$DE = \frac{1}{2}$ BC und $DH = \frac{1}{2}$ AG ist. Beides wird aber der Fall sein, wenn $AD = \frac{1}{2}$ AB, und $AE = \frac{1}{2}$ AC ist. Aus dieser Betrachtung erhellt, wie die Punkte D und E gefunden, und das Parallelogramm $DEFB = \frac{1}{2}$ ABC vollendet werden kann.

Anmerkung. Um deutlich einzusehen, daß die Auflösung nur auf diesem Wege, nämlich durch Halbirung einer Seite oder der Höhe des Dreieckes möglich ist, stelle man die Analysis noch auf folgendem Wege an:

Es sei DEFB Fig. 175. das gesuchte Parallelogramm, $= \frac{1}{2}$ ABC. Man ziehe AG und DH winkelrecht auf BC, so läßt sich die Fläche des Dreiecks ABC ausdrücken durch $\frac{1}{2}\, AG \times BC$, und die Fläche des Parallelogramms durch $DH \times BF$; es verhält sich also

$$DF : ABC = DH \times BF : \frac{AG \times BC}{2} = 1 : 2,$$

oder $DH \times BF : AG \times BC = 1 : 4$. Da aber AG und DH parallel sind, so ist

$$AG : DH = AB : BD.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so erhält man

$$DH \times BF \times AG : AG \times BC \times DH = AB : 4\, BD,$$

und, wenn man die Glieder des ersten Verhältnisses nacheinander durch die gleichen Factoren DH und AG dividirt,

$$BF : BC = AB : 4\, BD;$$

da aber $BF = DE$ und DE parallel mit BC ist, so ist

$$BF : BC = AD : AB.$$

Folglich ist $AD : AB = AB : 4\, BD$,

mithin $AB^2 = 4\, AD \times DB$ oder $\frac{1}{4}\, AB^2 = AD \times BD$.

Dies ist aber nur möglich, wenn $AD = DB$ ist, weil das Rechteck unter zwei ungleichen Abschnitten einer Linie immer kleiner als das Quadrat der Hälfte, oder kleiner als $\frac{1}{4}$ von dem Quadrate der ganzen Linie ist (VI, Anh. 6.). Also ist $DB = \frac{1}{2}$ BA, folglich ist der Punkt D bestimmt, und das Parallelogramm DF kann nunmehr vollendet werden.

Anmerkung. Man sieht leicht ein, daß unzählige Parallelogramme zwischen den Parallelen DE und BC über der Grundlinie DE gezeichnet werden können, welche sämmtlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Eine leichte Folgerung aus dieser Aufgabe ist der folgende Lehrsatz.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn man die Seiten eines Vierecks halbirt, und die Theilungspunkte je zweier anstoßender Seiten durch gerade Li-