welchem keine fünf benachbarten Polkanten der Pyramide existiren, d. h. wenn $\alpha = 90^\circ$ oder $= 120^\circ$; da aber $\cos 90^\circ = 0$ und $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, so liegt auch in diesen Fällen keine Ausnahme von dem Satze vor.

§ 4. Es ist leicht zu beweisen, dass *der kleinste Deckwinkel keine anderen Werthe haben kann, als 60°, 90°, 120° und 180°.*

Zunächst muss dieser Winkel einen ganzen Theil von 360° bilden. Es möge α der kleinste Deckwinkel sein, welcher der Deckaxe A (Fig. 4), die wir senkrecht zur Zeichnungsebene annehmen wollen, entspricht. Sei AB eine beliebige Richtung senkrecht zu A, welche unveränderlich mit dem Krystall verbunden bleibt, wenn derselbe um die Axe A gedreht wird. Seien B^I, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, B^V, B^{VI}, B^{VII} die aufeinanderfolgenden Stellungen, welche jene Richtung durch aufeinanderfolgende Drehungen des Krystalls, deren jede $= \alpha$, um die Axe A annimmt. Wenn α nicht einen ganzen Theil von 360° beträgt, so giebt es immer eine ganze Zahl n, für welche $(n-1)\,\alpha < 360^\circ$ und $n\alpha > 360^\circ$. Hiernach wird, wenn man den Krystall n Drehungen, jede $= \alpha$, um die Axe A, immer in demselben Sinne, unterworfen hat, die zuletzt erreichte Lage der Richtung AB zwischen die beiden ersten fallen, d. i. in der Figur B^{VII} zwischen B und B^I. Dann aber ist ohne Weiteres klar, dass man den Krystall, um wieder Deckung der Flächen zu bewirken, nur um einen Winkel $B^{VII}AB^I$ um die Axe A zu drehen braucht, und da der letztere Winkel kleiner als α ist, so widerspricht dies der gemachten Voraussetzung, dass α der kleinste Deckwinkel ist. Dieser Widerspruch verschwindet nur, wenn wir annehmen, dass α einen ganzen Theil von 360° bildet.

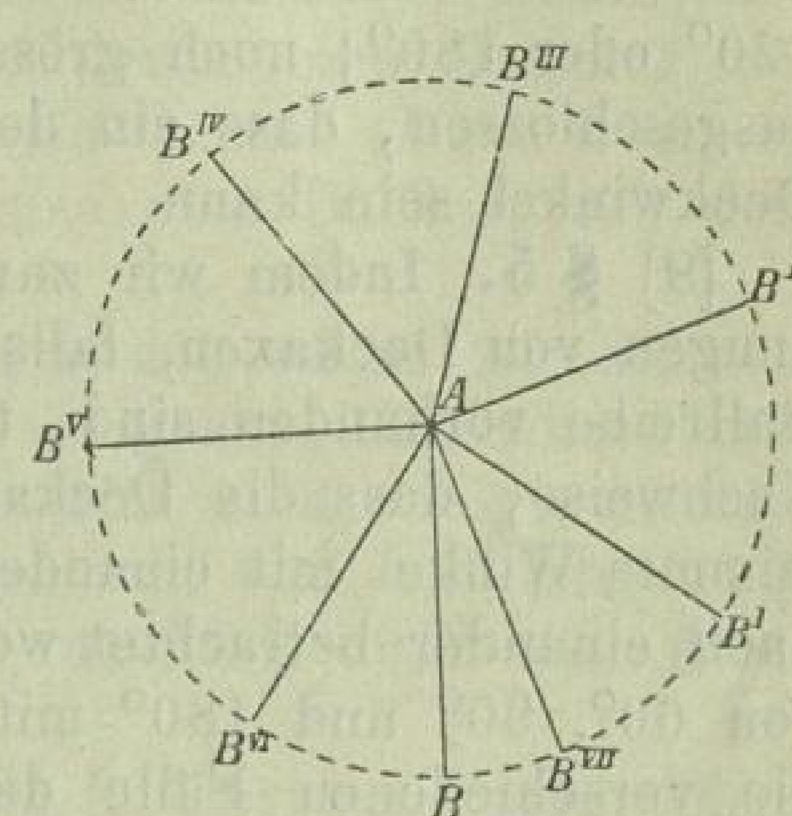

Fig. 4.

Auf der anderen Seite ist leicht einzusehen, dass $\cos \alpha$ einen rationalen Werth besitzen muss. Denn die aufeinanderfolgenden Stellungen, welche eine beliebige, gegen die Deckaxe geneigte Krystallfläche durch aufeinanderfolgende Drehungen α des Krystalls um diese Axe nach und nach annimmt, fallen