Auflösung. Es ist Fig. 109. die Linie AB gegeben; man soll den Punkt F finden, der die Linie so theilt, daß $FB^2 = BA \times AF$.

Man verlängere zu dem Ende die gegebene Linie AB um ihre eigene Länge bis C, beschreibe über AC einen Halbkreis, und errichte in B den Radius BD winkelrecht. Von D ziehe man darauf eine Linie DE nach der Mitte der Verlängerung BC, und beschreibe mit dieser Linie aus E einen Kreis, der die gegebene Linie AB in F trifft; so ist F der gesuchte Punkt, und $FB^2 = BA \times AF$.

Beweis. Da die Linie FE bei B getheilt ist, so ist $FE^2 = FB^2 + BE^2 + 2\,[FB \times BE]$ (V, Anh. 12.). Das Rechteck $FB \times BE$ wird aber verdoppelt, wenn eine Seite desselben verdoppelt wird (V, 9.); also da $BA = BC = 2BE$, so ist $2\,[FB \times BE] = AB \times BF$, daher $FE^2 = FB^2 + BE^2 + AB \times BF$.

Da ferner $FE = ED$, so ist auch $FE^2 = ED^2 = DB^2 + BE^2 = AB^2 + BE^2$. Stellen wir nun die beiden gleichen Werthe von $FE^2$ zusammen, so erhalten wir $FB^2 + BE^2 + AB \times BF = AB^2 + BE^2$. Nehmen wir zu beiden Seiten $BE^2$ hinweg; so bleibt Gleiches, nämlich $FB^2 + AB \times BF = AB^2$. Es läßt sich aber $AB^2$ nach V, 9. in die beiden Rechtecke $BA \times AF$ und $AB \times BF$ zerlegen; setzet man diese für $AB^2$, so erhält man $FB^2 + AB \times BF = BA \times AF + AB \times BF$, und wenn man nun zu beiden Seiten $AB \times BF$ hinwegnimmt: $FB^2 = BA \times AF$, was erwiesen werden sollte.

## §. 2. Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem der Winkel an der Spitze halb so groß ist, wie der Winkel an der Grundlinie.

Auflösung. Man theile nach dem vorhergehenden Paragraphen eine Linie AB Fig. 110. bei C so, daß $AC^2 = AB \times BC$, und errichte über der Grundlinie AC ein gleichschenkliges Dreieck ADC, dessen Schenkel der ganzen Linie AB gleich ist; so erfüllt dies die Bedingungen der Aufgabe, und der Winkel $ADC = \frac{1}{2} ACD$.

Beweis. Man schneide von der Spitze D auf dem Schenkel DA ein Stück DE ab, welches der Grundlinie AC gleich ist, lege durch die Punkte D, E, C, einen Kreis (VI, 15.), und ziehe EC; so läßt sich beweisen, daß AC eine Tangente dieses Kreises ist. Da nämlich $AD = AB$, und $ED = AC$, so ist auch $AE = CB$. Folglich, da $AC^2 = AB \times BC$, so ist auch