Es sind zwei gleichartige Größen, z. B. die beiden Linien AB und CD Fig. 162. gegeben, die eine AB beliebig groß, die andere CD beliebig klein. Nimmt man von der größeren AB die Hälfte BE ab, vom Reste EA wieder die Hälfte EF, vom nunmehrigen Reste FA wieder die Hälfte FG, u. s. f., so bleibt nach einer gewissen Anzahl von Wiederholungen dieser Arbeit ein Rest (GA), der kleiner ist als CD.

Beweis. Man mache von CD, ein Vielfaches HM welches größer ist als AB (in unserer Figur erfüllt schon das Vierfache diese Bedingung). Nimmt man nun von AB die Hälfte BE, von HM aber einen Theil HI, also weniger als die Hälfte ab, so muß der Rest EA kleiner sein als der Rest IM. Nimmt man ferner von EA die Hälfte EF, von IM aber wieder einen Theil IK, also weniger als die Hälfte ab, so ist der Rest AF kleiner als der Rest KM, und so ferner.

Es mögen nun der Theile auf HM so viele sein, als man will, so wird man diese Schlüsse jederzeit so weit fortsetzen können, bis auf HM nur noch zwei Theile KL und LM übrig sind. Ist nun der auf AB hiezu gehörige Rest AF, so ist erwiesen, daß AF $<$ KM. Nimmt man also endlich von jeder dieser beiden Linien die Hälfte ab, so bleiben AG und LM, und es ist AG $<$ LM, also auch AG $<$ CD, was zu erweisen war.

Nimmt man also von irgend einer Größe die Hälfte ab, vom Rest wieder die Hälfte, und so immer fort, so kann man in jedem Falle zuletzt zu einem Rest gelangen, der kleiner ist als jede gegebene, noch so kleine gleichartige Größe.

Noch vielmehr aber hat dieses seine Richtigkeit, wenn man von der Größe mehr als die Hälfte, vom Reste wieder mehr als die Hälfte, u. s. f. abnimmt.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man in einem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC Fig. 163. einen der spitzigen Winkel ACB durch die Linie CD halbirt, und in D die Linie DE winkelrecht auf CD errichtet, so ist im Dreieck CDE der Unterschied der Hypotenuse CE und der Kathete CD noch nicht halb so groß, als in dem Dreieck ACB der Unterschied der Hypotenuse CB und der Kathete CA.

Beweis. Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser CA den Bogen AF, so ist FB (= BC — FC = BC — AC) der Unterschied der Hypotenuse CB und der Kathete CA im Dreieck ABC. Man beschreibe ferner aus C mit dem Halb-