreyeck ΕΒ Γ, das größere dem kleinern, und das ist unmöglich. Folglich ist ΑΕ nicht parallel mit ΒΓ. Auf ähnliche Art läßt sich auch beweisen, daß es keine andere, ausser ΑΔ seyn kann. ΑΔ ist also mit ΒΓ parallel.

Gleiche Dreyecke also auf einerley Grundlinie und nach einerley Seite, stehen zwischen einerley Parallelen. W. z. e. w.

40 Satz

40 Satz. Lehrsatz.

Gleiche Dreyecke auf gleichen Grundlinien, nach einerley Seite stehen zwischen einerley Parallelen.

Fig. 60. Die gleichen Dreyecke ΑΒΓ, ΓΔΕ sollen auf gleichen Grundlinien ΒΓ, ΓΕ und nach einerley Seite stehen, so behaupte ich, daß sie auch zwischen einerley Parallelen stehen.

Denn man ziehe ΑΔ, so behaupte ich, daß ΑΔ, parallel ist ΒΕ.

Denn gesetzt, es wäre nicht so, so ziehe vom Punkte Α die (Satz 31.) Linie ΖΑ, ΒΕ parallel, und verbinde ΖΕ.

Das Dreyeck ΑΒΓ ist also gleich (Satz 38.) dem Dreyecke ΖΓΕ; denn sie stehen auf einerley Grundlinien ΒΓ, ΓΕ und zwischen einerley Parallelen, ΒΕ, ΑΖ. Aber das Dreyeck ΑΒΓ ist gleich dem Dreyeck ΔΓΕ, und das Dreyeck ΔΓΕ ist also gleich dem Dreyecke ΖΓΕ, das größere dem kleinern, und das ist unmöglich. ΑΖ ist also nicht parallel mit ΒΕ. Auf gleiche Art läßt sich auch beweisen, daß

daß es keine andere ausser AΔ seyn kann. AΔ ist also BE parallel.

Gleiche Dreyecke also auf gleichen Grundlinien und nach einerley Seite stehen zwischen einerley Parallelen. W. z. e. w.

41 Satz. Lehrsatz.

Steht ein Parallelogramm mit einem Dreyeck auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks.

Das Parallelogramm ΑΒΓΔ habe mit dem Dreyeck ΕΒΓ einerley Grundlinie ΒΓ und stehe mit ihm zwischen einerley Parallelen ΒΓ, ΑΕ, so behaupte ich, daß das Parallelogramm ΑΒΓΔ das Doppelte des Dreyecks ΒΓ ist. Fig. 61.

Man verbinde ΑΓ.

Nun ist das Dreyeck ΑΒΓ gleich (Satz 73.) dem Dreyeck ΕΒΓ; denn es hat mit ihm einerley Grundlinie ΒΓ, und steht mit ihm zwischen einerley Parallelen ΒΓ, ΑΕ. Aber das Parallelogramm ΑΒΓΔ ist das Doppelte des Dreyecks ΑΒΓ; denn (Satz 34.)

34.) die Diagonale ΑΓ halbiret es; daß also das Parallelogramm ΑΒΓΔ auch das Doppelte des Dreyecks ΕΒΓ ist.

Steht also ein Parallelogramm mit einem Dreyeck auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreyecks. W. z. e. w.

42 Satz. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu errichten, das einem gegebenen Dreyecke gleich ist, mit einem, dem gegebenen gleichen, geradlinigten Winkel.

Fig. 62. Das gegebene Dreyeck sey ΑΒΓ, und der gegebene geradlinigte Winkel Δ, man soll ein Parallelogramm errichten, das dem gegebenen Dreyeck ΑΒΓ gleich ist, mit einem, dem bey Δ gegebenen gleichen, geradlinigten Winkel.

Man (Satz 10.) halbire ΒΓ bey Ε, und ziehe ΑΕ, und errichte auf der geraden Linie ΕΓ und an dem sich darauf befindlichen Punkte Ε, einen (Satz 23.) Winkel ΓΕΖ, der dem bey Δ gegebenen gleich ist, und ziehe (Satz 31.) von Α, mit ΕΓ paral-

parallel, die Linie AH; von Γ aber, mit ZE parallel, die Linie ΓH, und ZEΓH ist das verlangte Parallelogramm.

Weil BE gleich ist EΓ, so ist auch (Satz 38.) das Dreyeck ABE gleich dem Dreyeck AEΓ; denn sie stehen auf gleichen Grundlinien BE, EΓ, und zwischen einerley Parallelen BΓ, AH; folglich ist das Dreyeck ABΓ das doppelte des Dreyecks AEΓ. Aber auch das Parallelogramm ZEΓH ist (Satz 41.) das Doppelte des Dreyecks AEΓ; denn es hat mit ihm einerley Grundlinie EΓ, und steht mit ihm zwischen einerley Parallelen EΓ, AH. Das Parallelogramm ZEΓH ist also (Grds. 6.) dem Dreyecke ABΓ gleich, und hat auch den Winkel ΓEZ, der dem bey Δ gegebenen, gleich ist.

Es ist also ein Parallelogramm ZEΓH errichtet, das einem gegebenen Dreyeck ABΓ gleich ist, mit einem Winkel ΓEZ, der dem bey Δ gegebenen, gleich ist. W. z. d. w.

43 Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der Parallelogramme um die Diagonale einander gleich.

Es sey ΑΒΓΔ ein Parallelogramm und
Fig. 63. ΑΓ die Diagonale desselben; die Parallelogramme um dieselbe ΕΘ, ΖΗ, und die genannten Ergänzungen ΒΚ, ΚΔ, so behaupte ich, daß die Ergänzung ΒΚ gleich sey der Ergänzung ΚΔ.

Denn weil ΑΒΓΔ ein Parallelogramm ist, und ΑΓ seine Diagonale, so ist (Satz 34.) das Dreyeck ΑΒΓ gleich dem Dreyecke ΑΔΓ. Ferner, weil ΕΚΘΑ ein Parallelogramm ist, und ΑΚ seine Diagonale so ist das Dreyeck ΑΕΚ gleich dem Dreyeck ΑΘΚ. Aus derselben Ursache ist auch das Dreyeck ΚΖΓ gleich dem Dreyeck ΚΗΓ. Weil nun das Dreyeck ΑΕΚ gleich ist dem Dreyeck ΑΘΚ; das Dreyeck ΚΖΓ aber dem Dreyeck ΚΗΓ, so ist das Dreyeck ΑΕΚ mit dem Dreyeck ΚΗΓ gleich dem Dreyeck ΑΘΚ mit dem Dreyeck ΚΖΓ. Es ist aber auch das ganze Dreyeck ΑΒΓ gleich dem ganzen Dreyeck ΑΔΓ; folglich ist auch (Grds. 3.) die Ergänzung ΒΚ gleich der noch übrigen Ergänzung ΚΔ.

In

In jedem Parallelogramm sind daher die Ergänzungen der Parallelogramme um die Diagonale einander gleich. W. z. e. w.

44 Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Parallelogramm zu errichten, das einem gegebenen Dreyeck gleich ist, mit einem, dem gegebenen gleichen, geradlinigten Winkel.

Die gegebene gerade Linie sey AB, und Fig. 64. das gegebene Dreyeck Γ, der gegebene geradlinigte Winkel Δ; man soll auf der gegebenen geraden Linie AB ein Parallelogramm errichten, das dem gegebenen Dreyeck Γ gleich ist, mit einem, dem bey Δ gegebenen, gleichen Winkel.

Man errichte (Satz 42.) ein Parallelogramm BEZH, das dem Dreyeck Γ gleich ist, mit dem Winkel EBH, der dem bey Δ gleich ist; man setze in derselben Richtung BE an AB, und ziehe ZH nach Θ; und durch A ziehe, (Satz 31.) parallel mit BH, EZ, die Linie AΘ, und verbinde ΘB. Weil nun die gerade Linie ΘZ die beyden Parallelen AΘ, EZ schneidet, so sind (Satz 29.) die Winkel

ΑΘΖ, ΘΖΕ zwey rechten Winkeln gleich, mithin sind die Winkel ΒΘΗ, ΗΖΕ kleiner, als zwey rechte Winkel; Linien aber, (Grds. 11.) die von zwey Winkeln, die kleiner als zwey rechte sind, gehörig verlängert werden, fallen zusammen; ΘΒ, ΖΕ fallen also, gehörig verlängert, zusammen. Man verlängere sie (Fordr. 2.) und lasse sie bey Κ zusammenfallen, und ziehe durch den Punkt Κ die Linie ΚΛ, parallel (Satz 31.) mit den beyden ΕΑ, ΖΘ, und verlängere ΘΑ, ΗΒ nach Λ, Μ.

ΘΛΚΖ ist also ein Parallelogramm, ΘΚ seine Diagonale, ΑΗ, ΜΕ, die um sie liegenden Parallelogramme, und ΛΒ, ΒΖ die so genannten Ergänzungen; folglich ist ΛΒ gleich ΒΖ. Aber das Parallelogramm ΒΖ ist gleich dem Dreyeck Γ, mithin ist auch das Parallelogramm ΛΒ gleich dem Dreyeck Γ. Und weil der Winkel ΗΒΕ gleich ist (Satz 15.) dem Winkel ΑΒΜ, dieser Winkel ΗΒΕ aber dem Winkel Δ; so ist auch der Winkel ΑΒΜ, dem Winkel Δ gleich.

Es ist also auf einer gegebenen geraden Linie ΑΒ ein Parallelogramm ΛΒ errichtet, das einem gegebenen Dreyecke Γ gleich ist,

ist, mit einem Winkel ABM, der dem bey Δ gegebenen, gleich ist. W. z. v. w.

45 Satz. Aufgabe.

Einer gegebenen geradlinigten Figur ein gleiches Parallelogramm zu errichten, mit einem gegebenen geradlinigten Winkel.

Die gegebene geradlinigte Figur sey A ΒΓΔ, und der gegebene geradlinigte Winkel E; man soll ein der gegebenen geradlinigten Figur ΑΒΓΔ gleiches Parallelogramm errichten, mit einem, dem bey E gegebenen, gleichen Winkel. Fig. 65.

Man verbinde ΔB, und errichte (Satz 42.) ein Parallelogramm ZΘ, das dem Dreyeck ABΔ gleich ist, mit dem Winkel ΘKZ, der dem Winkel E gleich ist, und setze an die Seite HΘ das Parallelogramm HM, das dem Dreyeck ΔΒΓ gleich ist, mit dem Winkel HΘM, der dem Winkel E gleich ist.

Weil nun der Winkel E jedem der Winkel ΘKZ, HΘM gleich ist, so ist auch der Winkel ΘKZ dem Winkel HΘ M gleich. Man nehme den gemeinschaftlichen

lichen KΘH dazu, so sind die Winkel ZKΘ, KΘH gleich den Winkeln KΘH, HΘM, aber ZKΘ, KΘH sind (Satz 29.) zwey rechten Winkeln gleich, mithin sind auch KΘH, HΘM zwey rechten Winkeln gleich.

Es machen aber auf einer geraden Linie HΘ, und auf einem darauf gegebenen Punkte Θ, die zwey geraden Linien KΘ, ΘM, die nicht nach einerley Seite liegen, Nebenwinkel, die zwey rechten gleich sind, folglich liegt (Satz 14.) die Linie KΘ mit ΘM in einer geraden Linie. Weil nun ΘH die Parallelen KM, ZH schneidet, so sind (Satz 29.) die Wechselwinkel MΘH, ΘHZ einander gleich; Man nehme den gemeinschaftlichen ΘHΛ dazu, so sind folglich MΘH, ΘHΛ gleich ΘHZ, ΘHΛ. Aber die Winkel MΘH, ΘHΛ sind (Satz 29.) zwey rechten Winkeln gleich, mithin muß auch ZH mit HΛ in einer geraden Linie liegen. Weil nun ferner KZ gleich und parallel ist mit ΘH und ΘH mit MΛ, so ist (Grds. 1. Satz 30.) auch KZ gleich und parallel mit MΛ; es verbinden sie auch die geraden Linien KM, ZΛ; also KM, ZΛ sind auch (Satz 33.) gleich und parallel; folglich ist KZΛM ein Parallel rallelogramm. Weil nun das Dreyeck A B Δ gleich ist dem Parallelogramm ΘZ, das Dreyeck ABΓ aber dem Parallelogramm HM, so ist auch die ganze geradlinigte Figur ABΓΔ gleich dem Parallelogramm KZΛM.

Es ist also der gegebenen geradlinigten Figur ABΓΔ ein gleiches Parallelogramm KZΛM errichtet worden, mit dem Winkel ZKM, der dem gegebenen bey E gleich ist. W. z. e. w.

46 Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie ein Quadrat zu beschreiben.

Die gegebene gerade Linie sey AB, man soll auf dieser geraden Linie AB ein Quadrat beschreiben. Fig. 66.

Man errichte (Satz 11.) auf AB, von dem darauf befindlichem Punkte A, die senkrechte Linie AΓ; mache AΔ gleich (Satz 3.) AB, und aus dem Punkte Δ ziehe ΔE parallel (Satz 31.) mit AB; aus dem Punkte B aber ziehe BE parallel mit AΔ.

AΔ

AΔEB ist also ein Parallelogramm; AB ist gleich ΔE, und AΔ gleich BE. Aber AB ist auch gleich AΔ, folglich sind alle vier Seiten BA, AΔ, ΔE, BE einander gleich; AΔEB ist also ein gleichseitiges Parallelogramm. Ich behaupte, auch ein rechtwinklichtes. Denn weil die gerade Linie AΔ die Parallelen AB, ΔE schneidet, so sind die Winkel BAΔ, AΔE zwey rechten (Satz 29.) gleich; BAΔ aber ist ein rechter Winkel, folglich ist auch AΔE ein rechter. Die gegenüberstehenden Seiten und Winkel der Parallelogrammen (Satz 34.) sind ferner einander gleich, mithin sind auch die übrigen gegenüberstehenden Winkel ABE, BEΔ rechte Winkel, folglich ist AΔEB ein rechtwinklichtes Viereck, und, wie schon bewiesen, auch ein gleichseitiges.

Es ist also ein Quadrat, und ist auf der gegebenen geraden Linie AB errichtet. W. z. v. w.

47 Satz. Lehrsatz.

In rechtwinklichten Dreyecken ist das Quadrat der Seite, die dem rechten Winkel gegenüberstehet, gleich den Quadraten der Seiten, die den rechten Winkel einschließen.

Das

Das rechtwinklichte Dreyeck sey ΑΒΓ, Fig. 67.
das den rechten Winkel ΒΑΓ hat; ich behaupte, daß das Quadrat der Seite ΒΓ gleich ist den Quadraten der Seiten ΒΑ, ΑΓ.

Denn man errichte auf ΒΓ das Quadrat ΒΔΕΓ; auf ΒΑ, ΑΓ die Quadrate ΗΒ, ΘΓ, und aus dem Punkte Α ziehe man ΑΛ mit den beyden Linien ΒΔ, ΓΕ parallel, und verbinde ΑΔ, ΖΓ.

Weil nun jeder der Winkel ΒΑΓ, ΒΑΗ ein rechter Winkel ist, und also die beyden geraden Linien ΑΓ, ΑΗ auf der Linie ΒΑ, und auf dem sich darauf befindlichen Punkte Α, nicht nach einerley Seite gehen und Nebenwinkel machen, die zwey rechten gleich sind, so liegt ΓΑ mit ΑΗ in einer geraden Linie, und aus derselben Ursache auch ΑΒ mit ΑΘ. Weil ferner (Grds. 10.) der Winkel ΔΒΓ gleich ist ΖΒΑ, denn jeder ist ein rechter Winkel, so nehme man den gemeinschaftlichen ΑΒΓ dazu, so ist der ganze Winkel ΔΒΑ gleich dem ganzen Winkel ΖΒΓ; und weil die zwey Seiten ΔΒ, ΒΑ gleich sind den zwey Seiten ΓΒ, ΒΖ, jede einzeln genommen, und der Winkel ΔΒΑ gleich ist dem Winkel ΖΒΓ, so ist auch (Satz

4.) die Grundlinie $A\Delta$ gleich der Grundlinie $Z\Gamma$, und das Dreyeck $AB\Delta$ ist gleich dem Dreyeck $ZB\Gamma$. Von diesem Dreyeck $AB\Delta$ ist (Satz 41.) nun das Parallelogramm $B\Lambda$ das Doppelte; denn es hat mit ihm einerley Grundlinie $B\Delta$ und liegt mit ihm zwischen einerley Parallelen $B\Delta$, $A\Lambda$; von dem Dreyeck $ZB\Gamma$ aber ist das Parallelogramm AB das Doppelte, denn es hat wieder einerley Grundlinie mit ihm ZB und liegt zwischen einerley Parallelen ZB, $H\Gamma$: aber das Doppelte von gleichen Dingen ist sich gleich, folglich ist das Parallelogramm $B\Lambda$ gleich dem Quadrate HB.

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, wenn man AE, BK verbindet, daß auch das Parallelogramm $\Gamma\Lambda$ gleich sey dem Quadrate $\Theta\Gamma$; folglich ist das ganze Quadrat $\Delta B\Gamma E$ gleich den beyden Quadraten HB, $\Theta\Gamma$. Das Quadrat $B\Delta E\Gamma$ ist auf $B\Gamma$ errichtet, die Quadrate HB, $\Theta\Gamma$ auf BA, $A\Gamma$; folglich ist das Quadrat BE auf der Seite $B\Gamma$ gleich den beyden Quadraten HB, $\Theta\Gamma$ auf den Seiten BA, $A\Gamma$.

In rechtwinklichten Dreyecken also ist das Quadrat der Seite, die dem rechten Winkel gegenüberstehet, gleich den Quadraten drꝛten der Seiten, die den rechten Winkel einschließen. W. z. e. w.

48 Satz. Lehrsatz.

Wenn das Quadrat der einen Seite eines Dreyecks gleich ist den Quadraten der übrigen Seiten des Dreyecks, so ist der von den übrigen zwey Seiten eingeschlossene Winkel ein rechter Winkel.

Denn das Quadrat der einen Seite BΓ des Dreyecks ABΓ sey gleich den Quadraten der übrigen Seiten BA, AΓ, so behaupte ich, daß der Winkel BAΓ ein rechter Winkel ist. Fig. 62.

Denn man ziehe (Satz 11.) aus dem Punkte A die gerade Linie AΔ mit AΓ rechtwinklicht und mache AΔ gleich BA und verbinde ΔΓ.

Weil nun ΔA gleich ist AB, so ist auch das Quadrat von ΔA gleich dem Quadrate von AB. Man nehme noch ein gemeinschaftliches, das Quadrat von AΓ dazu, so sind die Quadrate von ΔA, AΓ gleich den Quadraten von BA, AΓ. Aber den Quadraten von ΔA, AΓ ist gleich (Satz 47.) das Quadrat von ΔΓ; denn

der

der Winkel ΔΑΓ ist ein rechter Winkel, und den Quadraten von ΒΑ, ΑΓ ist gleich das Quadrat von ΒΓ, denn so ist es angenommen; so ist also das Quadrat von ΔΓ gleich dem Quadrate von ΒΓ, mithin ist auch die Seite ΔΓ gleich der Seite ΒΓ. Und weil die Seite ΑΔ gleich ist der Seite ΑΒ, und ΑΓ gemeinschaftlich, so sind also die zwey Seiten ΑΔ, ΑΓ gleich den zwey Seiten ΒΑ, ΑΓ und die Grundlinie ΔΓ ist gleich der Grundlinie ΒΓ. Folglich (Satz 8.) ist der Winkel ΔΑΓ gleich dem Winkel ΒΑΓ. Aber ΔΑΓ war ein rechter Winkel, folglich ist auch ΒΑΓ ein rechter Winkel.

Wenn also das Quadrat der einen Seite eines Dreyecks gleich ist den Quadraten der übrigen Seiten des Dreyecks, so ist der von den übrigen zwey Seiten eingeschloßene Winkel ein rechter Winkel. W. z. e. w.

An-

Anmerkungen.

Anmerkungen.

Will man diese Euklidischen Elemente beym allerersten Unterrichte in der Geometrie gebrauchen, welches sehr wohl geschehen kann, so versäume man doch nicht, vorher den Aufsatz des Herrn H. R. Kästners im Braunschweigischen Journal 1788, July, über die Art Kindern Geometrie und Arithmetik beyzubringen, sorgfältig zu studiren. Seit 1788 verlegen und verlieren sich Journal-Stücke; ich schreibe also einige Stellen daraus ab.

„Selbst die strengen geometrischen Begriffe von Fläche, Linie, Punkt lassen sich, deucht mich, einem Kinde faßlich machen, wenn man seine Aufmerkmerksamkeit darauf lenken will. Daß die Schaale eines Apfels, ein Blatt Papier dünne Körper sind, auf beyden Seiten von Flächen begrenzt, läßt sich ja wohl sinnlich machen; aber eben so auch, daß man nicht darnach fragt, wie dick oder wie dünne ein Blatt Papier ist, wenn man eine Seite von ihm voll schreibt, und daß also die Seite eine Fläche des Blattes ist."

„Ich erinnere mich, vor dem eine Kinderfrage gelesen zu haben: Wie viel Ellen das Kind lang ist? Man nimmt die Elle der Quere, und fängt an das Kind mit der Breite zu messen; denn zum Vollenden wird es wohl nicht still halten. Weil aber auch das Kind einsehen wird, daß das keine Art ist mit Ellen zu messen, so wird es daraus lernen, wie man bey dem Stück Holz oder Eisen, das zur Elle dient, Länge, Breite und Dicke, als unterschiedene Namen einer und derselben Art von Abmessungen unterscheidet; es wird sehen, daß man an dem Maaßstabe, eine Abmessung, die man vorzüglich Länge nennt, braucht, ohne sich um die andern beyden zu bekümmern, und so den Begriff einer Linie bekommen, die so was ist, was die Elle wäre, wenn sie weder breit noch dick wäre."

„Auf den Punkt zu kommen, dürfte man nur etwas mit der Elle messen, und bey jeder Elle etwa einen Daumen breit zugeben; schwerlich

würde

würde das Kind die Messung richtig finden, und also von sich selbst darauf kommen, daß **nichts** zugegeben werden muß.

„So dächte ich käme das Kind darauf, daß zwischen dem Ende der ersten Elle und dem Anfange der zweyten **Nichts** seyn muß, wenn beyde zusammen zwey Ellen ausmachen sollen, und wenn man ihm sagt: da, wo die erste Elle anfängt, ist ihr Endpunkt, und wo die zweyte anfängt, ihr Anfangspunkt, so wird es schließen: der Punkt muß in Absicht des Raums, von welchem die Rede ist, **Nichts** seyn. Auch wird es fassen, daß der Endpunkt und Anfangspunkt nur ein Punkt, zweymahl genannt sind, und folglich nicht mehr sind, als einer allein, der Nichts ist; daß also Punkte an einander, ohne Linien zwischen ihnen, nichts aneinander sind, die kein **Etwas** ausmachen; daß eine Schnur aneinander gereiheter Korallen, keinen Raum einnehmen würde, wenn keine einzelne Koralle einen Raum einnähme." —

„Ob ich diese Lehren mit einem Kinde alle nach der Ordnung durchgehen würde, ehe ich es Linien ziehen, Winkel und ebene Figuren zeichnen ließe, das käme auf die Denkungsart des Kindes an. Wäre dieselbe nicht zur anhaltenden Aufmerksamkeit auf diese vorläufigen Kenntnisse gerichtet, so würde ich wissen, sie **ihm nach und nach bey einzelnen Lehren, als Exempel davon beyzubringen.**"

„Die Grundbegriffe und Grundlehren der Mathematik gehören zum gemeinen Menschenverstande, der sie sich allemahl entwickelt, wo ihm Empfindungen und Bedürfniß Anlaß dazu geben.“

„Jedes Mädchen, das sich ein Papier zu einem gegebenen Muster abschneidet, handelt nach dem Satze: Figuren, die einander decken, sind gleich und ähnlich. Man lasse also das Mädchen ein Muster abschneiden, und sage ihm, wenn es Geometrie lernen soll, darnach den Satz, nach welchem es gehandelt hat; das ist klüger, als ihm den Satz zuerst vorzutragen und zu veranlassen, daß es über dem Bestreben, seine Worte in dem Gedächtniße zu behalten, vielleicht die Scheere unrecht führt und das Muster verstümmelt.„

Noch eine einzige Stelle für die Euklidischen Elemente. „Kindergeometrien hat man mehr als eine; es könnte aber wohl geschehen, daß ich keine von ihnen wählte, sondern bey der ältesten Kindergeometrie bliebe, die man in allen Sprachen hat. Euklides erste vier Bücher lassen sich einem Kinde verständlich machen, wenn es nur die Geduld hat, von Satz zu Satz fortzugehen. Damit diese Geduld nicht zusehr angestrengt wird, könnten wohl etwas schwerere Beweise ausgesetzt werden, z. B. der vom Pythagorischen Lehrsatze, der oft bekanntermassen nicht völlig erreichte Gipfel der Geometrie Erwachsener. Auch geometrische Wahrheiten

lassen

lassen sich dem Kinde so vortragen, wie moralische Horazen von seinem Vater vorgetragen wurden, in Exempeln und mit der Erinnerung: Sapiens causas tibi reddet." —

Einen Satz mit der Nachricht, daß der Beweis dem Anfänger zu schwer ist, blos erzählen, ist besser, als einen unvollkommenen oder gar unrichtigen Beweis geben. — Ich darf auch wohl sagen, daß einem Knaben, der sonst Kopf und Neigung zur Geometrie hat, in den ersten vier Büchern Euklides kein Beweis zu schwer seyn wird, wenn des Lehrers Vortrag gehörige Deutlichkeit und Lebhaftigkeit hat, und der Lernende die Figur selbst zeichnet. Bey dem Zeichnen fühlt man, wie immer Eins das andere bestimmt, und wird also auf die Gedanken gebracht, die zum Beweise führen. — Beym Zeichnen wird er gewahr, wie er es machen muß, daß etwas Verlangtes heraus kommt, und worinn er gefehlt hat, wenn er das Verlangte nicht erhält."

Dieß wäre die magna charta, nach welcher diese Euklidischen Elemente müßten behandelt werden; schwerlich dürfte es jemanden gereuen, Versuche darüber angestellt zu haben.

Ueber die zwölf ersten Erklärungen.

Sie setzen mit den übrigen Erklärungen nichts weiter, als die gewöhnlichen Wahrnehmungen voraus; sie entfernen nur das hier unnöthige. Jeder weiß, was ein Punkt ist; an Länge und Breite soll er dabey nur nicht denken.

Mit der Linie verhält sich's eben so. Jedes Kind weiß, was eine Reihe oder Linie Soldaten, Bäume oder Buchstaben ꝛc. ist, und es wird leicht begreifen, daß nicht die Soldaten ꝛc. die Linien sind, wie oben bey der Korallenschnur. Denn die Linie bleibt auch noch, wenn nichts von alle dem mehr da ist. „Das ist die Linie, wo jene Dinge standen" heißt es, ohne auf Breite zu sehen; also nur eine Länge ohne Breite bleibt in der Seele zurück.

Die dritte Erklärung berichtiget diese zwey noch mehr. Das Ende der Linie ist ein Punkt; also ohne Länge, denn er ist das Ende, aber auch ohne Breite, denn die Linie hatte keine Breite. Was keine Länge und Breite hat, kann sich nicht theilen lassen; der Punkt ist also ein Etwas ohne Theile, ein Nichts. Sichtbare Zeichen lassen sich wohl von beyden machen, so gut als die Namen, Punkt, Linie, hörbare Zeichen von beyden sind; aber wie das Wort, Punkt oder Linie, der Punkt oder die Linie nicht selber ist, so sollen es auch die Spuren einer Spitze, einer Feder ꝛc. nicht seyn. Mithin ist es willkührlich, den Punkt durch einen Stich, Koralle, Kugel ꝛc. abzubilden, und die Linie durch abgefärbtes Bley, durch Schnuren, Straßen ꝛc. zu bezeichnen; nur soll man bey dieser keine Breite und bey jenem keine Länge und Breite annehmen.

Längen lassen sich aber auf verschiedene Art denken und bezeichnen. Man kann sich ihr Ende, ihre Mitte und ihre kleinsten Theile gerade so denken und abbilden, wie ihr Anfang war, aber eben so leicht auch anders. Man kann sie sich aufwärts oder niederwärts, scharf, gebogen ꝛc. mit einem Worte: gleichförmig, auf einerley Art oder von alle dem verschieden denken und abbilden. Daher die vierte Erklärung: die gerade Linie liegt zwischen ihren Punkten gleichförmig oder auf einerley Art.

Die Erklärung einer krummen Linie, die hier so gut vorbereitet war, scheint Euklides absichtlich vermieden zu haben.

Aus dem bisher gesagten ergiebt sich die nöthige Berichtigung des Begriffs einer Fläche auch leicht; nur auf Länge und Breite soll bey ihr gesehen werden. Ihre Enden sind Linien. Soll es eine ebene Fläche seyn, so müssen sich diese Linien eben so gleichförmig, und auf dieselbe Art darauf denken oder zeichnen lassen, wie es von den geraden

den Linien verlangt wurde. Man denke an die Fläche eines Würfels, eines Tisches ꝛc. nur nicht als an Theile dieser Körper.

Die Anzahl, Lage, Verbindung der Linien auf solchen Flächen kann nun äußerst mannigfaltig seyn. Schon zwey Linien lassen sich darauf auf mancherley Art denken. Denn neigen sich zwey gerade Linien so gegen einander, daß sie sich berühren, so machen sie einen Winkel.*) Man lasse es übrigens bey der folgenden Bestimmung, durch rechte, spitze und stumpfe, bewenden und behellige den Anfänger noch nicht mit dem gewöhnlichen Ausmessen derselben; es schleichen sich dadurch Vorstellungen ein, die ihn lange vergeblich quälen, und sich nachher nur späte und mit Mühe wieder entfernen lassen. Will man die Uebung im Zeichnen ja etwas lebhafter machen, so verbinde man damit noch die Bezeichnung der Winkel durch Buchstaben und sage ihnen z. B. daß, wenn sich mehr Winkel in einem Punkte vereinigen, jeder mit drey Buchstaben bezeichnet werde, doch so, daß der mittelste jedesmahl an den Scheitel oder an die Spitze dessel-

*) An dieser Definition ist gekünstelt worden. Vielleicht enthielt sie Anfangs nichts weiter, als: Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐςὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις. Nach und nach aber wurde sie so überladen und verklausulirt, daß man τῶν γραμμῶν sogar wiederhohlen mußte.

desselben müsse geschrieben und auch so gelesen werden. Der erste Winkel Fig. 1. hieße also BΔA, oder AΔB; der zweyte AΔE oder EΔA; der dritte EΔΓ oder ΓΔE. Desgleichen, daß die Lage des Winkels nichts ändere, daß es dieselben Winkel bleiben, wenn sie auch abwärts gekehrt werden; daß die senkrechte Linie in der zehnten Erklärung eben so gut auch von unten herauf oder seitwärts auf die gerade Linie fallen könne, ohne das mindeste in der Sache zu ändern.

Ueber 13 — 23.

Der Raum bekömmt nun Umriß. Mit den bisherigen zwei Linien lies sich noch kein Raum einschließen. Nun erst erwartet man den Begriff einer Begrenzung. Aber ohne die Kreislinie lies sich durchaus nichts weiter ausrichten. Sie ist für das künftige, was der Punct für das bisherige war; daher nun die drei- vier- und vielseitigen Figuren. Vortheile bei ihrer Verzeichnung finden sich in Müllers Geometrie für Kinder mit Kästners Vorrede, 1778, für gegenwärtige Absicht hinlänglich, wenn sie hie oder da nöthig seyn sollten. Ihre Gründe giebt Euklides weiter unten selber an.

Ueber 24 — 29.

Die Dreiecke unterscheiden sich also durch ihre

Seiten in	und Winkel in
gleichseitige, gleichschenklichte, ungleichseitige.	recht-, spitz- und stumpfwinklichte.

Diese Dreiecke verstatten ähnliche Uebungen als oben die Winkel. Man stelle ihre Spitzen auch nach verschiedenen Seiten, aufwärts und niederwärts ꝛc.

Ueber 30 — 34.

Diese vierseitigen Figuren unterscheiden sich ebenfalls durch ihre Seiten und Winkel von einander. Nur die Trapezien machen eine Ausnahme. Es sind also

die Vierecke

rechtwinklicht		schiefwinklicht	
gleichseitig,	ungleichseitig.	gleichseitig,	ungleichseitig.
Quadrat.	Rechteck.	Raute.	Länglichte Raute.

Ueber die Forderungen und Grundsätze.

Ich möchte diese Erklärungen mit den nun folgenden Forderungen und Grundsätzen, als ersten Cursus, als Progymnasmen, wenigstens für dieses erste Buch ansehen; jedoch ohne die andern Ansichten, die sie zulassen, dadurch im mindesten verrücken zu wollen; etwa so, wie in der eben angeführten Kindergeometrie von Müller geschehen ist. Man könnte nun aus den Forderungen dem Schüler hinterher zeigen, wie diese Figuren entstanden, wie aus Linien Winkel, aus Winkeln Dreiecke, aus Dreiecken Vierecke wurden; wie diese letzten wieder Dreiecke werden 2c. Die Grundsätze, die jedem verständlich sind, sobald er nur ihre Worte versteht, könnten den Erfindungsgeist auf die Probe stellen. So würde die Beurtheilung der Linien Fig. 16. 17. keine Mühe machen. Werden nehmlich zu den zwei gleichen Linien Fig. 16. AB, ΓΔ zwei gleiche BE, ΔZ gesetzt, so müssen auch die ganzen Linien AE, ΓZ gleich werden; und werden nach Fig. 17. zu den ungleichen Linien AB, ΓΔ gleiche Linien BE, ΔZ addiret, so müssen dann auch die Summen AE, ΓZ ungleich werden. Mit dem Subtrahiren verhält sichs nicht anders. Wird nach Fig. 16 von den gleichen Linien AE, ΓZ gleiches BE, ΔZ abgezogen, so bleibt gleiches, AB, ΓΔ übrig; oder wird nach Fig. 17 von ungleichen AE, ΓZ gleiches abgezogen, nehmlich BE,

ΔZ

ΔZ, so bleibt auch ungleiches übrig, nehmlich AB, $\Gamma\Delta$; und die Anwendung des 2 — 5 Grundsatzes wird künftig nichts Befremdendes haben.

Auf ähnliche Art wird sich auch der sechste und siebende an der 18. und 19. Fig. erläutern lassen.

Das Räthselhafte, das diese Grundsätze haben, muß die Aufmerksamkeit eher vermehren als vermindern. —

Die berüchtigten zwei Grundsätze, No. 10. 11, können für jetzt als Glaubensartikel, die sich auf die 10. und 35. Erklärung gründen, noch unentwickelt bleiben; weiter unten wird auch diesen, wie den obigen, ihr Recht wiederfahren.

Ueber die Sätze.

Hat sich nun der Schüler durch öfteres Zeichnen und Vergleichen dieser Figuren so viel Fertigkeit erworben, daß er die Forderungen und Grundsätze mit einiger Leichtigkeit anwenden kann, so zeige man ihm an einem oder an mehreren Beispielen, wie man durch eine geschickte Anwendung derselben noch eine Menge Sätze lernen kann, die jenen an Deutlichkeit und Gewißheit nichts nachgeben. So vermehren die drei ersten Sätze die

die obigen Forderungen schon mit drei neuen, nur sind sie noch nicht so faßlich für den gemeinen Menschenverstand, wie jene; sie bedürfen einer Auflösung. Die folgenden fünf Sätze geben eben so viel neue Grundsätze, die aber ähnliche Beyhülfe nöthig haben. Die Verschiedenheit dieser Sätze zeigen schon ihre Namen; die ersten heißen Aufgaben, und zeigen also an, daß man etwas thun oder bewerkstelligen soll; und die zweiten Lehrsätze, und behaupten, daß etwas so oder anders sey.

Ein einziges Beispiel wird die Sache hinlänglich erläutern.

Die Aufgabe muß also natürlich das, was sie bewerkstelligen lassen will, erst genau angeben, z. B. im ersten Satze: Auf einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck zu errichten. Dieß heißt der Satz, Πρότασις. Hier sind zwey Stücke zu erläutern, I. was darinne schon als bekannt angegeben ist, τὸ δεδόμενον, nehmlich eine begrenzte gerade Linie, und II. das Gesuchte, Geforderte, τὸ ζητούμενον, nehmlich, ein gleichseitiges Dreieck darauf zu errichten. Jenes nannten die ältesten Ausleger dieser Elemente: Ἔκθεσις, und dieses Διορισμὸς, Erklärung, Bestimmung.

Ob alles dieses aber auch ausführbar sey, damit soll nun ein Versuch vor unsern Augen ange-

stellt

stellt werden; wozu obige Forderungen das Nöthige an die Hand geben. Das dazu Erforderliche, nehmlich die drei gleichen Linien, läßt die Wahl der Forderung nicht schwer. Gleich große Linien finden sich nur in dem Kreise. Man ziehe also zwei Kreise, wie sie gegenwärtige Absicht erfordert. Dieses ganze Verfahren nannten dieselben Ausleger Κατασκευὴ.

Aber immer bleibt die Frage noch übrig: ist dieses Verfahren auch richtig? kann man es in jedem ähnlichen Falle beybehalten? dieß müßte noch an diesem Exempel gezeigt werden. Daher der Beweis, Ἀπόδειξις. Die Art und Weise in Zukunft.

Daraus ergiebt sich endlich der allgemeine, völlige Schluß, Συμπέρασμα. Das Verlangte ist geschehen, die Aufgabe gelöset, und zwar so, daß sie in jedem ähnlichen Falle, wie in diesem Beispiele, kann gelöset werden.

Auf ähnliche Weise muß auch bey den Lehrsätzen genau bemerkt werden, was Bedingung, Ὑπόθεσις, und was Behauptung Ἑπόμενον, ist; das Uebrige ist wie bey den Aufgaben. Als Beyspiel vergleiche den vierten u. f. Sätze.

Was sonst schon bekannt ist, daß man nehmlich eine Frage auf zweyerley Art auflösen kann, wenn

wenn man sie wirklich beantwortet, und wenn man zeigt, daß sie etwas Widersprechendes voraussetze, wie Hr. HR. Kästner die directe und indirecte Beweisart kurz und gut erklärt, das gilt auch hier, und die Sache wird unten für sich deutlich werden.

Um noch mehr Mannigfaltigkeit und Abwechslung in diese Uebungen zu bringen, und, wenn möglich, allgemeines Interesse, besonders in öffentlichen Schulen, dafür zu unterhalten, lasse man mitunter die Beweise von den Geübtern in den gewöhnlichen Abkürzungen ausdrücken, oder gebrauche sie selber, besonders bey zusammengesetztern Beweisen, um ihnen die Uebersicht davon zu erleichtern.

Die nöthigsten für dieses erste Buch dürften etwa folgende seyn:

$=$	z. B.	$A = B$,	d. i.	A ist gleich B.
$>$	—	$A > B$,	—	A ist größer als B.
$<$	—	$A < B$,	—	A ist kleiner als B.
$+$	—	$A + B$,	—	A u. B. zusammengenommen.
$-$	—	$A - B$,	—	A weniger B.

Oder man lasse den Beweis in förmliche Schlüsse auflösen, wozu hier auch einige Beyspiele, nach Dasypod, folgen.

Ueber

Ueber den ersten Satz.

Die förmlichen Schlüsse dieses Beweises sind folgende:

Der erste. In jedem Kreise sind die Linien vom Mittelpuncte bis zum Umkreise, als Halbmesser, einander gleich. ΑΓ, ΑΒ sind Halbmesser desselben Kreises; folglich sind sie einander gleich.

Der erste Satz, oder die Regel, ist aus der Erklärung eines Kreises klar; der zweyte oder der dazu gehörige Fall ergiebt sich aus der Zeichnung. Mithin muß der Schlußsatz richtig seyn.

Der zweyte verhält sich wie der erste. Was der erste Schluß vom Kreise ΓΔΒ behauptete, behauptet dieser, völlig auf dieselbe Art, vom Kreise ΓΑΕ. Folglich ist auch ΒΓ gleich ΒΑ.

Der dritte gründet sich auf die Regel: Dinge die einem dritten gleich sind, sind unter einander gleich. Nun sind ΓΑ, ΓΒ der dritten ΑΒ gleich; folglich ist auch ΓΑ der Linie ΓΒ gleich.

Der erste Satz ist ein gemeiner Begriff, ein Grundsatz. Der dazu gehörige Fall ist durch den ersten und zweyten Schluß gewiß. Mithin muß der Schlußsatz auch hier wieder richtig seyn.

Der

Der vierte. Jedes Dreyeck, das drey gleiche Seiten hat, ist ein gleichseitiges Dreyeck. Das Dreyeck ΑΒΓ hat drey gleiche Seiten; folglich ist es ein gleichseitiges Dreyeck.

Der erste Satz ist die Erklärung eines gleichseitigen Dreyecks selber; der zweyte der Schlußsatz des dritten Schlusses, folglich muß auch der allgemeine Schlußsatz richtig seyn.

Die Aufgabe ist nun gelöst, das Verfahren dabey richtig befunden, und es kann nichts hindern, in jedem andern Falle es eben so zu machen. Der Satz ist also nun eben so wahr, als die Lehre oder die Regel einer äsopischen Fabel, die durch sie erläutert oder anschaulich gemacht wurde.

Man sorge nicht, daß diese Reihe von Schlüssen Kinder oder Anfänger verdrüßlich machen werde. Die Erfahrung wird auch hier die Natur der Sache bestätigen. Denn was interessirt dieses Alter mehr, als Räthsel, Aufgaben und Kunststücke? Es fragt im ganzen noch nicht darnach, ob sie nützen oder nicht nützen; wenn es nur beschäftiget ist und seiner Sache gewiß werden kann. Kinder wären mithin die recht eigentlichen Schüler der reinen Mathematik.

Ueber den zweyten Satz.

Auch dieser Beweis besteht aus vier Schlüssen.

Der erste. Die Halbmesser eines Kreises sind einander gleich. ΒΓ, ΒΗ sind Halbmesser des Kreises ΓΗΘ; folglich ist ΒΓ gleich ΒΗ. Den ersten Satz giebt die Erklärung des Kreises, und der zweyte, oder der dazu gehörige Fall, erhellet aus der Zeichnung.

Der zweyte. In dem Kreise ΗΚΛ, dessen Mittelpunkt Δ ist, sind ΔΛ, ΔΗ wieder, aus derselben Ursache, einander gleich.

Der dritte. Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt gleiche Reste. Ziehe von ΔΛ, ΔΗ die gleichen Seiten ΔΑ, ΔΒ ab, so bleibt ΑΛ gleich ΒΓ übrig. Die Regel ist ein Grundsatz; der dazu gehörige Fall erhellet aus dem vorigen Satze.

Der vierte. Dinge, die einem dritten gleich sind, sind unter einander gleich. ΑΛ, ΒΓ sind ΒΗ gleich, folglich ist ΑΛ auch ΒΓ gleich. Die Regel ist wieder ein allgemeiner Satz. Der zweyte Satz erhellet aus dem ersten und dritten Schlusse.

Den Erfindungsgeist der Lernenden zu schärfen, ziehe man während der Zeichnung ihr Urtheil öfters zu Rathe, und setze sie in den Stand, daß sie nach und nach selber bestimmen lernen, wenn und wie gerade Linien zweckmäßig zu ziehen sind.

Hier ist z. B. nichts bekannt, als die gegebene gerade Linie ΒΓ und der Punkt Α, worauf die zu suchende errichtet werden soll. Sie soll der gegebenen gleich seyn. Ueber die Gleichheit der Linien bestimmt jetzt nur noch der Kreis; nur in ihm gab es lauter gleich große gerade Linien. Man beschreibe also mit ihrer Länge einen Kreis, ΓΗΘ. Aber nach der Aufgabe soll sie nicht aus Β, sondern aus Α gezogen werden. Man verbinde diese zwey Punkte Α, Β und versuche, ob sich die vorige Aufgabe hier benutzen läßt. Man errichte deswegen ein gleichseitiges Dreyeck darauf, ΑΒΔ. Dieß eröffnet einen neuen Wirkungskreis. ΔΑ ist gleich ΔΒ. Gleich große Linien, an jede gesetzt, müssen wieder gleichgroße Linien geben. Dieses Ansetzen gleich großer Linien kann wieder nur vermittelst des Kreises geschehen. Mithin könnten ΔΑ, ΔΒ die gleichen Linien geben. Wird ΔΒ bis Η verlängert, so erhalte ich eine ΒΓ gleiche Linie, nehmlich ΔΗ, weniger ΔΒ. Dieselbe Linie ΔΗ muß ich erhalten, wenn ich zu ΔΑ ein gleiches Stück ansetze, und dieß geschieht durch den zweyten Kreis ΗΚΛ.

Einer der ersten deutschen Bearbeiter dieser Elemente,*) nannte die Anweisung, wie die Figur bey Aufgaben gezeichnet werden müßte, nicht uneben: Handgriff.

Es fehlt nun noch die Probe, ob dieser Handgriff der rechte sey, und ob er auch richtig angewandt worden. Der Beweis hat es gezeigt.

Gesetzt also, daß dieser Satz als Satz nicht erheblich genug scheinen könnte, so ist er desto erheblicher als Uebungsstück. Die Hand hat an Festigkeit, das Auge an Ebenmaaß und die Seele an Verhältniß gewonnen. Denn zur via regia wollte Euklides die Geometrie nun einmahl nicht gemacht wissen.

Ueber den dritten Satz.

Diese dritte Aufgabe läßt sich völlig wie die vorige behandeln. Die Erfindung der Figur ist beynahe dieselbe und die zwey Schlüsse waren auch schon da. Sie kann also ganz als ermunternde Wiederhohlung angesehen werden.

Ueber den vierten Satz.

Die Reihe Schlüsse, die die Wahrheit dieses an der Figur erläuterten Lehrsatzes darthun, würde in syllogistischer Form diese seyn:

Der

*) Der Verf. des deutschredenden Euklides. Der neueste Abdruck ist von 1744. 4.

Der erste. Dinge, die sich decken, sind einander gleich. Die Seite ΒΓ deckt die Seite ΕΖ; folglich ist ΒΓ gleich ΕΖ. Der Obersatz ist ein Grundsatz; der zweyte erhellet aus der Zeichnung.

Der zweyte. Dinge, die sich decken, sind einander gleich. Die Dreyecke ΑΒΓ, ΔΕΖ decken sich; folglich sind sie einander gleich. Beyde Sätze sind wie die vorigen.

Der dritte. Dinge, die sich decken ꝛc. Der Winkel ΑΒΓ, ΔΕΖ decken sich, folglich ꝛc. wie in den vorigen.

Der vierte. Dinge, die sich decken ꝛc. Der Winkel ΑΓΒ deckt den Winkel ΔΖΕ; folglich ist der Winkel ΑΓΒ gleich dem Winkel ΔΖΕ. Und der völlige Schlußsatz: Wenn in zwey Dreyecken ꝛc. ist richtig.

Außerdem zeige man an diesem Satze noch den Unterschied zwischen Aufgaben und Lehrsätzen, und vergleiche deshalb oben S. 70. Was bey Aufgaben das Gegebene und das Gesuchte war, ist hier die Bedingung und die Behauptung. Nach obiger Abkürzung wäre also

Die Bedingung;

$$AB,\ A\Gamma = \Delta E,\ \Delta Z;$$
$$\text{d. W. } BA\Gamma = \text{d. W. } E\Delta Z.$$

Die Behauptung:

$$B\Gamma = EZ;$$
$$\text{d. Dr. } AB\Gamma = \text{d. Dr. } \Delta EZ;$$
$$\text{d. W. } AB\Gamma,\ A\Gamma B = \text{d. W. } \Delta EZ,\ \Delta ZE.$$

Das Uebrige ist wie bey den Aufgaben. S. I. c.

Ueber den fünften Satz.

Die Bedingung und die Behauptung ist hier doppelt, nehmlich:

Die Bedingungen.

$$\text{I. } AB = A\Gamma;$$
$$\text{II. } AZ = AH.$$

Die Behauptungen.

$$\text{I. d. W. } AB\Gamma = A\Gamma B;$$
$$\text{II.} - \Gamma B\Delta = B\Gamma E.$$

Die Wahrheit dieser Behauptungen ergiebt sich aus folgenden Schlüssen:

Der

Der erste. Wenn nach dem vorigen Satze zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel einander gleich sind, so sind auch die Grundlinien und die übrigen Winkel einander gleich; dieß ist nun hier bey den Dreyecken BAH, ΓAZ der Fall; folglich sind auch die Grundlinien BH, ΓZ, und die Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen, nehmlich ABH, AΓZ und AZB, AZΓ einander gleich.

Der zweyte. Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt gleiche Reste; ziehe von den gleichen Linien AZ, AH, die gleichen AB, AΓ, ab; so bleibt BZ gleich ΓH übrig.

Der dritte. Wenn in zwey Dreiecken zwey Seiten ꝛc. wie im ersten Schluß. Dieß ist in den Dreyecken BHΓ, ΓZB wieder der Fall; folglich ist auch darinnen der Winkel BΓH gleich dem Winkel ΓBZ, (als die zweyte Behauptung) und der Winkel ΓBH gleich dem Winkel BΓZ.

Der vierte. Gliches von Gleichem abgezogen, giebt gleiche Reste; ziehe daher von den gleichen Winkeln ABH, AΓZ, die gleichen Winkel ΓBH, BΓZ ab, so müssen die gleichen Winkel ABΓ, AΓB (als die erste Behauptung) übrig bleiben.

Den

Den Commentar zu diesen vier Sätzen liefert der Beweis im Texte, wie bey den vorigen.

Die Erfindung dieses Satzes, oder, welches wohl hier einerley ist, die natürliche Folge desselben auf den vorhergehenden, möchte das Alter, dem dieser Unterricht bestimmt ist, noch zu wenig interessiren; wohl aber die Erfindung des Beweises mit der dazu erforderlichen Figur. Die Materialien liefert die Vorbereitung im Texte. Die Bedingungeen nehmlich verlangen schon die Verlängerung der Seiten ΑΒ, ΑΓ nach Δ, Ε. Aber auch so läßt sich noch nichts hierher gehöriges daraus folgern. Man könnte zwar nach der ersten Forderung an die Verbindung der beyden Endpunkte Δ, Ε denken, es wäre aber ohne Nutzen; denn das dadurch entstandene ungleichseitige Viereck ΒΔΕΓ ist noch völlig unbekannt. Bis jetzt ist nur etwas von Linien Winkeln und Dreyecken bekannt; und nur das kann weiter helfen. Solcher Linien und Winkel und Dreyecke entstehen aber eine Menge, sobald man statt jener zwey Punkte lieber die Punkte ΔΓ, ΕΒ oder noch besser ΖΓ ΗΒ mit einander verbindet, nachdem man bey Ζ in Η von ΒΔ, ΓΕ gleiche Stücke abgeschnitten hat. Von den meisten dieser neuentstandenen Dreyecke ist etwas bekannt. Das Aufsuchen der sämmtlichen Dreyecke in dem ganzen Dreyecke ΑΖΗ wird das Finden der hierhergehörigen erleichtern, und auch hier muß es es heißen: jam voluisse sat est. Das eine Paar Dreyecke, von welchem der vorige Satz ganz gilt, die nehmlich zwey Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel gleich haben, kann sich nicht lange der Aufmerksamkeit entziehen. Denn AB, AΓ sind Seiten eines gleichschenkelichen Dreyecks, mithin einander gleich; auch AZ, AH müssen einander gleich seyn; denn es wurde Gleiches zu Gleichem gesetzt. Dieses doppelte Paar Linien sind nun Seiten der Dreyecke ZΓA, HBA, die den Winkel BAΓ gemeinschaftlich haben, daher auch alles von ihnen gelten muß, was der vierte Satz behauptete. Mithin kenne ich nun auch die neugezogenen Linien BH, ΓZ; denn sie sind Grundlinien von zwey gleichen Dreyecken. Ferner die Winkel AΓZ, ABH, die gleichen Seiten gegenüberstehen, und vorzüglich auch die Winkel BZΓ, ΓHB, die auch gleichen Seiten gegenüberstehen. Denn auch die beyden Seiten, von welchen diese gleichen Winkel eingeschlossen werden, sind schon bekannt, nehmlich ΓA, HB ist gleich BZ, ZΓ, jede einzeln genommen, folglich muß auch in diesen Dreyecken die gemeinschaftliche Grundlinie BΓ sich gleich seyn, wie die Winkel, die gleichen Seiten gegenüberstehen.

Uebersieht man diese gemachten Entdeckungen noch einmahl, so zeigen sich in den letzten Dreyecken die Winkel unter der Grundlinie als Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen, und in dem ersten größern Paare auch die Winkel über der Grundlinie; nur haben diese noch einen gleichen Ueberschuß, nehmlich die zwey gleichen Winkel ΓΒΗ ΒΓΖ. Werden diese davon abgezogen, so müssen auch die Reste gleich seyn.

Sollte sich wieder Vermuthen der sonderbare Beiname Fuga miserorum, den dieser Satz bey einigen ältern Mathematikern, der vielen Linien, Winkel und Dreyecke wegen erhalten hat, bestätigen, so würde sich dadurch die Unentbehrlichkeit des Figurenlesens desto nachdrücklicher erweisen lassen. Denn die Vernachlässigung dieser Geschicklichkeit wird hier und in der Folge eben so unangenehme Hindernisse verursachen, als das versäumte fertige Schriftlesen bey der Erlernung alter oder neuer Sprachen. Gegenwärtige Figur giebt Gelegenheit zu solchen Uebungen. Langsamern Köpfen komme man durch Papier- oder Pappenschnitte oder durch einzelne Zeichnungen nach obiger Probe zu Hülfe.

Ueber den sechsten Satz.

Diese Art zu beweisen, die die indirekte oder apagogische genannt wird, nimmt also das Gegentheil an, und zeigt, daß es falsch oder ungereimt ist.

Dieser sechste Satz ist aber ferner die **umgekehrte** erste Hälfte des fünften Satzes. Bey solchen Umkehrungen der Sätze, conversiones, werden die Behauptungen Bedingungen, und die Bedingungen Behauptungen. Im vorigen Satze war

Die Bedingung:

$AB = A\Gamma$ und

Die Behauptung:

d. W. $AB\Gamma$ = d. W. $AB\Gamma$

Hier dagegen ist die Bedingung:

d. W. $AB\Gamma$ = d. W. $A\Gamma B$, und

die Behauptung:

$A\Gamma = AB$.

Man übersehe nur nicht, daß man sich hier, wie oben im vierten Satze, zwey Dreyecke vorstellen müsse, und daß also im Dreyeck $AB\Gamma$, die Spitze B, und im Dreyeck $\Delta B\Gamma$, die Spitze Γ; daß ferner in jenem die Grundlinie AB, und in diesem $\Delta\Gamma$ sey, so wird sich das Schwierige, was sonst Anfänger in diesem Beweis zu finden glauben, von selber verlieren.

Denn

Denn nimmt man an, daß ΔB gleich sey AΓ, so erhält man zwey Dreyecke, worinnen zwey Seiten und die davon eingeschlossenen Winkel einander gleich sind; daraus folgt, daß auch die dritte Seite und die ganzen Dreyecke einander gleich seyn müssen; aber eine der dritten Seiten, und eins der Dreyecke ist kleiner, als das andere, oder, welches einerley ist, es folgt daraus, daß das Größere dem Kleinern, oder das Kleinere dem Größern gleich seyn könnte. In kürzerer Bezeichnung:

ΔB, BΓ = AΓ, ΓB;
d. W. ΔBΓ = d. W. AΓB;
Also die Grundl. AB = d. Grundl. ΔΓ, und
das Dreyeck ABΓ = d. Dr. ΔBΓ.

Sollte dem Anfänger dieser Beweis demungeachtet noch nicht gehörig einleuchten, so setze man ihn lieber mit dem folgenden siebenten und achten noch eine zeitlang aus.

Ueber den siebenten und achten Satz.

Die Beweisart ist in beyden wieder die vorige indirekte. Der siebente wird durch Hülfe des fünften Satzes bewiesen. Weil sich der Anfänger aber gewöhnlich nicht recht darein zu finden weiß, wie die Unmöglichkeit, die aus einer solchen Annahme

nahme entstehet, etwas für oder wider den Satz beweisen könne, da doch in dem Satze selber von solchen Winkeln gar die Rede nicht ist, so bereite man ihn wenigstens durch einen augenscheinlichern dazu vor. Er läßt sich nach dem vierten Satze eben so sicher führen. Nach diesem ist nun

Die Bedingung:

$$A\Gamma, \Gamma B = A\Delta, \Delta B,$$
$$AB = AB$$

Die Behauptung:

$$BA\Gamma = BA\Delta.$$

Das Ganze ist also dem Theile gleich. Wie auch

der W. $\Delta BA = \Gamma BA$;

also ist wieder das Ganze dem Theile gleich.

Oder nach dem Beweise im Texte: Nimmt man an, daß sich unter den genannten Umständen noch zwey Linien errichten lassen, so muß man auch annehmen, daß die zwey Winkel über oder unter der Grundlinie sich zu gleicher Zeit gleich und ungleich seyn können. Dieser Beweis muß aber noch zweymahl wiederhohlt werden; denn die

die zwey Linien können sich auch innerhalb der ersten oder ausserhalb derselben vereinigen. Es folgen aber dieselben Unmöglichkeiten.

Sonderbar, daß schon Proklus an dem siebenten und achten Satze Anstoß nahm. Man sehe die Stelle bey ihm selber nach.*) Den achten schreibt er einem gewissen Philo zu. Verhält sich die Sache anders, so könnte man vermuthen, daß Euklides, nächst dem strengen Zusammenhange, auch auf Vollständigkeit gesehen, und deswegen einige Beweise aufgenommen hätte, die das System so strenge eben nicht verlangte.

Lieber möchte ich indessen doch denen beytreten, wenn ja etwas geschehen müßte, die diese drey letzten Sätze auf Rechnung der Schüler des Euklides oder anderer Leser dieser Elemente schreiben, die auch gern noch andere Beweise, die sie gehört oder gelesen hatten, aufbewahren wollten. Am verdächtigsten wären dann der siebente und achte. Dem siebenten scheint wirklich die Euklidische Leichtigkeit zu fehlen, wenn ich nicht irre; und der achte ist direkte und indirekte zugleich bewiesen. Man versuche es, und lese den Beweis ohne die im Deutschen eingeklammerte Stelle, und man wird den Einschluß wenig vermissen; oder man lasse

*) S. desselben Kommentar über das erste Buch dieser Elemente, S. 71. edit. 1533.

lasse den Anfang weg, so findet man den wiederhohlten siebenten Beweis auch ausreichend. Sogar die Sprache vergrößert den Verdacht. —

Dagegen läßt sich für Euklides anführen: daß es mathematische Sicherheit erfordere, selbst die Axiome, die nicht κοιναι ἐννοιαι sind, und daher einen Beweis zulassen, zur Zeit zu beweisen. Denn am Ende lies sich gegen den achten Grundsatz, der doch hier alles in allem ist, wohl eben so viel Erhebliches einwenden, als gegen den berüchtigten eilften Grundsatz. Der achte gehörte nun unter die völlig bewiesenen Sätze, wie es der eilfte zu seiner Zeit auch seyn wird.

Für gegenwärtigen Behuf lassen sich diese drey Sätze ohne alle Gefahr, noch eine zeitlang aufschieben.

Ueber den neunten Satz.

Der Leichtigkeit des Beweises wegen, lasse man diese Aufgabe auch an Winkeln, die nach Lage und Gestalt von diesem verschieden sind, probiren.

Man macht, und wohl mit Recht, viel aus Kopfrechnungen; sollte die Geometrie dazu unfähig seyn? „Es kann sogar jemand, sagt Hr. HR.

Kästner *) der mathematische Lehren gehörig durchdacht hat, davon aus dem Kopfe zusammenhängend reden, freylich nur denen verständlich, welche die nöthigen Vorkenntnisse besitzen; aber so verhält es sich ja mit jedem andern Redner, nur daß des letzten Zuhörer sich einbilden könnte, ihn zu verstehen, und daß eben wegen des bestimmten Ausdrucks der Mathematik, Zuhörer, die für sie nicht vorbereitet sind, fühlen, daß sie ihn nicht verstehen."

Ueber den zehnten Satz.

Die vorigen Uebungen lassen sich auch hier anstellen. Man nehme Linien, die an einer Seite oder gar nicht begrenzt sind; senkrechte, schiefe. Die Gewandtheit Figuren zu zeichnen, sie fertig zu lesen, und sie im Kopfe mit sich herumzutragen, wird durch dergleichen Uebungen sehr gewinnen.

Ueber den eilften Satz.

Man übe von Zeit zu Zeit auch die geometrischen Synonyma. Z. B. eine gerade Linie rechtwinklicht, loth- oder senkrecht ziehen, einen Perpen-

*) Geschichte der Mathematik, 1. B. S. 389.

pendikel errichten oder fallen lassen; oder wie oben bey den Dreyecken: eine dritte Linie, Basis, Grundlinie ꝛc. Mich dünkt bemerkt zu haben, daß selbst deutliche Lehrvorträge durch Vernachlässigung solcher und ähnlicher Kleinigkeiten undeutlich und vergeblich werden.

Ueber den zwölften Satz.

„Euklid, sagt Hr. HR. Kästner,*) behilft sich im 9. 10. und 11. Satze mit dem gleichseitigen Dreyeck, wo freylich auch gleichschenklichte dienen, wenn man über gegebener Grundlinie gleichschenklichte machen kann; aber noch war er nicht berechtiget, bey Halbirung des Winkels im neunten Satze etwa ein gleichschenklichtes Dreyeck zu brauchen, denn er mußte alsdenn jeden Schenkel größer nehmen, als die Hälfte der Grundlinie, und wie groß diese Hälfte ist, konnte der angehende Geometer noch nicht wissen, weil er noch keine gegebene gerade Linie halbiren konnte.

So ließ sich zum Halbiren des Winkels kein anderes Dreyeck brauchen, als das gleichseitige.

Diese Betrachtung wird zeigen, daß die Ordnung der ersten 22 Sätze nothwendig ist, daß man keinen an des andern Stelle setzen kann, ohne das ganze Gebäude wanken zu machen. Ob man statt des alten Gebäudes ein neues, eben so fest, bequem und schön aufführen könnte, das ist eine Frage, die die Erfahrung bisher noch nicht bejahet hat."

Ueber den dreyzehnten Satz.

Beym achten Satze schien der kleine Vorrath von Materialien, den die vorigen Aufgabem in Verbindung der Grundsätze, Erklärungen und Forderungen geliefert hatten, aufgebraucht zu seyn; es folgten alſo vom 9 — 12 vier neue mit ihren Lösungen, die, gewissermaßen als eben so viel neue Instrumente, die nach unstäten geometrischen Wahrheiten eben so in die erforderliche Lage in Verbindung setzen sollen, als die physikalischen es bey einigen Naturkörpern thun müssen.

Die drey ersten Aufgaben verhalfen mit den Erklärungen, Grundsätzen und Forderungen zu folgenden Wahrheiten:

1. Daß in zwey Dreyecken, die zwey Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel gleich haben, alles gleich ist;

2. Daß gleichschenklichte Dreyecke die Winkel über und unter der Grundlinie glэich haben;

3. Daß

3. Daß in Dreyecken gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber stehen;

4. Daß sich aus drey Seiten nach einerley Gegend nur einerley Dreyecke machen lassen, und daß endlich

5. in Dreyecken, die alle Seiten gleich haben, auch die von gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Gegenwärtiger dreyzehnter Satz macht die erste Anwendung dieser neuen Aufgaben. Sein Beweis läßt sich ganz kurz auch so vorstellen:

ΓBE
EBΔ ΓBA
2 R ABE
ABΔ EBΔ
ΓBA

Das ist, die zwey Paar Winkel über einander, und die letzten drey sind jede zwey rechten Winkeln gleich; folglich sind jede derselben zwey rechten gleich.

In förmlichen Schlüssen wäre es folgender: Dinge, die sich decken, sind einander gleich; die Winkel ΓBA, ABE decken den Winkel ΓBE, folglich sind sie ΓBE gleich.

Gleiches zu Gleichem addiret, giebt gleiche Summen. Die Winkel ΓBA, ABE sind dem Winkel ΓBE gleich; addire den ihnen gemeinschaftlichen Winkel EBΔ, so müssen die drey Winkel ΓBA, ABE, EBΔ den zwey Winkeln ΓBE, EBΔ gleich seyn.

Dinge, die sich decken, sind sich gleich. Die Winkel ABE, EBΔ decken den Winkel ABΔ; folglich sind die Winkel ABE, EBΔ gleich dem Winkel ABΔ.

Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen. Addire zu ABE, EBΔ, die ABΔ gleich sind, den gemeinschaftlichen Winkel ΓBA, und die drey Winkel ΓBA, ABE, EBΔ sind gleich den zweyen ΓBA, ABΔ. Und die drey Winkel: ΓBA, ABE, EBΔ sind also auf jeden Fall zwey rechten gleich. Und weil endlich:

ΓBA, ABΔ den drey Winkeln ΓBA, ABE, EBΔ gleich sind, die zwey rechten ΓBE, EBΔ desgleichen; so folgt nach der Regel: Dinge, die einem dritten gleich sind, sind rc. daß ΓBA, ABΔ auch zwey rechten gleich seyn müssen; und endlich der völlige Schluß: ΓBA, ABΔ sind zwey rechte Winkel oder doch zwey rechten Winkeln gleich.

Ueber den vierzehnten Satz.

Dieser Satz kann keine Schwierigkeiten verursachen; es ist der vorhergehende, nur umgekehrt.

Dort war

Die Bedingung:

Eine gegebene gerade Linie ꝛc.

Die Behauptung:

Die Nebenwinkel sind zwey rechten gleich.

Hier dagegen ist

Die Bedingung:

Sind zwey Nebenwinkel zwey rechten gleich;

Die Behauptung:

so liegen die Schenkel nach verschiedenen Seiten in einer geraden Linie.

Darüber und über die indirecte oder apagogische Beweisart, vergleiche, wenns nöthig ist, die Anmerkung zum sechsten Satz.

Ueber den funfzehnten Satz.

Zusatz, Folgesatz, πόρισμα, corollarium, bedarf keines neuen Beweises, oder könnte doch leicht wie sein Vorgänger bewiesen werden.

Die Namen der Winkel, die hier und in den folgenden Sätzen vorkommen, erklären sich beynahe alle, durch bloße Ansicht, von selber. Scheitel- oder Vertikalwinkel entstehen also durch Linienschnitte; oder die rückwärts verlängerten Schenkel des einen, werden die Schenkel des andern Winkels, und ihre Spitzen oder Scheitel müssen sich also nothwendig berühren. Sie unterscheiden sich von Nebenwinkeln dadurch, daß diese letzten immer einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und die beyden andern in einer geraden Linie liegen. In dem folgenden Satze ist der äußere mit dem Nebenwinkel verbunden, und die zwey übrigen Winkel des Dreyecks heißen seine innern und ihm gegenüber stehenden. Auch die weiter unten vorkommenden Wechselwinkel erklärt ihr Name hinlänglich.

Ueber den sechszehnten Satz.

Das einfache Dreyeck hat dießmahl sehr beträchtliche Veränderungen erlitten. Der Text nennt blos ihre Entstehung, und überläßt das warum? wie gewöhnlich, der Aufmerksamkeit des Lesers. Man suche vor allen Dingen dem jungen Leser begreiflich zu machen, wie der äußere Winkel mit dem innern und gegenüber stehenden in Verbindung kann gebracht werden. Die vorhergegangenen Scheitelwinkel können dazu verhelhelfen; denn sie verhelfen zu Dreyecken, worauf sich fast alles, was oben von den Dreyecken da war, mit Nutzen anwenden läßt.

Eine gerade Linie durch AΓ hinausgezogen, giebt Scheitelwinkel. Wird AΓ vorher halbirt und die neugezogene BE nach Z verdoppelt, so entstehen zwey gleiche Winkel, und zwey gleiche Seiten, die jene Winkel einschließen; und verbindet man noch die zwey Punkte Z, Γ, so müssen die Dreyecke ZEΓ, AEB einander gleich seyn, mithin auch die Grundlinien, und die Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen. Ja sie setzen den einen innern und gegenüber stehenden Winkel sogar neben oder vielmehr auf den äußern Winkel.

Verfährt man auf diese oder auf ähnliche Weise bey der Verzeichnung der Figuren, so ist der Beweis schon zur Hälfte geführt und verstanden. Das Kunststück geht vor ihren Augen vor, und ein jeder will es nachmachen. Werden die Vorbereitungen aber immer gleichsam in der Tasche oder hinter dem Rücken gemacht, so vergeht auch wohl Erwachsenen die Geduld, dem Dinge weiter nachzudenken.

Ein anderes ist es, bisweilen einen Versuch zu machen, ob sie ohnedem treffen. So lasse man in dieser Absicht die zweyte Hälte des Beweises, die im Texte nur angedeutet ist, an der zweyten

Figur erklären, wo eine andere Seite des Dreyecks verlängert und eine neue halbirt ist. Es entstehen neue Scheitelwinkel und Dreyecke, mit welchen es sich eben so verhält, wie mit den vorigen. Der zweyte innere und gegenüber stehende Winkel ABE ist dann gleich ΕΓΖ, oder nur einem Theile des äußern ΕΓΗ, oder, welches einerley ist, des vorigen äußern Winkels ΑΓΔ, dem er als Scheitelwinkel auch gleich ist.

Man bemerke übrigens in diesem und in dem folgenden Satze schon die ersten Keime der künftigen Lehre von den Parallelen. Denn verbindet man die Punkte Α, Ζ, und verlängert ΑΖ an beyden Seiten nach Κ, Θ; so entstehen Wechselwinkel, die einander gleich sind; also ΒΑΓ ist gleich ΑΓΖ. Aber auch die Dreyecke ΑΕΖ, ΒΕΓ sind aus derselben Ursache einander gleich, mithin auch die neuen Wechselwinkel ΓΑΖ, ΑΓΒ. Aber alle Nebenwinkel sind zusammengenommen gleich zwey rechten. ΒΑΖ, ΒΓΖ davon abgezogen, giebt ΒΑΚ gleich ΖΓΔ, folglich auch ΚΑΓ gleich ΑΓΔ.

Oder, alle Nebenwinkel:

$$KAB,\ BA\Gamma,\ \Gamma A\Theta = 2\ R.$$
$$B\Gamma A,\ A\Gamma Z,\ Z\Gamma\Delta = 2\ R.$$
$$BA\Gamma,\ \Gamma A\Theta = B\Gamma A,\ A\Gamma Z;$$

Mithin auch der Rest

$$KAB = Z\Gamma\Delta;$$

Folglich auch

$$KAB,\ BA\Gamma = A\Gamma Z,\ Z\Gamma\Delta.$$

Demnach lassen sich Beweise führen, ob Wechselwinkel einander gleich oder ungleich sind; und, weiß man es von Wechselwinkeln, so weiß man es bekanntlich auch von dem äußern und an derselben Seite gegenüber stehenden; auch weiß man alsdann, ob die innern, an einer Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich oder ungleich sind.

Im Nothfall hätte also hier schon die Theorie der Parallelen folgen können, wenn unserm Grundleger mehr an schnell als fest bauen gelegen gewesen wäre. Die Lehre von den Dreyecken war aber noch so mancher Erweiterung fähig, ehe sie neuer Hülfsmittel bedurfte, welche Erweiterungen zugleich auch für die Parallelen nützlich wurden, daß es völlig zum euklidischen Plane gehörte, diese Lehre von den Parallelen nicht eher vorzunehmen, als bis hinlängliche Sicherheit da war: die Entfernung zweyer Linien von einander auch dann zu bestimmen, wenn sie weder zusammenfallende noch auseinanderfahrende sind. Denn findet keins beyden statt, so ist ja das gleichweit stehen nothwendig.

Die Lehre von den Wechselwinkeln folgte also, wie gesagt, als Corollarium aus diesem Satze.

Einige Anmerkungen über den eilften Grundsatz und über die Parallelen selber siehe weiter unten nach dem sechs und zwanzigsten Satz.

Ueber den siebzehnten Satz.

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen ꝛc. Dieser Beweis kann also noch zweymahl wiederhohlt werden. Man lasse aber dem Dreyecke seine jetzige Stellung, wenn man die übrigen Seiten verlängert, der Anfänger findet sonst in Zukunft unnöthige Schwierigkeiten, z. B. bey dem 32. Satze.

Die Schlußsätze sind folgende:

Der äußere Winkel ΑΓΔ ist größer als ΑΒΓ.

Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt ungleiche Summen. ΑΓΔ ist größer als ΑΒΓ, und ΑΓΒ soll beyden addiret werden; folglich ist ΑΓΔ, ΑΓΒ größer als ΑΒΓ, ΑΓΒ.

ΑΓΔ, ΑΓΒ sind zwey rechten gleich.

ΑΔΓ,

ΑΓΔ, ΑΓΒ sind zwey rechten gleich, ΑΒΓ, ΑΓΒ nicht; folglich sind sie kleiner.

Diese Schlüsse lassen sich leicht ausfüllen, und bey den übrigen verlängerten Seiten leicht wiederhohlen.

Die Vergleichung des zwey und dreyßigsten Satzes wird, wie ich glaube, die obige Vermuthung, daß Euklides hier schon die Parallelen im Auge gehabt habe, noch mehr bestätigen. Nur das Gesetz: Nichts zu verlangen, von dem man nicht sicher ist, daß es geschehen könne,*) scheint ihn abgehalten zu haben, die Sache hier schon weiter zu führen, als geschehen ist.

Ueber den achtzehnten Satz.

Weil die Winkel ΑΒΔ, ΑΔΒ als Winkel über der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks ΑΒΔ einander gleich sind, und der Winkel ΑΔΒ, als äußerer Winkel des Dreyecks ΑΒΓ angesehen, größer ist, als sein innerer Gegenwinkel ΑΓΒ, so muß der Winkel ΑΒΔ gleich dem Winkel ΑΔΒ, größer seyn als ΑΓΒ. Wenn also schon ein Theil des Winkels ΑΒΓ, nehmlich ΑΒΔ, größer ist, als ΑΓΒ; wie vielmehr muß es das Ganze: ΑΒΔ,

*) S. Kästners Geschichte der Mathem. 1. B. S. 393.

$AB\Delta$, $\Delta B\Gamma$ seyn? Der ganze Beweis gründet sich also auf den neunten Grunsatz: das Ganze ist größer ꝛc. und man hat nicht nöthig mit Dasypod, zu borgen. Wenigstens für den gegenwärtigen Zweck würde es wenig nützen, folgende Schlußkette zu gebrauchen: $AB\Gamma$ ist größer als $A\Delta B$, und $A\Delta B$ größer als $\Delta\Gamma B$; folglich ist auch $AB\Gamma$ größer als $A\Gamma B$. Es würde nach folgendem Formular geschlossen: Die Sonne ist größer als die Erde; die Erde ist größer als der Mond; folglich ist die Sonne auch größer als der Mond. Geht es, desto besser. Dann lasse man die Prämissen noch dazu suchen.

Ueber den neunzehnten Satz.

Dieser Satz ist wieder die Umkehrung des vorigen. Man vergleiche oben die Anmerkung zum sechsten Satz.

Im vorigen war

die Bedingung:

$$A\Gamma > AB;$$

die Behauptung:

$$\text{d. W. } AB\Gamma > B\Gamma A.$$

In

In diesem Satze dagegen ist

die Bedingung:

d. W. ABΓ > BΓA.

Die Behauptung:

AΓ > AB.

Ueber den zwanzigsten Satz.

Durch das Ansetzen der Seite AΓ an AB und durch die Verbindung von ΔΓ, entsteht ein gleichschenklichtes Dreyeck AΔΓ, dessen Winkel über der Grundlinie einander gleich sind. Der Winkel BΓΔ ist also größer als AΓΔ oder ΓΔA. Dem größern Winkel BΓΔ steht die größere Seite ΔB; dem kleinern ΓΔA die kleinere Seite ΓB gegenüber. Dieß alles scheint noch keinen Bezug auf unsere Behauptung zu haben, daß in jedem Dreyeck je zwey Seiten größer sind, als die dritte, und doch ist der Beweis zu Ende. Aber es ist einerley, ob ich sage ΔB ist größer als ΓB; oder ΓA, AB zusammen sind größer als ΓB, weil ΓA an AB gesetzt wurde.

Daß sich dieser Beweis noch zweymahl wiederhohlen lasse, ohne dem Reitze der Neuheit Abbruch

bruch zu thun, und daß selbst die Aufmerksamsten bey Wiederhohlungen von der Art sich gleich munter, wenn nicht noch munterer zeigen werden, besonders da es wieder was zu zeichnen giebt, das ihnen aber auch nicht dürfte vorenthalten werden, wird hoffentlich jede Erfahrung bestätigen. Mich deucht, die Euklidische Wiederhohlungsart müßte es seyn, wenn irgend etwas dem verhaßten Worte: Wiederhohlung seinen in Schulen so nöthigen Credit wieder verschaffen soll. Sie hat so viel Mannigfaltiges und Abwechselndes und soviel anderweitiges Interesse und es ist dabey nichts zu vermeiden, als — das fatale Wort selber.

Ueber den ein und zwanzigsten Satz.

Man bemerke, daß die Behauptung doppelt ist, und daß es daher der Beweis auch seyn muß. Der erste Beweis von den Seiten gründet sich 1. auf den vorhergehenden Satz, daß zwey Seiten in den Dreyecken zusammengenommen größer sind, als die dritte und 2. auf den Grundsatz: Gleiches zu Ungleichem addiret, giebt ungleiche Summen. Dasselbe gilt auch von dem innern Dreyecke.

Der zweyte von den Winkeln aber hängt ganz von der Natur der äußern Winkel ab. Denn der Winkel △ ist ein äußerer Winkel und also größer, als E, und dieser wieder größer als A. Es ent-

entsteht also dieselbe Schlußkette wieder, die schon oben im achtzehnten Satze da war: die Sonne ist größer als die Erde ꝛc.

Daß die Euklidische Deutlichkeit schon ehedem ihre Gegner gehabt hat, zeigt die unten stehende Stelle aus dem Proklus *).

Ueber den zwey und zwanzigsten Satz.

Schon der Vortheil, den gegenwärtige Aufgabe von dem so kräftig bestrittenen ein und zwanzigsten Satze zieht, könnte ihm seinen dortigen Platz rechtfertigen; denn wer übernimmt gern vergebliche Arbeit, welches doch ohne ihn öfter geschehen würde.

Ueber den drey und zwanzigsten Satz.

Auch diese Aufgabe würde sich ohne jene zwey Sätze nicht sicher haben bewerkstelligen lassen, da sie völlig auf der vorigen beruhet.

Ueber

*) Comment. p. 85. Hervagii. Τοῦτο τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἰώθασιν, καὶ ὅνῳ αὐτὸ δῆλον εἶναι, καὶ μηδεμιᾶς δεῖσθαι κατασκευῆς Πρὸς δὴ ταῦτα λεκτέον, ὅτι σαφὲς μὲν κατὰ τὴν ἄισθησιν ἐςι τὸ θεώρημα, ὅυπω δὲ σαφὲς κατὰ τὸν ἐπιςημονικὸν λόγον.

Ueber den vier und zwanzigsten Satz.

Die Reihe von Schlüssen und die Menge von Linien und Winkeln, die bald halb, bald ganz, bald zweymahl, bald gar nicht gelesen werden, müssen dem Anfänger Mühe machen. Man veranlasse ihn daher, nach Maaßgabe der Vorbereitung im Texte, wieder zum Selbsterfinden der Figur.

Die Behauptung ist: In Dreyecken, worinne zwey gleiche Seiten ungleiche Winkel einschließen, steht der größere Winkel auch der größern Grundlinie gegenüber; ΒΓ ist also größer als ΕΖ.

Man suche die kleinere mit der größern Grundlinie in Verbindung zu bringen. Dieß kann geschehen, wenn man den größern Winkel ΒΓ an die eine Seite ΔΕ des kleinern Winkels legt, und die andere Seite ΔΖ der Seite ΑΓ gleich macht. Verbindet man nun Ε mit Η, so hat man die erste Figur auf der zweyten, und der Augenschein hätte genug; denn jedes gesunde Auge wird ΕΖ für kleiner als ΕΗ halten. Nach der Bemerkung des Proklus, zum ein und zwanzigsten Satze, ist dieses aber nicht hinlänglich.

Die Punkte Ζ und Η rathen zu einer Verbindung, und die Ausführung liefert eine Menge

Dinge, die zu neuen Wahrheiten führen können.

Denn ΔZ und ΔH sind einander gleich; mithin auch die Winkel über der Grundlinie Z und H.

Man lasse nur die Behauptung nicht aus dem Gesichte, daß EH, wie nun die ehemalige Grundlinie BΓ heißt, größer als EZ ist.

Ließen sich beyde Grundlinien, EZ, EH zu Seiten eines Dreyecks machen, deren gegenüber stehende Winkel bekannt sind, so wäre die Sache abgethan, und sie ist wirklich schon abgethan. Denn EH steht in dem Dreyeck EHZ dem Winkel EZH gegenüber, dessen Theil ΔZH schon größer ist, als EHZ, (ihn fehlt ΔHE zur Gleichheit) und diesem weit kleinern Winkel steht die zweyte Grundlinie EZ gegenüber; folglich ergiebt sich der Schluß von selber.

So gewinnen die Begriffe von Schritt zu Schritt an Deutlichkeit und an Umfange. Dinge, die sich decken, war der Anfang. Daraus ergab sich im vierten Satze: decken sich zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel, so müssen sich die dritten decken; decken sich zwey gleich liegende Winkel, so decken sich auch die gegenüberstehenden Seiten ꝛc. bis auf die gegenwärtigen Ergänzungen.

Ueber

Ueber den fünf und zwanzigsten Satz.

Man sieht leicht, daß dieser Satz der umgekehrte vorige ist; nur indirekte bewiesen. Sollte sich diese Beweisart in den vorigen Sätzen noch nicht hinlänglich empfohlen haben, so wird sie es bey diesem, der Leichtigkeit und Bequemlichkeit wegen, wahrscheinlich desto zuverläßiger. Im vorigen Satze waren

die Bedingungen:

$AB, A\Gamma = \Delta E, \Delta Z;$
d. W. $BA\Gamma > E\Delta Z.$

Die Behauptung:

$B\Gamma > EZ.$

In diesem Satze dagegen ist

die Bedingung:

$AB, A\Gamma = \Delta E, \Delta Z$
$B\Gamma > EZ$

die Behauptung:

d. W. $BA\Gamma > E\Delta Z.$

Ueber

Ueber den sechs und zwanzigsten Satz.

Diesen Beweis könnte leicht derselbe Vorwurf treffen den man einigen sokratischen Gesprächen des Xenophon gemacht hat, daß nehmlich beyde durch zu große Deutlichkeit hier und da fast undeutlich werden.

Man zeige aber dem jungen Leser nur die Haupttheile des Ganzen, und er wird die genaue Auseinandersetzung derselben mit Vergnügen verfolgen.

Die doppelte Lage der einzelnen Seiten macht einen doppelten Beweis nöthig. Sie liegen

I. an gleichen Winkeln, oder
II. gleichen Winkeln gegenüber.

Im ersten Fall ist
die Bedingung:

d. W. $AB\Gamma$, $B\Gamma A = \Delta EZ$, $EZ\Delta$,
$BA = ZE$.

und die Behauptung: dann muß auch das Uebrige darinnen gleich seyn, nehmlich:

AB, $A\Gamma = \Delta E$, ΔZ,
d. W. $BA\Gamma = E\Delta Z$.

Im zweyten Fall dagegen ist die Bedingung:

$$AB = \Delta E,$$
d. W. $AB\Gamma$, $B\Gamma A = \Delta EZ$, $EZ\Delta$;

Dann muß auch wieder alles gleich seyn;

Oder $A\Gamma$, $B\Gamma = \Delta Z$, EZ,
d. W. $BA\Gamma = EZ\Delta$.

Der Beweis ist, wie gesagt, in beyden Fällen apagogisch und die Untersuchung also dreyfach: die Seiten sind nehmlich entweder größer oder kleiner oder einander gleich; kein viertes giebt es nicht.

Vielleicht gewinnt die Deutlichkeit noch mehr, wenn das Gleichmachen der Seiten an zwey Dreyecken vorgenommen wird.

Mit diesem Satze schließen sich eine zeitlang die Untersuchungen über die Dreyecke. Man überrasche aber erst den Schüler mit einer kurzen Uebersicht der Wahrheiten, die er sich bisher gesammelt hat.

1. Dreyecke, und zwar 1. wie ein gleichseitiges und jedes andere zu errichten ist; 2. wenn Dreyecke überhaupt einander gleich oder ungleich sind ꝛc.

2. Win-

2. Winkel; wenn diese einander gleich sind, wie lassen sie sich halbiren? Was haben rechte, Nebenwinkel, Scheitelwinkel, äußere und innere gegenüberstehende für Eigenthümliches? wie lassen sich bestimmte Winkel anlegen? ꝛc.

3. Linien; wie nehmlich eine bestimmte zu ziehen, abzuschneiden, zu halbiren, als Loth zu errichten oder zu fällen sey, wenn sie einander gleich oder ungleich sind ꝛc.

Bisher waren die Linien zusammenfallend oder auseinanderfahrend. Die obigen Untersuchungen haben so viel Stoff geliefert, daß sich nun auch mit Gewißheit bestimmen läßt, wenn zwey gerade Linien gleichweit von einander laufen müssen, oder nie zusammenfallen können, so weit sie auch an beyden Seiten verlängert werden.

Aus der Lehre von den äußern Winkeln folgte, daß jede zwey Winkel eines Dreyecks zusammengenommen kleiner als zwey rechte seyn müssen. Denkt man sich die zwey an diesen Winkeln liegenden und zusammenfallenden Seiten eine zeitlang beweglich, und erweitert sie so lange, bis diese zwey Winkel zwey rechten gleich sind; so müssen sich zu gleicher Zeit die rückwärts verlängerten Schenkel eben so einander nähern, bis sie auch zwey rechten

Winkeln gleich sind. Siehe die Figur zum sieben und zwanzigsten Satze. Und die dritte Linie stände alsdann senkrecht auf beyden, oder das Kennzeichen der Parallellinien wären rechte Winkel. Diesen Fall übergeht aber Euklides, weil er sich aus der achten Erklärung der rechten Winkel und aus dem daraus gefolgerten zehnten Grundsatz von der Gleichheit der rechten Winkel in Verbindung mit der fünf und dreyßigsten Erklärung der Parallelen von selber zu verstehen scheint, und auch nicht so fruchtbar ist, als der folgende. Aber so viel folgt doch daraus, daß die zwey Winkel, die an der dritten Seite liegen zusammen genommen nie größer oder kleiner seyn dürfen, als zwey rechte Winkel, diese dritte Seite stehe nun senkrecht oder willkührlich darauf; oder jene zwey Seiten müssen endlich, gehörig verlängert, ein Dreyeck machen. Daher dieser Satz eben so gut unter die Grundsätze könnte aufgenommen werden, als der zehnte, von den rechten Winkeln. Man weiß aber, daß das obige Dutzend Grundsätze noch nicht für geschlossen gehalten wird und auch wahrscheinlich von Euklides so vollzählig nicht ist geliefert worden. Wenigstens hat der dritte und folgende dieses Scholion: Τοῦ Πάππου καὶ ἀπόδεικτον. Und der sechste: ἑπόμενον τοῦ πρώτου. Der zehnte und eilfte: Ἀπόδεικτον. Vielleicht dachten frühzeitig mehrere wie Herr Lempe*): „Euklides hat dies

*) In den Erläuterungen der Kästner. Anfangsgründe. 2 Thl. S. 67.

diesen Satz wahrscheinlich deswegen in die Reihe der Grundsätze als ein Prinzipium gesetzt, weil er ihn als Lehrsatz nicht hat erweisen können." Dieß nun wohl eben nicht; denn die Euklidische Lehre von den Parallelen kann seiner entbehren; ob er aber überhaupt von Euklides seyn mag, das müßten wohl Handschriften und Uebersetzungen zeigen. Diesen Verdacht verstärkt schon der etwas flüchtige Gebrauch, den Gregorius von den vielen Handschriften, wie er sich nach damahliger Zeit ausdrückte, zu seiner Zeit machte, in einigen fand er ihn unter den Grundsätzen, in andern wieder unter den Forderungen. Denn alle Bedingungen, die Euklides in dem sieben und zwanzigsten und folgenden Sätzen annimmt, erhellen aus dem bisherigen, wie wir oben zum sechszehnten und siebzehnten gesehen haben. Euklid hätte also die gelehrten Untersuchungen, die die Parallelen erhalten haben, mehr veranlaßt als verursacht; denn zu seiner Absicht bedurfte er nicht mehr, und seine vierte Erklärung, recht verstanden, sichert ihn auch gegen den zweyten Vorwurf: daß sie nicht mit seiner Erklärung gerader Linien harmonirten.*) — Völliges Erschöpfen seiner Materie hat er nirgends versprochen, und kein Verständiger kann es bey seiner Absicht von ihm erwarten; genug daß er nirgends den Weg dazu versperrte. Das gegenwär-

*) S. Lempe a. a. O.

wärtige Publikum wird sich wahrscheinlich mit obiger Erklärung gerne zufrieden stellen lassen.*)

Ueber den sieben und zwanzigsten Satz.

Dieser Satz giebt die erste Bedingung an, wenn zwey gerade Linien einander parallel sind; wenn nehmlich die beyden Wechselwinkel einander gleich sind, und

der acht und zwanzigste,

die beyden andern; der Beweis muß daher auch doppelt seyn.

Die Bedingung:

$$EHB = H\Theta\Delta$$

die Behauptnng:

AB parallel $\Gamma\Delta$.

Müssen bey Parallelen nach dem vorigen Satze die Wechselwinkel einander gleich seyn, so folgt

*) Für Mathematiker hat erst jüngst noch Hr. Prof. Hauff gesorgt. S. Hindenburgs Archiv. 1799. 9 Hft. 74.

folgt dieses von selber. Denn es ist einerley, ob ich sage: E B oder AHΘ sind HΘΔ gleich; weil die ersten Scheitelwinkel sind.

Eben so ergiebt sich auch der zweyte Beweis aus den Wechselwinkeln.

Die Behauptung ist:

$$BH\Theta,\ H\Theta\Delta = 2\ R.$$

Von HΘΔ ist AHΘ aber der Wechselwinkel, und dieser letzte macht mit BHΘ zwey rechte Winkel; folglich ist es wieder einerley zu sagen:

$$H\Theta\Delta,\ BH\Theta = 2\ R. \text{ oder}$$
$$AH\Theta,\ BH\Theta = 2\ R;$$

welches die dritte Bedingung der Parallelen ist. Es darf also nur eine Bedingung zuverläßig seyn, so sind sie es alle.

Die Bedingungen, unter welchen sich Parallelen denken lassen, wären also hinlänglich entwickelt, sie sollen an keiner Seite zusammenfallen, sondern stets gleichweit von einander stehen, sagt die Definition. Wenn zwey gerade Linien zusammen laufen müssen, zeigte der siebzehnte Satz, wenn nehmlich die zwey an einer Seite liegenden Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte Winkel sind. Das Gegentheil, wenn sie größer als zwey rechte sind, war überflüßig anzugeben; es folgt von selber aus dem ersten.

Ueber den neun und zwanzigsten Satz.

Er ist die Umkehrung der vorigen zwey Sätze. Also ist hier

die Bedingung:

$$AH\Theta = H\Theta\Delta, \text{ S. 27.}$$

$$\left(\begin{matrix} EHB = H\Theta\Delta \\ BH\Theta = H\Theta\Delta \end{matrix}\right) \text{ S. 28.}$$

die Behauptung:

$$AB \text{ parallel } \Gamma\Delta.$$

Ueber den dreyßigsten Satz.

Diesen Lehrsatz scheint der erste Grundsatz überflüßig zu machen. Man kann aber hieraus abnehmen, wie Euklides die Grundsätze selber nach Zeit und Umständen zu schätzen pflegte. An und für sich ist er bloßes Beyspiel, das den ersten Grundsatz erläutern kann. Bey der bekannten Euklidischen Sparsamkeit muß er aber noch eine ande-

andere Bestimmung haben; sollte es nicht die seyn, von welcher weiter unten, zum 43. Satze, die Rede seyn wird? Jenes nöthige Gerüste konnte nirgends besser, als hier, zugelegt werden.

Es bestimmen also ΑΗΘ, ΗΚΔ als Wechselwinkel, die geraden Linien ΑΒ, ΓΔ zu Parallelen, und beyde Winkel sind ΗΘΖ gleich; wodurch ΕΖ mit ΑΒ gleiche Wechselwinkel, und mit ΓΔ einen äußern, der dem innern an derselben Seite gegenüberstehenden, gleich ist, erhält und deswegen mit ihnen auch parallel seyn muß.

Ueber den ein und dreyßigsten Satz.

Dieß ist Ein Fall, nach welchem sich Parallelen ziehen und beurtheilen lassen; nach Erforderniß der Umstände könnte man auch die äußern und die ihnen, an derselben Seite, gegenüber stehenden; oder die beyden innern, an derselben Seite liegenden, dazu brauchen. Und die Sache wäre nunmehr wieder in der größten Allgemeinheit gefaßt. Es ist nun gleichviel, ob die dritte Linie senkrecht oder schief auf zwey andere fällt; die obigen Wechselwinkel, der äußere und der innere ihm an derselben Seite gegenüberstehende müssen einander gleich, und die beyden innern an derselben Seite liegenden zwey rechten Winkeln gleich seyn,

seyn, wenn zwey gerade Linien einander parallel seyn sollen.

Wer dieses erste Buch chrestomathisch lesen läßt, kann den sieben und zwanzigsten Satz bis zum dreyßigsten Satz noch überschlagen. Dieser ein und dreyßigste mit dem folgenden Satze erklären die Sache für den Anfänger hinlänglich.

Ueber den zwey und dreyßigsten Satz.

Hier wird noch stärker auf den obigen sechszehnten und siebzehnten Satz zurückgewiesen, deren Wirkung bis hieher reichten; wie fruchtbar wird dieser Satz für die Zukunft!

Ueber den drey und dreyßigsten Satz.

Proklus macht hier auf die Bestimmtheit der euklidischen Sprache aufmerksam, und rechnet unter andern auch das ἐπὶ τὰ αὐτὰ μερὴ nach einerley Seite oder Gegend darunter *) Denn man könnte

*) Am angef. O. S. 101. Τρίτον δὴ λεγέσθω πρὸς τούτοις, ὅτι καὶ ἴσων ὑποκειμένων εὐθειῶν καὶ παραλλήλων, οὐ πάντως αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς ἴσαι καὶ παράλληλοι εἰσίν. Ἐι γὰρ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐπιζεύξεις ποιησόμεθα, παραλλήλους μὲν αὐτὰς ἀδύνατον εἶναι. Τέμνονται γὰρ ὑπὸ ἀλλήλων.

könnte die Endpunkte auch diagonalartig mit einander verbinden, wo die Behauptung natürlich falsch wäre. — Die berechnete Vollständigkeit unsers Grundlegers fällt übrigens von selber in die Augen. Jede Seite dieser neuen, vierseitigen Figuren kann nun sicher mit andern verglichen und beurtheilt werden; und die Leichtigkeit und Gewißheit, womit sich dieses nun thun läßt, rechtfertiget die obige etwas mühsame Strenge, die er bey den Parallelen anwandte, wohl hinlänglich. Denn alle die nachherigen Sätze sind doch gegen den sieben und zwanzigsten bis zum dreyßigsten, als wahre Erhohlung anzusehen.

Dieser Lehrsatz läßt sich leicht zu einer Aufgabe machen.

Uebrigens fängt mit diesem Satze, wie schon gesagt, der letzte Theil dieses ersten Buchs an. Bisher erläuterten sich Linien, Winkel, und Dreyecke wechselseitig unter einander; künftig erzeigen sie diesen Dienst auch den Vierecken.

Ueber den vier und dreyßigsten Satz.

Hieraus ergiebt sich die Art Parallelogramme zu zeichnen noch deutlicher. Man verdopple also das gegebene Dreyeck, oder die gegebenen zwey Seiten mit dem Winkel, den sie einschlieschließen, je nachdem es die länglichte Raute, die Raute selber, oder das Rechteck seyn soll. Das Quadrat kommt unten im sechs und vierzigsten Satze besonders vor. Das Rechteck erfordert also zwey Seiten; den rechten Winkel, den sie einschließen, bestimmt schon der Name; die Raute eine Seite und einen Winkel, und die länglichte Raute zwey Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel.

Soviel war zu wissen nöthig, wenn künftig die Vergleichung der Parallelogramme mit sich selber und mit den Dreyecken mit Leichtigkeit sollte angestellt werden.

Ueber den fünf und dreyßigsten Satz.

Die Ansicht der Figur zeigt I. die im Satze benannten zwey Parallelogramme, ΑΒΓΔ, ΒΕΖΓ, II. zwey Paar Dreyecke ΗΔΕ, ΗΒΓ, ΑΒΕ, ΔΓΖ; III. zwey Trapezien ΑΒΗΔ, ΕΗΓΖ. Von Trapezien ist noch nichts bekannt; ihre Vergleichung würde also zu nichts nutzen. Die beyden Parallelogramme sind als unbekannt gegeben, mithin gilt von ihnen dasselbe. Es bleibt also nur noch No. II. übrig. Das erste Paar Dreyecke liefert nur Scheitelwinkel als etwas bekanntes; dieß reicht nicht aus. Wie reichhaltig dagegen das zweyte Paar an bekannten Dingen ist, zeigt der Text.

Die

Die Hauptmomente des Beweises wären also: I. die letzten zwey Dreyecke sind einander gleich, mit den hier nöthigen Seiten und Winkeln; II. das Dreyeck HΔE gehört beyden gleichen Dreyecken an, die also, nach dessen Abzug, gleiche Trapezien werden; III. einerley Dreyeck, nehmlich HBΓ macht beyde Trapezien wieder zu obigen Parallelogrammen, die also einander gleich seyn müssen; oder Gleiches zu Gleichem addiret, giebt nicht gleiche Summen!

Destruktion und Construktion reichten sich also auch hier wechselseitig die Hände.

Man lasse den Beweis dieses Satzes, den ältere Mathematiker Paradoxum mathematicum et admirabile nannten, auch in den zwey andern möglichen Fällen, die die zwey andern Figuren angeben, wiederhohlen. Der Beweis nach der zweyten Figur wird am wenigsten Mühe machen, und der dritte nach Fig.* ist auch nur wenig von dem ersten verschieden

Ist dieser Beweis erst nach seinen Haupttheilen durchgenommen, so wird er sich eben so leicht auch vollständig führen lassen, und mit Abwechslungen, deren er mehrerer fähig ist, sicher nicht ohne Nutzen und Vergnügen. Jetziger Hauptzweck geometrischer Uebungen für dieses Alter ist denn doch: Uebung des Verstandes; mithin wird die

Zeit

Zeit dadurch nicht versplittert. Selbst der praktische Geometer, wenn einer daraus werden soll, kann nach Voraussetzung solcher Vorübungen nicht sehr viel Zeit und Arbeit mehr kosten.

Ueber den sechs und dreyßigsten Satz.

Der Beweis ist der abgekürzte des vorigen Satzes, und beyde geben neue Proben, wie fruchtbar die Vergleichung unbekannter Dinge mit schon bekannten Dingen werden kann.

Ueber den sieben und dreyßigsten Satz.

Ein viertes Kennzeichen, woran man abnehmen kann, ob Dreyecke einander gleich sind oder nicht. Bisher mußten sie sich jedesmahl decken; dieß ist hier nicht nöthig.

Ueber den acht und dreyßigsten Satz.

Dieser Beweis ist völlig der vorige, bis auf die Grundlinien, die einander hier nur gleich sind; im vorigen waren sie einerley und lagen auf einander. Dieser Satz wird seiner Wichtigkeit wegen in dem

Neun und dreyßigsten und vierzigsten,

nach beyden Fällen auch umgekehrt bewiesen. Diese beyden Sätze haben in der Hervagischen Ausgabe folgende Anmerkung: Exemplum alterum haec verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, non habet, nec est necesse. Für unbefangene Leser freylich nicht, wohl aber für das obige allezeit streitfertige Dialectiker-Heer,*) dem auch der letzte Weg, der Weg der Schikane dadurch versperrt wird; denn sie durften nur unterwärts gezeichnet werden, und der Satz blieb nur halb wahr. Gleiche Bewandniß scheint es auch mit dem doppelten λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν τῇ ΒΓ, in diesem und in dem folgenden Satz zu haben.

Ueber den ein und vierzigsten Satz.

Erster Vortheil, den das eben Erfundene gewährt; die folgenden Aufgaben zeigen sich darin schon in der Ferne.

Ueber den zwey und vierzigsten Satz.

Der vorige Lehrsatz zeigte, wenn Parallelogramme das Doppelte eines Dreyecks sind; diese Auf-

*) S. die Anmerk. zum 21. und 33. Satze.

Aufgabe verlangt Parallelogramme, die gegebenen Dreyecken gleich sind. Natürlich muß also das Dreyeck erst halbirt werden; sonst würde das Parallelogramm das Doppelte davon enthalten.

Ist also das ganze Dreyeck ΑΒΓ gleich 8, so ist die Hälfte desselben gleich 4, und folgende Vorstellung richtig:

ΑΒΕ = ΑΕΓ, und beydes = ΑΒΓ,
4 = 4 — — = 8;
ΑΒΓ = ΖΕΓΗ, das Doppelte von ΑΕΓ,
8 = 8 — — — 4.

Also ist ΑΒΓ und ΖΕΓΗ das Doppelte eines Dritten, nehmlich ΑΕΓ, mithin, nach dem sechsten Grundsatze, einander gleich.

Ueber den drey und vierzigsten Satz.

Dieser Satz ist hier bloßes Gerüst für den folgenden. Es ist nicht genug, Parallelogramme zeichnen zu können, die einem gegebenen Dreyeck mit einem, dem gegebenen Gleichen, geradlinigten Winkel, gleich sind, es ist öfters daran gelegen, diese Parallelogramme an eine gegebene Seite zu legen, und dazu verhelfen gegenwärtige Ergänzungs Parallelogramme.

Ueber

Ueber den vier und vierzigsten Satz.

Diese Aufgabe unterscheidet sich also von der im zwey und vierzigsten Satze blos durch die gerade Linie, an welche das gefundene Parallelogramm soll gelegt werden. Der vorige Lehrsatz soll die Arbeit erleichtern. Aber die Zurüstung hat so viel Künstliches und Willkührliches, als freylich — Zurüstungen gewöhnlich haben.

Selbst Hr. Michelsen*) scheint das Willkührliche eher vermehrt, als vermindert zu haben. Er sagt: „Ich dächte, wir kehrten zu der Figur des drey und dreyßigsten Satzes zurück, die uns zuerst auf die Parallelogramme führte; vielleicht, daß die Betrachtung derselben noch nicht erschöpft ist. Nehmen wir in der Diagonale des Parallelogramms daselbst einen Punkt an, (aber aus was für Macht? dürfte man wohl fragen,) und legen durch denselben, mit den Seiten des Parallelogramms, Parallelen: so erhalten wir die Figur des drey und vierzigsten Satzes, und eine aufmerksame Betrachtung derselben läßt den drey und vierzigsten Satz selbst gar nicht verfehlen." Eine aufmerksame Betrachtung wohl nicht allein. Denn schon der angenommene Punkt setzt viel Wüllkührliches voraus, weil kein Bedürfniß dazu antreibt. Und

*) S. desselben Anleitung zur Selbsterlernung der Geometrie in Briefen. S. 117. f.

Und gesetzt auch, das Glück wäre so vorzüglich günstig gewesen, daß durch ihn obige Figur entstanden wäre, so ist der zweyte Schritt wenigstens eben so willkührlich, als der erste, und es hätte sich vielleicht jeder andere Satz, der künftig daran erläutert werden soll, eher durch sie finden lassen, als der gegenwärtige. Das Gerüste richte sich nach dem Gebäude, nicht umgekehrt. Das Bedürfniß war vielmehr schon im zwey und vierzigsten Satze dazu da; wie finde ich die Linie, woran ich das gefundene Parallelogramm legen soll?

Alles bisherige von den Parallelogrammen, sogar ihr Name, war in der obigen Lehre von den Parallelen gegründet, warum nicht auch gegenwärtiges Hülfsmittel, mit den zwey folgenden Sätzen? oben schien der dreyßiste Satz: Linien, die einer dritten parallel sind, sind unter sich parallel, nur als Beyspiel zum ersten Grundsatze, gegen die gute Oekonomie des Euklides, da zu stehen; denn was hat er genutzt, oder wozu nutzt er noch? Verfährt man aber mit ihm nach dem drey und dreyßigsten Satze, wie dort mit zwey Parallelen verfahren wurde, so nutzt er für jetzt, und für die Zukunft. Denn was dort von zwey Parallelen galt, warum soll es nicht auch von dreyen gelten? Verbinde ich also drey gleiche Parallelen nach einerley Seite, und untersuche sie durch Hülfe der Diagonale, so giebt sie fürs erste

zwar

zwar nur Trapezien und Dreyecke. Aber wie leicht ist nun der nächste Schritt gethan, durch den Durchschnittspunkt noch die dritte Parallele zu ziehen, und wie vortheilhaft ändert sich die vorige Figur. Die noch unbekanten Trapezien sind weg, und geben ein Hülfsmittel an die Hand, wodurch sich ihnen, im fünf und vierzigsten Satze, sogar selber wird beykommen lassen. — Es wäre also nur noch der sechs- und sieben und vierzigste mit den bisherigen Sätzen in Verbindung zu bringen. Der sieben und vierzigste enthält eine der wichtigsten Vergleichungen der Parallelogramme mit den Dreyecken, und diese Vergleichung ließ sich nicht ohne genauere Kenntniß der Quadrate anstellen, und die Lehre der Quadrate stützte sich auf die Parallelogrammen überhaupt. Mithin wäre auch die Folge der Sätze in der zweyten Hälfte dieses Buchs nothwendig.

Ueber den fünf und vierzigsten Satz.

Dieser etwas wortreiche Beweis untersucht zwar zunächst nur das Trapezium; er bedarf aber soviel von der ganzen Lehre der Parallelogramme, daß er als General-Uebersicht derselben kann angesehen werden. Man versäume nur nicht vorher die zu erweisenden Theile einzeln zu bemerken. Es mußte also an der Figur, als dem Exempel, gezeigt werden: I. daß die zwey Parallelogramme

 jetzt

jetzt nur Ein Parallelogramm ausmachen; II. daß es der gegebenen geradlinigteu Figur gleich ist.

Zum ersten gehört, daß erwiesen wird: KΘ, ΘM, wie auch ZH, HΛ sind gerade Linien, und die sie verbindenden Seiten KZ, ΘH, MN sind einander gleich und parallel. Der zweyte Theil ergiebt sich aus dem vorigen Satze.

Auch die Ausübung dieser Aufgabe scheint wohl nur schwerer zu seyn, als sie ist. Die Procedur ist folgende: Man macht 1. aus der gegebenen geradlinigten Figur durch die Diagonale Dreyecke, 2. aus diesen, nach dem zwey und vierzig Satze, Parallelogramme, und legt sie 3. nach dem vier und vierzigsten an einander. Demohngeachtet dürften einige Versuche noch mißlingen. Man probire es daher erst mit Parallelogrammen und mit rechten Winkeln. Nur verhüte man Ermüdung, wenn die Ausübung darüber auch noch eine Zeitlang müßte aufgeschoben werden.

Dieser Satz ist übrigens der einzige, den Campanus, der Uebersetzer dieser Elemente aus dem Arabischen ins Lateinische, nicht hat. Er fertigte diese Uebersetzung schon im eilften Jahrhundert. Man könnte daher diesen Satz der Unächtheit verdächtig machen, wenn es die euklidische strenge Folge zuließ. Wenigstens für gegenwärtigen Zweck würde das doppelte Zeugenverhör, nehmlich

lich des lateinischen Uebersetzers aus dem Arabischen, und des arabischen aus dem Griechischen, hier sehr am unrechten Orte stehen, wenn es sich auch gehörig anstellen ließe.

Ueber den sechs und vierzigsten Satz.

Dieser Satz scheint, wie gesagt, nur des folgenden wegen da zu stehen. Der Inhalt stand schon oben in der dreyßigsten Erklärung: das Quadrat ist eine gleichseitige und rechtwinklichte vierseitige Figur, und diese zwey Stücke machen auch den ganzen Beweis aus. Bisher wurden die vierseitigen Figuren überhaupt mit den dreyseitigen verglichen; die Vergleichung der Quadrate insbesondere mit eben denselben, macht für jetzt den Beschluß; übertrifft sie aber an Fruchtbarkeit insgesammt. Der weltberühmte magister matheseos wäre also, ein leicht zu erreichendes non plus ultra.

Ueber den sieben und vierzigsten Satz.

Die Haupttheile dieses Beweises sind: 1. Ein Theil des Quadrates BE ist gleich dem Quadrate HB. 2. Der Rest des Quadrats BE ist gleich dem andern Quadrat ΘΓ. Das Ue-

Uebrige betrifft die gewisse Kenntniß der Seiten und Winkel.

Man wird wohl thun, wenn man jede Nummer an einer eigenen Figur erläutert; denn nur die Menge der Linien und Winkel kann das Begreifen dieses berüchtigten Satzes schwer machen. Alsdann lassen sich in dem ersten und zweyten Theile die beyden Dreyecke und Parallelogramme mit ihren Grundlinien und Parallelen, zwischen welchen sie liegen, mit Leichtigkeit finden und beurtheilen. Zeigt dieß der Lehrer nun alles aus dem Gedächtniß, und mit einiger Leichtigkeit, so wird das Nachmachen sicher ein Fest, das auch die Trägern zur Munterkeit antreiben wird.

Ist das rechtwinklichte Dreyeck zugleich auch ein gleichschenklichtes, so läßt sich die bekannte Anekdote von Pythagoras, oder, nach Plutarch*), von Plato, wenigstens nicht als unwahrscheinliche Erläuterung hier anführen; es sey nun davon wahr, so viel als ihm wolle. Man kann denn jedes Quadrat der Catheten beliebig einen Altar gelten lassen, dessen Verdoppelung, ohne seine Figur zu verändern, Apollo den Deliern als einziges Mittel, die Pest zu vertreiben, soll angerathen haben, und die Hypotenuse wird das verlangte Quadrat geben, und das bekannnte: „Ich hab's," würde des großen Nutzens wegen, den die-

*) De Genio Socratis.

dieser Satz schon im Voraus verspricht, nichts Anstößiges haben.

Daß einige ältere Mathematiker bei der Figur an die tunicam Francisci haben denken und den Satz selber darnach benennen können, macht ihnen wohl nicht weniger Ehre, als wenn sie ihn magister matheseos, im gewöhnlichen Sinne, genannt hätten.

Ueber den acht und vierzigsten Satz.

Also ultima convertit penultimam, die Bedingung wird wieder Behauptung und die Behauptung Bedingung, wie schon oft da war.

Hat sich der Schüler nur erst einige Fertigkeiten erworben, sich über jeder Linie ein Quadrat zu denken, und eine mäßige Uebung wird ihm dazu verhelfen; dann hat auch dieser Beweis nichts Befremdendes mehr. Ein vergeblicher Versuch diese Quadrate zu verzeichnen, wird ihn von der Nothwendigkeit dieser Anstrengung seiner Phantasie völlig überzeugen; er wird bald sehen, daß die verzeichneten Quadrate die Sache mehr erschweren, als erleichtern.