Koßling. 24/11. 54.

Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

zum

Gebrauch in den oberen Klassen
gelehrter Schulen

nebst

Anhängen und Anmerkungen
für solche, welche über die Gränzen des Schulunterrichtes hinausgehen wollen.

Von

Ernst Gottfried Fischer.

Erster Theil,
welcher die Ebene Geometrie enthält.

Dritte Auflage.
mit sieben Kupfertafeln.

Leipzig, 1853.
Verlag von Wilhelm Nauck.

Ernst Gottfried Fischer's

Lehrbuch

der

Ebenen Geometrie

für Schulen.

Dritte Auflage,
mit sieben Kupfertafeln.

Bearbeitet

von

Ernst Ferdinand August,
Dr. phil., Professor und Director des Cöln. Real-Gymnasiums
zu Berlin.

Leipzig, 1853.
Verlag von Wilhelm Nauck.

Aus dem

Vorwort zur ersten Auflage.

Das Lehrbuch, welches hier der Verfasser zu liefern anfängt, ist kein flüchtig erzeugtes Product, es ist das Resultat von mehr als vierzigjährigen Versuchen, Beobachtungen und Erfahrungen über die zweckmäßigste Behandlung der Mathematik auf Schulen. Die Materialien dazu sind seit länger als dreißig Jahren in Ueberfluß gesammelt, durch wirkliche Anwendung bei dem Unterricht geprüft, zum Theil oft umgearbeitet, und endlich in eine solche Anordnung gebracht worden, daß sich der erwünschteste Erfolg davon bei dem Unterricht bewährt hat. Schulmänner, welche diesem Lehrbuch die Ehre erzeigen möchten, es bei dem Unterricht zum Grunde zu legen, oder auch nur zu Rathe zu ziehen, können mit völliger Sicherheit darauf rechnen, daß die Erscheinung der übrigen Bände ununterbrochenen Fortgang haben wird, selbst wenn der Verfasser durch Krankheit oder durch den Tod verhindert werden sollte, sein Werk selbst zu vollenden. Denn die Handschriften aller Theile sind längst vollendet, und bedürfen nur der letzten Feile. Und an geschickten Händen, diese zu führen, würde es auch nach dem Tode des Verfassers nicht fehlen. Denn er genießt des Glückes, unter seine vertrauteren Freunde mehrere jüngere kraftvolle Männer zu zählen, welche von gleichem Eifer für den mathematischen Unterricht beseelt, und über die zweckmäßigste Behandlung desselben mit ihm völlig einverstanden sind. Er ist überzeugt, daß diese, wenn die Vorsehung vor Vollendung des Werkes über sein Leben gebieten sollte, gern die Vollendung als ein Vermächtniß eines alten Freundes und Lehrers übernehmen würden.

Eine sichre Bürgschaft für die Erfüllung dieser Bitte ist die uneigennützige Bereitwilligkeit, mit welcher sie den Verfasser schon bei der Herausgabe dieses ersten Theiles auf das freundschaftlichste unterstützt haben. Der Verfasser fühlt sich zu öffentlichem Dank namentlich verpflichtet, gegen seinen nächsten Amtsgenossen bei dem mathematischen Unterricht, den Herrn Professor Schulz*), gegen seinen ehemaligen Schüler, und jetzigen werthen Amtsgenossen, den Herrn Oberlehrer August**), und gegen den Schulamts-Candidaten Herrn Zelle***), der gleichfalls vormals ein Schüler des Verfassers gewesen. Diese Freunde haben sich um das Buch verdient gemacht, nicht nur durch sorgfältige Correkturen, Besorgung von Abschriften, Anfertigung von Kupfertafeln u. s. f., sondern sie haben auch durch schätzbare Beiträge den Werth des Buchs erhöht. Der Aufsatz am Ende des Buches über die geometrische Analysis ist eine Arbeit des Herrn Professor Schulz. Von den Anhängen zu Abschnitt VI., VII., VIII. und X., mehrere andere kleinere Beiträge ungerechnet, ist Herr Oberlehrer August der Verfasser.

Wie sehr der Herr Verleger und Buchdrucker sich bestrebt haben, in Ansehung der äußeren Deutlichkeit, Richtigkeit und Schönheit des Druckes keinen Wunsch übrig zu lassen, wird der Leser auch ohne Erinnerung des Verfassers bemerken.

Möge die Vorsehung zur Erreichung des reinen gemeinnützigen Zwecks, den der Verfasser bei der Bekanntmachung dieses Lehrbuches hat, ihr Gedeihen geben.

Berlin im April 1820.

Der Verfasser.

---

*) Den im Jahre 1848 verstorbenen Schulrath Dr. Otto Schulz.
**) Den jetzigen Director des Kölnischen Real-Gymnasii.
***) Jetzt Professor am Berlinischen Gymnasium.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der Herausgeber der gegenwärtigen zweiten Auflage versprach im Vorbericht zum dritten Theile des Auszuges von demselben Werke, daß er ungesäumt zur Herausgabe des noch fehlenden fünften Theiles, welcher die Stereometrie und die Anfangsgründe der mathematischen Bewegungslehre enthält, schreiten würde. Da indeß der Herr Verleger ihm anzeigte, daß der erste Theil beinah vergriffen wäre, so schien es, da dieser Theil auf Schulen mehr gebraucht wird, als vom fünften zu erwarten steht, zweckmäßig, zuvörderst die neue Auflage zu besorgen.

Ueber diese neue Auflage selbst erlaubt sich der Herausgeber nur einige Worte. Die gemachten Veränderungen sind nicht zahlreich und nicht sehr bedeutend. Bei einem Schulbuche, welches in dreitausend Exemplaren in Umlauf ist, würden durchgreifende Veränderungen zu manchen Unbequemlichkeiten im gleichzeitigen Gebrauche beider Auflagen Anlaß gegeben haben. Dieser Grund indeß als ein zum Theil äußerlicher, würde den Herausgeber nicht bestimmt haben, Veränderungen, welche er für nothwendig oder nützlich erachtet hätte, zu unterlassen; sondern er hat in der That die Ueberzeugung, daß das Buch in seiner ersten Gestalt auf das zweckmäßigste für den Unterricht eingerichtet sei. Er hat diese Ueberzeugung gewonnen durch eine mehr als zehnjährige Erfahrung, da er nach einander, nach sämmtlichen Theilen des Buches unterrichtete, und so also im Stande war, über die Anwendbarkeit desselben beim Schulunterrichte, wozu es geschrieben ist, ein Urtheil zu erhalten.

Es ist gewiß, daß jeder Lehrer, der sich eines nicht von ihm selbst entworfenen Leitfadens bedient, im Einzelnen anderer Ansicht sein wird, und oftmals mit mehr Glück einen andern Weg, je nach seiner Eigenthümlichkeit einschlagen kann. Daher muß ein Schulbuch so eingerichtet sein, daß es, den allgemeinen Zweck der Schule nie vergessend, dem Lehrer dennoch Freiheit beim Gebrauche läßt, und diese gewährt das vorliegende Lehrbuch. Denn seine Haupteigenthümlichkeit besteht darin, daß sich bei beständiger Klarheit und Faßlichkeit ein stufenmäßiges Fortschreiten in der Strenge der Methode, nach der Fassungskraft des vorwärts geführten Schülers, findet; daß es ferner im Einzelnen beständige Rücksicht nimmt auf die Uebung der Urtheilskraft, und endlich dahin zu leiten sucht, das deutlich Gedachte auch bestimmt und klar in Worten auszudrücken.

Der Verfasser wollte aber, wie er selbst an mehreren Orten sagt, kein strengwissenschaftliches System, als für den Unterricht nicht immer passend, liefern, sondern indem er nur bei allen einzelnen Gegenständen sich bemühte, das Streben nach Deutlichkeit und Gründlichkeit im Schüler zu erwecken und auszubilden, wollte er ihn befähigen, später ein wissenschaftliches System aufzufassen; so gab er auch in seinem Buche eine größere Anzahl von Sätzen, als zur Begründung der spätern Abschnitte schlechthin nothwendig war, und theilte sie möglichst nach dem Inhalte ab. Es ist klar, wie eine solche Anordnung dem Lehrer mehr Freiheit überläßt als ein aus einem Princip abgeleitetes streng wissenschaftliches System von Sätzen, in welchem jeder einzelne Satz nur eine bestimmte Stelle haben kann, und oft auch nur eine einzige bestimmte Beweisart gestattet.

Die Veränderungen der neuen Auflage, welche bestehen in Hinzufügung einiger nur aus Versehen ausgelassener Sätze, Trennung und Umstellung einiger andern, rühren zum Theil noch vom Verfasser her, der schon einige Materialien für eine neue Auflage gesammelt hatte, andere hat der Herausgeber zum Theil noch mit dem seeligen Verfasser, seinem Vater, besprochen. Bei allen Veränderungen ist Sorge getragen, daß nirgend die Folge der Paragraphen so gestört ist, daß nicht beide Auflagen neben einander gebraucht werden könnten.

Seinem geschätzten Collegen dem Herrn Professor Zelle ist der Herausgeber bei dieser zweiten Auflage, so wie sein seeliger Vater bei der ersten, zum größten Dank verpflichtet für die Liebe, mit welcher er sich der schwierigen Correktur unterzogen.

Schließlich wünscht der Herausgeber dem Buche in seiner zweiten Auflage dieselbe freundliche Aufnahme, deren sich die erste zu erfreuen hatte, und hofft recht bald durch Herausgabe des fünften Theiles das Werk zu vollenden.

Berlin am 8ten November 1832.

Dr. E. Fischer.
Professor am Berlinischen Gymnasium zum grauen Kloster.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die Trefflichkeit des Fischerschen Lehrbuchs der Mathematik hat diesem ersten Theile desselben, eine, manche andre Werke dieser Art überdauernde Benutzung an vielen Gymnasien erhalten. Sehr gern habe ich daher den Auftrag des Herrn Verlegers erfüllt, auch die dritte Auflage desselben im Geiste ihres ersten Verfassers zu bearbeiten. Sollte dasselbe aber in der Eigenthümlichkeit bewahrt bleiben, die ihm unstreitig, da, wo es eingeführt ist, seinen Werth giebt; so durfte nicht viel abgeändert werden. Fischer, der Vater, hatte, wie der Sohn anerkannt, überall das rechte Maaß für die praktische Unterweisung der Jugend gefunden. Auch der Uebergang aus den mechanischen Lösungen der Aufgaben in die theoretischen gehörte dahin, indem sie den Schüler auf die seinem Fassungsvermögen am meisten entsprechende Weise in die Anfänge der Wissenschaft einführt. An allen diesen Dingen war nicht zu rütteln, ohne das Wesen der Fischerschen Methode aufzugeben. Daher erscheint diese dritte Auflage nur sehr wenig verändert und in Einzelheiten berichtigt. Zu den letzteren darf der strengere Nachweis, daß Linien von ungleicher Richtung sich schneiden müssen I. §. 25. 4. gerechnet werden. Das Lehrbuch, welches die Parallelen als gleichgerichtete Linien erklärte, entbehrte dieser strengeren Ableitung bis jetzt. Vieles Andere ist etwas schärfer gefaßt und mancher Beweis ist abgekürzt worden, wie dem aufmerksamen Lehrer, der dies Buch bei dem Unterricht anwendet, nicht entgehen wird.

Möge der Wunsch, den mein seliger Schwiegervater am Schlusse der Vorrede des Jahres 1820 aussprach und der reichlich in Erfüllung gegangen ist, an dessen Ausführung auch mein seliger Schwager durch Bearbeitung der zweiten Auflage (1832) wirksam gewesen ist, jetzt auch durch Benutzung dieser dritten Auflage immer erfreulicher zum Wohle der Jugend erreicht werden. Es war mir eine Freude, an die Arbeit, die sich an meine früheste Lehrerthätigkeit knüpft, wie die erste Vorrede angiebt, auch jetzt nach einem Drittelsäculum wieder erinnert und in die schöne Zeit der Begeisterung für die allseitige Entwickelung des Schullebens zurückversetzt zu werden. Die Freude war um so größer, als die Vergleichung mit der Gegenwart zeigte, daß viel Gutes glücklich erreicht ist.

Dr. E. F. August.

Anfangsgründe

der

Ebenen Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von Linien und Winkeln.

§. 1. Grund=Begriff.

Wir können uns die bloße Gestalt eines Körpers nach seiner ganzen Größe und Ausdehnung vorstellen, ohne uns den Körper selbst mitvorzustellen. Eine solche vorgestellte körperliche Gestalt nennt man einen geometrischen Körper.

Nach wieviel Hauptrichtungen kann ein geometrischer Körper abgemessen oder betrachtet werden, und wie nennt man diese Abmessungen (oder Dimensionen)?

§. 2. Grund=Begriff.

Die äußersten Gränzen einer körperlichen Gestalt heißen Flächen. Haben alle Theile einer Fläche gleiche Lage, so heißt sie eben oder eine Ebene; uneben oder gekrümmt heißt sie, wenn kein Theil derselben eben ist. Wären einige Theile einer Fläche eben, andere uneben, so wäre es eine aus mehreren zusammengesetzte Fläche.

Finden bei einer Fläche so viel Dimensionen Statt wie bei einem Körper? Welche finden Statt und welche nicht?
Sind die Wörter Fläche und Ebene gleichbedeutend? Welches hat die weitere, welches die engere Bedeutung?
Obgleich kein Theil einer gekrümmten Fläche eben sein darf, so fragt sich doch, ob man unter gar keiner Bedingung einen Theil einer gekrümmten Fläche als eben betrachten könne?

§. 3. Grund=Begriff.

Die äußersten Gränzen einer Fläche heißen Linien. Sie heißen gerade, wenn alle Theile derselben gleiche Lage haben, oder in derselben Richtung liegen; sie heißen krumm, wenn kein Theil derselben gerade ist. Eine Linie, von welcher einige Theile gerade, andere gekrümmt wären, würde eine zusammengesetzte oder gebrochene Linie sein.

Wo kein Mißverständniß zu besorgen ist, nennt man gerade Linien auch schlechthin Linien.

Finden bei einer Linie so viel Dimensionen Statt, wie bei einer Fläche oder bei einem Körper? Welche finden Statt und welche nicht?

Obgleich kein Theil einer krummen Linie gerade sein darf, so kann man doch fragen, ob unter gar keiner nähern Bestimmung ein Theil einer krummen Linie als gerade betrachtet werden könne?

§. 4. Grund-Begriff.

Die äußersten Gränzen einer Linie heißen Punkte.

Finden bei einem Punkte so viel Abmessungen Statt wie bei einer Linie, Fläche, oder bei einem Körper? Welche finden Statt, und welche nicht?

§. 5. Zusätze.

In diesem §. soll die Raumspur eines bewegten Punktes einer bewegten Linie, einer bewegten Ebene und eines bewegten Körpers betrachtet, und die Gestalt derselben beschrieben werden. Es sind daher folgende Fragen zu beantworten:

a) Wenn sich ein Punkt bewegt, was ist die Raumspur, welche er zurückläßt? — Die beste Antwort würde sein: Eine Linie; denn da der Punkt fortrückt, so wird seine Spur eine Länge, hat aber weder Breite noch Dicke, weil der Punkt selbst diese nicht hat. — Nach diesem Muster sind auch die folgenden Fragen zu beantworten.

Welches ist die Raumspur

b) einer geraden Linie, wenn sie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt?
c) einer geraden Linie, wenn sie in einer andern als ihrer eigenen Richtung fortrückt?
d) einer Ebene, wenn sie in ihrer eigenen Lage sich fortbewegt?
e) einer Ebene, wenn sie in irgend einer andern Richtung fortrückt?
f) eines geometrischen Körpers, wenn er sich in irgend einer Richtung bewegt?

Raumspur ist der Inbegriff aller Punkte, durch welche die Punkte des Bewegten hindurch gegangen sind.

§. 6. Foderungs-Satz.

In der Vorstellung kann man einen Punkt setzen, wo man will. Mit der Hand kann man nur ein unvollkommenes Bild desselben darstellen. — Die hierzu nöthigen Werkzeuge sind: eine Punktirnadel, ein Bleistift oder eine Ziehfeder, deren Einrichtung und Gebrauch bei dieser Gelegenheit zu beschreiben ist.

Warum ist ein mit der Hand gezeichneter Punkt kein wahrer Punkt.

Wenn ein oder mehrere Punkte auf eine Tafel oder auf Papier gezeichnet sind, wie werden sie bezeichnet, um sie, wenn man von ihnen spricht, unterscheiden zu können?

§. 7. Foderungs-Satz.

Vorstellen kann man sich eine gerade Linie zwischen jeden zwei angenommenen Punkten, lägen diese auch an Orten, zu denen man nicht kommen kann, (z. B. im Mittelpunkte der Sonne, des Mondes, der Erde u. s. f.). Stellt man sich die Linie blos zwischen diesen Punkten vor, so heißt sie eine begränzte und die Punkte sind ihre Gränzen. In der Vorstellung kann aber auch eine solche Linie ganz beliebig, so weit man will, zu beiden Seiten verlängert werden. Sind die Endpunkte solcher Verlängerungen nicht bestimmt, so nennt man die Linie eine unbegränzte. — Mit der Hand kann auf dem Papier nur ein mangelhaftes Bild einer geraden Linie gezeichnet werden. — Außer den im vorigen §. genannten Werkzeugen braucht man dazu noch ein Lineal.

Wie verfährt man a) bei der Zeichnung einer Linie zwischen zwei gegebenen Punkten, b) bei der Verlängerung einer Linie?
Warum ist eine gezeichnete gerade Linie keine wahre Linie?
Wie wird eine gerade Linie bezeichnet?
Wie kann man prüfen, ob ein Lineal sorgfältig gearbeitet sei?

§. 8. Grund-Sätze.

Von der geraden Linie sind folgende Eigenschaften zu bemerken, die sich unmittelbar aus der Vorstellung von derselben ergeben:

a. Alle Theile derselben haben eine und dieselbe Richtung.

b. Eine unbegränzte gerade Linie theilt die ganze Ebene, in welcher sie liegt, in zwei Stücke, welche weiter nichts als eben diese Linie gemein haben. — Daher hat eine Linie zwei Seiten, obgleich sie keine Breite hat.

c. Ein in einer geraden Linie angenommener Punkt theilt dieselbe in zwei Stücke, die nichts als diesen Punkt gemein haben.

d. Eine begränzte gerade Linie ist die kürzeste aller der Linien, welche zwischen ihren Endpunkten gezogen werden können. Daher ist die Entfernung zweier Punkte diese gerade Linie zwischen denselben.

e. Wenn man zwischen denselben zwei Punkten zwei oder mehrere gerade Linien zieht, so decken sie sich, d. h. sie fallen in eine einzige zusammen.

f. Wenn zwei gerade Linien einen Punkt gemein haben, ohne zusammenzufallen, so schneiden sie sich (gehörig verlängert) in diesem Punkte, d. h. dieser Punkt theilt jede Linie in zwei Stücke, die auf verschiedenen Seiten der anderen liegen.

g. Durch jeden Punkt in einer Ebene lassen sich unzählige Linien ziehen, von denen jede eine andere Richtung hat.

Die Sätze von c) an können an leicht zu erfindenden Figuren deutlich gemacht werden; besonders wird es eine gute Uebung für den Anfänger sein, wenn er in Bezug auf g) versucht, recht viele feine Linien durch einen einzigen Punkt mit der Ziehfeder zu ziehen, ohne daß sie in der Nähe des Punktes merklich zusammenfließen.

§. 9. Grund-Begriff.

Wenn zwei gerade Linien aus einem Punkte auslaufen, ohne sich zu decken; so haben sie verschiedene Richtungen, und der Unterschied ihrer Richtungen heißt **ein Winkel**. Je stärker ihre Richtungen von einander abweichen, desto größer ist der Winkel, den sie einschließen.

a. Was bedeuten die Wörter Spitze oder Scheitelpunkt, desgleichen Schenkel bei einem Winkel?

b. Wie wird ein Winkel mit Buchstaben bezeichnet?
c. Wenn an der Spitze eines Winkels ein Buchstab, an jedem Schenkel aber in verschiedenen Punkten zwei Buchstaben stehen, auf wie vielerlei Art kann man den Winkel lesen?
d. Wenn ein Winkel in zwei oder mehrere Stücke zerlegt werden soll, wie muß dieses geschehen?
e. Wie beurtheilt man, ob zwei Winkel gleich oder ungleich sind, und welcher von beiden in dem letzteren Falle der größere sei?
f. Wieviel befinden sich in Fig. 1 a) einfache Winkel? b) wieviel Doppelwinkel, d. h. solche, die aus zweien zusammengenommen bestehen? — Diese Winkel sollen sämmtlich aufgezählt, und jeder nach c) auf so viele Arten, als es angeht, benannt werden.

§. 10. Erklärung.

Wenn zwei Winkel einen Schenkel gemein haben, die beiden anderen Schenkel aber eine einzige gerade Linie bilden, so nennt man sie Nebenwinkel.

a. Anwendung dieser Erklärung auf Fig. 2.
b. Wieviel Paare von Nebenwinkeln lassen sich in Fig. 3 und in Fig. 1 aufzählen?

§. 11. Erklärung.

Wenn zwei Nebenwinkel gleich groß sind, so nennt man sie rechte Winkel; sind sie aber ungleich, so heißen sie schiefe Winkel. — Wenn ein schiefer Winkel kleiner ist als ein rechter, so heißt er ein spitziger; wenn er größer ist, ein stumpfer Winkel.

a. Anwendung dieser Begriffe auf Fig. 4 und 2.
b. Wie wird man bei einem einzelnen Winkel unterscheiden können, ob er ein rechter, spitziger oder stumpfer ist?
c. Kann ein rechter Winkel größer sein, als irgend ein anderer rechter Winkel?
d. Was bedeutet das Wort winkelrecht (wofür man auch senkrecht und lothrecht sagt)? Was bedeutet das Wort Loth in der Geometrie? Kann eine einzelne gerade Linie für sich allein winkelrecht genannt werden?
e. Mit welchem Werkzeuge kann man winkelrechte Linien ziehen? Wie kann man prüfen, ob das Instrument sorgfältig gearbeitet sei?

§. 12. Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie und in derselben ein Punkt gegeben; man soll in diesem auf mechanische Weise eine winkelrechte Linie errichten.

Wie ist zu diesem Zwecke der Winkelhaken oder das rechtwinklige Dreieck zu handhaben?

Anmerkung. Die hier gegebene Auflösung, so wie die übrigen in diesem Abschnitt vorkommenden, nennt man mechanische, d. h. solche, wobei die Hand, das Auge und körperliche Werkzeuge gebraucht werden. Die eigentlich geometrischen Auflösungen derselben Aufgaben kommen in einem folgenden Abschnitte vor.

§. 13. Aufgabe.

Es ist eine gerade Linie und außerhalb derselben ein Punkt gegeben; man soll von diesem auf mechanische Weise eine winkelrechte Linie auf die gegebene fällen.

Wie ist in diesem Falle das Instrument zu gebrauchen? Kann es vorkommen, daß man die gegebene Linie verlängern muß?

§. 14. Lehrsatz.

Jede zwei Nebenwinkel betragen zusammengenommen so viel als zwei rechte.

Wenn die gegebenen Nebenwinkel gleich sind, so sind sie schon nach §. 11 zwei rechte. Sind sie aber ungleich, so läßt sich leicht zeigen, daß, um wieviel der stumpfe größer ist als ein rechter Winkel, um eben so viel der spitzige kleiner sei. Dieses ist in Beziehung auf Fig. 5 auszuführen.

Hierbei ist noch die Frage zu beantworten: Was läßt sich von zwei Winkeln sagen, welche Nebenwinkel gleicher Winkel sind?

§. 15. Zusatz.

Wenn man (wie in Fig. 3) aus einem Punkte einer Linie mehrere Linien in verschiedenen Richtungen zieht, aber alle auf einer Seite der gegebenen, so fragt sich:

a) wieviel die sämmtlichen einfachen Winkel zusammengenommen betragen?

b) Auch ist zur Uebung anzugeben, wieviel einfache, wieviel Doppelwinkel, wieviel drei=, vier= und fünffache Winkel es in dieser Figur gebe?

§. 16. Zusatz.

Wenn man aus einem einzigen Punkte (wie in Fig. 6) mehrere Linien in beliebigen Richtungen rings um denselben zieht, so fragt sich:

wieviel die einfachen Winkel zusammen betragen?

§. 17. Erklärung.

Wenn die Schenkel eines gegebenen Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert sind, so heißen der gegebene und der zwischen den Verlängerungen enthaltene: **Scheitelwinkel** (Verticalwinkel).

Anwendung der Erklärung auf Fig. 7. Auch ist die Frage zu beantworten, ob in der Figur nur **ein** Paar zusammengehöriger Scheitelwinkel vorhanden sei?

§. 18. Lehrsatz.

Jede zwei zusammengehörige Scheitelwinkel sind einander gleich.

Der Beweis läßt sich mit Rücksicht auf §. 14 an der 7. Figur führen. Die Ausführung desselben wird leicht, wenn man sich die Fragen vorlegt: wie viele Paare von Nebenwinkeln kommen in dieser Figur vor, und was ist von diesen §. 14 bewiesen worden? Auch wird es auf diese Art nicht schwer sein, Abänderungen im Beweise zu finden.

§. 19. Aufgabe.

Es ist ein spitziger Winkel und eine gerade Linie gegeben; an einem bestimmten Pnnkt dieser Linie soll auf mechanische Weise ein Winkel, so groß wie der gegebene, in einer vorgeschriebenen Lage angelegt werden.

Ehe die Auflösung zu versuchen ist, stelle man vorher folgende Betrachtung an. Wäre BAC in Fig. 8 der gegebene Winkel und BB′ in Fig. 9 die gegebene Linie, an die in dem bestimmten Punkte A der Winkel angelegt werden soll; so sieht man leicht ein, daß dies in vier verschiedenen Lagen geschehen könne; nämlich entweder über oder unter BB′ und in beiden Fällen von A aus, entweder nach der einen oder nach der andern Seite hin. Dies ergiebt sich, wenn man annimmt, daß die Winkel BAC, B'AC', B'AC'', BAC''' einander gleich sind. Sollte daher die Aufgabe bestimmt sein, so durften die Worte: in vorgeschriebener Lage nicht fehlen.

Es lassen sich mehrere mechanische Auflösungen dieser Aufgabe ausdenken, von denen wir folgende drei bemerken:

1. Unter das Papier, worauf der gegebene Winkel gezeichnet ist, lege man ein anderes und steche mit der Punktirnadel feine Löcher durch die Spitze des Winkels und durch je einen anderen Punkt auf jedem Schenkel, so begreift man leicht, wie man den gegebenen Winkel auf dem zweiten Papier zeichnen, und ihn ferner an die gegebene Linie anlegen könne. Die Aufgabe wird auch aufgelöst, wenn man von jedem Schenkel zwei Punkte mittelst Durchstichs abträgt.
2. Auch kann man den Winkel vermittelst des rechtwinkligen Dreiecks abtragen. (Nach Anleitung der Figuren 8, 10, 11.)
3. Endlich kann man auch ein Instrument benutzen, das von diesem Gebrauch den Namen Transporteur (Ueberträger, Winkelabträger) erhalten hat.

a. Diese drei Arten sind in den Heften vollständiger zu beschreiben.
b. Wenn der zu zeichnende Winkel stumpf ist, so kann das erste und dritte Verfahren ungeändert angewendet werden. Kann man in diesem Falle auch das zweite Verfahren anwenden? (Man beachte §. 14.)

§. 20. Erklärung.

Wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten acht Winkel. Von diesen nennt man:

a) diejenigen, welche zwischen den durchschnittenen Linien liegen, innere; diejenigen, welche außerhalb derselben liegen, äußere Winkel.

b) Ein äußerer Winkel an dem einen Durchschnittspunkte, und ein innerer an dem andern, beide auf derselben Seite der schneidenden Linie, heißen Gegen-Winkel.

c) Zwei innere Winkel an beiden Durchschnittspunkten, die auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegen, heißen Wechsel-Winkel.

Diese Erklärungen sind auf Fig. 12 anzuwenden. Bei a) müssen die sämmtlichen inneren und äußeren Winkel aufgezählt werden. Bei b) ist zu bestimmen, wie viel Paare von Gegenwinkeln, und bei c), wie viele Paare von Wechselwinkeln vorhanden sind. Auch müssen alle diese Paare vollständig aufgeführt werden.

§. 21. Erklärung.

Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche, ohne aufeinander zu fallen, gleiche Richtung haben, heißen **parallele** oder **gleichlaufende** Linien.

An die Erläuterung durch eine Zeichnung knüpfe man (nach §. 9) die Beantwortung der Frage: Wenn man in einer Ebene mehrere Linien nach einem einzigen Punkte hin zieht, haben diese Linien gleiche oder ungleiche Richtung? Auch ist anzugeben, wie man die Parallelität zweier Linien bezeichnet?

§. 22. Lehrsatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder a) zwei Gegenwinkel gleich sind, oder daß b) zwei Wechselwinkel gleich sind, oder daß c) zwei innere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zwei rechte betragen, so sind die Linien parallel.

Beweis von a). Angenommen, daß in Fig. 13 die Linien AB und CD von der dritten EF unter gleichen Gegenwinkeln EFB und FGD geschnitten werden, so ist zu beweisen, daß AB und CD parallel sind, d. h. nach §. 21, daß sie gleiche Richtung haben.

Da die Gegenwinkel EFB und FGD gleich sind, so weicht die Richtung der Linie FB von der Richtung der Linie FE eben so stark und nach eben der Seite ab, wie die Richtung der Linie GD von der Richtung der Linie GF; da nun die Theile FE und GF der schneidenden Linie EH nach §. 8 a eine und dieselbe Richtung haben, FB und GD aber von dieser gleich stark und auf völlig gleiche Art abweichen: so müssen sie (oder die ganzen Linien AB und CD) nothwendig selbst eine gleiche Richtung haben, also parallel sein.

Es ist nun noch übrig, den Beweis von a) und c) auszuführen, welches nicht schwer ist, denn nach §. 18 läßt sich beweisen, daß, wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, auch zwei Gegenwinkel gleich sein müssen; eben so nach §. 14, daß, wenn zwei innere Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie zwei rechte betragen, gleichfalls zwei Gegenwinkel gleich sein müssen. Der Beweis läßt sich also in den beiden letzten Fällen auf den ersten zurückführen.

Hierbei sind folgende Fragen zu beantworten:

1) Enthält der §. nur einen oder drei Lehrsätze und wie lautet im letzteren Falle jeder für sich?

2) Welches ist im §. der Vordersatz oder die Voraussetzung, und welches ist der Nachsatz oder die Folgerung?
3) Wenn zwei Linien auf einer dritten winkelrecht stehen, was folgt für diese Linien aus dem Paragraphen?

§. 23. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten durchschnitten werden, so sind a) jede zwei Gegenwinkel gleich, auch sind b) jede zwei Wechselwinkel gleich und c) betragen jede zwei innere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie zusammengenommen zwei rechte.

Beweis von a). Wenn AB und CD Fig. 13 als parallel angenommen werden, so ist zu beweisen, daß jede zwei Gegenwinkel, z. B. EFB und FGD gleich sind.

Da FB und GD als parallele Linien gleiche Richtung haben, (§. 21) so müssen sie von der Richtung der Linie EH auf gleiche Art und gleich stark abweichen, d. h. nach §. 9: die Winkel EFB und FGD müssen gleich sein.

Der Beweis von b) und c) kann leicht auf ganz ähnliche Art wie im vorigen §. auf a) zurückgeführt werden.

Hierbei sind folgende Fragen zu beantworten:

1) Wie lautet jeder der drei im §. enthaltenen Sätze einzeln?
2) Welches ist in diesem §. der Vordersatz und welches der Nachsatz?
3) Ist es nothwendig, daß ein Vordersatz und sein Nachsatz immer durch wenn und so geschieden seien? Könnte man z. B. die Erklärung §. 21 so in zwei Sätze spalten, daß der eine Vordersatz und der andere Nachsatz würde?
4) Worin unterscheiden sich die Lehrsätze §. 22 und 23 von einander, und was heißt es, einen Satz umkehren?
5) Läßt sich jeder richtige Satz geradehin umkehren? z. B. folgender: Wenn ein Thier ein Vogel ist, so hat es Flügel?

§. 24. Aufgabe.

Es ist eine Linie gegeben und außerhalb derselben ein Punkt; durch diesen soll auf mechanische Weise eine Parallele mit der gegebenen Linie gezogen werden.

Die Aufgabe läßt sich auf mehr als eine Art mechanisch auflösen. Eine bei kleinen Zeichnungen vorzüglich bequeme ist die Fig. 14 vorgestellte, wobei ein Lineal und ein Dreieck gebraucht werden.

In der Figur ist AB die gegebene Linie und C der gegebene Punkt.

Es ist genau anzugeben, wie das Dreieck DEF und dann das Lineal GH angelegt, und das Dreieck fortgerückt werden muß, daß bei D und d gleiche Gegenwinkel entstehen.

Anmerk. Von andern Werkzeugen zur Zeichnung paralleler Linien bemerke man noch zwei:

1) das Parallel-Lineal, nicht etwa seiner besondern Brauchbarkeit wegen, sondern weil es sich in sehr vielen Reißzeugen vorfindet.
2) die Reiß-Schiene oder das Anschlage-Lineal, ein sehr brauchbares und fast unentbehrliches Werkzeug, wenn man auf einem Reißbrett arbeitet. Sind die Kanten eines Reißbretts recht gerade und die Ecken genau winkelrecht gearbeitet, und ist die eine Hälfte des Anschlags der Schiene fest, die andere beweglich, doch so, daß sie in jeder Lage festgeschraubt werden kann, so lassen sich mehrere geometrische Aufgaben bequem auflösen, besonders ist es leicht, winkelrechte und parallele Linien zu ziehen.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, daß er sich in seinem Uebungshefte in der Zeichnung paralleler Linien fleißig übe. Es lassen sich dabei zur Vermeidung der Einförmigkeit allerlei Abänderungen anbringen. Die gegebene Linie kann wagrecht oder senkrecht oder schräge liegen, und der gegebene Punkt kann über oder unter derselben, über ihrer Mitte oder seitwärts, nahe oder entfernt liegen u. dgl. m.

§. 25. Zusätze.

1) Wenn zwei Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Dieses folgt unmittelbar aus der Erklärung §. 21; es fragt sich nur: Wie?

2) Zwei parallele Linien können nie zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängern mag.

Hierbei ist zu zeigen:

a) wie dieses aus §. 21 verglichen mit §. 9 folget.
b) ist die Frage zu beantworten: ob man sagen könne, zwei Linien treffen in unendlicher Entfernung zusammen? Bei Beantwortung der Frage muß man nur überlegen, welchen Sinn die Worte: in unendlicher Entfernung haben.

3) Wenn eine gerade Linie sich parallel mit sich selbst an einer andern geraden Linie fortbewegt, so kommt sie in alle

Lagen, welche eine Linie derselben Richtung in der Ebene annehmen kann.

Stellt man sich vor, daß die Linie AB längs der Linie EH so fortgeschoben wird, daß sie immer dieselbe Richtung behält, so kommt sie in die Lage CD und in jede andere Lage, welche in der Ebene, in welcher die geraden Linien EH und AB sich anfänglich befinden, für eine Linie, die mit AB gleiche Richtung hat, nur irgend denkbar ist.

4) Nicht parallele Linien müssen sich schneiden.

Wenn die Linien AB und DF (Fig. 15) ungleiche Richtung haben, so läßt sich von A aus eine Linie AC parallel mit DF legen und an BA so fortschieben, daß sie mit AC immer parallel bleibt (d. h. gleiche Gegenwinkel bildet). Diese Linie muß daher auch einmal in die Lage kommen, welche DF hat. (nach Nr. 3.) Gesetzt dies sei der Fall, wenn sie parallel mit sich selbst aus der Lage AC in die Lage GF gelangt ist, so schneidet sich die Linie BA verlängert mit der verlängerten Linie DF im Punkte G. So in allen ähnlichen Fällen.

5) Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder a) zwei Gegenwinkel, oder b) zwei Wechselwinkel ungleich sind, oder c) zwei innere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie mehr oder weniger als zwei rechte betragen, so treffen die Linien auf der Seite zusammen, wo entweder a) der kleinere innere Gegenwinkel, oder b) der kleinere Wechselwinkel ist, oder c) die inneren Winkel zusammen weniger betragen, als zwei rechte.

Aus der Ungleichheit der Gegenwinkel u. s. w. läßt sich auf ähnliche Art wie in §. 22 zeigen, daß die durchschnittenen Linien ungleiche Richtung haben, also nach Nr. 4) sich schneiden müssen. Nach welcher Seite hin sie zusammentreffen müssen, ergiebt sich leicht, wenn man durch den Durchschnittspunkt einer dieser beiden Linien mit der dritten eine Parallele zu der andern zieht, welche diese nach Nr. 2) nie trifft und also auch auf einer Seite das Zusammentreffen der zuerst gegebenen beiden Linien unmöglich macht.

6) Linien in einer Ebene, welche sich verlängert nie schneiden, sind parallel.

Denn wären sie nicht parallel, so müßten sie sich schneiden (nach Nr. 4). Das ist aber wider die Voraussetzung.

Anmerk. Nr. 6. ist die Euklideische und allgemein eingeführte

Erklärung der Parallellinien, welche der Verf. aus Gründen, die in der Stereometrie und in den Anmerkungen zu diesem Lehrbuch ausgeführt sind, vermied.

§. 26. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel parallele Schenkel haben, die von den Scheitelpunkten aus in beiden Winkeln entweder nach derselben, oder in beiden nach entgegengesetzten Seiten laufen, so sind diese Winkel gleich.

Wenn zwei gerade Linien, welche sich durchschneiden, zweien anderen geraden Linien, welche sich durchschneiden, parallel sind, so haben die Bestandtheile des einen Linienpaares, einzeln verglichen, gleiche Richtung mit den Bestandtheilen des andern Linienpaares. Es muß also auch die Richtungsabweichung des einen Linienpaares der Richtungsabweichung des anderen Linienpaares gleich sein. Daraus folgt der Satz mit seinen verschiedenen in Fig. 15 und 16 dargestellten Fällen, die einzeln genau zu entwickeln sind.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn wiederum zwei Winkel parallele Schenkel haben, aber so, daß von den Scheitelpunkten aus den Linien des einen Paares nach derselben, und die des anderen Paares nach entgegengesetzten Seiten liegen; so betragen diese Winkel zusammengenommen zwei rechte.

Der Beweis ergiebt sich aus der Bemerkung zum vorigen §. mit Anwendung auf Fig. 17.

Zweiter Abschnitt.

Erste Begriffe von ebenen Figuren, besonders vom Kreise und von den Dreiecken.

§. 1. Erklärung.

Eine von allen Seiten begränzte Ebene heißt eine **ebene Figur**.

Hierbei sind folgende Fragen zu beantworten:

a. Was ist die Seite und was ist der Perimeter (Umfang) einer Figur?

b. Wie theilt man die ebenen Figuren ein: 1) in Ansehung der Beschaffenheit ihrer Seiten, 2) in Ansehung der Anzahl derselben?

§. 2. Zusätze.

a. Wie verhält sich die Anzahl der Seiten und Winkel bei jeder geradlinigen Figur?

b. Wenn zwei Figuren zum Theil einander decken, in wie viel Punkten müssen sich mindestens ihre Umfänge schneiden?

c. Ist es möglich, daß bei einer geradlinigen Figur eine Seite größer sei als die Summe der übrigen? (Diese Frage ist zu beantworten aus I. 8. d.).

Vom Kreise.

§. 3. Erklärung.

Der Kreis ist eine ebene Figur, deren Umfang von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur überall gleichweit absteht.

a. Was bedeuten die Wörter: Mittelpunkt (Centrum), Halbmesser (Radius), Durchmesser (Diameter), Kreislinie (Peripherie), Bogen, Ausschnitt (Sector), Sehne (Chorde), Abschnitt (Segment), Halbkreis?

b. Was muß man zufolge der Erklärung von der Größe aller Halbmesser und Durchmesser in demselben Kreise behaupten?

c. Unter welchen Bedingungen werden zwei Kreise vollkommen gleich sein?

d. Was wird man von der Lage eines Punktes behaupten müssen, dessen Entfernung vom Mittelpunkte entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer ist, als der Halbmesser?

e. Kann man ferner den Durchmesser eine Sehne, den Halbkreis einen Ausschnitt oder Abschnitt nennen?

f. Wenn der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise kleiner oder größer ist, als die Summe ihrer Halbmesser, was läßt sich daraus in Ansehung der Lage dieser Kreise schließen?

g. In wieviel Punkten durchschneiden sich die Umfänge zweier Kreise, die einen Theil ihrer Fläche gemein haben?

Die vollständige Beantwortung der letzten Frage nach der Erläuterung des Lehrers erfordert eine zweckmäßige Anwendung des Satzes I, 8. d auf die verschiedenen Fälle, welche genau durchzugehen sind.

§. 4. Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Halbmesser gegeben ist.

In der Bearbeitung dieser Aufgabe unterscheide man a) die Construction des Kreises in der Vorstellung und b) die Zeichnung eines Kreises mit der Hand.

Bei dieser Gelegenheit können die vornehmsten Zirkel=Instrumente, die in Reißzeugen vorkommen, kurz beschrieben werden; besonders der Hand=Zirkel, der Einsatz=Zirkel, der Bogen=Zirkel, und der Stangen=Zirkel.

§. 5. Anmerkung.

Ueber den Gebrauch des Zirkels.

Außer der Beschreibung von Kreislinien, wird der Zirkel noch zu vielen andern geometrischen Arbeiten gebraucht, die sich aber auf zwei Hauptarbeiten zurückführen lassen.

a. Er wird gebraucht zum genauen Auffassen einer Länge zwischen die Spitzen des Zirkels, entweder um diese Länge ein oder mehrere Mal von einer andern Linie abzuschneiden, oder auch, um dieselbe auf einem Maaßstabe zu messen.

Wie muß man den Zirkel handhaben, wenn zwei Linien von ungleicher Länge gegeben sind, und man soll von der größern ein Stück abschneiden, welches der kleinern gleich ist?

b. Zu mechanischer Eintheilung einer gegebenen begränzten Linie in zwei, drei, vier oder mehr gleiche Theile.

Im theoretischen Hefte muß genau beschrieben werden, wie der Zirkel zu diesem Zwecke zu handhaben ist.

Im Uebungsheft aber soll eine und dieselbe Länge (von ein Paar Zollen) in 2, 3, 4, 5, ꝛc. bis 12 gleiche Theile getheilt werden.

§. 6. Erklärung.

Wenn man auf eine Linie mit möglichster Genauigkeit gleiche Theile von beliebiger Größe aufträgt, und wenigstens einen der beiden äußersten Theile in kleinere (am besten zehn) Theile theilt, so nennt man das einen Maaßstab.

Der Zweck eines Maaßstabes ist zweifach: a) eine gegebene Linie zu messen, d. h. eine vorliegende Länge durch Zahlen auszudrücken, b) umgekehrt, eine in Zahlen gegebene Länge wirklich darzustellen.

In dem Hauptheft ist ein kleiner Maaßstab von etwa vier Haupteinheiten von beliebiger Größe zu zeichnen, und einer der äußersten Theile ist sorgfältig in zehn Theile zu theilen. An einen solchen Maaßstab müssen Zahlen auf folgende Art geschrieben werden. An den Punkt, wo sich die getheilte Haupteinheit von den ungetheilten scheidet, muß man 0 (Null) schreiben. Von da aus zähle man die Zehntel mit kleinen Ziffern von der gewöhnlichen Form, so daß an dem äußersten Punkt der getheilten Einheit 10 zu stehen kommt. Die Haupteinheiten hingegen zähle man auch von Null an in der entgegengesetzten Richtung, etwa mit römischen Ziffern, so daß, wenn der Maaßstab 4 Haupteinheiten lang ist, an dem ungetheilten äußersten Ende desselben III zu stehen kommt. Den Grund dieser Zahlenstellung wird man bei dem Gebrauch des Maaßstabes sehr bald selbst entdecken.

Ferner soll deutlich beschrieben werden: a) wie man eine Länge nach diesem Maaßstabe mißt, b) wie man von einer Linie ein Stück abschneidet, dessen Maaß in Zahlen gegeben ist.

Anmerkung. 1. Unmittelbar giebt ein solcher Maaßstab nur Ganze und Zehntel, doch schätzt ein aufmerksames Auge noch ziemlich sicher die Zehntel der Zehntel, d. h. die Hundertel der Haupteinheit.

2. Es giebt künstlichere Einrichtungen von Maaßstäben, wodurch man Hundertel noch sicher, und Tausendtel schätzungsweise messen kann. Von diesen kann aber erst in einem späteren Abschnitte die Rede sein.

3. Wenn man einen gut getheilten Maaßstab besitzt, dessen Einheiten aber nicht Zolle sind, so kann man doch eine nach diesem Maaßstabe gemessene Länge in Zollen durch Rechnung finden, wenn man nur weiß, wie groß eine Einheit dieses Maaßstabes in Zollen ist.

§. 7. Anmerkung.

Obgleich die Haupteinheit eines Maaßstabes an sich ganz willkührlich ist, so sind doch in allen Ländern gewisse bestimmte Längen als Haupteinheiten eingeführt. Für kleine Messungen auf dem Papier ist diejenige Länge, die man einen Zoll nennt, eine schickliche Haupteinheit.

Wer nicht in seinem Reißzeuge einen nach genauen Zollen eingetheilten Maaßstab besitzt, muß sich selbst auf einem hölzernen mit dünnem Leimwasser überstrichenen Lineal einen solchen sorgfältig zeichnen. Eine Länge von 6 bis 7 Zoll ist überflüssig hinreichend, weil auf Quartblättern keine längeren Linien vorkommen. Aber einer der äußersten Zolle muß in zehn, nicht, wie in Reißzeugen sehr üblich ist, in zwölf Theile getheilt sein.

Von den Dreiecken.

§. 8. Erklärung.

Dreieck, Seiten, Zeichnung eines solchen.

a. Was ist ein Dreieck? (§. 1.)
b. Was sind die Seiten desselben? (1. a.)
c. Wie zeichnet man ein Dreieck, wenn weder die Größe der Seiten noch die der Winkel vorgeschrieben ist?
d. Was folgt aus §. 2. c. auf das Dreieck angewendet?

§. 9. Zusätze.

Jede Seite eines Dreiecks hat einen Gegenwinkel; jeder Winkel eine Gegenseite.

Es muß wörtlich beschrieben und an einer Figur nachgewiesen werden, was dergleichen gegenüberliegende Stücke sind, und wie eines derselben zur Bestimmung des anderen dient.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck eine Seite verlängert wird, so ist der entstehende Außenwinkel so groß wie diejenigen beiden innern Winkel zusammengenommen, welche nicht Nebenwinkel von jenem sind.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 18 ist AB nach D verlängert. Welches ist nun der Außenwinkel, und welches sind diejenigen inneren Winkel, die nicht Nebenwinkel von jenem sind? Was soll also zu Folge des Satzes bewiesen werden?
Die Hülfslinie BE ist nach I, 24 parallel mit AC gezogen. Dann ergiebt sich der Beweis aus I, 23.
Was bleibt also übrig, wenn man von einem solchen Außenwinkel einen der beiden inneren abzieht?

§. 11. Lehrsatz.

Die drei Winkel eines jeden Dreiecks betragen zusammen zwei rechte.

Dieses folgt unmittelbar aus dem vorigen Satze, in Verbindung mit I. 14.

§. 12. Zusatz.

Folglich betragen jede zwei Winkel eines Dreiecks zusammen weniger als zwei rechte.

Wieviel rechte und wieviel stumpfe Winkel können also in einem Dreiecke sein?

§. 13. Zusatz.

Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines andern gleich sind, so läßt sich daraus ein Schluß auf die dritten Winkel beider Dreiecke machen. Auch läßt sich leicht zeigen, wie der kleinere von zwei Dreieckswinkeln beschaffen sein muß.

Der erste Schluß ist anzugeben, und der Satz auf Fig. 19 anzuwenden, wo AC und BD, desgleichen BC und ED parallel gezogen sind. Der zweite Punkt dieses Zusatzes ergiebt sich sehr bald.

§. 14. Erklärung.

Man theilt die Dreiecke ein nach der Größe und Beschaffenheit ihrer Seiten in *gleichseitige*, *gleichschenklige* und *ungleichseitige*.

Jede dieser Benennungen ist wörtlich zu erklären; auch ist bei den *gleichschenkligen* Dreiecken zu bemerken, was man unter den Ausdrücken: *Schenkel*, *Grundlinie* und *Spitze* versteht.

§. 15. Erklärung.

Auch theilt man die Dreiecke ein nach der Beschaffenheit ihrer Winkel in *stumpfwinklige*, *rechtwinklige* und *spitzwinklige*.

Jede dieser Benennungen ist nicht nur zu erklären, sondern auch bei jeder anzuzeigen, wie *alle drei Winkel* des Dreiecks beschaffen sind, und warum sie so beschaffen sein müssen. Ferner ist bei dem rechtwinkligen Dreiecke auch die Bedeutung der Wörter *Hypotenuse* und *Kathete* anzufügen. Endlich sind noch folgende drei Fragen zu beantworten: Was läßt sich sagen: a) von der Summe der beiden spitzigen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck? b) von der Summe der beiden spitzigen Winkel in einem stumpfwinkligen Dreieck? c) von der Summe jeder zwei spitzigen Winkel in einem spitzwinkligen Dreieck? (Die Antwort ergiebt sich aus §. 11.)

Zeichnung der Dreiecke aus gegebenen Seiten.

§. 16. Aufgabe.

Zeichnung eines gleichseitigen Dreiecks.

Was muß gegeben sein, um ein bestimmtes gleichseitiges Dreieck zu zeichnen? und wie muß die Zeichnung gemacht werden?

a) nach der vollständigen geometrischen Auflösung (Fig. 20.)? (der Beweis beruht auf §. 3. b.)

b) nach der abgekürzten (Fig. 21.)?

Im Uebungsheft sind mehrere gleichseitige Dreiecke von verschiedener Größe nach der abgekürzten Auflösung zu zeichnen.

Anmerkung. Unter einer vollständigen Auflösung wird eine solche verstanden, wobei man alle zum Beweise nöthigen Hülfslinien und Hülfskreise vollständig auszeichnet; abgekürzt heißt die Auflösung, wenn man alles wegläßt, was zwar zum Beweise, aber nicht zur Lösung der Aufgabe erforderlich ist.

§. 17. Aufgabe.

Zeichnung eines gleichschenkligen Dreiecks.

Hiebei sind folgende Fragen zu beantworten:

a. Wieviel Linien und welche müssen gegeben sein, um ein bestimmtes gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen?

b. Können diese Stücke beide jede beliebige Größe haben?

Diese Fragen beantworten sich leicht; wenn man sich der Erklärung des gleichschenkligen Dreiecks und des Inhalts von §. 8. d. bestimmt erinnert.

Es macht einigen Unterschied in der Zeichnung, ob man das Dreieck über der gegebenen Grundlinie oder über dem gegebenen Schenkel zeichnet. Daher ist zu zeigen:

c. Wie man das Dreieck über der Grundlinie zeichnet. In Fig. 23. ist EF als Grundlinie angenommen, und so groß als AB Fig. 22. gemacht.

d. Wie man das Dreieck über einem Schenkel zeichnet. In Fig. 24. ist KL als Schenkel angenommen, und so groß als CD Fig. 22. gemacht.

In beiden Fällen ist zu beweisen, daß das Dreieck gleichschenklig geworden ist und daß sowohl die Grundlinie, als auch die Schenkel die vorgeschriebene Größe erhalten haben.

e. Endlich ist noch anzugeben, wie in beiden Fällen die Auflösung abgekürzt werden könne, und nach dieser abgekürzten Auflösung sind im Uebungsheft mehrere gleichschenklige Dreiecke zu zeichnen.

§. 18. Aufgabe.

Zeichnung eines ungleichseitigen Dreiecks.

Hierbei sind folgende Fragen zu beantworten:

a. Wieviel Linien müssen zur Zeichnung eines bestimmten ungleichseitigen Dreiecks gegeben sein? Können alle diese Linien jede beliebige Größe haben?

b. Die vollständige geometrische Auflösung wird am zweckmäßigsten auf folgende Art angefangen: Es seien A, B, C, (Fig. 25.) die gegebenen Seiten. Man lege diese auf einer einzigen Linie FG Fig. 26. aneinander, in beliebiger Ordnung, doch so, daß diejenige Linie, über welcher man das Dreieck errichten will, in die Mitte zu liegen kommt. Demnach ist DE Fig. 26. = B Fig. 25. diejenige Linie, über welcher das Dreieck errichtet werden soll. Ferner ist DF = A und EG = C. Wie die Zeichnung weiter auszuführen sei, fällt in die Augen.

c. Wie kann die Auflösung abgekürzt werden?

d. Endlich ist zu überlegen, wie viele Haupt-Abänderungen in der Ordnung der abgekürzten Zeichnung möglich sind. Man wird diese Frage leicht beantworten können, wenn man erwägt, theils, daß das Dreieck über jeder der drei gegebenen Linien errichtet werden kann, theils, daß, wenn man eine Seite gewählt hat, um das Dreieck an derselben zu zeichnen, von den übrigen die eine links, die andere rechts oder umgekehrt aufgesetzt werden könne, theils endlich, daß in jedem dieser Fälle das Dreieck entweder über oder unter der gewählten Linie errichtet werden könne.

Im Uebungshefte müssen ein Paar Dreiecke (etwa ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges) nach allen diesen Abänderungen gezeichnet werden, welches eine sehr nützliche Uebung der Hand, des Auges und der Ueberlegung ist; da man in jedem Falle, sobald die erste Linie gezeichnet ist, überlegen muß, wohin nach dem Augenmaaße die gegenüberliegende Winkelspitze fallen werde.

Dritter Abschnitt.

Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 1. Erklärung.

Wenn zwei ebene Figuren so auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen rings herum vollkommen zusammenfallen, so nennt man sie congruente, oder sich deckende Figuren.

Sind Congruenz und Gleichheit gleichbedeutende Ausdrücke?

§. 2. Zusatz.

Gerade Linien, Kreisbogen, Winkel und Figuren sind in allen ihren Bestandtheilen und in der Ordnung, wie diese mit einander verbunden sind, vollkommen gleich, wenn sie sich decken können.

Um den Sinn dieses Zusatzes, der als eine unmittelbare Folge aus der Erklärung §. 1. der eigentliche Grundsatz der Congruenz ist, gleich anfänglich scharf aufzufassen, zeichne man eine beliebige vier- oder fünfseitige Figur und nach dem bloßen Augenmaaße eine andere ihr so viel wie möglich gleiche. Dann nehme man an, daß sie wirklich congruent seien, und führe bestimmt alle einzelnen Seiten und Winkel an, welche nach dieser Annahme gleich sein müssen. Hiebei beobachte man die Ordnung, in welcher die Bestandtheile der Figur an einander liegen. Man fange z. B. mit einer Seite an, dann folgt ein anliegender Winkel, dann die Seite, welche den zweiten Schenkel dieses Winkels bildet, dann wieder der anliegende Winkel u. s. f.

§. 3. Zusatz.

In zwei congruenten Figuren sind jede zwei gleichliegende Stücke gleich, d. h. jede zwei Seiten oder Winkel, welche gegen die übrigen Seiten und Winkel der Figuren einerlei Lage haben.

Es ist oben (II. 9.) schon erklärt worden, wie man die Lage einer Seite oder eines Winkels in einem Dreiecke zu bestimmen habe. Daher soll hier noch gezeigt werden, was in zwei congruenten Dreiecken gleichliegende Stücke sind. Man nehme z. B. an, daß zwei Dreiecke, wie Fig. 30. und 31. congruent sind, und schreibe zuerst nieder, welche Seiten und Winkel als gleiche angenommen werden sollen. Dann gehe man nochmals, wie bei dem vorigen §., nach der Reihe alle Seiten und Winkel durch, und zeige bei jedem Paare, warum es gleichliegende Stücke sind, und zwar auf doppelte Art: a) aus der Gleichheit der gegenüberliegenden, und b) aus der Gleichheit der anliegenden Stücke.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn alle drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines anderen, einzeln verglichen, gleich sind, so sind auch die gleichliegenden Winkel derselben gleich und die ganzen Dreiecke congruent.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 26. 27.) Man zeichnet also eigentlich das Dreieck aus seinen drei Seiten (nach II, 18.) und beweiset, daß nur ein Dreieck gezeichnet werden kann; weil nur ein Durchschnittspunkt der Kreise auf einer Seite der Linie DE möglich ist. (II, 3. g.)

Nach vollendetem Beweise müssen die Winkel, deren Gleichheit nunmehr erwiesen ist, nicht nur vollständig aufgeführt, sondern bei jedem Paar muß auch gezeigt werden, daß es gleichliegende Winkel sind. (III. 3.)

§. 5. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel an einen bestimmten Punkt einer gegebenen Linie in einer vorgeschriebenen Lage anzulegen.

Diese Aufgabe, von welcher wir schon oben (Absch. I. §. 19.) eine mechanische Auflösung gegeben haben, soll hier geometrisch gelöst werden.

Anleitung zur vollständigen geometrischen Auflösung. Der gegebene Winkel BAC (Fig. 28.) soll an den Punkt D der Linie EF (Fig. 29.) angelegt werden, und zwar rechts unterwärts, und so, daß er sich nach der Seite F öffne. Zu dem Ende nehme man auf den Schenkeln des Winkels BAC die Punkte B und C ganz beliebig und ziehe die Hülfslinie BC. Auf diese Art entsteht ein Dreieck ABC, dessen Seiten als gegebene Linien zu betrachten sind. Setzt man nun nach Abschn. II. §. 18. aus diesen drei Seiten irgendwo ein neues Dreieck zusammen, so ist dieses nach §. 4. dieses Abschnitts dem Dreieck ABC congruent, hat also mit diesem auch gleiche Winkel. Es ist also klar, daß man mit Abzeichnung des Dreiecks ABC auch jeden seiner Winkel von selbst mit abzeichnet. Es kommt also offenbar nur darauf an, daß man das Dreieck ABC Fig. 28. in Fig. 29. so abzeichne, daß nicht nur das Dreieck DFG mit ABC congruent, sondern auch der Winkel FDG in demselben dem Winkel BAC gleich werde. Zu dem Ende soll also bestimmt angegeben werden, wie man das Dreieck DFG, Stück vor Stück, zu zeichnen habe.

Hiebei bemerke der Anfänger ein für alle Mal die Regel, daß, wenn man bei irgend einem Satze Veranlassung findet, eine früher erklärte Auflösung anzuwenden (wie hier die von II, 18.), nie die vollständige, sondern allezeit die abgekürzte Auflösung gebraucht werden müsse, damit die Figur nicht mit mehr Linien, als nöthig, überladen werde.

Was den Beweis der Auflösung betrifft, so ist dazu nichts weiter nöthig, als zu zeigen, daß die Winkel FDG und BAC in ihren Dreiecken gleiche Lage haben (III, 3.), denn in congruenten Dreiecken sind alle gleichliegenden Stücke gleich groß.

Anleitung zur abgekürzten Auflösung. Da die Länge der Schenkel AB und AC ganz willkührlich ist, so ist es vortheilhaft, sie gleich lang zu machen, wodurch also das Dreieck ABC gleichschenklig wird, und die Abtragung desselben nach der abgekürzten Auflösung (II, 17.) gemacht werden muß. Ob die dortige Auflösung a) oder b) hieher gehöre, wird bei einigem Nachdenken leicht zu finden sein. Das ganze Verfahren ist nun genau und deutlich zu beschreiben. (Von einem Beweise kann bei einer abgekürzten Auflösung nicht die Rede sein, da derselbe schon zu der vollständigen gegeben ist.)

Im Uebungshefte sind von dieser Aufgabe recht viele Anwendungen zu machen; denn die hier gezeigte abgekürzte Auflösung ist viel genauer, als die oben (I, 19.) erklärte mechanische. Zu gegebenen Winkeln nehme man erst einen spitzigen, dann einen stumpfen von mittlerer Größe, ferner einen sehr kleinen spitzigen und einen sehr großen stumpfen. Die beiden letzten Fälle erfordern besonders viel Aufmerksamkeit, weil es viel schwerer ist, sehr kleine und sehr große Winkel, als Winkel von mittlerer Größe mit Genauigkeit abzutragen. Einiges Nachdenken wird auch in der Beschaffenheit der Zeichnung den Grund von dieser Schwierigkeit leicht finden lassen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks nebst dem eingeschlossenen Winkel, einzeln verglichen, so groß sind,

wie in einem anderen, so sind die Dreiecke congruent, und also alle übrigen gleichliegenden Stücke auch gleich.

Der Beweis, der auf unmittelbarer Deckung der Figuren beruht, ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 30. 31.)

§. 7. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel des einen, einzeln verglichen, zweien Winkeln des andern gleich sind, und überdies eine gleichliegende Seite in beiden gleich ist, so sind beide Dreiecke congruent, also alle übrigen gleichliegenden Stücke in beiden gleich.

Was heißt es, wenn im Vordersatze gesagt wird: es solle außer zwei Winkeln noch eine gleichliegende Seite gleich sein? Findet dem zufolge mehr als ein Fall in der Annahme der Voraussetzungen statt? Machen diese Fälle einen wesentlichen Unterschied im Beweise? Die letzte Frage beantwortet sich aus II, 13.

Der Beweis selbst, bei dem auch die unmittelbare Deckung der Figuren nachgewiesen werden kann, ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten; wobei Fig. 30. und 31. zum Grunde zu legen sind.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch ihre Gegenwinkel gleich.

Der Beweis ist nach dem Vortrage des Lehrers nach Fig. 32. zu führen.

§. 9. Lehrsatz.

Umkehrung des vorhergehenden Satzes.

Wie lautet der umgekehrte Satz? (I, 23. d.) Der Beweis ist nach dem Vortrage des Lehrers zu führen.

§. 10. Zusatz.

a. Was folgt aus §. 8. und 9. auf das gleichseitige Dreieck angewendet?

b. Wie groß ist ein Winkel im gleichseitigen Dreieck?

§. 11. Lehrsatz.

In jedem Dreieck hat die größere Seite den größeren Gegenwinkel.

Der Beweis ist nach der Anleitung des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 33.)

Auch ist die Frage zu beantworten, warum in dem Satz zweimal der Ausdruck größere nicht größeste stehe?

Ferner: Wenn man die Größe aller drei Seiten eines Dreiecks einzeln kennt, ob man davon einen Schluß auf die Größe aller drei Winkel machen könne?

§. 12. Lehrsatz.

Umkehrung des vorhergehenden Satzes.

Wie lautet der vorhergehende Lehrsatz umgekehrt? Der Beweis ist nach der Anleitung des Lehrers zu führen.

Auch ist die Frage zu beantworten:

Wenn man in einem Dreiecke die Größe aller drei Winkel einzeln kennt, was folgt daraus in Ansehung der drei Seiten?

§. 13. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist der Unterschied von zwei Seiten kleiner als die dritte Seite.

Der Beweis läßt sich durch unmittelbare Construction des Unterschieds (Fig. 33.) führen, indem man §. 12. anwendet, oder auch aus der Eigenschaft des Dreiecks (II, 8. d.) ableiten.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreieckes einzeln verglichen so groß sind als zwei Seiten eines andern, aber die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ungleich sind, so ist die dritte Seite in dem Dreiecke größer, in welchem der eingeschlossene Winkel größer ist als im andern.

Der Beweis ist nach Anleitung des Lehrers zu führen.

§. 15. Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks einzeln verglichen zweien Seiten eines andern gleich, aber die dritten Seiten ungleich sind, so ist der Gegenwinkel dieser dritten Seite in dem Dreiecke der größere, in welchem die dritte Seite die größere ist.

Der Beweis ist nach Anleitung des Lehrers zu führen.

§. 16. Lehrsatz.

Von allen Linien, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie ziehen kann, ist a) die winkelrechte die kürzeste, b) jede näher bei dieser liegende ist kürzer als die entferntere, c) auch kann man zu jeder schiefen Linie auf der einen Seite des Lothes eine eben so große schiefe Linie auf der anderen Seite des Lothes finden; endlich d) wenn aus einem angenommenen Punkte drei Linien nach einer geraden Linie gezogen sind, zwei gleiche und eine ungleiche, so muß die ungleiche kleinere innerhalb der beiden gleichen, die ungleiche größere außerhalb der beiden gleichen liegen.

Anleitung zum Beweise. Aus dem Punkte A Fig. 34. sei auf die Linie BC das Loth AD nebst irgend einer anderen beliebigen AE gezogen; so ergiebt sich aus Anwendung von §. 12 auf das Dreieck ADE der Beweis für a). Man ziehe ferner die entferntere AF, so ergiebt sich gleichfalls aus §. 12. der Beweis von b), wenn man die Winkel des Dreiecks AEF näher untersucht. Macht man endlich DG = DF, so ist nur §. 6. auf die Dreiecke ADF und ADG anzuwenden, um den dritten Theil des Satzes c) zu beweisen. Endlich ist d) eine unmittelbare Folge aus b).

§. 17. Zusatz.

Wenn von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie nach drei Punkten auf derselben gerade Linien gezogen sind; so ist die mittlere derselben kleiner als die größere der andern beiden.

Den Beweis findet man durch ähnliche Betrachtungen, wie bei dem vorigen §. angestellt sind.

§. 18. Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten nebst dem Gegenwinkel der größeren Seite in einem Dreiecke, einzeln verglichen, so groß sind, wie in einem anderen, so sind die Dreiecke congruent.

Beweis. In den Dreiecken ABC Fig. 35. und DEF Fig. 36. sei 1) AB = DE; 2) BC = EF und die beiden letztern seien größer, als die beiden erstern; 3) seien die Gegenwinkel BAC und EDF dieser größeren Seiten gleich. Es ist zu beweisen, daß die Dreiecke, gehörig aufeinandergelegt, sich decken müssen. Man hat nur zu zeigen, daß DF = AC ist. Wären aber diese Linien ungleich; so müßte eine derselben die größere sein. Es sei DF > AC, also etwa DH = AC. Dann ziehe man EH; so ist Dreieck DHE congruent mit ACB (§. 6.), also EH = BC. Weil nun nach der Annahme EF größer ist als ED; so ist nach §. 17. EH kleiner als EF. Dies ist ein Widerspruch: denn nach der Annahme ist EF = BC und nach der oben erwiesenen Congruenz BC = EH. Es müßte also, wenn DH = AC wäre, auch EH = EF sein. Daher ist AC nicht ungleich mit DF. Wenn aber DF = AC, so sind auch die Dreiecke congruent.

Welches sind die gleichliegenden Stücke, deren Gleichheit nunmehr erwiesen ist?

Anmerkung. Dieser indirecte Beweis ist hier vollständig ausgeführt worden. Dem Anfänger ist sehr zu empfehlen, daß er versuche, ob er nicht selbst durch aufmerksames Durchlesen mit dem Beweise fertig werden könne.

§. 19. Zusatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent: a) wenn die Katheten des einen, einzeln verglichen, den Katheten des andern gleich sind, b) wenn die Hypotenuse und eine Kathete in beiden gleich sind, c) wenn eine Kathete nebst einem gleichliegenden schiefen Winkel, und d) wenn die Hypotenuse und ein schiefer Winkel in beiden gleich sind.

Der erste Theil a) folgt unmittelbar aus §. 6., und der zweite b) aus §. 18., c) und d) folgt unmittelbar aus §. 7. Alles ist mit Hülfe der nöthigen Figuren deutlich zu machen.

§. 20. Anmerkung.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks zwei Linien, welche Seiten desselben werden sollen, nebst einem Winkel, welcher der Gegenwinkel der kleineren werden soll, gegeben sind; so läßt sich in manchen Fällen gar kein Dreieck bilden, in anderen zwei verschiedene, und noch in anderen nur eins.

Anleitung zur weiteren Ausführung dieser Anmerkung. Daß sich nicht in allen Fällen aus solchen Datis ein Dreieck bilden lasse, ergiebt sich schon aus der Betrachtung des gegebenen Winkels. Denn man kann sich aus II. 15. und III. 11. leicht überzeugen, daß es unmöglich sein würde, ein Dreieck zu zeichnen, wenn der Gegenwinkel der kleineren Seite ein stumpfer oder ein rechter sein sollte. Wie dieses aus den angeführten §. §. folge, ist zu zeigen.

Wenn aber auch dieser Winkel spitzig ist, so kommt es noch auf die Größe seiner Gegenseite an. Es sei z. B. in Fig. 37. BAC der gegebene spitzige Winkel, und AB sei die an ihm anliegende gegebene Seite, deren Größe ganz beliebig ist; so ist klar, daß die Gegenseite des Winkels BAC, (deren Größe wir vorläufig noch unbestimmt lassen), von B aus gegen irgend einen Punkt der Linie AC gezogen werden muß. Nun fälle man BD winkelrecht auf AC (I. 13.), so kann man sich leicht überzeugen, daß es unmöglich sein würde, ein Dreieck zu zeichnen, wenn jemand für die Gegenseite des Winkels BAC eine Linie gäbe, die kürzer als BD wäre. Der Grund liegt in §. 16. a.

Wäre BD selbst die vorgeschriebene Gegenseite, so könnte man allerdings ein Dreieck ABD bilden; und zwar nur ein einziges, wovon der Grund in §. 19 b. liegt.

Sollte endlich die gedachte Gegenseite zwar größer als BD, aber doch kleiner als AB sein; so würde man zwei verschiedene Dreiecke, ABE und ABF zeichnen können, in welchen die drei gegebenen Stücke vorkämen, wovon der Grund in §. 16. c. liegt.

Was hier bloß angedeutet worden, ist nach Anleitung des Lehrers in dem Hauptheft vollständig und zusammenhängend auszuführen. Auch sind die Dreiecke ABE und ABF in Ansehung der Winkel, welche sie bei E und F haben, näher zu vergleichen. Denn aus §. 8. verglichen mit I. 14. ergiebt sich, daß die beiden Winkel AEB und AFB eine bestimmte Summe haben.

§. 21. Zusatz.

Die vier Lehrsätze (§. §. 4. 6. 7. 18.) erschöpfen alle Fälle, die bei der Congruenz von Dreiecken vorkommen können; so wie auch §. 19. alle Fälle erschöpft, die bei rechtwinkligen Dreiecken Statt finden.

Zur Darstellung eines Dreiecks sind drei Bestimmungsstücke erforderlich. Drei Winkel können dies nicht sein aus einem zweifachen Grunde. a) Da durch zwei Winkel der dritte bestimmt ist, so wären dies zwar scheinbar drei, in der That aber nur zwei Bestimmungsstücke. b) Man kann ferner sich sehr leicht überzeugen, daß zwei Dreiecke gleiche Winkel haben und doch an Größe sehr verschieden sein können; z. B. wenn man von einem größeren Dreieck ein kleineres vermittelst einer Parallele mit einer der Seiten abschneidet.

Soll also ein Dreieck auch seiner Größe nach bestimmt sein; so muß sich unter den Bestimmungsstücken wenigstens eine Seite befinden. Es können deren aber auch zwei oder alle drei gegeben sein. Ueberlegt man nun, was in den beiden ersten Fällen außer den Seiten noch gegeben sein müßte; so wird man leicht finden, daß kein Fall erdenklich ist, der nicht in den obigen vier Lehrsätzen berücksichtiget wäre.

Für rechtwinklige Dreiecke läßt sich der Satz durch ähnliche Betrachtungen deutlich machen.

Geometrische Auflösung der Aufgaben, die im ersten und zweiten Abschnitt nur mechanisch gelöst worden.

§. 22. Lehrsatz.

Wenn man auf derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet, entweder auf verschiedenen Seiten der Grundlinie (Fig. 38.) oder auch auf derselben Seite (Fig. 39.), und man zieht eine gerade Linie durch die Spitzen dieser beiden Dreiecke, so daß sie die Grundlinie schneidet; so halbirt dieselbe a) die Winkel an der Spitze; b) beide gleichschenklige Dreiecke; c) die gemeinsame Grundlinie; d) ist erweislich, daß sie auf der Grundlinie winkelrecht steht.

Anleitung zum Beweise.

Erster Fall. (Fig. 38.) Zuerst kann aus §. 4. bewiesen werden, daß die Dreiecke ACD und BCD congruent sind, woraus a) folgt. Dann läßt sich aus §. 6. beweisen, daß auch die Dreiecke AEC und BEC (desgleichen AED und BED) congruent sind, woraus b) c) d) folgt.

Zweiter Fall. Man lese das vorige nochmals aufmerksam; habe aber dabei Fig. 39. vor Augen, so wird man finden, daß alles buchstäblich auch auf diese Figur paßt. Nur der Beweis von a) muß hier einen kleinen Zusatz erhalten. Denn es folgt zwar aus der Congruenz der Dreiecke ACD und BCD, wie oben, unmittelbar, daß der Winkel bei C halbirt ist. Aber für die Winkel bei D folgt geradezu nur, daß CDA = CDB, woraus aber nach I. 14. die Gleichheit von ADE und BDE geschlossen wird.

§. 23. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie von gegebener Länge geometrisch zu halbiren.

Die vollständige geometrische Auflösung ist nach der Anweisung des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 38.)

Bei der abgekürzten geometrischen Auflösung ist zu bemerken: 1) daß man zwar in theoretischer Rücksicht den Linien AC und AD jede beliebige Größe geben könne, daß es aber in praktischer Hinsicht vortheilhaft sei, sie gleich zu machen; 2) daß es in Absicht der Genauigkeit vortheilhaft sei, diese beiden Linien gerade so groß als AB oder auch ein wenig kleiner zu nehmen. Es wird nicht schwer sein, den Grund beider Regeln aufzufinden. Welche Linien nicht nothwendig ausgezogen werden müssen, ist leicht zu beurtheilen.

Anmerkung. Eine mechanische Halbirung ist für die Zeichnung guter Figuren sichrer und genauer als die geometrische.

§. 24. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel geometrisch zu halbiren.

Die vollständige geometrische Auflösung ist nach der Anleitung des Lehrers auszuarbeiten. (Fig 38.)

Bei der abgekürzten Auflösung ist zu bemerken, daß es für die Genauigkeit vortheilhaft ist, 1) die Linien CA und CB so groß zu nehmen, als es anderweitiger Rücksichten wegen angeht, 2) daß AD und BD ungefähr so groß als AB, oder etwas kleiner zu nehmen sind. Welche Linien nicht nothwendig ausgezogen werden müssen, ist leicht zu beurtheilen.

§. 25. Aufgabe.

In einem gegebenen Punkte einer gegebenen Linie eine winkelrechte zu errichten.

Die vollständige geometrische Auflösung ist nach der Anleitung des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 40.). Wie die Auflösung abzukürzen sei, bedarf keiner Erläuterung.

§. 26. Aufgabe.

Es ist eine Linie und außer derselben ein Punkt gegeben:

Von diesem soll auf jene eine winkelrechte Linie geometrisch gefällt werden.

Die vollständige geometrische Auflösung ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 41.) Die abgekürzte hat keine Schwierigkeit.

§ 27. Aufgabe.

Es ist eine Linie und außer derselben ein Punkt gegeben. Durch diesen soll eine Parallele mit jener geometrisch gezogen werden.

Die vollständige geometrische Auflösung, die auf I, 22. b. und auf §. 5. dieses Abschnitts beruht, ist nach der Anleitung des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 42.) Ob sich noch etwas abkürzen lasse, ist leicht zu beurtheilen.

§. 28. Zusätze.

Zum Beschlusse dieses Abschnittes sind noch folgende drei Fragen zu beantworten:

1. Können in einem Punkte einer Linie zwei Lothe errichtet werden? (Die Frage ist durch einen leichten indirecten Beweis aus I, 11. c. zu beantworten.)
2. Können von einem Punkte, der außer einer Linie liegt, zwei Lothe auf dieselbe gefällt werden? (Die Frage ist durch einen indirecten Beweis aus II, 12. zu beantworten.)
3. Können durch einen Punkt, der außer einer gegebenen Linie liegt, zwei Parallelen gezogen werden? (Die Frage läßt sich auf mannigfache Weise entweder aus I. §. 21. oder wenn man eine durchschneidende Linie zieht, aus I. §. 23. beantworten.)

Vierter Abschnitt.

Von Vierecken, besonders Parallelogrammen.

---

§. 1. Erklärung.

Wenn zwei Linien von einem Punkte auslaufen, so heißt der Winkel, den sie auf der innern Seite bilden, ein hohler oder concaver Winkel; aber auf der äußern Seite weichen die Schenkel viel stärker von einander ab, und der Unterschied ihrer Richtungen außerhalb der Spitze betrachtet, heißt ein erhabener oder converer Winkel. So bilden z. B. die Linien CA und CF Fig. 43. außerhalb der Spitze einen converen Winkel, der zusammengesetzt ist aus den Winkeln FCD, DCG, GCB, BCH, HCE, ECI und ICA. Selbst eine gerade Linie ACB kann als Winkel betrachtet werden, sofern man sie als aus zwei Stücken CA und CB bestehend betrachtet, die von C aus nach entgegengesetzter Richtung liegen. Ein solcher Winkel ist allezeit zwei rechten gleich, und kann ein gerader oder gestreckter Winkel genannt werden.

In den drei ersten Abschnitten war bloß von concaven Winkeln die Rede. Von jetzt an werden wir der converen Winkel nicht entbehren können.

Man bezeichnet einen converen Winkel eben so, wie einen concaven, nur mit einem darüber gesetzten Bogen. So ist ACF Fig. 43. der concave Winkel, den die Linien AC und CF einschließen; $\overset{\frown}{ACF}$ aber der convere Winkel eben dieser Linien.

Diese Erklärung ist nach dem Vortrage des Lehrers an einer Figur, wie Fig. 43. zu erläutern, indem man einen Winkel in Gedanken allmählig von der Größe Null bis zu der Größe von vier rechten wachsen läßt.

§. 2. Erklärung.

Was ist ein ebenes geradliniges Viereck? Was sind die Diagonalen desselben? Wie viele Diagonalen kann ein Viereck haben?

Diese Fragen sind mit Beifügung von Figuren im Hefte zu beantworten.

§. 3. Lehrsatz.

Die vier innern Winkel eines jeden Vierecks betragen zusammen vier rechte.

Der Beweis ist sehr leicht zu finden, wenn man eine Diagonale im Viereck zieht, und sich an II, 11. erinnert.

§. 4. Zusatz.

Wieviel convexe, wieviel stumpfe, wieviel rechte und wieviel spitze Winkel können in einem Viereck sein?

Diese Fragen sind zu beantworten und durch Figuren zu erläutern.

§. 5. Zusatz.

Wenn ein Viereck keinen innern convexen Winkel hat; so liegen beide Diagonalen innerhalb des Vierecks. Jede theilt dasselbe in zwei Dreiecke, deren Summe die Fläche des Vierecks ist.

Hat aber ein Viereck einen innern convexen Winkel; so liegt eine Diagonale außer dem Viereck, und die Fläche desselben ist der Unterschied der beiden Dreiecke, welche die Diagonale mit den Seiten des Vierecks bildet.

Beides ist durch Figuren anschaulich zu machen.

§. 6. Erklärung.

Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

Anmerkung. Man bezeichnet ein Parallelogramm entweder dadurch, daß man alle vier an den Winkelspitzen stehenden Buchstaben, oder auch nur zwei einander gegenüberstehende nennt. Wie wird man daher das Fig. 44. gezeichnete Parallelogramm zu benennen haben?

Dieses, so wie die Erklärung, ist durch eine beigefügte Figur zu erläutern.

§. 7. Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm wird a) durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt; auch sind b) die Gegenseiten und c) die Gegenwinkel desselben gleich.

Der Beweis von a) beruht auf III, 7. I. 23. b. Die Beweise von b) und c) ergeben sich aus a), der von c) kann noch kürzer aus I, 26. hergeleitet werden.

Anmerkung. Den Theil des Lehrsatzes b) drückt man bisweilen folgendermaßen aus: Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. Es ist an einer Figur deutlich zu machen, daß dieser Satz nichts anderes sage, als b).

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in einem Vierecke die Gegenseiten gleich sind, so sind sie auch parallel, und die Figur ist also ein Parallelogramm.

Man ziehe eine Diagonale, dann beruht der Beweis auf III, 4. und I, 22. b.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so sind auch die beiden anderen Gegenseiten gleich und parallel; also ist die Figur ein Parallelogramm.

Man ziehe eine Diagonale, dann beruht der Beweis auf III, 6. und I, 22. b.

§. 10. Zusätze.

a. Wenn in einem Parallelogramme zwei zusammenstoßende Seiten gleich sind, so sind es alle vier.

b. Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle vier.

Beides folgt aus §. 7. und I, 23. c. und ist mit Figuren zu erläutern.

§. 11. Erklärung.

In Ansehung der Seiten theilt man die Parallelogramme ein in gleichseitige und ungleichseitige, und in Ansehung der Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige.

Diese Begriffe sind bestimmter zu erklären, und namentlich ist bei den beiden ersteren zu bestimmen, wie groß alle vier Seiten, und bei den beiden letzteren, wie groß alle vier Winkel sind.

Ferner soll die Frage nach dem Vortrage des Lehrers beantwortet werden, wie viele Arten von Parallelogrammen es giebt, wenn beide Eintheilungen verbunden werden; d. h., wenn man die Beschaffenheit der Seiten und Winkel zugleich in Betrachtung zieht.

Welches sind die Namen dieser Arten, und was kann man von den Seiten und Winkeln jeder dieser Arten nach §. 6. bis 10. behaupten?

Zeichnung der Parallelogramme.

§. 12. Aufgabe.

Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn weder die Größe der Seiten, noch die der Winkel vorgeschrieben ist.

Anleitung zur Auflösung. Man zeichne einen beliebigen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel, z. B. CAB Fig. 44. und gebe den Schenkeln AB und AC eine beliebige Länge.

Der übrige Theil der Zeichnung kann verschieden gemacht werden, je nachdem man entweder die Erklärung §. 6. oder einen der Lehrsätze §. 8. oder 9. dabei vor Augen hat.

Nimmt man auf §. 6. Rücksicht, so müssen CD und BD mit AB und AC parallel gezogen werden. (III, 26. oder I, 24.) Hat man §. 8. vor Augen, so müssen CD und AB, desgleichen BD und AC gleich gemacht werden, wovon sogleich umständlicher geredet werden soll.

Berücksichtiget man §. 9., so muß BD mit AC oder auch CD mit AB parallel und gleich gemacht, und dann CD oder DB gezogen werden.

Jede dieser Zeichnungsarten hat in gewissen Fällen ihre Bequemlichkeit. In der Regel ist die erste die bequemste, wenn man auf dem Reißbrett mit der Reißschiene arbeitet. Die zweite Art ist aber besonders bequem bei kleinen Figuren, die man mit Zirkel und Lineal auf dem Papier macht. Daher kann es hinreichen, wenn diese Art im Hefte vollständig beschrieben wird.

Die vollständige geometrische Auflösung besteht darin, daß man zuerst die Endpunkte der Schenkel AB und AC durch die Linie BC verbindet, und dann über dieser das Dreieck CDB congruent mit CAB zeichnet (III, 4.), wobei nur genau beschrieben werden muß, wie dieses Dreieck zu zeichnen sei.

Bei der abgekürzten Auflösung ist leicht einzusehen, was weggelassen werden könne.

Uebrigens ist noch zu empfehlen, daß im Uebungsheft mehrere Parallelogramme nach allen drei Arten gezeichnet werden.

§. 13. Zusatz.

Anwendung auf die Zeichnung eines Quadrats aus gegebenen Stücken.

Was muß gegeben sein, und wie muß man zeichnen, um eine bestimmte Figur dieser Art zu erhalten?

Anmerkung. Außerdem, daß man ein Quadrat wie jedes Parallelogramm bezeichnet, ist es auch üblich, wenn z. B. eine

Seite AB heißt, zu schreiben: AB^q oder AB^2. Der Grund der letzten Bezeichnungsart wird in der Lehre von der Ausmessung der Figuren angegeben werden.

§. 14. Zusatz.

Anwendung auf die Zeichnung eines Rechtecks aus gegebenen Stücken.

Die Fragen wie bei §. 13.

Anmerkung. Außer der allgemeinen Bezeichnung der Parallelogramme §. 6. ist es auch üblich, und in vielen Fällen bequem, ein Rechteck, in welchem ein rechter Winkel A von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen wird, zu bezeichnen: $BA \times AC$ oder [BA . AC]. (Der Grund des Multiplicationszeichens wird in einem späteren Abschnitte deutlich werden.)

§. 15. Zusatz.

Anwendung auf die Zeichnung eines Rhombus aus gegebenen Stücken.

Die Fragen wie bei §. 13.

§. 16. Zusatz.

Anwendung auf die Zeichnung eines Rhomboid aus gegebenen Stücken.

Die Fragen wie bei §. 13.

§. 17. Zusätze.

a. Unter welchen Bedingungen sind zwei Quadrate congruent? Kann man auch umgekehrt aus der Gleichheit zweier Quadratflächen auf die Gleichheit ihrer Seiten schließen?

b. Unter welchen Bedingungen sind zwei Rechtecke congruent?

c. Desgleichen zwei Rhomben?

d. Endlich auch zwei Rhomboide?

Die richtigen Antworten ergeben sich aus §. 13. 14. 15. 16.

§. 18. Anmerkung.

Einige Mathematiker nennen alle Vierecke, die nicht Parallelogramme sind, Trapezia, andere nur solche Trapezia, die zwei parallele Gegenseiten haben, alle übrigen aber Trapezoide. Beide Benennungen haben keinen wesentlichen Nutzen.

Der Unterschied zwischen Trapezium und Trapezoid ist durch Figuren zu erläutern.

Auch ist anzugeben:

a. Wieviel Bestimmungsstücke zur Zeichnung eines bestimmten Trapeziums gegeben sein müssen.

b. Wie dasselbe zu zeichnen ist.

c. Wieviel Stücke zu einem bestimmten Trapezoid erforderlich sind.

d. Wie dasselbe gezeichnet wird.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn man auf einen Schenkel irgend eines Winkels, von der Spitze aus, gleiche Theile von beliebiger Größe aufträgt, und dann aus allen Theilpunkten bis an den anderen Schenkel Parallelen in beliebiger Richtung zieht; a) so schneiden diese auch auf dem anderen Schenkel Theile ab, die unter sich gleich sind; b) die Parallelen wachsen von der Spitze aus wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, u. s. w.

Man nehme an, daß auf dem Schenkel AF des Winkels A Fig. 44. a. die Theile AB, BC, CD, DE, EF gleichgemacht, sonst von beliebiger Größe sind; ferner, daß die Linien Bb, Cc, Dd, Ee, Ff bis zum anderen Schenkel unter sich parallel gezogen sind; so ist zu beweisen, a) 2c. (Hier sind die drei Punkte des Lehrsatzes bestimmt auf die Figur anzuwenden.) Man ziehe nun durch irgend einen Theilpunkt des einen Schenkels, z. B. durch C, eine Parallele CG mit dem anderen Schenkel bis zur nächsten Parallele Dd, so entsteht ein Dreieck CGD, dessen Congruenz mit ABb, sich aus III, 7. beweisen läßt.

Da dieses richtig ist, zwischen welchen Theilpunkten man auch das Dreieck gezeichnet habe, die Linie CG aber nach §. 7. der Linie cd gleich ist, so sieht man leicht, wie der Beweis von a) auszuführen ist.

Um b) zu beweisen, bemerke man zuerst, daß nach dem Vorhergehenden DG = Bb. Denkt man sich nun auch durch B, D und E solche Linien wie CG, so hat der Beweis keine Schwierigkeit.

§. 20. Aufgabe.

Eine gegebene Linie geometrisch in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Anfang der Auflösung. Gesetzt es sollte Af Fig. 44. a. in fünf gleiche Theile getheilt werden, so ziehe man AF unter einem beliebigen (am besten spitzigen) Winkel, und trage auf diesen Schenkel fünf gleiche Längen AB, BC ꝛc. von beliebiger Größe, so fällt in die Augen, wie die Zeichnung weiter fortzusetzen sei.

Anmerkung. Obgleich diese rein geometrische Auflösung völlig allgemein ist, so sieht man doch leicht ein, daß sie in praktischer Hinsicht keine große Genauigkeit verspricht. Geht man nämlich alle Theile der Arbeit, von der Ziehung der Linie AF an, durch, und überlegt, wie viele kleine Fehler wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge, der Hand und des Auges, auch selbst bei Anwendung aller Aufmerksamkeit, unvermeidlich sind, so begreift man, daß die Theile Ab, bc ꝛc. leicht ziemlich ungleich ausfallen können. Für einen praktischen Zweck hat daher die unmittelbar mechanische Theilung (II, 5.) den Vorzug der Genauigkeit. Doch kann die geometrische Theilung auch praktisch nützlich werden dadurch, daß sie Ideen zu mechanischen Vorrichtungen, genaue Theilungen zu machen, an die Hand geben kann, wie wir in dem Anhange zum XII. Abschnitte wenigstens an Einem Beispiele zeigen werden. Geometrische Auflösungen, auch wenn sie gar keinen praktischen Nutzen hätten, sind dennoch nothwendig, damit in der Wissenschaft keine Lücke bleibe.

Fünfter Abschnitt.

Vergleichung der Parallelogramme und Dreiecke nach Grundlinien und Höhen.

---

§. 1. Erklärung.

Grundlinien kann man jede zwei Gegenseiten eines Parallelogramms nennen. Will man sie als solche unterscheiden, so kann man die eine die untere, die andere die obere nennen. Dann heißt eine winkelrechte Linie zwischen zwei solchen Grundlinien die Höhe des Parallelogramms.

Diese Begriffe sind anzuwenden: a) auf ein Quadrat, b) auf ein Rechteck, c) auf einen Rhombus, d) auf ein Rhomboid. Bei c) und d) ist zu zeigen, daß sich Grundlinie und Höhe auf zweierlei Art bestimmen lassen; und daß bei c) beide Höhen gleich, bei d) ungleich sind.

§. 2. Zusatz.

Parallelogramme zwischen denselben Parallelen haben gleiche Höhe und umgekehrt.

Wie muß der umgekehrte Satz ausgedrückt werden? Auch ist der ganze Zusatz durch eine Figur zu erläutern.

§. 3. Erklärung.

Wenn man aus einer Winkelspitze eines Dreiecks ein Loth auf die Gegenseite oder deren Verlängerung fället, so nennt man diese Seite die Grundlinie, die Winkelspitze die Spitze, und das Loth die Höhe des Dreiecks.

Es ist aus dieser Erklärung klar, daß die Begriffe von Grundlinie und Höhe bei jedem Dreieck auf dreierlei Art angewendet werden können, weil jede Seite als Grundlinie betrachtet werden kann. Da aber bei den verschiedenen Arten der Dreiecke (II, 14. und 15.) allerlei über die Lage und Größe der Höhen zu bemerken ist; so müssen diese wichtigen Begriffe umständlich erörtert werden.

Sie sind nämlich anzuwenden: a) auf ein spitzwinkliges, b) auf ein rechtwinkliges, c) auf ein stumpfwinkliges Dreieck. Bei jeder Art ist ausdrücklich die Lage der Höhen zu bemerken, nämlich, welche Höhen im Dreieck liegen, welche mit einer Seite zusammenfallen, und welche außer dem Dreieck liegen.

Ferner sind diese Begriffe anzuwenden: d) auf ein gleichseitiges, e) auf ein gleichschenkliges, f) auf ein ungleichseitiges Dreieck. Bei jeder Art ist zu bemerken und zu beweisen, welche Höhen gleiche Größe haben.

§. 4. Zusatz.

Wenn die Grundlinien zweier Dreiecke auf einer und derselben Linie, ihre Spitzen aber in einer Linie liegen, die der Grundlinie parallel ist, so haben sie gleiche Höhen, und umgekehrt.

Wie muß der umgekehrte Satz ausgedrückt werden? Dies, so wie der Zusatz selbst, ist durch eine Figur zu erläutern.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme gleiche Grundlinien und Höhen haben, so sind ihre Flächen gleich groß.

Anleitung zum Beweise. Wenn man in dem Parallelogramm ABCD Fig. 45. 46. 47. die obere Grundlinie CD beliebig verlängert, so sieht man leicht ein, daß jedes andere Parallelogramm, welches mit ABCD gleiche Grundlinie und Höhe hat, jederzeit über AB so gezeichnet werden kann, daß die obere Grundlinie desselben auf CD und deren Verlängerung zu liegen kommt (§. 2.). Nun kann aber ein solches zweites Parallelogramm nach Verschiedenheit seiner Winkel drei verschiedene Lagen haben, welche einige Abänderung in dem Beweise nöthig machen. Nämlich wenn ABEF das zweite Parallelogramm ist, so kann a) seine obere Grundlinie EF in Fig. 45. zum Theil auf CD, zum Theil außerhalb liegen; b) oder EF kann wie Fig. 46. zwar ganz außerhalb CD liegen, doch so, daß die Punkte D und E zusammenfallen; oder c) EF kann wie Fig. 47. auch ganz außer CD liegen, und zwar so, daß ein Zwischenraum DE zwischen beiden bleibt.

Das Parallelogramm ABEF neigt sich in unseren Figuren nach der rechten Seite; es ist aber leicht einzusehen, daß, wenn man es nach der linken neigen wollte, keine anderen als dieselben drei Fälle zum Vorschein kommen würden.

Für jeden dieser drei Fälle ist der Beweis, der hauptsächlich auf IV, 6. 7. und III, 4. beruht, nach dem Vortrage des Lehrers zu bearbeiten.

§. 6. Zusatz.

Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck gleiche Grundlinie und Höhe haben, so ist das Dreieck halb so groß wie das Parallelogramm.

Wie dieses aus §. 5. folge, ergiebt sich leicht aus der Betrachtung von Fig. 48.

§. 7. Zusatz.

Wenn zwei Dreiecke gleiche Grundlinien und Höhen haben, so sind ihre Flächen gleich.

Auch dieser überaus wichtige Satz folgt durch einen sehr einfachen Schluß aus §. 5., wenn man dabei ein ähnliches Verfahren wie in Fig. 48. anwendet. Dieses ist mit Beifügung einer Figur deutlich zu machen.

§. 8. Zusatz.

Wenn von zwei Parallelogrammen oder zwei Dreiecken bekannt ist, daß sie gleiche Flächen haben, und es sind außerdem entweder ihre Grundlinien oder ihre Höhen gleich; so müssen im ersten Fall auch die Höhen, im zweiten Fall die Grundlinien gleich sein.

Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß zwei Parallelogramme von gleichen Grundlinien aber ungleichen Höhen, oder umgekehrt, von gleichen Höhen aber ungleichen Grundlinien nothwendig ungleiche Flächen haben; woraus der obige Satz in Ansehung der Parallelogramme folgt.

Von den Dreiecken aber muß er richtig sein, weil sie allezeit als Hälften von Parallelogrammen dargestellt werden können, welche dieselbe Grundlinie und Höhe haben.

§. 9. Aufgabe.

Ein einziges Parallelogramm oder Dreieck zu finden, welches der Summe zweier oder mehrerer Parallelogramme oder Dreiecke gleich ist, die bei gleichen Höhen beliebige Grundlinien, oder bei gleichen Grundlinien beliebige Höhen haben.

Bei der Auflösung sind einzeln zu betrachten: a) zwei Parallelogramme, b) zwei Dreiecke mit gleicher Höhe und beliebigen Grundlinien; c) zwei Parallelogramme, und d) zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und beliebigen Höhen.

Die Beweise beruhen auf §. §. 5. 7. In einer Anmerkung ist zu zeigen, wie die Auflösung bei mehr als zwei Parallelogrammen oder Dreiecken gemacht werden könne.

§. 10. Aufgabe.

Die vorige Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß statt des Wortes Summe der Ausdruck Unterschied zu setzen, und die Aufgabe nur auf zwei Parallelogramme oder Dreiecke zu beschränken ist.

Bei der Auflösung sind dieselben vier Fälle einzeln zu betrachten.

§. 11. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Parallelogramme zu theilen, die mit dem ganzen entweder gleiche Grundlinien oder gleiche Höhen haben.

Die Auflösung beruht auf II, 5. b. oder IV, 20. und auf §. 5.

§. 12. Aufgabe.

Ein Dreieck durch Linien, welche von einer Winkelspitze nach der Gegenseite gezogen werden, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Die Auflösung beruht auf II, 5. b. oder IV, 20. und §. 7.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale zwei Linien parallel mit den Seiten des Parallelogramms zieht, so wird dadurch a) die ganze Figur in vier Parallelogramme getheilt, von denen b) diejenigen beiden, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich groß sind.

Daß nach a) die vier Stücke der Figur Parallelogramme sind, folgt aus IV, 6.; der zweite Theil aber ergiebt sich leicht aus IV, 7. Beides ist an einer Figur, wie Fig. 49. auszuführen.

§. 14. Lehrsatz.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse so groß wie die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen.

Anleitung zum Beweise. Man zeichne an der Hypotenuse BC des bei A rechtwinkligen Dreiecks ABC Fig. 50. das Quadrat BF, und eben so über AB und AC die Quadrate AH und AL, indem man BA und CA über A hinaus verlängert, und dann nach IV, 13. die Zeichnung vollendet. Dann ist zu beweisen, daß $CB^2 = AC^2 + AB^2$. Zum Beweise fälle man aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse das Loth AD und verlängere es bis G; so läßt sich beweisen, daß AB^2 gleich dem Rechtecke DE sei. Hierzu ziehe man AE und CH, so läßt sich aus III, 6. beweisen, daß das Dreieck ABE congruent mit dem Dreieck HBC, und aus §. 6., daß das Dreieck $ABE = \frac{1}{2} BG$, und das Dreieck $HBC = \frac{1}{2} BI$, woraus folgt, daß $BG = BI$. Auf ganz ähnliche Art läßt sich beweisen, daß $CK = CG$ sei. Dann folgt unmittelbar, daß $CB^2 = AC^2 + CB^2$. A

Anmerkung. Nach einer alten Sage ist Pythagoras der Erfinder dieses ungemein wichtigen Lehrsatzes, den man daher gewöhnlich den Pythagorischen Lehrsatz nennt. Von dem hier angedeuteten Beweise scheint Euklides der Erfinder zu sein.

§. 14. a. Zusatz.

In dem Beweise des §. wird gezeigt, daß Rechteck $DE = AB^2$ und Rechteck $CG = AC^2$ sei, wie wird dies als ein eigener Lehrsatz sich ausdrücken lassen?

§. 14. b. Zusatz.

Wenn man von dem Quadrate der Hypotenuse, das Quadrat einer Kathete hinwegnimmt; wie groß ist die übrigbleibende Figur?

§. 15. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke ein Loth aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse fällt, so ist das Quadrat dieses Lothes gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Anleitung zum Beweise. Man construire (Fig. 50.), wie in §. 14., die Quadrate der drei Seiten des Dreiecks und verlängere das Loth wie dort. Man mache ferner $BM = BD$ und ziehe MN parallel mit BD, so ist MG das Rechteck aus BD und DC. (Dieses alles ist vollständiger auszuführen.) Dann ist zu beweisen, daß $AD^2 = MG$ sei.

Zum Beweise zeige man, daß DM ein Quadrat ist, und wende auf das rechtwinklige Dreieck ADB den §. 14. b. an, indem man aus §. 14. a. noch berücksichtigt, daß Rechteck $DE = AB^2$ ist.

Zur Uebung führe der Schüler Construction und Beweis an dem andern Rechtecke CG.

§. 16. Zusatz.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat der größesten Seite so groß ist wie die Quadrate der beiden kleineren zusammengenommen, so ist der Winkel, welcher der größesten Seite gegenüber liegt, ein rechter.

Anleitung zum Beweise. Man nehme an, daß in dem Dreiecke ABC Fig. 51. $AB^2 = AC^2 + BC^2$; so ist zu erweisen, daß der Winkel ACB ein rechter ist. (Da aber dieses vor dem Beweise noch nicht als entschieden betrachtet werden darf, so ist er absichtlich als stumpfer Winkel gezeichnet. Der Beweis wird aber darthun, daß er schlechterdings ein rechter sein müsse.)

Man setze DC lothrecht auf AC, mache $DC = BC$ und ziehe AD; so ist nach §. 14. $AD^2 = AC^2 + DC^2$. Nach der Voraussetzung aber war $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Vergleicht man beides, so erkennt man leicht, daß $AD^2 = AB^2$, also auch $AD = AB$. (IV, 17. a.) Nachdem die Gleichheit dieser Linien erwiesen ist, ergiebt sich leicht die Congruenz der Dreiecke ABC. ADC; aus dieser aber, daß ACB ein rechter Winkel sei. Dieser Beweis ist vollständig auszuführen.

Anmerkung. Der §. 16. ist die Umkehrung von §. 14., wie man leicht einsieht, wenn man etwas genauer erwägt, was §. 14. Voraussetzung (Vordersatz) und Folgerung (Nachsatz) ist.

§. 17. Lehrsatz.

Wenn man die größeste Seite eines Dreiecks halbirt, und aus der Mitte eine Linie nach der Spitze des Gegenwinkels zieht; so ist dieser Winkel ein rechter, wenn diese Linie so groß ist, wie die Hälfte der getheilten Linie.

Anleitung zum Beweise. In dem Dreiecke ABD Fig. 52. sei die größeste Seite AB in C halbirt und CD gezogen; so ist zu beweisen, daß ADB ein rechter Winkel sei, wenn $CD = CA = CB$.

Der Beweis beruht darauf, daß die Dreiecke ACD, BCD gleichschenklig sind, und jedes bei C einen Außenwinkel hat. Man vergleiche III, 8. II, 10. I, 14.

§. 18. Zusatz.

Wenn man in der Peripherie eines Halbkreises einen beliebigen Punkt wählt, und von diesem zwei Sehnen nach den beiden Endpunkten des Durchmessers zieht, so schließen diese einen rechten Winkel ein.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge aus §. 15. Fig. 52. 17

Anmerkung. Einen solchen Winkel wie ADB nennt man kurz: einen Winkel im Halbkreise. Jeder Winkel im Halbkreise ist also ein rechter.

§. 19. Aufgabe.

In dem Endpunkte einer gegebenen Linie eine winkelrechte zu errichten, ohne die Linie zu verlängern.

Anleitung zur Auflösung. In Fig. 52. nehme man DB für die gegebene Linie an, in deren Endpunkte D ein Loth DA gezogen werden soll. Auf DB wähle man den Punkt B beliebig, und beschreibe auf der Seite, wo das Loth liegen soll, an DB als Grundlinie ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck DCB nach II, 17 c. Aus C beschreibe man dann durch B und D einen Kreis, und verlängere BC bis an die Kreislinie in A; zieht man nun DA, so ist diese das verlangte Loth.

Die Auflösung ist an einer eigen dazu eingerichteten Figur im Hefte zu wiederholen und die Richtigkeit derselben zu beweisen.

§. 20. Aufgabe.

Es sind die Seiten zweier Quadrate gegeben. Man soll die Seite eines dritten finden, welches der Summe jener beiden gleich ist.

Die Auflösung ergiebt sich unmittelbar aus §. 14. Daß es nicht nöthig sei, die Quadrate selbst zu zeichnen, da die Aufgabe nur von ihren Seiten redet, bedarf wohl keiner Erinnerung.

§. 21. Aufgabe.

Es sind die Seiten zweier ungleichen Quadrate gegeben; man soll die Seiten eines dritten finden, welches dem Unterschiede jener beiden gleich ist. 14 b

Die Auflösung folgt aus §. 15. und einer leicht aufzufindenden Construction, oder auch durch Anwendung von §. 18.

§. 22. Aufgabe.

Ein Rechteck, dessen Seiten gegeben sind, in ein Quadrat zu verwandeln.

Erste Auflösung. Die Seiten des Rechtecks seien: AB und BC Fig. 53. Diese lege man, wie in der Figur geschehen, so aneinander, daß sie eine einzige Linie AC bilden. Ueber dieser beschreibe man einen Halbkreis ABC und errichte in B ein Loth BD: so ist dieses die Seite des verlangten Quadrats.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus §. 15. a.

Zweite Auflösung. Die eine Seite des Rechtecks sei AC in derselben Figur; die andere AB schneide man von dieser ab, ziehe über AC den Halbkreis, errichte das Loth BD, und ziehe endlich die Sehne AD, so ist dieses die Seite des verlangten Quadrates.

Der Beweis folgt aus §. 14. a.

Anmerkung. Diese, so wie mehrere Aufgaben dieses Abschnittes sind Beispiele von geometrischen Verwandlungen der Figuren. In dem Anhange soll gezeigt werden, daß es möglich sei, alle geradlinigen Figuren in Quadrate zu verwandeln. Uebrigens bemerken wir hier noch, daß die Anhänge der Abschnitte mehr zum eigenen Studium, als zum Vortrag in den Klassen bestimmt sind.

Anhang zum fünften Abschnitt.

A. Rein geometrische Verwandlung aller geradlinigen Figuren in Quadrate.

§. 1. Aufgabe.

Ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Die Auflösung dieser und der nächstfolgenden Aufgaben beruht auf §. 7.; denn wenn man eine beliebige Seite eines Dreiecks zur Grundlinie gewählt hat und durch die gegenüberliegende Winkelspitze eine Parallele mit der Grundlinie zieht, so ist aus §. 7. klar, daß jedes Dreieck, welches auf derselben oder einer gleich großen Grundlinie steht, die man auf der Verlängerung der ersten abschneidet, dem gegebenen Dreiecke gleich ist, wenn die obere Winkelspitze desselben in der oberen Parallele liegt. Es kommt also bei dieser und der folgenden Aufgabe nur darauf an, zu überlegen, wohin man die obere Spitze des neuen Dreiecks zu bringen habe, um den Bedingungen der Aufgabe Genüge zu leisten.

§. 2. Aufgabe.

Ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Vergleiche zur Auflösung den vorigen §. und III. 27.

§. 3. Aufgabe.

Ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck mit derselben Höhe zu verwandeln.

Auch hier beruht die Auflösung auf denselben Betrachtungen wie §. 1., wenn man noch erwägt, daß man ein Rechteck (oder überhaupt ein Parallelogramm) in zwei nach V. 11. congruente Parallelogramme theilt, wenn man zwei Gegenseiten halbirt, und die Theilpunkte durch eine Linie verbindet.

§. 4. Aufgabe.

Ein beliebiges Dreieck in ein Rechteck mit derselben Grundlinie zu verwandeln.

Wie §. 3.

§. 5. Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes gleichwinkliges, aber mit einer vorgeschriebenen Grundlinie zu verwandeln.

Die Auflösung ergiebt sich leicht aus §. 13. und Betrachtung der dazu gehörigen Fig. 49., wenn man AFEH als das zu verwandelnde Parallelogramm, und HB = EG als die Grundlinie des zu findenden betrachtet.

§. 6. Aufgabe.

Ein beliebiges Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln, doch so, daß einer von den beiden Winkeln an der Grundlinie unverändert bleibt.

Man kann leicht eine Auflösung dieser Aufgabe aus der vorhergehenden ableiten. Einfacher aber ist folgende: Es sei ABC Fig. 54. das zu verwandelnde Dreieck. Der Winkel bei A soll unverändert bleiben, statt AB soll es aber eine Grundlinie = DE erhalten. Von dem Punkte A aus mache man AF = DE, ziehe FC, und mit dieser parallel BG, endlich die Linie GF; so ist AGF das verlangte Dreieck.

Der leicht zu findende Beweis beruht auf V. 7.

§. 7. Aufgabe.

Eine beliebige vielseitige Figur in eine andere zu verwandeln, die eine Seite weniger hat.

Anleitung zur Auflösung. Man schneide von dem gegebenen Vieleck. Viereck vermittelst einer Diagonale ein Dreieck ab. Durch die Winkelspitze dieses Dreiecks, die der Diagonale gegenüberliegt, ziehe man eine Parallele mit derselben. Dann verlängere man eine von denjenigen Seiten der Figur, die an die Diagonale stoßen, aber nicht zu dem abgeschnittenen Dreieck gehören, bis zur Parallele, und von dem Durchschnittspunkte ziehe man eine Linie bis zu dem anderen Endpunkte der Diagonale; so erhält man zwischen den beiden Parallelen zwei Dreiecke, die nach V. 7. gleich sind. Nimmt man nun von der Figur das zuerst abgeschnittene Dreieck hinweg, und setzt statt dessen das später entstandene ihm gleiche hinzu, so ist leicht einzusehen, daß die neue Figur bei ungeänderter Größe einen Winkel weniger, folglich auch eine Seite weniger habe.

Wer nach dieser Anleitung eine Figur zeichnet, wird keine Schwierigkeit bei der Auflösung finden.

§. 8. Anmerkung.

Es ist klar, daß jede vielseitige Figur durch wiederholte Anwendung der vorigen Aufgabe in ein Dreieck verwandelt werden könne. Da ferner nach 3 und 4 dieses Anhanges jedes Dreieck in ein Rechteck, dieses aber nach §. 22. des Abschnitts in ein Quadrat verwandelt werden kann, so ist dadurch erwiesen, daß jede geradlinige Figur rein geometrisch in ein Quadrat verwandelt werden könne.

B. Einige vermischte Sätze über Parallelogramme.

§. 9. Erklärung.

Mittelpunkt eines Parallelogrammes heißt der Punkt, in welchem sich beide Diagonalen schneiden.

§. 10. Lehrsatz.

Beide Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

Aus III. 7. ist die Congruenz der Dreiecke ECD, EAB Fig. 55. erweislich, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit des Satzes.

Zusatz. Man kann also den Mittelpunkt finden, sobald man nur eine der Diagonalen gezogen hat.

§. 11. Lehrsatz.

Jede durch den Mittelpunkt gezogene Linie halbirt das Parallelogramm.

Die Gleichheit der Vierecke FGAC und FGBD Fig. 55. ist leicht zu erweisen, denn Dreieck CAB = CDB (IV. 7.) und Dreieck EGB = EFC (III. 7.).

Anmerkung. Es läßt sich aber nicht bloß die Gleichheit, sondern selbst die Congruenz beider Vierecke beweisen. Denn jede der beiden Hälften Fig. 55. besteht aus drei Dreiecken, welche, paarweise verglichen, congruent und in derselben Weise zusammengefügt sind; woraus sich die Gleichheit aller einzelnen Winkel und Seiten der Vierecke in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, beweisen läßt; so daß beide, gehörig aufeinander gelegt, sich decken würden.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn eine Linie aus zwei Stücken besteht, so ist ihr Quadrat so groß, wie die Quadrate beider Stücke, nebst dem doppelten Rechteck aus beiden Stücken.

Es sei Fig. 56. AC = AB + BC. Man zeichne das Quadrat von AC, nämlich AD. Man mache AE = AB und ziehe BF mit CD, EG mit AC parallel.

Wenn sich die Linien in H schneiden, so ist zuerst klar, daß AD in vier Parallelogramme (IV. 6.) und namentlich in vier Rechtecke (IV. 11.) getheilt sei. Hieraus übersieht man leicht, welche Linien der Figur = AB und welche = BC sind.

Dann läßt sich zeigen, daß AH und HD die Quadrate von AB und BC (IV. 11.), EF und BG aber Rechtecke aus AB und BC sind (IV. 11.).

Hieraus ergiebt sich, daß:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,[AB \times BC].$$

Anmerkung. Die Aehnlichkeit dieses Satzes mit der arithmetischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wird jedem, der mit der Buchstabenrechnung schon bekannt ist, einleuchten. In dem Abschnitte von der Ausmessung der Figuren wird ihr innerer Zusammenhang deutlich werden.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn man von einer Linie ein Stück abschneidet, so erhält man das Quadrat des Restes, wenn man von der Summe der Quadrate der Linie und des abgeschnittenen Stückes das doppelte Rechteck aus der Linie und dem abgeschnittenen Stücke hinwegnimmt.

Es ist also zu beweisen, daß, wenn man Fig. 56. von der Linie AC das Stück BC abschneidet,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,[AC \times CB].$$

Man mache die Zeichnung eben so wie im vorigen §., nur setze man an IE noch das Quadrat $IL = BC^2$, so ist $AD + IL = AC^2 + BC^2$, ferner ist $BD = LF = AC \times BC$. Nimmt man aber diese beiden Rechtecke von der Summe jener beiden Quadrate hinweg, so bleibt übrig $AH = AB^2$.

Anmerkung. Auch dieser Satz ist der arithmetischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ähnlich.

§. 14. Lehrsatz.

In einem stumpfwinkligen Dreiecke sind die Quadrate der beiden Schenkel des stumpfen Winkels kleiner als das Quadrat der dritten Seite, und zwar um ein doppeltes Rechteck, dessen eine Seite der eine Schenkel des stumpfen Winkels, die andere aber die Verlängerung dieses Schenkels, bis zu dem, aus dem Gegenwinkel gefällten Lothe ist.

In dem bei A Fig. 57. stumpfwinkligen Dreieck ABC ist der Schenkel BA verlängert, und auf die Verlängerung aus G das Loth CD gefällt. Es ist also zu beweisen, daß

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,[BA \times AD].$$

Beweis. Nach §. 14. des Abschn. ist:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Nun ist $BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2\,[BA \times AD]$ (§. 12. d. Anh.), und $DC^2 = AC^2 - AD^2$ (§. 14. b. d. Abschn.). Setzt man diese Werthe statt BD^2 und DC^2, so ergiebt sich:

$$BC^2 = BA^2 + AD^2 + 2\,[BA \times AD] + AC^2 - AD^2.$$

Da sich $+ AD^2$ und $- AD^2$ heben, so zeigt das Uebrigbleibende den zu erweisenden Satz.

§. 15. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke sind die Quadrate der Schenkel eines spitzigen Winkels zusammengenommen größer als das Quadrat der dritten Seite, und zwar um ein doppeltes Rechteck, dessen eine Seite ein Schenkel des spitzigen Winkels, die andere aber ein Stück desselben ist, welches zwischen einem von der Spitze des diesem Schenkel gegenüberliegenden Dreieckswinkels gefällten Lothe, und dem Scheitelpunkte des spitzigen Winkels liegt.

In dem Dreieck ABC Fig. 58. ist der Winkel BAC ein spitziger. Aus dem Endpunkte des einen Schenkels C ist ein Loth CD auf den anderen gefällt; es ist daher zu beweisen, daß

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\,[BA \times AD].$$

Der Beweis ist dem vorhergehenden vollkommen ähnlich, und stimmt selbst in Ansehung der Buchstaben mit ihm überein, nur daß hier in dem Werthe von BD^2 (weil $BD = BA - AD$) das doppelte Rechteck nach §. 13. des Anh. das Zeichen — erhält.

§. 16. Lehrsatz.

Die Quadrate der vier Seiten eines Parallelogrammes sind zusammengenommen so groß, wie die Quadrate der beiden Diagonalen zusammengenommen.

Es ist also in Fig. 59 zu beweisen, daß

$$AD^2 + CB^2 = AC^2 + CD^2 + DB^2 + BA^2.$$

Bei dem Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) wenn die Figur ein rechtwinkliges, b) wenn sie ein schiefwinkliges Parallelogramm ist;

Der Beweis für a) ist sehr leicht zu finden; denn gesetzt CB wäre rechtwinklig, so folgte aus §. 14. des Abschn., daß $CB^2 = CD^2 + DB^2$ und $AD^2 = CD^2 + CA^2$; woraus der Satz unmittelbar hervorgeht; da $CD = AB$.

Zum Beweise für b) fälle man aus den Endpunkten einer Seite AC zwei Lothe AE und CF auf die anstoßenden Seiten CD und AB, so ist im Dreieck ACD nach §. 15. des Anh.:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\,[DC \times CE],$$

und im Dreiecke ACB nach §. 14. des Anh.:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2\,[BA \times AF],$$

oder, da $AC = DB$, $AB = CD$, $AF = CE$,

$$BC^2 = DB^2 + AB^2 + 2\,[DC \times CF]. \quad E$$

Summirt man nun die beiden Werthe von AD^2 und BC^2, so ergiebt sich, was zu erweisen war, da $+ 2\,[DC \times CE]$ und $- 2\,[DC \times CE]$ sich heben.

§. 17. Aufgabe.

Es sind die Seiten mehrerer Quadrate gegeben, man soll die Seite eines einzigen finden, das ihnen allen zusammengenommen gleich ist.

Die Auflösung ergiebt sich leicht durch wiederholte Anwendung von §. 20. des Abschn., indem man erst die Seite eines Quadrates sucht, das zweien gleich ist, zu diesem das dritte fügt, u. s. w.

§. 18. Aufgabe.

Es ist die Seite eines Quadrates gegeben, man soll die Seite eines andern finden, welches ein bestimmtes Vielfaches von jenem ist.

Die Auflösung ergiebt sich aus §. 17., wenn man die gegebenen Seiten der Quadrate gleich groß annimmt.

§. 19. Aufgabe.

Es ist die Seite eines Quadrates gegeben, man soll die Seite eines andern finden, das ein bestimmter genauer Theil von jenem ist.

Auflösung. Es sei AC Fig. 53. die gegebene Seite eines Quadrates; es soll die Seite eines anderen gefunden werden, das der sechste Theil von diesem ist. Man mache $AB = \frac{1}{6}$ AC, ziehe den Halbkreis ADC, das Loth BD, und die Sehne DA, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis Nach §. 14. a. des Abschn. ist $DA^2 = CA \times AB$. Nach §. 11. des Abschn. ist aber das Rechteck $CA \times AB = \frac{1}{6}\ AC^2$ also $AD^2 = \frac{1}{6} AC^2$.

Anmerkung. Aus §. 15. des Abschn. läßt sich noch eine etwas veränderte Auflösung ableiten.

Sechster Abschnitt.

Von Linien und Winkeln im Kreise.

---

§. 1. Aufgabe.

Eine Linie von vorgeschriebener Länge in eine Kreislinie von einem gegebenen Punkte aus als Sehne einzutragen.

Die vollständige geometrische Auflösung ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten Fig. 60., auch ist die abgekürzte Auflösung hinzuzufügen.

Wenn man die beiden Spitzen eines Zirkels auf zwei Punkte einer Kreislinie setzt; ist es richtig, zu sagen, man habe den dazwischenliegenden Bogen mit dem Zirkel gefaßt?
Kann die einzutragende Sehne AB Fig. 60. jede beliebige Größe haben?
Welches ist die größte Sehne, die in einen Kreis eingetragen werden kann?

§. 2. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise zwei Winkel am Mittelpunkte gleich sind, so sind auch die dazu gehörigen Bogen, Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte gleich.

Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß, wenn man zwei dergleichen Winkel ACB, DCE (Fig. 61.) gehörig aufeinanderbringt, alle im Satz genannten Stücke einander decken.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn zwei Bogen einer Kreislinie gleich sind, so sind auch alle übrigen dazu gehörigen im vorigen §. aufgezählten Stücke gleich.

Diese Stücke sind einzeln zu nennen. Der Beweis wird übrigens auf ähnliche Art, wie im vorigen §. geführt; wobei nur zu bemerken, daß es hinreichend ist, durch Deckung bloß die Gleichheit der Winkel am Mittelpunkt zu beweisen, da hieraus das übrige unmittelbar nach §. 2. folgt. (Fig. 61.)

§. 4. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen in einem Kreise gleich sind, so sind auch die zugehörigen Bogen, Abschnitte, Ausschnitte und Winkel am Mittelpunkte gleich.

Wenn man vom Mittelpunkte nach den Endpunkten beider Sehnen Halbmesser zieht, so erhält man zwei Dreiecke, deren Congruenz nach III. 4. erwiesen werden kann. Dann folgt alles übrige aus §. 2. (Fig. 61.)

§. 5. Lehrsatz.

Zu ungleichen Winkeln am Mittelpunkte gehören ungleiche Bogen, und umgekehrt. Auch sind in beiden Fällen die zugehörigen Ausschnitte und Abschnitte ungleich.

Wie lautet die Umkehrung zu dem ersten Theile des Satzes?

Der Beweis ist sehr leicht. Wenn man nämlich Winkel oder Bogen gehörig aufeinander legt, so ist sichtbar, daß alle übrigen genannten Stücke sich nur zum Theil decken. Die Gesetze eines guten mathematischen Vortrages fordern aber, daß von jedem dieser Sätze der Beweis einzeln geführt werde, also a) vom ersten Theile des Satzes, b) von der Umkehrung desselben, c) vom zweiten Theil. (Fig. 62.)

§. 6. Zusatz.

Wenn die Flächen zweier Ausschnitte oder Abschnitte in einem Kreise gleich sind, so sind auch die dazu gehörigen Bogen, Winkel am Mittelpunkte, und Sehnen gleich.

Es ist zu zeigen, wie dieses aus den vorhergehenden Sätzen folgt.

§. 7. Anmerkung.

Da Kreise von gleichen Halbmessern jederzeit congruente Figuren sind, so ist man berechtigt, die Sätze von §. 2. bis 6. nicht bloß auf einen und denselben Kreis, sondern auch auf gleiche Kreise anzuwenden.

Die Sätze sind im Hefte wörtlich auszusprechen.

§. 8. Zusatz.

Da nach §. 4. zu gleichen Sehnen gleiche Bogen und Winkel am Mittelpunkte gehören, so ist es leicht, folgende Aufgaben zu lösen:

a. Von einer Kreislinie einen oder mehrere Bogen von gegebener oder beliebig gewählter Größe abzuschneiden.

b. Einen gegebenen Kreisbogen mechanisch in 2, 3, 4, 5 oder mehr gleiche Theile zu theilen.

c. Einen gegebenen Winkel mechanisch in 2, 3, 4, 5 oder mehr gleiche Theile zu theilen.

Das Verfahren, welches bei jeder dieser Aufgaben zu beobachten ist, soll vollständig beschrieben und durch eine Figur deutlich gemacht werden.

Auch sind im Uebungsheft mehrere Theilungen von Bogen und Winkeln nach b) und c) zu machen.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn man von dem Mittelpunkt eines Kreises eine Linie

Ab-23

nach der Mitte einer Sehne zieht, so ist erweislich, a) daß sie auf der Sehne winkelrecht steht, und b), daß sie den zugehörigen Winkel am Mittelpunkt und Bogen halbirt.

Der Beweis beruht auf III, 4., I, 11. und VI, 2. (Fig. 63.)

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man aus den beiden Endpunkten einer Sehne Halbmesser zieht, und den Winkel, den sie einschließen, halbirt, so halbirt die Theilungslinie auch das entstandene Dreieck, den Bogen und die Sehne.

Der Beweis beruht auf III, 6. und VI, 2. (Fig. 63.)

§. 11. Lehrsatz.

Eine Linie, die man aus dem Mittelpunkte eines Kreises winkelrecht auf eine Sehne fället, halbirt a) die Sehne, b) den dazu gehörigen Winkel am Mittelpunkte wie auch den Bogen.

Der Beweis beruht auf III, 18. b. und VI, 2. (Fig. 63.)

§. 12. Lehrsatz.

Wenn man in der Mitte einer Sehne eine winkelrechte Linie errichtet, so geht a) dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises, und b) halbirt beide Bogen, in welche die Kreislinie durch die Sehne getheilt wird.

Um a) zu beweisen, nehme man an, der Mittelpunkt liege, wo möglich, außer der winkelrechten Linie, und ziehe von diesem angenommenen Mittelpunkte eine Linie nach der Mitte der Sehne, so führt diese Annahme, verglichen mit §. 9., allezeit auf einen Widerspruch, und ist also in jedem Falle falsch. Daher muß nothwendig der Mittelpunkt in der winkelrechten Linie liegen (Fig. 65.); b) folgt dann sehr leicht aus a).

Zusatz.

Der Inhalt von §. 9. a. läßt sich auf zweifache Weise umkehren, wie heißen diese Umkehrungen und in welchen der §. §. 10.—12. sind sie enthalten?

§. 13. Anmerkung.

Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises nach den beiden Endpunkten einer Sehne zwei Halbmesser zieht, so entsteht jederzeit ein gleichschenkliges Dreieck. Daher lassen sich die in §. §. 9, 10, 11, 12. enthaltenen Sätze, mit gehöriger Veränderung im Ausdruck, ganz allgemein auf gleichschenklige Dreiecke anwenden.

Wie muß demzufolge jeder der obigen vier Lehrsätze ausgedrückt werden?

Welche Sätze eines früheren Abschnitts kommen hier in Betracht?

§. 14. Aufgabe.

Zu einem gegebenen Kreise den Mittelpunkt zu finden.

Die Auflösung beruht auf §. 12. und auf dem Begriff eines Durchmessers. (Fig. 64.)

§. 15. Aufgabe.

Durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, eine Kreislinie zu ziehen.

Auflösung und Beweis sind nach dem Vortrage des Lehrers zu führen.

Auf diesen Satz bezieht sich Fig. 65., wobei wir nur bemerken, daß zu der bloßen Auflösung nur AB, AC, DF und EF erforderlich sind. Die übrigen Linien sind theils Hülfslinien zum Beweise, theils beziehen sie sich auf den folgenden Paragraphen.

§. 16. Zusätze.

a. Es ergiebt sich aus dem vorigen §., daß, und wie man einen Kreis um ein Dreieck, d. h. durch seine Winkelspitzen beschreiben könne.

Dieses ist bestimmt auszuführen.

b. Auch läßt sich leicht erweisen, daß, wenn man alle drei Seiten eines Dreiecks halbirt, und in den Theilpunkten winkelrechte Linien errichtet, diese in einem einzigen Punkt zusammenstoßen müssen.

Wenn man nach a) einen Kreis um das Dreieck beschrieben hat, so ergiebt sich der Beweis unmittelbar aus §. 12.

Anmerkung. Der Satz b) giebt Stoff zu einer nützlichen Arbeit im Uebungsheft. Wenn man an einem Dreiecke die Probe macht, ob die gedachten drei Winkelrechten wirklich in einen Punkt zusammentreffen, so kann man aus dem Erfolge auf die Genauigkeit der Zeichnung schließen.

§. 17. Erklärung.

Wenn zwei Sehnen in einem Punkte der Kreislinie zusammenstoßen, so nennt man den Winkel, den sie einschließen, einen Umfangs- oder Peripherie-Winkel.

Man sagt: ein solcher Winkel steht auf dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt; er steht in dem Bogen, der den übrigen Theil der Kreislinie ausmacht.

Auch nennt man einen solchen Winkel den Winkel eines Abschnitts, wenn seine Schenkel durch die Endpunkte der Sehne gehen, welche den Abschnitt bildet, und wenn seine Spitze in dem Bogen des Abschnitts liegt.

Alle diese Begriffe und Ausdrücke sind an einer Figur anschaulich zu machen.

§. 18. Lehrsatz.

Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß, als ein Winkel am Mittelpunkte, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Anleitung zum Beweise. Auf einem bestimmten Bogen kann nur ein einziger Winkel am Mittelpunkt stehen, aber unzählige Peripheriewinkel. Diese letzteren aber können in Ansehung des Mittelpunktes eine dreifache Lage haben: a) entweder liegt der Mittelpunkt in einem der Schenkel des Peripheriewinkels ADB Fig. 66., oder er liegt b) zwischen beiden Schenkeln Fig. 67., oder er liegt c) außerhalb des Winkels ADB wie Fig. 68. Eine vierte Lage ist undenkbar.

Für diese drei Fälle ist der Beweis einzeln zu führen. Im ersten Falle Fig. 66. ist er sehr einfach und beruht auf III, 8. und auf II, 10. Der zweite und dritte Fall läßt sich auf den ersten zurückführen, wenn man eine Hülfslinie DE durch die Spitze der beiden Winkel Fig. 67. und 68. zieht.

§. 19. Zusatz.

Peripheriewinkel sind folglich gleich, a) wenn sie auf demselben Bogen stehen, b) wenn sie auf gleichen Bogen stehen,

c) wenn sie in gleichen Bogen stehen, d) wenn sie Winkel gleicher Abschnitte sind; und umgekehrt.

Der Sinn jedes dieser Sätze und ihrer Umkehrungen ist durch eine Figur anschaulich zu machen.

Kann auch hier eine Bemerkung, ähnlich mit §. 7., hinzugefügt werden?

§. 20. Anmerkung.

Wenn man die Schenkel des Mittelpunktswinkels über den Mittelpunkt hinaus bis zur Kreislinie verlängert, wie dieses Fig. 69. mit den Schenkeln des Winkels ACB geschehen ist, so kann man noch auf eine andere Art als §. 18. die möglichen Lagen eines Peripheriewinkels übersehen. Nämlich die Spitze des Peripheriewinkels liegt 1) entweder zwischen A und D; oder 2) in D; oder 3) zwischen D und E; oder 4) in E; oder 5) zwischen E und B.

Da hier fünf Fälle erscheinen, so ist zu zeigen, wie diese mit den drei Fällen im Beweise von §. 18. zusammenhängen.

§. 21. Zusatz.

Der Lehrsatz §. 18. bleibt auch richtig, wenn der Winkel am Mittelpunkt ein converer oder ein gerader (zwei rechte betragender) ist. (IV, 1.)

Zu dem Bogen AEB Fig. 70., der größer als die halbe Peripherie ist, gehört der konvere Mittelpunktswinkel $\overset{\frown}{ACB}$; steht nun auf dem Bogen AEB ein Peripheriewinkel ADB, so darf man nur die Hülfslinie DE durch C ziehen, um einzusehen, daß der Beweis wie in dem zweiten Falle §. 18. Fig. 67. geführt werden könne.

Liegen AC und CB in einer geraden Linie, so daß sie den geraden Winkel ACB bilden, so finden dieselben Schlüsse statt.

Beides ist vollständiger auszuführen; auch ist das letzte mit einem Satze des vorigen Abschnittes zu vergleichen.

§. 22. Zusatz.

Ein Peripheriewinkel kann ein spitziger, er kann ein stumpfer, er kann auch ein rechter Winkel sein.

Es sind die Bedingungen anzugeben, unter welchen er die eine oder die andere Größe haben kann; und zwar sind diese Bedingungen in jedem Fall auf drei Arten anzugeben; nämlich: ob 1) der Bogen, auf welchem der Winkel steht, oder 2) der Bogen, in welchem er steht, kleiner oder größer oder eben so groß, als die halbe Kreislinie sei; 3) ob der Abschnitt, in welchem er steht, größer oder kleiner oder eben so groß, als der Halbkreis sei.

Anmerkung. Besonders sind die Bedingungen zu merken, unter welchen der Peripheriewinkel ein rechter ist.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks halbirt, und aus dem Halbirungspunkte mit der Hälfte der Hypotenuse einen Kreis beschreibt, so geht dieser durch die Spitze des rechten Winkels.

Beweis. Man halbire Fig. 53. die Hypotenuse AC des rechtwinkligen Dreiecks ADC in E, und beschreibe aus E mit AE einen Kreis; so soll dieser durch D gehen. Er gehe nicht durch D, sondern falle außerhalb des Dreiecks; man verlängere DC bis zur Peripherie in F und ziehe AF; alsdann ist AFC ein rechter Winkel (§. 22.). Dies ist ein Widerspruch gegen II, 10. Derselbe Widerspruch könnte herbeigeführt werden, wenn der Kreis die Seite des Dreiecks durchschnitte, also die Spitze außerhalb des Kreises läge, und hieraus ergiebt sich der Schluß, daß der Kreis durch D gehen müsse.

§. 24. Lehrsatz.

In jedem Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, betragen jede zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen zwei rechte.

Der Beweis ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten. (Fig. 71.)

§. 25. Zusatz.

Wenn in einem Viereck zwei Gegenwinkel sich zu zwei rechten ergänzen; so läßt sich ein Kreis durch alle vier Eckpunkte legen.

Dieser Satz ist die Umkehrung des vorigen. Man legt zum Beweise einen Kreis durch drei Eckpunkte nach §. 15., und beweist, ähnlich wie in §. 23., daß derselbe auch durch den vierten geht.

Anhang zum sechsten Abschnitt.

§. 1. Lehrsatz.

Die Bogen zwischen zwei parallelen Sehnen sind gleich; und umgekehrt: wenn man zwei Sehnen von den Endpunkten eines Bogens nach den Endpunkten eines gleichen Bogens so zieht, daß sie sich nicht innerhalb des Kreises schneiden, so sind diese parallel.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus Betrachtung von Fig. 72., und beruht auf I, 23. und §. 19. dieses Abschnittes. Die Umkehrung auf 19. des Abschn. und I, 22.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sehnen innerhalb des Kreises schneiden, so daß zwei Paar Scheitelwinkel entstehen; so gehören zu jedem Paare von Scheitelwinkeln zwei Bogen und jeder dieser Scheitelwinkel ist so groß wie die Summe der beiden Peripheriewinkel, die auf diesen Bogen stehen.

Anleitung zum Beweise. Wenn in Fig. 73. sich die Sehnen AB und CD in E schneiden, so ist zu beweisen, daß der Winkel AED so groß sei wie die Summe der beiden Peripheriewinkel auf den Bogen AD und CB. Um den Beweis zu führen, ziehe man die Sehne zu dem Bogen eines Nebenwinkels; dann beruht der Beweis auf II, 10.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen verlängert sich außerhalb des Kreises schneiden, so ist der Winkel, den sie einschließen, so groß wie der Unterschied der beiden Peripheriewinkel, die auf den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen stehen können.

Anleitung zum Beweise. Wenn in Fig. 74. die Sehnen AB und DC verlängert sich in E schneiden; so ist zu beweisen, daß der Winkel AED so groß ist wie der Unterschied der Peripheriewinkel auf den Bogen AD und BC. Man ziehe von einem Endpunkte der einen Sehne nach dem entgegengesetzten der andern eine Linie BD, dann ergiebt sich der Beweis wieder aus II, 10.

§. 4. Lehrsatz.

Von zwei Sehnen ist diejenige die größere, welche dem Mittelpunkte näher liegt. Sehnen, die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben, sind daher gleich.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 75. sind die Sehnen AB und CD, und aus dem Mittelpunkt E die Lothe EF und EG gezogen; wird nun vorausgesetzt, daß EF größer als EG, so ist zu beweisen, daß AB kleiner als CD sei.

Wenn man zum Beweise zwei Halbmesser EB und ED zieht, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke EFB und EGD; in denen man die Größe der Quadrate von FB und GD nach V. 14. b. vergleichen, und daraus einen Schluß auf FB und GD (IV. 17. a.), mithin auf AB und CD (VI. 11.) machen kann.

§. 5. Lehrsatz.

Durch einen Punkt innerhalb des Kreises können unzählig viel Sehnen gezogen werden; unter diesen ist a) diejenige, die zugleich ein Durchmesser ist, die größeste, und b) diejenige die kleinste, welche auf diesem Durchmesser winkelrecht steht.

Anleitung zum Beweise. In dem Fig. 76. aus A beschriebenen Kreise, sei der Punkt B beliebig gewählt, so ist klar, daß durch diesen Sehnen in allen Richtungen, also unzählige, gezogen werden können. Eine von diesen, CD, geht durch den Mittelpunkt A, und ist daher ein Durchmesser; eine andere, EF, kann man winkelrecht durch CD ziehen.

a. Daß jene, CD, die größeste sei, ist unmittelbar klar. Will man indessen zur Uebung einen förmlichen Beweis führen, so wird man z. B. in Fig. 52. sehr leicht beweisen können, daß jede Sehne, DB, kleiner sei als der Durchmesser; denn zieht man AD, und vergleicht §. 22. d. Abschn. mit III. 11., so ist die Richtigkeit in aller Form erweislich.

b. Um nun zu zeigen, daß EF (Fig. 76.) die kleinste Sehne sei, ziehe man durch B irgend eine beliebige andere Sehne GH, und fälle AI auf dieselbe winkelrecht; so ergiebt sich aus Vergleichung der Seiten AB und AI in Verbindung mit §. 4. dieses Anhangs, daß EF kleiner sei als GH.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie durch einen Punkt in zwei gleiche, und durch einen andern in zwei ungleiche Abschnitte getheilt wird, so ist das Quadrat der Hälfte größer, als das Rechteck aus den beiden ungleichen Abschnitten, und zwar um das Quadrat der Entfernung beider Theilungspunkte.

Anleitung zum Beweise. Es ist die Linie AC Fig. 53. bei E in zwei gleiche AE und EB, und bei B in ungleiche Abschnitte AB und BC, getheilt; nun ist zu beweisen, daß

$$AE^2 = AB \times BC + BE^2.$$

Zum Beweise beschreibe man über AC einen Halbkreis, errichte in B die winkelrechte DB, und ziehe DE, so ergiebt sich der Beweis aus dem Dreieck DBE, nach V, 14. u. 15.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten der einen dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der andern gleich.

Anleitung zum Beweise. Die Fälle, welche beim Durchschneiden zweier Sehnen eintreten können, sind folgende vier: a) Beide Sehnen sind Durchmesser; b) die eine ist ein Durchmesser, und die andere steht auf ihr winkelrecht; c) die eine ist ein Durchmesser, aber die andere schneidet ihn schiefwinklig; d) keine von beiden geht durch den Mittelpunkt.

Die Richtigkeit des Satzes in dem Falle a) leuchtet von selbst ein, denn man sieht leicht, daß ein jedes der entstehenden Rechtecke das Quadrat des Halbmessers sei.

In dem Falle b) ist Fig. 64. der Durchmesser DE des aus G beschriebenen Kreises gegeben, der von der Sehne AB in C winkelrecht durchschnitten wird. Aus V, 22. ist bekannt, daß $AC^2 = DC \times CE$; da aber auch $AC = CB$ (VI, 11.), so ist $AC^2 = AC \times CB$, also $AC \times CB = DC \times CE$.

Für den Fall c) werde in Fig. 77. der Durchmesser BC von der Sehne DE schief durchschnitten. Es ist also zu beweisen, daß $BF \times FC = EF \times FD$. Zum Beweise ziehe man von A die Linie AG winkelrecht auf DE und den Halbmesser AE, so ist $BF \times FC = BA^2 - AF^2$ und $EF \times FD = EG^2 - GF^2$ (§. 6. d. Anh.), und da $EG^2 = AE^2 - AG^2$, so ist $EF \times FD = AE^2 - AG^2 - GF^2$. Da aber $BA = AE$ und $AF^2 = AG^2 + GF^2$, so ist es einerlei, ob ich von BA^2 wegnehme AF^2, oder ob ich von AE^2 wegnehme AG^2 und FG^2. Mithin ist $BF \times FC = EF \times FD$.

Der Beweis für d) ergiebt sich unmittelbar aus c). Denn durchschneiden sich in F zwei Sehnen DE und HI, deren keine ein

Durchmesser ist, so ziehe man noch durch F den Durchmesser BC. Dann ist nach c) $EF \times FD = BF \times FC$, und eben so ist $IF \times FH = BF \times FC$; also ist auch $EF \times FD = IF \times FH$.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn die Schenkel zweier Verticalwinkel begrenzt sind und das Rechteck aus zweien dieser Schenkel, die in gerader Linie liegen, dem Rechteck aus den andern beiden Schenkeln gleich ist; so läßt sich ein Kreis durch die vier Endpunkte der Schenkel beschreiben.

Der Satz ist die Umkehrung des vorigen. Der Beweis wird indirect mit Anwendung des vorigen Satzes geführt.

§. 9. Aufgabe.

Ein Rechteck zu construiren, das einer gegebenen Fläche gleich ist und eine vorgeschriebene Grundlinie hat.

Die Auflösung findet man leicht, wenn man die beiden Seiten des gegebenen Rechtecks in eine gerade Linie zusammenfügt, und von dem Punkte, wo sie aneinanderliegen, aus in beliebiger Richtung eine dritte Linie anlegt, welche der gegebenen Grundlinie gleich ist. Es kommt dann darauf an, einen Kreis zu beschreiben und eine Linie zu verlängern.

Anmerkung. Die Aufgabe kann auch auf beliebige Parallelogramme und auf Dreiecke bezogen werden; wenn man statt der zusammenstoßenden Seiten Höhe und Grundlinie in Betracht zieht.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man über einer Sehne ein beliebiges Dreieck errichtet, dessen Spitze irgendwo innerhalb des Kreises über der Sehne liegt; so ist der Winkel an der Spitze größer: liegt aber die Spitze irgendwo außerhalb des Kreises; so ist er kleiner als der Peripheriewinkel des Abschnitts, innerhalb dessen das Dreieck liegt.

Anleitung zum Beweise. Der Beweis beruht, nachdem man den Peripheriewinkel des Abschnitts zweckmäßig gezogen, lediglich auf II. §. 10.

Anmerkung. Wenn man also über der Grundlinie irgend eines Dreiecks irgend ein anderes errichtet, dessen Winkel an der Spitze entweder eben so groß, oder größer oder kleiner ist, als der Winkel an der Spitze des gegebenen Dreieckes, so ist leicht zu beurtheilen, wohin die Spitzen dieser Dreiecke fallen werden in Absicht auf die Kreisperipherie, welche durch die drei Spitzen des gegebenen Dreieckes beschrieben werden kann.

Siebenter Abschnitt.

Von berührenden Linien oder Tangenten.

---

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man durch den äußersten Endpunkt eines Halbmessers eine winkelrechte Linie zieht, und diese, so weit man will, zu beiden Seiten verlängert, so hat diese mit der Kreislinie den einzigen Endpunkt des Halbmessers gemein, liegt aber sonst ganz außerhalb des Kreises.

Der Beweis ist eine unmittelbare und sehr leichte Anwendung von III, 15. a. und II, 3. d. (Fig. 78.)

16

§. 2. Erklärung.

Eine gerade Linie, welche mit einer Kreisperipherie nur einen Punkt gemein hat, und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine **Berührungslinie** oder **Tangente**, und jener gemeinschaftliche Punkt der **Berührungspunkt**.

Wie zieht man eine Tangente durch einen in der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt?

§. 3. Lehrsatz.

Wenn an einen Kreis eine Tangente gezogen ist, und man zieht von dem Berührungspunkte eine Linie nach dem Mittelpunkte; so steht diese winkelrecht auf der Tangente.

Dieses folgt durch einen sehr leichten indirekten Schluß aus III, 11. 12

§. 4. Lehrsatz.

Wenn in dem Berührungspunkte einer Tangente eine winkelrechte Linie errichtet wird, so geht diese durch den Mittelpunkt des Kreises.

Man nehme an, der Mittelpunkt des Kreises liege außer der winkelrechten Linie. Zieht man nun von einem solchen fälschlich angenommenen Mittelpunkt eine Linie nach dem Berührungspunkte, so ergiebt sich aus der Vergleichung von §. 3. mit III, ~~27.~~ ein Widerspruch.

28.1

§. 5. Aufgabe.

Von einem außer dem Kreise gegebenen Punkte eine Tangente an denselben zu ziehen.

Auflösung. Wenn von dem Punkte A Fig. 79. an den aus C beschriebenen Kreis eine Tangente gezogen werden soll, so ziehe man AC, halbire sie in B, und beschreibe aus B durch die Punkte A und C einen Kreis, der den gegebenen in D und E schneidet. Zieht man nun aus A nach D und E Linien, so sind beide Tangenten.

Um den Beweis zu führen, daß DA eine Tangente sei, ziehe man noch DC, dann ergiebt sich der Beweis aus V, 18. verglichen mit §. 1. und 2. dieses Abschnitts. Ist der Beweis für DA geführt; so fällt in die Augen, wie er für AE zu führen ist.

§. 6. Zusatz.

Von einem Punkte außerhalb eines Kreises können also in jedem Falle zwei Tangenten gezogen werden.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten zieht, so halbirt die von ihrem Durchschnittspunkte nach dem Mittelpunkt gezogene Linie a) den Winkel der Tangenten, b) den Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Halbmesser einschließen, c) den Bogen, der zwischen den Berührungspunkten liegt, wie auch, gehörig verlängert, den übrigen Theil der Peripherie. Endlich sind d) die beiden Tangenten von ihrem Durchschnittspunkte bis zu den Berührungspunkten gleich groß.

Der Satz kann auf eine Figur wie Fig. 79. angewendet werden. Der Beweis ist übrigens sehr leicht. Denn aus III, ~~17.~~ läßt

 18

sich die Congruenz der Dreiecke ACD und ACE beweisen, woraus alle einzelnen Punkte des Satzes folgen.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man durch den Endpunkt einer Sehne eine Tangente zieht, so daß beide Linien zwei Winkel bilden, von denen jeder einen Abschnitt des Kreises zwischen seinen Schenkeln enthält; so ist jeder dieser Winkel so groß, wie der Peripheriewinkel desjenigen Abschnittes, der nicht zwischen seinen Schenkeln liegt.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 80. ist durch den Endpunkt A der Sehne AB die Tangente CD gezogen. Es ist also zu beweisen: a) daß der Winkel BAD ꝛc. b) daß der Winkel BAC ꝛc.

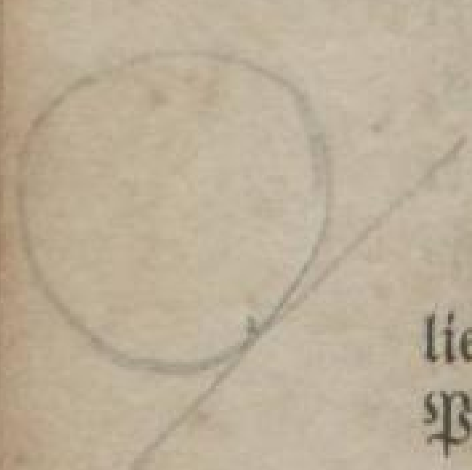
Um a) zu beweisen, ziehe man aus A durch den Mittelpunkt E den Durchmesser AF, und die Linie FB, so wird man leicht aus früheren Sätzen bestimmen: 1) wie groß der Winkel ABF, 2) wie groß die Summe der Winkel BAF + BFA sei. Diese Summe muß man mit dem Winkel FAD vergleichen, dessen Größe auch bekannt ist. Aus dieser Vergleichung wird sich leicht ergeben, daß der Winkel BAD dem Winkel BFA gleich sei. Da nun jeder andere Peripheriewinkel in dem Abschnitt AHB eben so groß ist wie AFB; so ist der Winkel BAD jedem Winkel des Abschnittes AHB gleich.

Um b) zu beweisen, nehme man in dem Bogen AGB den Punkt G beliebig, und ziehe GA und BG; so ist AFBG ein Sehnenviereck, in welchem man nach einem früheren Satze die Summe der Winkel bei F und G kennt. Vergleicht man diese mit der Summe der Nebenwinkel bei A, so ergiebt sich, daß BAC = BGA.

Dieser ganze Beweis ist vollständig auszuführen; besonders sind die hier absichtlich ausgelassenen Citate zu ergänzen.

Von Kreisen, die sich berühren.

§. 9. Lehrsatz.



Wenn man aus zwei Punkten einer Linie durch einen beliebigen zwischen ihnen, jedoch auf derselben Linie liegenden Punkt zwei Kreise beschreibt, so haben diese a) nichts gemein, als diesen einzigen Punkt, und einer liegt ganz außer dem andern, d. h. sie berühren sich von außen; b) auch haben sie in diesem Punkt eine einzige gemeinschaftliche Tangente.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 81. sind aus den Punkten A und B der Linie AB durch den zwischen ihnen liegenden C zwei Kreise beschrieben; es ist also zu beweisen, 2c.

Der Beweis läßt sich führen, indem man zeigt, daß jeder Punkt der einen Kreislinie, mit Ausnahme des einzigen Punktes C, außerhalb der andern Kreislinie liege. Zieht man z. B. aus dem Punkte D, der beliebig in der aus A beschriebenen Kreislinie angenommen ist, die Linien DA, DB; so läßt sich aus II, 8. d. leicht beweisen, daß BD größer als BC sei, woraus folgt, daß D außer der aus B beschriebenen Kreislinie liege (II, 3. d.). Dasselbe gilt aber von jedem anderen Punkte, den man hätte annehmen können; folglich liegt eine Kreislinie ganz außer der andern und beide haben nichts als den Punkt C gemein.

Das zweite b) folgt unmittelbar aus §. 1. und 2.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man aus zwei Punkten einer Linie durch einen dritten, der in der Verlängerung derselben liegt, zwei Kreise beschreibt, so haben diese a) nichts gemein als diesen Punkt, der kleinere aber liegt ganz innerhalb des größeren, d. h. sie berühren sich von innen; b) auch haben diese beiden Kreise in dem Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 82. sind aus A und B durch den in der Verlängerung von AB liegenden Punkt C zwei Kreise beschrieben. Es ist also zu beweisen 2c.

Es kommt darauf an, zu zeigen, daß mit Ausnahme des Punktes C jeder andere Punkt der kleineren Kreislinie innerhalb der größeren liege. Man nehme also D in derselben beliebig, und ziehe DA, DB, so ist DA kürzer, als AB + BD, aber DB = BC; folglich 2c.

Der Beweis von b) ist wie im vorigen Satze.

§. 11. Zusatz.

Wenn man daher auf einer geraden Linie mehrere beliebige Punkte annimmt, und durch einen der beiden äußersten Punkte aus jedem der übrigen einen Kreis beschreibt; so berühren sich alle diese Kreise von innen.

Was dies heiße, ist aus dem vorigen §. vollständig zu beantworten, und durch eine Figur zu erläutern.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn auf dem Endpunkte eines Halbmessers eine winkelrechte, also berührende Linie, errichtet ist, und man zieht innerhalb der Schenkel des rechten Winkels eine andere Linie, welche mit dem Halbmesser einen beliebigen großen, also mit der Tangente einen beliebigen noch so kleinen Winkel bildet, so liegt ein Theil dieser Linie innerhalb des Kreises, und sie durchschneidet die Kreislinie außer in dem Berührungspunkte noch in einem zweiten Punkte.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus III. 11. verglichen mit II. 3. d. (Fig. 83.)

§. 13. Zusatz.

Der Winkel, welchen der Bogen bei dem Berührungspunkte mit dem Halbmesser macht, ist also größer als jeder noch so große, und der, welchen er mit der Tangente macht, kleiner als jeder noch so kleine spitzige Winkel.

§. 14. Zusatz.

Wenn sich zwei Kreisbogen durchschneiden, so ist der Winkel, welchen sie bilden, der Winkel der beiden Tangenten, die man am Durchschnittspunkt an jeden Bogen ziehen kann.

Bei §. 13. und 14. ist zu zeigen, in wiefern die I. §. 9. nur für geradlinige Schenkel aufgestellte Erklärung des Winkels sich mit einer gewissen Modification auch auf Winkel anwenden lasse, deren Schenkel Kreisbogen sind; alsdann folgt der Inhalt von §. 13. unmittelbar aus §. 12.

Anhang zum siebenten Abschnitt.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise eine Sehne mit einer Berührungslinie parallel gezogen wird, so halbirt der Berührungspunkt den Bogen, der zu dieser Sehne gehört.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 84. ist die Sehne AB mit der Berührungslinie CD parallel gezogen. Es soll bewiesen werden, daß der Berührungspunkt E den Bogen AEB halbire.

Zum Beweise ziehe man von E aus nach dem Mittelpunkte F eine Linie EF, so begreift man leicht, daß diese auf AB winkelrecht stehe. Dann folgt aber die Gleichheit der Bogen AE und EB aus einem bekannten Satze des vorigen Abschnitts.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn eine Tangente mit der Verlängerung einer Sehne einen Winkel bildet, so ist dieser so groß wie der Unterschied zweier Peripheriewinkel, die auf den Bogen stehen können, welche von dem Berührungspunkte zu den Endpunkten der Sehne reichen.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 85. bildet die Tangente AB mit der Verlängerung der Sehne DC einen Winkel ABD, von welchem zu beweisen ist, daß er so groß sei wie der Unterschied der beiden Peripheriewinkel, die auf den Bogen AD und AC stehen können.

Zum Beweise ziehe man die Hülfslinien AC und DA; so findet man aus II. 10. die Größe des Winkels bei B in Beziehung auf die Winkel DCA und CAB. Welchem von beiden gedachten Peripheriewinkeln der erstere gleich ist, ergiebt sich aus Betrachtung der Figur: welchem aber der letztere gleich ist, aus §. 8. dieses Abschnitts.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn zwei Tangenten sich durchschneiden, so ist der Winkel, den sie bilden, dem Unterschiede der beiden Peripheriewinkel gleich, die auf den Bogen stehen können, in welche die Peripherie durch die Berührungspunkte getheilt wird.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 86. treffen sich die beiden Tangenten AB und CB in B. Es soll bewiesen werden, daß der Winkel bei B dem Unterschiede zweier Peripheriewinkel gleich sei, die auf den beiden Bogen zwischen A und C stehen können.

Zum Beweise ziehe man eine Hülfslinie AC, die beide Berührungspunkte verbindet; so kann man aus II. 10. angeben, von welchen zwei Winkeln CBA der Unterschied ist, und aus §. 8. des Abschn., welchem Peripheriewinkel jeder dieser beiden Winkel gleich ist.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn eine Tangente die Verlängerung einer Sehne durchschneidet, so ist das Quadrat der Tangente von dem Durchschnittspunkte bis zu dem Berührungspunkte so groß, wie ein Rechteck, welches die Sehne sammt ihrer Verlängerung zur Grundlinie und die Verlängerung zur Höhe hat.

Der Beweis muß in zwei Fällen besonders geführt werden. Die verlängerte Sehne geht nämlich entweder a) durch den Mittelpunkt, oder b) nicht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Im ersten Falle a) ist ein Kreis (Fig. 87.) mit dem Mittelpunkte A gegeben, dessen Durchmesser BC verlängert außerhalb des Kreises von der Tangente ED in D geschnitten wird. Es ist zu beweisen, daß $ED^2 = BD \times DC$.

Zum Beweise beschreibe man aus dem Mittelpunkte A durch den Durchschnittspunkt D einen Kreis, und ziehe in demselben durch den Berührungspunkt E der Tangente einen Durchmesser FG; so ist deutlich die Gleichheit der Linien FE, CD, GH; daraus folgt, daß $EG = BD$. Da nun DE auf FG winkelrecht steht (VII, 3.), so ist $ED^2 = GE \times EF$ (V, 22.); da aber $GE = BD$ und $EF = DC$, so ist auch $ED^2 = BD \times DC$.

Im zweiten Falle b) ist Fig. 88. ein Kreis mit dem Mittelpunkte A gegeben, und die Verlängerung einer Sehne BC wird von einer Tangente ED in D geschnitten; es soll nun bewiesen werden, daß $ED^2 = BD \times DC$.

Zum Beweise beschreibe man aus dem Mittelpunkte A einen Kreis durch den Durchschnittspunkt D. Verlängert man nun DB über B hinaus bis an diesen Kreis in F, so ergiebt sich leicht, wenn man von A auf BC das Loth AG fället, daß $FB = CD$, also $FC = BD$. Nun ziehe man durch den Berührungspunkt E der Tangente und durch den Punkt C des kleineren Kreises die beiden Durchmesser des größeren Kreises HI und KL; so ist die Gleichheit der Linien HE und CK leicht einzusehen. Da nun $DE^2 = HE \times EI$ (V. 22.), so ist auch $DE^2 = KC \times CL$. Und da $KC \times CL = FC \times CD$ (VI. Anh. 7.), so ist auch $DE^2 = FC \times CD$, da aber $FC = BD$, so ist $DE^2 = BD \times DC$.

Zusatz. Welcher Lehrsatz ließe sich über die Rechtecke angeben, welche durch die Abschnitte zweier Sehnen gebildet werden, die sich außerhalb des Kreises schneiden; und in wie fern würde dieser Lehrsatz mit VI. Anh. 7. übereinstimmen?

§. 5. Lehrsatz.

Wenn von irgend einem Punkte in der Verlängerung einer Sehne eine Linie bis an die Peripherie des Kreises gezogen ist, und es ist das Quadrat dieser Linie so groß wie ein Rechteck, welches die Sehne mit der Verlängerung zur Grundlinie und die Verlängerung zur Höhe hat, so ist diese Linie eine Tangente.

Beweis. Von dem Punkte C (Fig. 89.) in der Verlängerung der Sehne AB ist eine Linie CD bis an die Peripherie gezogen, und es ist $CD^2 = AC \times CB$. Es soll nun bewiesen werden, daß CD eine Tangente ist.

Als Hülfslinie ziehe man die Tangente CF, und vom Mittelpunkte die Linien ED, EC, EF;

so ist $CF^2 = AC \times CB$ (§. 4.), also $= CD^2$.

folglich $CF = CD$. Da nun auch $EC = EC$; $ED = EF$; so ist

das Dreieck EDC congruent mit CEF, und

der Winkel EFC = dem Winkel EDC;

folglich, da EFC ein rechter Winkel ist, so ist auch EDC ein rechter, mithin CD eine Tangente (VII. 1. 2.).

§. 6. Aufgabe.

An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen.

Auflösung. Die verlangte Tangente kann zweierlei Lagen haben: a) die Mittelpunkte beider Kreise liegen auf derselben Seite: oder b) einer liegt diesseit der andere jenseit der Tangente.

Erster Fall. Verbinde die Mittelpunkte beider Kreise durch eine gerade Linie AB (Fig. 90.), und beschreibe aus dem Mittelpunkte A des größeren Kreises mit dem Halbmesser AH = AF — GB, einen Kreis. Aus B ziehe an diesen Kreis eine Tangente BC (§. 5. des Abschn.), durch A und den Berührungspunkt C ziehe AD, und aus B die BE parallel mit AD nach derselben Seite von AB. Endlich ziehe DE, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Beweis. Da AC dem Unterschiede beider Halbmesser gleich ist, so ist CD dem Halbmesser des kleineren Kreises gleich. Da also CD und BE gleich und parallel sind, so ist CE ein Parallelogramm (IV, 9.); und da ACB ein rechter Winkel ist, so ist es auch DCB, und das ganze Viereck ein Rechteck (IV, 10.)

Da also bei D und E rechte Winkel sind, so berührt DE beide Kreise (§. 1. u. 2. des Abschn.).

Zweiter Fall. Verbinde (Fig. 91.) die Mittelpunkte durch die Linie AB, beschreibe aus A einen Kreis mit dem Halbmesser AH = AF + GB; aus B ziehe an diesen Kreis die Tangente BC (§. 5. des Abschn.), verbinde A mit dem Berührungspunkte C, ziehe BE parallel mit AC nach der entgegengesetzten Seite von AB. Endlich ziehe DE, so ist diese die verlangte Tangente.

Der Beweis ist dem vorhergehenden so ähnlich, daß er leicht auszuführen ist.

Anmerkung. Da aus B in beiden Fällen an den mit AC beschriebenen Kreis zwei Tangenten gezogen werden können, so sieht man leicht, daß sich auch an beide Kreise, in beiden Fällen zwei gemeinschaftliche Tangenten ziehen lassen.

Für den Anfänger wird es eine nützliche Uebung sein, zu überlegen, wie sich die Auflösung abändert, a) wenn beide Kreise gleiche Halbmesser haben; b) wenn beide sich von außen berühren.

§. 7. Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, dessen Peripherie eine gegebene gerade Linie in einem bestimmten Punkte berührt, und durch einen gegebenen Punkt außer derselben geht.

Anleitung zur Auflösung. In Fig. 92. sei ein Kreis zu beschreiben, der die Linie AB in C berühren, und dessen Peripherie zugleich durch den Punkt D gehen soll.

Da C der Berührungspunkt ist, so kann nach §. 4. des Abschn. leicht eine Linie gefunden werden, die durch den Mittelpunkt des gesuchten Kreises geht. Ginge nun diese Linie auch durch D, so wäre der Mittelpunkt leicht gefunden, da man den Durchmesser des Kreises hätte. Liegt aber D nicht in dieser Linie, so ziehe man CD; da diese eine Sehne des gesuchten Kreises wird, so ist es leicht, nach VI, 12. eine zweite Linie zu finden, in welcher der Mittelpunkt liegen muß ꝛc.

Es ist zu beweisen: 1) daß F der Mittelpunkt ist; man wird dazu der Hülfslinie FD bedürfen; 2) daß der Kreis die Linie AB berührt.

§. 8. Aufgabe.

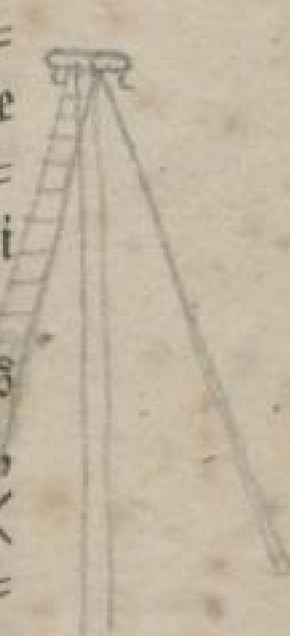
Eine Kreislinie zu beschreiben, die durch zwei gegebene Punkte geht, und eine gegebene gerade Linie berührt.

Auflösung. Es ist die Linie CD Fig. 93. 94., und außerhalb derselben sind die Punkte A und B gegeben; man soll einen Kreis finden, der durch A und B geht, und die Linie CD berührt. Es sind in Ansehung der Lage der Punkte A und B zwei Fälle möglich, a) eine durch A und B gezogene Linie ist parallel mit CD, oder b) AB durchschneidet CD.

Erster Fall. In dem Falle a), wo AB parallel mit CD ist (Fig. 93.), errichte man in der Mitte von BA ein Loth EF, welches die Linie CD in F schneidet. Ein Kreis, der dann durch die Punkte A, B und F gelegt wird, erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus Vergleichung der Sätze I, 23. c. VI, 12. VII, 1. 2.

Anmerkung. Daß in diesem Falle nur ein Kreis möglich ist, sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, 1) daß der Mittelpunkt eines Kreises, der durch B und A geht, in der Linie EF liegen muß; 2) daß also F nothwendig der Berührungspunkt sein muß; 3) daß man durch drei Punkte nicht zwei verschiedene Kreise legen kann.



Zweiter Fall. Man verlängere die Linie AB Fig. 94., bis sie die Linie CD in E schneidet. Dann suche man nach V, 22. die Seite eines Quadrates, welches dem Rechteck AE $\times$ EB gleich ist, und mache EI = EK der Seite dieses Quadrates gleich. Endlich beschreibe man durch A, B und I, oder durch A, B und K, nach VI, 15. einen Kreis, so erfüllt ein jeder derselben die Bedingungen der Aufgabe. Wird durch A, B und I ein Kreis beschrieben, so ist AB eine Sehne, und ED eine Tangente desselben (§. 5. dieses Anhanges); also erfüllt er die Bedingungen der Aufgabe. Eben so wird der Beweis für einen durch A, B und K beschriebenen Kreis geführt.

§. 9. Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, der zwei parallele Linien berührt, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte.

Die Auflösung läßt sich leicht finden. Das Loth nämlich, welches von diesem gegebenen Punkte aus bis zur andern Parallele errichtet wird, ist der Durchmesser des gesuchten Kreises.

Der Beweis folgt aus VII, 1. und 2.

§. 10. Aufgabe.

Einen Kreis zu ziehen, der zwei Parallellinien berührt, und durch einen zwischen ihnen liegenden Punkt geht.

Auflösung. Es sind die beiden parallelen Linien AB und

CD Fig. 95., und zwischen ihnen ist der Punkt E gegeben. Man soll einen Kreis finden, dessen Peripherie durch E geht, und beide Linien berührt.

Man errichte ein Loth GF durch den Punkt E auf beide Parallelen, und in der Mitte desselben H das Loth IK, und beschreibe von E aus mit einem Halbmesser = GH einen Kreis, der die Linie IK in den Punkten I und K schneidet. Beschreibt man nun aus I oder K einen Kreis durch E, so berührt derselbe die Linien AB und CD. Man beschreibe den Kreis durch E aus I, und ziehe durch I das Loth LM auf beide Parallellinien, so läßt sich leicht zeigen, 1) daß LI = IM = IE; also IL und IM Halbmesser sind; daraus folgt 2) daß AB und CD Tangenten des Kreises sind. (VII, 1. u. 2.) Eben so ist der Beweis für den Mittelpunkt K.

§. 11. Aufgabe.

Einen Kreis zu finden, der die beiden Schenkel eines Winkels berührt, und zwar einen derselben in einem gegebenen Punkte.

Auflösung. Der Winkel ABC Fig. 96. ist gegeben; es soll ein Kreis gefunden werden, der beide Schenkel desselben, und zwar den Schenkel AB in dem Punkte D, berührt.

Man errichte in D die Winkelrechte DE, und halbire den Winkel ABC. Der Durchschnittspunkt E, den die Winkelrechte mit der Halbirungslinie hat, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Ziehe EF winkelrecht auf BC, so ist leicht zu erkennen, daß die Dreiecke BDE und BFE congruent sind (III, 18. d.) Es ist also EF = ED, und der aus E durch D beschriebene Kreis muß auch durch F gehen; BD und BF aber sind Tangenten desselben (VII, 1. und 2.)

§. 12. Aufgabe.

Einen Kreis zu zeichnen, dessen Peripherie die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt, und durch einen zwischen beiden Schenkeln gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Es ist Fig. 97. der Winkel ABC, und zwischen seinen Schenkeln der Punkt D gegeben. Es soll ein Kreis gefunden werden, der durch D geht, und beide Schenkel des Winkels berühret. Es sind zwei Fälle bei der Auflösung zu unterscheiden. Der Punkt D kann nämlich a) auf der Halbirungslinie des Winkels liegen, b) zwischen derselben und einem der Schenkel.

Erster Fall. Der Punkt D liege auf der Halbirungslinie DB; so errichte man in D auf BD das Loth DE, welches den Schenkel AB in E trifft. Halbirt man nun den Winkel BED durch die Linie EH, so ist der Punkt H, wo die Halbirungslinie mit BD zusammentrifft, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis. Aus H ziehe man HI und HK winkelrecht auf BA und BC, so ergiebt sich die Gleichheit von HD und HI aus der Congruenz der Dreiecke EHD und EHI (III. 18. d.). und die Gleichheit von HI und HK aus der Congruenz der Dreiecke BHI und BHK (ebendaselbst). ꝛc.

Es ist aber noch zu bemerken, daß es auf der anderen Seite von DE noch einen zweiten Kreis giebt, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Den Mittelpunkt desselben findet man, wenn man den Winkel DEA halbirt. ꝛc.

Zweiter Fall. Wenn der Punkt D, Fig. 98. nicht in der Halbirungslinie des Winkels liegt, so ziehe man von demselben ein Loth durch die Halbirungslinie, welches dieselbe in E, den Schenkel AB in F, und den Schenkel BC in C trifft. Darauf schneide man von EG ein Stück EH = ED ab, und lege nun durch die Puukte H und D einen Kreis, der zugleich einen Schenkel AB berührt nach §. 8. d. Anh., so berührt dieser auch den anderen Schenkel. Daß zwei solche Kreise möglich sind, zeigt die Auflösung dieser Aufgabe.

Beweis. Gesetzt, es ist ein Kreis beschrieben, der durch die Punkte H, D geht, und den Schenkel AB in K berührt. Der Mittelpunkt dieses Kreises I muß in der Linie BE liegen, weil DH eine Sehne dieses Kreises ist (VI. 12.). Zieht man nun IK und die Linie IL winkelrecht auf BC, so ergiebt sich aus der Congruenz der Dreiecke IBK und IBL, (III. 18. d.) daß KI = IL, woraus alles übrige folgt.

Ebenso wird bewiesen, daß der zweite Kreis, der durch die Punkte H und D geht, und den Schenkel AB berührt, auch den Schenkel BC berühren müsse.

§. 13. Aufgabe.

Einen Kreis in ein Dreieck zu zeichnen, der die drei Seiten desselben berührt.

Auflösung. Es ist das Dreieck ABC Fig. 99. gegeben, und es soll ein Kreis in demselben beschrieben werden, der alle drei Seiten AB, BC, und CA berührt.

Man halbire zwei Winkel des Dreiecks, z. B. die Winkel bei A und B, der Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Seiten berührt; den Halbmesser des Kreises findet man, wenn man von D nach irgend einer Seite ein Loth fället, z. B. DF.

Beweis. Es wird zu beweisen sein, daß die Linien DE, DF, DG, welche man von D aus nach den Seiten AB, AC, BC, winkelrecht gezogen hat, einander gleich sind; dies folgt aber aus der Congruenz der Dreiecke AED und ADF; EBD und BDG (III. 18. d.).

§. 14. Anmerkung.

Die letzte Aufgabe ist nur ein besonderer Fall einer allgemeineren, welche fordert, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Linien berührt, von denen wenigstens eine die beiden anderen durchschneidet. Die Auflösung bleibt in allen Fällen dieselbe, nur ist die Anzahl der Kreise, welche man erhält, verschieden, je nachdem zwei der gegebenen Linien parallel sind oder nicht. Im ersten Falle sind nämlich nur zwei, im letzten vier Kreise möglich, die der Aufgabe ein Genüge thun; denn wären AC und BC Fig. 99. parallel, so könnte auf der andern Seite von AB noch ein Kreis gefunden werden, der sowohl AB, als auch die Verlängerungen von AC und BC berührte. Sind aber AC und BC, die von AB durchschnitten worden, nicht parallel, so sieht man leicht, daß außerhalb des Dreiecks noch an jeder Seite ein Berührungskreis gezogen werden kann, der außerdem noch die Verlängerungen der anstoßenden Seiten berührt; z. B. ein Kreis der AB und die Verlängerungen von CA und CB berührt. Dem Anfänger ist es sehr zu empfehlen, daß er sich an Zeichnungen die verschiedenen Fälle dieser Aufgabe und ihre Beweise geläufig zu machen suche.

Achter Abschnitt.

Von vielseitigen Figuren.

---

§. 1. Erklärung.

Wie benennt man vielseitige Figuren, wenn die Anzahl ihrer Seiten bestimmt, und wie, wenn sie unbestimmt ist?

§. 2. Zusatz.

Wenn man aus einem Punkte innerhalb der Fläche eines Vielecks Linien nach allen Winkelspitzen zieht, so theilt man die Figur in so viel Dreiecke als sie Seiten hat.

Dieses ist auf eine Figur anzuwenden.

§. 3. Erklärung.

Was ist eine Diagonale bei einer mehr als vierseitigen Figur? Welche Diagonalen liegen in, und welche außer einer vielseitigen Figur?

§. 4. Lehrsatz.

Die größeste Anzahl solcher Diagonalen, die sich nicht schneiden, ist um drei kleiner als die Anzahl der Seiten; und die Anzahl der Dreiecke, in welche die Figur dadurch getheilt wird, ist um zwei kleiner als die Anzahl der Seiten.

Der Beweis läßt sich auf mehrere Arten führen. Am einfachsten wenn man überlegt, wie viele Diagonalen sich aus einer einzigen Winkelspitze ziehen lassen, und wieviel Dreiecke dadurch entstehen.

Regelrechter aber ist folgender Gang. Man nehme ein beliebiges Vieleck z. B. ein Siebeneck an; schneide von diesem durch eine Diagonale ein Dreieck ab, so bleibt ein Sechseck übrig. Schneidet man von diesem wieder ein Dreieck ab, so bleibt ein Fünfeck. Dieses setze man fort, bis die Figur in lauter Dreiecke zerlegt ist, und überlege nun, wieviel Diagonalen man hat ziehen müssen, und wieviel Dreiecke dadurch entstanden sind.

Man kann die vorige Schlußart auch umkehren. Man zeichne ein Dreieck; an eine Seite desselben lege man ein zweites, so erhält man ein Viereck, und in diesem eine Diagonale. Man setze an irgend eine Seite des Vierecks ein drittes Dreieck, so erhält man ein Fünfeck mit zwei Diagonalen rc.

Auf eine dieser Arten ist der Beweis auszuführen.

§. 5. Lehrsatz.

Man erhält die Anzahl aller möglichen Diagonalen, die sich in einem Vieleck ziehen lassen, wenn man die Anzahl aller Seiten weniger drei, mit der vollen Anzahl aller Seiten multiplicirt, und das Product mit Zwei dividirt.

Der Beweis beruht auf folgender Betrachtung: Wenn man aus einer Spitze der Figur so viele Diagonalen als möglich zieht, so begreift man leicht, daß ihre Anzahl um drei kleiner ist als die Anzahl aller Seiten. Eben dies gilt von jeder Winkelspitze der Figur; da nun deren eben so viele sind wie Seiten; so muß man jene um drei verminderte Zahl mit der vollen Seitenzahl multipliciren. Aber so erhält man, wie leicht einzusehen ist, jede Diagonale doppelt, daher muß das erhaltene Produkt noch mit zwei dividirt werden.

Was hier in allgemeinen Ausdrücken gesagt ist, muß auf eine bestimmte sechs- oder siebenseitige Figur angewendet, und anschaulich gemacht werden.

Auch ist nach dieser Regel die Anzahl der möglichen Diagonalen, vom Dreieck an bis zum Zwölfeck, zu berechnen.

§. 6. Lehrsatz.

Die Summe aller inneren Winkel eines Vielecks ist einer bestimmten Anzahl von rechten Winkeln gleich, die gefunden wird, wenn man von der Zahl der Seiten zwei subtrahirt, und den Rest verdoppelt.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus §. 4. in Vergleichung mit II. 11.

Wie groß ist nach dieser Regel die Summe der inneren Winkel, vom Dreieck an bis zum Zwölfeck?

§. 7. Anmerkung.

Die übrigen Sätze dieses Abschnittes betreffen die Zeichnung vielseitiger Figuren aus gegebenen Linien und Winkeln. Vorläufig bemerken wir bei diesen Aufgaben dreierlei: 1) wir werden in jedem Falle annehmen, daß die zur Zeichnung nöthigen Bestimmungsstücke dadurch gegeben sind, daß eine schon gezeichnete Figur vorliegt, welcher eine andere congruent gezeichnet werden soll. Es muß also zuerst eine mehrseitige Figur ganz beliebig gezeichnet werden, aus welcher dann die nöthigen Stücke genommen werden müssen. 2) der Anfänger hat bei jeder dieser Aufgaben seine Aufmerksamkeit besonders darauf zu richten, wie viele und welche Stücke gegeben sein müssen, um eine congruente Figur zu zeichnen. Denn aus der Zeichnung der Dreiecke und Parallelogramme ist schon bekannt, daß nie alle Bestandtheile einer Figur zur Zeichnung gegeben zu sein brauchen. 3) Die Abzeichnung einer Figur kann auf sehr viele Arten geschehen. Wir wählen aber nur die wichtigsten aus.

§. 8. Aufgabe.

Ein Vieleck aus gegebenen Seiten und Winkeln desselben zu zeichnen.

Man kann eine vorliegende Figur dadurch nachzeichnen, daß man zuerst eine Seite derselben abträgt, dann einen anliegenden Winkel, darauf den zweiten Schenkel dieses Winkels, ferner den anliegenden zweiten Winkel u. s. w., immer abwechselnd mit Seiten und Winkeln. Zuletzt wird sich zeigen, daß gewisse Seiten und Winkel nicht gegeben zu sein brauchen, indem sich die Figur schon durch die vorhergehenden Stücke schließt.

Etwas anders fällt die Zeichnung aus, wenn man statt einer Seite zuerst einen Winkel abträgt, dann eine anliegende Seite, dann den folgenden Winkel u. s. w.

Beides ist im Hefte an einer Figur wirklich auszuführen, wozu indessen eine nicht mehr als fünf- oder sechsseitige Figur zu wählen ist, weil sonst die Beschreibung der Arbeit ohne wesentlichen Nutzen zu weitläuftig ausfallen würde. In beiden Fällen ist bestimmt auszusprechen, wie viele Seiten und Winkel der Figur nicht gegeben zu sein brauchen.

Im Uebungshefte sind ein Paar Zeichnungen dieser Art recht sorgfältig zu machen, wobei der Anfänger ein gutes Mittel findet, die Genauigkeit seiner Zeichnung selbst zu prüfen; wenn er nämlich die Seiten und Winkel, die sich durch die Zeichnung von selbst ergeben, mit der Originalfigur vergleicht, und zusieht, ob sie genau gleich sind. Es wird sich zeigen, daß man besonders die Winkel sehr sorgfältig nach III, 5. abtragen muß, wenn die Zeichnung die gedachte Probe aushalten soll.

Daß die so gezeichneten Figuren congruent sein müssen, wenn alles genau gemacht ist, sieht man leicht ein, wenn man die Figuren in Gedanken so auf einander legt, daß sie mit derjenigen Seite, die man zuerst gezeichnet hat, nebst dem anliegenden Winkel sich decken. Denn alsdann begreift man leicht, daß sie sich auch mit allen übrigen Stücken decken werden.

§. 9. Aufgabe.

Eine vielseitige Figur durch Linien allein (ohne Winkel) zu zeichnen.

Daß man an den bloßen Seiten einer Figur nicht hinlänglich Data habe, um dieselbe zu zeichnen, ist leicht einzusehen. Soll daher die Zeichnung nur durch Linien gemacht werden, so muß man Diagonalen zu Hülfe nehmen, wodurch die ganze Figur in lauter Dreiecke zerlegt wird. Wenn man diese Dreiecke einzeln nach II, 18. abzeichnet, und sie in derselben Ordnung an einander setzt, in der sie das Original hat, so ist klar, daß man bei genauer Arbeit eine dem Original congruente Figur erhält.

Hiebei ist hauptsächlich zu überlegen, wie die Arbeit am einfachsten zu machen sei. Dies wird aber geschehen, wenn man die Figur in die mindeste Anzahl von Dreiecken theilt. Hiebei wird der Satz §. 4. nützliche Dienste leisten.

Im Hefte ist auch diese Arbeit nur auf eine Figur von fünf oder sechs Seiten anzuwenden. Im Uebungshefte kann ein etwas größeres Beispiel gewählt werden.

§. 10. Aufgabe.

Eine Figur zusammenzusetzen aus Dreiecken, die in einen einzigen Punkt zusammenstoßen.

Wenn man innerhalb der abzuzeichnenden Figur einen Punkt nimmt, und von diesem nach allen Winkelspitzen derselben Linien zieht; so zerlegt man die Figur in so viele Dreiecke, als sie Seiten hat.

Wenn man alle diese Dreiecke abzeichnet, und in derselben Ordnung, wie sie sich im Original finden, zusammensetzt, so ist klar, daß man eine congruente Figur erhält.

Die Abzeichnung der Dreiecke kann auf mehrere Arten durch Linien und Winkel ausgeführt werden. Eine der einfachsten besteht darin, daß man alle Winkel, die um den angenommenen Punkt rings herum liegen, nebst den Schenkeln dieser Winkel abträgt, wodurch man alle Winkelspitzen der Figur erhält, diese selbst also leicht vollenden kann.

Die Abtragung der Winkel geschieht am bequemsten auf folgende Art. Man beschreibt auf dem Original aus der gemeinschaftlichen Spitze der Dreiecke einen Kreis mit so großem Halbmesser, wie der Raum erlaubt, und verlängert alle Linien, die von dem Mittelpunkte nach den Eckpunkten der Figur gehen, bis an den Umfang dieses Kreises. Mit demselben Halbmesser beschreibt man sodann an der Stelle, wohin die neue Zeichnung kommen soll, einen zweiten Kreis. Dann ist zur Abzeichnung der Winkel nichts nöthig, als daß man alle Bogen des einen Kreises vermittelst der Sehnen von dem ersten Kreise auf den zweiten überträgt (VI, 1.).

Anmerkung. Die gemeinschaftliche Spitze kann man wählen, wo man will: innerhalb der Figur, in einem Punkte des Um=

fanges, in einer Winkelspitze, selbst außerhalb der Figur. Lauter Aufgaben für das Uebungsheft.

§. 11. Aufgabe.

Eine Figur durch Abscissen und Ordinaten abzuzeichnen.

Was die (eigentlich aus der höheren Geometrie entlehnten) Wörter Abscisse und Ordinate bedeuten, wird sich am deutlichsten bei Beschreibung der Arbeit erklären lassen.

Man ziehe neben der abzuzeichnenden Figur eine gerade Linie in ganz beliebiger Richtung, und nenne sie die Abscissen=Linie. Auf dieser nehme man einen bestimmten Punkt an, und nenne ihn den Anfangspunkt der Abscissen. Hierauf fälle man aus jeder Winkelspitze der Figur ein Loth auf die Abscissen=Linie und nenne jedes Loth eine Ordinate, die Stücke der Abscissen=Linie zwischen dem Anfangspunkte und den Ordinaten nenne man Abscissen.

Hierauf zeichne man an der Stelle, wohin die Abzeichnung kommen soll, eine neue Abscissen=Linie, nehme auf derselben einen Anfangspunkt für die Abscissen an, trage auf diese alle Abscissen ab, errichte in jedem Theilpunkt ein Loth, und mache jedes Loth so groß, wie die Ordinate im Original. Es ist sichtbar, daß man in den Endpunkten dieser Lothe alle Winkelspitzen der Figur erhält, also die Figur selbst leicht auszeichnen kann.

Anmerkung. Die Lage der Abscissen=Linie ist im Allgemeinen ganz willkührlich. Man kann sie nicht nur neben der Figur zeichnen, sondern auch mitten durch dieselbe ziehen, wo dann die Ordinaten zu beiden Seiten der Abscissen=Linie zu liegen kommen. Auch kann man die Verlängerung einer Seite der Figur zur Abscissen=Linie annehmen; kurz man kann sie beliebig legen. Eben so willkührlich ist auch die Lage des Anfangspunkts auf der Abscissen=Linie. Daher viel Stoff für's Uebungsheft.

§. 12. Aufgabe.

Eine Figur vermittelst des Durchstechens abzuzeichnen.

Obgleich diese Abzeichnungsart bloß mechanisch ist; so hat sie doch da, wo es verstattet ist, sie anzuwenden, den Vorzug der Genauigkeit vor jeder anderen Art.

Unter das Blatt, worauf das Original gezeichnet ist, legt man ein zweites, worauf die Abzeichnung kommen soll. Hierauf sticht man mit der Punktirnadel Löcher durch alle Winkelspitzen. Auf diese Art erhält man auf dem untern Blatte alle Winkelspitzen, und kann also die Figur leicht auszeichnen.

Anhang zum achten Abschnitt.

Aufgabe.

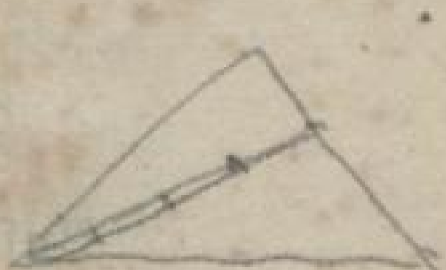
Ein Vieleck durch Linien, die von einem innerhalb desselben gegebenen Punkte gezogen werden, in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Es ist Fig. 100. das Fünfeck ABCDE und innerhalb desselben der Punkt F gegeben; die Figur soll durch Linien, die von F aus gezogen werden, in vier gleiche Theile getheilt werden.

Man ziehe von F aus Linien nach allen Winkelspitzen der Figur: FA, FB, FC, FD, FE. Dann ziehe man von dem Punkte A aus eine Linie AG parallel mit FB, bis sie die Verlängerung der Seite CB in G schneidet; von G aus ziehe man GH parallel mit FC, bis sie die Verlängerung der Seite DC in H schneidet; von H aus ziehe man HI parallel mit FD, bis sie die Verlängerung von ED in I schneidet; endlich ziehe man von I die Linie IK parallel mit FE, bis sie die Verlängerung der Seite AE in K schneidet. Dann theile man die Linie AK in vier gleiche Theile (IV, 20.), und ziehe von dem Theilungspunkte L, der auf der Seite AE liegt, die Linie LF, von den übrigen Theilungspunkten, die auf der Verlängerung von AE liegen, also von M, N, ziehe man Linien mit FE parallel, bis sie entweder die Seite ED oder deren Verlängerung DI treffen; von den Durchschnittspunkten dieser Linien mit der Seite der Figur ED ziehe man Linien nach F, wie hier von dem Punkte O die Linie OF; von denjenigen Punkten aber, die auf DI liegen (hier dem Punkte P), ziehe man bis zur folgenden Seite DC und deren Verlängerung parallele Linien mit der Linie DF und so fort, von dem jedesmaligen Durchschnittspunkte einer Parallele mit einer Seite der Figur eine Linie nach F, von dem jedesmaligen Durchschnittspunkte einer Parallele mit der Verlängerung einer Seite, eine neue Parallele mit der nächstfolgenden aus F nach einer Winkelspitze gezogenen Linie, oder, was gleich viel ist, mit dem äußeren Umfange KIHGA. In unserer Figur treffen zuletzt die aus N gezogenen Parallelen die Seite BC in R. Zieht man nun RF, so theilen die Linien FL, FO, FR und FA die Figur in vier gleiche Theile.

Beweis. Ziehe die Hülfslinien GF, HF, IF, KF, ferner MF, NF, PF, QF; so ist das Dreieck ABF = FGB (V. 7.). Legen wir zu beiden das Dreieck BCF hinzu, so erhalten wir das Dreieck GCF, welches dem Viereck ABCF gleich ist. Aber Dreieck GCF = FHC (V, 7.), legen wir zu beiden FCD hinzu, so ist das Dreieck FHD = ABCDF. Es ist nun ferner das Dreieck FHD = FID; legt man zu beiden noch FED, so ist das Dreieck FEI = ABCDEF; da nun Dreieck FEI = FEK, so ist auch Dreieck AFK dem ganzen Fünfeck ABCDE gleich. Ist nun AK durch die Punkte L, M, N in vier gleiche Theile getheilt, so ist das Dreieck AFL der vierte Theil des Dreiecks AFK (V, 12.), also auch der vierte Theil des Fünfecks ABCDE. Eben so ist AFM zwei Viertel, und AFN drei Viertel des Fünfecks. Nun ist das Dreieck EFO = EFM (V, 7.), also AFOE = AFM = $^2/_4$ des Fünfecks; da nun AFL ein Viertel der Figur ist, so ist FLEO das zweite Viertel. Es ist ferner das Dreieck FEN = FEP, also AFPE = AFN und FPD = FQD, also AFQDE = AFPE = AFN: endlich RFC = QFC, daher AFRCDE = AFQDE = AFN = $^3/_4$ der Figur; da nun AFOE zwei Viertel der Figur war, so ist FRCDO das dritte Viertel, mithin AFRB das vierte Viertel und die Linien AF, FL, FO, FR, theilen die Figur in die vier gleichen Theile AFL = LEOF = ODCRF = RBAF.

Anmerkung. Auflösung und Beweis sind ähnlich, wenn man den Punkt F in einer der Winkelspitzen oder in einer Seite der Figur annimmt.



Neunter Abschnitt.

Von der Theilung der Kreislinie und von der Winkelmessung.

A. Theilung der Kreisbogen.

§. 1. Aufgabe.

Einen Kreisbogen geometrisch zu halbiren.

Eine Auflösung beruht auf III, 23., verglichen mit VI, 2. Auch nach VI, 9. läßt sich eine brauchbare Auflösung machen.

Es ist sowohl die vollständige, als auch die abgekürzte Auflösung zu beschreiben.

§. 2. Zusatz.

Durch wiederholte Anwendung von §. 1. kann ein Bogen weiter, in vier, acht, u. s. w. Theile geometrisch getheilt werden.

Es ist die Reihe dieser Theilungen auf mehrere Glieder, (etwa auf sechs bis acht) fortzusetzen, und im Uebungsheft ist zu versuchen, wie weit sich etwa diese Theilung sichtbar fortsetzen lasse.

§. 3. Anmerkung.

Halbirungen sind die einzigen Theilungen eines Bogens, welche die Elementargeometrie rein geometrisch zu Stande bringen kann. Alle übrigen Theilungen müssen vor der Hand nach VI, 8. b. bloß mechanisch gemacht werden, bis die Trigonometrie Anleitung geben wird, jede Theilung, zwar nicht rein geometrisch, aber doch nach streng wissenschaftlichen Grundsätzen zu machen.

Aus den folgenden §. §. wird man sehen, daß die ganze Kreislinie einiger geometrischer Theilungen empfänglich ist, die bei einzelnen Bogen nicht stattfinden.

B. Theilung der ganzen Kreislinie.

§. 4. Aufgabe.

Die Kreislinie in zwei und vier gleiche Bogen zu theilen.

Auflösung und Beweis sind zu einfach, um einer Anleitung zu bedürfen.

§. 5. Zusatz.

Durch fortgesetztes Halbiren der Bogen erhält man eine ganze Reihe geometrischer Theilungen.

Diese Theilung ist von 2 und 4 an fortzusetzen, bis zu einer Zahl, die größer ist als 360. Es werden aber nicht die wirklichen Theilungen verlangt, sondern die Zahlen. Im Uebungsheft versuche der Schüler, wie weit er mit der wirklichen Theilung kommt.

§. 6. Aufgabe.

Die Kreislinie in sechs gleiche Bogen zu theilen.

Auflösung. Es sei die aus C Fig. 101. beschriebene Kreislinie in sechs gleiche Bogen zu theilen. Aus irgend einem gegebenen oder angenommenen Punkte A der Peripherie beschreibe man durch C einen zweiten Kreis, der den ersten in D und E schneidet, dann ziehe man aus den Punkten A, D und E durch C drei Durchmesser, so ist geschehen, was verlangt worden.

Anleitung zum Beweise. Es ist zu zeigen, daß die drei Durchmesser bei C sechs gleiche Winkel machen. Deshalb ziehe man die Hülfslinien DA und AE, dann ergiebt sich aus III, 10. Zus. die Größe der Winkel DCA und ECA, und hieraus die Größe der Winkel BCF und BCG nach I, 18. Aus der Größe von DCA und GCB aber, verglichen mit I, 15., folgt die Größe von DCG und ECF.

§. 7. Zusatz.

Aus dem Beweise des vorhergehenden Satzes läßt sich die Sehne eines Bogens, welcher der sechste Theil der Kreislinie ist, bestimmt angeben; und hieraus läßt sich eine andere noch einfachere Art, die Kreislinie in sechs gleiche Bogen zu theilen, herleiten.

Beides ist deutlich auszuführen.

§. 8. Zusatz.

Durch die Theilung in sechs gleiche Bogen ist die Kreislinie zugleich in drei gleiche Bogen getheilt, durch fortgesetzte Halbirungen erhält man also eine zweite Reihe von Theilungen, die sich geometrisch machen lassen.

Diese Reihe ist von 3 und 6 an fortzusetzen bis zu einer Zahl, die größer als 360 ist. Auch hier werden im Haupthest nicht wirkliche Theilungen, sondern nur Zahlen verlangt. Im Uebungsheft aber ist eine wirkliche Theilung, so weit sie ausführbar ist, zu versuchen.

§. 9. Anmerkung.

Außer den Theilungen der Kreislinie in vier und sechs (oder in zwei und drei) Theile hat Euklides noch gezeigt, wie man die Kreislinie in fünf und funfzehn gleiche Bogen geometrisch theilen könne. Auch haben mehrere neuere Mathematiker einfachere Auflösungen oder Beweise dafür erfunden. Indessen erfordert die Theorie dieser Theilungen, die unvermeidlich eine Reihe von Sätzen umfaßt, einen beträchtlichen Zeitaufwand; wir werden sie daher hier um so eher übergehen können, als man für jeden praktischen Zweck ohnehin genöthigt ist, sich der mechanischen Auflösungen zu bedienen. Damit aber in diesem Lehrbuche nichts Wesentliches fehle, so soll die Theorie dieser Theilungen in dem Anhange zu dem folgenden Abschnitte vollständig vorgetragen werden.

Bei diesem §. ist nichts weiter zu thun, als die Reihen von Theilungen in Zahlen anzugeben, die aus der Theilung in fünf und funfzehn Theile durch fortgesetzte Halbirungen entstehen. Jede dieser Reihen ist fortzusetzen bis zu einer Zahl, die größer ist als 360.

§. 10. Anmerkung.

Wenn man die angeführten vier Reihen geometrischer Theilungen §. 5. 8. und 9. vergleicht; so findet sich darunter die Theilung in 360 nicht, von welcher in den folgenden Sätzen mit Mehrerem die Rede ist. Diese Theilung muß daher größtentheils mechanisch ausgeführt werden.

C. Von der Winkelmessung.

§. 11. Erklärung.

Was sind Grad-Bogen, Minuten-Bogen und Secunden-Bogen?

Desgleichen: was sind Grad-Winkel, Minuten-Winkel und Secunden-Winkel?

Es kommt bei diesen Erklärungen nicht darauf an, daß man die Theilungen, worauf sie sich beziehen (besonders in Minuten und Secunden) wirklich machen könne, sondern nur, daß bestimmt ausgesprochen werde, was man sich bei den Worten zu denken habe, nämlich: wie man sich die Kreislinie, oder ihren vierten Theil, den man gewöhnlich Quadrant nennt, oder wie man sich den rechten Winkel eingetheilt denken müsse, wenn von Graden, Minuten und Secunden, als Bogen oder als Winkel, die Rede ist.

§. 12. Lehrsatz.

a. So viel Grad-, Minuten- und Secunden-Winkel irgend ein beliebiger Winkel enthält, eben so viele Grad-, Minuten- und Secunden-Bogen enthält jeder zwischen seinen Schenkeln aus der Spitze mit beliebigem Halbmesser beschriebene Kreisbogen.

b. Und umgekehrt.

Anleitung zum Beweise.

a. Zum Beweise des ersten Theiles zeige man, daß jeder Bogen, der aus der Spitze eines Grad-Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, ein Grad-Bogen sei. Dieses wird klar, wenn man sich einen rechten Winkel in Grad-Winkel getheilt vorstellt, zwischen seinen Schenkeln einen Quadranten gezogen denkt, und darauf fragt, wie dieser dadurch getheilt sei. Dieses beantwortet sich aus §. 11. verbunden mit VI, 2.

b. Zum Beweise des zweiten Theiles ist der umgekehrte Satz zuerst vollständig auszusprechen. Dann denkt man sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels zuerst einen Quadranten beschrieben, diesen in Grad-Bogen getheilt, und aus den Theilpunkten Linien nach der Spitze des Winkels gezogen. Die Frage, was für Winkel man auf diese Weise erhält, löset sich wie vorher aus §. 11. in Verbindung mit VI, 3.

Was bei a) und b) von Grad-Bogen und Grad-Winkeln gezeigt worden, gilt auch von Minuten- und Secunden-Winkeln und Bogen; woraus die Richtigkeit des Satzes in seinem ganzen Umfange folgt.

§. 13. Zusatz.

Winkel und Bogen dienen daher gegenseitig einer zum Maaße des andern. Eben deswegen läßt man gewöhnlich bei den Wörtern Grad, Minute und Secunde die Zusätze Winkel und Bogen weg, theils, weil der Zusammenhang immer lehrt, ob von Bogen oder Winkeln die Rede ist, theils, weil eine Verwechselung nie zu einem wesentlichen Irrthum verleiten kann. Eben deswegen hat man auch für Grade, Minuten und Secunden nur eine Bezeichnung (^{0}), ($'$), ($''$), es mag nun von Bogen oder von Winkeln die Rede sein.

Von dieser Bezeichnung ist ein Beispiel zu schreiben, und der Sinn wörtlich zu erklären.

§. 14. Aufgabe.

Einen Quadranten in 90 Grade zu theilen.

Daß die Theilung größtentheils mechanisch gemacht werden müsse, ist aus §. 10. bekannt. Uebrigens läßt die Auflösung mancherlei Abweichungen zu. Folgende Art läßt sich ziemlich leicht auf dem Papier ausführen:

Man zeichne mit möglichster Genauigkeit einen rechten Winkel ACB Fig. 102., und zwischen den Schenkeln desselben mit beliebigem Halbmesser einen Quadranten AB, darauf schneide man mit unverändertem Halbmesser (= AC), den Bogen AD ab. Dieser ist nach §. 7. der sechste Theil von 360^0, also 60^0, und da AB 90 Grade enthält, so ist $DB = 30^0$.

Hierauf schneide man wieder mit ungeändertem Halbmesser von B aus den Bogen BE ab, so ist $BE = 60^0$, also $AE = 30^0$, desgleichen $DE = 30^0$. Der Quadrant wird auf diese Art sehr leicht geometrisch in drei gleiche Theile getheilt.

Hierauf theile man jeden dieser drei Bogen mechanisch in drei gleiche Theile, so enthält jeder dieser Theile 10^0.

Um nun die einzelnen Grade zu erhalten, kann man auf folgende Art verfahren. Auf einem besonderen Blatte zeichne man aus F Fig. 103. mit dem Halbmesser HF = AC einen kleinen Bogen; fasse in Fig. 102. die Sehne von 10^0, und trage sie in Fig. 103. aus H in G, so ist HG ein Bogen von 10^0. Diesen theile man mit der größesten Sorgfalt mechanisch erst in 5 Theile, dann jeden derselben wieder in 2.

Hierauf schneide man ein Stück Papier GHIK aus, so kann man dasselbe mit GH an jede 10 Grade des Quadranten AB anlegen, und die einzelnen Grade bequem übertragen.

Innerhalb des Bogens AB ziehe man in kleinen Abständen noch drei concentrische Bogen; ziehe die Theilstriche der einzelnen Grade bis an den ersten, die der 5ten Grade bis an den zweiten, und die der 10ten Grade bis an den dritten, so lassen sich Grade bequem abzählen, auch kann man Zahlen an die Striche der 10ten Grade schreiben.

Anmerkungen.

1. Nach dieser Anleitung muß jeder Anfänger versuchen, im Uebungsheft einen Quadranten zu theilen. Es erleichtert die Arbeit, wenn der Halbmesser so groß genommen wird, wie es die Größe eines Quartblattes zuläßt.
2. Der Transporteur, den man in allen Reißzeugen findet, ist zwar zur Winkelmessung ein sehr unvollkommenes Werkzeug, da die Kleinheit der Grade kaum erlaubt, Viertel oder Fünftel eines Grades zu schätzen. Dessenungeachtet ist er nicht wohl

zu entbehren. Wer also kein vollständiges Reißzeug besitzt, muß sich selbst einen Transporteur aus starkem Papier, aber nicht viel größer, als sie gewöhnlich in Reißzeugen sind, verfertigen. In Ansehung der Genauigkeit der Theilung muß aber kein Fleiß gespart werden.

3. Die Eintheilung der Kreislinie in 360 Grade, und die sechzigtheilige Eintheilung der Grade, sind uralt, und bei allen Völkern, wo man sich mit mathematischen Arbeiten beschäftiget, üblich. Ohne Zweifel hat man zuerst die Zahl 360 aus astronomischen Gründen gewählt, und nachher beibehalten, weil es unter derselben keine Zahl giebt, die sich durch so viele ganze Zahlen ohne Rest theilen läßt. Auch sind die Rechnungen mit sechzigtheiligen Unterabtheilungen sehr leicht. Es ist dem Anfänger zu empfehlen, daß er im Uebungsheft alle ganzen Zahlen aufsuche, durch welche sich 360 theilen läßt; ferner, daß er sich in den Rechnungen mit Graden, Minuten und Secunden übe; namentlich im Addiren und Subtrahiren solcher Zahlen, dann im Multipliciren solcher Zahlen mit ganzen Zahlen, besonders kleinen. Wer sich gewöhnt hat, mit Nachdenken zu rechnen, wird leicht dabei eine Menge kleiner Vortheile entdecken.

§. 15. Zusatz.

Die halbe Kreislinie und ein Quadrant können auf mehr Arten als ein unbestimmter Bogen, nämlich auf eben so viele Arten als die ganze Kreislinie geometrisch getheilt werden.

Der Grund hievon läßt sich im Allgemeinen leicht einsehen. Denn kann man die ganze Kreislinie in n Theile theilen, so kann man sie auch in 2 n und 4 n theilen (§. 5.), wodurch im ersten Fall die halbe Kreislinie, im andern der Quadrant in n Theile getheilt sein wird. Dieses ist, unter Anwendung einer bestimmten Zahl statt n, zu erläutern.

Dieser Grund zeigt nur die allgemeine Möglichkeit solcher Theilungen. Ist aber von einer wirklich auszuführenden Theilung die Rede, so ist aus §. §. 1. und 14. klar, daß man zur Theilung des Quadranten in 2 und 3 Theile nicht nöthig habe, die ganze Kreislinie zu theilen.

Um noch bestimmter zu beurtheilen, welche Bogen sich von einem Quadranten geometrisch würden abschneiden lassen, bemerke man nur noch, daß jeder Bogen durch einen Bruch vorgestellt werden könne, dessen Einheit der Quadrant ist. Zum Zähler muß man das Maaß des Bogens nach der Grad-Eintheilung, zum Nenner 90 machen. So ist z. B., wenn man den Quadranten kurz durch R bezeichnet: $30^0 = {}^{30}/_{90}$ R $= {}^{1}/_{3}$ R; $60^0 = {}^{60}/_{90}$ R $= {}^{2}/_{3}$ R; $24^0\,7' = 24\,{}^{7}/_{60}$ Grad $= {}^{1447}/_{60}$ Grad $= {}^{1447}/_{5400}$ R; u. dgl. m.

Welche Nenner kann ein solcher Bruch haben, wenn der Bogen, den er vorstellt, geometrisch darstellbar sein soll?

§. 16. Aufgabe.

Einen Winkel vermittelst des Transporteurs so genau zu messen, als es mit diesem Instrumente möglich ist.

Es ist hier 1) zu beschreiben, wie der Transporteur an die Spitze und den einen Schenkel des Winkels anzulegen sei; 2) was man zu thun habe, wenn der andere Schenkel des Winkels nicht genau auf einen Theilstrich trifft. Gewöhnlich wird nämlich der Transporteur nur in ganze Grade, seltener in halbe, und noch seltener in Viertel-Grade getheilt. Was also kleiner ist, als der kleinste Theil des Transporteurs, muß bloß nach dem Augenmaaß geschätzt werden. Dieses geschieht am leichtesten durch einen kleinen Bruch, dessen Nenner 2, 3, 4, 5 oder allenfalls 6 ist. Dieser Bruch ist auch durch Rechnung in Minuten zu verwandeln. Dieses ist Alles durch ein bestimmtes Beispiel zu erläutern.

Auch ist zu bemerken, daß, und wie man einen Winkel auf doppelte Art messen könne.

§. 17. Aufgabe.

Einen Winkel, dessen Maaß in der Gradeintheilung gegeben ist, zu zeichnen.

Wenn das Maaß eines Winkels außer den Graden noch Minuten enthält: so sind 1) diese nach §. 15. in einen Bruch vom Grade zu verwandeln. Hat dieser Bruch einen Nenner, der 6 nicht übersteigt, so behalte man ihn ungeändert bei. Ist er aber größer, so muß man suchen, einen ihm möglichst nahekommenden Bruch mit einem kleinen Nenner zu finden. Dieses ist so schwierig nicht, weil man Brüche, die $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$, $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$ 2c. des Grades sind, sehr leicht in Minuten verwandeln, und so einen Bruch mit kleinerem Nenner, der dem gegebenen möglichst nahe kommt, auffinden kann. Dieser Näherungsbruch ist nun bei der Zeichnung anzuwenden, und es muß nun 2) auch beschrieben werden, wie der Transporteur anzulegen, und die Zeichnung zu vollenden sei.

§. 18. Anmerkung.

Mittel zu genauerer Messung und Zeichnung der Winkel auf dem Papiere, werden in der Trigonometrie erklärt werden.

Anhang zum neunten Abschnitt.

---

§. 1. Vorerinnerung.

Da die Winkelmessung in vieler Hinsicht, besonders für die Astronomie eine überaus wichtige Sache ist, so hat man auch dieselbe in neueren Zeiten zu einem fast unbegreiflichen Grad von Vollkommenheit gebracht. Es kann hier nicht der Ort sein, zu beschreiben, wie man zu dem Ende die kostbarsten Theilmaschinen erfunden, wie man Vergrößerungsgläser und Fernröhre an den Winkelinstrumenten angebracht, und wie man vielerlei Arten von sinnreichen Winkelinstrumenten ausgedacht hat. Wir begnügen uns hier, eine einzige eben so einfache als sinnreiche Art anzugeben, wie man nicht nur sehr kleine Theile eines Grades messen, sondern auch bei einer geradlinigen Eintheilung, dergleichen man auf Maaßstäben hat, sehr kleine Theile genau angeben könne. Einige nennen als Erfinder derselben einen Spanier, Nunnez, und glauben, daß daher der Name Nonius komme; andere halten einen Deutschen, Namens Werner für den Erfinder, woher die Benennung des Instruments Vernier, stammen soll. Wir wollen die Einrichtung dieses Kunstmittels zwar nur in Beziehung auf eine geradlinige Eintheilung beschreiben; aber es ist sehr leicht, sie auf Gradeintheilungen überzutragen.

§. 2. Beschreibung des Nonius.

Es sei AB Fig. 104. ein Stück eines Maaßstabes, dessen kleinste Theile, auf welche sich die Zahlen 5, 10, 15 u. s. w. beziehen, wir der Kürze wegen schlechthin Theile nennen wollen. Auf einem Stäbchen CD, das sich bequem an die Theile des

Maaßstabes anlegen und verschieben läßt, mache man folgende Theilung: Gesetzt man wollte mit Hülfe dieses Maaßstabes noch Zehntel eines Theiles genau messen, so fasse man auf dem Maaßstabe auf das genaueste die Länge von elf Theilen, trage diese von C bis D aufs Stäbchen, und theile diese Länge genau in zehn Theile, und schreibe daneben die Zahlen, wie die Figur zeigt. Dieses Stäbchen ist es, was man den Nonius (oder Vernier) nennt.

§. 3. Gebrauch des Nonius.

Gesetzt die Linie, welche man messen wollte, wäre AC, so legt man den Anfangspunkt des Maaßstabes (A) genau auf den Anfangspunkt der Linie, den Anfangspunkt (C) des Nonius aber (bei welchem 10 steht) legt man genau an den Endpunkt der Linie, und zwar legt man den ganzen Nonius von C aus gegen B hin. Jetzt bemerkt man sogleich, wie viel ganze Theile des Maaßstabes auf die zu messende Linie gehen. In unserer Figur sind es zehn. Hierauf durchläuft man mit dem Auge die Theilstriche des Nonius, bis man auf einen kommt, der mit einem Theilstriche des Maaßstabes zusammentrifft. Die Zahl, welche sich bei diesem Theilstriche findet (in unserer Figur 7), zeigt an, wie viele Zehntel die zu messende Linie noch über die schon bemerkten Ganzen enthält. Die Länge der Linie AC wäre demnach 10, 7.

Anmerkung. Nicht immer findet man auf dem Nonius einen Theilstrich, welcher ganz genau mit einem Theilstriche des Maaßstabes zusammenträfe. In diesem Fall nimmt man den, der am nächsten trifft. Wer im Gebrauch des Nonius geübt ist, kann in diesem Falle aus der Lage der beiden Theilstriche des Nonius, die zweien Theilstrichen des Maaßstabes am nächsten sind, mit vieler Sicherheit durch das Augenmaaß noch Hundertel eines Theiles schätzen. Wie diese Schätzung zu machen sei, mag dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen bleiben. Nur ist nöthig, daß er zuvor die folgenden §.§. studire.

§. 4. Gründe des im vorigen Paragraphen beschriebenen Gebrauchs.

Da elf Theile des Maaßstabes auf dem Nonius in zehn getheilt werden, so ist klar, daß jeder Theil des Nonius $^{11}/_{10}$ oder $1 + {}^{1}/_{10}$ (1,1) von einem Theile des Maaßstabes sei. Nun bemerke man, daß der äußerste Theilstrich des Nonius bei C von dem nächst vorhergehenden des Maaßstabes eben so weit abstehen müsse, wie der äußerste Theilstrich des Nonius bei D von dem nächst vorhergehenden des Maaßstabes. Treffen nun die Theilstriche bei 7 zusammen, so sind die Theilstriche des Nonius und des Maaßstabes bei 6 um $^{1}/_{10}$ von einander entfernt, bei 5 beträgt diese Entfernung; $^{2}/_{10}$ und $^{3}/_{10}$ bei 4; $^{4}/_{10}$ bei 3; $^{5}/_{10}$ bei 2; $^{6}/_{10}$ bei 1; also endlich $^{7}/_{10}$ bei 0. So groß ist also der Ueberschuß bei D, über 21 ganze Theile; also ist der Ueberschuß bei C über 10 Theile ebenfalls $^{7}/_{10}$.

§. 5. Allgemeine Theorie des Nonius.

Man kann vermittelst des Nonius jeden Theil eines Maaßstabes in so viele Theile theilen, wie man will. Die allgemeine Regel ist: Wenn man einen Theil in n Theile theilen will, so muß man n + 1 Theile des Maaßstabes, auf dem Nonius in n Theile theilen; denn alsdann hat jeder Theil des Nonius den Werth

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Daß die Theile des Maaßstabes und des Nonius äußerst genau gleich sein müssen, versteht sich von selbst. Der Nonius selbst aber bietet ein sehr gutes Mittel dar, die Genauigkeit des Maaßstabes zu prüfen. Denn wenn, wie wir §. 3. annahmen, elf Theile des Maaßstabes auf den Nonius getragen sind, so darf man nur das eine Ende des Nonius scharf an irgend einen Theilstrich des Maaßstabes anlegen und zusehen ob das andere Ende desselben wieder scharf mit dem Theilstrich des elften Theiles zusammenfällt. Giebt man sich also die Mühe, den Nonius, bei dem ersten Theilstrich des Maaßstabes anfangend, von einem Theilstrich zum andern fortzurücken; so kann man finden, ob der Maaßstab Fehler enthalte, die dem Auge wahrnehmbar sind.

Es ist ferner leicht einzusehen, daß der Nonius um desto wichtigere Dienste leiste, je kleiner schon an und für sich die

Theile eines Maaßstabes sind. Ließe man sich z. B. einen Maaßstab verfertigen, auf welchem ein Zoll unmittelbar in 25 Theile getheilt wäre (was ein geschickter Künstler wohl ausführen kann), und man ließe sich dazu einen Nonius machen auf welchem 41 solcher Theile in 40 getheilt wären, so würde man unmittelbar Tausendtel eines Zolles messen können; denn der 40ste Theil von $\frac{1}{25}$ ist $\frac{1}{1000}$.

Anmerkung. Statt $n + 1$ Theile des Maaßstabes kann man auch $n - 1$ Theile desselben auf dem Nonius in n Theile theilen. Dann ist der Werth eines solchen Theiles

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ein solcher Nonius muß auch auf andere Art angelegt werden. In Fig. 104 müßte z. B. ein solcher Nonius so angelegt werden, daß sein Nullpunkt auf den Endpunkt der zu messenden Linie, der übrige Theil aber auswärts gegen A liegt.

§. 6. Anwendung des Nonius bei Kreiseintheilungen.

Man wendet den Nonius noch häufiger bei Winkel-Instrumenten als bei geradlinigen Maaßstäben an, weil er bei Winkelmessungen äußerst wichtige Dienste leistet; bei geraden Maaßstäben aber durch andere in der Folge zu beschreibende Kunstmittel meistens entbehrlich wird.

Um deutlich einzusehen, wie ein Nonius an einer Gradabtheilung eingerichtet sein müsse, wollen wir annehmen, daß zu einem gemeinen, aber genau getheilten Transporteur ein Nonius verfertigt werden sollte; so sieht man zuerst leicht ein, daß die beiden längeren Seiten des Nonius jetzt nicht mehr gerade Linien sein können, sondern zwei Kreisbogen sein müssen, die aus dem Mittelpunkte des Transporteurs beschrieben sind, und daß der innere dieser Bogen genau an den äußeren Rand des Transporteurs passen müsse, endlich daß die Theilstriche desselben eben so wie auf dem Transporteur selbst, nicht parallele Linien sein dürfen, sondern daß sie sämmtlich genau auf den Mittelpunkt des Transporteurs gerichtet sein müssen.

Alles übrige ist völlig wie bei geradlinigen Theilungen. Wollte man z. B. den Grad durch den Nonius in zwölf

Theile (also von 5 zu 5 Minuten) theilen, so müßte man, wenn der Transporteur bloß ganze Grade enthielte, 13 Grade auf dem Nonius in zwölf Theile theilen. Enthielte der Transporteur aber halbe Grade, so müßte man zu demselben Zweck nur 7 halbe Grade in sechs Theile theilen. Nur dürfen in beiden Fällen die Zahlen des Nonius nicht 0, 1, 2, 3, x., sondern sie müßten 0, 5, 10, 15 sein, wenn sie geradezu die Anzahl der Minuten anzeigen sollten.

Zu Messungen auf dem Papiere würde es hinreichend sein, einen solchen Bogen-Nonius einzeln und abgesondert zu haben, um ihn nur an den Rand des Transporteurs anzulegen. Bei größeren Winkelinstrumenten wird ein Lineal (Alhidate genannt) so befestigt, daß es sich um den Mittelpunkt drehen läßt, und an diesem befindet sich der Nonius.

Bei größeren und genaueren Winkel-Instrumenten pflegt man jeden Grad unmittelbar in sechs Theile (also von 10 zu 10 Minuten) zu theilen. Elf solcher Theile in zehn getheilt, geben dann unmittelbar einzelne Minuten, 61 dergleichen Theile in 60 getheilt, geben unmittelbar 10 Secunden x.

Zum Beschlusse dieses Anhanges fügen wir noch eine Methode hinzu, einen Winkel ohne Hülfe eines Transporteurs zu messen.

§. 7 Aufgabe.

Einen Winkel bloß vermittelst des Zirkels zu messen.

Auflösung. Der zu messende Winkel sei ABC Fig. 105. Man beschreibe aus seiner Spitze einen Kreis mit beliebigem Halbmesser, verlängere einen Schenkel AC bis D, und errichte in C einen andern Durchmesser EF winkelrecht auf AD. Dann fasse man die Sehne des Bogens AB mit dem Zirkel, nnd trage dieselbe von B aus gegen E, D x. auf der Peripherie so lange herum, bis man mit der Zirkelspitze in einen der vier Punkte A, E, D, F, möglichst genau trifft.

Während dieses Umtragens der Sehne muß man zählen, 1) wie vielmal man, von A aus gezählt, die Sehne eingetragen; 2) wie viele rechte Winkel man dabei durchlaufen hat. Gesetzt man hätte die Sehne 16 mal eingetragen, und dabei neun rechte Winkel zurückgelegt, so begreift man leicht, daß der Winkel ACB $^9/_{16}$ eines rechten Winkels betragen würde. Dieser Bruch ist nun in Grade und Minuten zu verwandeln durch Multiplication mit 90. Es ist aber $\frac{9}{16} \times 90 = \frac{810}{16} = 50\frac{5}{8}$ Grad $= 50^0\ 37\frac{1}{2}' = 50^0\ 37'\ 30''$.

Anmerkungen. Man könnte die beiden winkelrechten Durchmesser weglassen, und die Sehne so oft herumtragen, bis man wieder in A käme. Dann müßte man nur zählen, wie oft man vier rechte Winkel, oder die ganze Peripherie, zurückgelegt habe. Hätte man z. B. die Peripherie 9mal umlaufen, die Sehne dabei 64mal eingetragen, so wäre der Winkel $\frac{9}{64}$ von 360^0, welches mit dem obigen einerlei ist.

Auch könnte man statt der zwei winkelrechten Durchmesser die Kreislinie nach §. 7. des Abschn. in 6 gleiche Theile theilen, und zählen, wie viele Sechstel der Kreislinie man zurücklegte. Man würde auf diese Art finden, was für ein Bruch von sechzig Graden der zu messende Winkel sei. Würden z. B. 27 solcher Bogen von 60^0 mit 32 Sehnen ausgemessen, so wäre der Winkel $\frac{27}{32}$ von 60^0, d. i.

$$\frac{27 \times 60}{32} = \frac{27 \times 30}{16} = \frac{810}{16},$$

welches dasselbe Resultat, wie bei dem vorigen Beispiele, giebt.

Diese einfache Methode giebt, mit Aufmerksamkeit angewendet, genauere Resultate, als man auf den ersten Blick erwarten sollte.

§. 8. Anmerkung.

Ob es gleich nicht unmöglich ist, auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen (nämlich: Einen Winkel dessen Maaß in der Gradabtheilung gegeben ist, ohne Hülfe des Transporteurs zu zeichnen); so ist doch das Verfahren größtentheils zu umständlich, als daß hinlängliche Genauigkeit von demselben zu erwarten wäre. Indessen giebt es auch viele Winkel, die sich geometrisch zeichnen lassen, wenn gleich ihr Maaß in der Gradabtheilung gegeben ist.

Man kann leicht beurtheilen, ob dieses bei einem zu zeichnenden Winkel angehe, wenn man sein Maaß in einen Bruch des rechten Winkels verwandelt, und dann mit §. 15. des Abschn. vergleicht. Zu gelegentlichen Versuchen setzen wir folgende Winkel hinzu:

1) 15^0; 2) 30^0; 3) 45^0; 4) 60^0; 5) 75^0; 6) $11^0\ 15'$; 7) $22^0\ 30'$; 8) $33^0\ 45'$; 9) $56^0\ 15'$; 10) $67^0\ 30'$; 11) $78^0\ 45'$.

Zehnter Abschnitt.

Von den regulären Figuren.

§. 1. Erklärung.

Was ist eine reguläre Figur? Was ihr Perimeter? Was ihr Mittelpunkt? Was ihr großer und kleiner Halbmesser? Was ihr Polygonwinkel? Was ihr Centriwinkel?

Befinden sich unter den bisher betrachteten Figuren einige, auf welche der Begriff einer regulären Figur paßt? Auf eine solche Figur sind alle diese Begriffe anzuwenden, und an derselben zu erläutern.

Anmerkung. Das Wort Polygon bedeutet zwar nichts anders, als das deutsche Vieleck. Indessen es ist sehr gewöhnlich, dasselbe ohne Beisatz von regulären Figuren zu gebrauchen. Es ist nicht zu übersehen, daß gar nicht erwiesen ist, ob ein reguläres Polygon einen Mittelpunkt habe, daher auch die Erklärungen des großen und kleinen Halbmessers für's erste nur heißen können: Insofern ein reguläres Polygon einen Mittelpunkt hat, heißen die Linien vom Mittelpunkt u. s. w.

§. 2. Erklärung.

Eine geradlinige Figur ist in einen Kreis eingeschrieben, wenn ꝛc. Eine solche ist um einen Kreis beschrieben, wenn ꝛc. Ein Kreis ist um eine Figur beschrieben, wenn ꝛc. Ein Kreis ist in eine Figur eingeschrieben, wenn ꝛc.

Die hier begonnenen Erklärungen sind zu vervollständigen und an Figuren zu erläutern.

Auch ist anzugeben, ob schon von eingeschriebenen Dreiecken oder Vierecken die Rede gewesen ist.

§. 3. Aufgabe.

Eine reguläre Figur von bestimmter Seitenanzahl in einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man muß die Kreislinie geometrisch oder mechanisch in so viel Theile theilen, als die Figur Seiten erhalten soll, und jede zwei auf einander folgenden Theilpunkte durch eine Sehne verbinden.

Der Beweis, daß die so entstandene Figur regulär sei, ist äußerst leicht, und beruhet in Ansehung der Seiten unmittelbar auf der Zeichnung, in Ansehung der Winkel auf VI, 19. c.

In Fig. 106. ist auf diese Art ein reguläres Fünfeck in den Kreis beschrieben.

Anmerkung. Zur Uebung sind folgende Zeichnungen im Uebungshefte zu machen: 1) in einem und demselben Kreise geometrisch ein Dreieck, Sechseck und Zwölfeck; 2) in einem anderen Kreise geometrisch ein Viereck, Achteck und Sechzehneck; 3) in einem dritten Kreise mechanisch ein Fünfeck und Zehneck; 4) in einem vierten Kreise mechanisch ein Siebeneck; und 5) in einem fünften Kreise ein Neuneck.

§. 4. Aufgabe.

Um eine reguläre Figur einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Ist ABCDE Fig. 106. eine gegebene reguläre Figur, um welche ein Kreis beschrieben werden soll; so halbire man zwei an einer Seite AB liegende Polygonwinkel, bei A und bei B, und ziehe die Theilungslinien bis zu ihrem Durchschnitt F; so läßt sich erweisen, daß ein aus F durch A beschriebener Kreis auch durch alle übrigen Winkelspitzen gehe, was die Aufgabe verlangt.

Anleitung zum Beweise. Es ist zu beweisen, daß F von allen Winkelspitzen der Figur gleich weit abstehe. Zu dem Ende betrachte man zuerst das Dreieck AFB. Vergleicht man die Art, wie es entstanden ist, mit §. 1. und mit III, 9., so ergiebt sich, daß FA = FB. Nun ziehe man FC und vergleiche die Dreiecke FBA und FBC; so läßt sich ihre Congruenz aus III, 6. beweisen. Hieraus folgt: a) daß FC = FA (also auch = FB); b) daß der Winkel BCD durch die Linie FC halbirt sei.

Zieht man weiter FD, so läßt sich auf ähnliche Art die Congruenz der Dreiecke FCB und FCD beweisen, und es lassen sich auch ähnliche Folgerungen daraus ableiten.

Da man nun diese Schlüsse ringsherum durch die ganze Figur fortsetzen kann, so ist die Gleichheit aller aus F nach den Ecken gezogenen Linien erwiesen.

Anmerkung. Es wird im Uebungsheft nur um ein gleichseitiges Dreieck, das man nach II, 8. gezeichnet hat, und um ein Quadrat (IV, 13.) ein Kreis zu beschreiben sein. Außerdem kann eine der bei dem vorigem §. construirten Figuren durchgestochen (VIII, 12.) und dann um dieselbe ein Kreis beschrieben werden.

§. 5. Zusatz.

Aus dem Beweise des vorhergehenden §. lassen sich unmittelbar folgende Fragen beantworten:

a. Ist es nothwendig, daß jede reguläre Figur einen Mittelpunkt habe, und wie wird derselbe in jedem Falle gefunden?
b. Was folgt in Ansehung der Größe aller großen Halbmesser?
c. Wie theilt jeder große Halbmesser den Polygonwinkel?
d. Was läßt sich über die Größe aller Centriwinkel und der sämmtlichen Dreiecke sagen, welche die großen Halbmesser mit den Polygonseiten bilden?

§. 6. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis eine reguläre Figur von vorgeschriebener Seitenzahl zu beschreiben.

Auflösung. Man theile den Kreis Fig. 107. in so viele Theile wie die Figur Seiten erhalten soll; z. B. in fünf, bei A, B, C, D, E. Durch jeden dieser Theilpunkte lege man eine Tangente (VII. 2.), und verlängere jede, bis sie sich in F, G, H, I, K durchschneiden, so ist geschehen, was verlangt wurde.

Anleitung zum Beweise. 1) Die Polygonwinkel AFB, BGC u. s. w. sind gleich. Dies folgt aus der Gleichheit der Winkel ALB, BLC (VI, 1.), wenn man die Beschaffenheit der Winkel bei A, B, C und IV. 3. berücksichtigt.

2) Auch die Seiten sind gleich. Denn, nach VII. 7. sind die Winkel ALF und FLB, BLG und LGC gleich, folglich auch alle diese Winkel untereinander nach Nr. 1. des Bew.; hieraus folgt aber die Congruenz der Dreiecke FLB und LBG, die an einem Lothe liegen (III, 17.); folglich halbirt jedes Loth eine Polygonseite, woraus sich leicht, da AF = FB u. s. w. (VII, 7.), die Gleichheit aller Polygonseiten ergiebt.

Anmerkung. Die geometrische Strenge erfordert noch den Nachweis, daß die in A und B angelegten Tangenten sich auch wirklich durchschneiden. Wären sie parallel; so könnte von den Punkten F, G, H, I, K nicht die Rede sein. Es entstände also durch die angegebene Auflösung kein umschriebenes Polygon. Daß aber die Tangenten AF und BF (und so jede zwei auf einander folgende) sich durchschneiden müssen, ergiebt sich leicht; wenn man die Sehne AB zieht; welche offenbar mit den Tangenten AF und DF Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei rechte sind. Dann findet man den nöthigen Schluß aus I, 25. 5.

§. 7. Aufgabe.

In eine gegebene reguläre Figur einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. In Fig. 107. stelle man sich das Polygon FGHIK als gegeben, und den Kreis als gesucht vor.

Man suche nach §. 4. den Mittelpunkt L des Polygons durch Halbirung zweier Polygonwinkel, z. B. der Winkel bei F und G. Dann läßt sich beweisen, daß alle aus L auf die Polygonseiten gefällten Lothe, wie LB, LC u. s. w. gleich sind, und daher ein aus L durch B beschriebener Kreis auch durch C 2c. gehen, und alle Polygonseiten berühren werde; was verlangt wurde.

Anleitung zum Beweise. Man ziehe zuerst alle großen Halbmesser, und wende §. 5. c. darauf an. Zieht man nun auch alle kleinen Halbmesser, ihrer Erklärung §. 1. gemäß; so wird die ganze Figur in doppelt so viele Dreiecke getheilt als sie Seiten hat. Nun beweise man die Congruenz zweier Dreiecke, die einen großen Halbmesser als Seite gemein haben, wie LGB und LGC (III, ~~18~~ 19. d.). Ist der Beweis für ein solches Paar geführt, so ist klar, daß er auch von allen übrigen eben so geführt werden könne.

Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt nun die Gleichheit aller kleinen Halbmesser. Ein aus dem Mittelpunkte beschriebener Kreis, der durch den Endpunkt eines einzigen kleinen Halbmessers geht, muß daher auch durch die Endpunkte aller übrigen gehen (II, 3. d.). Da aber die kleinen Halbmesser auf den Polygonseiten winkelrecht stehen; so sind letztere sämmtlich Tangenten des Kreises (VII, 1. und 2.), was zu beweisen war.

Anmerkung. In einen beliebigen Kreis ist im Uebungshefte ein reguläres Sechseck und in dieses wieder ein Kreis einzuschreiben.

§. 8. Zusatz.

Unmittelbar aus dem Beweise der vorhergehenden §. §. ergiebt sich die Beantwortung folgender Fragen:

a. Was läßt sich über die Größe aller kleinen Halbmesser, desgleichen über alle die Dreiecke sagen, welche durch einen großen und darauf folgenden kleinen Halbmesser gebildet werden?

b. Was ist wohl darunter zu verstehen; wenn man sagt, jedes reguläre Polygon ist centrisch nach den Ecken und auch centrisch nach den Seiten?

c. In was für Stücke theilt ein kleiner Halbmesser die Polygonseite?

d. Wie groß ist der Winkel, den ein großer Halbmesser mit dem nächsten kleinen einschließet?

e. Wie groß ist der Winkel, den zwei auf zusammenstoßende Seiten gefällte kleine Halbmesser einschließen?

Diese Fragen sind zunächst allgemein zu beantworten, wobei man die Seitenzahl des Polygons n annehmen kann. Dann sind auch einige Fälle besonders zu berechnen, z. B. wenn die Figur 5, 6, 7, 11 Seiten hat u. dgl. m.

§. 9. Erklärung.

Ein Dreieck zwischen einem großen und zunächst liegenden kleinen Halbmesser, z. B. BLF Fig. 107., enthält alle Bestimmungsstücke der regulären Figur; so daß nur ein einziges solches Dreieck gegeben zu sein braucht, um das ganze Vieleck zu zeichnen. Wir wollen daher ein solches Dreieck ein **Bestimmungs-Dreieck** nennen.

Es ist hier a) ein einzelnes Dreieck der Art, wie BLF, zu betrachten, und auszusprechen, was jede Seite und jeder schiefe Winkel desselben in Beziehung auf das Polygon sei; b) ist zu zeigen, wie man das ganze Polygon zeichnen könnte, sobald ein solches Dreieck gegeben wäre.

Mit Hülfe des Transporteurs sind die Bestimmungsdreiecke einiger regulären Figuren, z. B. des regulären 10-Ecks und 18-Ecks zu zeichnen.

§. 10. Zusatz.

Die Summe des halben Centriwinkels und des halben Polygonwinkels ist in jedem Falle ein rechter Winkel.

Dieses ergiebt sich unmittelbar aus der Betrachtung eines Bestimmungs-Dreiecks.

§. 11. Aufgabe.

Es ist die Seitenzahl einer regulären Figur gegeben; man soll den Centri- und Polygonwinkel derselben durch Rechnung finden.

Wie man den Centriwinkel berechnen muß, ergiebt sich aus §. 5. d. Wie der Polygonwinkel gefunden wird, folgt aus §. 10.

Anmerkungen.

1. Wenn R einen rechten Winkel, oder 90°, und n die Anzahl der Seiten bedeutet, so ist a) der ganze Centri-Winkel

$$\frac{4}{n}; \text{ also der halbe } \frac{2\,R}{n} \text{ oder } \frac{2}{n}R;$$

b) der halbe Polygonwinkel ist dann:

$$R - \frac{2}{n}R = \left(1 - \frac{2}{n}\right)R = \frac{n-2}{n}R.$$

2. Hiebei sind noch die halben Centri- und Polygonwinkel vom regulären Dreieck an bis zum Zwölfecke zu berechnen.

§. 12. Anmerkung.

Aus der Betrachtung eines Bestimmungs-Dreiecks läßt sich zeigen, daß bei der Zeichnung einer regulären Figur von bestimmter Größe nur drei wesentlich verschiedene Fälle vorkommen.

Ist nämlich die Seitenzahl gegeben, so ist aus §. 10. klar, daß dadurch zwar alle Winkel der Figur bestimmt sind, aber nicht die Größe der Figur. Soll diese auch bestimmt sein, so muß in dem Bestimmungs-Dreieck außer den Winkeln noch eine Seite gegeben sein. Es wird also möglich sein, ein bestimmtes reguläres Polygon zu zeichnen, wenn außer der Seitenzahl a) der große Halbmesser, oder b) der kleine Halbmesser, oder c) die Seite des Polygons vorgeschrieben ist; welches die gedachten drei Aufgaben sind.

Da im Vorhergehenden schon Aufgaben, ein Polygon zu zeichnen, vorgekommen sind; so ist hier zu zeigen, ob, und welche von diesen drei Aufgaben im Vorhergehenden, nur mit anderen Worten ausgedrückt, vorgekommen sind.

§. 13. Aufgabe.

Es ist die Seitenanzahl und eine Seite gegeben, man soll aus diesen die reguläre Figur zeichnen.

Anleitung zur Auflösung. Das Verfahren, welches sich sehr leicht einem Nachdenkenden darbietet, besteht darin, daß man den halben Polygonwinkel nach §. 11. berechnen, und diesen an die beiden Endpunkte der gegebenen Seiten anlegen muß. Verlängert man dann die Schenkel, bis sie sich schneiden, so ist der Mittelpunkt der Figur gefunden, und es fällt in die Augen, wie dann die Zeichnung vollendet werden könne.

So richtig diese Auflösung von theoretischer Seite ist, so gewährt sie bei dem Gebrauche des Transporteurs doch nur dann die erforderliche Genauigkeit, wenn der halbe Polygonwinkel bloß ganze Grade, ohne Minuten und Secunden enthält. Bei welchen Polygonen dies der Fall sei, ergiebt sich aus der bei §. 11. Anm. 2. angestellten Berechnung.

Bei solchen Vielecken aber, wo sich der halbe Polygonwinkel nicht genau vermittelst des Transporteurs zeichnen läßt, ist folgende mechanische Auflösung vorzuziehen.

Es sei AB Fig. 108. die gegebene Seite, über welcher ein reguläres Siebeneck gezeichnet werden soll. In A errichte man AC winkelrecht, und beschreibe aus A mit AB den Quadranten BC; diesen theile man mechanisch, aber sorgfältig, in so viele gleiche Theile, wie die Figur Seiten erhalten soll; also in unserem Falle in sieben. Dann ziehe man zwei Linien, eine aus A durch den Endpunkt D des zweiten Theiles (von C an gezählt); die andere aus B durch den Endpunkt E des vierten Theiles (von B an gezählt). Durchschneiden sich diese Linien verlängert in F, so ist F der Mittelpunkt des Polygons, und man sieht leicht, wie nun die Zeichnung verlängert werden könne.

Diese Zeichnung ist vollständig auszuführen, und der Beweis hinzuzufügen. Der ganze Beweis läuft aber darauf hinaus, zu zeigen, daß die beiden an A und B angesetzten Winkel gleich sind, und die richtige Größe des halben Polygonwinkels haben. Denn hat dieses seine Richtigkeit, so ist aus §. 5. a. klar, daß F der Mittelpunkt der Figur ist.

Um nun zuerst zu beweisen, daß BAF = ABF, verlängere man BA nach G, und beschreibe den zweiten Quadranten CG. Nun fällt in die Augen, daß der Winkel BAF ein Winkel am Mittelpunkte, und sein Maaß der Bogen BD ist. Nennt man nun die Anzahl der Seiten, welche die Figur erhalten soll, n, so ist der Quadrant BC auch in n Theile getheilt, und der Bogen BD enthält solcher Theile n — 2. Der Winkel ABF oder GBE ist ein Peripheriewinkel, und steht auf dem Bogen GE. Da nun beide Quadranten 2 n Theile enthalten, so enthält der Bogen GE, 2 n — 4 dergleichen Theile. Da aber ein Peripheriewinkel nur halb so groß ist als ein Mittelpunktswinkel auf demselben Bogen (VI, 18.), so hat der Winkel GBF nur den halben Bogen GE zu seinem Maaße. Da nun dieser ganze Bogen aus 2 n — 4 Theilen besteht, so hat seine Hälfte n — 2 Theile; dasselbe Maaß, was wir oben für den Winkel BAF gefunden hatten.

Es ist nun noch zu zeigen, daß einer dieser Winkel BAF die richtige Größe des halben Polygonwinkels habe, was sich ohne Schwierigkeit aus §. 11. erweisen läßt.

§. 14. Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck in ein einziges Dreieck zu verwandeln.

Anleitung zur Auflösung. Wenn man in einem regulären Vieleck wie Fig. 106. alle großen Halbmesser gezogen hat, so ist dadurch die Figur in so viele congruente Dreiecke getheilt, wie sie Seiten hat. Alle diese Dreiecke haben den kleinen Halbmesser zur Höhe. Solche Dreiecke lassen sich aber nach V, 9. sehr leicht in ein einziges Dreieck verwandeln.

Dieses ist in bestimmter Beziehung auf eine Figur auszuführen, und wörtlich hinzuzufügen, wie groß die Grundlinie und Höhe des Dreiecks sein müssen, welches dem Vielecke gleich ist.

§. 15. Aufgabe.

In dem Perimeter eines regulären Vielecks sind zwei beliebige Punkte gewählt, und aus dem Mittelpunkte Linien nach denselben gezogen; es soll dasjenige Stück der Fläche des Vielecks, welches zwischen diesen Linien und einem Theile des Umfangs enthalten ist, in ein Dreieck verwandelt werden.

Anleitung zur Auflösung. Man ziehe aus dem Mittelpunkte nach den Winkelspitzen, die zwischen den gedachten Linien liegen, Hülfslinien, so ist das ganze Stück in Dreiecke getheilt, die zwar ungleiche Grundlinien, aber gleiche Höhen haben. Diese Dreiecke aber können leicht nach V, 9. in ein einziges Dreieck vereinigt werden.

Auch dieses ist an einer Figur deutlich zu machen, und wörtlich auszudrücken, wie groß die Grundlinie und Höhe des Dreiecks sei, welches dem Stücke des Vielecks gleich ist.

Anhang zum zehnten Abschnitt.

Geometrische Zeichnung des regelmäßigen Fünfecks, Zehnecks und Funfzehnecks.

---

§. 1. Aufgabe. AB:FB = FB:AF

Eine Linie so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theiles einem Rechteck gleich ist, welches die ganze Linie zur Grundlinie und den andern Theil zur Höhe hat.

Auflösung. Es ist Fig. 109. die Linie AB gegeben; man soll den Punkt F finden, der die Linie so theilt, daß $FB^2 = BA \times AF$.

Man verlängere zu dem Ende die gegebene Linie AB um ihre eigene Länge bis C, beschreibe über AC einen Halbkreis, und errichte in B den Radius BD winkelrecht. Von D ziehe man darauf eine Linie DE nach der Mitte der Verlängerung BC, und beschreibe mit dieser Linie aus E einen Kreis, der die gegebene Linie AB in F trifft; so ist F der gesuchte Punkt, und $FB^2 = BA \times AF$.

Beweis. Da die Linie FE bei B getheilt ist, so ist $FE^2 = FB^2 + BE^2 + 2\,[FB \times BE]$ (V, Anh. 12.). Das Rechteck $FB \times BE$ wird aber verdoppelt, wenn eine Seite desselben verdoppelt wird (V, 9.); also da $BA = BC = 2BE$, so ist $2\,[FB \times BE] = AB \times BF$, daher $FE^2 = FB^2 + BE^2 + AB \times BF$.

Da ferner $FE = ED$, so ist auch $FE^2 = ED^2 = DB^2 + BE^2 = AB^2 + BE^2$. Stellen wir nun die beiden gleichen Werthe von FE^2 zusammen, so erhalten wir $FB^2 + BE^2 + AB \times BF = AB^2 + BE^2$. Nehmen wir zu beiden Seiten BE^2 hinweg; so bleibt Gleiches, nämlich $FB^2 + AB \times BF = AB^2$. Es läßt sich aber AB^2 nach V, 9. in die beiden Rechtecke $BA \times AF$ und $AB \times BF$ zerlegen; setzet man diese für AB^2, so erhält man $FB^2 + AB \times BF = BA \times AF + AB \times BF$, und wenn man nun zu beiden Seiten $AB \times BF$ hinwegnimmt: $FB^2 = BA \times AF$, was erwiesen werden sollte.

§. 2. Aufgabe.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem der Winkel an der Spitze halb so groß ist, wie der Winkel an der Grundlinie.

Auflösung. Man theile nach dem vorhergehenden Paragraphen eine Linie AB Fig. 110. bei C so, daß $AC^2 = AB \times BC$, und errichte über der Grundlinie AC ein gleichschenkliges Dreieck ADC, dessen Schenkel der ganzen Linie AB gleich ist; so erfüllt dies die Bedingungen der Aufgabe, und der Winkel $ADC = \frac{1}{2} ACD$.

Beweis. Man schneide von der Spitze D auf dem Schenkel DA ein Stück DE ab, welches der Grundlinie AC gleich ist, lege durch die Punkte D, E, C, einen Kreis (VI, 15.), und ziehe EC; so läßt sich beweisen, daß AC eine Tangente dieses Kreises ist. Da nämlich $AD = AB$, und $ED = AC$, so ist auch $AE = CB$. Folglich, da $AC^2 = AB \times BC$, so ist auch

$AC^2 = DA \times AE$, mithin AC eine Tangente (VII. Anh. 5.). Da nun EC eine Sehne ist, so ist der Winkel $ACE = CDE$ (VII, 8.). Es ist ferner der Winkel $AEC = ECD + CDE$ (II, 10.), und da $CDE = ACE$, so ist $AEC = ECD + ECA = ACD$. Nun ist Winkel $ACD = CAD$, mithin $AEC = CAE$, woraus folgt, daß auch $EC = CA$ (III, 9.). Dann ist aber auch $EC = ED$ und das Dreieck CED gleichschenklig, und Winkel $ECD = EDC$; da aber auch der Winkel $ECA = EDC$, so ist der Winkel ACD, der aus ECD und ECA besteht, $= 2ADC$; mithin der Winkel $ADC = \frac{1}{2}ACD$; was erwiesen werden sollte.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn man den Halbmesser eines Kreises so theilt, daß das Quadrat des einen Theiles so groß ist, wie ein Rechteck, welches den ganzen Halbmesser zur Grundlinie, und den andern Theil zur Höhe hat; so ist die Seite des Quadrates zugleich die Seite des regulären **Zehnecks**, welches sich in den Kreis einschreiben läßt. Wenn man ferner diese Zehnecksseite mit einem Radius unter einem rechten Winkel zusammenstellt, so ist die Hypotenuse dieses rechten Winkels der Seite des regelmäßigen **Fünfecks** gleich.

Beweis. Es ist Fig. 111. ein Kreis mit dem Mittelpunkte B gegeben, und der Halbmesser desselben AB (nach §. 1. dieses Anh.) in F so getheilt, daß $FB^2 = BA \times AF$. In B ist der Halbmesser BD winkelrecht errichtet, und die Hypotenuse DF gezogen. Es ist nun zu beweisen a) daß FB die Seite des Zehnecks; b) daß FD die Seite des Fünfecks ist.

Um a) zu beweisen, lege man von A aus eine Sehne AG in den Kreis, die so groß ist wie FB, und ziehe GB; so ist das Dreieck AGB nach dem vorigen §. ein solches gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel an der Spitze ABG halb so groß ist, wie ein Winkel an der Grundlinie. Da aber alle drei Winkel eines Dreiecks zwei rechte betragen, so muß ABG der fünfte Theil von zwei rechten, mithin der zehnte Theil von vier rechten sein. Der Bogen AG ist daher als Maaß dieses Winkels der zehnte Theil des Kreisumfanges (IX, 12.), folglich auch AG die Seite des Zehnecks (X, 3.), da aber $AG = FB$, so ist FB der Seite des Zehnecks gleich.

Um b) zu beweisen, fälle man aus G auf AB die winkelrechte Linie GH, welche man bis zur Peripherie in I verlängert; so ist, da BA auf der Sehne GI winkelrecht steht, sowohl GH

$= HI$, als auch der Bogen $GA = AI$ (VI, 11.): folglich ist der Bogen GI der fünfte Theil der Kreislinie, da GA der zehnte Theil ist, und mithin GI die Seite des regelmäßigen Fünfecks. Es wird also nur noch zu beweisen sein, daß $GI = FD$.

Man ziehe noch die Linie FG; so ist aus dem vorigen §. deutlich, daß $FG = FB = GA$, also AGF ein gleichschenkliges Dreieck ist. Dies wird durch das Loth GH in zwei congruente Dreiecke getheilt (VI, 13.), woraus folgt, daß $AH = HF$. Nun ist $GH^2 = GA^2 - AH^2$ (V, 14, b.); und da $GI^2 = 4GH^2$; so ist auch $GI^2 = 4GA^2 - 4AH^2$. Da aber $AF = 2AH$ also $AF^2 = 4AH^2$, und da ferner $AG = FB$, also $AG^2 = FB^2$; so ist auch $GI^2 = 4FB^2 - AF^2$.

Da nun $FB^2 = BA \times AF$, und das Rechteck $BA \times AF$ sich zerlegen läßt in $BF \times FA + AF^2$ (V, 9.); so ist $FB^2 = BF \times FA + AF^2$.

Der obige Werth von GI^2 läßt sich also auch so angeben:

$$GI^2 = FB^2 + FB^2 + BF \times FA + AF^2$$
$$+ BF \times AF + AF^2 - AF^2;$$

das ist:

$$GI^2 = FB^2 + FB^2 + AF^2 + 2[BF \times FA].$$

Da aber die Linie AB aus den beiden Stücken AF und FB besteht; so ist $AB^2 = FB^2 + AF^2 + 2[BF \times FA]$ (V, Anh. 12.), mithin $GI^2 = FB^2 + AB^2$. Es ist aber $AB = BD$ also $AB^2 = BD^2$; folglich $GI^2 = FB^2 + BD^2 = FD^2$; mithin auch $GI = FD$, was zu beweisen war.

§. 4. Zusatz.

Da nach dem vorhergehenden §. ein Zehneck geometrisch gezeichnet werden kann, so ist es auch möglich, geometrisch ein Funfzehneck zu zeichnen. Denn, wenn man von einem Bogen, der den sechsten Theil der Peripherie beträgt, und nach IX, 7. geometrisch gefunden werden kann, einen anderen Bogen abschneidet, der den zehnten Theil der Peripherie beträgt; so bleibt ein Unterschied, der, wie leicht zu berechnen ist, dem funfzehnten Theile des Kreisumfanges gleich ist. Die Sehne zu diesem Bogen ist dann die Seite des regelmäßigen Funfzehnecks.

Man vergleiche übrigens hiebei IX, 9.

Elfter Abschnitt.

Darstellung der Lehre von Verhältnissen und Proportionen in näherer Beziehung auf Geometrie.

A. Von Verhältnissen.

§. 1. Erklärung.

Man betrachtet das Verhältniß zweier gleichartigen Größen, A und B, wenn man den Werth von B durch eine Zahl vorstellt, wozu entweder A selbst, oder ein genauer Theil von A die Einheit ist. Einen solchen Theil, der zur Ausmessung von B gebraucht werden soll, wollen wir einen Maaßtheil nennen.

Daß das Verhältniß von A zu B betrachtet werden solle, deutet man durch das Zeichnen A : B an, und lieset dieses kurz A zu B. A heißt das Vorderglied, B das Hinterglied des Verhältnisses.

Ein Verhältniß umkehren, heißt Vorderglied und Hinterglied vertauschen.

Um den so wichtigen Begriff des Verhältnisses möglichst anschaulich zu machen, wende man ihn an

a. auf ein einfaches Linienverhältniß, welches sich durch ein Paar ganze Zahlen ausdrücken läßt. Zu dem Ende zeichne man eine beliebige Linie A, und theile diese in eine willkührliche Anzahl von (5, 7, 12, oder wie viel man sonst will,) Theilen. Aus einer anderen, größeren oder kleineren, beliebigen Anzahl solcher Theile setze man dann eine zweite Linie B zusammen. Dann schreibe man wörtlich das so dargestellte Verhältniß nieder, d. h. man schreibe: die Linie A verhält sich so zu der Linie B, daß der so und so vielte Theil von A, so und so viel mal genommen werden muß, um die Linie B zusammenzusetzen.

b. Dann betrachte man das umgekehrte Verhältniß B : A, und überlege, ob dieses wohl mit A : B einerlei sei. Man wird dieses leicht beurtheilen, wenn man den Sinn des umgekehrten Verhältnisses in eben der Form, wie bei dem geraden Verhältniß, auszusprechen sucht.

Anmerkung. Die Benennungen Vorder- und Hinterglied beziehen sich nicht bloß auf die Stelle, wo sie stehen, sondern es ist ein Unterschied in ihren Begriffen; denn das Vorderglied wird allemal als eine **bekannte** Größe betrachtet, durch welche die Größe des Hintergliedes bestimmt und ausgemessen werden soll.

An sich wäre es freilich willkührlich, ob man der Maaßgröße oder der zu messenden Größe den ersten Platz geben wollte. Aber es ist wenigstens nöthig, sich hierin an eine bestimmte Ordnung zu gewöhnen, weil sonst leicht Undeutlichkeit und Verwirrung in den Begriffen entsteht. In diesem Lehrbuche ist durchgängig dieselbe Ordnung beobachtet. In den meisten Lehrbüchern werden diese Begriffe nicht scharf genug bestimmt und gesondert.

§. 2. Lehrsatz.

Jedes Verhältniß kann durch zwei **ganze** Zahlen vorgestellt werden, und zwar so, daß das Vorderglied in jedem Falle genau, das Hinterglied aber entweder genau durch eine Zahl ausgedrückt wird, oder mit einem Fehler, der aber so klein gemacht werden kann, als man will.

Beweis. Der Satz folgt eigentlich unmittelbar aus der Erklärung; denn hat man zwei Linien A und B vor sich, und findet, daß der mte Theil von A, nmal genommen, genau B mißt; so ist klar, daß sich die Linien A : B genau wie die Zahlen m : n verhalten.

Fände sich aber kein Theil von A, durch welchen B genau gemessen würde, es sei nun, daß es keinen solchen Theil giebt, oder daß man ihn nur nicht kennt; so ist klar, daß, wenn man dennoch B mit dem mten Theile von A mißt, der letzte Rest, der sich nicht mehr messen läßt, kleiner sei, als der messende Theil. Da man nun in Gedanken A in beliebig viele Theile theilen, und also Einen solchen Theil so klein machen kann, wie man will, so ist klar, daß man auch den nicht meßbaren Rest von B kleiner machen könne, als jede gegebene Größe. Wenn also A in m Theile getheilt gedacht wird, und man annimmt, daß auf B solcher **ganzen** Theile n gehen; so drückt die Zahl m zwar den Werth von A genau aus, aber n drückt die Größe von B mit einem Fehler aus, der kleiner ist, als der mte Theil von A. Ist dieser Theil nun so klein, daß ein Rest, der noch kleiner ist, aus der Acht gelassen werden darf; so kann man allerdings sagen, daß das Verhältniß A : B durch das Verhältniß zweier ganzen Zahlen m : n ausgedrückt sei.

Die einzige hiebei zu machende Arbeit sei die Auflösung folgender Aufgabe:

Zwei beliebige gerade Linien A und B zu zeichnen, und ihr Verhältniß durch zwei ganze Zahlen so zu bestimmen, daß der Fehler der zweiten Zahl kleiner sei, als der sechzehnte Theil von A.

Anmerkung. Man wird leicht bemerken, daß, wenn hier von Theilen und Messen geredet wird, nicht die Rede sei von Arbeiten der Hand und des Auges, sondern des Verstandes. Auge und Hand kommen mit dem Theilen und Messen bald zu Ende, und es erfordert schon eigene künstliche Vorrichtungen, wenn man nur die Länge eines Zolles genau in hundert Theile theilen will. (Man sehe die Beschreibung des verjüngten Maaßstabes in dem Anhange des folgenden Abschnitts.) Daher ist es auch nicht leicht, eine kleine Linie auf dem Papier so genau zu messen, daß man gewiß sein könnte, um kein ganzes Hundertel eines Zolles gefehlt zu haben. Der Verstand hingegen findet im Theilen und Messen keine Gränzen; daher dürfen auch die mathematischen Sätze nicht auf das beschränkt sein, was die Sinne zu leisten im Stande sind.

§. 3. Zusatz.

Jedes Verhältniß A : B kann auf unendlich viele Arten genau, oder mit einem beliebig kleinen Fehler, durch zwei Zahlen vorgestellt werden. Hat man aber nur einen Theil von A, welcher B genau mißt, so kann man das Verhältniß A : B auch auf unendlich viele Arten genau darstellen.

Das erste ist unmittelbar klar. Denn da man A in so viele Theile, wie man will, theilen kann, so ist klar, daß bei jeder veränderten Theilung von A, auch B durch eine andere Zahl ausgedrückt werden wird.

Ist aber ein gewisser Theil von A bekannt, z. B. der vierte, welcher B genau mißt, so fällt in die Augen, daß auch die Hälfte, das Drittel, das Viertel, das Fünftel rc., kurz jeder genaue Theil des Maaßtheiles das Hinterglied B genau messen werde.

Um dieses anschaulich zu machen, sollen zwei Linien A und B gezeichnet werden, die sich wie ein Paar kleine ganze Zahlen verhalten (z. B. wie 4 : 5). Dann soll gezeigt werden, durch was für Zahlen dasselbe Verhältniß ausgedrückt werde, wenn man $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ rc. des angewendeten Maaßtheiles zur Ausmessung von B gebraucht.

§. 4. Zusatz und Erklärung.

Wenn ein Verhältniß durch Zahlen ausgedrückt ist, so stellt der Quotient des Hintergliedes durch das Vorderglied den verhältnißmäßigen Werth vor, welchen das Hinterglied erhält, wenn man das Vorderglied zur Einheit annimmt.

Dieser Quotient ist daher das eigentliche Maaß eines Verhältnisses und die Gleichheit oder Ungleichheit desselben bei mehreren Verhältnissen zeigt an, ob die Verhältnisse gleich oder ungleich sind. Daher nennt man diesen Quotienten den Anzeiger (auch Index oder Exponent) des Verhältnisses.

a. Die Richtigkeit des Zusatzes ist aus den ersten Begriffen der Division klar. Denn soll in dem Verhältniß A : B das Hinterglied durch eine Zahl ausgedrückt werden, deren Einheit das Vorderglied A ist, so fällt in die Augen, daß man wissen will, wie oft A in B enthalten sei.

Dieser Schluß soll im Hefte auf ein bestimmtes Zahlenverhältniß angewendet werden.

b. Da nach §. 1. das Verhältniß nichts anderes ist, als die Betrachtung der verhältnißmäßigen Größe von B gegen A, so ist klar, daß zwei Verhältnisse gleich oder ungleich sein werden, wenn die Anzeiger gleich oder ungleich sind.

c. Umgekehrt: wenn zwei Verhältnisse gleich sind, so sind auch die Anzeiger gleich. (Dieses folgt unmittelbar aus b.)

§. 5. Zusatz.

Die drei Größen: Vorderglied, Hinterglied und Anzeiger, stehen in einer solchen Beziehung zu einander, daß durch zwei derselben die dritte bestimmt ist, und gefunden werden kann.

Wenn das Vorderglied eines Verhältnisses a, das Hinterglied b, und der Anzeiger c ist, so hat man unmittelbar aus §. 4. $c=\frac{b}{a}$. Hier ist der Anzeiger das Gesuchte. Wäre aber a oder b das Gesuchte, so sind die ersten Begriffe der Division hinreichend, die Regel der Rechnung zu finden, und durch eine Formel auszudrücken; was auszuführen ist.

§. 6. Zusätze.

Folgende Sätze, die sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden ergeben, sind als Grundsätze für die ganze Lehre von Verhältnissen und Proportionen zu betrachten.

a. Zwischen jeden zwei gleichartigen Größen findet ein Verhältniß statt. Eine ganz bestimmte Vorstellung von einem solchen Verhältniß hat man aber erst dann, wenn es durch ein Zahlenverhältniß ausgedrückt ist.

b. Zwei Verhältnisse A : B und C : D können als gleich betrachtet werden, auch wenn das eine Größen von anderer Art enthält, als das andere (z. B. das eine Gewicht, das andere Geld); sobald nämlich entweder beide durch dasselbe Zahlenverhältniß m : n ausgedrückt werden (§. 2.), oder sobald die Anzeiger der Zahlenverhältnisse, durch welche sie ausgedrückt werden, gleich sind (§. 4.).

c. Gleiche Verhältnisse können (wie gleiche Größen) jederzeit eines statt des andern gesetzt werden. Denn eigentlich besteht das Wesen des Verhältnisses immer nur in dem Zahlenwerthe seiner Glieder, nicht in der besondern Art der Größen, auf die es sich bezieht. (Das Verhältniß 3 : 4 bleibt immer dasselbe, man mag zu den Zahlen die Benennungen, Pfunde, Ellen, Stunden, oder was man sonst will, setzen.) Daher gilt auch bei Verhältnissen, wie bei Größen, der Grundsatz: Wenn zwei einem Dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.

d. Wenn in zwei gleichen Verhältnissen A : B und C : D §.4 die Vorderglieder A und C gleich sind; so sind auch die Hinterglieder B und D gleich: und umgekehrt.

e. Wenn zwei Verhältnisse gleich sind; so sind auch ihre umgekehrten Verhältnisse gleich.

Es wird hinreichend sein, die Sätze a) und b) durch einige Beispiele zu erläutern. Bei e) ist der Grund anzugeben, der in §. 4. liegt.

A+C : B+D = 4:3

§. 7. Lehrsatz.

Wenn zwei oder mehr Verhältnisse gleich sind, und lauter gleichartige Größen enthalten, so hat die Summe ihrer Vorder- und Hinterglieder das nämliche Verhältniß.

Anleitung zum Beweise. Man zeichne zwei, drei oder vier Paar Linien, und gebe ihnen ein beliebiges Verhältniß zweier (kleinen) ganzen Zahlen.

Darauf zeichne man noch ein Paar, gebe den Linien wieder dasselbe Verhältniß; nur nehme man zum Maaßtheil die Summe von den Maaßtheilen der vorhergehenden Verhältnisse; so wird man leicht beweisen können, daß das Vorderglied dieses Verhältnisses die Summe der Vorderglieder aller vorhergehenden Verhältniße, und das Hinterglied die Summe aller vorhergehenden Hinterglieder sei.

Anmerkung. Der Hauptschluß beruht auf dem Grundsatze der Addition, daß man dieselbe Summe erhält, man mag zwei oder mehrere Größen ganz oder stückweise zusammenfügen.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn zwei Verhältnisse gleich sind und gleichartige Größen enthalten; so hat der Unterschied ihrer Vorder- und Hinterglieder das nämliche Verhältniß.

Anleitung zum Beweise. Man zeichne ein Paar Linien, und gebe ihnen, wie im vorigen §., einerlei Zahlenverhältniß.

Man zeichne ein zweites Paar Linien, und gebe ihnen dasselbe Verhältniß; nur daß der Maaßtheil bei diesen größer oder kleiner sei, als bei dem ersten Paare.

Man zeichne endlich noch ein drittes Paar Linien von demselben Verhältniß; nur mache man den Maaßtheil für dieses Verhältniß dem Unterschiede der Maaßtheile gleich, die man bei dem ersten und zweiten Paare gebraucht hat.

Auf diese Art hat man sechs Linien gezeichnet, und nun wird man leicht deutlich machen können, daß die fünfte dem Unterschiede der ersten und dritten, die sechste dem Unterschiede der zweiten und vierten gleich sei.

Der Beweis ist allgemein gültig, weil nach §. 2. jedes Verhältniß durch zwei ganze Zahlen vorgestellt werden kann.

Anmerkung. Der Hauptschluß des Beweises beruht auf dem bekannten Grundsatze der Subtraction, daß es einerlei ist, ob man zwei Größen, eine von der anderen ganz, oder stückweise abnimmt.

§. 9. Zusatz.

Aus der Verbindung von §. 7. und §. 8. folgt, daß bei gleichen Verhältnissen gleichartiger Größen die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder eben das Verhältniß habe, wie der Unterschied der Vorderglieder zum Unterschiede der Hinterglieder.

Der Satz ist auf einige gleiche Zahlenverhältnisse anzuwenden.

§. 10. Zusatz.

Die Gleichvielfachen zweier Größen haben dasselbe Verhältniß wie die Größen selbst.

Der Beweis ergiebt sich aus §. 7., wenn man erst zwei, dann drei, dann vier ꝛc. Verhältnisse betrachtet, die nicht nur gleich, sondern auch mit denselben Zahlen oder Buchstaben geschrieben, also identisch (d. h. vollkommen einerlei) sind.

§. 11. Zusatz.

Folglich haben die gleichvielten Theile zweier Größen auch eben dasselbe Verhältniß wie die ganzen Größen.

Man sieht leicht, wie dieses aus dem vorhergehenden §. durch eine bloße Umtauschung von Worten folgt. Denn hat man von einer Größe ein Vielfaches gemacht, so darf man jederzeit das Vielfache ein Ganzes nennen, und dann wird das, was vorher die einfache Größe hieß, ein gewisser Theil des Ganzen.

B. Von Proportionen.

§. 12. Erklärung.

Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen nennt man eine Proportion. Man bezeichnet sie daher auf folgende Art:

$$A : B = C : D$$

und liest dieses kurz A zu B, wie C zu D.

Sind in einer Proportion die beiden mittleren Glieder gleich, also z. B. $A : B = B : C$, so nennt man sie eine stätige (continuirliche) Proportion. Eine solche besteht also nur aus drei verschiedenen Größen, A, B, C, und man sagt, die zweite Größe B sei das mittlere Proportionalglied zwischen A und C.

Es kann nach allem Vorhergehenden nicht schwer sein, zur Er=

läuterung dieser Erklärungen ein Paar gleiche Zahlenverhältnisse aufzufinden, zu zeigen, daß sie gleich sind (§. 6.,) und sie dann in eine Proportion zusammenzustellen.

Auch wird es so schwierig nicht sein, ein Beispiel einer stätigen Zahlenproportion zu erfinden; wenn gleich zur Auffindung nach einer bestimmten Regel noch keine Aufgabe dagewesen ist.

Wählt man nämlich zum ersten Verhältnisse ein solches, worin der Anzeiger (§. 4.) eine ganze Zahl ist, so wird man leicht das zweite Verhältniß so bestimmen können, daß die mittleren Glieder gleich werden.

§. 13. Zusatz.

Obgleich die Größen des zweiten Verhältnisses von anderer Art sein können, als die des ersten (§. 6. b.); so darf man dennoch jederzeit die vier Größen einer Proportion als gleichartig betrachten, weil das Wesen des Verhältnisses und der Proportion nicht sowohl in der besonderen Beschaffenheit der Größen, als in dem Zahlenwerthe liegt, den sie gegen einander haben (§. 6. c.).

Zur Erläuterung bilde man eine Zahlenproportion von vier verschiedenen Zahlen, gebe den beiden ersten die Benennung Pfund, und den beiden letzten die Benennung Ellen, und überlege nun, ob in dem Wesen der Verhältnisse oder der Proportion die allergeringste Veränderung vorgehen würde, wenn man diese Benennungen wieder wegstriche.

Eine Proportion sei also auf beliebige Art in Buchstaben oder Zahlen geschrieben, so ist man jederzeit berechtigt, die vier Glieder als gleichartige Größen, nämlich als unbenannte Zahlen, oder, wenn sie in Buchstaben ausgedrückt ist, diese als unbestimmte Zeichen für solche Zahlen anzusehen.

§. 14. Zusatz.

Ob vier Größen A, B, C, D eine richtige Proportion bilden, ist nach §. 6. b. zu beurtheilen.

Die hieraus folgenden Regeln der Beurtheilung sind wörtlich auszudrücken und durch Beispiele zu erläutern.

§. 15. Lehrsatz.

In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren gleich.

Anleitung zum Beweise.

a. Angenommen, daß die vier Größen A, B, C, D, durch Zahlen ausgedrückt, eine richtige Proportion bilden, nämlich $A:B = C:D$, so bilde man nach §. 5. die Anzeiger beider Verhältnisse, welche nach §. 4. c. gleich sind. Multiplicirt man nun beide Quotienten durch das Produkt ihrer Divisoren, so ergiebt sich die Richtigkeit dieses Lehrsatzes.

b. Da der Lehrsatz von Zahlenproportionen handelt, so ist noch zu überlegen, ob, und unter welchen Bedingungen er auf alle Proportionen anwendbar sei, auch wenn die Glieder derselben Linien, Flächen, Winkel oder überhaupt Größen einer besondern Art sind. Die Antwort ergiebt sich aus §. 13.

§. 16. Aufgabe.

Es sind die drei ersten Glieder einer Proportion gegeben; man soll das vierte durch Rechnung finden.

Anleitung zur Auflösung und zum Beweise. Wenn man die drei gegebenen ersten Glieder A, B, C, und das vierte gesuchte x nennt, so heißt die zu betrachtende Proportion $A:B = C:x$. Wendet man auf diese den Lehrsatz §. 15. an, so ergeben sich Auflösung und Beweis zugleich.

Die Regel ist übrigens a) durch eine Buchstabenformel und b) in Worten auszudrücken. Auch ist c) anzugeben, wie die Regel heiße, wenn das gesuchte Glied irgend eine beliebige Stelle einnimmt.

Zusatz.

Wenn zwei Proportionen in den drei ersten Gliedern übereinstimmen, so sind auch die vierten Glieder in beiden gleich.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge aus dem §.

§. 17. Aufgabe.

Es sind die äußeren Glieder einer stätigen Proportion gegeben; man soll das mittlere Proportionalglied finden.

Anleitung zur Auflösung. Die gegebenen Glieder seien A und B, das gesuchte x; so ist die Proportion $A:x = x:B$. Wendet man hierauf den Lehrsatz §. 15. an, so sieht man leicht, daß durch Ausziehung einer Quadratwurzel die Größe von x gefunden werden kann.

Die Regel ist, wie bei dem vorigen Satze, a) durch eine Buchstabenformel und b) in Worten auszudrücken.

§. 18. Zusatz.

Wenn man in einer Proportion die beiden Verhältnisse vertauscht: so bilden die vier Glieder in dieser neuen Reihenfolge ebenfalls eine Proportion.

Dieses folgt unmittelbar aus der Erklärung der Proportion.

§. 19. Zusatz.

Wenn man in einer Proportion beide Verhältnisse umkehrt, so bilden die vier Glieder in dieser neuen Reihenfolge ebenfalls eine Proportion.

Der Sinn ist durch ein Beispiel zu erläutern, und der Grund aus §. 6. e. hinzuzufügen.

Auch ist noch die Frage zu beantworten, ob man nach den §. §. 18. und 19. angegebenen Veränderungen sagen könne, daß man noch dieselbe Proportion vor sich habe?

§. 20. Lehrsatz.

Wenn man in einer Proportion, in welcher die vier Größen als gleichartig betrachtet werden (§. 13.), die beiden mittleren Glieder vertauscht; so bilden die vier Glieder in dieser neuen Ordnung wieder eine Proportion.

Anleitung zum Beweise. Man zeichne vier Linien, A, B, C, D, theile A und C in gleichviel Theile, und trage eben so viele Theile der A auf B, als Theile der C auf D, so hat man eine richtige Proportion in der Ordnung $A : B = C : D$, weil sowohl $A : B$ als $C : D$ dasselbe Zahlenverhältniß §. 6. c. haben. Es ist nun zu beweisen, daß $A : C = B : D$.

Aus §. 10. läßt sich zeigen, daß sich sowohl die erste zur dritten, als auch die zweite zur vierten, wie ein Maaßtheil des ersten Verhältnisses zu einem Maaßtheile des zweiten Verhältnisses verhalte; woraus die zu erweisende Proportion nach §. 6. c. folgt.

§. 21. Lehrsatz.

Vier Größen, welche eine Proportion bilden, lassen sich in acht verschiedene Ordnungen proportional stellen.

Anleitung zum Beweise. Wenn die gegebene Proportion $A:B = C:D$ heißt, so giebt es

a. zwei Ordnungen, in welchen D das letzte Glied ist: die eine ist die gegebene selbst, die andere erhält man durch Anwendung von §. 20.

b. Ferner giebt es zwei Ordnungen, in welchen C das letzte Glied ist: die erste erhält man durch Anwendung von §. 19. auf die gegebene Proportion, die zweite erhält man, wenn man auf diese abgeleitete §. 20. anwendet.

c. Ferner giebt es zwei Ordnungen, in welchen B das letzte Glied ist: die erste erhält man, wenn man auf die gegebene Proportion §. 18. anwendet. Aus der so abgeleiteten ergiebt sich die andere nach §. 20.

d. Endlich giebt es zwei Ordnungen, in denen A das letzte Glied ist: die erste erhält man, wenn man auf die gegebene zuerst §. 18. und 19. anwendet, und die zweite ergiebt sich wieder aus der abgeleiteten nach §. 20.

Diese acht Stellungen sind an einer durch Buchstaben dargestellten Proportion wirklich auszuführen, und jedesmal ist wörtlich anzugeben, nach welchen Sätzen jede Proportion gebildet ist.

Auch ist hiebei die Frage zu beantworten, ob diese acht Umstellungen sämmtlich verschiedene Proportionen sind?

§. 22. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich das erste oder das zweite Glied zur Summe des ersten und zweiten Gliedes, wie (beziehungsweise) das dritte oder vierte Glied zur Summe des dritten und vierten.

Wir wollen den Beweis dieses Satzes vollständig ausführen. Nach diesem Muster wird es nicht schwer sein, auch die Beweise der folgenden §. §. auszuarbeiten.

Beweis. Es sei $A:B = C:D$, so ist zu beweisen, 1) daß $A:A+B = C:C+D$; 2) daß $B:A+B = D:C+D$.

Nach §. 20. ist $A:C = B:D$. Hieraus folgt nach §. 7.:

$$A:C = A+B:C+D; \text{ und } B:D = A+B:C+D.$$

Aus der ersten dieser beiden Proportionen folgt wieder nach §. 20.

$$A:A+B = C:C+D;$$

welches die erste zu erweisende Proportion war.

Aus der zweiten folgt ebenfalls nach §. 20.:

$$B:A+B = D:C+D;$$

welches die zweite zu erweisende Proportion war.

[illegible]

§. 23. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich das erste oder das zweite Glied zum Unterschiede des ersten und zweiten, wie (beziehungsweise) das dritte oder vierte Glied zum Unterschiede des dritten und vierten.

Der Beweis ist dem vorhergehenden vollkommen ähnlich, nur daß statt §. 7. hier §. 8. in Betrachtung zu ziehen ist.

§. 24. Lehrsatz.

In jeder Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zu dem Unterschiede derselben Glieder, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum Unterschiede derselben Glieder.

Auch dieser Beweis kann auf ganz ähnliche Art, wie bei den beiden vorhergehenden §. §. geführt werden, nur kommt hier §. 9. statt §. §. 7. und 8. in Betrachtung.

§. 25. Zusätze.

Es ist leicht einzusehen, daß man durch Verbindung von §. 21., 22., 23. und 24. aus jeder Proportion eine Menge anderer ableiten könne.

Wieviel Proportionen erhält man wohl, wenn man auf eine gegebene Proportion erst von §. 22., 23. und 24. und dann auf alle vorliegenden (mit Einschluß der gegebenen) von §. 21. Anwendung macht?

Im Hauptheft ist es genug, diese Fragen bestimmt zu beantworten. Im Uebungsheft aber sind aus einer Buchstabenproportion wirklich alle diese Proportionen abzuleiten.

Anmerkung. Eigentlich kann aus einer einzigen Proportion eine Unendlichkeit von anderen richtigen Proportionen abgeleitet werden. Denn theils kann man §. 22. bis 24. wiederholt auf jede abgeleitete Proportion anwenden, theils kann man nach §. 10. und 11. noch andere Veränderungen mit einer Proportion vornehmen. Man kann nämlich, unbeschadet der Richtigkeit, das erste und zweite Glied, desgleichen das dritte und vierte, mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren. Ja aus §. 20. wird man leicht schließen, daß man eben so auch das erste und dritte, desgleichen das zweite und vierte Glied mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren könne.

Durch Anwendung aller dieser Sätze ist es möglich, aus jeder Zahlen-Proportion jede andere beliebige abzuleiten.

Zu einer nützlichen Uebung in der Anwendung der vorgetragenen Sätze wähle man sich im Uebungshefte zwei ganz beliebige Zahlen-Proportionen (z. B. $6:17 = 18:51$ und $15:9 = 5:3$), und versuche nun durch dergleichen Abänderungen die eine in die andere zu verwandeln. Möglich ist die Verwandlung jederzeit; man muß aber suchen, mit der möglichst geringen Anzahl von Abänderungen fertig zu werden.

C. Zusammensetzung der Proportionen.

§. 26. Erklärung.

Zwei Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man sowohl die Zahlenwerthe ihrer Vorderglieder, als auch die ihrer Hinterglieder mit einander multiplicirt.

Zwei Proportionen werden zusammengesetzt, wenn man sowohl ihre vorangehenden, als auch ihre nachfolgenden Verhältnisse zusammensetzt; oder wenn man die Zahlenwerthe der gleichstelligen Glieder beider Proportionen mit einander multiplicirt.

Beides ist auf beliebige Zahlenbeispiele anzuwenden.

§. 27. Lehrsatz.

Der Anzeiger eines zusammengesetzten Verhältnisses ist das Product aus den Anzeigern der gegebenen Verhältnisse.

Anleitung zum Beweise. Das Vorderglied des einen Verhältnisses sei a, sein Anzeiger p, das Vorderglied des zweiten Verhältnisses sei b, der Anzeiger q, so kann man die Hinterglieder beider Verhältnisse nach §. 5. ausdrücken. Setzt man dann beide Verhältnisse zusammen, und bestimmt nach §. 5. den Anzeiger des zusammengesetzten, so fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Daß der Satz auch auf drei, vier und mehr Verhältnisse anwendbar ist, sieht man leicht ein.

§. 28. Lehrsatz.

Wenn man zwei Proportionen zusammensetzt, so bilden die vier Producte wieder eine Proportion und der Anzeiger derselben ist das Product aus den Anzeigern der gegebenen Proportionen.

Der Satz folgt unmittelbar aus §. 27. und ist durch Anwendung auf ein Zahlenbeispiel zu erläutern.

Auch sieht man leicht ein, daß auf dieselbe Art drei, vier und mehr Proportionen zusammengesetzt werden können.

§. 29. Lehrsatz.

In einer ganz beliebigen Folge mehrerer gleichartigen Größen ist das Verhältniß jeder zwei Glieder, die nicht unmittelbar auf einander folgen, aus den dazwischenliegenden Verhältnissen zusammengesetzt.

Anleitung zum Beweise. Wenn A, B, C, D, E eine ganz beliebige Folge gleichartiger Größen ist, und es verhält sich $A:B = m:n$; $B:C = p:q$; $C:D = r:s$; $D:E = t:v$; wo m, n, p, q, r, s, t, v Zahlen sind; so ist zu beweisen, daß z. B. das Verhältniß $A:E$ aus den Verhältnissen $m:n$; $p:q$; $r:s$; $t:v$ zusammengesetzt sei.

Um den Beweis zu führen, schreibe man die Proportionen

$$A:B = m:n$$
$$B:C = p:q$$
$$C:D = r:s$$
$$D:E = t:v$$

$A:B=2:5$
$B:C=4:5$
$C:D=2:1$
$D:E=3:4$

unter einander. Setzt man dann diese Proportionen nach §. 26. zusammen, so wird man leicht wahrnehmen, daß sich die beiden ersten Glieder durch BCD dividiren lassen, wodurch in dem vorangehenden Verhältniß bloß $A:E$, in den nachfolgenden aber das zusammengesetzte aus $m:n$; $p:q$; $r:s$; und $t:v$ übrig bleibt.

Wie der Satz auf jede zwei anderen Größen aus der Folge A, B, C, D, E, (z. B. auf das Verhältniß $B:D$) anzuwenden sei, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Anhang zum elften Abschnitt.

Von incommensurablen Größen und irrationalen Zahlen.

---

§. 1. Erklärung.

Zwei Größen A und B heißen commensurabel, wenn es irgend einen genauen Theil der einen giebt, durch welchen auch die andere genau gemessen werden kann.

Sie heißen incommensurabel, wenn kein genauer Theil der einen die andere genau mißt.

§. 2. Zusatz.

Der Begriff der Incommensurabilität ist ein Wechselbegriff, d. h. wenn B gegen A commensurabel oder incommensurabel ist, so ist auch A gegen B von derselben Beschaffenheit.

Wenn sie commensurabel sind, so fällt die Richtigkeit des Satzes ganz unmittelbar in die Augen. Wenn aber B durch keinen Theil von A gemessen wird, so kann auch A durch keinen Theil von B gemessen werden, sonst wären beide commensurabel.

§. 3. Lehrsatz.

Es ist möglich, daß zwei gleichartige Größen ein incommensurables Verhältniß haben.

Beweis. Aus den ersten Begriffen der Arithmetik ist bekannt, daß jede Größe als eine Einheit, und jeder genaue Theil derselben als ein Bruch vorgestellt werden könne, dessen Zähler 1, und dessen Nenner eine ganze Zahl ist, (als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w., und, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $\frac{1}{n}$).

Ist nun n irgend eine beliebige noch so große ganze Zahl, so läßt sich ohne Schwierigkeit beweisen, daß es zwei Linien AB und CF Fig. 112. (oder zwei andere gleichartige Größen) geben könne, deren Verhältniß so beschaffen ist, daß die eine CF weder durch $\frac{1}{n}$ von AB, noch durch irgend einen andern genauen Theil von AB, dessen Nenner kleiner als n ist, gemessen werden kann.

Zu dem Ende sei CD irgend ein genaues Vielfaches von $\frac{1}{n}$ AB.

Jetzt stelle man sich vor, daß AB auch in $n-1$, $n-2$, $n-3$ ꝛc. Theile bis zu 2 und 1 Theil herab getheilt worden, und daß jeder solcher Theil auf CD von C aus so oft, als es angeht, sei getragen worden, daß man aber bei jedem Theile höchstens bis D, bei keinem über D hinaus geschritten sei; so ist klar, daß unter D eine Menge Theilpunkte liegen werden, nämlich von solchen Theilen, durch welche sich CD nicht genau messen läßt. Irgend einer dieser Theilpunkte muß der nächste bei D sein. Dieser sei E. Da E mit D nicht zusammenfällt, so ist zwischen ihnen noch eine Ausdehnung ED. Innerhalb dieser nehme man irgendwo den Punkt F, so ist augenscheinlich, daß CF eine Länge ist, die weder durch 1, noch durch $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, ꝛc. bis $\frac{1}{n}$ von AB gemessen wird.

Diese Schlüsse bleiben aber gültig, wie groß man auch n annehme. Da nun der Verstand in der Vergrößerung von n durchaus keine Gränzen kennt, so kann man auch n unendlich groß denken, und dann ist klar, daß kein einziger endlicher genauer Theil von AB die CF messen werde, d. h., AB und CF werden incommensurabel sein.

§. 4. Anmerkung.

Man sieht leicht ein, daß, wenn im vorigen §. von Theilungen der AB geredet wird, nicht von solchen Theilungen die Rede sein könne, die vermittelst der Hand und des Auges verrichtet werden; sondern bloß von solchen, die in der Vorstellung vorgenommen werden. Incommensurabilität ist daher keine solche Eigenschaft der Größen, welche dem Auge sichtbar, oder der Hand fühlbar gemacht werden könnte. Sie ist eine Idee, die nur dem Verstande begreiflich, aber nicht den äußern Sinnen anschaulich ist. Für diese giebt es nichts incommensurables, da schon der tausendste Theil eines Zolles kaum noch als ein Punkt dem Auge wahrnehmbar ist; obgleich daraus nicht geschlossen werden darf, daß die Länge eines Zolles an sich nicht in noch viel mehr Theile theilbar sei, und von einem absolut vollkommenen Auge bis ins Unendliche getheilt werden könnte. Die Vernunft des Menschen reicht weit über die Gränzen hinaus, in welche die Beschränktheit unserer körperlichen Sinne eingeschlossen ist.

$\boxed{x}$ 1 $x^2 = 2$
1 $x = \sqrt{2}$

§. 5. Erklärung.

Wenn man von zwei incommensurablen Größen A und B, die eine, A, zur Einheit annimmt, so nennt man die Zahl, wodurch die andere, B, aus dieser Einheit ausgedrückt werden soll, eine irrationale Zahl. $\sqrt{2}$

Eine solche Zahl kann nie genau dargestellt werden, doch kann der Fehler derselben kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe.

Das deutlichste Beispiel irrationaler Zahlen geben die Quadratwurzeln aus unvollkommenen Quadratzahlen, oder überhaupt die Wurzeln jeder Ordnung aus unvollständigen Potenzzahlen.

Um zu zeigen, daß $\sqrt{2}$ eine Irrationalzahl sei, beweist man 1) daß $\sqrt{2}$ keine ganze Zahl ist, denn $1^2 = 1$, $2^2 = 4$. Es muß also der Werth von $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen. Dann beweist man 2) daß $\sqrt{2}$ auch kein Bruch der Form $\frac{m}{n}$ sein könne. Gesetzt, dies wäre möglich; so wäre auch $2 = \frac{m^2}{n^2}$, d. h. $n.n$ müßte in $m.m$ zweimal enthalten sein. Da aber $\frac{m}{n}$ als ein Bruch anzusehen ist, der sich nicht mehr heben läßt; so können auch im Zähler und Nenner des Bruches $\frac{m^2}{n^2}$ gemeinschaftliche Factoren nicht mehr vorhanden sein. n^2 kann also in m^2 nicht genau zweimal enthalten sein.

Irrationale Zahlen verwechsle man nicht mit solchen Quotienten, welche in Decimalbrüchen niemals ohne Fehler ausgedrückt werden können. So ist z. B. $^5/_7 = 0{,}714285\ 714285 \ldots\ldots$ Aber diejenige Größe, welche durch diese Zahl vorgestellt werden soll, ($^5/_7$) ist gegen die Einheit vollkommen commensurabel, und daher ihr Ausdruck in Gestalt eines gemeinen Bruches rational. Nur in Decimaltheilen der Einheit läßt sich der Werth nicht ohne Fehler ausdrücken; aber wohl auf vielerlei Art in anderen genauen Theilen der Einheit (z. B. in Siebenteln, Vierzehnteln, Einundzwanzigsteln u. s. f.). Ist hingegen ein auszudrückender Werth gegen die Einheit incommensurabel, so läßt er sich weder durch Decimaltheile, noch durch irgend eine andere Art von genauen Theilen der Einheit ohne Fehler ausdrücken.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man zwischen den Schenkeln irgend eines Winkels in beliebiger Richtung zwei Parallelen zieht, so entstehen zwei Dreiecke, a) deren Winkel einzeln verglichen gleich sind, und b) deren gleichliegende Seiten einerlei Verhältniß haben.

Beweis. Wenn zwischen den Schenkeln des Winkels A Fig. 114. die Linien BC, DE parallel gezogen sind, so entstehen die beiden Dreiecke ABC und ADE und es ist zu beweisen, a) daß ꝛc. (Hier sind beide Theile des Satzes bestimmt auf die Figur anzuwenden.)

Der Beweis von a) beruht auf I, 23. und hat nicht die geringste Schwierigkeit.

Den Beweis von b) zu führen, theile man AB in beliebig viele, am bequemsten (der Decimalrechnung wegen) in zehn gleiche Theile. Träfe nun DE genau auf einen der Theilpunkte, so würde unmittelbar aus IV, ~~11.~~ 19 folgen, daß die drei Verhältnisse AB : AD, AC : AE, BC : DE gleich wären. Trifft aber DE auf keinen Theilpunkt, wie in der Figur, wo D zwischen dem sechsten und siebenten Theilpunkte liegt, so kann der Beweis auf folgende Art geführt werden. Wenn nämlich die drei Hinterglieder der kurz vorher angeführten Verhältnisse durch Zahlen ausgedrückt werden sollten, wozu jedes Vorderglied die Einheit wäre, so läßt sich (ebenfalls aus IV, ~~11.~~ 19) zeigen, daß diese Zahlen, Ziffer für Ziffer, gleich sein würden. So enthält AD in der Figur sechs Zehntel (0,6) von AB nebst einem Reste, der kleiner ist als $^1/_{10}$ AB. Zieht man ferner die Linien FG, HI parallel mit DE durch die beiden dem Punkte D nächsten Theilpunkte H und F, desgleichen durch G die Linie GK parallel mit AB, so ist klar, daß auch AE sechs Zehntel (0,6) von AC enthalte, nebst einem Reste, der kleiner als $^1/_{10}$ AC ist. Eben so leicht überzeugt man sich, daß DE (=DL + LE) sechs Zehntel von BC nebst einem Reste, der kleiner ist als $^1/_{10}$ BC, enthalte. Aus Betrachtung des kleinen Dreiecks GKI aber ergiebt sich durch ähnliche Schlüsse, daß die Linien AD, AE und DE auch gleich viel Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel ꝛc. ihrer Einheit enthalten würden.

Daraus folgt, daß sie gegen die Vorderglieder ihrer Verhältnisse gleiche relative Größe haben, und daß folglich diese Verhältnisse selbst gleich sind (XI, 1. und 4.).

§. 2. Zusatz.

Wenn man XI, 23. desgleichen XI, 6. c. auf die Proportion AB : AD = AC : AE anwendet; so ergeben sich mehrere Proportionen, von welchen besonders diejenigen zu merken sind, welche sich nicht bloß durch die Ordnung der Glieder (XI, 21.) unterscheiden.

Diese Proportionen sind aufzuschreiben.

§. 3. Zusatz.

Eine unmittelbare Folge aus §. 1 und 2 ist die Aufgabe: Eine gegebene Linie einer anderen gegebenen und in zwei oder mehr beliebige Stücke getheilten proportional zu theilen.

Die Auflösung ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten.

§. 4. Zusatz.

Desgleichen die Aufgabe: Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden.

Auch diese Aufgabe ist nach dem Vortrage des Lehrers auszuarbeiten; wobei die Abänderungen, die bei der Auflösung stattfinden, zu bemerken sind.

§. 5. Zusatz.

Wenn auf zwei Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke wie Fig. 114. AB : AD = AC : AE abgeschnitten sind, und man verbindet die Endpunkte der ersten, und dritten Linie durch BC, und die der zweiten und vierten durch DE, so sind diese verbindenden Linien BC und DE parallel.

Der Beweis beruhet auf einem leichten indirekten Schlusse. Denn wären die Linien BC und DE nicht parallel, so könnte man doch durch D eine Parallele mit BC ziehen, und dann hätte man, wie leicht einzusehen, zu den drei ersten Gliedern der Proportion zwei verschiedene vierte Glieder; was dem Satze XI, 16. Zus. widersprechen würde.

B. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 6. Erklärung.

Zwei Dreiecke nennt man ähnlich, wenn alle Winkel des einen, einzeln verglichen, den Winkeln des anderen gleich sind, und wenn jede zwei gleichliegende (d. h. gleichen Winkeln gegenüberliegende) Seiten beider Dreiecke einerlei Verhältniß gegen einander haben.

In §. 1. ist, ohne das Wort ähnlich zu gebrauchen, schon die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und ADE Fig. 114. erwiesen worden. Es soll hier der erklärte Begriff auf zwei dergleichen Dreiecke angewendet, und alle Winkel, die gleich sind, so wie alle gleichen Verhältnisse sollen einzeln aufgeführt werden.

a. Wie lautet wohl der erste §., wenn man von dem Begriffe der Aehnlichkeit Gebrauch macht?
b. Können zwei congruente Dreiecke auch ähnlich genannt werden?
c. Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, wie viel wesentlich verschiedene Proportionen lassen sich aus den Verhältnissen der Seiten bilden? (Fig. 115. und 116.)

§. 7. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen, einzeln zweien Winkeln des andern gleich sind.

Anleitung zum Beweise. In den beiden Dreiecken ABC Fig. 115. und DEF Fig. 116., sei Winkel BAC = EDF und Winkel ACB = DFE; so ist zu beweisen, daß die Dreiecke ähnlich sind; d. h. es ist zu beweisen, daß ꝛc. (Hier ist nach §. 6 alles ausdrücklich und einzeln auszusprechen, was der Begriff der Aehnlichkeit fordert.)

Um den Beweis zu führen, mache man AG = DF und ziehe GH parallel mit BC, so läßt sich aus III, 7. beweisen, daß die Dreiecke AGH und DEF congruent sind. Da aber die Dreiecke AGH und ACB nach §. 6. a. ähnlich sind, so sind auch DFE und ACB ähnlich.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist der wichtigste für die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, und daher wohl zu merken.

§. 8. Zusatz.

Wenn zwei Dreiecke einem dritten ähnlich sind, so sind sie auch unter sich ähnlich.

Dieses folgert man sehr leicht aus Betrachtung der Winkel.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn man auf den beiden Schenkeln eines entweder a) spitzigen, oder b) stumpfen Winkels in zwei beliebigen Punkten winkelrechte Linien errichtet, und diese verlängert, bis sie sich durchschneiden, so sind von den bei dem Durchschnittspunkte entstandenen vier Winkeln im ersten Falle die spitzigen, im anderen Falle die stumpfen dem gegebenen Winkel gleich.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 117. und 118. sind in den Punkten D und E auf die Schenkel des Winkels CAB die Lothe DG und EH errichtet, die sich in F schneiden. Es ist zu beweisen a) daß in Fig. 117. DFE = CAB; b) daß in Fig. 118. der Winkel DFH = CAB.

a. In Fig. 117. ergiebt sich der Beweis sehr leicht aus der Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke ADI und IEF (II, 13.).

b. In Fig. 118. folgt er aus der Betrachtung des Vierecks EFDA, welches bei E und D rechte Winkel hat nach IV, 3. und I, 14.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn man auf den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks oder deren Verlängerungen in beliebigen Punkten winkelrechte Linien errichtet, so ist das zwischen den Verlängerungen der Lothe liegende Dreieck dem gegebenen ähnlich.

Anleitung zum Beweise. Auf den Seiten des Dreiecks ABC Fig. 119. ist auf AB der Punkt D, auf AC der Punkt E, auf der Verlängerung von BC der Punkt F beliebig gewählt; in diesen Punkten sind die Lothe Da, Ea und Fb errichtet, deren Verlängerungen das Dreieck abc bilden.

Der Beweis, daß die Dreiecke ABC und abc ähnlich sind, ergiebt sich leicht aus dem vorigen §., wenn man die Winkel bei A und a, bei B und b, bei C und c vergleicht und damit §. 7. verbindet.

Anmerkung. Der Lehrer erkennt leicht, daß dieser Satz hier nur eingeschaltet ist, um dem Schüler in einem einfachen Falle Gelegenheit zu geben, in vorgeschriebenen geometrischen Constructionen ähnliche Dreiecke zu erkennen.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks einzeln gegen zwei

Seiten eines andern Dreiecks einerlei Verhältniß haben, die Winkel aber, welche von diesen Seiten in beiden Dreiecken eingeschlossen werden, gleich sind; so sind die Dreiecke ähnlich.

Anleitung zum Beweise. In den Dreiecken ABC, DEF Fig. 115. und 116., sind die Verhältnisse AB : DE und AC : DF, desgleichen die Winkel BAC, EDF gleich; es soll bewiesen werden, daß die Dreiecke ähnlich sind; d. h., es ist zu beweisen, daß 2c.

Für den Beweis mache man AG = DF, AH = DE, und ziehe GH, so sind 1) die Dreiecke DEF und AHG nach III, 6. congruent, 2) ist HG mit BC nach §. 5. dieses Abschnitts parallel, woraus alles übrige auf ähnliche Art, wie in §. 7. abgeleitet werden kann.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn alle drei Seiten eines Dreiecks einzeln gegen die drei Seiten eines anderen einerlei Verhältniß haben, so sind die Dreiecke ähnlich.

Anleitung zum Beweise. In den Dreiecken ABC, DEF Fig. 115. und 116. seien die drei Verhältnisse AB : DE, AC : DF und BC : EF gleich; es soll bewiesen werden, daß die Dreiecke ähnlich sind; d. h., es ist zu beweisen, daß 2c.

Zur Führung des Beweises muß man, wie im vorigen §., AH = DE und AG = DF machen und HG ziehen, dann sind die Sätze anzuwenden, aus welchen 1) der Parallelismus von HG und BC, 2) die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, AHG folgt; 3) aus dieser Aehnlichkeit folgt die Proportion AC : AG = BC : HG. Vergleicht man diese Proportion mit den Voraussetzungen, und wendet XI, 16. Zus. an, so folgt daraus EF = HG; und dann erst kann die Congruenz der Dreiecke DEF und AHG nach III, 4. bewiesen werden, woraus dann auch die Aehnlichkeit von ABC und DEF folgt.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken das Verhältniß zweier einzelner Seiten des einen gegen zwei einzelne Seiten des andern und überdies die Gegenwinkel der größeren proportionalen Seiten gleich sind; so sind die Dreiecke ähnlich.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 115. und 116. seien die Verhältnisse AB : DE und AC : DF gleich, und die beiden letztgenannten Seiten seien größer als die ersten; ferner seien noch die Gegenwinkel dieser Seiten, also ABC und DEF gleich; so muß bewiesen werden, daß die Dreiecke ähnlich sind; d. h., es ist zu beweisen, daß rc.

Zum Beweise mache man wie vorher AH = DE, und AG = DF, und ziehe HG, so ist erweislich, 1) daß HG und BC parallel, 2) daß die Dreiecke ABC und AHG ähnlich, 3) daß die Winkel AHG und DEF gleich; endlich 4) daß die Dreiecke AHG und DEF congruent sind (III, 18.); woraus dann der Beweis alles dessen, was erwiesen werden soll, ohne Schwierigkeit gefolgert werden kann.

§. 14. Anmerkung.

Kann aus der Gleichheit der Verhältnisse zweier einzelner Seiten und des Gegenwinkels der kleineren Seite die Aehnlichkeit zweier Dreiecke sicher gefolgert werden?

Die Frage beantwortet sich aus III, 20.

§. 15. Anmerkung.

Die vier Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke haben einen leicht zu begreifenden Zusammenhang mit den Lehrsätzen von der Congruenz.

1 = 3
2 = 2 4 = 4
3 = 1

Es ist zu zeigen, mit welchem Lehrsatze von der Congruenz (Abschn. III.) jeder Lehrsatz von der Aehnlichkeit zusammenhange.

§. 16. Zusatz.

Da in zwei **rechtwinkligen** Dreiecken die Gleichheit **eines** Winkels schon durch den Begriff eines solchen Dreiecks feststeht, so kann der Beweis von der Aehnlichkeit zweier solcher Dreiecke noch auf einfachere Voraussetzungen, als bei schiefwinkligen Dreiecken, zurückgeführt werden.

Es soll daher hier gezeigt werden, wie in Beziehung auf rechtwinklige Dreiecke auszudrücken sei 1) der 7te, 2) der 11te, 3) der 13te §. Auch ist der Grund anzugeben, warum hier der 12te §. ausgelassen worden.

§. 17. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen Linie ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist, und zwar so, daß die Linie gleichliegend wird mit einer bestimmten Seite des Dreiecks.

Anleitung zur Auflösung. In Fig. 116. sei DF die gegebene Linie. Ueber derselben soll ein Dreieck gezeichnet werden, ähnlich dem Dreieck ABC Fig. 115., und zwar so, daß DF und AC gleichliegende Seiten werden.

Die Zeichnung selbst kann auf mehr als eine Art gemacht werden, je nachdem man §. 7. oder §. 11. oder §. 12. oder §. ~~15.~~ 13 in Betrachtung zieht.

Die einfachste Auflösung ergiebt sich aus §. 7.; diese ist daher vollständig auszuführen.

Doch soll auch angegeben werden, wie die Auflösung nach einem der übrigen Lehrsätze zu machen ist. Daß man dabei die im 4ten §. enthaltene Aufgabe wieder zu Hülfe nehmen müsse, bedarf wohl keiner Erwähnung.

Im Uebungsheft sind alle Abänderungen der Auflösung durchzuarbeiten.

C. Aehnlichkeit mehrseitiger Figuren.

§. 18. Erklärung.

Zwei mehrseitige Figuren heißen ähnlich, wenn sie aus ähnlichen Dreiecken auf einerlei Art zusammengesetzt sind.

Diese Erklärung soll auf zwei bestimmte Figuren angewendet werden. Es soll z. B. an den beiden Figuren ABCDE Fig. 120. und abcde Fig. 121. gezeigt werden, welche Dreiecke ähnlich, und auf welche Art sie zusammengesetzt sein müssen, wenn beide Figuren ähnlich sein sollen.

§. 19. Lehrsatz.

In zwei ähnlichen Figuren sind a) alle Winkel der einen einzeln und nach der Reihe den Winkeln der andern gleich, und b) jede zwei gleichliegende Seiten in beiden haben einerlei Verhältniß.

Beides läßt sich aus den vorher vorgetragenen Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke mit Rücksicht auf die Erklärung §. 18. ohne Schwierigkeit beweisen.

§. 20. Lehrsatz.

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn a) alle ihre Winkel einzeln, und nach der Reihe einander gleich sind, und b) alle in Ansehung der Winkel gleichliegenden Seiten beider einerlei Verhältniß haben.

Es läßt sich nämlich ohne Schwierigkeit zeigen, daß beide Figuren sich unter diesen Voraussetzungen in lauter ähnliche und auf gleiche Weise zusammengesetzte Dreiecke gemäß der Erklärung (§. 18.) zerlegen lassen.

§. 21. Zusatz.

Aus §§. 19. 20. folgt, daß der Begriff der Aehnlichkeit für mehrseitige Figuren ganz derselbe sei wie für Dreiecke, daß man ihn also überhaupt für alle geradlinigen Figuren ohne Ausnahme, wie bei §. 6. für Dreiecke geschehen, aussprechen könne.

Diese Erklärung ist im Hefte auszusprechen und ihre Richtigkeit aus den angeführten §§. zu zeigen.

§. 22. Anmerkung.

Die im Zusatze §. 21. gegebene Erklärung ist die in den meisten Lehrbüchern übliche, der Verf. vertauschte dieselbe mit der im §. 18. gegebenen, um den Begriff der Aehnlichkeit auch auf krummlinige Figuren anzuwenden. Es bleibt der Einsicht des Lehrers überlassen, welche von beiden er für zweckmäßiger erachtet. Es ist leicht einzusehen, daß, mit geringer Veränderung in der Folge der Sätze, sich §. 19. als Erklärung voranschicken lasse, da alsdann §. 18. in Form eines Lehrsatzes folgen, und auch noch ein Lehrsatz die Umkehrung dieses §. zeigen muß.

Diese Abänderung würde alsdann besonders zweckmäßig erscheinen, wenn entweder die Schüler nicht über die Elementargeometrie hinausgeführt werden, oder wenn die Schüler in den höheren Theilen einem andern Lehrbuche folgen, in welchem die Erklärung §. 19. zum Grunde gelegt wird.

§. 23. Aufgabe.

Es ist eine mehrseitige Figur gegeben. Man soll eine ihr ähnliche über einer gegebenen Linie zeichnen, und zwar so, daß diese Linie gleichliegend wird mit einer bestimmten Seite der Figur.

Anleitung zur Auflösung. Die Abzeichnung ähnlicher Figuren kann auf sehr mannigfaltige Art geschehen. Die gewöhnlichste, und in der Theorie einfachste, besteht darin, daß man die gegebene Figur auf irgend eine Art in Dreiecke theilt, diese nach (§. 17.) ähnlich abzeichnet, und die abgezeichneten auf die nämliche Art, wie in der gegebenen Figur, mit einander verbindet. Daß aber dies Verfahren unzählige Abänderungen zulasse, ist klar, theils daraus, weil schon die Abzeichnung eines einzelnen Dreiecks nach §. 17. auf mehr als eine Art gemacht werden kann, theils aber, und noch mehr, deswegen, weil die Zerlegung der gegebenen Figur in Dreiecke sehr viele Abänderungen zuläßt. Worüber (VIII, 9. und 10.) zu vergleichen sind. Wir wollen uns beschränken, zwei Auflösungen näher anzudeuten.

Erste Auflösung. Es sei ABCDE (Fig. 120.) die gegebene Figur. Ueber der Linie ab (Fig. 121.) soll eine ähnliche Figur so gezeichnet werden, daß ab und AB gleiche Lage erhalten.

Aus einem Endpunkte der Linie AB ziehe man eine Diagonale BE so, daß dadurch von der Figur ein Dreieck ABE abgeschnitten wird. Dann zeichne man nach §. 19. das Dreieck abe ähnlich dem Dreieck ABE, und so, daß ab und AB gleichliegend werden.

Ferner ziehe man aus einem Endpunkte der BE eine zweite Diagonale EC wieder so, daß dadurch ein Dreieck BEC abgeschnitten wird. Dann zeichne man über be ein ähnliches Dreieck, so daß be und BE gleichliegend werden.

Auf diese Art fahre man fort, bis die ganze Figur in Dreiecke zerlegt ist, und alle diese ähnlich abgezeichnet sind.

Der Beweis von der Aehnlichkeit zweier solcher Figuren ergiebt sich unmittelbar aus der Erklärung §. 18.

Zweite Auflösung. Wenn es verstattet ist, die verlangte Figur auf die gegebene zu zeichnen, so erhält man folgende bequeme Zeichnungsart.

In Fig. 122. sei ABCDE die gegebene ~~verlangte~~ Figur. Man wähle gegebene innerhalb derselben einen beliebigen Punkt F, und ziehe von da die Linien FA, FB, FC 2c. nach allen Winkelspitzen.

Soll nun in der zu zeichnenden Figur die mit AB gleichliegende Seite eine vorgeschriebene Länge bekommen, so trage man diese Länge auf AB. Wir nehmen an, daß AG diese Länge sei. Durch G ziehe man Gb parallel mit AF, und durch b die ba parallel mit BA, so ist Ga ein Parallelogramm, also AG = ab. Hierauf ziehe man bc mit BC, cd mit CD parallel

u. s. w., zuletzt verbinde man e mit a durch ea, so ist abcde die verlangte Figur.

Der Beweis, daß ABCDE und abcde ähnlich sind, beruht auf §. 20. in Verbindung mit §. 1. und §. 5.

Anmerkung. Es finden bei der letzten Auflösung wieder mancherlei Abänderungen statt. Man kann den Punkt F in einer Seite der Figur, in einer Winkelspitze, ja selbst außer der Figur annehmen. Es ist dem Anfänger zu empfehlen, daß er überlege, wie in jedem dieser Fälle die Zeichnung sich abändere, und daß er im Uebungsheft dergleichen Abänderungen ausführe.

Wäre abcde die gegebene Figur, und ag die Länge der Seite, welche mit ab gleichliegend werden soll; so sind nur die aus F gezogenen Linien zu verlängern. Die Vollendung der Zeichnung von ABCDE ist dann der vorigen ganz ähnlich.

§. 24. Anmerkung.

Für die praktische Geometrie (besonders die Feldmeßkunst) ist die vorige Aufgabe sehr wichtig. Denn wenn im Großen die Seiten, Diagonalen oder Winkel einer Figur, so weit ausgemessen sind, daß dadurch die Figur vollkommen bestimmt ist, so muß diese Figur verkleinert auf das Papier gebracht werden, d. h. man muß auf das Papier eine ähnliche Figur zeichnen. Selbst jeder Grundriß oder Aufriß oder Durchschnitt eines Gebäudes ist im Grunde nichts als die Zeichnung einer ähnlichen Figur.

Das gewöhnlichste Verfahren hiebei ist folgendes. Die Linien und Winkel der großen Figur sind durch Zahlen gegeben, nämlich die Linien in Ruthen, Fußen und Zollen, die Winkel in Graden und Minuten. Zuerst muß man dann mit sich einig sein über die Größe der verkleinerten Zeichnung. Sie hängt ab von dem Umfange des Blattes, auf welches die Zeichnung kommen soll. Ist diese Größe bestimmt, so zeichnet man einen Maaßstab (II, 6.), auf welchem man der Haupteinheit des gebrauchten Längenmaaßes (Ruthe, Fuß,) die eben gedachte Größe giebt. Eine der äußersten Haupteinheiten theilt man dann gemäß dem gebrauchten Maaße. Wäre z. B. die Haupteinheit die Ruthe, und wäre diese bei der Messung im Großen zwölftheilig getheilt gewesen, so müßte man auch auf dem Maaßstabe eine der äußersten Haupteinheiten in zwölf Theile theilen, welche alsdann verkleinerte (oder verjüngte) Fuße vorstellen würden.

nach dem 20 u 25 Maaßstabe
1 Decimalzoll auf die Strecke = 20 Ruthen auf dem Feld

Die Ausführung der Zeichnung selbst kann dann nach einer der Zeichnungsarten geschehen, die oben (VIII, §. 8. bis 11.) bei der Zeichnung congruenter Figuren beschrieben worden, indem man alle Linien nach dem verkleinerten Maaßstabe, alle Winkel aber in unveränderter Größe nach dem Transporteur aufträgt. Der Beweis von der Aehnlichkeit der so gezeichneten Figur mit ihrem Urbilde beruht darauf, daß man alle Linien vermittelst des Maaßstabes in einerlei Verhältniß verkleinert, daher proportional, alle Winkel aber gleich gemacht hat. Die besondere Ausführung des Beweises hat also in keinem Falle Schwierigkeit.

§. 25. Lehrsatz.

Die Perimeter zweier ähnlichen Figuren verhalten sich gegen einander wie zwei gleichliegende Seiten oder Diagonalen.

Anleitung zum Beweise. Man nehme wieder an, daß die beiden Fünfecke (Fig. 120. und 121.) ABCDE und abcde ähnlich sind, so ist zu beweisen, daß $AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab$ oder auch $= BE : be$.

Da die Verhältnisse der gleichliegenden Seiten $AB : ab$, $BC : bc$ 2c., vermöge des Begriffes der Aehnlichkeit §. 18. untereinander und diesen auch die Verhältnisse der gleichliegenden Diagonalen gleich sind; so ist der Beweis eine einfache Anwendung eines oben (XI, 8.) erwiesenen Satzes.
7

Erster Anhang zum zwölften Abschnitt.

v. 9.57.

Von dem verjüngten Maaßstabe.

§. 1. Vorerinnerung.

Der sogenannte verjüngte Maaßstab, den man in jedem vollständigen Reißzeuge findet, ist eine so nützliche Geräthschaft für kleine Messungen auf dem Papier, daß er keinem, der sich mit Mathematik beschäftigt, unbekannt sein darf. Er besteht in einer einfachen Vorrichtung, vermittelst deren man sehr kleine Theile, z. B. Hundertel eines Zolles, noch mit Sicherheit unterscheiden und messen, und noch kleinere Theile, z. B.

Tausendtel, schätzen kann. Er leistet also für die Linienmessung eben das, was der Nonius (Anh. zu Abschn. IX.) für die Bogen- und Winkelmessung leistet.

§. 2. Zeichnung des verjüngten Maaßstabes, um einen Zoll oder eine andere beliebige Einheit in hundert Theile zu theilen.

1. Auf eine gerade Linie AB (Fig. 123.) trage man so viele Zolle (oder sonstige Haupteinheiten), als man für gut findet. In A errichte man AC lothrecht, und gebe dieser Linie eine beliebige Länge (eine schickliche Länge ist $AC = AD$); dann vollende man das Rechteck, ACEB, und errichte in allen Theilpunkten der Linie AB winkelrechte Linien Da, IF, HG ꝛc.

Diese Linien wollen wir künftig, der Kürze wegen, schlechthin die winkelrechten Linien nennen.

2. Sodann theile man AC, so genau wie möglich, in zehn gleiche Theile, und ziehe durch alle Theilpunkte parallele Linien mit AB.

Diese Linien sollen in der Folge schlechthin die Parallelen heißen.

3. Endlich theile man AD aufs genaueste in zehn gleiche Theile. Dann ziehe man von dem nächsten Theilpunkte bei A eine schräge Linie nach dem Punkte C und durch alle übrigen Theilpunkte Parallelen mit dieser bis an die Linie Ca.

Diese schrägen Linien nennt man allgemein Transversal-Linien.

4. Die Zahlen müssen auf den Maaßstab in folgender Ordnung geschrieben werden. Der Punkt D ist der Anfangspunkt aller Zählungen; er muß mit 0 bezeichnet werden.

Von da aus zählt man zuerst die ganzen Zolle gegen B hin, wozu man etwa römische Ziffern wählen kann, wenn man nicht lieber diese Zahlen ganz weglassen will, da sich die Zolle auch unbeziffert leicht zählen.

Die Zehntel-Zolle zählt man von D oder 0 an gegen A hin, wie die Figur zeigt.

Endlich sollten eigentlich die Hundertel-Zolle auf der Linie Da von D oder 0 an gegen a hin gezählt werden; da man aber die Zahlen auf diese Art in das Netz des Maaßstabes selbst hineinschreiben müßte, so ist es bequemer, die Zahlen außerhalb an die Linie AC zu setzen, wie die Figur es zeigt.

Ist man erst etwas in dem Gebrauch des Maaßstabes geübt, so kann man alle Ziffern weglassen.

Der Grund, warum die Ziffern auf die gedachte Art zu schreiben sind, ergiebt sich aus dem folgenden §.

Anmerkung. Es ist hier nur das Wesentlichste der Zeichnung beschrieben. Wer aber mit den Sätzen von den Parallelogrammen und Parallellinien vertraut ist, wird leicht einsehen, daß mancherlei Abänderungen in der Zeichnung Statt finden. Arbeitet man auf einem Reißbrett mit der Reißschiene, wo sich Parallelen leicht und genau ziehen lassen, so kann man ganz nach der gegebenen Vorschrift arbeiten. Will man aber bloß Zirkel und Lineal brauchen, so theile man EB wie AC, Ca wie AD. Sind alle diese Theilungen sorgfältig gemacht, so ergiebt sich der Parallelismus der Linien von selbst.

§. 3. Theorie des hunderttheiligen Maaßstabes.

Vor allen Dingen hat man seine Aufmerksamkeit auf das kleine Dreieck 0ab zu richten. Da der eine Schenkel 0a des Winkels a0b in zehn gleiche Theile getheilt ist, und durch die Theilpunkte parallele Linien (wie fe) gegen den andern Schenkel gezogen sind, so ist aus (IV, 11. und §. 1. des Abschn.) klar, daß die kleinen Stücke, die von diesen Parallelen zwischen 0a und 0b liegen, von dem Punkte 0 an, wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4. rc. wachsen. Da nun ab = einem Zehntel-Zoll, so sind die eben gedachten Stücke der Parallelen 1, 2, 3, 4. rc. Hundertel eines Zolles nach der Reihe; und man sieht nun, was der Sinn der an AC geschriebenen Zahlen sei. Diese zeigen nämlich an, wieviel Hundertel eines Zolles auf derjenigen Parallele, bei welcher eine Zahl steht, zwischen 0a und 0b liegen.

Sobald man hierüber im Klaren ist, hat der Gebrauch des Maaßstabes keine Schwierigkeit. Man betrachte irgend eine der Parallelen, z. B. diejenige, bei welcher die Zahl 5 steht. Auf dieser nehme man eine Länge, deren einer Endpunkt auf einer winkelrechten Linie z. B. auf IIG in dem Punkte d, der andere aber in einer Transversale z. B. in dem Punkte c, auf derjenigen liegt, welche zwischen A und D die Zahl 6 hat; so sieht man leicht ein, daß die Länge von cd genau in Ganzen, Zehnteln und Hunderteln des Zolles angegeben werden könne. Nämlich von f bis d hat man in der Figur so viele ganze Zolle, als die bei IIG stehende Zahl anzeigt, also 2. Von c bis e hat man so viele Zehntel, als die Zahl der durch c gehenden Transversale anzeigt, also 6. Endlich hat man zwischen e und f so viele Hundertel, als die Zahl der Parallele anzeigt, auf welcher man cd genommen hat, also 5. Es ist also die ganze Länge cd = 2,65 Zoll.

§. 4. Gebrauch des hunderttheiligen Maaßstabes.

Der Gebrauch eines jeden Maaßstabes läßt sich auf zwei Arbeiten zurückführen. Entweder ist eine Länge gegeben, und man will sie durch eine Zahl darstellen, oder es ist eine Zahl gegeben, und man soll die ihr entsprechende Länge zeichnen.

1. Eine gegebene Länge zu messen, die nicht größer ist, als die Länge des Maaßstabes.

Man faßt sie so genau, wie möglich, zwischen die Spitzen eines Zirkels, und setzt diesen in der Linie AB mit dem einen Fuße auf einen der Theilpunkte 0, I, II 2c., aber so, daß der andere Fuß entweder auf D, oder zwischen A und D zu stehen kommt. Träfe dieser Fuß hier auf einen Theilpunkt, so ist klar, daß die Linie durch Ganze und Zehntel genau gemessen wäre. Trifft aber dieser Fuß nicht auf einen Theilpunkt, so rückt man mit beiden Zirkelfüßen von einer Parallele zur andern fort, indem man mit dem ersten Fuß immer auf derselben winkelrechten Linie bleibt, bis der zweite Zirkelfuß auf den Durchschnitt einer Transversale trifft. Dann erhält man das Maaß der Linie, wie im vorigen §. gezeigt worden, in Ganzen, Zehnteln und Hunderteln. Träfe aber der zweite Zirkelfuß auf keinen Durchschnitt, sondern reichte er z. B. auf der 5ten Parallele noch über die 6te Transversale hinaus, erreichte sie dagegen auf der 6ten Parallele nicht; so wäre dieses ein Zeichen, daß die zu messende Länge außer den Ganzen, Zehnteln und

Hunderteln, auch noch Tausendtel enthielte. Diese Tausendtel lassen sich nun zwar nicht mehr messen, aber wohl nach dem Augenmaaß schätzen. Denn rückt man mit beiden Zirkelspitzen allmählig von der 5ten zur 6ten Parallele fort, aber so, daß die Linie zwischen den Zirkelspitzen den Parallelen parallel bleibt, so muß es, wie leicht einzusehen ist, nothwendig eine Stelle geben, wo der erste Zirkelfuß auf seiner winkelrechten Linie, der zweite aber genau auf der Transversale steht. Denkt man sich nun den Abstand zweier Parallelen in zehn Theile getheilt, und schätzt nach dem Augenmaaße, wie viel solcher Theile von der 5ten Parallele bis zu dem Zirkelfuß liegen, so ist dieses die Anzahl der hinzuzufügenden Tausendtel, wobei ein geübtes Augenmaaß kaum um ein ganzes Tausendtel fehlen wird.

2. Zeichnung einer Länge, deren Maaß in Ganzen, Zehnteln und Hunderteln (allenfalls auch Tausendteln) gegeben ist.

Man zieht zuerst eine Linie, etwas länger als die zu zeichnende. Dann faßt man mit dem Zirkel die der Zahl entsprechende Länge nach Anleitung des vorigen §. Wäre z. B. die gegebene Zahl 1,83 Zoll, so zeigt die Ziffer 1, daß der erste Zirkelfuß auf der Winkelrechten IF stehen müsse, die zweite, 8, zeigt, daß der Zirkel bis zur 8ten Transversale auszuspannen sei, und die dritte, 3, daß dieses auf der dritten Parallele geschehen müsse.

Befänden sich noch 5 Tausendtel bei der Zahl, so müßte man beide Zirkelfüße gerade in der Mitte zwischen der 3ten und 4ten Parallele auffetzen. Hat man auf diese Art die Länge möglichst genau gefaßt, so kann man sie auf die gezeichnete Linie tragen.

§. 5. Allgemeinere Theorie des verjüngten Maaßstabes.

Es ist leicht einzusehen, daß man jede beliebige Theilung einer Haupteinheit auf ähnliche Art bewerkstelligen könne. Wollte man z. B. die Haupteinheit in 12 Theile, und jeden solcher Theile wieder in 12 theilen, so müßte man sowohl DA als AC in zwölf theilen. Wollte man die Haupteinheit in 12, einen solchen Theil aber nur in 10 theilen, so müßte man DA in 12, AC aber in 10 theilen.

Wollte man die Haupteinheit in 60 theilen, so könnte man AD in 10, AC aber in 6, oder auch umgekehrt, DA in 6, und AC in 10 theilen.

Solche besondere Theilungen werden indessen nur zu besonderen Zwecken gemacht, und werden hier nur der Uebersicht wegen erwähnt.

§. 6. Anmerkung.

Es versteht sich von selbst, daß ein solcher Maaßstab mit äußerster Sorgfalt getheilt sein muß. Wer daher keinen von einem geschickten Künstler verfertigten besitzt, muß sich selbst einen mit der äußersten Genauigkeit zeichnen.

Der Grund, warum man diesen Maaßstab einen verjüngten nennt, liegt darin, daß man ihn ursprünglich zum Verkleinern oder Verjüngen großer Figuren brauchte. Hatte man z. B. auf dem Felde alle Seiten und Winkel einer Figur gemessen, so konnte man eine ähnliche, nur verkleinerte, Figur auf das Papier zeichnen, wenn man die Theile des Maaßstabes als ein verkleinertes (verjüngtes) Bild des im Großen gebrauchten Maaßes ansah. Wäre z. B. die Länge im Großen nach Ruthen, Decimalfußen und Decimalzollen gemessen, so könnte man AD als eine verjüngte Ruthe, 01 als einen verjüngten Fuß, und die Hündertel als verjüngte Zolle betrachten. Oder man könnte AD für zehn Ruthen nehmen, wodurch die Zehntel zu ganzen Ruthen, und die Hundertel zu Decimalfußen würden. Auch kann man für diesen Zweck eigene Maaßstäbe zeichnen, deren Haupteinheit eine beliebige, für die Absicht schickliche Größe erhält.

Gegenwärtig werden alle Vermessungen nach Decimalmaaß gemacht. Diese Eintheilung war aber bei der Erfindung dieses Maaßstabes noch nicht üblich; sondern man theilte die Ruthe in 12 Fuß, und den Fuß in 12 Zoll. Daher wurden auch die verjüngten Maaßstäbe gewöhnlich zwölftheilig gemacht. Aber nicht zweckmäßig ist es, daß sehr häufig noch jetzt die Verfertiger von Reißzeugen zwölftheilige Maaßstäbe hineinlegen.

Uebrigens vergleiche man noch zum Gebrauch des verjüngten Maaßstabes Abschn. II, 6. Anmerk. 3.

Zweiter Anhang zum zwölften Abschnitt.

A. Vollständigere Ausführung des Begriffes der Aehnlichkeit.

§. 1. Erklärung.

Gleichliegende Punkte in zwei ähnlichen Dreiecken sind nicht bloß die Spitzen gleicher Winkel, sondern allgemein jede zwei Punkte, deren Entfernungen von zwei Spitzen gleicher Winkel proportional sind den gleichliegenden Seiten beider Dreiecke, und die zugleich in Beziehung auf die Verbindungslinien jener gleichliegenden Punkte übereinstimmende Lage haben. Zwei Linien, welche gleichliegende Punkte verbinden, heißen gleichliegende Linien.

In den Dreiecken ABC und abc (Fig. 124. und 125.) sollen die gleichbenannten Winkel gleich sein, also sind die Dreiecke ähnlich. Nun nehme man an, die Punkte D, d liegen so, daß $DA : da = AC : ac$, desgleichen $DC : dc = AC : ac$, und daß beide auf derselben Seite von AC und ac liegen, wo sich die Dreiecke befinden; so sind D und d gleichliegende Punkte. Eben so sind E und e gleichliegende Punkte, wenn $AE : ae = AC : ac$ und $EC : ec = AC : ac$.

Ferner sind DE und de, DA und da, DC und dc 2c. gleichliegende Linien.

Anmerkung. Man gebraucht den Ausdruck gleichliegende Linien auch häufig von unbegränzten Linien, welche zwei gleichliegende Punkte verbinden; wir verstehen aber in den folgenden §§. immer begränzte Linien.

§. 2. ~~Erklärung.~~ Aufgaben

In einem von zwei ähnlichen Dreiecken ABC, abc. (Fig. 124. und 125.) ist der Punkt D beliebig gewählt; man soll in dem andern den gleichliegenden Punkt finden.

Auflösung. Man mache den Winkel $cad = CAD$, desgleichen $acd = ACD$, so ist der Punkt d, wo die Schenkel dieser Winkel zusammentreffen, der gesuchte.

Beweis. Aus §. 9. dieses Abschn. ist die Aehnlichkeit der Dreiecke ACD, acd erweislich und hieraus ergeben sich die Proportionen, welche zum Beweise, daß D und d gleiche Lagen haben, nöthig sind.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck ABC (Fig. 124.) zwei beliebige Punkte D und E wählt, in einem ähnlichen Dreieck abc (Fig. 125.) aber zwei gleichliegende Punkte d und e sucht, endlich DE und de zieht, so verhalten sich die eben genannten Linien wie zwei gleichliegende Seiten der Dreiecke. Es ist also zu beweisen, daß $DE : de = AC : ac$.

Beweis. Aus dem vorigen §. ist klar, daß die Dreiecke DAC, dac desgleichen EAC, eac ähnlich sind. Also sind die Winkel DAC, dac, desgleichen EAC, eac, folglich auch ihre Unterschiede DAE, dae gleich. Da ferner die Verhältnisse $DA : da$ und $EA : ea$ gleich sind, (weil beide $= AC : ac$) so sind die Dreiecke DAE, dae ähnlich (§. 11. des Abschn.); daher $DE : de = DA : da = AC : ac$.

§. 4. Zusatz.

Hieraus ist klar, daß jede zwei gleichliegende Linien in ähnlichen Dreiecken einerlei Verhältniß gegen einander haben, nämlich das Verhältniß zweier gleichliegenden Seiten; auch würde sich der Beweis führen lassen, daß sie mit andern gleichliegenden Linien gleiche Winkel machen.

§. 5. Zusatz.

Es hat keine Schwierigkeit, das, was hier (§. 1. bis 4.) in Ansehung ähnlicher Dreiecke gezeigt worden, auch auf alle Arten ähnlicher Vielecke auszudehnen. Denn theilt man zwei ähnliche Figuren, wie §. 23. des Abschn., in ähnliche Dreiecke, sucht in zwei zusammenstoßenden Dreiecken gleichliegende Punkte, und verbindet diese durch Linien, so läßt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, als §. 3., zeigen, daß sich diese Linien wie zwei gleichliegende Seiten der Vielecke verhalten, und daß gleichliegende Linien in zwei solchen Figuren allezeit gleiche Winkel einschließen.

Durch diese Sätze wird erst der Begriff der Aehnlichkeit nach seinem ganz vollständigen Inhalte deutlich. In ähnlichen Figuren ist nämlich alles gleich, mit Ausnahme der absoluten Größe. Denn wegen des gleichen Verhältnisses aller gleichliegenden Linien hat jede in der einen Figur ganz beliebig gezogene Linie gegen eine gleichliegende in der andern Figur einerlei relative Größe (XI, 4.), auch schließen alle gleichliegenden Linien gleiche Winkel ein. Die Größe und gegenseitige Lage der Linien ist aber alles, was bei der Vergleichung zweier Figuren in Betrachtung kommen kann, wenn man auf den Flächenraum nicht Rücksicht nimmt.

Das Verhältniß der Flächenräume ist nämlich nicht einerlei mit dem Verhältniß gleichliegender Linien, aber abhängig von demselben, wie der folgende Abschnitt (XIV, §. 19.—22.) zeigt.

B. Ein Paar Sätze von Dreiecken, als Zugabe.

Bemerkung. Es giebt mehrere Fälle, wo drei auf eine gewisse Weise in einem Dreieck gezogene Linien einander in einem einzigen Punkt schneiden. Dahin gehören: 1) drei aus den Winkelspitzen auf die Gegenseiten gefällte Lothe; 2) drei aus den Winkelspitzen nach der Mitte der Gegenseiten gezogene Linien; 3) drei Linien, wodurch die Winkel halbirt werden; 4) drei Linien, welche senkrecht in der Mitte jeder Seite errichtet werden. Die Richtigkeit von Nr. 3. geht schon aus VII, 13. des Anhanges hervor. Nr. 4. ist bereits VI, 16. b. bewiesen. Hier mag noch der Beweis für die beiden ersten Fälle seinen Platz finden. (§. 6. bis 10.)

§. 6. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck (ABC, Fig. 126.) aus zwei Winkelspitzen (A und B) winkelrechte Linien (AD und BE) auf die Gegenseiten (BC und AC) fället, so ist erweislich, daß eine durch ihren Durchschnittspunkt (G) und durch die dritte Winkelspitze (C) gezogene Linie (CF) auf der dritten Seite (AB) winkelrecht stehe.

Beweis. Durch G ziehe man HI winkelrecht auf CF, so ist in den ähnlichen Dreiecken CEG und CGI

$$CE : CG = CG : CI.$$

Eben so ist in den ähnlichen Dreiecken CDG und CGH

CD : CG = CG : CH, oder

CG : CD = CH : CG.

Setzt man die erste und die dritte Proportion zusammen, mit Weglassung von CG aus allen vier Gliedern, so erhält man:

CE : CD = CH : CI.

Nun sind auch die Dreiecke ACD und CEB ähnlich, folglich verhält sich

CE : CD = CB : CA.

Aus den beiden letzten Proportionen folgt:

CH : CI = CB : CA.

Hieraus aber folgt weiter nach §. 5. des Abschn., daß die Linien IH und AB parallel sind.

Da nun CF auf IH winkelrecht steht, so ist sie auch auf AB winkelrecht.

Anmerkung. Ein anderer Beweis ergiebt sich, wenn man durch C, E, G, D, (VII, 150.) einen Kreis legt, einen Halbkreis durch A, E, D, B und die Linie ED zieht. Dann ist Winkel ECG = EDG = EBA (VII, 19.). Es ist aber EGC + ECG = R; also ist auch BGF + GBF = R. Daher ist auch CFB = R.

§. 7. Zusatz.

Wenn man also aus allen drei Winkelspitzen eines Dreiecks Lothe auf die Gegenseiten fällt, so durchschneiden sich diese in einem einzigen Punkte.

Ist dieser Satz auch von rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecken gültig, und wie erscheint die Sache alsdann in der Zeichnung?

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man zwei Seiten (AB und AC Fig. 127.) eines Dreiecks (ABC) halbirt, und aus den Theilpunkten (F und E) Linien (FC, EB) nach den Spitzen (C und B) der Gegenwinkel zieht, wenn man darauf durch ihren Durchschnittspunkt (G) und die dritte Winkelspitze (A) eine Linie (AD) zieht, so ist erweislich:

a. daß die Linien AG, GB, GC das ganze Dreieck in drei gleich große Stücke, folglich alle sechs von G auslaufenden Linien dasselbe in sechs gleich große Dreiecke theilen.

b. Daß die Linie AD die Seite BC halbirt.

c. Daß die beiden Stücke, in welche der Punkt G jede der drei Linien AD, BE, CF theilt, sich wie 1 zu 2 verhalten, nämlich $DG : AG = EG : BG = FG : CG = 1 : 2$.

a. Da AB in F halbirt ist, so ist Dreieck $ACF = FCB$, desgleichen ist Dreieck $AGF = FGB$. Nimmt man die beiden letzten von den beiden ersten hinweg, so bleibt übrig Dreieck $AGC = BGC$. Auf dieselbe Art ist erweislich, daß Dreieck $AGC = AGB$, oder Dreieck $AGB = BGC$.

Daß das Dreieck AGB durch die Linie GF, und Dreieck AGC durch GE halbirt sei, ist unmittelbar klar (V, 7.), daß aber auch Dreieck BGC durch DG halbirt sei, läßt sich auf folgende Art beweisen.

Nimmt man in den gleichen Dreiecken AGB, AGC die Linie AG für die Grundlinie, so müssen beide nach (V, 8.) gleiche Höhen haben. Eben diese Höhen wären aber auch die Höhen der Dreiecke BGD und CGD, wenn man GD als Grundlinie betrachtete. Folglich sind die Dreiecke BGD, CGD gleich nach V, 7.

b. Nimmt man nun in den eben genannten gleichen Dreiecken BD und DC für Grundlinien, so haben sie gleiche Höhen; und daher müssen nach V, 8. auch ihre Grundlinien BD und DC gleich sein.

c. Nach a) ist Dreieck $AGB = \frac{1}{3}ABC$. Halbirt man also AG in H, und zieht BH, so ist Dreieck $BAH = BHG = \frac{1}{6}ABC$. Da aber auch nach a) Dreieck $BGD = \frac{1}{6}ABC$, so haben die Dreiecke BAH, BHG, BGD gleiche Flächen, und da sie, wenn man AH, HG, GD für Grundlinien nimmt, auch gleiche Höhe haben, so sind ihre Grundlinien nach V, 8. gleich, folglich verhält sich $DG : AG = 1 : 2$.

Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß $FG : GC = 1 : 2$. und $EG : BG = 1 : 2$.

§. 9. Zusatz.

Wenn man alle drei Seiten eines Dreiecks halbirt, und aus den Theilungspunkten Linien nach den Spitzen der Gegenwinkel zieht, so durchschneiden sich diese Linien in einem einzigen Punkte.

§. 10. Anmerkung.

Man kann den Punkt G als den Mittelpunkt der Größe eines Dreiecks betrachten. In der Statik (d. i. in der Lehre vom Gleichgewicht fester Körper) nennt man ihn den **Schwerpunkt** des Dreiecks, weil sich erweisen läßt, daß eine dreieckige Scheibe, die in allen Punkten gleich dick und schwer ist, im Gleichgewicht schwebt, wenn der einzige Punkt G unterstützt ist; nicht anders, als ob alle seine Schwere in diesem einzigen Punkte vereinigt wäre.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn man einen Winkel eines Dreiecks halbirt, so schneidet die Halbirungslinie die Gegenseite des Winkels in zwei Stücke, welche den anliegenden Seiten proportional sind.

Anleitung zum Beweise. Es sei (Fig. 128.) in dem Dreieck ABC der Winkel ABC durch die Linie BD halbirt, welche die Seite AC in D schneidet; es soll die Richtigkeit der Proportion AB : BC = AD : DC bewiesen werden.

Man verlängere AB über B hinaus, mache die Verlängerung BE der Seite BC gleich, und ziehe EC, so ist deutlich, daß der Winkel ABC = 2BEC (II, 10. vergl. mit III, 8.), woraus leicht gefolgert wird, daß ABD = BEC; mithin sind die Linien BD und EC parallel. Dies giebt nach (XII, 1.) die Proportion AB : BE = AD : DC, in welcher nur statt BE das ihm gleiche BC gesetzt werden muß, um obige Proportion zu erhalten.

Dreizehnter Abschnitt.

Proportionen im Kreise und Aehnlichkeit regulärer Vielecke.

A. Proportionen im Kreise.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fället, so wird dadurch das Dreieck in zwei getheilt, welche unter sich, und dem ganzen ähnlich sind.

Anleitung zum Beweise. In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD (Taf. III, Fig. 53.) sei aus der Spitze D des rechten Winkels das Loth DB auf die Hypotenuse gefällt, es ist zu beweisen, daß die Dreiecke ADC, ADB und BCD ähnlich sind.

Der Beweis ist sehr leicht, wenn man die Ordnung beobachtet, daß man zuerst die Aehnlichkeit der kleinen Dreiecke mit dem ganzen beweiset, und dabei XII, 16. vor Augen hat. Ist die Aehnlichkeit jedes der kleinen Dreiecke mit ADC bewiesen, so ist klar, daß die Aehnlichkeit derselben unter sich eine unmittelbare Folgerung daraus ist (XII, 8.).

Nach der Ausführung dieses Beweises soll noch jedes der drei Paare ähnlicher Dreiecke vorgenommen, und in jedem sollen sämmtliche gleiche Winkel und gleichliegende Seiten aufgezählt werden.

§. 2. Zusatz.

Unter den vielen Proportionen, welche sich aus den Seiten dieser drei Paare ähnlicher Dreiecke machen lassen, befinden sich drei stätige (XI, 12.), die ihres häufigen Gebrauchs wegen besonders zu merken sind.

Man wird diese leicht finden, wenn man bemerkt, daß die drei Linien DB, DA, DC welche von der Spitze des rechten Winkels auslaufen, die mittleren Proportionalglieder derselben sind.

Jede dieser Proportionen ist nicht nur mit den Buchstaben der Figur auszudrücken; sondern auch in Worten auszusprechen; wobei wir nur bemerken, daß sich die Linien AB, BC bequem durch die Worte Abschnitte der Hypotenuse bezeichnen lassen.

V. S.16, = 17 | IV S.23. |

§. 3. Zusatz.

Wenn man in einem beliebigen Punkte B (Fig. 53.) der Linie AC ein Loth BD errichtet, welches die mittlere Proportionale zwischen AB und BC ist, und man zieht DA und DC, so ist ADC ein rechter Winkel.

Denn aus den Voraussetzungen ergiebt sich, daß die Dreiecke ABD und DBC unter sich (XII, 9.) ähnlich sind, woraus folgt, daß BDC + BCD = BDC + BDA gleich einem rechten sind.

§. 4. Zusatz.

Da jedes Dreieck, welches entsteht, wenn man aus einem beliebigen Punkte einer Kreislinie zwei Sehnen nach den Endpunkten eines Durchmessers zieht, allezeit ein rechtwinkliges ist, so lassen sich die mehrgedachten drei stätigen Proportionen auf Linien anwenden, die in einem Halbkreise gezogen sind.

Dieses soll:

a. kürzlich an einer Figur wie (Fig. 53.) gezeigt werden.

b. Ferner sollen zwei Halbkreise gezeichnet, und in einem jeden gerade nur so viel Linien gezogen werden, als zur Darstellung einer solchen Proportion nöthig sind.

c. Endlich soll jede dieser Proportionen wörtlich und in solchen Ausdrücken niedergeschrieben werden, wie der Begriff des Halbkreises fodert. (Nämlich DA, DC heißen nun nicht Katheten, sondern Sehnen; AC nicht Hypotenuse, sondern Durchmesser.)

Anmerkung. Eine Aehnlichkeit dieser Sätze mit V, 14. a. 15. a., desgleichen mit V, 22. wird man vielleicht selbst wahrnehmen. Ihr innerer Zusammenhang wird im 14ten Abschnitt klar werden.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn in einer krummlinigen Figur jedes auf einer Sehne errichtete Loth die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten dieser Sehne ist, so ist solche Figur ein Kreis, und jene Sehne ein Durchmesser desselben.

Anleitung zum Beweise. Es sei ADC (Fig. 53.) eine krumme Linie, und AC eine solche Sehne, daß jedes auf sie von der krummen Linie gefällte Loth die mittlere Proportionale werde zwischen den beiden Abschnitten, die das Loth auf der Sehne macht: es ist zu beweisen, daß ADC ein Stück einer Kreislinie ist, deren Durchmesser AC ist. Man fälle von einem beliebigen Punkte der Peripherie D, das Loth DB; so ist nach der Voraussetzung AB : BD = BD : DC. Man BC ziehe nach den Endpunkten der Sehne AD und DC; so ist ADC ein rechter Winkel nach §. 3. Man halbire AC in E, und ziehe DE, so kann man nach VI, 23. beweisen, daß ein Kreis beschrieben mit AE durch den Punkt D geht, daß also AE = DE ist. Man überlege, daß dies für alle Punkte der Peripherie gilt, und wird leicht die fehlenden Schlüsse ergänzen.

§. 6. Aufgabe.

Die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Linien zu finden.

Aus §. 4. ergiebt sich unmittelbar mehr als eine Art der Auflösung, so daß eine nähere Anleitung überflüssig sein würde.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen sich innerhalb des Kreises schneiden; so bilden die vier Abschnitte derselben eine Proportion, in welcher die Abschnitte der einen Sehne äußere, die der andern innere Glieder sind.

Anleitung zum Beweise. Wenn sich die Sehnen AB und CD (Taf. V, Fig. 129.) innerhalb des Kreises in E schneiden; so ist zu beweisen, daß CE : AE = EB : ED.

Zum Beweise ziehe man die Hülfslinien AD und CB (oder auch AC und BD), so wird man aus XII, 5., verbunden mit I, 18. und VI, 19. sehr leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke AED, CEB und hieraus die Richtigkeit der obigen Proportion beweisen.

Zur Uebung sind alle Umstellungen der Proportion aufzuschreiben (XI, 21.).

§. 8. Anmerkung.

Das Maaß der Winkel AED, BEC (oder auch AEC, BED) kann durch die Bogen ausgedrückt werden, in welche die Kreislinie durch die Sehnen getheilt ist.

Dies ergiebt sich aus II, 10., verglichen mit VI, 18. und IX, ~~13.~~ IX. 12

§. 9. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sehnen verlängert außerhalb des Kreises schneiden, so bilden die Abschnitte derselben gleichfalls eine Proportion, wenn man die Abschnitte vom Durchschnittspunkt außer dem Kreise bis zu den Punkten, wo sie die Kreislinie schneiden, rechnet, und die Abschnitte der einen Linie zu äußeren, die der anderen zu inneren Gliedern der Proportion macht.

Anleitung zum Beweise. Wenn sich (Fig. 130.) die Sehnen AB und CD verlängert außerhalb des Kreises in E schneiden, so ist zu beweisen, daß CE : AE = EB : ED.

Zum Beweise ziehe man die Sehnen AD und BC, so ergiebt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke BED, CEB aus XII, 5. verbunden mit VI, 19., und hieraus die Richtigkeit der Proportion.

Zur Uebung sind alle Umstellungen der Proportion aufzuführen.

jeder Winkel = der Summe der [illegible] welche auf den [illegible]
die zwischen dem Winkel u. seinen Schenkeln liegen [illegible]
½ [illegible] der beiden Bogen welche zwischen den Schenkeln liegen

§. 10. Anmerkung.

Das Maaß des Winkels AEC läßt sich durch die Bogen ausdrücken, in welche die Kreislinie durch die Sehne getheilt ist.

Dies ergiebt sich aus der Betrachtung eines der Dreiecke ADE oder CBE in Verbindung mit II, 10. und VI, 18.

§. 11. Anmerkung.

Wenn man die Buchstaben der Figuren 129. und 130. so stellt, wie es hier geschehen ist, und dann die Beweise von §. 6. und §. 8. vergleicht; so wird man finden, daß der eine Wort vor Wort mit sehr geringer Abänderung auch für den andern Satz paßt. Hieraus folgt, daß es möglich sein müsse, beide Lehrsätze unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu stellen, und sie in einen einzigen zu verbinden.

Wie müßte dieser gemeinschaftliche Ausdruck beider Lehrsätze lauten?

§. 12. Lehrsatz.

Wenn von einem außerhalb des Kreises liegenden Punkte zwei Linien an den Kreis gezogen sind, von denen die eine den Kreis berührt, die andere ihn aber in zwei Punkten durchschneidet, so ist die Tangente (vom Durchschnittspunkte bis zum Berührungspunkte) die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der anderen Linie, wenn man die Abschnitte rechnet von dem Durchschnittspunkte außer dem Kreise bis zu den beiden Punkten, wo sie die Kreislinie schneidet.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 131. sei von dem Punkte E an den Kreis CDB die Tangente EB und die Linie EC gezogen, welche die Kreislinie in D und C schneidet. Es ist also zu beweisen, daß CE : EB = EB : ED.

Zum Beweise ziehe man die Hülfslinien BC und BD; so wird sich die Aehnlichkeit der Dreiecke BED, BEC nach XII, 7. mit Berücksichtigung von VII, 8., und aus dieser Aehnlichkeit die obige Proportion beweisen lassen.

§. 13. Anmerkung.

Das Maaß des Winkels BEC (IX, 13.), läßt sich durch die Bogen ausdrücken, in welche die Kreislinie getheilt ist.

Dies ergiebt sich aus Betrachtung des Dreiecks BDE und seines Außenwinkels BDC in Vergleichung mit II, 10. und VII, 8.

§. 14. Anmerkung.

Wenn man sich in Fig. 129. die Linie AB fest und CD beweglich vorstellt, und sie in Gedanken parallel mit sich selbst an der Linie AB fortbewegt; so rückt der Durchschnittspunkt E aus dem Kreise heraus, die Durchschnittspunkte A und B verändern ihre Lage auf der Peripherie und es läßt sich durch diese Betrachtungen ein Zusammenhang zwischen den Lehrsätzen §. 7., 9. und 12. finden.

Dieser Zusammenhang ist bestimmter zu erörtern. Hierin liegt der Grund, warum in Fig. 131. vor den Buchstaben B noch A gesetzt ist.

§. 15. •Zusatz.

Da man um jedes reguläre Vieleck einen Kreis beschreiben kann; so lassen sich die Lehrsätze §. 7., 9., 12., auch auf die Diagonalen solcher Vielecke anwenden.

Wie wird jeder dieser Lehrsätze auszudrücken sein, wenn man ihn auf ein reguläres Vieleck anwendet?

Die dazu gehörige Figur muß wenigstens sechs Seiten haben, besser aber ist es, ein Vieleck von noch größerer Seitenanzahl, etwa ein Neuneck, zu zeichnen.

B. Aehnlichkeit regulärer Vielecke.

§. 16. Lehrsatz.

Jede zwei regulären Vielecke sind a) ähnlich, wenn sie gleich viel Seiten haben.

Auch sind in solchen Vielecken b) die Bestimmungsdreiecke (X, 9.), desgleichen c) diejenigen Dreiecke ähnlich, welche von einer Seite mit zwei großen Halbmessern gebildet werden.

Der Beweis hat keine Schwierigkeit, wenn man zuerst b) oder c) beweist. Denn aus X, 11. läßt sich sehr leicht zeigen, daß dergleichen Dreiecke gleiche Winkel haben.

Aus der Aehnlichkeit solcher Dreiecke folgt aber die Aehnlichkeit der ganzen Vielecke nach XII, 18. unmittelbar.

§. 17. Zusatz.

Die Perimeter zweier regulären Figuren von gleich vielen Seiten verhalten sich gegen einander, a) wie zwei Seiten, b) wie zwei große Halbmesser, c) wie zwei kleine Halbmesser.

Der Beweis von a) ist ein unmittelbarer Schluß aus XII, 25. Der Beweis von b) und c) ergiebt sich aus §. 16. b.

§. 18. Erklärung.

Wenn man in einer regulären Figur nach zwei beliebigen Winkelspitzen große Halbmesser zieht, so nennt man jedes der beiden Stücke, in welche die Figur dadurch getheilt wird, einen Ausschnitt (einen Sector) des Polygons.

Zieht man aber zwischen zwei beliebigen Winkelspitzen eine Diagonale, so nennt man jedes der beiden Stücke, in welche die Figur dadurch getheilt wird, einen Abschnitt (ein Segment) des Polygons. Die Diagonale nennt man in diesem Falle auch die Sehne des Abschnittes.

Diese Erklärungen sind auf eine Figur wie Fig. 132. und 133. anzuwenden.

§. 19. Lehrsatz.

Ausschnitte zweier regulärer Figuren, von gleich vielen Seiten sind ähnlich, wenn die beiden äußersten großen Halbmesser derselben gleiche Winkel am Mittelpunkte einschließen.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus §. 16. und XII, 18., wenn man in den Ausschnitten alle großen Halbmesser zieht, die gezogen werden können.

§. 20. Lehrsatz.

Abschnitte zweier regulären Figuren von gleich vielen Seiten sind ähnlich, wenn diejenigen Winkel am Mittelpunkte gleich sind, welche entstehen, wenn man große Halbmesser nach den äußersten Endpunkten der Sehne des Abschnitts zieht.

Wenn man die ebengedachten beiden großen Halbmesser gezogen hat; so schließen sie mit den Sehnen zwei Dreiecke ein, deren Aehnlichkeit sich nach XII, 11. beweisen läßt.

Dann läßt sich der Beweis von der Aehnlichkeit der Abschnitte selbst nach XII, 20. führen.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn man in zwei regulären Figuren von gleich vielen Seiten ähnliche Ausschnitte oder Abschnitte zeichnet; so verhalten sich die ihnen zugehörigen Stücke des Perimeters, wie die ganzen Perimeter der regulären Figuren.

Der Beweis läßt sich auf mehr als eine Art, am kürzesten aber auf folgende Weise führen. Wenn man die Anzahl der Polygonseiten betrachtet, welche dem Ausschnitt oder Abschnitte zugehören, so kann man jederzeit zwei bestimmte ganze Zahlen angeben, die sich gegen einander verhalten wie das Stück des Perimeters zum ganzen Perimeter. Da aber dieses Verhältniß in beiden Figuren gleich ist, so läßt sich daraus eine Proportion bilden. Verwechselt man in dieser die mittleren Glieder, so ist der Satz erwiesen.

Anhang zum dreizehnten Abschnitt.

Verschiedene Verhältnisse und Proportionen im Kreise.

---

§. 1. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise von innen berühren (VII, 10.), so werden alle Sehnen, die sich von dem Berührungspunkte aus in dem größeren Kreise ziehen lassen, von dem kleineren Kreise in demselben Verhältniß getheilt, welches die Abschnitte des Durchmessers zu einander haben.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 134. berühren sich die Kreise AEC und ADB von innen. Es ist zu beweisen, daß AE : ED = AC : CB.

Zum Beweise ziehe man die Hülfslinien CE und DB, so ist leicht zu beweisen, daß diese parallel sind nach VI, ~~23.~~ und I, 22., woraus die Proportion nach XII, 2. folgt. 22.1

§. 2. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise von außen berühren (VII, 9.), so werden alle Linien, die von einem Punkte der Peripherie des einen durch den Berührungspunkt bis an die Peripherie des andern gehen, im Berührungspunkte in demselben Verhältnisse geschnitten, welches die Durchmesser beider Kreise zu einander haben.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 135. berühren sich die Kreise BDA und AEC in A von außen. Es sind die Durchmesser BA, AC gezogen, und durch den Berührungspunkt die Linie DAE. Es ist zu beweisen, daß DA : AE = BA : AC. Die Hülfslinien BD und EC geben die ähnlichen Dreiecke BAD und AEC, woraus sich die Proportion ergiebt.

§. 3. Zusatz.

In verschiedenen Kreisen verhalten sich die Sehnen, die mit dem Durchmesser gleiche Winkel einschließen, wie die Durchmesser der Kreise.

Wenn die Sehne BD Fig. 135. mit dem Durchmesser AB, und Sehne EC mit dem Durchmesser AC gleiche Winkel ABD = ACE einschließen, so sollen sich verhalten BD : EC = AB : AC. Man ziehe AD und AE, so sind, wie leicht zu erweisen, die Dreiecke ABD, AEC ähnlich u. s. f. Für den Beweis ist natürlich die Lage der Kreise gleichgültig, die hier in der Figur als Berührungskreise gegeben sind.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Kreise von außen berühren, und man zieht zu beiden eine gemeinschaftliche Tangente (nur nicht die durch den Berührungspunkt der Kreise) (VI, Anh. 6. a.), so ist diese die mittlere Proportionale zwischen den Durchmessern beider Kreise.

Beweis. In Fig. 136. berühren sich die beiden Kreise BDAF und AECG in A; an beide ist die Berührungslinie DE gezogen; es ist zu beweisen, daß BA : DE = DE : AC.

Zum Beweise ziehe man von D und E durch den Berührungspunkt A die Linien DG und EF, und die Linien DF und EG. Da nun nach §. 2. DA : AG = FA : AE, so läßt sich leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke DAF und EAG (XII, 13.), und daraus die Parallelität der Linien DF und EG beweisen (I, 22.).

Es ist aber der Winkel EDG = DFA (VII, 8.) = AEG

(I, 23.), und Winkel DEA = EGA = FDG; woraus die Aehnlichkeit der Dreiecke FDA, ADE und AEF folgt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FDA und ADE ergiebt sich 1) die Gleichheit der Winkel FAD und DAE, woraus folgt, daß beide rechte sind, 2) die Proportion FA : AD = AD : AE. Aus dieser ergiebt sich nach §. 3. des Abschn., daß Winkel FDE ein rechter ist; daher ist es auch Winkel DEG (I, 23. c.).

Da nun auch der Winkel bei F dem Winkel CDE gleich ist; so sind die Dreiecke FDE und DEG ähnlich. Es ist also FD : DE = DE : EG.

Da aber DF und EG auf der Tangente winkelrecht stehen, so sind sie Durchmesser der Kreise (VII, 4.), und FD = BA, EG = AC, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn man von irgend einem Punkte in der Peripherie eines Kreises ein Loth auf einen Halbmesser fället, und zugleich durch diesen Punkt eine Tangente zieht, die den verlängerten Halbmesser außerhalb des Kreises schneidet, so verhalten sich nicht nur a) die beiden Abschnitte, in welche der Kreis die Linie zwischen dem Loth und der Tangente theilt, sondern auch b) jede zwei Linien, die von irgend einem Punkte der Peripherie nach den Durchschnittspunkten des Lothes und der Tangente mit dem Radius und seiner Verlängerung gezogen werden können, wie das Loth zu der Tangente.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 137. ist von dem Punkte der Peripherie B ein Loth BC auf den Radius AE gefällt, und eine Tangente BD gezogen, welche die Verlängerung des Radius in D schneidet. Es ist nun zu beweisen, a) daß CE : ED = CB : BD, und, wenn man auf der Peripherie des Kreises irgend einen anderen Punkt, z. B. F, annimmt, und von C und D die Linien CF und DF zieht, ebenfalls CF : FD = CB : BD, oder = CE : ED.

Zum Beweise von a) ziehe man den Radius AB, so erhält man das bei B rechtwinklige Dreieck ABD (VII, 3.), und darin die Proportion AB : AC = AD : AB (§. 2. des Abschn.). Setzt man in dieser für AB das ihm gleiche AE, so erhält man AE : AC = AD : AE, und daraus nach XI, 23. CE : AE = ED : AD, oder nach XI, 20. CE : ED = AE : AD = AB : AD. Es ist aber AB : AD = CB : BD (§. 1. des Abschn.), woraus die Richtigkeit von a) unmittelbar folgt.

Um b) zu beweisen, ziehe man den Halbmesser AF. Aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks ABD ergiebt sich die Proportion AC : AB = AB : AD. Da AB = AF, so wird diese jetzt AC : AF = AF : AD, woraus nach XII, 13, die Aehnlichkeit der Dreiecke AFC und ADF folgt. Aus dieser ergiebt sich dann CF : FD = AC : AF = AC : AB = CB : BD; was erwiesen werden sollte.

Da der Punkt G auch in der Peripherie liegt, so muß zur Allgemeinheit des Satzes noch bewiesen werden, daß auch CG : GD = CB : BD. Dies folgt aber, wenn man mit der bei a) gefundenen Proportion AE : AC = AD : AE die XI, 22. angegebene Veränderung vornimmt, und die Radien AF und AG vertauscht, in der dann erhaltenen Proportion CG : AE = GD : AD die mittleren Glieder umstellt, und für das Verhältniß AE (oder AB) : AD das ihm gleiche CB : BD setzt.

§. 6. Zusatz.

Aus dem vorigen §. ergiebt sich, daß das Verhältniß von je zwei Linien, die von den Punkten C und D nach einem Punkte der Peripherie des aus A beschriebenen Kreises gezogen werden, dem Verhältnisse CE : ED gleich sei, woraus sich durch Umkehrung herleiten läßt, daß, wenn man eine Linie CD bei E in einem bestimmten Verhältnisse getheilt hat, und über und unter derselben lauter Dreiecke errichtet, so daß die andern beiden Seiten, dasselbe Verhältniß CE zu ED haben, die Spitzen dieser Dreiecke in einer Kreislinie liegen, deren Halbmesser man erhält, wenn man das vierte Glied zu einer Proportion sucht, deren erstes die Differenz der beiden Theile der Grundlinie (DE — CE), das zweite der kleinere Abschnitt derselben (CE), und das dritte der größere (DE) ist.

Um den Beweis dieses Satzes vollständig zu führen, muß man zeigen, a) daß Fig. 137. kein Dreieck möglich ist über der Grundlinie CD, dessen Seiten das Verhältniß CE : ED haben, und dessen Spitze nicht in der Peripherie des Kreises GBEF läge; darauf b) daß die Proportion richtig sei, DE — CE : CE = DE : AE.

Um a) zu beweisen, nehme man an, daß H außerhalb des Kreises die Spitze eines Dreiecks über der Grundlinie CD wäre, in welchem CH : HD = CE : ED.

Es ist aber auch nach §. 5. CF : FD = CE : ED, und da dieses Verhältniß dem von CB : BD gleich ist, in welchem BD größer als BC, so ist auch DF größer als FC; mithin würde aus der Proportion CH : HD = CF : FD, und der Gleichheit des Winkels FCD in beiden Dreiecken die Aehnlichkeit der Dreiecke CHD und CFD folgen (XII, 13.), welche aber unmöglich ist, da der Winkel CFD größer als CHD. Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis geführt, wenn der Punkt H innerhalb des Kreises angenommen wird.

Um b) zu beweisen, nehme man mit der im Beweise von §. 5. a. gefundenen Proportion CE : ED = AE : AD die Umkehrung (XI, 19.), und mit der dann erhaltenen die XI, 23. angegebene Veränderung vor, so erhält man DE — EC : CE = ED : AE, was zu zeigen war.

Uebrigens ist noch zu zeigen, wie die hier gemachten Schlüsse zu einem methodischen Beweise zu ordnen wären, was dem Nachdenken des Lesers überlassen bleibt.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn vier Linien eine richtige Proportion bilden, so ist das Rechteck unter den inneren Gliedern dem Rechteck unter den äußeren gleich.

Anleitung zum Beweise. Es sind die Linien a, b, c, d, Taf. V, Fig. 138. so gegeben, daß a : b = c : d. Es soll bewiesen werden, daß das Rechteck unter a und d, dem Rechteck unter b und c gleich ist.

Man ziehe Taf. V, Fig. 129 zwei Linien, die sich unter einem beliebigen Winkel durchschneiden; von dem Durchschnittspunkte E trage man auf der einen nach entgegengesetzten Seiten, die inneren Glieder der gegebenen Proportion ab, so daß EC = b, ED = c, und auf der anderen nach einer Seite hin das erste, daß also EA = a, dann beschreibe man durch die drei Punkte A, C und D einen Kreis (VI, 15.), und verlängere AE bis an die Peripherie desselben, bis B.

Nun ist aus §. 6 des Abschn. klar, daß AE : CE = ED : EB; da aber auch a : b = c : d, so ist EB = d (XII, 4. f.). Da nun nach VI, Anh. 7. die Rechtecke AE $\times$ EB und CE $\times$ ED gleich sind, so ist die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

§. 8. Zusatz.

Die Anwendung des vorigen Lehrsatzes auf eine stätige Proportion läßt sich aus dem vorigen §. herleiten; doch kann auch unmittelbar bewiesen werden, daß das Quadrat des mittleren Gliedes dem Rechteck unter den äußeren gleich ist.

Der Beweis ergiebt sich aus §. 1. des Abschn. und V, 22. bezogen auf Fig. 53.; oder noch unmitttelbarer aus Vergleich von §. 2. des Abschn. und V, 15. a.

§. 9. Lehrsatz. Ptollemaeer.

In einem Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, ist das Rechteck unter den beiden Diagonalen so groß, wie die Summe der beiden Rechtecke, die von je zwei Gegenseiten der Figur eingeschlossen werden.

Anleitung zum Beweise. In den Kreis Taf. VI, Fig. 139. ist das Viereck ABCD eingeschrieben. Es soll bewiesen werden, daß $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Man lege an AD in A den Winkel $DAE = CAB$ an, so erhält man die ähnlichen Dreiecke DEA und ABC, da auch die Gleichheit der Winkel ADE und ACB deutlich ist (VI, 19.). Daraus ergiebt sich die Proportion:

$$AD : DE = AC : CB.$$

Außerdem sind aber auch die Dreiecke AEB und ADC ähnlich, da der Winkel $ABE = ACD$ (VI, 19.) und $DAC = EAB$, welche letzteren aus gleichen Stücken bestehen. Daraus folgt, die Proportion $AB : BE = AC : CD$.

Aus der ersten Proportion ergiebt sich $AD \times CB = DE \times AC$ (§. 7.), aus der zweiten $AB \times CD = BE \times AC$.

Addiren wir, was auf jeder Seite des Gleichheitszeichens steht so erhalten wir:

$$AD \times CB + AB \times CD = DE \times AC + BE \times AC;$$

oder, da sich die letzten beiden Rechtecke nach V, 9. vereinigen lassen,

$AB \times CD + AD \times CB = DB \times AC$; was zu erweisen war.

§. 10. Lehrsatz. Folle Ptollemaeischen

Wenn man von einer Winkelspitze eines in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecks einen Durchmesser und ein Loth auf die Gegenseite des Winkels zieht; so bilden die vier von diesem Punkte aus gezogenen Linien eine richtige Proportion, wenn man die Seiten des Dreiecks zu äußern, das Loth und den Durchmesser aber zu inneren Gliedern macht.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 140. ist von der Spitze A des Dreiecks ABC, dessen Seiten Sehnen des Kreises sind, der Durchmesser AD, und auf die Seite CB das Loth AE gezogen. Es ist zu zeigen, daß

$AC : AD = AE : AB.$

Man ziehe die Hülfslinie DB, so ergiebt sich leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke DBA und CEA, weil der Winkel DBA = CEA (VI, 22.), und BDA = BCA (VI, 19.); daraus aber folgt die gedachte Proportion.

Der Satz bleibt richtig, wenn auch das Loth AE die Verlängerung der Sehne CB träfe. Der Beweis lautet eben so, wenn man die Zeichnung so macht, daß CB über B hinaus verlängert wird.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn zwei Sehnen eines Kreises sich winkelrecht durchschneiden, und man zeichnet ein Viereck in den Kreis, zu welchem diese Sehnen die Diagonalen werden; so ist a) die Summe der Quadrate von jeden zwei Gegenseiten des Vierecks, b) die Summe der Quadrate aus den vier Abschnitten der Diagonalen dem Quadrate des Durchmessers gleich.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 141. schneiden sich die Sehnen AB und CD rechtwinklig in E, und sind Diagonalen des Vierecks ACBD. Von A aus ist der Durchmesser AF gezogen. Es soll nun bewiesen werden, a) daß $AC^2 + BD^2 = CB^2 + AD^2 = AF^2$, und b) daß $AE^2 + EB^2 + CE^2 + DE^2 = AF^2$.

Als Hülfslinien zum Beweise von a) ziehe man FD und FC; so ist Winkel ACE = AFD (VI, 19.) und Winkel ADF = AEC, folglich die Winkel DAF und CAB gleich nach II, 13. Daraus folgt aber, daß CB = DF (VI, 19. VI, 3.). Da nun $AF^2 = AD^2 + DF^2$, so ist auch $AF^2 = AD^2 + CB^2$.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß auch der Winkel DAB = CAF, mithin DB = CF; woraus ebenfalls folgt, daß $AF^2 = AC^2 + BD^2$; dadurch ist aber a) bewiesen.

Der Beweis von b) ergiebt sich durch sehr einfache Schlüsse aus a), wenn man sich nur die Quadrate von irgend zwei Gegenseiten AC und BD, oder CB und AD nach V, 14. zerlegt.

Vierzehnter Abschnitt.

Ausmessung der geradlinigen Figuren.

A. Vom Flächenmaaße.

§. 1. Erklärung.

Wenn die Größe einer Fläche gemessen, d. h. durch eine Zahl vorgestellt werden soll, so muß die Einheit dazu nothwendig eine Fläche von bekannter Größe sein. Man hat dazu allgemein die Größe eines Quadrats gewählt, dessen Seite eine Einheit des Längenmaaßes ist. Einem solchen Quadrate giebt man denselben Namen, welchen die Seite desselben im Längenmaaße führt, nur mit Vorsetzung des Wortes Quadrat.

Nach dieser Erklärung wird es leicht sein, anzugeben, was eine Quadrat-Ruthe, ein Quadrat-Fuß, ein Quadrat-Zoll, eine Quadrat-Meile 2c. sei.

Desgleichen, wie man nach der im §. gegebenen Regel ein Quadrat benennen müsse, dessen Seite einen Decimalfuß, Decimalzoll, oder einen Duodecimalfuß, oder Duodecimalzoll lang ist.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn die Einheit eines Längenmaaßes n Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung enthält, so enthält die zugehörige (gleichnamige) Einheit im Flächenmaaße nn Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung.

Anleitung zum Beweise. Wenn eine Längen-Ruthe in 10 Fuß getheilt wird, so ist zu beweisen, daß die Quadrat-Ruthe 100 Quadrat-Fuß enthalte; wird aber die Ruthe in 12 Fuß getheilt, so soll die Quadrat-Ruthe 144 Quadrat-Fuß enthalten.

Man zeichne ein beliebiges Quadrat, und nehme es für das verkleinerte Bild einer Quadrat-Ruthe, die Seite desselben also für das verkleinerte Bild einer Längen-Ruthe an.

Man theile zwei zusammenstoßende Seiten, jede in zehn gleiche Theile, so stellen diese zehntheilige Längen-Fuße vor.

Man ziehe ferner durch alle Theilpunkte Parallelen mit den Seitenlinien des Quadrats, so wird man leicht erweisen können, a) daß alle Vierecke, in welche dadurch die Quadrat-Ruthe getheilt wird, Quadrate sind (IV, 17. a.), und zwar Quadrat-Fuße (§. 1.), b) daß dieser Quadrat-Fuße $10 \times 10 = 100$ auf die Quadrat-Ruthe gehen.

Theilt man die Seiten der Quadrat-Ruthe in 12 Fuß, so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß 144 solcher Quadrat-Fuße auf die Quadrat-Ruthe gehen.

§. 3. Anmerkung.

Da 100 eine viel bequemere Zahl zum Rechnen ist als 144, so thut man wohl, bei der Ausmessung von Flächen gar kein anderes als ein zehntheilig getheiltes Längenmaaß zum Grunde zu legen. Daraus folgt indessen nicht, daß man sich nur des eigentlich so genannten Decimalmaaßes (wo die Ruthe in zehn Fuß, der Fuß in zehn Zoll, der Zoll in 10 Linien getheilt wird) bedienen solle. Die Haupt-Einheit kann man beliebig wählen, und da der Duodecimalfuß und Duodecimalzoll im gemeinen Leben weit üblicher sind, als die gleichnamigen Decimal-Maaße, so kann man immerhin einen Duodecimalfuß (wo größere Längen zu messen sind), oder einen Duodecimalzoll (bei kleineren Arbeiten auf dem Papier) zur Haupteinheit wählen; nur muß man sich beim Messen eines Maaßstabes bedienen, auf welchem diese Haupteinheit nicht in 12, sondern in 10 (oder 100) Theile getheilt ist. Dieses darf aber jederzeit unbeschadet des Namens der gewählten Haupteinheit geschehen; denn ein Duodecimalfuß oder Duodecimalzoll heißen nicht deswegen so, weil jener in 12 Zoll, dieser in 12 Linien getheilt wird, sondern weil jener der 12te Theil der Ruthe, dieser der 12te Theil des Duodecimalfußes ist. Kurz, die Benennungen Duodecimal-Fuß und Zoll bedeuten genau bestimmte Längen, nämlich jener ist der 12te, dieser der 144ste Theil der Ruthe. Hat man nun die genaue Länge eines solchen Fußes oder Zolles vor sich, so ist es ganz willkührlich, wie man ihn eintheilt. Er hört darum nicht auf, ein Duodecimal-Fuß oder Zoll zu sein.

Hätte man nun z. B. einen Duodecimalfuß zur Haupt-Einheit gewählt, und ihn auf dem Maaßstabe in 10 und 100

Theile getheilt, so ist klar, daß man diese Theile nicht Zolle und Linien nennen darf, sondern daß man sie als Decimalbrüche des Fußes schreiben und aussprechen müsse. Folglich kann man auch die Quadrate dieser Theile nicht Quadrat-Zolle und Linien nennen; sondern es ist aus dem vorigen §. klar, daß die Quadrate von den Zehntel-Fußen Hundertel des Quadrat-Fußes, und die Quadrate von den Hundertel-Fußen Zehntausendtel des Quadrat-Fußes sein werden. Auf diese Art hat man es mit einer einzigen Benennung, Fuß und Quadratfuß und den zehntheiligen Brüchen derselben zu thun.

Da die Länge einer Ruthe eine unveränderliche Größe ist (man mag vom Duodecimal- oder Decimal-Maaß reden), so ist auch die Größe einer Quadrat-Ruthe eine unveränderliche, von welcher die Quadrat-Fuße und Quadrat-Zolle als Brüche betrachtet werden können. Es soll daher hier angegeben werden:

1. Was für Brüche der Quadrat-Ruthe sind die Quadrat-Decimalfuße und die Quadrat-Decimalzolle?
2. Was für Brüche der Quadrat-Ruthe sind die Quadrat-Duodecimalfuße und Duodecimalzolle?
3. Wie müssen also im Decimalmaaße die Quadrat-Ruthen in Quadrat-Fuße und Quadrat-Zolle, und umgekehrt verwandelt werden?
4. Wie müssen ferner dieselben Namenveränderungen im Duodecimal-Maße gemacht werden?

Uebrigens ist über alles dieses der zweite Anhang zu diesem Abschnitte nachzulesen.

B. Vorbereitende Sätze.

§. 4. Lehrsatz.

Die Flächen zweier Rechtecke verhalten sich a) bei gleichen Höhen wie die Grundlinien, und b) bei gleichen Grundlinien wie die Höhen.

Beweis. a) Wenn die Rechtecke AB (Fig. 142.) und DE (Fig. 143.) gleiche Höhe $BC = EF$ haben; so ist zu beweisen, daß $AB : DE = AC : DF$.

Um zu zeigen, daß diese Proportion richtig sei, (es mögen sich die Hinterglieder durch die Vorderglieder genau messen lassen oder nicht,) wollen wir zeigen, daß, wenn der Werth von DE aus der Einheit AB durch dekadische Zahlen ausgedrückt werden sollte, alle Ziffern derselben, der Reihe nach einzeln gleich sein würden den Ziffern des Verhältnisses AC : DF, gesetzt auch, daß die Reihe der Brüche ohne Ende fortginge.

Man setze AC = 1, und trage dieses, wenn es angeht, und so oft es angeht, auf DE. Wir nehmen an, es gehe dreimal und bleibe ein Rest GF, der kleiner ist als AC. Errichtet man nun in jedem Theilpunkt eine Winkelrechte, so schneidet jede ein Rechteck ab, so groß als AB (V, 5.), also = 1. Es ist also klar, daß auf DE gerade so viel ganze Einheiten AB, als auf DF ganze Einheiten AC gehen.

Nun stelle man sich vor, daß zur Ausmessung des Restes GF, die Einheit AC in Zehntel getheilt sei, und in jedem Theilpunkte eine winkelrechte Linie errichtet werde, so ist klar, daß dadurch auch die Flächeneinheit AB in Zehntel getheilt sei. Trägt man nun von den Zehnteln der Linie AC auf den Rest GF so viele, als Raum haben, und errichtet wieder in jedem Theilpunkte eine winkelrechte Linie, so ist wieder sichtbar, daß der Flächenrest GE eben so viele Zehntel von AB, als der Linienrest GF Zehntel von AC enthält.

Es fällt in die Augen, wie diese Schlüsse fortgesetzt werden können. Denn bleibt auf DF ein Rest, der nur durch Hundertel von AC gemessen werden kann, so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß eben so viel Hundertel, als von AC auf diesen Linienrest gehen, gerade so viele Hundertel von AB auf den Flächenrest gehen werden.

Da diese Schlüsse aber ohne Ende fortgeführt werden können; so ist klar, daß die Zahlen, welche den Werth von DF aus der Einheit AC und den Werth von DE aus der Einheit AB ausdrücken, in allen einzelnen Ziffern der Reihe nach gleich sein müssen, es mag sich DF durch irgend einen Theil von AB ausmessen lassen, oder nicht.

Nun ist aber nach XI, 4. der Werth, welchen das Hinterglied eines Verhältnisses erhält, wenn man das Vorderglied = 1 setzt, nichts anders als der Anzeiger des Verhältnisses, folglich haben die Verhältnisse AC : DF, und AB : DE einerlei Anzeiger, und sind also gleich, was zu erweisen war.

b. Der Beweis des zweiten Theiles erfordert nichts als einen Umtausch von Worten und Begriffen. Nennt man nämlich in Fig. 142. und 143., was jederzeit verstattet ist, BC und EF Grundlinien, so haben die Rechtecke gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhe, AC und DF; dieselbe Proportion also, welche bei a) erwiesen worden, enthält auch schon den Beweis von b).

§. 5. Zusatz.

Auch die Flächen a) von zwei Parallelogrammen und b) von zwei Dreiecken verhalten sich bei gleichen Höhen wie die Grundlinien, und bei gleichen Grundlinien wie die Höhen.

Der Beweis von a) beruht auf V, 5., der von b) auf V, 7. Beide sind so leicht, daß sie keiner näheren Erörterung bedürfen.

§. 6. Lehrsatz.

Das Verhältniß der Flächen a) zweier beliebigen Parallelogramme, b) zweier beliebigen Dreiecke ist aus den Verhältnissen der Grundlinien und Höhen derselben zusammengesetzt.

Beweis. a) Es seien BC Fig. 144. und EG Fig. 146. zwei beliebige Parallelogramme, ihre Grundlinien seien AB und EF, und die zugehörigen Höhen seien CD und GH. Es ist also zu beweisen, daß das Verhältniß der Flächen, BC : EG gleich ist dem zusammengesetzten Verhältniß von AB : EF und CD : GH.

Man zeichne ein Rechteck KL Fig. 145., dessen Grundlinie IK = AB, und dessen Höhe IL = GH, so verhält sich nach §. 5.

$$BC : KL = CD : LI = CD : GH;$$
$$KL : EG = IK : EF = AB : EF,$$

In diesen Proportionen sind bloß die ersten und dritten Verhältnisse in Betrachtung zu ziehen, und hieraus ergiebt sich nach XI, 28.:

$$BC : EG = CD \times AB : GH \times EF,$$

welches zu erweisen war.

In dem Hefte ist nur noch hinzuzufügen 1) der Beweis von b), welcher auf V, 6. beruht; 2) soll die Frage beantwortet werden, wie der Lehrsatz ausgedrückt werden könne, ohne das Kunstwort Zusammensetzung der Verhältnisse zu gebrauchen.

C. Ausmessung der Parallelogramme, Dreiecke und unregelmäßigen Vierecke.

§. 7. Aufgabe.

Die Fläche eines Parallelogramms auszumessen.

Bei der Auflösung einer jeden solchen Aufgabe müssen vier Punkte ausdrücklich erwähnt werden. Es muß nämlich angezeigt werden, 1) ob und welche Hülfslinien zu ziehen sind, 2) welche Linien gemessen werden müssen, 3) welche Rechnung mit dem Zahlenmaaß dieser Linien zu machen ist, 4) welche Benennung das Ergebniß der Rechnung habe.

Wir wollen von der obigen Aufgabe die Auflösung und den Beweis vollständig hersetzen, damit nach diesem Muster die folgenden ausgearbeitet werden können.

Auflösung. Gesetzt es soll die Fläche des Parallelogramms AE Fig. 144. ausgemessen werden; so wähle man erst eine der Seiten, AB, zur Grundlinie, und ziehe die zugehörige Höhe CD: dann messe man AB und CD nach einem (am besten zehntheilig getheilten) Längenmaaße. Ferner multiplicire man die Zahlenwerthe der beiden gemessenen Linien, und lese endlich das Produkt als Flächenmaaß gleichnamig mit dem angewandten Längenmaaße (§. 1.), so giebt dasselbe die Fläche der Figur an.

Beweis. Die Linie FG Fig. 147. sei die Einheit des gebrauchten Längenmaaßes. Zeichnet man über FG das Quadrat FI, so ist dieses die Einheit zu dem Flächenmaaße, wonach das Parallelogramm ausgemessen werden soll: da aber FI wie jedes Quadrat selbst ein Parallelogramm ist; so hat man nach §. 6. die Proportion

$$FI : AE = FG \times GI : AB \times CD.$$

Es ist aber $FI = 1$; desgleichen $FG = GI = 1$, folglich auch $FG \times GI = 1$. Daher

$$1 : AE = 1 : AB \times CD.$$

Daß das Produkt $AB \times CD$ als Flächenmaaß gelesen werden müsse, ist daraus klar, weil das dritte Glied eine Einheit des Flächenmaaßes ist.

Bei diesem §. ist in dem Hefte bloß ein Parallelogramm sorgfältig zu zeichnen, und mit Hülfe eines genauen Maaßstabes nach Anleitung der obigen Auflösung auszumessen.

Außerdem sind von dieser und allen folgenden Aufgaben im Uebungshefte fleißig Anwendungen zu machen.

Anmerkung. Daß bei dieser und jeder anderen Messung nur ein und dasselbe Maaß und zwar unter einer einzigen Benennung gebraucht werden müsse, versteht sich von selbst.

§. 8. Aufgabe.

Es ist die Fläche eines Parallelogramms und dazu entweder die Grundlinie oder die Höhe desselben gegeben; man soll im ersten Falle die Höhe, im andern die Grundlinie finden.

Anleitung zur Auflösung. Da die Fläche nach §. 7. gefunden wird durch ein Produkt der Grundlinie und Höhe, so ist diese Aufgabe im Grunde einerlei mit der arithmetischen Frage: Es ist ein Produkt zweier Faktoren und einer dieser Faktoren gegeben, wie findet man den andern Faktor? Diese Frage beantwortet sich aus den ersten Begriffen der Multiplication und Division, und kann daher keine Schwierigkeit haben.

Bei praktischen mathematischen Arbeiten kommt der Fall öfter vor, daß man ein Rechteck oder Parallelogramm von be=

stimmter Fläche und mit bestimmter Grundlinie oder Höhe zeichnen will. Man füge also im Hefte ein solches Beispiel hinzu als: Es soll über einer Grundlinie von 2,5 Zoll ein Rechteck von 3,25 Quadrat-Zoll gezeichnet werden, wie groß muß seine Höhe sein?

§. 9. Aufgabe.

Die Fläche eines Quadrates auszumessen.

Die Auflösung selbst ergiebt sich unmittelbar aus §. 7., wobei nur die zu Anfang bei §. 7. gemachten Erinnerungen soweit, als nöthig, zu berücksichtigen sind.

Um aber für die Rechnung den zweckmäßigsten Ausdruck zu finden, erinnere man sich, mit welchem Kunstwort das Produkt zweier gleichen Faktoren in der Arithmetik benannt wird.

Es ist eine wirkliche Ausmessung eines Quadrates hinzuzufügen.

Auch ist die Frage zu beantworten, wie sich die Flächen zweier Quadrate gegen einander verhalten?

Anmerkung. In diesem §. zeigt sich der Grund von der bisher gebrauchten Bezeichnung der Quadrate durch AB^2.

§. 10. Aufgabe.

Es ist für die Fläche eines Quadrates das Zahlenmaaß gegeben; man soll die Seite desselben finden.

Wenn man im vorigen §. den bestimmtesten Ausdruck für die Rechnung gebraucht hat, so wird man auch hier sehr leicht die Auflösung finden.

Es ist die wirkliche Zeichnung eines Quadrates beizufügen, dessen Fläche eine gegebene Größe hat.

§. 11. Aufgabe.

Die Fläche eines Rechtecks auszumessen.

Die Auflösung beruht auf §. 7. Es ist eine wirkliche Ausmessung beizufügen; auch ist die Frage zu beantworten, ob es einen Unterschied in der Messung und Rechnung mache, wenn man die längere oder die kürzere Seite des Rechtecks zur Grundlinie wählt?

Anmerkung. In diesem §. zeigt sich der Grund von der bisher gebrauchten Bezeichnung der Rechtecke, z. B. (Fig. 145.) Rechteck $KL = KI \times IL$, oder $= [KI \,.\, IL]$.

§. 12. Aufgabe.

Die Fläche eines Rhombus auszumessen.

Die Auflösung beruht auf §. 7.

Es ist eine wirkliche Ausmessung beizufügen, auch die Frage zu beantworten, ob es einerlei sei, welche Seite des Rhombus man zur Grundlinie wählt?

§. 13. Aufgabe.

Die Fläche eines Rhomboids auszumessen.

Die Auflösung beruht auf §. 7.

Da hier die zu messenden Linien verschieden sind, je nachdem man die kürzere oder längere Seite des Rhomboids zur Grundlinie wählt (V, 1.), so läßt sich auch die Ausmessung auf zwei verschiedene Arten ausführen, und es sind daher beide auf ein und dasselbe Rhomboid anzuwenden. Wenn die Resultate beider Messungen nicht völlig übereinstimmen, so ist der Grund davon anzugeben.

Worauf würde eine sehr große Verschiedenheit der Resultate deuten, und was würde man bei gänzlicher Uebereinstimmung derselben urtheilen müssen?

§. 14. Aufgabe.

Die Fläche eines Dreiecks auszumessen.

Die Auflösung beruht auf §. 7. verglichen mit V, 6.

Bei der Auflösung ist ein ungleichseitiges Dreieck zu wählen, und da bei diesem nach V, 3. drei verschiedene Grundlinien angenommen werden können, so findet eine dreifache Ausmessung Statt, welche mit aller Sorgfalt auszuführen ist.

Anmerkung. Wenn man eine und dieselbe Größe (wie hier die Fläche eines Dreiecks) zu wiederholten Malen auf dieselbe oder auf verschiedene Art mißt, so ist wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne und Werkzeuge auch bei Anwendung alles Fleißes dennoch keine vollkommene Uebereinstimmung der Resultate zu erwarten; einige Resultate werden etwas zu groß, andere etwas zu klein sein. Man kann aber der Wahrheit näher kommen, wenn man aus sämmtlichen Resultaten das arithmetische Mittel nimmt, d. h. wenn man alle Resultate addirt, und die Summe durch die Anzahl der addirten Posten dividirt. Denn auch ohne strengere Beweise begreift man, daß die Fehler der Resultate in Plus und Minus sich bei der Addition zum Theil einander aufheben. Daher ist es zweckmäßig, daß hier bei jeder Aufgabe, wo mehr als eine Auflösung Statt findet, immer das Mittel der erhaltenen Resultate berechnet, und zugleich angezeigt werde, um wieviel jedes einzelne Resultat von diesem Mittel im Plus oder Minus abweiche. In dieser Arbeit wird ein Aufmerksamer ein Mittel finden, die Genauigkeit seiner Messungen selbst zu beurtheilen.

§. 15. Aufgabe.

Die Fläche eines Vierecks, es sei ein Parallelogramm oder ganz unregelmäßig, auszumessen.

Auflösung. Um das unregelmäßige Viereck ABCD Fig. 148. auszumessen, ziehe man eine Diagonale AC, und aus den beiden andern Winkelspitzen, B und D, die Lothe BE und DF. Endlich multiplicire man die Diagonale AC mit der Summe der beiden Lothe BE + DF, so ist die Hälfte dieses Produktes, als Quadratmaaß gelesen, die gesuchte Fläche.

Beweis. Durch A und C ziehe man die Linien GH und IK winkelrecht auf AC, und durch B und D die Linien GI und HK parallel mit AC, so ist zuerst aus IV, 11. 14. klar, daß die Vierecke HI, AI, AK Rechtecke sind; ferner ergiebt sich aus V, 6., daß das Dreieck ABC gleich sei dem halben Rechteck AI, und ACD = $\frac{1}{2}$AK; folglich das Viereck ABCD gleich dem halben Rechteck HI.

Multiplicirt man nun die Diagonale AC (= HK) mit der Summe der Lothe BE + DF (= GA + AH = GH), so ist aus §. 11. klar, daß das Produkt die Fläche des Rechtecks HI ist. Da wir nun eben bewiesen haben, daß das Viereck ABCD die Hälfte dieser Fläche HI sei, so ist die Richtigkeit der Auflösung erwiesen.

Da man in einem Viereck zwei Diagonalen ziehen kann, so kann jedes Viereck auf solche Art doppelt ausgemessen werden. Diese doppelte Messung ist im Hauptheft auf ein und dasselbe unregelmäßige Viereck anzuwenden.

Im Uebungsheft messe man ein Rhomboid auf vier Arten aus, zweimal nach §. 13., zweimal nach diesem §.

§. 16. Aufgabe.

Die Fläche eines Vierecks, das zwei parallele Gegenseiten hat (ein sogenanntes Paralleltrapez), auszumessen.

Auflösung. In dem Vierecke ABCD Fig. 149. seien die Seiten AB und CD parallel. Zwischen diesen ziehe man irgendwo ein Loth CE und messe AB, CD und CE; dann

$\frac{(CD+AB)CE}{2}$

multiplicire man die Summe der parallelen Seiten AB + CD mit dem Lothe CE, und dividire das Produkt durch 2, so ist der Quotient, als Quadratmaaß gelesen, die Fläche des Viereckes ABCD.

Beweis. Man ziehe die Diagonalen BC, AD, verlängere CD nach F, und ziehe durch B die Linie BF parallel mit AD, so ist das Dreieck BDF dem Dreieck ABD gleich nach IV, 7., und Dreieck CDB = CAD (V, 7.). Legt man nun zu den ersten beiden Dreiecken die letzteren einzeln hinzu, so erhält man auf der einen Seite das Viereck ABCD, auf der andern das Dreieck CBF, welche also einander gleich sind.

Wenn man demnach die Summe von AB + CD (= DF + DC = CF) mit CE multiplicirt, und das Produkt mit 2 dividirt, so erhält man nach §. 14. die Fläche des Dreiecks CBF, welche, wie eben erwiesen worden, der Fläche des Vierecks ABCD gleich ist.

Zusatz.

Hiernach läßt sich die Aufgabe lösen: ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem gegebenen Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten gleich ist. Die aufmerksame Betrachtung der Fig. 149. wird leicht einen Weg finden lassen.

D. Ausmessung der geradlinigen Vielecke.

§. 17. Aufgabe.

Die Fläche eines geradlinigen Vielecks auszumessen.

Die Ausmessung beruht auf der Ausmessung der Dreiecke und Vierecke, und läßt in jedem Falle sehr viele Veränderungen zu. Denn es fällt in die Augen, daß man ein Vieleck auf gar mannigfaltige Art in Dreiecke und unregelmäßige Vierecke theilen, und diese einzeln nach dem Vorhergehenden ausmessen kann. Wir begnügen uns hier aber, nur zu einem Paare der einfachsten Arten Anleitung zu geben.

1. Ausmessung eines Vielecks durch Zerlegung in Dreiecke. Man theile die Figur durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke VIII, 4., so kann man entweder alle Dreiecke einzeln nach §. 14. ausmessen, oder man kann, was vortheilhafter ist, zwei Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Diagonale haben, als ein unregelmäßiges Viereck nach §. 15. ausmessen. Ist die Anzahl der Seiten des Vielecks gerade, so besteht es aus lauter solchen Vierecken, ist sie ungerade, so bleibt ein Dreieck überschüssig, das einzeln gemessen werden muß.

Im Hauptheft ist eine Figur von 5 oder 6 Seiten auf diese Art auszumessen.

2. Ausmessung eines Vieleckes durch Zerlegung in Paralleltrapeze. Wenn ein Vieleck durch Abscissen und Ordinaten VIII, 11. gezeichnet ist, so wird es durch die Ordinaten in Vierecke mit zwei parallelen Gegenseiten getheilt, nur daß an den äußersten Enden ein oder zwei, auch, wenn die Figur convexe Winkel hat, mehr einzelne Dreiecke bleiben. Dann kann man jedes dieser einzelnen Vierecke nach §. 16. ausmessen.

Auch von dieser Art der Ausmessung ist im Hauptheft ein Beispiel an einer fünfseitigen oder sechsseitigen Figur auszuführen.

Anmerkungen.

1 Bei der letzten Messungsart übereile man sich nicht, zu glauben, daß sich die Ausmessung zweier zusammenliegenden oder gar aller Vierecke, in welche die Figur getheilt ist, in eine einzige Rechnung zusammenziehen lasse.

2. Für das Uebungsheft zeichne man auf einem einzelnen Blatte eine beliebige Figur, von etwa 7 oder 8 Seiten. Eben diese Figur copire man auf anderen einzelnen Blättern sorgfältig vermittelst des Durchstechens (VIII, 12.). Auf jedem Blatte bleibe so viel Raum, daß oben eine Ueberschrift, und unten noch Rechnungen Platz finden. Auf jedem dieser Blätter messe man dann die Figur auf eine andere Art: denn es ist leicht einzusehen, daß jede der beiden oben beschriebenen Arten sehr viele Abänderungen zulassen, indem man bei Nr. 1. andere Diagonalen, bei Nr. 2. andere Abcissen und Ordinaten wählt. Die Blätter sind zu numeriren, und auf jedem ist in der Ueberschrift die Messungsart kurz anzuzeigen. Endlich müssen auf einem besonderen Blatte die Resultate aller Messungen zusammengestellt, und aus allen muß das Mittel genommen werden.

E. Ausmessung regulärer Figuren.

§. 18. Aufgabe.

Die Fläche einer regulären Figur auszumessen.

Es kann dies nach dem Bisherigen auf doppelte Art geschehen.

1. Man kann sie nach Art einer irregulären Figur (§. 17.) ausmessen.
2. Man kann sie mit Rücksicht auf X, 14. nach §. 14. als ein einziges Dreieck ausmessen. Im Hauptheft ist ein reguläres Fünf- oder Siebeneck auf beide Arten auszumessen. Bei der zweiten Ausmessungsart ist die Regel für die Rechnung aus der Sprache des Dreiecks in die Sprache der regulären Figur zu übersetzen, d. h. statt der Wörter Grundlinie und Höhe,

die sich nur auf Dreiecke, nicht aber auf Fünf- oder Siebenecke beziehen, müssen solche Wörter gewählt werden, wie man sie bei regulären Figuren gebraucht.

Anmerkung. Wir dürfen hier nicht unbemerkt lassen, daß die obigen beiden Auflösungen genau betrachtet, mehr mechanische als regelrechte wissenschaftliche Auflösungen sind. Soll nämlich eine Ausmessung von der wissenschaftlichen Seite tadelfrei sein, so müssen nicht mehr Linien gemessen werden, als gerade zum Zwecke nöthig sind. Dieses ist aber bei den beiden obigen Auflösungen nicht der Fall; denn aus dem 10 ~~neunten~~ Abschnitt ist bekannt, daß eine reguläre Figur völlig bestimmt ist, wenn außer der Seitenzahl entweder der große Halbmesser, oder der kleine, oder eine Seite der Figur gegeben ist, daß also in einer solchen Figur alles bestimmt ist, wenn außer der Anzahl der Seiten eine einzige der drei genannten Linien gegeben ist. Es muß also auch möglich sein, die Fläche der Figur zu berechnen, sobald man nur eine der genannten Linien gemessen hat. Folglich muß in beiden obigen Messungsarten immer etwas unmittelbar gemessen werden, was nicht gemessen, sondern berechnet werden sollte.

Erst in der Trigonometrie kann allgemein gezeigt werden, wie man, wenn außer der Seitenzahl eine der drei genannten Linien gegeben ist, alles übrige und besonders auch die Fläche finden könne. Bis dahin würde aber für irgend ein praktisches Bedürfniß eine der obigen Ausmessungen angewendet werden müssen.

Doch lassen sich auch diejenigen Vielecke, welche nach Abschn. IX. und X. geometrisch gezeichnet werden können, hier schon vollständig und regelrecht berechnen, wie in dem Anhange zu diesem Abschnitte gezeigt werden soll.

F. Verhältniß der Flächen ähnlicher Figuren.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke a) einen gleichen Winkel haben, oder wenn b) ein Dreieck einen Winkel hat, der einen Winkel des andern Dreiecks zu zwei rechten ergänzt; so verhalten sich die Flächen beider Dreiecke, wie die Rechtecke aus den Seiten, welche diese Winkel einschließen.

Anleitung zum Beweise. Wenn a) die Dreiecke ABC und DEF (Fig. 150.) so beschaffen sind, daß der Winkel bei A dem Winkel bei D gleich ist; so soll sich verhalten: $ABC : DEF = AB \times AC : DE \times DF$. Man mache $DL = AB$, DM

= AC und ziehe die Hülfslinie LF. Dann bestimme man zuerst nach §. 5. b. das Verhältniß der Dreiecke DLM und DLF; darauf das Verhältniß DLF : DFE und setze diese Verhältnisse zusammen (XI, 28.). Die Zusammensetzung ergiebt mit Berücksichtigung von §. 7. und der Congruenz der Dreiecke ABC und DLM die oben aufgestellte Proportion. Sind ferner b) die Dreiecke KGH und DEF gegeben; so daß KGH dem Nebenwinkel von EDF gleich ist; so mache man auch DL = GH und DK = KG. Es ist dann auch KGH : DFE = GH × GK : DE × DF. Man verlängere KG über G bis N; so daß GN = GK und ziehe HN. Dann ist Dreieck HGN = HGK (V, 7.) und Winkel HGN = EDF. Man beweist also, wie oben, leicht die Proportion HGN : EDF = HG × GN : DE . DF. In diese hat man nur Gleiches für Gleiches zu setzen, um b. zu beweisen.

§. 20. Lehrsatz.

Wenn man in zwei ähnlichen Dreiecken gleichliegende Linien zu Grundlinien annimmt, so verhalten sich die dazu gehörigen Höhen wie die Grundlinien.

Anleitung zum Beweise. Die Dreiecke ABC und abc Fig. 151. seien ähnlich, und die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Winkel gleich. Wenn man nun zu den gleichliegenden Grundlinien AB und ab die zugehörigen Höhen CD und cd zieht, so ist zu beweisen, daß CD : cd = AB : ab.

Zuerst ist aus XII, 7. leicht zu beweisen, daß die Dreiecke ACD, acd ähnlich sind. Daher läßt sich das Verhältniß CD : cd mit dem Verhältniß CA : ca vergleichen. Aber wegen der vorausgesetzten Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, abc läßt sich auch das Verhältniß AB : ab mit demselben Verhältniß AC : ac vergleichen; woraus die Richtigkeit des Satzes ohne Schwierigkeit folgt.

§. 21. Lehrsatz.

Die Flächen zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Beweis. Wenn die Dreiecke ABC, abc (Fig. 151.) wie im vorigen §. als ähnlich angenommen werden, so ist zu beweisen, daß

Dreieck ABC : abc = $AB^2 : ab^2$.

Nach §. 19. ist das Verhältniß der Dreiecke ABC und abc zusammengesetzt aus den Verhältnissen AB : ab und AC : ac.

Es ist aber das letztere Verhältniß dem ersteren gleich (XII, 4.), also wird das Verhältniß der Dreiecke erhalten; wenn man das Verhältniß AB : ab mit sich selber zusammensetzt. Darnach verhält sich Dreieck ABC : abc = $AB^2 : ab^2$.

Nach §. 9. ist aber das Verhältniß der Quadratzahlen von AB und ab mit dem Verhältnisse der Quadrate von AB und ab einerlei.

Der Beweis ist im Hefte nur mit der einzigen Abänderung zu wiederholen, daß statt AB und ab irgend zwei andere gleichliegende Linien als die Grundlinien angenommen werden.

§. 22. Lehrsatz.

Die Flächen jeder zwei ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Anleitung zum Beweise. In Taf. V, Fig. 120. 121. seien ABCDE und abcde ähnliche Figuren, und die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Winkel gleich. Es ist zu beweisen, daß

$$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

Man theile beide Figuren nach XII, 20. in ähnliche Dreiecke, so hat man

$$ABE : abe = AB^2 : ab^2 \text{ (§. 21.)},$$
$$BEC : bec = BC^2 : bc^2 = AB^2 : ab^2 \text{ (§. 21. und XII, 21.)},$$
$$ECD : ecd = DC^2 : dc^2 = AB^2 : ab^2 \text{ (§. 21. und XII, 21.)}.$$

Der übrige Theil des Beweises ist ein leichter nach XI, 8. hinzuzufügender Schluß.

Der ganze Beweis ist vollständig an einer veränderten Figur auszuführen.

§. 23. Zusatz.

Es verhalten sich also auch die Flächen zweier regulären Vielecke von gleich vielen Seiten wie die Quadrate ihrer Seiten.

Eben dieses Verhältniß läßt sich mit Berücksichtigung von XIII, 16. b. noch auf zwei andere Arten ausdrücken, welche hinzuzufügen sind.

G. Arithmetische Verwandlung aller geradlinigen Figuren in Quadrate.

§. 24. Aufgabe.

Jede beliebige geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man berechne nach den in diesem Abschnitte gegebenen Anweisungen ihren Flächeninhalt, und suche dann nach §. 10. die Seite eines Quadrats, welches denselben Flächeninhalt hat, so kann das Quadrat vermittelst eines genauen Maaßstabes gezeichnet werden.

Dieses ist an einer wirklich ausgemessenen Figur auszuführen.

Anmerkung. Ein Beispiel von einer geometrischen Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat ist schon oben (V, 22.) vorgekommen, und in dem Anhange zu dem gedachten Abschnitt ist gezeigt worden, daß es möglich sei, jede geradlinige Figur rein geometrisch in ein Quadrat zu verwandeln. Die hier gegebene Auflösung ist eine arithmetische Verwandlung, weil sie auf Rechnung beruht. Uebrigens ist klar, daß die arithmetischen Verwandlungen nicht nur in den meisten Fällen einfacher und leichter ausführbar sind, sondern auch auf eben so richtigen und streng erwiesenen Sätzen beruhen, wie die geometrischen, daß sie also diesen an wissenschaftlichem Werthe nicht nachstehen.

In dem folgenden Abschnitte aber wird sich zeigen, wie nöthig es sei, beide Arten von Verwandlungen scharf zu unterscheiden, weil aus Verwechselung derselben große Irrthümer entstehen können.

Erster Anhang zum vierzehnten Abschnitt.

Berechnung regelmäßiger Figuren, die sich geometrisch construiren lassen.

§. 1. Vorerinnerung.

In §. 18. des Abschn. ist gezeigt worden, wie die Fläche einer regelmäßigen Figur ausgemessen werden könne. In der Anmerkung zu demselben §. ist aber auch bemerkt worden, daß die dort gegebenen Ausmessungsarten nicht rein wissenschaftlich sind, sondern allezeit etwas bloß mechanisches enthalten. In diesem Anhange wollen wir noch zeigen, daß es möglich sei, regelmäßige Vielecke, die sich geometrisch zeichnen lassen, vollständig zu berechnen.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man den großen Halbmesser eines Polygons durch r, den kleinen durch ϱ, die Seite durch s, die Fläche durch F, und die Seitenanzahl durch n bezeichnet; so lassen sich die Größen s, ϱ, F auf folgende Art bestimmen:

a) $s = 2\sqrt{(r^2 - \varrho^2)}$,
b) $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - s^2)}$,
c) $F = \frac{1}{2} ns\varrho$.

Beweis.

a. Man betrachte das regelmäßige Fünfeck FGHIK (Taf. V, Fig. 107.), und sehe zuerst auf das Bestimmungsdreieck AFL, in welchem LF der große, LA der kleine Halbmesser und AF die halbe Seite ist; so sieht man leicht ein, 1) daß $AF = \sqrt{(LF^2 - AL^2)}$, woraus die Formel a) hervorgeht, wenn man für die Linien AF, LF, AL die im Lehrsatze festgesetzten Bezeichnungen annimmt.

b. Man sieht auf dieselbe Weise, daß $LA = \sqrt{(LF^2 - AF^2)}$; welches mit den Bezeichnungen des §. giebt:

$$\varrho = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)}$$

woraus b) durch eine leichte Veränderung der Formel folgt.

c. Die Richtigkeit von c) ergiebt sich aus XIV, 14.

Anmerkung. In den folgenden Sätzen werden die Buchstaben r, ϱ, s, F in der angeführten Bedeutung genommen, für n aber immer die bestimmte Seitenzahl gesetzt werden. Die Sätze selbst sollen aber darthun, wie man bei einem regelmäßigen Dreieck, Viereck, Sechseck, Zehneck, Fünfeck, Funfzehneck ϱ, s und F bestimmen kann, wenn r gegeben ist.

§. 3. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen (d. i. gleichseitigen) Dreiecke ist:

a) die Seite oder $s = r\sqrt{3}$,
b) der kleine Halbmesser oder $\varrho = \frac{1}{2} r$,
c) die Fläche oder $F = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$.

Beweis. Es sei das gleichschenklige Dreieck ABC (Taf. VI, Fig. 152.) in einen Kreis, dessen Mittelpunkt D ist, eingeschrieben. Man ziehe aus D durch eine Seite AB winkelrecht den Halbmesser DE; so ist durch diesen der Bogen AB in E, und die Sehne AB in F halbirt; mithin ist die Sehne AE als Sehne des sechsten Theiles der Peripherie dem Radius ED gleich; zieht man nun AD, so ist auch EA = AD. Hieraus läßt sich leicht die Congruenz der Dreiecke EFA und DFA her=

leiten, aus welcher folgt, daß $EF = FD$, also $FD = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} r$. Es ist aber FD der kleine Halbmesser (X, 1.). Dadurch ist die Richtigkeit von b) erwiesen.

Setzt man nun in die Formeln a) und c) §. 2. für ϱ den ebenaufgefundenen Werth, so findet man auch für diesen §. die Formeln a) und c) sehr leicht. Da nämlich $\varrho = \frac{1}{2} r$, so ist $s = 2 \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)} = 2 \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = r \sqrt{3}$, welches der Beweis für a) ist. Es ist nun $F = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} r \times r \sqrt{3} = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$.

§. 4. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen Vierecke (Quadrate) ist

a) die Seite oder $s = r \sqrt{2}$,

b) der kleine Halbmesser oder $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$,

c) die Fläche oder $F = 2 r^2$.

Beweis. Wenn man das Quadrat ABCD (Fig. 153.) in einen Kreis eingeschrieben hat, dessen Mittelpunkt E ist, und man zieht die beiden großen Halbmesser EA und EB; so ist nicht schwer zu zeigen, daß der Winkel AEB ein rechter ist, daß also $AB^2 = \sqrt{(AE^2 + EB^2)} = \sqrt{2AE^2} = AE \sqrt{2}$, welches unmittelbar a) giebt. Daraus folgt dann wieder b) und c) durch eine richtige Anwendung von §. 2. b. c.

Anmerkung. Daß bei einem Quadrate der kleine Halbmesser der halben Seite gleich ist, wie aus a) und b) hervorgeht, läßt sich auch sehr leicht geometrisch beweisen.

§. 5. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen Sechsecke ist

a) die Seite oder $s = r$,

b) der kleine Halbmesser oder $\varrho = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$,

c) die Fläche oder $F = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$.

Beweis. Die Richtigkeit von a) folgt unmittelbar aus IX, 7., daraus lassen sich aber b) und c) leicht herleiten, wenn man in §. 2. b. und c. die entsprechenden Werthe setzt.

Anmerkung. Die Fläche des Sechsecks ist also nach c) gerade das Doppelte der Fläche des Dreiecks, welches denselben großen Halbmesser hat (3. c.), was sich auch leicht geometrisch erweisen läßt.

§. 6. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen Zehnecke ist

a) $s = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$,
b) $\varrho = \frac{1}{4} r \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$,
c) $F = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

Beweis. In Taf. V, Fig. 109. 111. ist nach X, Anh. 3. $FB = AG$ die Seite des Zehnecks; es ist aber nach der dort angegebenen Construction $FE = ED = \sqrt{(DB^2 + BE^2)}$, mithin $FB = FE - BE = \sqrt{(DB^2 + BE^2)} - BE$. Da aber DB dem Radius und BE der Hälfte desselben gleich ist, so erhält man $s = \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} r^2)} - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} r \sqrt{5} - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1)$, welches a) ist, woraus sich dann ohne Schwierigkeit b) mit Anwendung von §. 2. b. herleiten läßt. Für c) hat man aus §. 2. c., wenn man $n = 10$ setzt, $F = 5 s \varrho = \frac{5}{8} r^2 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$, oder, wenn man $\sqrt{5} - 1$ ins Quadrat erhebt und hinter das zweite Wurzelzeichen bringt,

$F = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}$, oder
$F = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}$, oder endlich
$F = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$.

§. 7. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen Fünfeck ist

a) $s = \frac{1}{2} r \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$,
b) $\varrho = \frac{1}{4} r (\sqrt{5} + 1)$,
c) $F = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

Beweis. In Taf. V, Fig. 111. ist nach X. Anh. 3. DF die Seite des Fünfecks und FB die Seite des Zehnecks, DB der Halbmesser. Nun ist $DF = \sqrt{(DB^2 + FB^2)}$. Setzen wir nun r für DB nach §. 2. und für FB den in §. 6. a. gefundenen Werth; so erhalten wir

$$s = \sqrt{[r^2 + \tfrac{1}{4} r^2 (\sqrt{5} - 1)^2]},$$

woraus nach einigen algebraischen Veränderungen a) sich leicht ergiebt. Aus a) findet man b) mit Anwendung von §. 2. b., nämlich $\varrho =$

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{[4r^2 - \tfrac{1}{4} r^2 (10 - 2\sqrt{5})]} = \tfrac{1}{4} r \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})} = \tfrac{1}{4} r \sqrt{(5 + 2\sqrt{5} + 1)} = \tfrac{1}{4} r (\sqrt{5} + 1).$$

Um c) aus §. 2. c. herzuleiten, muß man in dem Ansatze

$$F = \tfrac{5}{16} r^2 (\sqrt{5} + 1) \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

statt $\sqrt{5} + 1$ das ihm gleiche $\sqrt{(6 + 2\sqrt{5})}$ setzen; so findet sich die Formel c) durch leichte algebraische Operationen.

§. 8. Lehrsatz.

In einem regelmäßigen Funfzehneck ist

a) $s = \frac{1}{2} r \sqrt{[7 - \sqrt{5} - \sqrt{6(5 - \sqrt{5})}]}$,

b) $\varrho = \frac{1}{4} r \sqrt{[9 + \sqrt{5} + \sqrt{6(5 - \sqrt{5})}]}$,

c) $F = \frac{15}{8} r^2 \sqrt{[7 + \sqrt{5} - \sqrt{6(5 + \sqrt{5})}]}$.

Beweis. In Taf. VI, Fig. 154. sei AC der sechste, AD der zehnte Theil der Kreislinie, so ist leicht nachzurechnen, daß CD der funfzehnte Theil der Peripherie ist. Folglich ist die Sehne CD die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Funfzehnecks. Man ziehe aus A den Durchmesser AB und aus C und D die Sehnen CA, CB, DA, DB, ferner aus dem Mittelpunkt M die Lothe ME auf AC, MF auf AD; so erkennt man leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke AEM und ACB, so wie der Dreiecke AFM und ADB, woraus sich $BC = 2ME$ und $BD = 2MF$ sehr leicht ergiebt.

Nun ist $CD = s$ die Seite des regelmäßigen Funfzehnecks, $AB = 2r$, AD die Seite des regelmäßigen Zehnecks, folglich (nach §. 6.) $\frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$, BC der doppelte kleine Halbmesser des regelmäßigen Zehnecks, also (nach §. 6.) $\frac{r}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$, $AC = r$, CB der doppelte kleine Halbmesser des regulären Sechsecks, also (nach §. 5.) $\frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Ferner ist ABCD ein Kreissehnenviereck und in diesem (nach XIII, 9.) $AB \,.\, DC + AD \,.\, BC = AC \,.\, BD$.

Setzt man die für die Seiten und Diagonalen dieses Vierecks so eben bestimmten Werthe ein; so findet man:

$$2rs + \frac{r^2}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{3}\frac{r^2}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \text{ und daraus}$$

$$s = \frac{r}{4}\Big[\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)\Big]$$

Erhebt man den in der eckigen Klammer enthaltenen Ausdruck ins Quadrat und zieht wieder die Wurzel heraus; so findet man den unter a) angegebenen Werth für s.

Der kleine Halbmesser ist nach §. 2.

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - s^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[4r^2 - \tfrac{7}{4}r^2 + \tfrac{1}{4}r^2\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}r^2\sqrt{6(5 - \sqrt{5})}]},$$

woraus der unter b) angeführte Werth hervorgeht.

Die Fläche ist nach §. 2.

$$F = \tfrac{1}{2}ns\varrho = \tfrac{15}{2}s\varrho =$$
$$\tfrac{15}{16}r^2\sqrt{[7-\sqrt{5}-\sqrt{(6(5-\sqrt{5}))}]\times[9+\sqrt{5}+\sqrt{(6(5-\sqrt{5}))}]}.$$

Multiplicirt man die unter dem Wurzelzeichen stehenden Faktoren mit einander, so erhält man

$$F = {}^{15}/_{16} r^2 \sqrt{[28 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{(6(5-\sqrt{5}))}} \\ \quad - 2\sqrt{5}\sqrt{(6(5-\sqrt{5}))]} \\ = {}^{15}/_{16} r^2 \sqrt{[28 + 4\sqrt{5} - 2(1+\sqrt{5}) \times} \\ \sqrt{(6(5-\sqrt{5}))]}.$$

Erhebt man in dem letzten Gliede der Klammer den Factor $1 + \sqrt{5}$ ins Quadrat, um ihn hinter das Wurzelzeichen zu bringen; nämlich $(1+\sqrt{5})^2 = (1 + 2\sqrt{5} + 5) = 2(3+\sqrt{5})$, so erhält man

$$F = {}^{15}/_{16} r^2 \sqrt{[28 + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{(12(3+\sqrt{5}) \times} \\ (5-\sqrt{5}))]} \\ = {}^{15}/_{16} r^2 \sqrt{[28 + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{(3 \times 2(5+\sqrt{5}))]}}$$

woraus der unter c) gegebene Ausdruck folgt.

§. 9. Aufgabe.

In einen Kreis, dessen Halbmesser $= r$, ist ein beliebiges Polygon eingezeichnet, und die Anzahl seiner Seiten $= n$ nebst dem kleinen Halbmesser $= \varrho$ gegeben. Man soll die Halbmesser, die Seite und die Fläche eines inneren Polygons von doppelt so vielen Seiten finden.

Auflösung. Für das Polygon von der doppelten Seitenanzahl heiße die Seite s', der kleine Halbmesser ϱ', die Fläche F'; so ist:

a) der große Halbmesser $= r$,
b) die Seite $s' = \sqrt{[2r(r - \varrho)]}$,
c) der kleine Halbmesser $\varrho' = \sqrt{[{}^1/_2 r(r + \varrho)]}$,
d) die Fläche $F' = nr\sqrt{(r^2 - \varrho^2)}$.

Beweis.

a. Das erste ist unmittelbar klar, weil alle inneren Polygone gleiche große Halbmesser $= r$ haben.

b. Um das Uebrige zu beweisen, sei Fig. 152. AB die Seite eines inneren Polygons von n Seiten. Man ziehe den Durchmesser CE winkelrecht durch AB, so ist der Bogen AEB in E halbirt, und wenn man die Sehne AE zieht, so ist diese die Seite eines Polygons von noch einmal so viel Seiten. Nach XIII, 2. ist

$FE : EA = AE : EC$, das ist
$r - \varrho : s' = s' : 2r$, also $(s')^2 = 2r(r - \varrho)$,
folglich $s' = \sqrt{[2r(r - \varrho)]}$.

c. Hieraus läßt sich ϱ' durch §. 2. b. herleiten.

$$\varrho' = {}^1/_2 \sqrt{(4r^2 - (s')^2)} \\ = {}^1/_2 \sqrt{(4r^2 - 2r^2 + 2r\varrho)} \\ = {}^1/_2 \sqrt{(2r^2 + 2r\varrho)} = {}^1/_2 \sqrt{[2r(r + \varrho)]} \\ = \sqrt{[{}^1/_2 r(r + \varrho)]}.$$

d. Endlich folgt aus §. 2. c., da die Seitenzahl des neuen Polygons $2n$ ist:

$$F' = ns'\varrho' = n\sqrt{[2r(r-\varrho)\ {}^1\!/_2 r(r+\varrho)]}$$
$$= nr\sqrt{(r^2-\varrho^2)}.$$

Anmerkung. Eine noch bequemere Berechnung von F' sehe man im Anh. zu XV, §. 5.

§. 10. Zusatz.

Da außer den in diesem Anhange berechneten Polygonen (wenigstens vermittelst der in diesem Lehrbuche vorgetragenen Sätze) nur noch diejenigen geometrisch gezeichnet werden können, welche aus jenen durch Verdoppelung der Seitenanzahl entstehen, so ist aus dem vorigen §. sichtbar, daß überhaupt Polygone, welche geometrisch construirt werden können, sich auch algebraisch berechnen lassen. Ob aber gleich die meisten Formeln, die wir entwickelt haben, und noch mehr diejenigen, welche man bei der Verdoppelung der Seitenanzahl erhalten würde, für eine Zahlenrechnung nicht sehr bequem sind, so ist es doch in wissenschaftlicher Hinsicht wichtig, deutlich einzusehen, daß ein Vieleck, welches geometrisch construirt werden kann, auch ohne wesentliche Schwierigkeit algebraisch berechnet werden könne. In der Trigonometrie wird eine bequemere Berechnung aller Polygone gezeigt werden.

Zweiter Anhang zum vierzehnten Abschnitt.

A. Von dem im Preußischen Staate üblichen Längenmaaß.

§. 1.

In dem Preußischen Staate ist die Länge einer Ruthe als das eigentliche Grundmaaß anzusehen, d. h. als ein solches, von welchem die Bestimmung aller übrigen ausgeht. Dessenungeachtet muß man den Duodecimal-Fuß das Hauptmaaß nennen, weil dieser von allen Künstlern und Handwerkern gebraucht wird, und überhaupt im gemeinen Leben am bekanntesten ist.

In der Maaß- und Gewichtordnung vom 16. Mai 1816 ist das vormals übliche Längenmaaß in allen seinen Abtheilungen unverändert beibehalten, und was früher Rheinländisches Maaß hieß, ist Preußisches genannt worden.

§. 2.

Es sind in diesem Maaße zwei Eintheilungen üblich, eine zehntheilige und eine zwölftheilige (Decimal- und Duodecimal-Maaß).

Im erstern wird die Länge der Ruthe in zehn Decimalfuße, der Decimalfuß in zehn Decimalzolle getheilt. Kleineren Theilen besondere Namen zu geben, ist nicht üblich, sondern man drückt sie nur durch Decimalbrüche des Zolles aus. Uebrigens wird jeder, der mit Decimalbrüchen schon bekannt ist, begreifen, daß man alle Namenveränderungen in diesem Maaße so gut als ohne Rechnung machen könne, und daß es überhaupt sehr leicht ist, in diesem Maaße jede Länge unter einer einzigen Benennung auszudrücken, da jede kleinere Benennung immer als ein zehntheiliger Bruch der größeren vorgestellt werden kann. Dieses Maaß ist gesetzlich bei allen Vermessungen im Gebrauch, ist aber dennoch, ungeachtet seiner Einfachheit und Bequemlichkeit nirgends in die Werkstätte der Künstler und Handwerker übergegangen.

Daß es nöthig sei, sich in den Namen-Veränderungen bei diesem Maaße zu üben, bedarf wohl keiner Erinnerung.

§. 3.

Im zwölftheiligen Maaße wird die Ruthe in zwölf Duodecimalfuße, und der Duodecimalfuß in zwölf Duodecimalzolle getheilt. Was aber den Duodecimalzoll betrifft, so wird diese am gewöhnlichsten in acht Achtelzolle, in Reißzeugen aber oft, ohne wesentlichen Nutzen, in zwölf Duodecimallinien getheilt. Für den Gebrauch des Mathematikers, und zu kleinen Messungen auf dem Papier, ist es am zweckmäßigsten ihn in zehn und hundert Theile zu theilen, und diese bloß als Decimalbrüche des Zolles zu bezeichnen. Daß die Namenveränderungen in diesem Maaße durch Multiplicationen und Divisionen mit 12 verrichtet werden müssen, ergiebt sich aus dem Obigen. Daher ist es zur Rechnung weit unbequemer, als das zehntheilige. Indessen kann man dieser Unbequemlichkeit in jedem Fall auf eine sehr einfache Art ausweichen, wenn man sich bei jeder Messung einer Länge nur einer einzigen Einheit dieses Maaßes als Haupteinheit bedient, und diese zehntheilig theilt. Dies ist bereits auch Abschn. XIV, §. 3. Anmk. ausführlich erwähnt, wo man das Nähere nachlesen muß.

§. 4.

Man bezeichnet in beiden Maaßen die Ruthen, Fuße und Zolle durch (°), ('), (''), mit Hinzufügung der Zeichen dc. oder ddc., je nachdem es Decimal- oder Duodecimal-Maaß sein soll. Z. B. 27° 8' 9,3'' dc., d. i. 27 Ruthen 8 Fuß $9^3/_{10}$ Zoll Decimalmaaß.

§. 5.

Im Allgemeinen bemerke man noch, a) daß es ganz zwecklos ist, bei der Benennung Ruthe, den Zusatz Decimal- oder Duodecimal- zu machen, weil es in beiden Maaßen dieselbe Länge ist; b) daß wenn von Fußen und Zollen ohne diese Zusätze die Rede ist, allezeit Duodecimal-Fuße und Zolle gemeint sind; c) daß man die halbe Ruthe oft einen Klafter nennt, die man aber nicht verwechseln muß mit dem bei dem Bergbau üblichen Lachter, dessen Länge fast in jedem Reviere des Bergbaues anders ist.

§. 6.

Wir wollen hier noch die bequemste Rechnungsform zeigen, nach welcher beide Maaße gegenseitig eins in das andere verwandelt werden können. Sie beruhet auf der Betrachtung, daß die Ruthe beiden Maaßen gemein ist. Man muß daher jede unter andern Benennungen gegebene Länge zuerst unter die einzige Benennung Ruthe bringen. Aus dieser Benennung ergeben sich hernach in jedem der beiden Maaße leicht die kleineren Benennungen.

§. 7.

Verwandlung des Decimalmaaßes in Duodecimalmaaß. Gesetzt man sollte

$$34^{0}\ 8'\ 0'',737 \text{ dc.}$$

in Duodecimalmaaß verwandeln, so ist die Rechnung folgende:

$$\frac{34{,}80737^{0}}{\dfrac{34^{0}\ 9',68844 \text{ ddc.}}{34^{0}\ 9'\ 8'',26128 \text{ ddc.}}}$$

Wie die erste Zeile aus der gegebenen entstanden sei, fällt in die Augen. In dieser Gestalt ist es nun völlig gleichgültig, ob man sie für Decimal- oder Duodecimalmaaß nehmen will. Hier nehmen wir sie für das letztere, weil eine Verwandlung in ddc. verlangt wird.

In der zweiten Zeile sind bloß die Decimalbrüche der ersten Zeile mit 12 multiplicirt worden, um sie in Duodecimal-Fuße zu verwandeln. Hätte man alles unter der einzigen Benennung Duodecimal-Fuß haben wollen; so hätte man auch die Ganzen mit 12 multipliciren müssen.

In der dritten Zeile sind wieder bloß die Decimalbrüche der Fuße mit 12 multiplicirt, und dadurch in Duodecimal-Zolle verwandelt worden.

Auf eben die Art könnte man die Brüche der Duodecimal-Zolle in Duodecimal-Linien verwandeln, wenn diese Benennung üblich wäre.

Hätte man alles nur unter eine einzige Benennung des Duodecimalmaaßes bringen wollen, so wäre die Rechnung folgende:

$$\frac{34^{0},80737}{\dfrac{417',68844 \text{ ddc.}}{5012'',26128 \text{ ddc.}}}$$

Anmerkung. Wenn man Ganze und zehntheilige Brüche hat, so ist es willkührlich, ob man die Zeichen (⁰), ('), ('') hinter die Ganzen, oder hinter die letzte Bruchziffer setzen will.

§. 8.

Verwandlung des Duodecimalmaaßes in Decimalmaaß. Gesetzt man sollte

$$83^{\circ}\ 11'\ 9'',66 \text{ ddc.}$$

in Decimalmaaß verwandeln, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{l} 83^{\circ}\ 11'\ 9'',66 \text{ ddc.} \\ \hline 83^{\circ}\ 11',805 \text{ ddc.} \\ \hline 83^{\circ},98375 \text{ dc.} \end{array}$$

In der zweiten Zeile der Rechnung sind bloß die 9,66 Zoll durch Division mit 12 in Decimalbrüche des Fußes verwandelt. In der dritten Zeile sind die 11,805 Fuße durch Division mit 12 in Decimalbrüche der Ruthe verwandelt. Unter dieser Benennung ist es wieder einerlei, ob man die Zahl als Duodecimal- oder Decimal-Maaß betrachten will. Hier thut man das letzte, und man sieht leicht, wie man sie ganz oder stückweise ohne Rechnung, in kleineren Benennungen ausdrücken kann; denn $83^{\circ},98375$ dc. $= 839',8375$ dc. $= 8398'',375$ dc. $= 83983''',75$ dc., oder auch unter verschiedenen Benennungen $83^{\circ}\ 9'\ 8''\ 3''',75$ dc.

§. 9.

Für jeden, der sich etwas angelegentlich mit Mathematik und Physik beschäftigt, ist einige Kenntniß des altfranzösischen oder Pariser Maaßes unentbehrlich, weil in vielen Büchern die Längen anderer Maaße immer nach diesem bestimmt sind.

In dem altfranzösischen Maaße ist die Toise (Klafter) die Grundeinheit; sie wird getheilt in sechs Fuß (Pied de Roi), der Fuß in zwölf Zoll, und der Zoll beständig in zwölf Linien; noch kleinere Theile werden als Decimalbrüche der Linie ausgedrückt. Man kann aber diese Linien gewissermaßen als die Haupteinheit dieses Maaßes betrachten, weil es bei der Bestimmung anderer Maaße nach diesem allgemein üblich ist, sich der einzigen Benennung Linie zu bedienen. So ist z. B. die Länge eines Preußischen Duodecimal-Fußes = 139,13 Linien Pariser Maaß u. dgl. m. Läßt man sich daher einen 15 bis 16 Zoll langen verjüngten Maaßstab von einem geschickten Künstler anfertigen, auf welchem zehn Pariser Linien (nicht ein Zoll) zur Haupteinheit genommen sind, so kann man sich leicht von einem solchen Maaßstabe jedes andere beliebige Maaß mit Hülfe solcher Bücher, welche genauere Bestimmungen enthalten, darstellen.

Als ein wichtiges Buch dieser Art ist die Schrift des Professor Dove Ueber Maaß und Messen (zweite Auflage, 1853, Berlin) zu betrachten.

B. Vom Flächenmaaße.

§. 10.

Nach §. 1. des Abschnitts ist jedes Quadrat, dessen Seite eine Einheit irgend eines Längenmaaßes ist, als eine gleichnamige Einheit des Flächenmaaßes zu betrachten, die man nur durch das vorgesetzte Wort Quadrat von der dazu gehörigen Längeneinheit unterscheidet. Es giebt daher gerade so viele Einheiten des Flächenmaaßes, als des Längenmaaßes. Auch nennt man eine Einheit des Flächenmaaßes zehntheilig oder zwölftheilig, je nachdem die Seite des Quadrats eine Einheit des zehntheiligen oder zwölftheiligen Längenmaaßes ist. Auch hier gilt die Regel, daß, wenn man die Wörter Decimal- oder Duodecimal- wegläßt, immer das letztere Maaß zu verstehen sei.

Zur Bezeichnung braucht man hier dieselben Zeichen, wie bei dem Längenmaaße, nämlich (°), (′), (″), nur daß man vor jedes ein kleines Quadrat (□) zeichnet. Noch einfacher ist es aber, hinter die ganze Zahl ein Quadrat (□) nebst dc. oder ddc. zu schreiben, z. B. 18□° 39□′ 127□″ ddc., oder 18° 39′ 127″□ ddc., d. i. 18 Quadrat-Ruthen, 39 Quadrat-Fuße, und 127 Quadrat-Zolle des Duodecimal-Maaßes.

Der Verfasser empfiehlt, die hier gegebene, auch sprachlich richtige Regel für die Benennung der Flächenmaaße streng zu beobachten, und das Wort Quadrat allezeit vor die ganze Benennung des Längenmaaßes zu setzen, also z. B. nicht zu sagen Decimal-Quadratfuß, sondern Quadrat-Decimalfuß. Zwar entsteht aus der ersten Benennungsart keine Unbequemlichkeit, wenn die Seite eines zu benennenden Quadrats eine ganze Einheit des Längenmaaßes ist; aber es kommt auch der Fall vor, daß man ein Quadrat benennen muß, dessen Seite eine Bruch-Einheit ist, und in diesem Fall giebt die erste Benennungsart allemal einen falschen Sinn. Will man z. B. ein Quadrat benennen, dessen Einheit ein Achtelzoll oder ein Zehntelzoll ist, so kann man bei den Benennungen Achtel-

Quadratzoll und Zehntel-Quadratzoll nicht füglich etwas anders denken, als $1/_8$ oder $1/_{10}$ von einem Quadratzoll. Sagt man dagegen Quadrat-Achtelzoll oder Quadrat-Zehntelzoll, so wird man leichter das richtige dabei denken, daß es nämlich Quadrate sind, deren Seiten $1/_8$ oder $1/_{10}$ Zoll sind, die folglich $1/_{64}$ oder $1/_{100}$ eines Quadratzolles betragen werden. Zwar wird die Benennungsart etwas schleppend, wenn der Beisatz Decimal oder Duodecimal hinzugefügt wird, z. B. ein Quadrat-Duodecimal-Achtelzoll; allein diese Weitläuftigkeit ist eigentlich nie nöthig. Wenn man nämlich von dergleichen Quadraten redet, deren Seite eine Brucheinheit ist, so setzt dieses allezeit einen Zusammenhang voraus, in welchem man bestimmt weiß, ob vom Decimal- oder Duodecimalmaaß die Rede sei.

§. 11.

Namen-Veränderungen im zehntheiligen Flächenmaaße. In diesem Maaße gehen auf jede Einheit einer höheren Ordnung 100 von der nächstniedrigeren (§. 2. des Abschnitts). Daher können jederzeit die niedrigeren Einheiten, als Decimalbrüche der höhern geschrieben werden. Von einer Quadrat-Ruthe sind daher die Quadrat-Fuße Hundertel, die Quadrat-Zolle Zehntausendtel, die Quadrat-Linien Milliontel; woraus man sieht, daß jede kleinere Benennung als Decimalbruch geschrieben immer zwei Stellen einnehmen muß. Z. B. $12^0\ 69'\ 0''\ 7''',\ 8\square = 12,\ 69\ 00\ 07\ 8$ Quadrat-Ruthen. Bei Beobachtung dieses Umstandes können also in dem Maaße alle Namen-Veränderungen so gut als ohne Rechnung gemacht werden, z. B. $13',\ 78\ 25\ 9\square = 0^0,\ 13\ 78\ 25\ 9\square = 1378'',\ 25\ 9\square = 137825''',\ 9\square$ oder auch $0^0\ 13'\ 87''\ 25''',\ 9\square$ dc.

§. 12.

Namen-Veränderungen im zwölftheiligen Flächenmaaße. In diesem Maaße gehen auf jede höhere Einheit $12 . 12 = 144$ Einheiten der nächst niedrigern Ordnung (§. 2. des Abschn.). Man muß daher höhere Einheiten in die nächst niedrigere Ordnung durch Multiplication mit 144, niedrigere in die nächst höhere durch Division mit 144 verwandeln. Statt dessen kann man zwar in jedem Fall zweimal hinter einander mit 12 multipliciren oder dividiren. Man kann auch dieser

Rechnung durch den schon oben (§. 3.) angegebenen Vortheil ausweichen, daß man sich an eine einzige Benennung hält, und diese im Längenmaaß zehntheilig eintheilt, woraus im Flächenmaaße selbst eine hunderttheilige entsteht. Die bequemste Form der Rechnung kann übrigens aus den folgenden §§. entnommen werden.

§. 13.

Reduction des zwölftheiligen Flächenmaaßes auf zehntheiliges. Auch hier erhält man wie §. 7. und 8. die bequemste Rechnungsform, wenn man zuerst alles unter die Benennung Quadrat-Ruthe bringt, welche beiden Maaßen gemein ist. Gesetzt, man sollte 34° 139′ 73″□ ddc. in Decimalmaaß verwandeln, so ist die Rechnung folgende:

34° 139′ 73″ □ ddc.

6,0833...

34° 139′,50694... □ ddc.

11, 625578...

34°,9687981... □ dc. oder ddc.

In der zweiten Zeile sind bloß 73″ durch 12 dividirt und der Quotient 6,0833 ist nochmals in der dritten Zeile mit 12 dividirt, und dadurch in Decimalbrüche des Quadrat-Fußes verwandelt worden.

Die 139,50694 Quadrat-Fuß der dritten Zeile sind ferner in der vierten Zeile durch 12, und in der fünften nochmals durch 12 dividirt, und dadurch zu Decimalbrüchen der Quadrat-Ruthe gemacht worden.

Unter dieser Benennung ist es nun gleichgültig, ob man die Zahl für ddc. oder dc. Maaß nehmen will. Hier fordert der Sinn der Frage das Letztere, und es ist aus §. 11. klar, daß man nun ohne wirkliche Rechnung die Zahl 34,9687981 unter jeder beliebigen Einheit des dc. Flächenmaaßes lesen kann.

§. 14.

Reduction des zehntheiligen Flächenmaaßes auf zwölftheiliges. Auch hier muß zuerst alles unter die Benennung Quadrat-Ruthe gebracht werden. Gesetzt man sollte 154° 0′, 97″, 08 □ dc. in Duodecimalmaaß verwandeln, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{c} 154°,009708 \ \square \ \text{dc.} \\ \hline 0,116496 \\ \hline 154° \ 1',397952 \ \square \ \text{ddc.} \\ \hline 4,775424 \\ \hline 154° \ 1', \ 57'',305088 \ \square \ \text{ddc.} \end{array}$$

In der zweiten Zeile ist bloß der Bruch 0,009708 durch 12 multiplicirt und das Produkt 0,116496 wieder mit 12 multiplicirt worden, wodurch der Bruch der ersten Zeile in 1,397952 ddc. Fuß verwandelt ist.

In der folgenden Zeile ist wieder bloß der Bruch 0,397952 mit 12 multiplicirt, und das Produkt 4,775424 abermals mit 12 multiplicirt worden, wodurch der Werth des in der dritten Zeile enthaltenen Bruchs in der letzten Zeile in 57,305088 □ ddc. Zoll verwandelt ist.

Es ist klar, daß man ferner den Bruch 0,305088 auch durch zweimalige Multiplication mit 12 in □ ddc. Linien, wenn es verlangt würde, verwandeln könnte.

Etwas weitläuftiger, doch in der Form einfacher ist die Rechnung, wenn man alles immer nur unter eine einzige Benennung des ddc. Maaßes bringt. Die Rechnung ist alsdann folgende:

$$\begin{array}{c} 154°,009708 \ \square \ \text{dc. Ruthen.} \\ \hline 1848,116496 \\ \hline 22177',397952 \ \square \ \text{ddc. Fuß.} \\ \hline 266128,775424 \\ \hline 3193545'',305088 \ \square \ \text{ddc. Zoll.} \end{array}$$

2,45□ 13
245 0
2,4500□′
245009□″
24500SO□‴
2° 4′ 5″

000
245
2450

Funfzehnter Abschnitt.

Ausmessung des Kreises.

§. 1. Lehrsatz.

Der Kreis kann als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

Beweis.

1. Man beschreibe nach X, 3. ein reguläres Vieleck z. B. ein Fünfeck in einen Kreis, so ist unmittelbar klar, daß die Fläche desselben kleiner ist, als die Kreisfläche. Dann halbire man die entstandenen Bogen des Kreises, und ziehe die Sehnen der halben Bogen, so hat man ein Zehneck im Kreise von demselben großen Halbmesser, und es ist unmittelbar klar, daß die Fläche desselben von der Kreisfläche viel weniger verschieden ist, als die Fläche des Fünfecks. Halbirte man ferner die Bogen des Zehnecks, so würde man auf dieselbe Art ein Zwanzigeck im Kreise erhalten, welches der Kreisfläche wieder näher kommen würde, als die Fläche des Zehnecks.

   Setzte man so die Verdopplung der Seitenanzahl fort, so weit als möglich, so würde man bald auf ein Vieleck kommen, welches das Auge nicht mehr vom Kreise unterscheiden könnte. Denkt man sich aber, daß die Verdopplung der Seitenanzahl ohne Ende fortgesetzt sei, so werden die Seiten des Vielecks unendlich klein, also in der That bloße Punkte sein, bei welchen gar kein Unterschied mehr zwischen gerade und krumm denkbar ist, d. h. es hörte zuletzt selbst für den Verstand aller Unterschied zwischen der Kreisfläche und der Polygonfläche auf.

   Man kann daher den Kreis als ein inneres reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

2. Man beschreibe nach X, 6. um denselben Kreis eine reguläre Figur, von ebensoviel Seiten, als das erste innere Vieleck hatte, in unserem Falle also ein Fünfeck, indem man durch alle Winkelspitzen des inneren Vielecks, nach VII, 2. Tangenten legt; so ist schon unmittelbar klar, daß die Fläche desselben größer ist als die Kreisfläche. Legt man ferner durch die Winkelspitzen des innern Zehnecks Tangenten, so erhält man ein äußeres Zehneck, dessen Fläche von der Kreisfläche viel weniger verschieden ist als die Fläche des Fünfecks.

   Setzt man diese Verdopplung der Seitenanzahl so weit fort, als es angeht, so kommt man wiederum bald auf ein

Polygon, welches das Auge nicht mehr vom Kreise unterscheiden kann. Denkt man sich aber auch hier die Arbeit ohne Ende fortgesetzt, so hört selbst in der Vorstellung aller Unterschied zwischen der Fläche des äußeren Vielecks und des Kreises auf. Denn auch hier werden die immerfort halbirten Bogen zuletzt unendlich klein, und können von den Seiten des äußeren Polygons nicht mehr unterschieden werden.

Man kann also den Kreis auch als ein äußeres Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten.

Denkt man sich nun die Verdopplung der Seitenanzahl ohne Ende fortgesetzt, so hört aller Unterschied zwischen der Fläche eines äußern Polygons, eines inneren, und des Kreises auf, und man kann den Kreis geradehin als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

Anmerkungen.

1. Dieser Beweis ist in dem Haupthefte mit Beifügung einer Figur zu wiederholen. Zu dem ersten inneren und äußeren Vieleck kann man auch statt des Fünfecks ein Viereck oder Sechseck wählen. Es wird aber genug sein, wenn in der Figur die Seitenanzahl nur einmal oder zweimal verdoppelt wird, weil dann der Erfolg einer weitern Theilung leicht zu übersehen ist.
2. Obgleich dieser Beweis an der Richtigkeit des Satzes keinen Zweifel übrig läßt, so hat er doch nicht ganz die regelmäßige strenge Form, besonders weil der Begriff des Unendlichkleinen dabei gebraucht wird, dem man in der Elementar-Mathematik möglichst ausweicht, und weil die Behauptung, daß bei einem unendlich kleinen Bogen, Sehne und Tangente mit dem Bogen ununterscheidbar zusammenfallen, bloß aus der unmittelbaren Anschauung abgeleitet wird. Im Anhange zu diesem Abschnitte werden wir aber den Beweis in aller Strenge geben.

Anmerkung.

Da im Folgenden auch die Peripherie des Kreises als Perimeter eines Polygons von unendlich vielen Seiten betrachtet wird, in dem eben gegebenen Beweise aber nur hauptsächlich die Flächen der ein- und umgeschriebenen Polygone als der Kreisfläche sich unendlich annähernd betrachtet werden, so wird es vielleicht von Vortheil sein, dem §. 1. als Vorbereitung die Sätze §. 4. und §. 6. des Anhangs zum Abschn. XVI, vorauszuschicken, alsdann kann man alle diejenigen Behauptungen, welche im Beweise des §. 1. nur für die Flächen ausgesprochen sind, ebenmäßig auf die Perimeter ausdehnen. Siehe auch Anm. zu §. 5.

§. 2. Zusatz.

Alle diejenigen Sätze im Vorhergehenden, welche von allen regulären Figuren ohne Rücksicht auf ihre Seiten gelten, können mit völligem Rechte auch auf den Kreis angewendet werden.

Bei diesem §. soll

1. versucht werden, die in der Erklärung einer regulären Figur (X, 1.) enthaltenen Nebenbegriffe, so weit es angeht, auf den Kreis anzuwenden, d. h. es soll gezeigt werden, welche Abänderungen die Begriffe des großen Halbmessers, des kleinen Halbmessers, des Centriwinkels und des Polygonwinkels erleiden, wenn man sie auf den Kreis, als ein unendlichvielseitiges Vieleck anwendet.
2. Es sollen aus Abschn. X., XII. und ~~XIII.~~ XIV. diejenigen Sätze aufgesucht werden, die sich auf den Kreis anwenden lassen. Sie betreffen a) die Verwandlung eines Polygons oder eines Ausschnittes desselben in ein Dreieck; b) das Verhältniß der Perimeter; c) das Verhältniß der Flächen zweier Polygone von gleich vielen Seiten. Es ist genug, hier, bei jedem dieser drei Punkte nur die Sätze kurz anzuzeigen, die sich auf den Kreis anwenden lassen, denn die Anwendung selbst kommt in eigenen Sätzen vor.

§. 3. Lehrsatz.

Die Peripherieen zweier Kreise verhalten sich gegen einander: a) wie die Halbmesser, b) wie die Durchmesser.

Hier ist zum Beweise von a) der schon im vorigen §. erwähnte Satz wörtlich auszusprechen, und auf den Kreis anzuwenden. Die Richtigkeit von b) folgt aus a) in Verbindung mit XI, 10.

§. 4. Zusatz.

Das Verhältniß a) des Durchmessers zu der Peripherie ist also in allen Kreisen dasselbe, und also auch b) das Verhältniß des Durchmessers zur halben Kreislinie.

Wie a) aus §. 3. folgt, sieht man leicht, wenn man zwei beliebige Kreise zeichnet, auf diese den vorigen §., und auf die so erhaltenen Proportionen XI, 20. anwendet. Aus XI, 11. folgt b.

§. 5. Erklärung.

Wenn man den Durchmesser eines Kreises, er sei groß oder klein, = 1 setzt, so ist aus dem vorigen §. klar, daß die Länge der Peripherie durch eine einzige und für alle Kreise gültige Zahl ausgedrückt werden wird. Es ist in mathematischen Schriften allgemein üblich, diese Zahl durch den griechischen Buchstaben π (den Anfangsbuchstaben des Wortes Peripherie) anzudeuten, und es ist klar, daß eben diese Zahl die Länge der halben Kreislinie darstellen wird, wenn man den Halbmesser = 1 setzt.

Der wahre Werth von π kann nur durch eine sehr mühsame und weitläuftige Rechnung gefunden werden, wovon in dem Anhange zu diesem Abschnitte nähere Nachricht gegeben werden soll. Er ist irrational, und kann daher durch keine endliche Anzahl von Bruchziffern ausgedrückt werden. Am Ende des sechzehnten und im Anfange des siebzehnten Jahrhunderts beschäftigten sich mehrere Mathematiker mit einer genauen Berechnung dieses Verhältnisses. Das Wichtigste leistete Ludolf van Ceulen (1600). Er berechnete den Werth von π in 32 Bruchstellen, welches weit mehr ist, als man je für die Anwendung brauchen kann. Es wird sogar mehr als hinreichend sein, wenn wir hier von dem Ergebniß seiner Rechnung nur die ersten 15 Bruchziffern geben. Es ist nämlich

$$\pi = 3,\ 141\ 592\ 653\ 589\ 793 \ldots\ldots.$$

Das Andenken des Berechners zu ehren, nennt man diese Zahl die Ludolfsche. Die Gründe der Rechnung sehe man im Anhange. In neuester Zeit hat man 333 Bruchstellen dieser Zahl berechnet.

Jeder, der sich dessen erinnert, was in der Arithmetik über das Abkürzen der Decimalbrüche vorgetragen ist, kann über den Gebrauch der Ludolfschen Zahl nicht in Ungewißheit sein. Der Fall ist selten, daß man auch nur die sechs oder sieben ersten Bruchziffern in Rechnung zu bringen hat. In den meisten Fällen reicht man mit vier, mit drei, ja wohl gar mit zwei Ziffern aus. So oft daher diese Zahl in Rechnungen vor-kommt, muß man erst überlegen, wieviel Ziffern man aufzunehmen habe. Es kommt dabei auf zwei Umstände an. Erstens auf die Größe des Kreises, den man berechnen will, und auf die Ueberlegung, ob der hundertste, oder der tausendste, oder zehntausendste ꝛc. Theil des Durchmessers eine Größe sei, die noch in Betrachtung kommen kann. Zweitens auf den Zweck der Rechnung, und auf den Grad von Genauigkeit, den man erreichen soll. Wer diese Ueberlegungen vorher anzustellen nicht versäumt, der wird in den meisten Fällen die Ludolfsche Zahl auf wenig Bruchziffern abkürzen können.

Bei diesem §. sind folgende Arbeiten zu machen:

a. Da die Ludolfsche Zahl bei unzähligen Rechnungen gebraucht wird, so muß jeder dieselbe, doch nur bis zur sechsten oder siebenten Bruchziffer, auswendig lernen.

b. Damit der Sinn der Zahl recht deutlich gefaßt werde, soll nach einem guten Maaßstabe ein Kreis mit dem Durchmesser $= 1$, und dann nach demselben Maaßstabe eine gerade Linie gezeichnet werden, welche möglichst genau die Länge der Peripherie hat.

c. Die Rechnungen, welche mit der Ludolfschen Zahl gemacht werden müssen, sind größtentheils Multiplicationen und Divisionen. Beide kann man sich sehr durch eine kleine ein für alle Mal auszuführende Vorarbeit erleichtern.

Und zwar die Multiplication dadurch, daß man sich eine Multiplicationstafel berechnet, d. h. eine Tabelle, welche das Einfache, Doppelte u. s. f. bis zum Neunfachen der Zahl enthält, was, wie leicht einzusehen, durch bloße Addition geschieht.

d. Den Divisionen aber kann man gänzlich ausweichen, und sie in bloße Multiplicationen verwandeln, wenn man ein für alle Mal den umgekehrten Werth der Ludolfschen Zahl $\frac{1}{\pi}$ berechnet. Wie 1 durch eine so vielziffrige Zahl zu dividiren sei (denn bei dieser Rechnung ist es zweckmäßig alle 15 Bruchstellen in Rechnung zu ziehen), wird jeder wissen, der mit Decimalstellen zu rechnen, gründlich gelernt hat. Von dem Quotienten muß dann, wie bei c) von der Ludolfschen Zahl selbst, eine Multiplicationstafel berechnet werden.

e. Auch diese Zahl muß bis zur sechsten oder siebenten Bruchstelle auswendig gelernt werden.

f. Ferner soll noch bestimmt der eigentliche Sinn dieses umgekehrten Werthes angegeben werden. Hiezu wird folgende Betrachtung Anleitung geben. In dem Verhältniß $1 : \pi$ zeigt das erste Glied den Durchmesser eines Kreises, und das zweite die Peripherie desselben an. Nun ist aber oben (XI, 10 und 11.) gezeigt worden, daß jedes Verhältniß, also auch das obige, auf unendlich viele Arten durch Zahlen ausgedrückt werden könne, wenn man beide Glieder durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt, oder dividirt. Wie man aber auch die Zahlenwerthe beider Glieder dadurch verändern mag, so bleibt doch das Verhältniß immer dasselbe. Es wird also das erste Glied den Durchmesser, und das zweite die Peripherie eines Kreises vorstellen. Nun dividire man beide Glieder des Verhältnisses $1 : \pi$ durch π, so verwandelt es sich in $\frac{1}{\pi} : 1$. Und wenn man das Gesagte auf diesen Ausdruck des Verhältnisses anwendet, so wird es leicht sein, den Sinn von $\frac{1}{\pi}$ sehr bestimmt anzugeben.

g. Endlich soll noch ein Kreis gezeichnet werden, dessen ganze Peripherie möglichst genau 2 Zoll lang ist.

Anmerkung. Schon im Alterthum versuchte der berühmte Griechische Mathematiker Archimedes, welcher in Syrakus lebte, und sein Leben bei der Eroberung dieser Stadt durch Marcellus (212 v. Chr.) verlor, das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie genau zu bestimmen. Und es ist unbezweifelt, daß dieser scharfsinnige Kopf uns dieses Verhältniß eben so genau als Ludolf berechnet haben würde, wenn ihm die sinnreiche Einrichtung unserer Ziffern bekannt gewesen wäre. Aber die Griechischen und Römischen Zahlzeichen waren in verwickelten Rechnungen äußerst unbequem, und manche Rechnungen auszuführen, war bei dem Gebrauch derselben so gut als unmöglich. Indessen zeigte er doch mit vielem Scharfsinn, daß die Peripherie eines Kreises etwas kleiner als $3^1/_7$, aber etwas größer als $3^{10}/_{71}$ des Durchmessers sei. Nach der ersten dieser Zahlen verhält sich also der Durchmesser zur Peripherie beinahe wie $1 : 3^1/_7$, d. i. in Decimalbrüchen wie $1 : 3{,}1428$, welches also nur beinahe um 0,0012 größer ist, als die Ludolfsche Zahl. Eben dieses Verhältniß läßt sich auch ganz bequem durch zwei ganze Zahlen $7 : 22$ ausdrücken, und man kann dieses Archimedische Verhältniß auch jetzt noch da, wo nicht die äußerste Genauigkeit erfordert wird, gebrauchen. Es ist sogar noch etwas genauer, als das in allen Lehrbüchern angegebene $100 : 314 = 1 : 3{,}14$, welches fast um 0,0016 zu klein ist.

Nach Ludolf sind durch Erfindung der höhern Analysis viel kürzere Wege zur Berechnung dieser Zahl entdeckt, und von mehreren Mathematikern benutzt worden, den Werth von π viel weiter, sogar bis zur 333ten Bruchstelle zu berechnen. Für die Anwendung ist hiedurch nichts gewonnen, aber die

Uebereinstimmung aller dieser Rechnungen in den 32 ersten Ziffern mit der Ludolfschen Zahl leistet die vollständigste Bürgschaft, daß sich kein Rechnungsfehler in diese eingeschlichen habe. Man kann daher die Ludolfsche Zahl mit der vollkommensten Sicherheit zur Prüfung jedes angeblichen Verhältnisses des Durchmessers zu der Peripherie gebrauchen, und genau bestimmen, wie stark dasselbe von der Wahrheit abweiche.

Ein Mathematiker Namens Metius gab im Anfang des 17ten Jahrhunderts das Verhältniß 113 : 355 als sehr genau an. Und in der That kommt es der Wahrheit sehr nahe. Denn dividirt man beide Glieder durch 113, so erhält man $1 : {}^{355}/_{113}$. Verwandelt man nun den Bruch ${}^{355}/_{113}$ in zehntheilige Brüche, so weicht der Quotient von der Ludolfschen Zahl erst in der 7ten Bruchstelle ab, was allerdings eine große Genauigkeit ist. Allein es rechnet sich mit der Ludolfschen Zahl viel bequemer als mit den Zahlen 113 und 355.

Anmerkung.

Da hier das wichtige Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie nur historisch angegeben ist, im folgenden aber alle Rechnungen sich auf die Kenntniß dieses Verhältnisses gründen, so möchte es (besonders wenn die Schüler in der Arithmetik schon etwas vorgerückt sind) von Nutzen sein, diesem Abschnitte als Einleitung Sätze über die Berechnung der Polygone vorauszuschicken, dazu genügen für diesen Zweck aus dem Anhange zum XV. Abschnitte §. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7., welche vielleicht darin eine zweckmäßige Abänderung finden, daß die Perimeter der Polygone (nicht die Flächen) als Haupt-Gegenstand der Rechnung genommen werden. Dann läßt sich in einigen Stunden den Schülern eine Uebersicht geben von der Möglichkeit, die Zahl π zu berechnen, und man kann sie hier bei §. 5. anleiten, diese Rechnung selbst auf einige Decimalstellen zu führen.

§. 6. Aufgabe.

Es ist der Halbmesser oder Durchmesser eines Kreises nach einem beliebigen Maaße gegeben, man soll die Länge der Peripherie in demselben Maaße finden.

Anleitung zur Auflösung. Die Auflösung beruht auf der Unveränderlichkeit und Allgemeingültigkeit des Verhältnisses

$1:\pi$ für alle Kreise (§. 4.). Ist daher der Halbmesser eines Kreises $= r$, oder der Durchmesser $= 2r$ gegeben, und nennt man die gesuchte Peripherie p, so sieht man leicht, wie eine Proportion aufgesetzt werden könne, in welcher $\frac{1}{2}p$ oder p das vierte Glied, und die drei ersten Glieder bekannt sind. Es soll nun

a. die Regel der Rechnung durch eine Formel ausgedrückt, und zugleich in Worten ausgesprochen werden.

b. ein beliebiger Kreis gezeichnet, sein Halbmesser oder Durchmesser nach einem zehntheiligen Maaßstabe gemessen, und die Peripherie in vier Bruchziffern berechnet, endlich

c. eine gerade Linie von der Länge der halben oder ganzen Peripherie nach eben dem Maaßstabe gezeichnet werden.

Anmerkungen.

1. Bei b) wird es nützlich sein, die Multiplications-Tafel §. 5. c. anzuwenden.
2. Die Verwandlung einer krummen Linie in eine gerade, wie hier bei c) nennt man die Rectification derselben.

§. 7. Aufgabe.

Es ist die Peripherie eines Kreises in einem beliebigen Längenmaaße gegeben; man soll die Größe seines Halbmessers oder Durchmessers finden.

Auflösung. Obgleich die Auflösung nicht die geringste Schwierigkeit hat, so wollen wir sie dennoch zwar kurz, aber vollständig geben, um bei dieser Gelegenheit den Gebrauch der umgekehrten Ludolfschen Zahl §. 5. d. e. f. zu zeigen.

Wenn die Buchstaben r und p den im vorigen §. erklärten Sinn behalten, so hat man $\pi:1 = p:2r$, also $2r = \frac{p}{\pi}$, d. h. die gegebene Peripherie muß durch die Ludolfsche Zahl dividirt werden, um den Durchmesser des Kreises zu finden, woraus sich dann der Halbmesser durch Division mit 2 ergiebt.

Da aber die Division mit π lästig ist, besonders wenn viele Bruchziffern der Ludolfschen Zahl in Rechnung kommen sollen, um den Durchmesser in eben so vielen Bruchziffern zu finden, so kann man dieser Division ganz ausweichen, indem man mit dem umgekehrten Werthe der Ludolfschen Zahl multiplicirt. Denn man erhält offenbar einerlei, ob man p durch π dividirt, $(\frac{p}{\pi})$, oder ob man p mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt $(p \times \frac{1}{\pi} = \frac{p}{\pi})$.

Es wird daher keine Schwierigkeit haben, hier noch folgende zwei Arbeiten auszuführen.

a. Es soll ein Kreis so gezeichnet werden, daß seine Peripherie gerade die Länge von 3 Zollen erhält. 1,5·0,3183 = 0,48

b. Der Aequator unserer Erdkugel wird, wie jeder Kreis, in 360 Grade getheilt. Der 15te Theil eines solchen Grades heißt 5400. eine geographische Meile. Es soll nun berechnet werden, erstlich, wieviel geographische Meilen der ganze Umfang des Aequators enthält, zweitens, wie groß der Durchmesser und Halbmesser desselben sei.

Bei beiden Aufgaben ist zu überlegen, wieviel Bruchziffern von $\frac{1}{\pi}$ in Rechnung zu ziehen sind, wenn man bei a) um kein Tausendtel des Zolles, und bei b) um kein Hundertel einer geographischen Meile fehlen will.

§. 8. Lehrsatz.

Die Fläche eines Kreises ist so groß wie die Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie der rectificirten Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist.

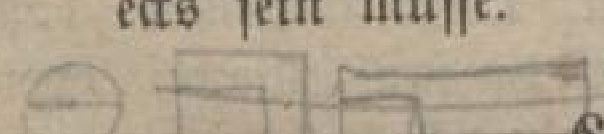
Der Beweis beruht auf X, 14. verbunden mit §. 1. dieses Abschn. Es soll nun

a. dieser Beweis wirklich ausgeführt werden;

b. ein beliebiger gezeichneter Kreis vermittelst dieses Lehrsatzes in ein Dreieck verwandelt,

c. eben dieser Kreis in ein Rechteck verwandelt werden, so daß seine Höhe dem Halbmesser gleich ist (V, 6. 11.).

d. Endlich soll wörtlich ausgesprochen werden, wie groß die Grundlinie und Höhe eines solchen dem Kreise gleichen Rechtecks sein müsse.



§. 9. Lehrsatz.

In jedem Kreise verhält sich das Quadrat des Halbmessers zu der Fläche des Kreises wie der Durchmesser zur ganzen, oder der Halbmesser zur halben Peripherie, also auch wie $1 : \pi$.

a. Zum Beweise zeichne man 1) einen Kreis, 2) das Quadrat seines Halbmessers, 3) nach §. 8. c. d. ein dem Kreise gleiches Rechteck, und wende auf die beiden letzten Figuren den Satz XIV, 4. an.

b. Damit der Sinn und Gebrauch der Zahl π recht geläufig werde, soll hier noch der dreifache Sinn, den man dieser Zahl beilegen kann, bestimmt ausgesprochen werden. Nimmt man nämlich in dem Verhältniß $1 : \pi$ das erste Glied 1 für eine Linie, so kann es 1) den Durchmesser, 2) den Halbmesser bedeuten. Man kann 1 aber auch 3) als eine Flächeneinheit, nämlich als das Quadrat des Halbmessers 1 betrachten. Was ist in jedem dieser drei Fälle der Sinn von π?

c. Wenn also der Halbmesser eines Kreises $= 1$ gesetzt wird, welche Zahl drückt die Fläche desselben aus, und was ist die Einheit dieser Zahl, oder — was dasselbe sagt — die Benennung, welche man dieser Zahl geben muß?

§. 10. Aufgabe.

Es ist der Halbmesser eines Kreises in einem beliebigen Längenmaaße gegeben, man soll die Fläche desselben in dem zugehörigen Flächenmaaße (XIV, 1.) finden.

Auflösung. Der Halbmesser sei r, so ist sein Quadrat r^2. Die gesuchte Kreisfläche heiße f, so ist nach §. 9. $1 : \pi = r^2 : f$; also $f = \pi r^2$.

Diese Regel ist

1. in Worten auszusprechen;
2. ist ein beliebiger Kreis zu zeichnen, sein Halbmesser zu messen, und dann die Fläche des Kreises wirklich zu berechnen.
3. Der Ausdruck einer Regel durch eine Buchstabenformel gewährt den wichtigen Vortheil, daß man die Abänderungen, die in der Form und Ordnung der Rechnung Statt finden, leicht übersehen kann. Schreibt man z. B. die obige Formel πr^2 so: πrr, und erinnert sich aus der Arithmetik, daß bei einem Produkt von mehreren Faktoren die Ordnung, in der man sie multiplicirt, willkührlich sei, so kann man auch die Berechnung der Kreisfläche entweder nach Nr. 1. so anstellen, daß man zuerst r^2 berechnet, und dieses mit π multiplicirt; oder man kann zuerst π und r multipliciren, welches πr giebt, und dieses nochmals mit r, welches die Fläche πrr geben wird. Diese Ordnung der Rechnung ist in manchen Fällen bequem, und es soll daher angegeben werden, was man eigentlich durch die erste Multiplication πr findet. Die Antwort ergiebt sich aus §. 6. Aus dieser Antwort ergiebt sich, unter welchen Umständen die letzte Rechnungsordnung vorzuziehen sei.

§. 11. Aufgabe.

Es ist die Fläche eines Kreises in einem beliebigen Flächenmaaße gegeben, man soll den Halbmesser des Kreises finden.

Anleitung zur Auflösung. Es fällt in die Augen, daß die Glieder der Proportion, wodurch die vorige Aufgabe aufgelöst worden, nur anders gestellt werden müssen, um die gegenwärtige Aufgabe zu lösen.

Es soll ferner ein Kreis gezeichnet werden, so daß seine Fläche gerade 3 Quadrat-Zoll Inhalt habe.

§. 12. Lehrsatz.

Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

Es wird hinreichend sein, hier den Beweis aus §. 1. verbunden mit XIII, 15. abzuleiten.

Einen strengeren Beweis sehe man im Anhange zu diesem Abschnitte §. 11.

§. 13. Zusatz.

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich gegen einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Anmerkung. Als eine unmittelbare Folgerung aus §. 9. fände dieser am schicklichsten seinen Platz, als Zusatz zu jenem §.

§. 14. Aufgabe.

Einen Kreis, dessen Halbmesser gegeben ist, in ein Quadrat zu verwandeln.

Anleitung zur Auflösung. Wenn man nach §. 10. die Fläche des Kreises berechnet hat, so kann die Verwandlung vollkommen wie oben XIV, 23. bewerkstelligt werden.

Ein beliebiger gezeichneter Kreis ist auf diese Art wirklich in ein Quadrat zu verwandeln.

§. 15, Anmerkung.

Die Aufgabe des vorigen Satzes ist die berüchtigte Aufgabe von der Quadratur des Kreises, und man sieht, daß auf diesem arithmetischen Wege mehr geleistet werden kann, als je zur Anwendung erfoderlich sein wird. Denn da man die Ludolfsche Zahl in einer so übergroßen Menge von Bruchstellen berechnet hat, so ist klar, daß man die Seite eines Quadrates erfoderlichen Falles ungefähr in eben so vielen Ziffern fehlerfrei würde schaffen können.

In Ansehung der arithmetischen Quadratur des Kreises leistet die Ludolfsche Zahl alles, was nur verlangt werden kann. Von dieser Seite ist also nichts zu erfinden übrig.

Die rein-geometrische Quadratur ist ein nicht aufgelöstes und, wie die höhere Mathematik lehrt, auch nicht aufzulösendes Problem. Nichts destoweniger beschäftigen sich noch fortdauernd Manche, die nicht tiefer in die Mathematik einzudringen vermochten, mit der Auflösung desselben, ohne zu erwägen, daß, wenn auch jemand eine solche Quadratur erfinden könnte, dennoch für die Anwendung gar nichts gewonnen sein würde, und daß wir fortfahren müßten, alle Kreisaufgaben gerade so, wie bisher, zu behandeln.

Um den Begriff einer rein geometrischen Quadratur recht anschaulich zu machen, fügen wir nachfolgenden Satz hinzu.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn man im Umfange eines Halbkreises einen Punkt beliebig wählt, von diesem zwei Sehnen nach den Endpunkten des Durchmessers zieht, und über diesen Sehnen zwei außerhalb des ersten Kreises liegende halbe Kreislinien beschreibt, so sind die beiden sichel- oder mondförmigen Flächen, die zwischen den Peripherien dieser Halbkreise und dem ersten Kreise liegen, dem Dreieck gleich, welches der Durchmesser mit den beiden Sehnen einschließt.

Beweis: In Fig. 155. ist über AB ein Halbkreis errichtet, und in seinem Umfange der Punkt D beliebig gewählt. Von D sind die Sehnen DA und DB gezogen, und über jeder ein Halbkreis, AED und BGD, beschrieben. Es ist nun zu beweisen, daß die beiden sichelförmigen Flächen AEDFA und BGDHB zusammengenommen dem Dreieck ADB gleich sind.

Der Winkel ADB ist ein rechter (V, 18.), daher $AB^2 = AD^2 + DB^2$ (V, 14.). Sind nun C, I, K, die Mittelpunkte der Halbkreise, so ist $AB = 2AC$, also $AB^2 = 4AC^2$; $AD^2 = 4AI^2$; $DB^2 = 4BK^2$. Folglich $4AC^2 = 4AI^2 + 4BK^2$. Multiplicirt man auf beiden Seiten durch $\frac{1}{8}\pi$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} AC^2\pi = \tfrac{1}{2} AI^2\pi + \tfrac{1}{2} BK^2\pi.$$

Nach §. 10. aber, ist 1) $\frac{1}{2}AC^2\pi$ = Halbkreis ADB, 2) $\frac{1}{2}AI^2\pi$ = Halbkreis AED, 3) $\frac{1}{2}BK^2\pi$ = Halbkreis BGD. Man sieht also, daß der zuerst genannte Halbkreis gerade so groß ist wie die beiden letzten zusammengenommen.

Nimmt man nun vom Halbkreise ADB die beiden Abschnitte AFDIA und BHDKB weg, so bleibt das Dreieck ADB übrig. Nimmt man aber eben diese Abschnitte von den beiden kleineren Halbkreisen ab, so bleiben die beiden Sicheln AEDFA und BGDHB übrig, die folglich zusammen dem Dreieck ADB gleich sind.

Anmerkungen.

1. Man nennt diesen Satz gewöhnlich nach dem Erfinder desselben den Satz von den Lunuln (Menisken, Mondflächen) des Hippokrates.
2. Für die Quadratur der ganzen Kreisfläche ist durch diesen Satz nichts gewonnen. Auch lassen sich auf mancherlei Art gewisse Stücke einer Kreisfläche quadriren, ohne daß dadurch Vortheile für die Quadratur der ganzen gewonnen würden. In dem Satze des Hippokrates kann man nicht einmal jede der Sicheln einzeln quadriren, sondern nur beide zusammen, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn DA und DB gleich genommen werden, denn in diesem Falle sind beide Sicheln gleich, also jede die Hälfte des Dreiecks ADB.

Anhang zum funfzehnten Abschnitt.

Berechnung der Ludolfschen Zahl in fünf Bruchziffern.

---

§. 1. Aufgabe.

In einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$, ist ein reguläres Sechseck beschrieben; es soll der Zahlenwerth berechnet werden, 1) seines großen Halbmessers, 2) seines Umfanges, 3) seines kleinen Halbmessers, 4) seiner Fläche, und zwar, wo es nöthig ist, in sieben Bruchziffern.

Auflösung. Der Halbmesser $CA = CB = CE$ des Kreises Fig. 156. sei $= 1$, und in demselben sei ein reguläres Sechseck beschrieben; eine Seite desselben sei AB. Wird der Durchmesser GE winkelrecht durch AB gezogen, so ist:

1. $CA = CB$ der große Halbmesser, und dieser ist $= 1$.
2. AB ist der sechste Theil des Perimeters, und gleichfalls $= 1$ (IX, 7.), also der ganze Umfang $= 6$.
3. CD ist der kleine Halbmesser, und gleich $\sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(1 - 1/4)} = \sqrt{3/4} = 1/2\sqrt{3} = 0{,}866\,025\,4\ldots\ldots$. Die Einheit dieser Zahl ist der Halbmesser.
4. Das Dreieck ABC ist ein Sechstel von der Fläche des Sechsecks.

Die Fläche dieses Dreiecks ABC ist aber $= AD \times CD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{4} \sqrt{3}$. Also ist des Sechsecks ganze Fläche $= \frac{3}{2} \sqrt{3} = 2{,}598\,076\,2\ldots$. Die Einheit dieser Zahl ist aber das Quadrat des Halbmessers.

Anmerkung. 1) In der Figur sind um der folgenden Sätze willen mehr Linien gezogen, als für §. 1. nöthig wären. Es ist zu empfehlen, daß sich der Schüler zu jedem Satze eine eigene Figur zeichne, und in dieselbe nur die für den Satz nöthigen Linien bringe. 2) Im Anhange zum Abschnitt XIV. (§. 5.) ist die Entwickelung gegeben, welche auch hier paßt, wenn dort $r = 1$ gesetzt wird.

§. 2. Erklärung.

Wir wollen in den folgenden §. §. überall den Halbmesser des Kreises, der zugleich der große Halbmesser aller inneren Polygone ist, $= 1$, den kleinen Halbmesser solcher Polygone $= \varrho$, und die Fläche $= F$ setzen.

Für ein inneres Polygon von doppelter Seitenanzahl sollen die Zeichen ϱ' und F' den kleinen Halbmesser und die Fläche anzeigen.

§. 3. Aufgabe.

Es ist der kleine Halbmesser eines inneren Polygons $= \varrho$ gegeben, es soll der kleine Halbmesser $= \varrho'$ eines inneren Polygons von doppelt so vielen Seiten gefunden werden.

Es werde Fig. 156. die Sehne AB in dem Kreise um C als Seite eines regulären eingeschriebenen Polygons betrachtet, die von dem Durchmesser GE senkrecht in D durchschnitten wird, dann ist $CA = CE = 1$, $CD = \varrho$, $GD = 1 + \varrho$. Zieht man die Sehne AE, so ist diese, wie leicht erkannt wird, die Seite des in denselben Kreis eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl und ein vom Mittelpunkt darauf gefälltes Perpendikel der kleine Halbmesser desselben, also $CF = \varrho'$.

Zieht man noch die Sehne AG, so ist (aus IV, 19.) leicht zu beweisen, daß AG doppelt so groß als CF ist; also $AG = 2\varrho'$.

Nun erkennt man leicht die Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke EFC und ADG aus der Gleichheit der spitzen Winkel DCF und AGE (I, 23. a.) und daraus die Proportion

$$EC : AG = FC : DG \text{ oder } 1 : 2\varrho' = \varrho' : 1 + \varrho.$$

Aus dieser folgt (XI, 15.) $2\varrho'^2 = 1 + \varrho$ oder $\varrho' = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \varrho)}$

Anmerkung. Man vergleiche auch Anhang zu XIV, §. 9., wo r = 1 zu setzen ist, um den hier gefundenen Ausdruck zu erhalten.

§. 4. Zusatz.

Da in §. 1. der Werth von ϱ für das Sechseck gefunden worden, so läßt sich daraus der kleine Halbmesser der regulären Polygone von 12, 24, 48, 96, 192 ꝛc. Seiten nach der eben gefundenen Formel berechnen. Die Rechnung muß fortgesetzt werden, bis man zu einem kleinen Halbmesser kommt, der nach dem Komma sechs Neunen enthält. Das Resultat dieser Rechnung in sieben Bruchstellen ist folgendes:

Seitenzahl	Kleiner Halbmesser.	Seitenzahl	Kleiner Halbmesser.
6	0,866 025 4	192	0,999 866 1
12	0,965 925 8	384	0,999 966 5
24	0,991 444 9	768	0,999 991 6
48	0,997 858 9	1536	0,999 997 9
96	0,999 464 6	3072	0,999 999 5

§. 5. Aufgabe.

Es ist außer dem großen Halbmesser 1 eines inneren Polygons die Fläche F und der kleine Halbmesser ϱ desselben gegeben; man soll die Fläche F' eines inneren Polygons von doppelter Seitenzahl finden.

Auflösung. In Fig. 156. ist nach den Erläuterungen derselben, die oben §. 3. gegeben worden, nachdem man noch den Radius AC gezogen, leicht zu erkennen, daß das Dreieck ADC der 2nte Theil eines regulären Polygons ist, das AB zur Seite hat. Eben so folgt leicht, daß das Dreieck ACE der 2nte Theil des Polygons von doppelter Seitenzahl ist, welches AE zur Seite hat. Es verhalten sich demnach auch die Polygone wie diese Dreiecke (XI, 11.). Die Dreiecke aber, welche die gemeinschaftliche Höhe AD haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien CD und CE. Es ist daher: $F : F' = \varrho : 1$, d. h. $F' = \frac{F}{\varrho}$.

Der Schüler spreche die gefundene Proportion genau in Worten aus, so wie auch die Rechnungsregel, nach welcher aus der

Fläche eines eingeschriebenen Polygons die Fläche des eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl gefunden wird.

§. 6. Zusatz.

Da nach §. 1. die Fläche eines Sechsecks gegeben ist, nach §. 4. aber der kleine Halbmesser der Polygone von 6, 12, 24 u. s. f. bis 3072 Seiten bekannt ist, so ist es leicht, nach §. 5. die Flächen aller dieser Polygone zu finden, wobei sechs Ziffern hinreichen.

Seitenzahl	Fläche des inneren Polygons.	Seitenzahl	Fläche des inneren Polygons.
6	2,598 076	192	3,141 032
12	3,000 000	384	3,141 452
24	3,105 829	768	3,141 558
48	3,132 629	1536	3,141 584
96	3,139 350	3072	3,141 590

§. 7. Aufgabe.

Es ist der kleine Halbmesser ϱ und die Fläche F eines inneren Polygons gegeben; man soll die Fläche f eines äußeren Polygons von ebensoviel Seiten finden.

Auflösung. In Fig. 156. sei alles, wie es im vorigen §. bestimmt ist. Man lege durch E eine berührende Linie, und verlängere die Halbmesser CA und CB bis an dieselbe in H und I, so ist das Dreieck CDA der 2nte Theil eines inneren, das Dreieck CEH der 2nte Theil eines äußeren Polygons von n Seiten. Nun sind aber die genannten Dreiecke ähnlich, und ihre Flächen verhalten sich daher wie $CD^2 : CE^2 = \varrho^2 : 1$. Eben so verhalten sich also auch die Flächen beider Polygone, nämlich

$$\varrho\varrho : 1 = F : f,$$

also $f = \frac{F}{\varrho\varrho}$.

§. 8. Zusatz.

Vergleicht man diese Formel $\left(\frac{F}{\varrho\varrho}\right)$ mit der §. 5. gefundenen $\left(\frac{F}{\varrho}\right)$, so ist klar, daß man die Flächen aller äußeren Polygone, die zu den im Vorhergehenden berechneten inneren Polygonen gehören, finden werde, wenn man die Zahlen der Tabelle §. 6. durch die zugehörigen Zahlen der Tabelle §. 4 dividirt. Auf diese Art findet man

Seitenzahl	Fläche der äußeren Polygone.	Seitenzahl	Fläche der äußeren Polygone.
6	3,464 102	192	3,141 873
12	3,215 390	384	3,141 663
24	3,159 660	768	3,141 610
48	3,146 086	1536	3,141 597
96	3,142 715	3072	3,141 593

§. 9. Lehrsatz.

Die Ludolfsche Zahl in den fünf ersten Bruchziffern ist:

3,141 59. ....

und der Fehler dieser Zahl ist kleiner als eine halbe Einheit der letzten Stelle.

Beweis. Nach §. 6. und §. 8. ist
die Fläche eines inneren 3072ecks 3, 141 591
" " " äußeren " 3, 141 593.

Da nun die Kreisfläche größer als jene, und kleiner als diese ist, so können die 5 ersten Bruchziffern einer Zahl, welche die Größe der Kreisfläche ausdrücken soll, keine anderen als 3, 141 59 sein.

Der Unterschied des äußeren und inneren Polygons beträgt aber nur 2 Einheiten der sechsten Stelle, also muß der Unterschied der Kreisfläche sowohl von der inneren als äußeren Polygonfläche kleiner sein als 2 Einheiten der letzten Stelle, also viel weniger als 5 Einheiten der sechsten, oder eine halbe Einheit fünfter Stelle.

Daß aber dieselbe Zahl, welche die Kreisfläche durch das Quadrat des Halbmessers = 1 ausdrückt, auch die halbe Peripherie durch den Halbmesser = 1, oder die ganze Peripherie durch den Durchmesser = 1 ausdrücke, ist §. 9. des Abschn. bewiesen worden. Die gefundene Zahl ist also der Werth von π, sofern er in nicht mehr als 5 Bruchziffern verlangt wird.

§. 10. Zusatz.

Wenn man die in den vorhergehenden §. §. erklärten Rechnungen mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so kann man sich auf das vollständigste überzeugen, daß es möglich ist, die Rechnung bis zu zwei zusammengehörigen Polygonen (einem inneren und einem äußeren) von gleich vielen Seiten zu treiben, deren Flächen unter sich, also noch vielmehr von der Kreisfläche, um weniger als irgend eine noch so kleine dekadische Bruchеinheit, oder überhaupt, als irgend eine gegebene Größe verschieden sind; so daß die Ludolfsche Zahl in jeder vorgeschriebenen Anzahl von Bruchstellen vollkommen richtig gefunden werden kann.

Obgleich dieser Satz in der That als eine unmittelbare Folgerung aus allem Vorhergehenden betrachtet werden kann, so wird doch eine genauere Erörterung nicht überflüssig sein.

a. Es ist unmittelbar deutlich, daß bei ununterbrochen fortgesetzter Verdoppelung der Seitenzahl, die Größe der Seiten ohne Ende abnimmt; daß man also in jedem Falle bis zu einem Polygon fortschreiten kann, dessen Seite in Zahlen ausgedrückt kleiner ist, als jede noch so kleine dekadische Bruchеinheit.

b. Daß bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenzahl der kleine Halbmesser wachse, ergiebt sich aus VI, Anh. §. 4.; und daß er, wenn man den Halbmesser des Kreises = 1 setzt, dennoch stets kleiner als 1 bleibt, ergiebt sich aus der Erklärung desselben. Daß endlich der Unterschied zwischen dem kleinen Halbmesser und 1 einmal kleiner werden muß, als irgend eine gegebene Größe, läßt sich auf folgende Art beweisen. Wenn in Fig. 156. DC der kleine Halbmesser irgend eines inneren Polygons, und AE die Seite eines Polygons von der doppelten Seitenzahl ist, so verhält sich (nach XIII, 2.) $GE : AE = AE : ED$, d. i., wenn man $AE = s$ und $DC = \varrho$ setzt, $2 : s = s : 1 - \varrho$. Also ist $1 - \varrho = \frac{1}{2}ss$. Da nun s, und noch vielmehr ss und $\frac{1}{2}ss$, über alle Gränzen nach a) abnehmen kann, so kann auch $1 - \varrho$ kleiner werden, als jede noch so kleine gegebene Größe. Berechnete man also nach §. 1. den kleinen Halbmesser des Sechsecks auf eine beliebige Anzahl von Bruchstellen, die wir $n + 1$ setzen wollen, und setzte dann die Rechnung nach §. 3. und 4. auf eben so viele Bruchstellen fort, so müßte man nothwendig einmal auf ein Polygon kommen, bei welchem der Zahlenwerth des kleinen Halbmessers, nach dem Komma n Neunen, und erst in der $(n + 1)$ten Stelle eine andere

Ziffer hätte, so daß sein Unterschied von 1 kleiner wäre, als eine Brucheinheit der nten Stelle.

c. Daß endlich auch der Unterschied der Fläche eines inneren Polygons und der Kreisfläche kleiner werden könne, als jede gegebene Größe, läßt sich auf folgende Art darthun. Wenn wir die Fläche eines inneren Polygons F, eines äußeren f, und den kleinen Halbmesser des inneren Polygons ϱ nennen, so ist (nach §. 7.) $f\varrho\varrho = F$; also $f - f\varrho\varrho = f - F$, oder $f - F = f(1 - \varrho\varrho) = f(1 + \varrho)(1 - \varrho)$. Da nun f bei jeder Verdopplung der Seitenanzahl abnimmt; $1 + \varrho$ aber sich der Größe 2 nähert, ohne sie zu erreichen; $1 - \varrho$ endlich nach b) ohne Ende abnimmt, so ist deutlich, daß auch $f - F$ ohne Ende abnehme und kleiner werden könne, als jede gegebene Größe. Was aber von dem Unterschiede der Flächen eines äußern und innern Polygons gilt, muß noch vielmehr vom Unterschiede der Fläche des Kreises und der inneren Polygone gelten.

d. Sollte also die Ludolfsche Zahl in einer vorgeschriebenen Anzahl von n Bruchstellen genau dargestellt werden, so müßte man nur die sämmtlichen im Vorhergehenden beschriebenen Rechnungen vom Anfang an auf einige Bruchstellen weiter als n treiben. Auf diese Art müßte man nothwendig einmal auf ein inneres und äußeres Polygon kommen, deren Flächen in Zahlen ausgedrückt, unter sich, und folglich auch mit der Kreisfläche in den n ersten Bruchstellen völlig übereinstimmten.

Von der Aehnlichkeit der Kreise.

§. 11. Anmerkung.

Die Aehnlichkeit der Kreise ist in §. 12. des Abschn. daraus abgeleitet worden, daß man (nach §. 1.) Kreise betrachten kann als reguläre Polygone von gleicher aber unendlich großer Seitenzahl. Hier soll noch gezeigt werden, wie sich diese Aehnlichkeit noch unmittelbarer aus dem oben aufgestellten Begriffe der Aehnlichkeit vielseitiger Figuren ableiten läßt.

Da nämlich in dieser Erklärung die Anzahl der Paare ähnlicher Dreiecke, aus welchen zwei Figuren zusammengesetzt werden, völlig unbestimmt ist, und so groß angenommen werden kann als man will, so darf man sie auch unendlich groß annehmen; und in dieser Ausdehnung läßt sich dann die Erklärung nicht bloß auf Kreise, sondern überhaupt auf krummlinige Figuren anwenden. Im folgenden §. soll nun gezeigt werden, wie man sich die Entstehung zweier Kreise durch eine ganz gleichmäßige

Zusammensetzung einer unendlichen Folge von Paaren ähnlicher Dreiecke vorstellen könne.

§. 12. Lehrsatz.

Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

Beweis. In den Kreisen ABC (Fig. 157.) und abc Fig. 158. seien die Sehnen AB, ab die Seiten zweier eingeschriebener regelmäßigen Dreiecke. Zieht man die Halbmesser CA, CB, ca, cb, so sind die Dreiecke ABC, abc ähnlich nach XIII, 15. c Stellt man sich die regelmäßigen Dreiecke ausgezeichnet vor, so besteht jedes aus drei solchen Dreiecken, wie ABC, und es wird daher hinreichend sein, in jeder Figur nur eins derselben näher zu betrachten, weil offenbar die Schlüsse, welche man bei dem einen Paare macht, auch für die beiden andern Paare gültig sind.

Man halbire die Bogen ADB und adb in D und d, und ziehe die Sehnen AD, DB, ad, db, welche Seiten eines inneren Sechsecks sein werden, so wird man leicht die Aehnlichkeit der Dreiecke ADB, adb aus XII, 13. einsehen, woraus nach XII, 20. die Aehnlichkeit der Vierecke ADBC, adbc folgt.

Man halbire ferner die Bogen des Sechsecks, in den Punkten E, F, e, f, und ziehe die Sehnen AE, ED, DF, FB, ae, ed, df, fb, welche Seiten eines inneren Zwölfecks sein werden, so ist wieder die Aehnlichkeit der Dreiecke AED, aed, desgleichen DFB, dfb aus XII, 13. erweislich; woraus nach XII, 20. folgt, daß auch die sechsseitigen Figuren AEDFBC, aedfbc ähnlich sind.

Es fällt in die Augen, wie diese Schlüsse auf eine völlig gleichförmige Art fortgesetzt werden können. Denn halbirt man die Bogen des Zwölfecks, und zieht die Seiten eines Vierundzwanzigecks; so ist klar, daß man zu den Figuren, deren Aehnlichkeit vorher erwiesen worden, lauter ähnliche Dreiecke auf einerlei Weise hinzufügt, und daß also die so zwischen CA und CB, desgleichen zwischen ca und cb enthaltenen Ausschnitte der Vierundzwanzigecke ebenfalls ähnlich sind; rc.

Auf diese Art können also jede zwei regelmäßigen Polygone von gleichvielen Seiten aus einer gewissen Anzahl ähnlicher Dreiecke auf völlig gleiche Weise zusammengesetzt werden.

Aus den vorigen §. §. dieses Anhanges aber geht hervor, daß der Unterschied der Flächen eines äußern und eines innern Polygons, also noch mehr ihr Unterschied von der Kreisfläche durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl kleiner werden könne als jede Größe, die sich angeben läßt (z. B. kleiner als jede beliebige dekadische Brucheinheit). Denkt man sich folglich die Verdopplung der Seitenzahl ohne Ende fortgesetzt, so ist klar, daß auch jede zwei Kreise als aus einer unendlichen Folge von Paaren ähnlicher Dreiecke auf völlig gleiche Weise zusammengesetzt vorgestellt werden können, und daß sie folglich nach XII, 20. ähnliche Figuren sind.

§. 13. Zusatz.

Aus diesem Beweise wird zugleich deutlich, daß alles, was im zweiten Anhange zu Abschn. XII. von ähnlichen Figuren überhaupt erwiesen worden, auch auf die Kreise anwendbar sei.

Sechzehnter Abschnitt.

Ausmessung der Bogen, Ausschnitte, Abschnitte und anderer Stücke des Kreises.

Einleitung.

§. 1. Aufgabe.

Es ist die Länge eines Bogens in Graden, Minuten und Secunden gegeben; man soll diese Zahl a) unter die einzige Benennung Grad, b) unter die einzige Benennung Minute, c) unter die einzige Benennung Secunde bringen. Und umgekehrt:

Es ist ein Bogen unter einer einzigen Benennung der Gradeintheilung gegeben, so daß die Zahl Ganze und Bruchziffern enthält; es soll diese Zahl so weit es angeht, unter die drei Benennungen Grad, Minute und Secunde gebracht werden.

Die Auflösung beider Aufgaben kann keine Schwierigkeit haben, wenn man überhaupt mit benannten Zahlen und zehntheiligen Brüchen zu rechnen weiß, und es ist hauptsächlich nur die einfachste und bequemste Form der Rechnung ausfindig zu machen. Bei der zweiten Aufgabe ist nur zu berücksichtigen, daß der Bogen gegeben sein kann entweder in Graden allein, oder in Minuten, oder in Secunden allein.

Anmerkung. Die Rechnung mit Sexagesimal= (d. i. sechzigtheiligen) Eintheilungen ist gar nicht schwierig, und jeder, der sich nur gewöhnt hat, mit Nachdenken zu rechnen, wird bald finden, daß alle Multiplicationen und Divisionen durch 60 sehr einfach und leicht gemacht werden können. Daher ist es nöthig, sich in diesen Rechnungen zu üben, und es sind deshalb im Uebungshefte recht viele Rechnungen der Art, wie sie diese beiden Aufgaben fordern, zu machen.

Bei der ersten Umwälzung des Französischen Staates, wo man, um Gutes zu stiften, sehr viel Böses that, und nichts Bestehendes wollte fortdauern lassen, machte man auch den vergeblichen Versuch, die sechzigtheilige Kreiseintheilung, in welcher alle Völker des Erdbodens seit den ältesten Zeiten übereinstimmen, mit einer zehntheiligen zu vertauschen. Hätte man sich begnügt, die Grade beizubehalten, und nur statt der Minuten und Secunden zehntheilige Brüche des Grades einzuführen, so wäre der Versuch vielleicht gelungen. Aber man verwarf selbst die Grade, und wollte den Quadranten in 100 neue Grade, den neuen Grad in 100 Minuten, die neue Minute in 100 Secunden theilen. Diese neue Theilung war nicht mit Ruhe und Besonnenheit gewählt; sonst würde man sie schon deshalb verworfen haben, weil so wichtige Bogen, wie die von 30^0, 60^0, 120^0, 150^0 rc. in der hunderttheiligen Eintheilung nicht ohne Fehler ausgedrückt werden können. Hätte man dagegen den Grad zehntheilig getheilt, so hätte man alle Vortheile der Decimalrechnung erhalten, ohne mit der ganzen übrigen Welt in Widerspruch zu treten.

§. 2. Lehrsatz.

Zwei Bogen desselben Kreises (oder gleicher) verhalten sich wie die zugehörigen Centri-Winkel.

Anleitung zum Beweise. Es ist zu beweisen, daß Taf. IV, Fig. 105. die beiden Bogen DG und BA des Kreises um C sich wie die Centri-Winkel DCG und BCA verhalten, also daß

$$BA : DG = DCG : BCA.$$

Man halbire den Bogen BA in H, und trage die Hälfte AH, so oft auf DG, als es angeht, so wird entweder DG durch HA gemessen oder nicht; er werde gemessen, und enthalte drei Theile DI, IK, KG. Man ziehe die Radien nach den Theilpunkten IC, KC, CH, so ist (VI, §. 3.) die Gleichheit der entstandenen Centri-Winkel ICD, ICK BCH u. s. w. beweisen. Alsdann ist leicht zu beweisen, daß das Verhältniß der Centri-Winkel durch dieselben Zahlen vorgestellt werde, als das Verhältniß der Bogen; woraus die Gleichheit der angegebenen Verhältnisse nach XI, 6. b. folgt.

Wird aber der zweite Bogen nicht durch AH gemessen, wie z. B. der Bogen DL, welcher die drei Bogen DI = IK = KG = AH und einen Rest GL kleiner als AH enthält, so halbire man den Maaßbogen AH, und trage dessen Hälfte von D aus auf DL ab, ziehe die Radien nach allen Theilpunkten wie vorher, alsdann läßt auf ähnliche Art wie XIV, §. 4. sich zeigen, daß das Verhältniß der Centri-Winkel DCL und BCA sich stets durch dieselben Zahlen ausdrücken lasse, als das der Bogen DL und AB, mit einem Fehler der kleiner ist als der in BA angenommene Maaßtheil. Da aber der Maaß-Bogen in AB sich ohne Gränzen kleiner machen läßt durch fortgesetzte Halbirungen, so läßt die Gleichheit der beiden Verhältnisse DL : BA = DCL : BCA sich durch die schon mehrfach angewendete Schlußart XIV, 4 und XII, 3. beweisen.

Zusatz 1.

Ganz auf gleiche Weise läßt sich beweisen, daß auch die Flächen von zwei Sectoren sich wie ihre Bogen, oder ihre Centri-Winkel verhalten.

Zusatz 2.

Die Bogen gleicher Centri-Winkel verhalten sich in verschiedenen Kreisen, wie die zugehörigen Radien oder Durchmesser.

Der Beweis wird sich ergeben, wenn man bedenkt, daß die ganzen oder halben Peripherien sich ansehen lassen, als Bogen, deren Centri-Winkel 360° oder 180° halten. Hieraus ergiebt sich das Verhältniß jedes Bogens zu seiner Peripherie, und das Verhältniß der Bogen zu einander. Da nun das Verhältniß von zwei Peripherien aus XV, 3. bekannt ist, so erhält man (aus XI, 6. c. Schluß) den zu beweisenden Satz.

§. 3. Aufgabe.

Es ist das Maaß eines Bogens nach der Gradabtheilung gegeben, man soll die Länge desselben in Theilen des Halbmessers 1 finden.

Auflösung. Ist das Maaß des Bogens in Graden ausgedrückt $= \varphi$, so ist das Verhältniß der halben Kreislinie zu diesem Bogen gegeben, nämlich $180 : \varphi$. Nun ist die Länge der halben Kreislinie in Theilen des Halbmessers 1, vermöge der Ludolfschen Zahl, $= \pi$. Nennt man also das Maaß eben dieses Bogens in eben solchen Theilen α, so muß das Verhältniß $\pi : \alpha$ dem vorigen gleich sein. Also hat man die Proportion

$$180 : \varphi = \pi : \alpha.$$

Also $\alpha = \frac{\pi\varphi}{180} = \frac{\pi}{180}\,\varphi$.

Die hierbei im Hefte zu machenden Arbeiten sind folgende:

a. Da $\frac{\pi}{180}$ von unveränderlicher Größe ist, so ist es zweckmäßig, den Werth dieses Quotienten ein für alle Mal auszurechnen. Dieses soll auf 15 Bruchstellen geschehen.

b. Es soll bestimmt angegeben werden, was der Quotient $\frac{\pi}{180}$ eigentlich anzeige, und wie man dem zu Folge die oben entwickelte Regel in Worten ausdrücken könne.

c. Nach dieser Regel soll ein Beispiel gerechnet, und zu dem Ende soll für φ eine beliebige Anzahl von Graden gewählt werden; doch mit Hinzufügung einer solchen Anzahl von Minuten, die sich leicht in einen mit kleinen Zahlen geschriebenen gemeinen Bruch von Graden verwandeln lassen.

d. Es ist zu überlegen, wie man rechnen müßte, wenn der Werth von φ außer ganzen Graden noch eine Anzahl von Minuten enthielte, die sich nicht durch einen gemeinen Bruch des Grades in kleinen Zahlen ausdrücken lassen; ferner, wenn der Werth von φ außer den Minuten nach Secunden enthielte, oder auch, wenn er bloß aus Minuten, oder bloß aus Secunden bestände.

e. Wie würde man am bequemsten berechnen können, wie groß ein Bogen von $1'$, desgleichen von $1''$ in Theilen des Halbmessers sei? Die Rechnung selbst soll in 15 Bruchstellen ausgeführt werden.

f. Endlich sollen von den drei Zahlen, welche die Größe von 1^0, von $1'$ und von $1''$ in Theilen des Halbmessers 1 ausdrücken, die Vielfachen bis zum Neunfachen berechnet, und gezeigt werden, wie man durch diese Tabellen jeden in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Bogen durch bloße Addition in Theile des Halbmessers 1 verwandeln könne.

§. 4. Aufgabe.

Es ist die Länge eines Bogens in Theilen des Halbmessers 1 gegeben, man soll den Werth desselben nach der Gradeintheilung finden.

Wer die vorige Aufgabe mit Aufmerksamkeit aufgelöst hat, bedarf bei dieser keiner weitern Anleitung. Auch ist es zweckmäßig, die im vorigen §. gebrauchten Buchstaben beizubehalten. Es soll übrigens

a. die Regel wieder durch eine Formel ausgedrückt werden.

b. Es soll überlegt werden, ob ein Theil der Formel aus unveränderlichen Größen bestehe, und sich daher ein für alle Mal ausrechnen lasse. Die Rechnung ist auf 15 Bruchstellen zu führen, wobei XV, 5. d. nützliche Dienste leistet.

c. Es soll berechnet werden, wie groß ein Bogen, dessen Länge dem Halbmesser gleich ist 1) in Graden, 2) in Minuten, 3) in Secunden und deren Decimalbrüchen sei.

d. Von diesen drei Zahlen sollen die Vielfachen bis zum Neunfachen berechnet, und es soll gezeigt werden, wie man vermittelst dieser drei Tabellen jeden in Theilen des Halbmessers gegebenen Bogen durch bloße Addition entweder in Grade, oder Minuten, oder Secunden verwandeln könne.

e. Endlich wähle man eine Zahl, die etwa eine ganze Einheit nebst drei bis vier Bruchziffern, oder auch Bruchziffern allein enthält. Diese soll den Werth eines Bogens in Theilen des Halbmessers vorstellen, und mit Hülfe der eben erwähnten Tabellen entweder in Grade und deren Decimaltheile, oder in Minuten, oder in Secunden und deren Decimaltheile verwandelt werden.

Anmerkung. Der Ausdruck eines Kreisbogens in Theilen des Halbmessers 1 ist besonders in Rücksicht der höheren Mathematik wichtig, wo es eine unendliche Menge von Sätzen giebt, in welchen die Bogen nicht füglich anders ausgedrückt werden können.

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß man den Ausdruck der Bogen in Theilen des Halbmessers eben so gut zur Winkelmessung brauchen könne, als den Ausdruck durch Grade. Weiß man z. B., daß ein Bogen in Theilen des Halbmessers = 0,3784 so kennt man sein Verhältniß zur halben Kreislinie, nämlich 0,3784 : 3,1416. Kennt man aber dies Verhältniß, so weiß man auch, daß der Centriwinkel dieses Bogens sich zu zwei rechten Winkeln eben so verhalte. Zu einer richtigen und deutlichen Vorstellung von der Größe eines Winkels ist aber nichts weiter erforderlich, als daß man sein Verhältniß zu einem oder zwei rechten Winkeln genau kenne.

§. 5. Aufgabe.

Es ist ein Bogen in der Gradabtheilung $= \varphi$ gegeben. Der Halbmesser des Kreises aber ist nach einem beliebigen

Längenmaaße gemessen = r. Es soll die Länge des Bogens in eben diesem Längenmaaße gefunden werden.

Anleitung zur Auflösung. Die Auflösung ist eine leichte Anwendung von §. 3. und §. 2. Zusatz 2. Es ist nun

a. die Auflösung auszuführen, und die Regel der Rechnung durch eine Formel darzustellen.

b. Es ist zu zeigen, in wie fern von den Tabellen §. 3. f. hiebei Gebrauch gemacht werden könne.

c. Endlich soll ein Beispiel in Zahlen ausgeführt werden. Zu dem Ende beschreibe man einen beliebigen Kreis, und schneide von demselben einen beliebigen Bogen ab. Den Bogen messe man, so genau es angeht, mit dem Transporteur (IX, 13. und 16), den Halbmesser aber nach einem genauen Maaßstabe. Dann berechne man, wie groß eben dieser Bogen in Theilen dieses Maaßstabes sei.

§. 6. Zusatz.

Aus §. 3. und 5. ergiebt sich, wie man eine gerade Linie zu zeichnen hat, welche einem Kreisbogen so genau gleich kommt, als es überhaupt bei der Unvollkommenheit unserer Sinne und Werkzeuge möglich ist.

Dieses ist in einem Beispiel auszuführen.

§. 7. Aufgabe.

Von einem Kreise, dessen Halbmesser nach einem beliebigen Maaße gemessen = r ist, soll ein Bogen abgeschnitten werden, dessen Länge nach demselben Maaße vorgeschrieben und = b ist.

Anleitung zur Auflösung. Diese Aufgabe ist, wie man leicht sieht, die Umkehrung der vorhergehenden: denn man wird zuerst die Länge b des Bogens in Grade verwandeln müssen. Nun ist die Länge der halben Kreislinie, durch Theile des Halbmessers r ausgedrückt, = $r\pi$ (XV, 6.), also das Verhältniß $b : r\pi$ gegeben. Nennt man also die gesuchte Länge des Bogens in Graden φ, so ist $\varphi : 180$ dem vorigen Verhältniß gleich, woraus sich die Regel zur Berechnung von φ leicht finden läßt.

Ist φ in Graden gefunden, so muß man aus dem Mittelpunkte eines Kreises einen Halbmesser ziehen, an diesen mit dem Transporteur einen Winkel = φ so genau als möglich anlegen (IX, 17.), so wird dadurch zugleich ein Bogen von der Größe φ abgeschnitten (IX, 13).

§. 8. Lehrsatz.

Vergleichung eines Kreisausschnittes mit einem Dreieck.

Der Satz selbst sowohl als der Beweis seiner Richtigkeit ergeben sich sehr leicht aus X, 15. verglichen mit XV, 1.

$\frac{\varphi r \pi}{180}$ $= \frac{\varphi r^2 \pi}{360}$

§. 9. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines gegebenen Kreisausschnittes zu berechnen.

Die Hauptsache der Auflösung ergiebt sich unmittelbar aus §. 8. Es ist aber bestimmt anzugeben,

a. welche Linien oder Winkel, und in welcherlei Maaß jedes Stück zu messen.

b. Dann ist zu zeigen, welche vorläufige Rechnung zu machen sei, wobei von §. 3. oder 5. Gebrauch zu machen sein wird.

c. Endlich ist die Hauptrechnung anzugeben, und alles durch wirkliche Berechnung eines gezeichneten Abschnitts zu erläutern.

Wenn man den ganzen Kreis als einen Ausschnitt betrachtet, dessen Centriwinkel 360° beträgt, so läßt sich die Fläche des Ausschnitts aus ihrem Verhältnisse zur ganzen Kreisfläche durch §. 2. Zus. 1. berechnen; was zuweilen mit Nutzen anzuwenden, wenn die Kreisfläche selbst gegeben ist.

§. 10. Zusatz.

a. Unter welchen Bedingungen sind zwei Kreisausschnitte ähnlich?

b. Können zwei Ausschnitte in demselben oder in gleichen Kreisen ähnlich sein, ohne sich zu decken?

Die erste Frage beantwortet sich aus XIII, 18. die zweite aber aus der ersten.

§. 11. Lehrsatz.

Der Abschnitt eines Kreises ist einem Dreiecke gleich, dessen Höhe der Halbmesser des Kreises, dessen Grundlinie der Ueberschuß des Bogens über das Loth ist, welches man von einem Endpunkte des Abschnittes auf den nach dem andern Endpunkte gezogenen Halbmesser fällen kann.

Beweis. Aus dem einen Endpunkte B des Abschnittes AB Fig. 159. sei BD lothrecht auf den zum andern Endpunkte A gezogenen Halbmesser AC gefällt, so ist zu beweisen, daß der Abschnitt AB einem Dreieck gleich sei, dessen Höhe = AC, und dessen Grundlinie der Bogen AB weniger der Linie AD ist.

Man errichte in A die Linie AE winkelrecht auf AC, und nehme an, daß AE nach §. 6. dem Bogen AB gleich gemacht sei. Zieht man nun EC, so ist nach §. 8. das Dreieck AEC dem Ausschnitt ABC gleich.

Man ziehe ferner BF parallel mit AC, so sind die Dreiecke ABC und ACF gleich (V, 7.).

Nun ist aber der Abschnitt AB = Ausschnitt ABC weniger dem Dreieck ABC. Folglich ist eben dieser Abschnitt auch gleich dem Dreieck ACE — ACF = EFC.

Nimmt man nun EF für die Grundlinie dieses Dreiecks, so ist EF = EA — FA = Bogen AB — BD. Die Höhe des Dreiecks ist aber AC; was zu erweisen war.

Dieser Beweis ist nur mit Veränderung der Figur und der Buchstaben im Hefte zu wiederholen.

§. 12. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu berechnen.

Die Hauptsache der Auflösung ergiebt sich aus §. 11. Um sie nun auf ein wirkliches Beispiel anzuwenden, ist zu zeigen,

a. welche Linien und Winkel in der Figur zu messen sind, und

b. wie dann aus diesen Datis die Rechnung zu führen ist.

Beides ist an einer wirklichen Zeichnung auszuführen.

Anmerkung. Obgleich diese Auflösung von der theoretischen Seite ganz richtig ist, so kann sie dennoch nur für eine mechanische, nicht für eine vollkommen wissenschaftliche Auflösung gelten. Denn die Auflösung fordert, daß man die Linie BD unmittelbar messe. Aber man sieht leicht ein, daß, wenn der Bogen AB einmal seine bestimmte Größe hat, auch die Länge von BD dadurch vollkommen bestimmt sei. Es sollte daher BD nicht gemessen, sondern aus der Größe des Bogens AB berechnet werden. Zur Berechnung reicht aber die bisherige Theorie nicht hin, und es kann erst in der Trigonometrie gezeigt werden, wie diese Berechnung auf eine vollkommen wissenschaftliche Art auszuführen sei.

§. 13. Zusatz.

a. Unter welcher Bedingung sind zwei Kreisabschnitte ähnlich?

b. Können zwei Abschnitte in demselben oder in gleichen Kreisen ähnlich sein, ohne sich zu decken?

Die erste Frage beantwortet sich aus XIII, 19., und die zweite aus der ersten.

§. 14. Aufgabe.

Die Fläche eines zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltenen Ringes zu messen.

Auflösung. Nennt man den Halbmesser des größeren Kreises R, des kleineren r, so ist die Fläche des Ringes, die wir F nennen wollen,

$$F = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r)\,(R - r)\,\pi.$$

Der Beweis ist leicht zu finden, wenn man die Fläche sowohl des größeren als des kleineren Kreises nach XV, 10. durch eine Formel ausdrückt.

§. 15. Zusatz.

Nach eben dieser Formel kann überhaupt die zwischen den Peripherien zweier Kreise enthaltene Fläche berechnet werden, auch wenn die Kreise nicht concentrisch sind, wofern nur der kleinere Kreis ganz in dem größeren enthalten ist.

Dieses ist durch eine Figur deutlich zu machen.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn man an einen Punkt der kleineren von zwei concentrischen Kreislinien eine berührende Linie bis zu der größeren zieht, so ist diese Linie der Halbmesser eines Kreises, dessen Fläche eben so groß ist als die Fläche des Ringes zwischen den concentrischen Kreisen.

Anleitung zum Beweise. Wenn Fig. 160. aus C zwei concentrische Kreise beschrieben sind, und man zieht von dem Punkte D der kleinen Kreislinie bis zur größeren die Tangente DG; so ist zu beweisen, daß ein mit dem Halbmesser DG beschriebener Kreis dem Ringe zwischen beiden Kreislinien gleich sei.

Zum Beweise ziehe man CD und CG, so ist in dem bei D rechtwinkligen Dreiecke CGD nach dem Pythagorischen Lehrsatze $DG^2 = GC^2 - DC^2$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit π, nämlich $DG^2 \pi = GC^2 \pi - DC^2 \pi$, und vergleicht XV, 10., so ist der Beweis leicht zu vollenden.

§. 17. Zusatz.

Die Tangente DG ist die mittlere Proportionale zwischen der Summe und der Differenz von den Halbmessern beider Kreise.

Man verlängere den Halbmesser CG bis zur kleineren Kreislinie in M, und vergleiche XIII, 11. so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes aus Betrachtung der Figur.

§. 18. Zusatz.

Der Beweis des vorigen Zusatzes läßt sich auch noch sehr leicht aus der Formel von §. 14. ableiten $F = (R + r)(R - r) \pi$.

Man nenne ϱ die Tangente DG, so ist (nach §. 16.) $F = \varrho^2 \pi$. Vergleicht man diese Formel mit $F = (R + r)(R - r) \pi$, so ergiebt sich
$\varrho^2 = (R + r)(R - r)$; woraus das zu beweisende folgt.

§. 19. Zusatz.

Durch die Ausmessung der Ausschnitte und Abschnitte wird es möglich, alle Stücke einer Kreisfläche, die auf ganz beliebige Art von Kreisbogen und geraden Linien begränzt sind, auszumessen.

Die allgemeine Möglichkeit sieht man leicht ein, wenn man erwägt, daß jedes beliebige Kreisstück durch das Ziehen von Sehnen in Abschnitte und geradlinige Figuren getheilt werden kann. Aber in besonderen Fällen ist es oft zweckmäßig, etwas anders zu verfahren.

Zur gelegentlichen Uebung fügen wir noch folgende Aufgaben bei:

a. Ein Stück der Kreisfläche zu messen, das zwischen zwei parallelen Sehnen enthalten ist.
b. Ein Stück der Kreisfläche zwischen zwei nicht parallelen Sehnen, welche sich im Kreise nicht schneiden, zu messen.
c. Die vier Kreisstücke auszumessen, in welche die Kreisfläche durch zwei sich schneidende Sehnen getheilt wird.

d. In einem Halbkreise ADB Taf. VI. Fig. 155. ist eine Sehne AD, und über derselben der Halbkreis AED gezogen; es soll der Flächeninhalt der mondförmigen Figur AEDFA gefunden werden.

e. In Taf. VII. Fig. 161. sind nach den Endpunkten des Bogens AB, welcher kleiner ist als ein Quadrant, die Halbmesser CA, CB gezogen. In A ist die Berührungslinie AD gezogen,
D CB bis an dieselbe in B verlängert. Es soll die Fläche des außer dem Kreise liegenden Stückes ABD, welches von den zwei geraden Linien DA und DB nebst dem Bogen AB eingeschlossen wird, ~~bezeichnet~~ werden. berechnet

f. In ebenderselben Figur sei der Halbmesser AC bis zur Peripherie in F verlängert, und aus E durch B die Linie EF bis zur Tangente gezogen; es soll das dreieckige Stück ABF zwischen den geraden Linien FA, FB und dem Bogen AB berechnet werden.

g. In Fig. 160. sind aus C zwei concentrische Kreise, und durch beide der Durchmesser AB gezogen. In D und E, wo dieser die kleinere Kreislinie schneidet, sind die Tangenten FG, HI bis zur größeren Kreislinie gezogen. Es soll das Kreisstück FDKEH, welches von den beiden Bogen FH und DKE, und von den beiden geraden Linien DF und EH eingeschlossen wird, berechnet werden.

Bei allen diesen Aufgaben ist besonders darauf zu sehen, daß der Schüler vor der Auflösung überlege, welche Data zur geometrischen Construction, und welche zur Berechnung der Kreisstücke nach den Sätzen dieses Abschn. nothwendig sind.

Anhang zum sechszehnten Abschnitt.

Eine rein geometrische Rectification der Kreislinie.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man von einer Größe die Hälfte oder mehr hinwegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte oder mehr und so fort von jedem Reste die Hälfte oder mehr; so bleibt einmal ein Rest, der kleiner ist als irgend eine noch so kleine Größe derselben Art.

Es sind zwei gleichartige Größen, z. B. die beiden Linien AB und CD Fig. 162. gegeben, die eine AB beliebig groß, die andere CD beliebig klein. Nimmt man von der größeren AB die Hälfte BE ab, vom Reste EA wieder die Hälfte EF, vom nunmehrigen Reste FA wieder die Hälfte FG, u. s. f., so bleibt nach einer gewissen Anzahl von Wiederholungen dieser Arbeit ein Rest (GA), der kleiner ist als CD.

Beweis. Man mache von CD, ein Vielfaches HM welches größer ist als AB (in unserer Figur erfüllt schon das Vierfache diese Bedingung). Nimmt man nun von AB die Hälfte BE, von HM aber einen Theil HI, also weniger als die Hälfte ab, so muß der Rest EA kleiner sein als der Rest IM. Nimmt man ferner von EA die Hälfte EF, von IM aber wieder einen Theil IK, also weniger als die Hälfte ab, so ist der Rest AF kleiner als der Rest KM, und so ferner.

Es mögen nun der Theile auf HM so viele sein, als man will, so wird man diese Schlüsse jederzeit so weit fortsetzen können, bis auf HM nur noch zwei Theile KL und LM übrig sind. Ist nun der auf AB hiezu gehörige Rest AF, so ist erwiesen, daß AF $<$ KM. Nimmt man also endlich von jeder dieser beiden Linien die Hälfte ab, so bleiben AG und LM, und es ist AG $<$ LM, also auch AG $<$ CD, was zu erweisen war.

Nimmt man also von irgend einer Größe die Hälfte ab, vom Rest wieder die Hälfte, und so immer fort, so kann man in jedem Falle zuletzt zu einem Rest gelangen, der kleiner ist als jede gegebene, noch so kleine gleichartige Größe.

Noch vielmehr aber hat dieses seine Richtigkeit, wenn man von der Größe mehr als die Hälfte, vom Reste wieder mehr als die Hälfte, u. s. f. abnimmt.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man in einem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC Fig. 163. einen der spitzigen Winkel ACB durch die Linie CD halbirt, und in D die Linie DE winkelrecht auf CD errichtet, so ist im Dreieck CDE der Unterschied der Hypotenuse CE und der Kathete CD noch nicht halb so groß, als in dem Dreieck ACB der Unterschied der Hypotenuse CB und der Kathete CA.

Beweis. Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser CA den Bogen AF, so ist FB (= BC — FC = BC — AC) der Unterschied der Hypotenuse CB und der Kathete CA im Dreieck ABC. Man beschreibe ferner aus C mit dem Halbmesser CD den Bogen DG, so ist EG (= CE — GC = CE — CD) der Unterschied der Hypotenuse CE und der Kathete DC im Dreieck CDE. Es ist also zu beweisen, daß EG in jedem Falle kleiner sei als $\frac{1}{2}$ BF.

Zum Beweise ziehe man FD, so ist die Congruenz der Dreiecke CDA und CDF aus III, 6. leicht zu erweisen. Daraus folgt aber, daß CFD = CAD ein rechter Winkel, also DF eine Tangente (VII, 1. 2.), auch DF = DA sei. In dem bei F rechtwinkligen Dreieck BFD ist nun BD > FD (III, 11.), also auch BD > AD. Man ziehe nun die Sehne AF, welche von CD winkelrecht geschnitten wird (VI, 10 und 9.), also mit ED parallel ist. Nun verhält sich (nach XII, 2.) AD : DB = FE : EB. Da nun aber erwiesen worden, daß AD < DB, so ist auch FE < EB, folglich EF kleiner als die Hälfte von FB. Da nun EG nur ein Theil von EF, also kleiner als EF ist, so ist noch vielmehr EG kleiner als die Hälfte von BF; was zu erweisen war.

§. 3. Lehnsatz.

Wenn man aus der Spitze eines Winkels ACB Fig. 164. einen Kreisbogen AB zwischen seinen Schenkeln beschreibt, und in dem einen Endpunkte A des Bogens eine Tangente AD bis zur Verlängerung des anderen Schenkels errichtet, so nennt man diesen zwischen den Schenkeln enthaltenen Theil AD der berührenden Linie die **Tangente des Bogens** AB, oder **des Winkels** ACB.

Anmerkung. In mathematischen Schriften braucht man die Benennung Lehnsatz von Sätzen, die aus einem andern Abschnitte **entlehnt** sind, d. h. dem Inhalte nach in einen andern gehören, als wo sie stehen. Sie bezieht sich daher nur auf die Stelle, nicht auf den Inhalt des Satzes. Unser Lehnsatz ist eine Erklärung aus der Trigonometrie.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn man zu einem Bogen, der kleiner als die halbe Kreislinie ist, eine Sehne zieht, in einem Endpunkte der Sehne eine Tangente, im anderen ein Loth errichtet, so ist das abgeschnittene Stück der berührenden Linie die doppelte Tangente des halben Bogens.

Beweis. Es sei AaB Fig. 165. der Bogen, in A sei die Tangente AC, in B das Loth BC errichtet. Es ist zu beweisen, daß AC die doppelte Tangente desselben Bogens AaB sei. Man ziehe Qe lothrecht durch die Sehne AB, so halbirt sie diese und den Bogen (VI, 11.), also auch die Linie AC in e (XII, 1.). Da nun AE die Tangente von Aa (§. 3.), so ist AC die doppelte Tangente des halben Bogens AaB.

§. 5. Lehrsatz.

Die Sehne AB Fig. 164. eines Bogens AEB (welcher zu einem spitzen Centri-Winkel gehört) ist kleiner, die Tangente AD aber größer als der Bogen.

Das erste ist unmittelbar klar aus I, 8. d.

Das andre läßt sich auf folgende Art beweisen. Man wähle im Bogen AEB den Punkt E beliebig, und den Punkt F so nahe bei diesem, daß man EF für gerade annehmen darf I, 3. Dann ziehe man durch diese Punkte die Linien CG, CH bis zur Tangente. Endlich beschreibe man aus C durch G den Bogen GI. Nun sind die Dreiecke CEF, CGI ähnlich, und es verhält sich CE : CG = EF : GI. Da nun CG > CE, so ist auch GI > EF. In dem bei I rechtwinkligen Dreieck GIH aber ist GH > GI, also noch vielmehr GH > EF.

Denkt man sich nun den ganzen Bogen AEB in lauter Theile wie EF getheilt, und Linien durch jeden Theilpunkt bis zur Tangente gezogen, so ist klar, daß jedes Stück der Tangente größer ist als das zwischen denselben Theilungslinien liegende Stück des Bogens; woraus folgt, daß die ganze Tangente größer ist als der ganze Bogen.

§. 6. Aufgabe.

Eine gerade Linie durch Construktion zu finden, welche von einem gegebenen Kreisbogen, der kleiner ist als die halbe Peripherie, um weniger verschieden ist, als irgend eine gegebene noch so kleine Größe.

Auflösung. Der zu rectificirende Kreisbogen sei der aus Q Fig. 165. beschriebene AB.

Man ziehe dessen Sehne AB, und errichte in B das Loth BC, in A die Tangente AC. Man halbire den Winkel CAB durch die Linie AD, und errichte in D auf AD das Loth DE. Dann halbire man weiter den Winkel CAD durch die Linie AF, und errichte in F auf AF das Loth FG. Hierauf halbire man weiter den Winkel CAF durch die Linie AH, und errichte in H auf AH das Loth HI.

In dieser Ordnung setze man die Arbeit fort, so weit es angeht, indem man immer den vom Winkel CAB noch übrigen Rest halbirt vermittelst einer bis zu dem nächst vorhergehenden Loth gezogenen Linie, und in dem Endpunkte dieser Linie ein neues Loth bis AC errichtet.

Dann läßt sich erweisen, daß von jeden zwei aus A nach den Endpunkten eines Lothes gezogenen Linien die eine größer, die andere kleiner sei als der Bogen. Nämlich AB kleiner, AC größer; AD kleiner, AE größer; AF kleiner, AG größer; AH kleiner, AI größer ꝛc. als der Bogen. Ferner, daß der Unterschied jeder zwei solcher Linien, die zu einem Loth gehören, kleiner sei, als der halbe Unterschied der beiden zu dem nächst vorhergehenden Loth gehörigen Linien; daß folglich, wenn die Arbeit hinlänglich weit fortgesetzt wird, der Unterschied zuletzt nach §. 1. kleiner werden müsse, als jede noch so kleine gegebene Linie.

Beweis.

1. Zuerst kann man beweisen, daß die Linie AD den Bogen AB in a halbirt. Denn zöge man die Sehne aB, so ist nach VII, 8. Winkel CAD = ABa, und da nach der Zeichnung CAD = DAB, so ist auch ABa = BAa, also Bogen Aa = aB (VI, 19.). Auf dieselbe Art ist erweislich, daß der Bogen Aa durch die Linie AF in b, der Bogen Ab durch die Linie AH in c u. s. f. halbirt werde.

2. Betrachtet man nun das Dreieck ABC, so ist in demselben die Sehne AB kleiner als der Bogen (§. 6.).

Zieht man aber aus Q durch a die Linie Qe, so halbirt diese die Sehne in d, und steht auf derselben winkelrecht (VI, 10. und 9.), ist also parallel mit BC. Daher wird AC durch die Linie Qe in e halbirt (XII, 1.). Nun ist Ae die Tangente des Bogens Aa (§. 3.) und größer als Aa (§. 5.), folglich die doppelte Tangente AC größer als der doppelte Bogen Aa, d. h. größer als der Bogen AaB.

3. Man betrachte weiter das Dreieck ADE. Hier ist zuerst die Linie AD in a halbirt (XII, 1.), also AD der doppelten Sehne Aa gleich. Da nun die Sehne Aa kleiner ist als der Bogen Aa, so ist auch die doppelte Sehne AD kleiner als der doppelte Bogen, d. h. kleiner als der Bogen AaB.

Errichtet man nun in a die Linie af winkelrecht auf AD, also parallel mit DE, so ist Af die doppelte Tangente des halben

Bogens Aba (§. 4.), d. h. die doppelte Tangente des Bogens AB. Das Loth af halbirt aber die Linie AE in f (XII, 1.), also ist AE die vierfache Tangente des Bogens Ab. Da nun die Tangente von Ab größer ist, als der Bogen Ab, so ist die vierfache Tangente desselben, also AE, größer als der vierfache Bogen Ab, d. h. größer als der Bogen AaB.

4. Betrachtet man ferner das Dreieck AFG, so läßt sich, wenn man in b ein Loth auf AF errichtet, auf ähnliche Art beweisen, daß AF = vier Sehnen Ab, also ist AF kleiner als AaB.

Ferner, daß AG = acht Tangenten des Bogens Ac, also AG > 8Ac, d. h. größer als AaB.

Eben so läßt sich weiter zeigen, daß in dem Dreieck AHI die Linie AH = acht Sehnen des Bogens Ac, also:

AH < 8 Bogen Ac, d. h. kleiner als AaB.

Desgleichen, daß die Linie AI = sechzehn Tangenten des halben Bogens Ac, also größer als sechszehn halbe Bogen Ac, d. h. größer als AaB u. s. f.

5. Wir wollen die Ergebnisse dieser Schlüsse zu leichterer Uebersicht nochmals zusammenstellen.

Was die Linien AB, AD, AF, AH ꝛc. betrifft, so war AB die Sehne des ganzen Bogens, AD die doppelte Sehne des halben Bogens, AF die vierfache Sehne vom vierten Theil des Bogens, AH die achtfache Sehne vom achten Theil des Bogens u. s. f. Da nun AD > AB, AF > AD, AH > AF u. s, f., so ist klar, daß sich diese Linien wachsend der Größe des Bogens AaB nähern.

Was ferner die Linien AC, AE, AG, AI ꝛc. betrifft, so war AC die doppelte Tangente des halben Bogens, AE die vierfache Tangente vom vierten Theil des Bogens, AG die achtfache Tangente vom achten Theil des Bogens, u. s. f. Da nun AE < AC, AG < AE, AI < AG u. s. f., so ist klar, daß sich die Linien abnehmend der Größe des Bogens AaB nähern.

Aber nach §. 2. ist AE — AD < $\frac{1}{2}$ [AC — AB], ferner AG — AF < $\frac{1}{2}$ [AE — AD], weiter AI — AH < $\frac{1}{2}$ [AH — AF], u. s. f. u. s. f.

Wird daher die beschriebene Arbeit hinlänglich weit fortgesetzt, so muß man nothwendig einmal zu zwei Linien (wie AI und AH) gelangen, deren Unterschied von einander kleiner ist, als irgend eine noch so kleine Größe. Da aber allezeit eine dieser Linien größer, und die andere kleiner ist als der Bogen, so muß ihr Unterschied vom Bogen um so mehr kleiner gemacht werden können, als jede noch so kleine Größe, die sich angeben läßt, was zu erweisen war.

§. 7. Zusatz.

Durch wirkliche Theilung vermittelst der Hand und des Auges kommt man bald genug zu einem Paar Linien wie AH und AI, deren Längenunterschied dem Auge nicht mehr wahrnehmbar ist. Eine solche Linie wird also dem Bogen so genau gleich sein, als es das Auge beurtheilen kann.

In der Vorstellung aber findet keine Gränze in der Theilung des Winkels CAB statt, und man kann sich daher die im vorigen §. beschriebene Arbeit ohne Ende fortgesetzt denken. Dann ist klar, daß sich sowohl die Linien AB, AD, AF, AH ꝛc., als die Linien AC, AE, AG, AI ꝛc. der Länge des Kreisbogens AaB ohne Ende nähern, und derselben so nahe kommen werden, daß der Unterschied kleiner wird als jede noch so kleine Größe, welche sich angeben läßt.

Wie größere Bogen als der Halbkreis, zu rectificiren sind, ist leicht einzusehen.

§. 8. Zusatz.

Angenommen AI sei schon dem Kreisbogen AaB gleich, so wird, wenn man QI zöge, das Dreieck AQI dem Ausschnitt AaBQ gleich sein (§. 8. des Abschn.). Und da dieses rein geometrisch in ein Rechteck und Quadrat verwandelt werden kann, so ist klar, daß auch jeder Kreisausschnitt quadrirt werden kann; woraus sich ohne Schwierigkeit Methoden würden ableiten lassen, auch jeden Abschnitt, ja überhaupt jedes bloß von Kreisbogen und geraden Linien begränzte Stück im Kreise zu quadriren.

15*

Allgemeiner Anhang.

Einige Aufgaben zur Uebung in der geometrischen Analysis.

Vorerinnerung.

Unter der Benennung geometrische Analysis versteht man jetzt gewöhnlich alle von den Griechen gebrauchten Hülfsmittel zur Erfindung geometrischer Sätze und Auflösungen. In dem Sinne der Alten ist die Analysis aber nur die besondere Methode, nach welcher sie die Auflösung einer Aufgabe vorbereiteten, oder auch die Richtigkeit eines aufgestellten Lehrsatzes prüften.

Im Wesentlichen ist dies Verfahren nicht verschieden von demjenigen, welches in der Algebra angewendet wird, um aus den Bedingungen der Aufgabe die Fundamentalgleichung herzuleiten. Man nimmt an, das Gesuchte sei bereits gefunden, und entwirft davon eine Zeichnung nach dem Augenmaaße. Hierauf untersucht man, welche Eigenschaften die in der Zeichnung vorkommenden Stücke haben müßten, wenn die Annahme richtig wäre. Zu diesem Ende muß man die mit der Aufgabe verwandten Lehrsätze immer gegenwärtig haben, und in der Figur alle diejenigen Hülfslinien zeichnen, durch welche die Anwendung dieser Lehrsätze anschaulich wird.

Nach dieser Vorbereitung läßt sich leicht beurtheilen, ob durch die in der Aufgabe gegebenen Stücke auch dasjenige Stück bestimmt werde, von welchem die Auflösung eigentlich abhängt, und man begreift, daß durch diese Betrachtung sich ausmitteln läßt, ob und wie die Aufgabe gelöst werden könne. Diese vorläufige Betrachtung nannten die Griechen die Analysis, d. i. Auflösung auf dem umgekehrten Wege. In der Synthesis (d. i. Anordnung) ordneten sie dagegen die einzelnen Theile der Construction nicht so, wie sie in der Analysis darauf geführt wurden, sondern nach dem Gesetz der möglichsten Kürze und Zierlichkeit. Die hier folgenden Aufgaben sind bestimmt, dem Anfänger einen deutlichen Begriff von dieser Methode zu geben.

§. 1. Aufgabe.

Es sind zwei Winkel eines Dreiecks und die Summe aller drei Seiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Man nehme an, die Aufgabe sei bereits gelöst, und ABC Fig. 166. sei das gesuchte Dreieck. Macht man nun die Verlängerung BE = AB, und die Verlängerung CD = AC, so ist ED die gegebene Summe der Seiten; ABC und ACB aber mögen die gegebenen Winkel sein. Zieht man nun AE, so ist ABE ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel AEB = EAB = $^1/_2$ABC; zieht man ferner AD, so ist auch ACD ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel ADC = CAD = $^1/_2$ ACB. In dem Dreieck AED sind also die Seite ED und die beiden anliegenden Winkel bekannt, das ganze Dreieck läßt sich also durch Zeichnung finden. Da nun der Winkel EAB = AEB, so ist auch AB der Lage nach gegeben, und weil sie die ED schneiden muß, so ist sie auch der Größe nach bestimmt. Da ferner der Winkel CAD = ADC, so ist auch AC der Lage nach gegeben, und weil sie ebenfalls die ED schneiden muß, so ist sie auch der Größe nach bestimmt.

Aus den angestellten Betrachtungen erhellet, wie die Zeichnung zu machen und der Beweis zu führen sei.

Synthesis. Es sei ED die gegebene Summe der Seiten, x und z die gegebenen Winkel. An den Punkt E der Linie ED lege man den Winkel AED = $^1/_2$x und an den Punkt D eben dieser Linie lege man nach derselben Seite hin den Winkel ADE = $^1/_2$z. Der Durchschnittspunkt der angelegten Schenkel heiße A. An den Punkt A der Linie AE lege man nun den Winkel EAB = AED, und an den Punkt A der Linie AD lege man den Winkel DAC = ADE, so schließen die Linien AB und AC mit ED das verlangte Dreieck ein.

Beweis. Es ist zu beweisen,

a) daß AB + BC + AC = ED,
b) daß Winkel ABC = x, und ACB = z.

a. Da nach der Zeichnung der Winkel EAB = AED, so ist AB = EB, und da Winkel DAC = ADE, so ist AC = CD; es ist also AB + BC + AC = EB + BC + CD = ED.

b. Da der Winkel ABC = AEB + EAB = 2AED, so ist ABC = x; und da ACB = ADC + CAD = 2ADE, so ist ACB = z; was bewiesen werden sollte.

§. 2. Aufgabe.

Es ist eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Man nehme an, die Aufgabe sei bereits gelöst, und ABC Fig. 167. sei das gesuchte Dreieck, BC die gegebene Seite, ABC der gegebene Winkel. Verlängert man nun BA bis D, und macht AD = AC, so ist BD die gegebene Summe der beiden unbekannten Seiten. Zieht man hierauf CD, so sind in dem Dreieck BDC ein Winkel DBC, und die beiden einschließenden Seiten BD und BC gegeben, und das Dreieck kann durch Zeichnung gefunden werden. Das Dreieck ADC ist aber gleichschenklig, folglich der Winkel ACD = ADC, und die Linie AC ist also der Lage und der Größe nach gegeben, sobald man an den Punkt C der Linie CD einen Winkel ACD = ADC anlegt.

Synthesis und Beweis sind demnach leicht auszuführen.

§. 3. Aufgabe.

Es ist eine Seite, ein anliegender Winkel und der Unterschied der beiden anderen Seiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Man nehme an, ABC Fig. 168. und 169. sei das gesuchte Dreieck, BC die gegebene Seite, ABC der gegebene Winkel.

a. Ist nun AB die kleinere Seite, wie in Fig. 168.; so verlängere man AB über B hinaus bis D, so daß AD = AC wird, und ziehe die Linie DC; so ist BD der gegebene Unterschied der Seiten AB und AC, und in dem Dreieck DBC sind die Seiten BC und BD und der eingeschlossene Winkel DBC gegeben; die Seiten unmittelbar, der Winkel als Nebenwinkel zu dem gegebenen ABC. Das Dreieck BDC läßt sich folglich durch Zeichnung finden.

In dem gleichschenkligen Dreieck ADC ist demnach die Grundlinie DC, und ein Winkel an der Grundlinie ADC, folglich auch das ganze Dreieck so gegeben, daß es gezeichnet werden kann.

Zeichnet man es, so findet man DA, und da DB bekannt ist, so ist auch BA gefunden; und da nun auch der Winkel ABC und die Seite BC gegeben sind, so ist das Dreieck ABC so bestimmt, daß es gezeichnet werden kann.

b Ist aber AB die größere Seite wie Fig. 169., so schneide man auf derselben von A aus ein Stück AD = AC ab, und ziehe DC, so ist BD der gegebene Unterschied der Seiten BA und AC und in dem Dreieck BDC sind die Seiten BC, BD und der eingeschlossene Winkel DBC gegeben. Das Dreieck kann daher durch Zeichnung gefunden werden.

In dem gleichschenkligen Dreieck ADC ist demnach die Grundlinie DC, und der Winkel an der Grundlinie ADC als Nebenwinkel von BDC bekannt; das Dreieck kann daher durch Zeichnung gefunden werden.

Wenn nun AD bekannt ist, so ist auch AD + DB oder AB bekannt, und das Dreieck ABC ist durch die Seiten AB, BC und den eingeschlossenen Winkel ABC so bestimmt, daß es gezeichnet werden kann.

Synthesis und Beweis ergeben sich hieraus leicht.

Anmerkung. Die Analysis zeigt, wie unter den angegebenen Bedingungen zwei Dreiecke gefunden werden können. Soll daher die Aufgabe völlig bestimmt sein, so muß bemerkt werden, ob der gegebene Winkel der größeren Seite, wie bei a), oder der kleineren, wie bei b), gegenüber liegt.

Aus der Analysis ergeben sich auch zugleich die Bestimmungen, unter denen, wenn die drei genannten Stücke beliebig gegeben sind, das Dreieck nur gezeichnet werden kann. Es ist schon an sich klar (II, 8. d.), daß kein Dreieck möglich ist, worin der Unterschied zweier Seiten größer als die dritte ist, folglich darf DB nicht größer als BC gegeben sein.

Aus der Betrachtung von Fig. 168. ergiebt sich nun, daß unter der ebengedachten allgemeinen Voraussetzung aus jeden drei solchen Stücken ein Dreieck ABC gefunden werden kann, wenn in dem durch die Bestimmungsstücke gegebenen Dreieck, BDC spitzig ist; denn da BD < BC, so ist auch der Winkel BCD < BDC; und da nun ACD = ADC, so fällt AC auch so, daß es mit den Schenkeln des gegebenen Winkels ABC ein Dreieck einschließt.

Sehen wir aber auf Fig. 169., so ergiebt sich leicht, daß die aus b) folgende Synthesis nur möglich ist, wenn in dem Dreiecke BDC, welches die Bestimmungsstücke ergeben, der Winkel BDC ein stumpfer Winkel ist. Denn wäre er ein rechter oder ein spitzer, so würde der Winkel ADC entweder ein rechter oder stumpfer sein. Da nun Winkel ACD = ADC, so würde in beiden Fällen der Schenkel BA von der Linie CA nach dieser Seite hin nicht geschnitten werden können.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

1. Daß, wenn der gegebene Winkel ABC ein rechter oder größer ist, nur ein Dreieck möglich ist, und im letzteren Falle nur

dann, wenn in dem nach a) entstandenen Dreieck BDC der Winkel BDC spitzig ist oder $BC^2 < BD^2 + DC^2$.

2. Daß, wenn der gegebene Winkel ABC spitzig ist, nur in den Fällen zwei Dreiecke möglich sind, wenn in dem nach b) aus den Bestimmungsstücken gezeichneten Dreieck BCD Fig. 169. der Winkel BDC stumpf ist, oder $BC^2 > BD^2 + DC^2$. (Vergl. zu 1) und 2) noch III, 11., V. Anh. 15., 14.)

§. 4. Aufgabe.

Es ist eine Seite eines Dreiecks, der Gegenwinkel derselben, und die Summe der ihn einschließenden Seiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Es sei ABC Fig. 170. das gesuchte Dreieck, BC die gegebene Seite, BAC der gegebene Winkel. Verlängert man nun BA über A hinaus bis D, so daß $AD = AC$, so ist BD die gegebene Summe der Seiten, und wenn man DC zieht, so sind in dem Dreieck BCD die Seiten BD und BC und der Winkel BDC, welcher der kleineren BC gegenüber liegt, gegeben. Aus diesen Bestimmungsstücken lassen sich (III, 20.) in vielen Fällen zwei Dreiecke zeichnen. Zeichnet man eins derselben, z. B. DBC, so wird DAC ein gleichschenkliges Dreieck, und es ist nun die Lage der Linie AC, welche das Dreieck ABC abschneidet, gegeben, weil der Winkel $ACD = \frac{1}{2}BAC$ (II, 10. und III, 8.). Zeichnet man das andere, z. B. DBc und zieht ca parallel mit CA, so wird acD ein gleichschenkliges Dreieck, und es ist die Lage von ca eben so gegeben.
Synthesis und Beweis sind leicht durchzuführen.

Anmerkung. Die Analysis zeigt, daß man in vielen Fällen auf zweierlei Weise ein solches Dreieck erhalten kann, wie in Fig. 170. das Dreieck BAC und das Dreieck Bac. Es läßt sich aber beweisen, daß diese beiden Dreiecke congruent sind, daß also durch die angegebenen Bestimmungsstücke ein Dreieck vollständig bestimmt ist.

Es ist nämlich $AC = AD$, $ac = aD$, $BC = Bc$ nach der Construction; also Winkel $ADC = ACD = acD$, und $BCc = BcC$. Dies vorausgesetzt, erkennt man leicht

$$ACB = 2R - (ACD + BCc) \text{ nach I, 15.}$$
$$aBc = 2R - (ADC + BcC) \text{ nach II, 11.}$$

Es ist also Winkel $ACB = aBc$; aber auch $Bac = BAC$ (I, 23. a.) und (wie gesagt) $BC = Bc$, folglich Dreieck ABC congruent mit aBc (III, 7.).

§. 5. Aufgabe.

Es ist eine Seite eines Dreiecks und ihr Gegenwinkel, und außerdem der Unterschied der beiden anderen Seiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Es sei ABC Fig. 169. das gesuchte Dreieck; gegeben die Seite BC und der Winkel BAC; ist nun AC die kleinere Seite, so schneide man von der größeren ein Stück ab, AD = AC, dann ist BD der gegebene Unterschied der Seiten AC und AB. Da nun ADC ein gleichschenkliges Dreieck, und in diesem der Winkel an der Spitze gegeben ist, so ist dadurch die Größe des Winkels an der Grundlinie ADC bestimmt. In dem Dreieck BDC sind also die Seiten BC und BD, und der Winkel BDC als Nebenwinkel von ADC gegeben, und BDC als stumpfer Winkel ist auch der Gegenwinkel der größeren Seite. Das Dreieck BDC läßt sich also geometrisch zeichnen (III, 18.); dadurch erhält man aber den Winkel DBC. Folglich sind in dem Dreieck ABC die Seite BC und zwei Winkel von bestimmter Lage, nämlich ABC und BAC gegeben; aus welchen Stücken das Dreieck gezeichnet werden kann.

Die Synthesis und der Beweis sind sehr leicht aus dieser Analysis abzuleiten.

Auch versuche man die Analysis der Aufgabe an Fig. 168., indem man annimmt, daß AB kleiner als AC. Zur Uebung kann man eine besondre Anwendung auf ein rechtwinkliges Dreieck machen, zu welchem die Hypotenuse und der Unterschied der Katheten gegeben sind. Der Winkel ABC erhält dann eine bestimmte unveränderliche Größe.

§. 6. Aufgabe.

Es sind zwei Winkel eines Dreiecks und die Summe ihrer Gegenseiten gegeben; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Es sei Fig. 167. ABC das gesuchte Dreieck, worin die Winkel bei B und C, und die Summe der Seiten, die den Winkel A einschließen, gegeben ist. Verlängert man BA bis D, so daß AD = AC, und zieht DC, so ist BD die gegebene Summe der Seiten BA und AC, und da die Winkel B und C gegeben sind, so ist auch BAC gegeben, mithin auch BDC = $\frac{1}{2}$BAC; da ACD gleichschenklig ist. In dem Dreieck BCD ist also eine Seite BD mit den beiden anliegenden Winkeln bei D und B gegeben. Das Dreieck kann also gezeichnet werden. Dadurch wird aber auch BC gegeben, und weil der

Winkel BCA gegeben ist, so kann nun das Dreieck BAC gezeichnet werden.

Synthesis und Beweis sind leicht aus dieser Analysis abzuleiten.

Eine besondere Anwendung läßt sich von dieser Analysis für die Auflösung folgender Aufgabe machen: Ein Quadrat zu verzeichnen, wenn die Summe der Diagonale und der Seite bekannt ist. Denkt man sich nämlich das Dreieck BCA rechtwinklig bei C, und $BC = CA$; so sieht man leicht ein, daß es dann die Hälfte eines Quadrates ist, indem sich die Größe der Winkel bei B und C von selbst ergiebt, die Größe von $BA + AC$ aber gegeben sein kann.

§. 7. Aufgabe.

Es sind zwei Winkel eines Dreiecks gegeben nebst dem Unterschiede der Gegenseiten; man soll das Dreieck zeichnen.

Analysis. Gesetzt ABC Fig. 168. sei das gegebene Dreieck, in welchem die Winkel bei B und C und der Unterschied der Seiten, die den Winkel A einschließen, gegeben sind. Verlängert man nun die kleinere dieser Seiten AB so weit bis D, aß $AD = AC$, und zieht DC, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck DAC die Größe des Winkels an der Grundlinie bei D gegeben; weil mit den Winkeln ABC und ACB auch zugleich der Winkel bei A gegeben ist. BD ist aber der gegebene Unterschied $AC - AB$, und der Winkel DBC ist gegeben als Nebenwinkel von ABC, also kann das Dreieck DBC gezeichnet werden. Damit ist aber auch BC gegeben, und das Dreieck ABC kann demnach gezeichnet werden, weil die Winkel und eine Seite gegeben sind.

Synthesis und Beweis folgen leicht aus dieser Analysis.

Eine besondere Anwendung dieser Analysis giebt die Aufgabe: Ein Quadrat zu zeichnen, wenn der Unterschied der Diagonale und der Seite gegeben ist. Man denke sich das Dreieck ABC bei B rechtwinklig, und $AB = CB$, so ist es die Hälfte eines Quadrates, zu dem die Winkel bei B und C sich von selbst ergeben, der Unterschied aber $AC - AB$ d. i. DB gegeben sein kann. Der Winkel BDC erhält hier gleichfalls eine bestimmte Größe.

Unabhängig von der vorigen läßt sich diese Aufgabe in folgender Art behandeln.

Analysis. Es sei ABC Fig. 171. das gleichschenklige, und bei A rechtwinklige Dreieck, welches die Hälfte des gesuchten Quadrates sein würde. Man mache $BD = BA$, so ist DC der gegebene Unterschied der Diagonale BC und der Seite BA.

Zieht man nun AD, und errichtet zugleich in D die winkelrechte DE, so ist ABD ein gleichschenkliges Dreieck, wo der Winkel ABD = $\frac{1}{2}$R, folglich BAD = ABD = $\frac{3}{4}$R. Daher ist in dem Dreieck ADE der Winkel EAD = $\frac{1}{4}$R. Der Winkel ADC ist = $\frac{5}{4}$R, und zieht man Winkel EDC = R davon ab, so bleibt Winkel ADE = $\frac{1}{4}$R, folglich ist Winkel EAD = ADE, und AE = ED. Noch aber ist ED = DC, weil Winkel DCE = CED = $\frac{1}{2}$R sein muß. Es ergiebt sich also, wie man aus der gegebenen Linie CD zuerst CE und darauf AE, folglich auch AC als die Seite des gesuchten Quadrates finden könne.

Synthesis. Ueber DC, dem gegebenen Unterschiede der Diagonale und der gesuchten Seite errichte man das Quadrat DCFE, und ziehe dessen Diagonale CE. Hierauf mache man die Verlängerung EA = DE, so wird AC die Seite des gesuchten Quadrates sein.

§. 8. Aufgabe.

Es ist eine unbegränzte Linie CD Fig. 172. und außerhalb derselben sind auf einer Seite zwei Punkte A und B gegeben; man soll den Punkt der unbegränzten Linie finden, welcher von beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

Analysis. Man nehme an, daß E der gesuchte Punkt, also AE = BE sei. Zieht man nun BA, so ist E die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ABE. Nun weiß man, daß wenn man in der Mitte von AB, in F, eine winkelrechte Linie errichtet, diese durch E gehen muß (VI, 13.); da aber E auch in der Linie CD liegen soll, so muß E der Durchschnittspunkt der Linien CD und FE sein.

Synthesis und Beweis ergeben sich leicht.

§. 9. Aufgabe.

Es ist eine unbegränzte Linie CD Fig. 173. und außerhalb derselben sind auf einer Seite zwei Punkte A und B gegeben; man soll aus A und B nach einem Punkte E der unbegränzten Linie zwei gerade Linien ziehen, die mit derselben gleiche Winkel bilden.

Analysis. Man nehme an, der gesuchte Punkt E sei bereits gefunden, und es sei Winkel AEC = BED. Fällt man nun aus A die winkelrechte AF, und verlängert sie, bis sie die Verlängerung von BE in G schneidet, so ist die Congruenz der Dreiecke AEF und FEG einleuchtend, denn FE = FE, Winkel AFE = GFE und AEF = BED = FEG; folglich ist AF = FG. Da man nun aus jedem Punkte A auf die unbegränzte CD eine Winkelrechte fällen, und diese, so weit man will, verlängern kann, so ist in der Figur AF = FG, mithin der Punkt G gegeben. Da nun auch B ein gegebener Punkt ist, so ist auch die Linie BG und ihr Durchschnittspunkt mit CD d. h. der Punkt E, gegeben.

§. 10. Aufgabe.

Der Durchschnittspunkt zweier convergirenden Linien kann aus irgend einem Grunde nicht gefunden werden; man soll beide durch eine gerade Linie durchschneiden, so daß die innern Winkel auf einer Seite der Durchschnittslinie einander gleich werden.

Analysis. Man nehme an, die convergirenden Linien BA und DC Fig. 174. würden durch EF, wie es verlangt wird, geschnitten, so daß der Winkel AEF = CFE. Errichtet man nun in E auf AB die winkelrechte EH, und fället man von E aus auf CD die winkelrechte EG, so ist GEF + EFG = FEH + AEF = R; da also EFG = AEF, so ist auch GEF = FEH.

Die Linie EF halbirt also den Winkel GEH. Da nun die Winkelrechten GE, EH in jedem Punkte E gezogen werden können, und jeder Winkel GEH geometrisch halbirt werden kann, so ist die Lage von EF gegeben.

Synthesis und Beweis ergeben sich leicht aus der Analysis.

§. 11. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck soll ein Parallelogramm eingeschrieben werden, welches die Hälfte des Dreiecks sei.

Analysis. Man nehme an, die Aufgabe sei schon gelöst, und das Parallelogramm DEFB Fig. 175. sei die Hälfte des ganzen Dreiecks ABC, auch sei AG die Höhe des Dreiecks, und DH die Höhe des Parallelogramms. Weil nun ED ‡ BC, so ist AD : AB = AE : AC. Würde nun blos ein Parallelogramm verlangt: so reichte es hin, durch einen beliebigen Punkt D die geraden Linien DE ‡ BC und hierauf EF ‡ AB zu ziehen. Da aber DEFB = $\frac{1}{2}$ ABC sein soll, so überlege man, daß ein Parallelogramm gewiß die Hälfte eines Dreiecks sein wird, wenn sowohl die Höhe als die Grundlinie des Parallelogramms die Hälfte von der Höhe und der Grundlinie des Dreiecks ist. Der Aufgabe wird also genügt werden, wenn

$DE = \frac{1}{2}$ BC und $DH = \frac{1}{2}$ AG ist. Beides wird aber der Fall sein, wenn $AD = \frac{1}{2}$ AB, und $AE = \frac{1}{2}$ AC ist. Aus dieser Betrachtung erhellt, wie die Punkte D und E gefunden, und das Parallelogramm $DEFB = \frac{1}{2}$ ABC vollendet werden kann.

Anmerkung. Um deutlich einzusehen, daß die Auflösung nur auf diesem Wege, nämlich durch Halbirung einer Seite oder der Höhe des Dreieckes möglich ist, stelle man die Analysis noch auf folgendem Wege an:

Es sei DEFB Fig. 175. das gesuchte Parallelogramm, $= \frac{1}{2}$ ABC. Man ziehe AG und DH winkelrecht auf BC, so läßt sich die Fläche des Dreiecks ABC ausdrücken durch $\frac{1}{2}\, AG \times BC$, und die Fläche des Parallelogramms durch $DH \times BF$; es verhält sich also

$$DF : ABC = DH \times BF : \frac{AG \times BC}{2} = 1 : 2,$$

oder $DH \times BF : AG \times BC = 1 : 4$. Da aber AG und DH parallel sind, so ist

$$AG : DH = AB : BD.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so erhält man

$$DH \times BF \times AG : AG \times BC \times DH = AB : 4\ BD,$$

und, wenn man die Glieder des ersten Verhältnisses nacheinander durch die gleichen Factoren DH und AG dividirt,

$$BF : BC = AB : 4\ BD;$$

da aber $BF = DE$ und DE parallel mit BC ist, so ist

$$BF : BC = AD : AB.$$

Folglich ist $AD : AB = AB : 4\ BD$,
mithin $AB^2 = 4\ AD \times DB$ oder $\frac{1}{4}\ AB^2 = AD \times BD$.

Dies ist aber nur möglich, wenn $AD = DB$ ist, weil das Rechteck unter zwei ungleichen Abschnitten einer Linie immer kleiner als das Quadrat der Hälfte, oder kleiner als $\frac{1}{4}$ von dem Quadrate der ganzen Linie ist (VI, Anh. 6.). Also ist $DB = \frac{1}{2}$ BA, folglich ist der Punkt D bestimmt, und das Parallelogramm DF kann nunmehr vollendet werden.

Anmerkung. Man sieht leicht ein, daß unzählige Parallelogramme zwischen den Parallelen DE und BC über der Grundlinie DE gezeichnet werden können, welche sämmtlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Eine leichte Folgerung aus dieser Aufgabe ist der folgende Lehrsatz.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn man die Seiten eines Vierecks halbirt, und die Theilungspunkte je zweier anstoßender Seiten durch gerade Linien verbindet, so schließen diese eine Parallelogramm ein, das der Hälfte des gegebenen Vierecks gleich ist.

Anleitung zum Beweise. In Fig. 176. sind die Halbirungspunkte der Seiten des Vierecks ABCD durch die Linien FG, GH, HE, EF verbunden; es ist zu beweisen a) daß FGHE ein Parallelogramm ist, und b) daß es halb so groß als das Viereck ABDC ist. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist, da in dem Dreieck ABC, $BA : BF = BC : BG = 2 : 1$, die Linie FG mit der Diagonale AC parallel (XII, 5.). Eben so wird auch bewiesen, daß EH mit AC parallel ist, woraus die Parallelität von FG und EH folgt. Auf gleiche Weise wird gezeigt, wie sowohl EF als GH mit DB, also unter sich parallel sind, woraus a) folgt.

Um b) zu beweisen, erwäge man, daß durch AC das Parallelogramm FH in zwei andere FK und KE getheilt wird, von denen nach dem vorigen §. $FK = \frac{1}{2}$ ABC und $KE = \frac{1}{2}$ ADC sein muß; woraus sich die Größe des ganzen Parallelogrammes in Beziehung auf das gegebene Viereck ergiebt.

§. 13. Aufgabe.

Ein gegebenes gleichschenkliches Dreieck in ein gleichseitiges von demselben Flächeninhalt zu verwandeln.

Analysis. Es sei ABC Fig. 177. das gegebene gleichschenklige Dreieck, und BG senkrecht auf der Grundlinie AC; ferner sei EDF das gesuchte gleichseitige Dreieck, und zwar liege die Grundlinie EF auf der Grundlinie AC, so daß der Punkt G die Mitte von EF ist, und daß also die Spitze D in der Verlängerung von BG liegt (VI, 13. mit Anwend. auf VI, 12.). Ferner ziehe man aus A und C Parallelen mit ED und FD, die sich in H schneiden, so ist AHC auch gleichseitig, und der Punkt H liegt in der Verlängerung von GD.

Da nun DG die Dreiecke DEF und ABC halbirt, so ist das Dreieck $DEG = ABG$, also ist auch $DG \times GE = AG \times GB$, woraus die Proportion folgt $BG : GD = EG : GA$. Da aber ED und AH parallel sind, so ist auch

$EG : GA = DG : GH$. Daher ist nun

$BG : GD = DG : GH$; mithin GD die mittlere Proportionale zwischen BG und GH; welche Linien beide durch Zeichnung gefunden werden können. Es kann also der Punkt D gefunden werden, also auch die Linien DE und DF, welche den Linien AH und HC parallel sind; das Dreieck EDF kann demnach gezeichnet werden.

Synthesis und Beweis ergeben sich leicht aus der Analysis.

Anmerkung. Da jedes Dreieck in ein gleichschenkliges geometrisch verwandelt werden kann, so zeigt diese Aufgabe, wie man jedes Dreieck geometrisch in ein gleichseitiges verwandeln könne.

§. 14. Aufgabe.

Einen Kreis von gegebenem Halbmesser so zu zeichnen, daß er beide Schenkel eines gegebenen Winkels berührt.

Analysis. Angenommen, die gesuchte Lage des Kreises um D Fig. 178. sei schon gefunden, und er berühre die Schenkel des gegebenen Winkels AEB in den Punkten A und C. Zieht man nun von seinem Mittelpunkte D Linien nach den Berührungspunkten A und C, und nach E, so stehen erstere winkelrecht auf den Schenkeln des Winkels (VIII, 3.), letztere halbirt den gegebenen Winkel bei E (VII, 7.). Nimmt man nun auf dem Schenkel AE irgend einen Punkt F an, und errichtet in demselben eine Winkelrechte FG, welche die Linie ED in G schneidet, so ist G der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser = FG, und der beide Schenkel des Winkels E berührt. Da nun in dem rechtwinkligen Dreieck EAD, FG parallel mit AD gezogen ist, so fällt die Proportion in die Augen $GF : EF = AD : EA$ (XII, 3.), in welcher die drei ersten Glieder gegeben sind, das letzte also gefunden werden kann. Ist aber EA gefunden, so ist der Punkt A gegeben, und zugleich die Linie AD der Lage nach als Winkelrechte auf EA, mithin da die Linie DE der Lage nach gegeben ist, auch der Punkt D, oder der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Da nun auch die Größe des Halbmessers AD gegeben ist, so kann der Kreis gezeichnet werden.

Synthesis und Beweis ergeben sich aus der Analysis.

§. 15. Aufgabe.

Es ist ein Kreis Fig. 179. und außer demselben eine begränzte gerade Linie DE gegeben, man soll von den Endpunkten derselben D und E durch einen zu suchenden Punkt B in der Peripherie zwei gerade Linien ziehen können, so daß, wenn man sie bis zur andern Seite der Peripherie verlängert, und ihre Endpunkte A und C verbindet, AC parallel DE sei.

Analysis. Gesetzt B sei der in dem Kreise ACB gesuchte Punkt, und die Sehne AC parallel mit der gegebenen Linie DE. Zieht man nun die Tangente AF, bis sie die Verlängerung von ED in F schneidet, so ist 1) der Winkel ACD = CDE (I, 23. b.), und 2) Winkel FAE = ACB (VII, 8.). Da ferner CDE + FDC = 2 R, so ist auch 3) FAE + FDC oder FAB + BDF = 2 R, und das Viereck FDBA kann nach VI, 25. als ein Viereck in einem Kreise angesehen werden, zu dem AB und FD Sehnen sind, die sich außerhalb des Kreises in E schneiden. Daher ist 4) AE × EB = FE × ED (VII, Anh. 4. Zus.). Das Rechteck AE × EB ist dem Quadrate einer aus E an den gegebenen Kreis gezogenen Tangente gleich (VII, Anh. 4.), also seiner Größe nach gegeben. Da aber auch die Größe von DE, der einen Seite von FE × ED = AE × EB, gegeben ist, so ist die andere Seite FE der Größe nach zu finden (XIII, 5.), und ihre Lage ist ebenfalls gegeben. Der Punkt F kann also gefunden werden, und wenn man von diesem die Tangente FA zieht, wird auch A gefunden. Dadurch ist aber die Linie AE und ihr Durchschnittspunkt mit dem Kreise B gegeben.

Synthesis und Beweis ergeben sich aus der Analysis.

Der Beweis muß so geordnet werden, daß die in der Analysis bezeichneten Schlüsse 1, 2, 3, 4, in umgekehrter Ordnung auf einander folgen; so daß sich aus dem ersten, der hier der letzte wird, die Parallelität der Linien AC und DE (durch Anwendung von I, 22. c.) ergiebt, wo man bei 3) die im §. 16. Anmk. gegebene Umkehrung von XIII, 8. anwenden muß.

§. 16. Zusätze.

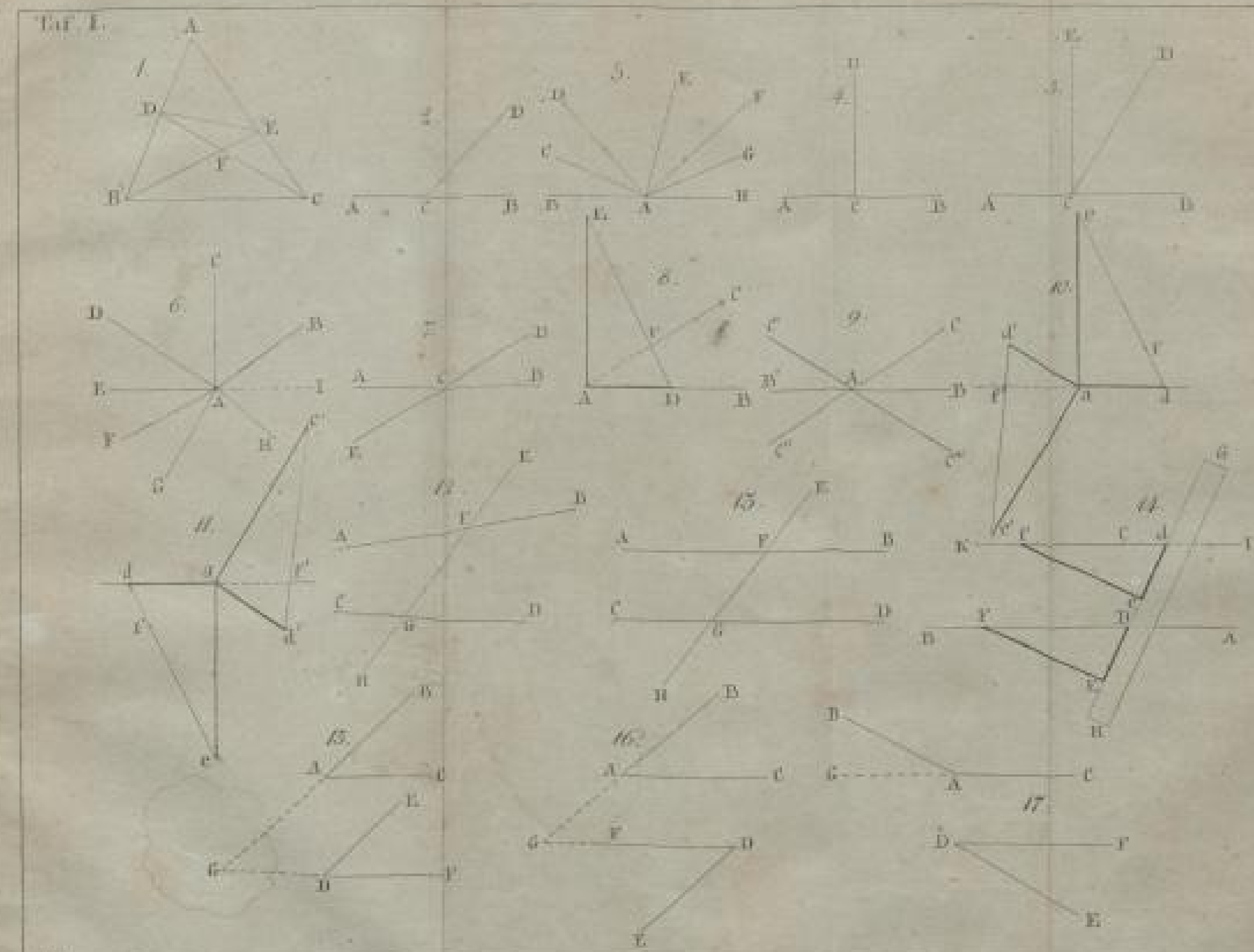
Zur Uebung mögen noch folgende Aufgaben dienen.

1) Aus Betrachtung und Ergänzung von Fig. 180 die Proportion zu entwickeln:

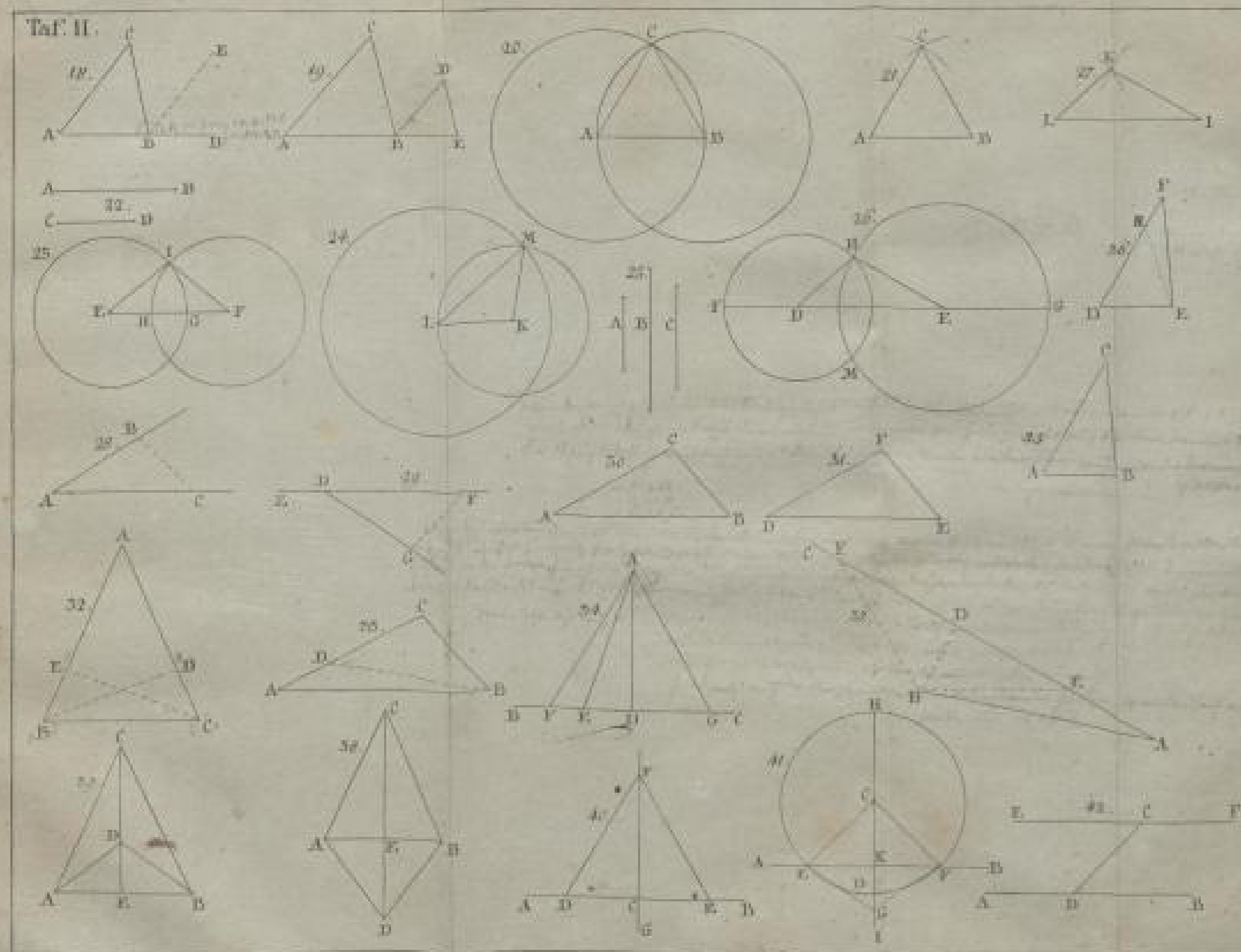
In jedem Dreieck verhält sich eine Seite zur Summe der beiden anderen, wie die Differenz dieser beiden anderen zu dem Unterschiede der Abschnitte, welche auf der ersten Seite durch ein von der Spitze des Gegenwinkels aus gefälltes Perpendikel gebildet werden.

2) Aus Betrachtung von Fig. 181 den Satz herzuleiten:

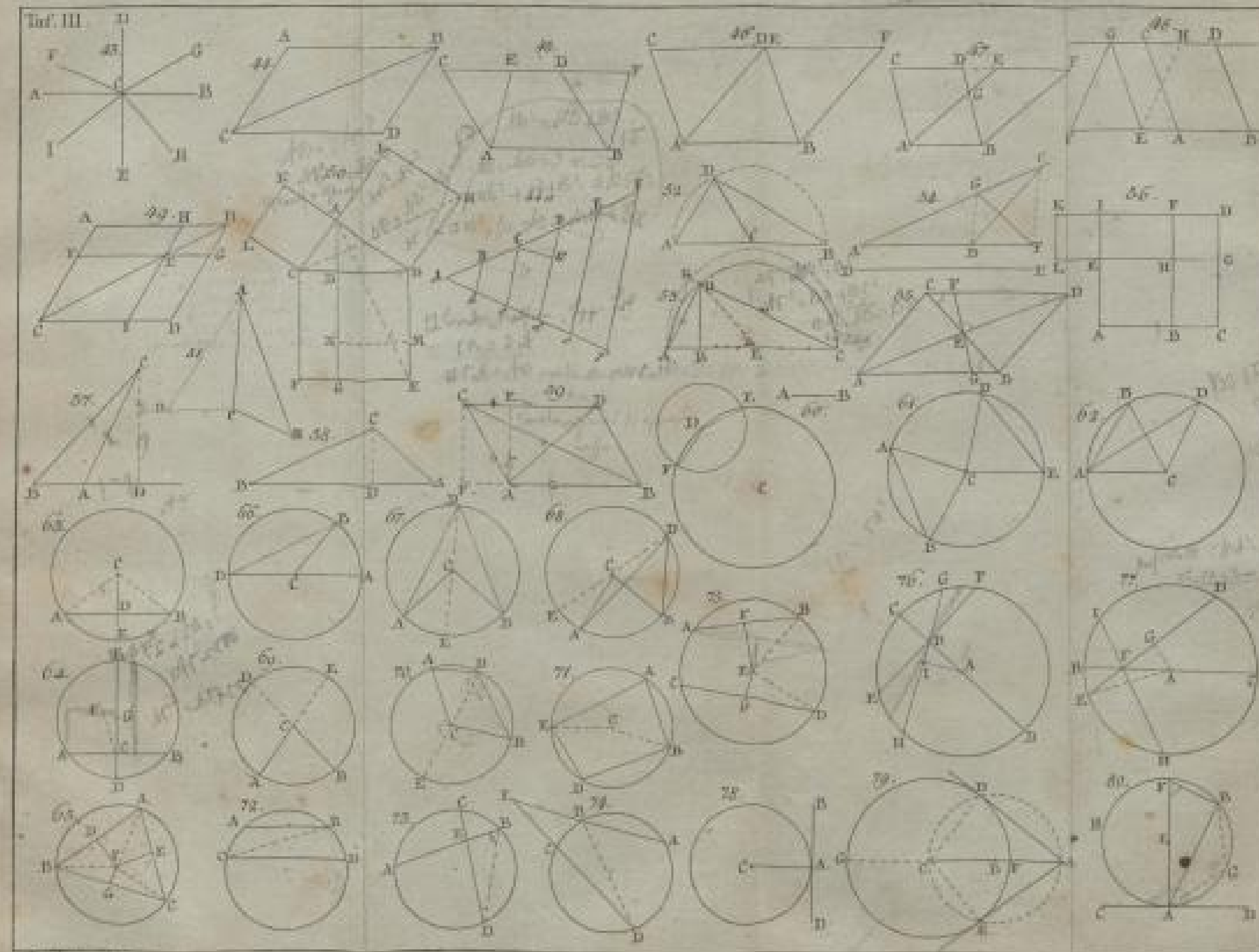
Wenn eine gerade Linie und ein Kreis gegeben sind, durch dessen Mittelpunkt ein Perpendikel auf die gerade Linie gefällt ist; so werden alle Linien, die durch die Durchschnittspunkte dieses Perpendikels mit der Kreislinie gelegt sind, von der Kreislinie und der geraden Linie so geschnitten, daß die Rechtecke unter den Abschnitten gleich sind.

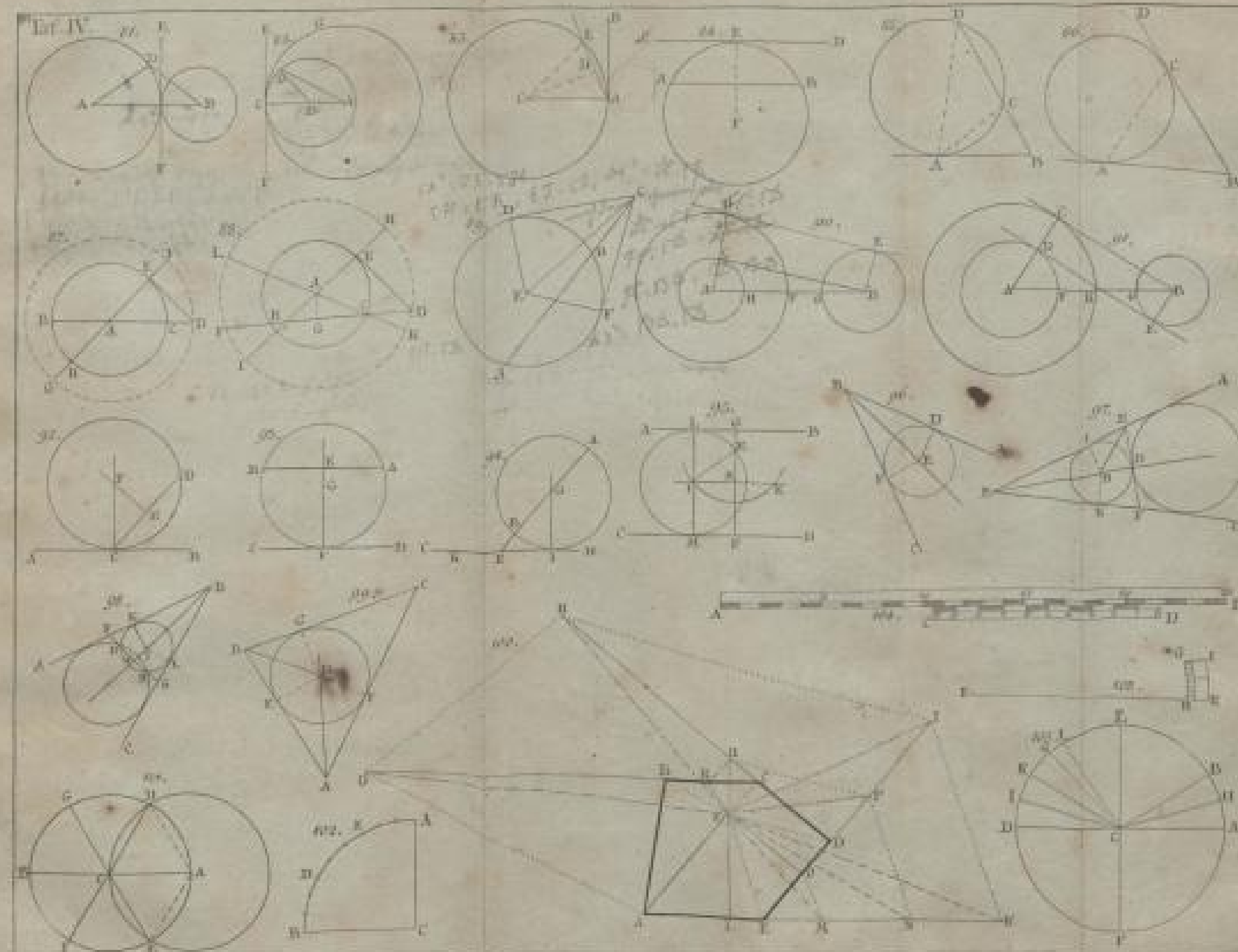


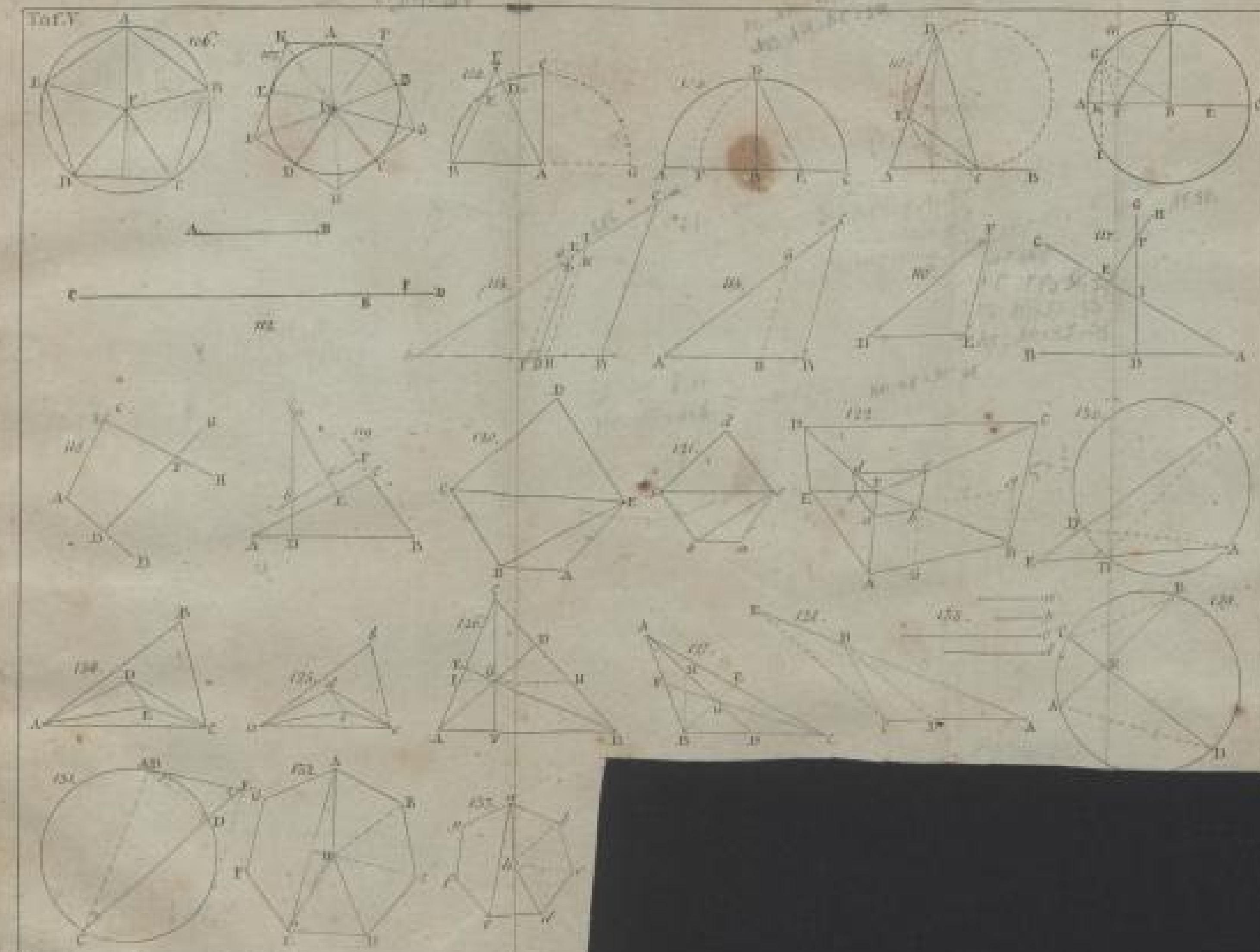
Fischer sc. Geom.

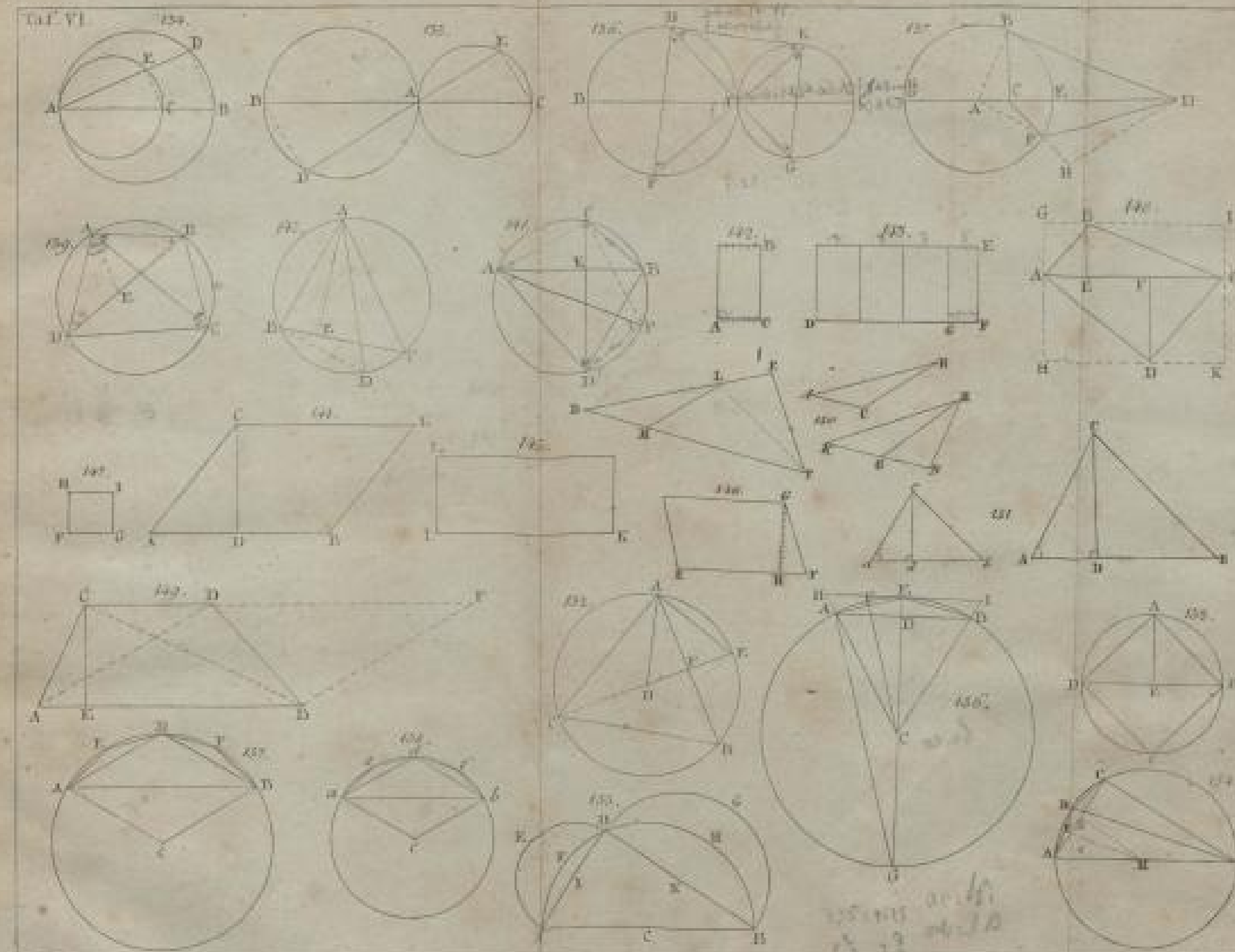


Fischer ob. Geom.


Tab. III.

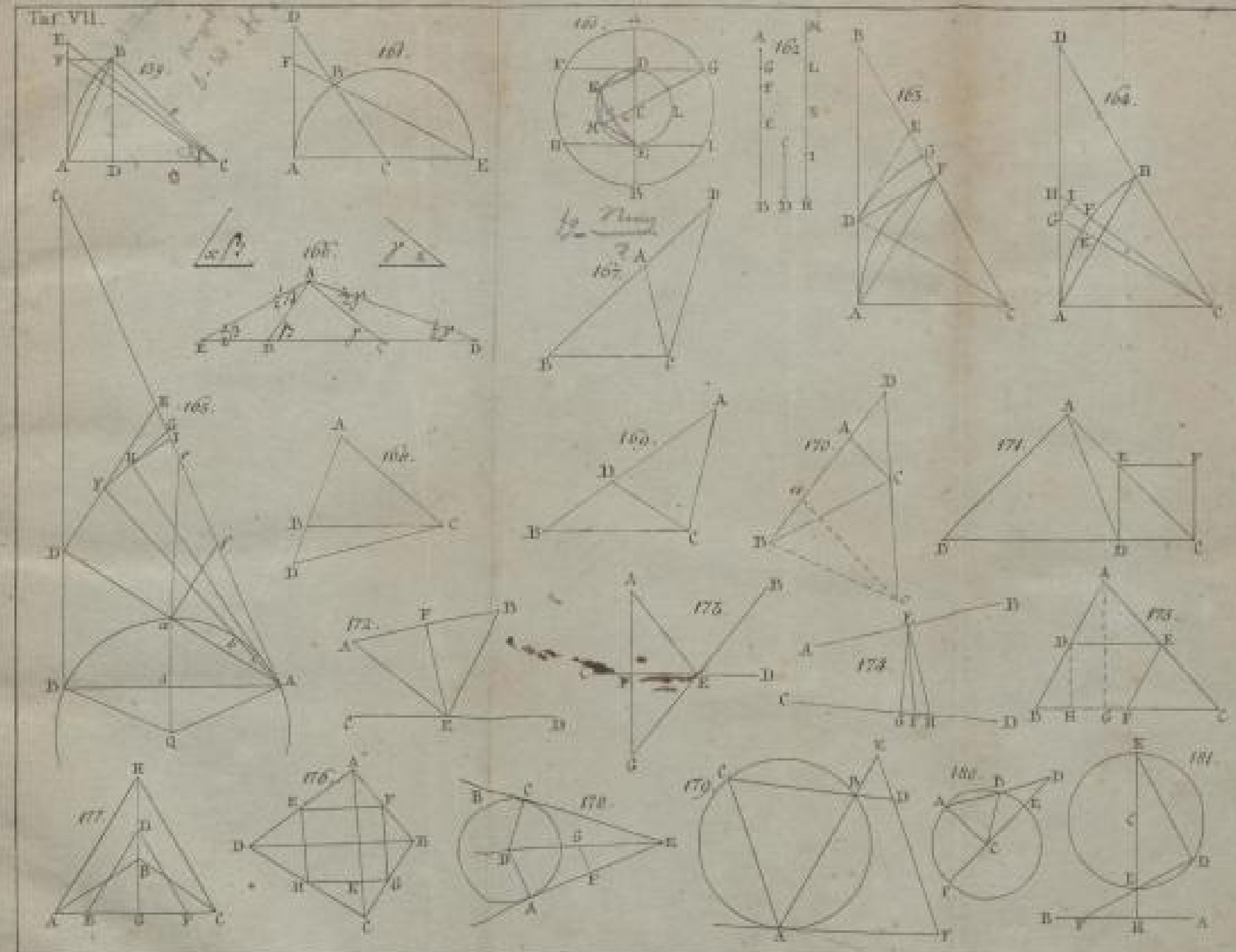

Tab. IV.





Fischer ob. Geom.

Taf. VII.



Fischer el. Geom.