§. 4. Lehrsatz.

Wenn eine Tangente die Verlängerung einer Sehne durchschneidet, so ist das Quadrat der Tangente von dem Durchschnittspunkte bis zu dem Berührungspunkte so groß, wie ein Rechteck, welches die Sehne sammt ihrer Verlängerung zur Grundlinie und die Verlängerung zur Höhe hat.

Der Beweis muß in zwei Fällen besonders geführt werden. Die verlängerte Sehne geht nämlich entweder a) durch den Mittelpunkt, oder b) nicht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Im ersten Falle a) ist ein Kreis (Fig. 87.) mit dem Mittelpunkte A gegeben, dessen Durchmesser BC verlängert außerhalb des Kreises von der Tangente ED in D geschnitten wird. Es ist zu beweisen, daß $ED^2 = BD \times DC$.

Zum Beweise beschreibe man aus dem Mittelpunkte A durch den Durchschnittspunkt D einen Kreis, und ziehe in demselben durch den Berührungspunkt E der Tangente einen Durchmesser FG; so ist deutlich die Gleichheit der Linien FE, CD, GH; daraus folgt, daß $EG = BD$. Da nun DE auf FG winkelrecht steht (VII, 3.), so ist $ED^2 = GE \times EF$ (V, 22.); da aber $GE = BD$ und $EF = DC$, so ist auch $ED^2 = BD \times DC$.

Im zweiten Falle b) ist Fig. 88. ein Kreis mit dem Mittelpunkte A gegeben, und die Verlängerung einer Sehne BC wird von einer Tangente ED in D geschnitten; es soll nun bewiesen werden, daß $ED^2 = BD \times DC$.

Zum Beweise beschreibe man aus dem Mittelpunkte A einen Kreis durch den Durchschnittspunkt D. Verlängert man nun DB über B hinaus bis an diesen Kreis in F, so ergiebt sich leicht, wenn man von A auf BC das Loth AG fället, daß $FB = CD$, also $FC = BD$. Nun ziehe man durch den Berührungspunkt E der Tangente und durch den Punkt C des kleineren Kreises die beiden Durchmesser des größeren Kreises HI und KL; so ist die Gleichheit der Linien HE und CK leicht einzusehen. Da nun $DE^2 = HE \times EI$ (V. 22.), so ist auch $DE^2 = KC \times CL$. Und da $KC \times CL = FC \times CD$ (VI. Anh. 7.), so ist auch $DE^2 = FC \times CD$, da aber $FC = BD$, so ist $DE^2 = BD \times DC$.

Zusatz. Welcher Lehrsatz ließe sich über die Rechtecke angeben, welche durch die Abschnitte zweier Sehnen gebildet werden, die sich außerhalb des Kreises schneiden; und in wie fern würde dieser Lehrsatz mit VI. Anh. 7. übereinstimmen?