

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

A 344 Bergbaumaschinenwesen

1964

Rolf Gradewald

**Die Bewegungsvorgänge
an elektrisch angetriebenen
Kurbel-Feder-Hämmern**

(Experimentelle und theoretische Untersuchungen)

UB FREIBERG
FFH
A 344

VERLAG DEUTSCHER VERLAG FÜR GRUNDSTOFFINDUSTRIE



FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

A 344

Institut für Gaszerzeugung
an der Bergakademie
Freiberg/Sachsen

15. Dez. 1964

Ino. Nr. 2367

STADTBIBLIOTHEK FREIBERG
1874

Institut für Geschichte
an der TU Bergakademie
Freiberg
1. 1. 1874

Jan. 1874

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der Bergakademie Freiberg

A 344

BERGBAUMASCHINENWESEN

Die Bewegungsvorgänge an elektrisch angetriebenen Kurbel-Feder-Hämmern

(Experimentelle und theoretische Untersuchungen)

Von

ROLF GRADEWALD



VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie · Leipzig

Freib.Forsch.-H.	A 344	S. 108	37 Bilder	23 Oszillogramme	Leipzig, November 1964
------------------	-------	--------	-----------	------------------	------------------------

Von der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg
genehmigte Dissertation
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

Referent: Prof. Dr.-Ing. R. LIEBOLD

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. H. GÖCKE



XVI 9142, A 344 G

FBF

FFFH

„Freiberger Forschungshefte“, Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften. Herausgeber: Der Rektor der Bergakademie Freiberg, Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Wrana. — Verlag: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig W 31, Karl-Heine-Str. 27 (Fernruf 44441). — Die Freiberger Forschungshefte erscheinen in zwangloser Folge in den Reihen A, B, C und D. Ausführliches Verzeichnis aller lieferbaren Hefte von der Bergakademie Freiberg oder dem VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie. — Vertrieb: In der Deutschen Demokratischen Republik durch den Buchhandel; in der Deutschen Bundesrepublik und in Westberlin durch den Buchhandel (Auslieferung KUNST UND WISSEN, Erich Bieber, Stuttgart 8, Wilhelmstraße 4—6); in Österreich durch den GLOBUS-Buchvertrieb Wien I, Salzgries 16; im übrigen Ausland durch eine Importbuchhandlung, den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH, Leipzig C1, Postschließfach 276, oder den Verlag.
Gesamtherstellung: VEB Druckerei: „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza, VLN 152—915/130/64 — Alle Rechte vorbehalten — ES 20 F 1

INHALT

1. Vorbetrachtungen	7
1.1. Allgemeines über maschinelle Hämmer	7
1.2. Klassifizierung der Elektrohämmer	8

TEIL A: UNGEDÄMPFTER FEDERHAMMER

2. Mathematische Betrachtungen	13
2.1. Allgemeines	13
2.2. Bewegungsgleichung	14
2.3. Gleichung der Schlagarbeit	17
2.4. Diskussion der Gleichung der Schlagarbeit	17
2.5. Der Kurbelfederhammer als Zweimassensystem	20
2.6. Der Einschwingvorgang des Kurbelfederhammers	26
2.7. Energiekurven praktischer Federhämmer	36
3. Konstruktion des Modellhammers und seine Arbeitsweise	37
3.1. Problemstellung	37
3.2. Konstruktion der Anlage	37
3.3. Aufzeichnung der Schlagarbeit	39
3.4. Aufzeichnung der Bärbewegung	40
4. Messungen mit dem Modellhammer	41
4.1. Energiekurven des Modellhammers	41
4.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Blei	44
4.3. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Walzaluminium	48
4.4. Betrachtungen zu den Messungen	50

TEIL B: GEDÄMPFTER FEDERHAMMER

5. Mathematische Betrachtungen	53
5.1. Allgemeines	53
5.2. Bewegungsgleichung	54
5.3. Gleichung der Schlagarbeit	55
5.4. Diskussion der Gleichung der Schlagarbeit	56
5.5. Energiekurven praktischer Federhämmer	58

6. Konstruktion eines gedämpften Federhammers	59
6.1. Problemstellung	59
6.2. Konstruktion des Bärs	60
7. Messungen mit dem gedämpften Federhammer	61
7.1. Energiekurven des Modellhammers	61
7.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Eisen	63

TEIL C: FEDERHAMMER MIT VORSPANNUNG

8. Mathematische Betrachtungen	67
8.1. Allgemeines	67
8.2. Bewegungsgleichung	68
8.3. Erstes Näherungsverfahren	71
8.4. Zweites Näherungsverfahren	73
8.5. Drittes Näherungsverfahren	74
8.6. Verfahren der sukzessiven Approximation	77
8.7. Vergleich der Näherungsverfahren mit der Approximationsmethode	82
8.8. Energiekurven des gedämpften, vorgespannten Federhammers	83
9. Messungen mit dem vorgespannten Federhammer	85
9.1. Energiekurven des Modellhammers	85
9.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Eisen	86
9.3. Betrachtungen zum vorgespannten Federhammer	87

ANHANG

10. Auswertende Betrachtungen zum Federhammer	91
11. Literatur	93
OSZILLOGRAMME	95

1. Vorbetrachtungen

1.1. Allgemeines über maschinelle Hämmer

Als mit dem Anwachsen der Industrie die Nachfrage nach Erzen und Kohle immer größer wurde, setzte im Bergbau die Entwicklung maschinell getriebener Abbaugeräte ein. Die manuellen Abbaugeräte Schlägel und Eisen sowie Handbohrer wurden durch Abbauhämmer und Bohrgeräte ersetzt.

In der Entwicklung maschineller Hämmer, die sich nicht nur im Bergbau sondern ganz allgemein in der Industrie verfolgen läßt, bildeten sich zwei bis heute noch bestehende Grundrichtungen heraus: Preßlufthämmer und Elektrohämmer. Beide Hammertypen haben Vor- und Nachteile, so daß keiner als „Universalhammer“ angesehen werden kann. Es sind lediglich ihre Einsatzmöglichkeiten unterschiedlich. Die Vorteile der Preßlufthämmer liegen in der robusten Bauweise und in der Fähigkeit, Schläge mit großer Einzelschlagenergie auf den Meißel übertragen zu können. Die Nachteile der Preßlufthämmer sind die gleichen, die nahezu allen Preßluftgeräten anhaften: Unwirtschaftlichkeit und Schwerfälligkeit. Die Unwirtschaftlichkeit liegt einerseits in den hohen Anschaffungskosten, die durch den Bau der Preßluftanlage hervorgerufen werden, und andererseits in dem schlechten Wirkungsgrad und in der relativ niedrigen Stoßzahl begründet. Der Wirkungsgrad der Preßlufthämmer liegt bei 12 bis 15%. Die niedrige Stoßzahl führt zu einer geringen Arbeitsleistung. Schwerfällig sind sie deshalb, weil man beim Arbeiten immer an eine transportable oder ortsfeste Preßluftanlage gebunden ist.

Der elektrisch angetriebene Hammer besitzt im Gegensatz zum Preßlufthammer einen guten Wirkungsgrad (50 bis 80%) und ist sehr vielseitig verwendbar, da er überall an ein elektrisches Leitungsnetz angeschlossen werden kann. Er läuft mit einer hohen Stoßzahl und ist auch in der Anschaffung nicht so kostspielig wie der Preßlufthammer. Sein Nachteil liegt darin, daß er bei gleichem Gewicht nur Schläge auf den Meißel übertragen kann, die geringere Einzelschlagenergie besitzen als die der Preßlufthämmer.

Eben dieser letzte Punkt hat dazu geführt, daß sich speziell im Bergbau der Preßlufthammer immer mehr durchgesetzt hat. Es zeigt sich nämlich beim Arbeiten mit Abbauhämmern, daß der einzelne Schlag des Meißels eine bestimmte Mindestenergie besitzen muß, um eine Zertrümmerung des Gesteins und somit einen geringen Vortrieb herbeizuführen. Wird diese Mindestenergie nicht erreicht, dann gelingt es auch nicht durch Erhöhung der Stoßzahl, das Gestein loszubrechen. Der Elektrohämmer ist also dort im Abbau eingesetzt, wo es sich um die Förderung spröden Materials handelt und sein rentables Arbeiten ausgenützt werden kann. Zusätzlich muß erwähnt werden, daß Elektrohämmer in schlagwettergefährdeten Gebieten eine Gefahrenquelle darstellen.

Außerhalb des Bergbaus finden wir vielfache Einsatzmöglichkeiten des Elektrohammers. Es handelt sich dort um Arbeiten, die keine große Energie pro Einzelschlag erfordern, die aber andererseits eine große Wendigkeit und Freizügigkeit des Gerätes verlangen, z. B. im Hoch- und Tiefbau, beim Abbruch, bei Herstellung von Mauerdurchbrüchen für die Elektro-, Gas- und Wasserinstallation. Des weiteren findet man Elektrohammer zum Aufreißen von Straßendecken, zum Aufrauen von Betonflächen und zum Gleisstopfen. Es ist klar ersichtlich, daß bei all diesen Arbeiten der Fortfall einer kostspieligen und umständlichen Preßluftanlage die Nachteile des Elektrohammers überwiegt.

Es muß noch erwähnt werden, daß speziell beim elektrisch angetriebenen Federhammer das Auftreten der „Abbauhammerkrankheit“ entscheidend herabgesetzt wird. Bei dieser Krankheit handelt es sich um eine Gelenkentzündung, die vor allem beim Arbeiten mit Preßlufthämmern auftritt. Sie wird durch den ständigen harten Rückstoß des Hammers hervorgerufen und tritt in den Unter- und Oberarmgelenken auf. In schwächeren Fällen führt sie zu einem vorzeitigen Ermüden. Beim Federhammer wird dieser harte Rückschlag durch die Feder abgefangen.

Es zeichnet sich bereits die Tendenz ab, daß wegen der großen Beweglichkeit, wegen des rationellen Arbeitens, wegen der geringen Kapitalinvestitionen und wegen der erwähnten physiologischen Vorteile der Elektrohammer künftig mehr Verwendung finden wird als bisher.

1.2. Klassifizierung der Elektrohammer

Die Elektrohammer können wir nach ihrer Bauweise in zwei Gruppen einteilen: Elektromechanische Hämmer und Solenoidhämmer.

Bei den elektromechanischen Hämmern wird die benötigte mechanische Energie durch einen Elektromotor erzeugt, dessen rotierende Bewegung durch eine mechanische Übersetzung in eine geradlinige Vor- und Rückwärtsbewegung umgewandelt wird. Diese Bewegung wird dann durch Schlag auf den Meißel übertragen.

Bei den Solenoidhämmern wird die geradlinige Bewegung unmittelbar durch elektromagnetische Kräfte erzeugt. Es wird also die mechanische Übersetzung umgangen. Im Prinzip besteht ein derartiger Hammer aus einer Spule und einem beweglichen Eisenkern, der in die Spule hineingezogen wird. Diese geradlinige Bewegung wird zum Schlag ausgenützt. Die einzelnen Solenoidhammertypen unterscheiden sich lediglich in den speziellen Verfahren zur Änderung der Laufrichtung des Eisenkerns. Die Rückwärtsbewegung des Kerns kann einmal durch die Spannkraft einer Feder bewirkt werden, wobei der Strom zur Spule automatisch unterbrochen wird. Zum anderen kann die Rückwärtsbewegung des Kerns durch eine zweite Spule erreicht werden, die abwechselnd mit der ersten ein- und ausgeschaltet wird.

Die zuerst genannte Gruppe der elektromechanischen Hämmer kann man nach der Art der mechanischen Übersetzung in drei Typen einteilen:

1. Kurbel-Feder-Hämmer
2. Schraubenhämmer
3. besondere Systeme (Unwuchthämmer, Fliehkrafthämmer)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem ersten Typ, mit den Kurbel-Feder-Hämmern. Die Kurbelübersetzung ist eine der ältesten Methoden zur Umwandlung einer drehenden Bewegung in eine geradlinige. In bekannter Weise wird hierbei die Drehbewegung der Kurbel in eine Vor- und Rückwärtsbewegung des Kreuzkopfes umgeformt. Diese geradlinige Bewegung des Kreuzkopfes kann über einen Bär zum Schlag ausgenützt werden. Hierbei ist allerdings unangenehm, daß der Kreuzkopf in seiner äußersten Stellung die Geschwindigkeit Null hat, während der Bär in seiner äußersten Stellung, nämlich beim Schlag, seine größte Geschwindigkeit haben muß. Also muß zwischen Kreuzkopf und Bär ein Glied geschaltet werden, das die Phase der Geschwindigkeit verschiebt, so daß der Bär beim Schlag seine größte Geschwindigkeit hat. Diese Aufgabe erfüllt eine zwischen Kreuzkopf und Bär geschaltete Feder. Außerdem vergrößert die Feder die Amplitude des Bärs gegenüber der Amplitude des Kreuzkopfes und schwächt die vom Bär auf das Getriebe und auf den Motor übertragenen harten Schläge ab. Hierdurch wird die Schlagenergie vergrößert und die Bruchgefahr herabgesetzt.

So hat sich der Kurbel-Feder-Hammer herausgebildet, dessen zahlenmäßiger Einsatz um ein Vielfaches größer ist als der der übrigen Elektrohämmer.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die günstigsten Arbeitsbereiche der Kurbel-Feder-Hämmer herauszufinden, um dadurch die Einsatzmöglichkeiten zu erweitern.

TEIL A

Ungedämpfter Federhammer

2. Mathematische Betrachtungen

2.1. Allgemeines

Den konstruktiven Aufbau eines elektrisch angetriebenen Kurbelfederhammers zeigt Bild 1 (entnommen [10]¹⁾).

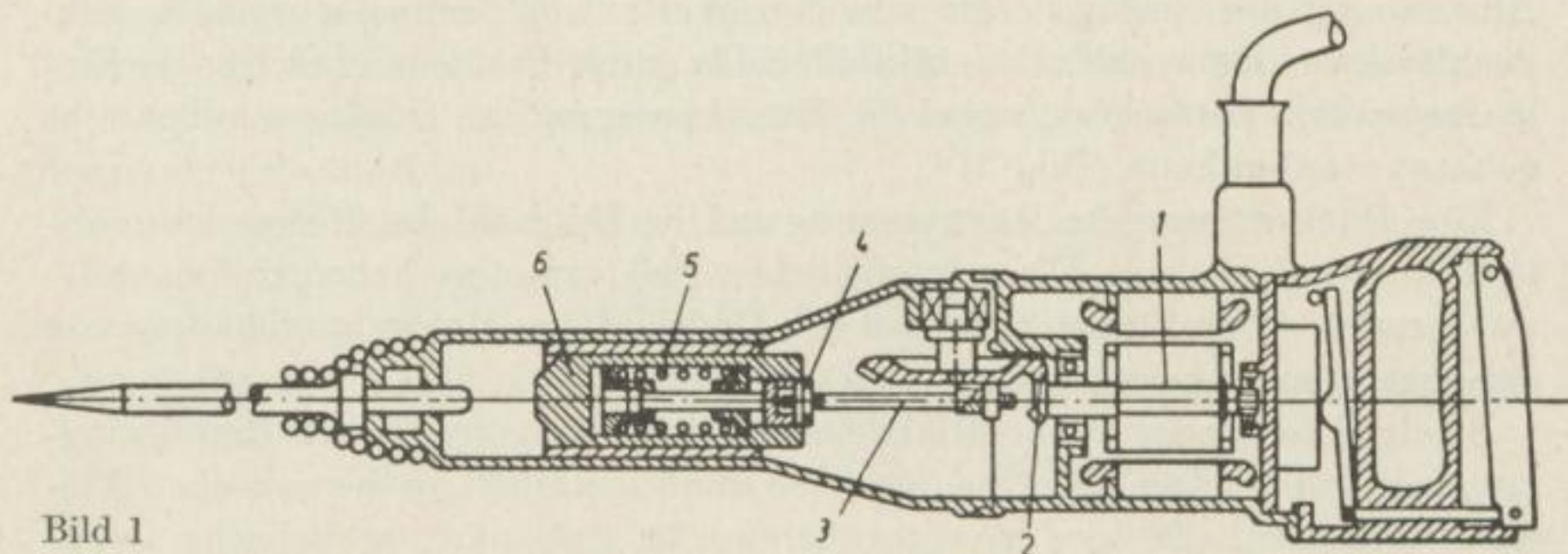
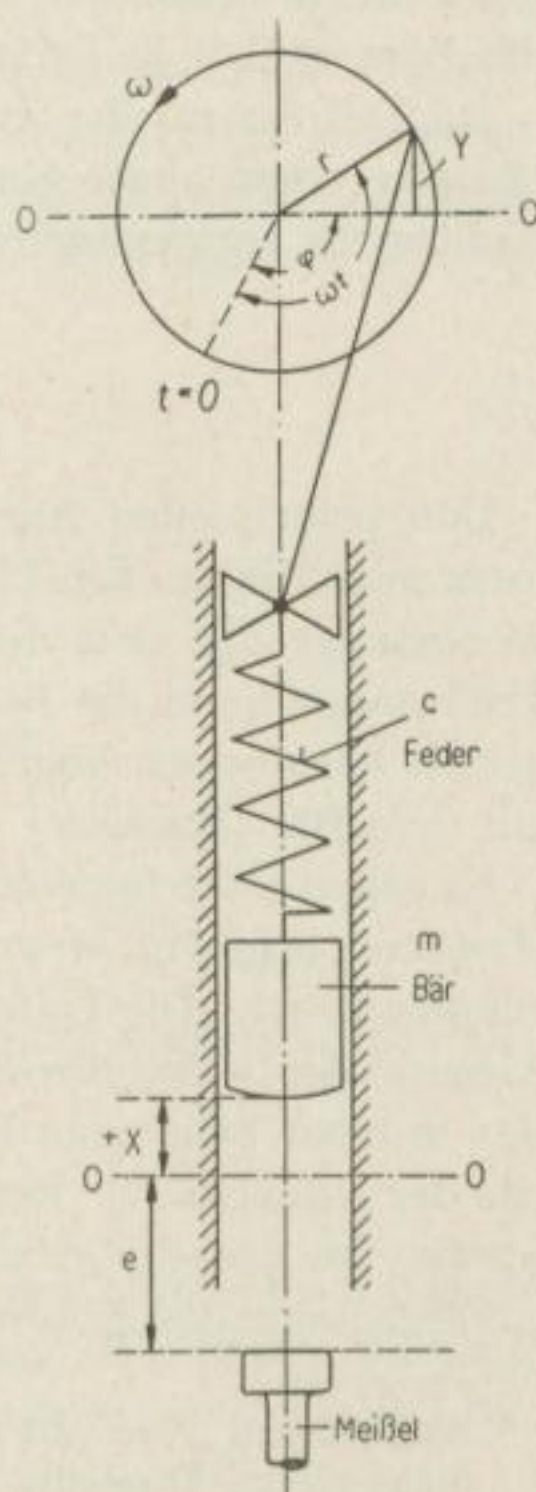


Bild 1

Bild 2

Im Gehäuse befindet sich der Elektromotor 1, der über ein Tellerradgetriebe 2 mit der Triebstange 3 gekoppelt ist. Die Triebstange ist über ein Gelenk 4 und eine Feder 5 mit dem in Schienen gleitenden Bär 6 verbunden. Der Bär selbst ist als Hohlzylinder gearbeitet, der im Innern die Feder beherbergt. Die Arbeitsweise dieser Bärkonstruktion wird im „Teil B“ ausführlich behandelt. Es sei hier nur angedeutet, daß der Bär im Prinzip ebenso arbeitet wie eine an einer Feder hängende Masse (siehe Bild 2). Der Meißel des Hammers (Bild 1) liegt mit einer Wulst am Gehäuse an, vor dem Herausfallen wird er mit einer Feder geschützt.

Ist der Hammer in Betrieb, dann wird er mit Hilfe des Handgriffs gegen das Gestein gedrückt. Der Meißel liegt mit seiner Wulst am Gehäuse. Gestein, Meißel und Gehäuse bilden also infolge der Andruckkraft ein starres, unbewegliches System. Durch die Bewegung des Bärs wird über die Feder



¹ Die Ziffern in eckigen Klammern geben die Literatur am Schluß der Arbeit an.

eine Gegenkraft auf das Gehäuse ausgeübt. Ist die Gegenkraft auf das Gehäuse größer als die Andruckkraft des Arbeiters gegen den Handgriff, dann hebt sich das Gehäuse vom Meißel ab. Es wird weiter unten gezeigt, daß bei Federhämmern mit den üblichen Schlagenergiewerten die Andruckkraft des Arbeiters im allgemeinen ausreicht, den Hammer daran zu hindern, sich vom Meißel abzuheben. Für einen Hammer, dessen Schlagenergiewerte etwa doppelt so groß sind wie die der gebräuchlichen Hämmer, werden die Bewegungskurven des Bärs und des Gehäuses und die Schlagenergie unter der Annahme eines Zweimassensystems berechnet. Es zeigt sich, daß die Abweichungen der Bewegungskurven und die Abweichung der Schlagenergie von den Werten des Einmassensystems vernachlässigbar klein sind. Es wird daher das ganze Problem zunächst als Einmassensystem betrachtet, wobei die Eigenbewegung des Gehäuses außer acht gelassen werden kann (Bild 2) ¹.

Eine Rückwirkung der Bärbewegung auf die Drehzahl des Motors kann unberücksichtigt bleiben. Die gebräuchlichen Elektromotore haben eine nahezu waagerechte Charakteristik, so daß die Drehzahl des Motors unabhängig von der abgegebenen Leistung ist.

Bei der Lösung der Differentialgleichung der Bewegung bleiben Einschwingvorgänge unberücksichtigt, die nur einen unnötig großen mathematischen Aufwand erfordern. Es wird von vornherein der stationäre, periodische Bewegungsablauf behandelt, bei dem die Drehzahl der Kurbel gleich der Schlagzahl des Bärs ist [10], da lediglich dieser Fall in der Praxis von Bedeutung ist ².

Im Teil A wird der Einfluß der Reibung auf die Bärbewegung als vernachlässigbar klein angesehen. In den Teilen B und C wird die Vernachlässigung nicht mehr vorgenommen.

2.2. Bewegungsgleichung

Den prinzipiellen Aufbau eines elektrisch angetriebenen Kurbelfederhammers zeigt Bild 2. Ein Elektromotor dreht eine Kurbel (Radius r), die über eine Triebstange mit dem Kreuzkopf verbunden ist. Bei genügender Länge der Triebstange kann die Bewegung des Kreuzkopfes mit hinreichender Genauigkeit als harmonisch angesehen werden. An dem Kreuzkopf hängt die Feder c mit dem Bär (Masse m).

Es sollen jetzt folgende Bezeichnungen eingeführt werden: Die Nulllage des Hammers liegt vor, wenn die Kurbel in der Mittelstellung steht und die Feder entspannt ist. Die Unterkante des Bärs gibt hierbei die Nullebene an. Der Abstand der Schlagebene des Meißels von der Nullebene sei e . Befindet sich der Bär in einer beliebigen Lage, dann sei der Abstand der Unterkante des Bärs von der Nullebene x . Befindet sich der Bär oberhalb der Nullebene, dann sei x positiv, im umgekehrten Fall negativ. Die Federkonstante sei c und ω die Kreisfrequenz des Motors.

¹ Siehe hierzu Abschnitt 2.5.

² Siehe hierzu Abschnitt 2.6.

Es wurde bereits erwähnt, daß wir von Einschwingungsvorgängen absehen und die Bärbewegung erst dann betrachten wollen, wenn sich der stationäre, periodische Bewegungsablauf eingestellt hat. Soll die Bärbewegung $x(t)$ in möglichst einfacher Form dargestellt werden, so ist es angebracht, aus dem stationären, periodischen Bewegungsablauf eine Periode herauszugreifen und an ihr die Berechnung vorzunehmen. Hierbei ist es vorteilhaft, die Zeitählung mit dem Aufschlag dieser einen Periode zu beginnen. (Es soll uns nicht stören, daß das Einschalten des Motors weit früher zu einem negativen Zeitpunkt erfolgte.)

Die Kurbel möge zur Zeit $t = 0$, also beim Aufschlag, den Winkel φ mit der Nulllinie einschließen (siehe Bild 2). Der Winkel φ ist zunächst noch unbekannt. Er wird so bestimmt, daß im periodischen Bewegungsablauf der Aufschlag im Zeitpunkt $t = 0$ erfolgt.

Zu einer beliebigen Zeit t hat der Kurbelzapfen die Lage

$$y = r \sin (\omega t - \varphi) .$$

Es ergibt sich somit für den Bär die Differentialgleichung der Bewegung:

$$m \ddot{x} = -c [x - y] = -c [x - r \sin (\omega t - \varphi)]$$

oder

$$m \ddot{x} + c x = c r \sin (\omega t - \varphi) . \quad (1)$$

Wir haben die Gleichung einer erzwungenen Schwingung vor uns. Die allgemeine Lösung einer derartigen inhomogenen linearen Differentialgleichung ergibt sich als Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$x_1 = a \sin (\omega t - \varphi) , \quad (2)$$

wobei man für die Amplitude erhält:

$$a = \frac{c r}{c - m \omega^2}$$

oder, mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, schließlich:

$$a = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} .$$

Durch den Aufschlag des Bärs wird die Eigenschwingung angeregt. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist:

$$x_2 = A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t . \quad (3)$$

Die beiden Integrationskonstanten A_0 und B_0 ergeben sich durch die Anfangsbedingungen, die uns allerdings noch nicht bekannt sind. Wir haben lediglich verlangt, daß sie so bestimmt sind, daß sie den stationären, periodischen Bewegungsablauf liefern.

Die Merkmale des stationären, periodischen Bewegungsablaufs haben, mathematisch formuliert, folgendes Aussehen:

1. Zur Zeit $t = 0$ soll der Aufschlag erfolgen, also

$$x(0) = -e. \quad (4)$$

2. Nach einer vollen Periode $\omega t = 2\pi$ soll wieder der Aufschlag erfolgen, also

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -e. \quad (5)$$

3. Hat der Bär zur Zeit $t = 0$ die Rückprallgeschwindigkeit v_R und zur Zeit $\omega t = 2\pi$ die Aufschlaggeschwindigkeit v_A , dann bildet das Verhältnis dieser beiden Geschwindigkeiten den Rückprallkoeffizient k , also

$$\frac{v_R}{v_A} = -k. \quad (6)$$

(Das Minuszeichen gilt wegen der unterschiedlichen Richtungen beider Geschwindigkeiten.) Der Rückprallkoeffizient k ist eine Stoffkonstante, die vom Material des Abbaus und von Form und Material des Bärs und des Meißels abhängt. Sie liegt zwischen 0 und +1.

Damit haben wir drei Bedingungsgleichungen für die Berechnung der drei Unbekannten A_0 , B_0 und φ .

Als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) erhalten wir aus (2) und (3) die Bewegungsgleichung:

$$x = (a \cos \varphi) \sin \omega t - (a \sin \varphi) \cos \omega t + A_0 \cos \omega_0 t + B_0 \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

Hieraus ergibt sich die Geschwindigkeit:

$$\dot{x} = \omega (a \cos \varphi) \cos \omega t + \omega (a \sin \varphi) \sin \omega t - A_0 \omega_0 \sin \omega_0 t + B_0 \omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (7a)$$

Mit Hilfe der Gl. (4), (5), (6) und (7a) lassen sich die Koeffizienten der Gl. (7) berechnen. Sie liefern:

$$a \cos \varphi = -A_0 \varepsilon,$$

$$a \sin \varphi = A_0 + e,$$

$$B_0 = A_0 \tan \frac{\omega_0}{\omega} \pi,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1-k}{1+k} \cdot \tan \frac{\omega_0}{\omega} \pi,$$

$$A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon^2 (a^2 - e^2)}}{1 + \varepsilon^2}.$$

Die Gl. (7) gilt in dem Bereich $0 < \omega t < 2\pi$. Dem Aufschlag ist dadurch Rechnung getragen, daß an den Grenzen $\omega t = 0$ und $\omega t = 2\pi$ der Ort und das Geschwindigkeitsverhältnis des Bärs festgelegt sind. Aus der laufenden Folge der experimentellen Schlagbewegungen wird also eine herausgegriffen und mathematisch betrachtet. Die vollständige Bewegung erhält man, wenn man den Kurvenverlauf, der sich im Bereich $0 < \omega t < 2\pi$ ergibt, laufend aneinandersetzt.!

2.3. Gleichung der Schlagarbeit

Die Arbeit, die der Bär bei jedem Schlag an den Meißel abgibt, ist die Differenz der kinetischen Energien des aufschlagenden und des zurückprallenden Bärs, also:

$$A_S = \frac{m}{2} (v_A^2 - v_R^2)$$

oder

$$A_S = \frac{m}{2} v_R^2 \cdot \frac{1 - k^2}{k^2}.$$

Bestimmen wir v_R aus der Bewegungsgleichung (7), dann erhalten wir die Schlagarbeit

$$\left. \begin{aligned} A_S &= 2 m (r \omega)^2 \cdot \frac{1 + k}{1 - k} \cdot y^2, \\ y &= \frac{A_0}{r} \cdot \varepsilon = \frac{-\frac{e}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2}\right)}}{1 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.4. Diskussion der Gleichung der Schlagarbeit

Liegen die Größen m , r , ω und k fest, dann hängt die Schlagarbeit nach Gl. (8) nur noch von y und damit von den Verhältnissen ω_0/ω und e/r ab. Die Größe y hat also in dieser Form universellen Charakter, da sie nicht von speziellen Hammergrößen, sondern nur von den Verhältnissen der Hammergrößen zueinander abhängt.

Die in der Praxis mit den üblichen Spitzeisen vorkommenden Rückprallkoeffizienten liegen bei $k = 0,2$. Zur Ermittlung dieses Wertes wurde ein Spitzeisen auf verschiedene Unterlagen gesetzt (Sand, Lehm, Gestein) und ein Bär mit gerader Schlagfläche darauf fallen gelassen. Aus dem Verhältnis von Fallhöhe zu Rückprallhöhe konnte der Rückprallkoeffizient k berechnet werden. Es ergab sich ein mittlerer Wert von $k = 0,2$, wobei der Einfluß der verschiedenen Unterlagen des Spitzeisens relativ gering war.

Da die Kenntnis von y uns auch Aussagen über die Schlagarbeit ermöglicht, ist in Bild 3 y in Abhängigkeit von ω_0/ω eingezeichnet, wobei e/r als Parameter benutzt wird.

Wie wir aus der Gl. (8) entnehmen können, existieren zu jeder Frequenz zwei y -Werte, die positiv und negativ sein können. Technisch realisierbar sind nur die positiven y -Werte. Negative y -Werte würden einer negativen Rückprallgeschwindigkeit entsprechen. Dieser Fall ist technisch nicht möglich.

Die Kurven des Bildes 3 zeigen einige interessante Besonderheiten: Im Resonanzpunkt ($\omega_0/\omega = 1$) ist y und damit die Aufschlagarbeit für alle Abstandsverhältnisse e/r gleich groß. Ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Erregerkreisfrequenz ($\omega_0/\omega = 2; 3; 4; \dots$), dann wird die Schlagarbeit Null.

Für uns von Bedeutung ist die Erkenntnis, daß außerhalb dieser Punkte Bereiche existieren, in denen die Schlagarbeit erheblich höhere Werte annehmen kann als im Resonanzpunkt. Wie aus Bild 3 zu entnehmen ist, liegen diese Bereiche je nach den Verhältnissen e/r oberhalb oder unterhalb der Resonanzkreisfrequenz. Es wurde schon angedeutet, daß man ganz unvoreingenommen erwartet hätte, die größte Schlagenergie wird im Resonanzpunkt übertragen. Aus der Theorie geht hervor, daß man mit einem derartigen Federhammer außerhalb des Resonanzpunktes Schläge übertragen kann, die eine größere Schlagenergie abgeben als die im Resonanzpunkt. Es ergibt sich hierdurch die Möglichkeit, den Anwendungsbereich der elektrisch angetriebenen Federhämmer zu erweitern.

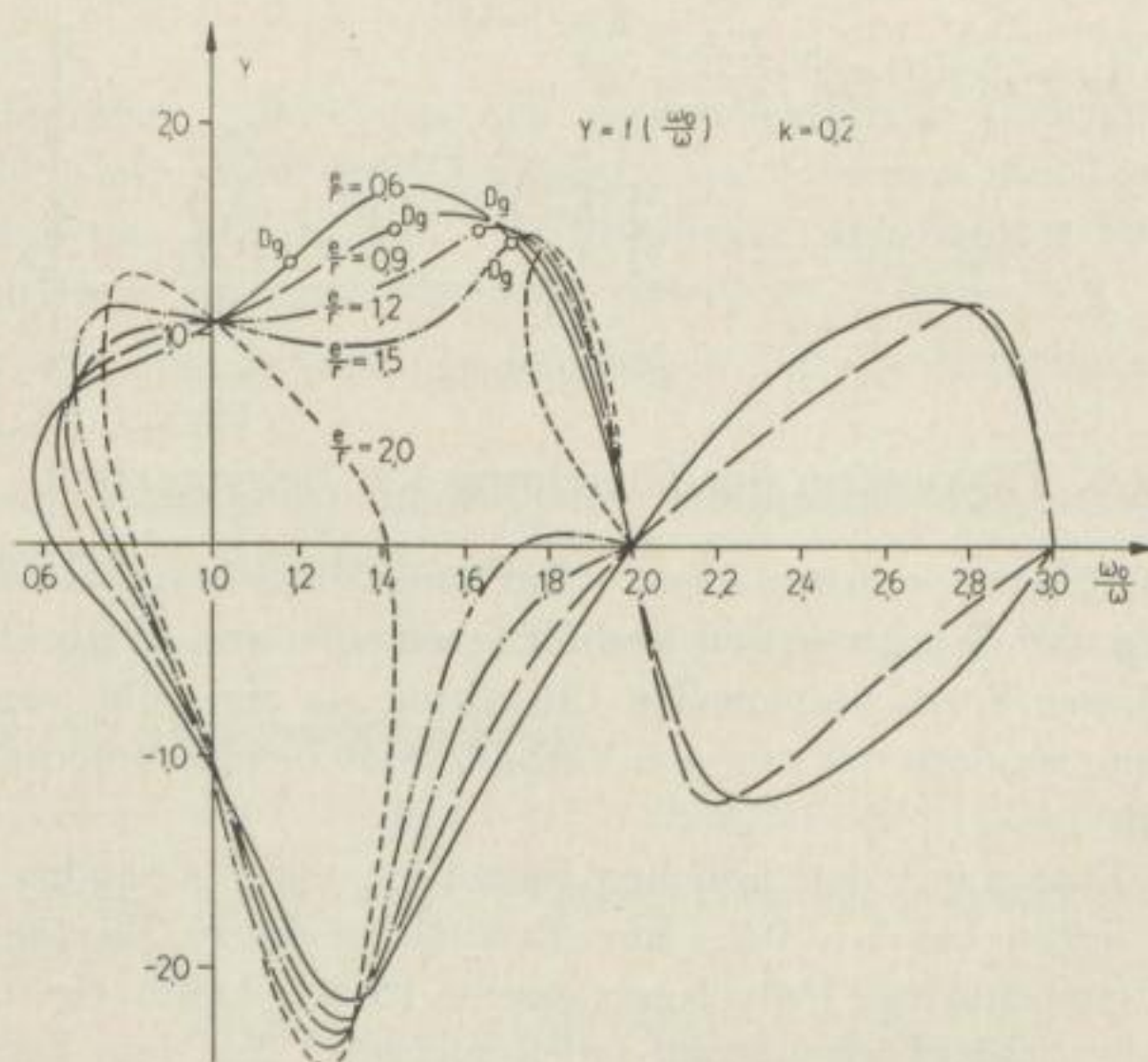


Bild 3

Bild 3 läßt vermuten, daß sich in einigen Bereichen für die gleichen Parameter zwei verschiedene Schlagenergiewerte einstellen können (z. B. für die Werte $e/r = 2,0$ und $1,8 < \omega_0/\omega < 2,0$ oder im Bereich $0,6 < \omega_0/\omega < 0,8$).

Es wird bei der Auswertung der Experimente gezeigt, daß sich im 1. Fall nur die Schlagenergie des unteren Astes einstellen können. Die Bewegungskurven, die zum oberen Ast gehören, verlaufen zum Teil unterhalb der Schlagebene und sind daher nicht realisierbar.

In dem Bereich $0,6 < \omega_0/\omega < 0,8$ sind beide Bewegungskurven möglich. Es zeigt sich jedoch, daß sich die Bewegungskurven einstellen, die zum oberen Ast gehören.

In dem Gebiet $\omega_0/\omega < 0,6$ existiert kein reeller y -Wert. Es ist dort gar kein Schlag möglich. Die Bewegung des Bärs verläuft oberhalb der Schlagebene, ohne sie zu berühren.

Es wurde schon angedeutet, daß die Schlagarbeit A_S , sobald m , r , ω und k festliegen, nur noch von y abhängt. Wollen wir die günstigsten Daten eines Hammers ermitteln, dann haben wir an Hand von Bild 3 die Möglichkeit, uns den günstigsten y -Wert bzw. den günstigsten A_S -Wert mit den zugehörigen Verhältnissen e/r und ω_0/ω herauszusuchen. Haben wir die günstigsten Verhältnisse e/r und ω_0/ω gefunden, so sind hierdurch auch der Abstand der Schlagenebene e und die Eigenkreisfrequenz ω_0 festgelegt, denn wir haben bereits über den Kurbelradius r und über die Erregerkreisfrequenz ω verfügt. Da $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ ist und wir auch die Bärmasse m schon vorgesehen haben, müssen wir ω_0 durch entsprechende Wahl der Federkonstanten c anpassen.

Zur Auswahl des günstigsten y -Wertes bzw. A_S -Wertes nach Bild 3 haben wir uns zwischen zwei Möglichkeiten zu entscheiden: Rechts vom Resonanzpunkt und $e/r \leq 1,5$ oder links vom Resonanzpunkt und $e/r > 1,5$.

Wählen wir unseren Arbeitspunkt links vom Resonanzpunkt, dann kommen wir auf günstige y -Werte bzw. A_S -Werte, wenn das Verhältnis e/r groß ist. Da der Kurbelradius r vorgegeben ist, muß also der Abstand der Schlagebene e groß sein. Die Schwingungen zeichnen sich in dem Gebiet durch relativ weiche Federn und große Amplituden aus. Beim Arbeiten in diesem Gebiet sind aber eine Reihe erschwerender Umstände zu beachten: Zunächst muß, da wir uns oberhalb der Resonanzstelle befinden, beim Anfahren der Resonanzpunkt durchlaufen werden. Das bedeutet, daß unbedingt der Meißel eingesetzt sein muß, da sonst die Gefahr der Resonanzkatastrophe besteht; diese kann man durch besondere Achtsamkeit ausschalten. Es existiert aber noch ein zweiter die Arbeiten erschwerender Punkt: Die Amplitude a (siehe Gl. (2)) der erzwungenen Schwingung ist bei diesen großen e/r -Werten kleiner als der Abstand der Schlagebene ($a < e$). Wird die freie Schwingung nicht angeregt, dann verläuft die Schwingung nur oberhalb der Schlagebene, und der Bär berührt diese gar nicht. Im allgemeinen aber wird der Bär beim Anfahren die Schlagebene berühren und die freie Schwingung anregen. Wenn sie dann erst einmal angeregt ist, bleibt sie auch bestehen. Sollte dieses Anregen allerdings aussetzen, dann bleibt auch der Schlag aus. Das gleiche gilt, wenn der Hammer durch eine unerwartete, kurzzeitige Drehzahlerhöhung in das Gebiet kommt, in dem keine Schwingungen möglich sind ($\omega_0/\omega < 0,7$). Derartige Drehzahlerhöhungen können durch ungewollte Spannungsschwankungen ohne weiteres eintreten. In dem Fall wird der Bär, selbst wenn sich die ursprüngliche Drehzahl wieder eingestellt hat, nicht mehr die Aufschlagebene berühren. Die freie Schwingung wird nicht angeregt. Der Hammer muß erst angehalten werden und erneut anlaufen, wodurch unnötige Verzögerungen eintreten. Es ist also für die Praxis ungünstig, in diesem Bereich zu arbeiten.

Wählen wir unseren Arbeitspunkt rechts vom Resonanzpunkt, dann müssen wir auf einen weiteren Faktor Rücksicht nehmen: Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten A_0 und B_0 und des unbekanntes Winkels φ hatten wir die 3 Bedingungen (4), (5) und (6) herausgearbeitet. Die Bedingungen (4) und (5) besagen, daß sich der Bär am Anfang und am Ende der Schlagperiode in der Schlagebene befinden soll. Der Verlauf der Bewegungskurve zwischen die-

sen beiden Punkten war mathematisch nicht weiter eingeschränkt. Physikalisch dagegen sind nur Bewegungskurven möglich, die ständig oberhalb der Schlagenebene verlaufen. Alle Kurven, die mathematisch zum Teil unterhalb der Schlagebene verlaufen, haben für die Auswertung keine Bedeutung, da der Bär diese Bewegung nicht durchführen kann. Er wird innerhalb der Schlagperiode einen zweiten Schlag ausführen. Es gelten dann natürlich auch nicht mehr die in Bild 3 berechneten y -Werte. Da die Schlagenergie der Doppelschläge niedriger liegt als die Werte der günstigen Arbeitsgebiete des Bildes 3, ist es uninteressant, die Bewegungskurven in den Doppelschlaggebieten exakt zu berechnen. Es ist lediglich zur Auswertung von Bild 3 notwendig, die Grenzen dieser Gebiete zu kennen. Die Grenzen der Doppelschlaggebiete lassen sich näherungsweise, jedoch mit beliebiger Genauigkeit ermitteln. Hierauf soll bei der Auswertung der Experimente näher eingegangen werden. Die Grenzen des Doppelschlaggebietes sind in Bild 3 mit eingezeichnet (D_g). Die Kurven von Bild 3 haben nur links von diesen Grenzen Gültigkeit. Wählen wir unseren Arbeitspunkt also rechts vom Resonanzpunkt, dann müssen wir beachten, daß im Gebiet des Doppelschlages die Kurven keine Gültigkeit mehr besitzen. Man erkennt an Bild 3, daß die günstigsten Arbeitspunkte in diesem Fall möglichst dicht an der Grenze des Doppelschlaggebietes liegen (D_g).

Aus der Betrachtung geht hervor, daß der für die Praxis günstige Bereich demnach zwischen dem Resonanzpunkt ($\omega_0/\omega = 1$) und der Doppelschlaggrenze D_g liegt, und zwar möglichst in der Nähe der Doppelschlaggrenze. Es ist hierbei $e/r \leq 1,5$. Im nächsten Abschnitt werden 2 Hämmer aus diesem Bereich mit den Verhältnissen $\omega_0/\omega = 1,4$ und $e/r = 0,9$ berechnet.

2.5. Der Kurbelfederhammer als Zweimassensystem

Wie bereits eingangs erwähnt, ist es gerechtfertigt, den Kurbelfederhammer als Einmassensystem zu betrachten. Hierauf soll im folgenden näher eingegangen werden.

Nehmen wir an, der Arbeiter drückt mit der konstanten Kraft P_0 gegen den Handgriff des Hammers. Durch die Bewegung des Bärs im Hammer wird eine Gegenkraft auf das Gehäuse ausgeübt. Ist diese Gegenkraft größer als die Andruckkraft P_0 , dann hebt sich das Gehäuse vom Meißel ab. Will man also genauere Aussagen über die Bewegungskurven des Bärs und des Gehäuses machen, dann muß man die gesamte Bewegungskurve des Bärs während einer Schlagperiode in zwei Bereiche zerlegen: Ist die Gegenkraft gegen das Gehäuse kleiner als P_0 , dann hebt sich das Gehäuse nicht ab. Damit würde es sich um ein Einmassensystem handeln. Ist die Gegenkraft gegen das Gehäuse größer als P_0 , dann muß die Bewegung des Gehäuses berücksichtigt werden. Es liegt ein Zweimassensystem vor. An der Grenze zwischen beiden Bereichen (Gegenkraft gleich P_0) müssen die Bewegungskurven und die Ableitungen stetig sein.

Die Betrachtungen sollen an zwei Beispielen erläutert werden. Die Daten der Hämmer sind so gewählt, daß sie eine der in Bild 3 angedeuteten günstigen

Möglichkeiten herausgreifen ($e/r = 0,9$ und $\omega_0/\omega = 1,4$). Der erste Hammer liefert eine Schlagarbeit von $102,6 \text{ kp}\cdot\text{cm}$. Er liegt damit an der oberen Grenze der gebräuchlichen Elektrohämmer, die mit Schlagenergien zwischen 50 und $100 \text{ kp}\cdot\text{cm}$ gebaut werden [10] [20]. Die Daten des Hammers sind folgende:

Bärmasse	$m = 0,4 \text{ kg}$	
Kurbelradius	$r = 2 \text{ cm}$	} $e/r = 0,9$
Abstand der Schlagebene	$e = 1,8 \text{ cm}$	
Drehzahl	$n = 938 \text{ min}^{-1}$	
Kreisfrequenz	$\omega = 98,2 \text{ s}^{-1}$	} $\omega_0/\omega = 1,4$
Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = 137,45 \text{ s}^{-1}$	
Federkonstante	$c = 7,7 \text{ kp/cm}$	
Rückprallkoeffizient	$k = 0,2$	
Schlagarbeit	$A_s = 102,5 \text{ kp}\cdot\text{cm}$	

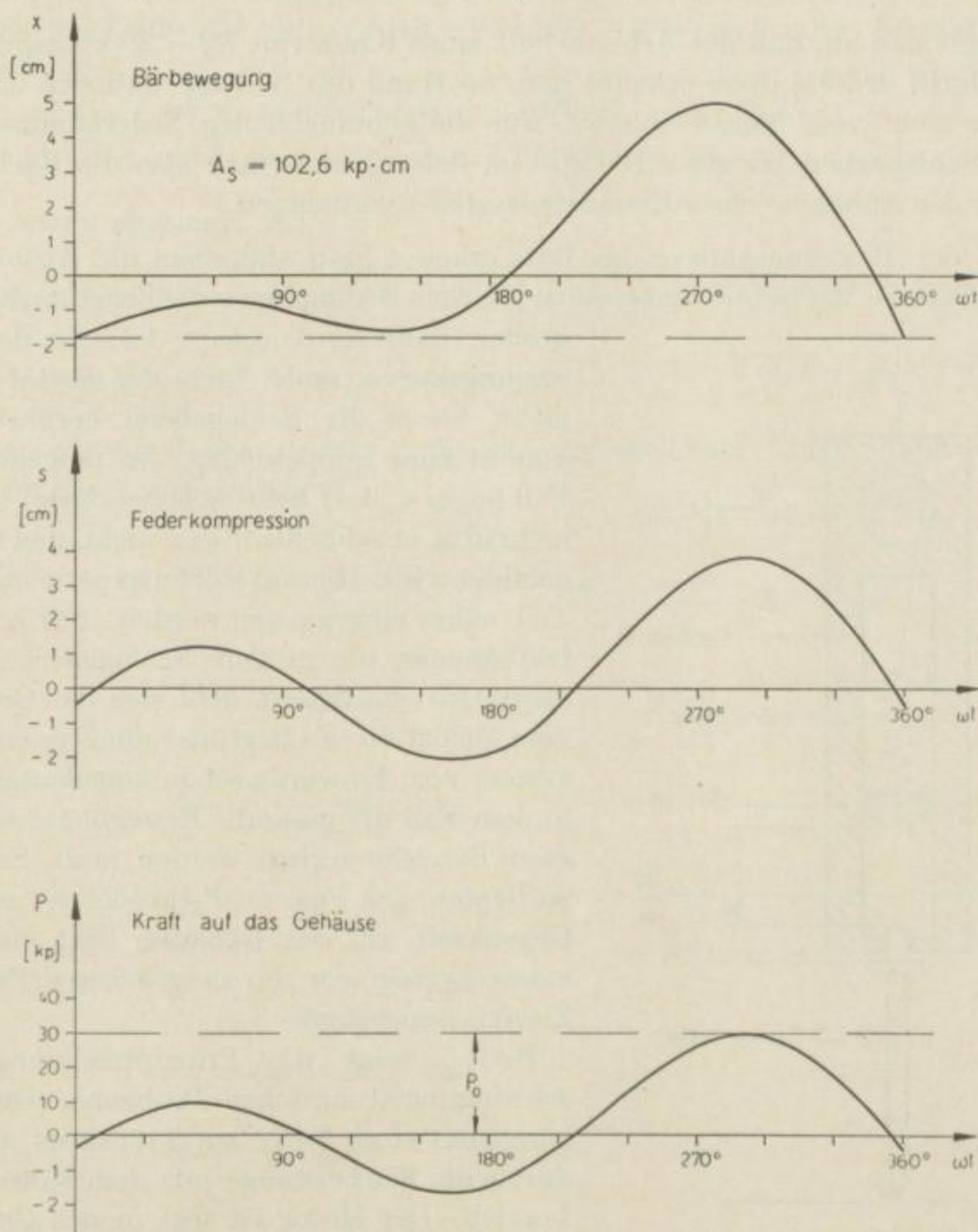


Bild 4

In Bild 4 sind die Bewegungskurven des Bärs, die Kurve der Federkompression und die Gegenkraft auf das Gehäuse untereinander gezeichnet. Die Kurven wurden unter der Annahme eines Einmassensystems gewonnen. Ihre Gleichungen sind folgende:

Bärbewegung:

$$x = -2,94 \sin \omega t - 2,82 \cos \omega t + 1,0266 \cos 1,4 \omega t + 3,15 \sin 1,4 \omega t.$$

Federkompression:

$$s = x - r \sin(\omega t - \varphi) = x - 2,0 \sin(\omega t - 136,2^\circ).$$

Kraft auf das Gehäuse:

$$P = c \cdot s \quad \text{mit } c = 7,7 \text{ kp/cm}.$$

Nimmt man an, daß der Arbeiter mit einer Kraft von $P_0 = 30 \text{ kp}$ gegen den Handgriff drückt, dann erkennt man an Hand des Bildes 4, daß sich das Gehäuse nicht vom Meißel abhebt. Für die gebräuchlichen Federhämmer, die eine Schlagarbeit bis etwa $100 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ liefern, kann man also die Rechnung unter der Annahme eines Einmassensystems vornehmen.

An der Bewegungskurve des Bärs erkennt man außerdem die Ausbildung eines Sattels. Macht man unter sonst gleichen Bedingungen die Federkonstante c

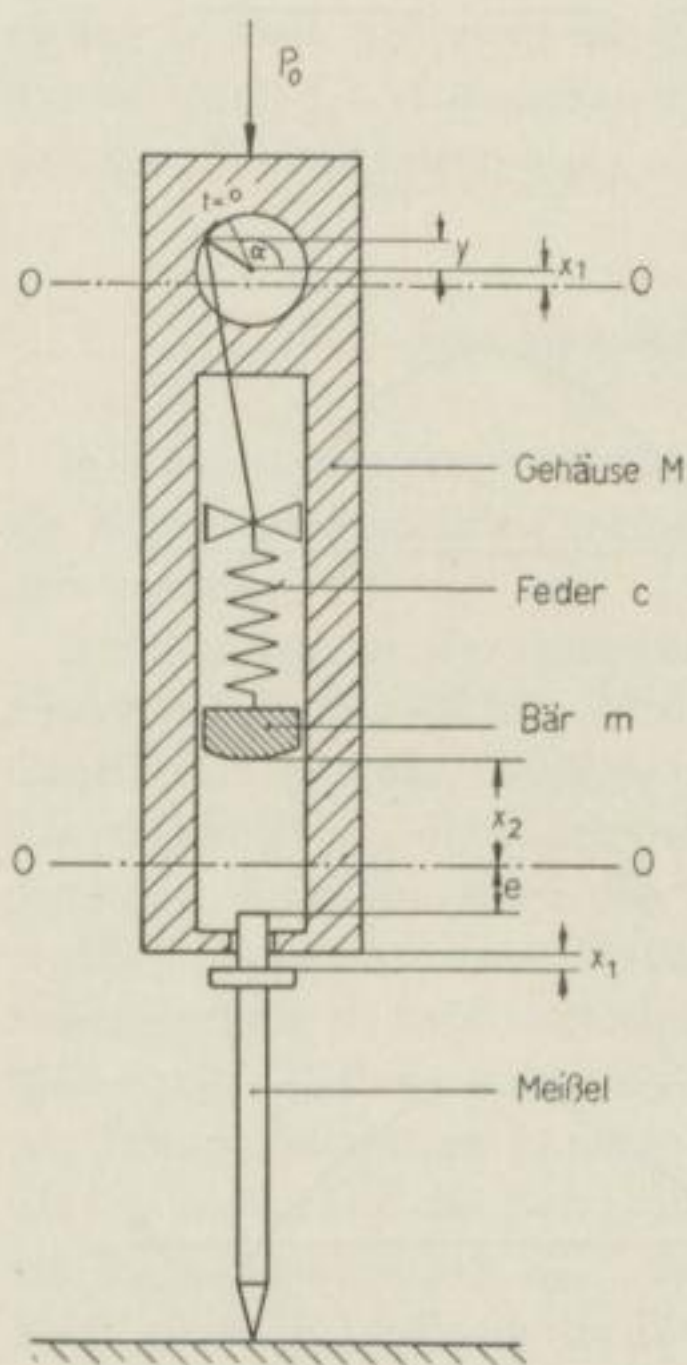


Bild 5

größer, dann wird $\omega_0/\omega > 1,4$. In der Bewegungskurve senkt sich der Sattel noch mehr, bis er die Schlagebene berührt. Es kommt zum Doppelschlag. Im umgekehrten Fall ($\omega_0/\omega < 1,4$) hebt sich der Sattel immer mehr, bis er schließlich gar nicht mehr ausgebildet wird. Hierauf soll im experimentellen Teil näher eingegangen werden. Für Kurbelfeldhämmer, die größere Schlagenergiewerte als $100 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ liefern, hebt sich das Gehäuse vom Meißel ab. Es liegt also ein Zweimassensystem vor. Es wurde schon angedeutet, daß in dem Fall die gesamte Bewegungskurve in zwei Bereiche zerlegt werden muß. Solange zu Beginn der Periode P_0 größer ist als die Gegenkraft auf das Gehäuse, liegt ein Einmassensystem vor, im umgekehrten Fall ein Zweimassensystem.

Bild 5 zeigt die Prinzipzeichnung des schwingungstechnischen Problems. Der Bär hängt mit einer Feder am Kreuzkopf und ist durch die Kurbelstange mit dem Motor verbunden. Der Motor ist fest in des Gehäuse eingebaut. Das Gehäuse kann sich jedoch

nach oben verschoben. Es wird mit der konstanten Kraft P_0 nach unten gedrückt. Die Nullage liege vor, wenn die Kurbel waagrecht steht, die Feder entspannt ist und das Gehäuse auf der Wulst des Meißels ruht. Ist in einer beliebigen Stellung der Kurbelzapfen um y gehoben und sind die Gehäusemasse M um x_1 um die Bärmasse m um x_2 gegen die Nullage verschoben, dann gelten die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_1 &= -c(x_1 + y - x_2) - P_0, \\ m \ddot{x}_2 &= c(x_1 + y - x_2). \end{aligned}$$

Wir wollen unsere Zeitählung in dem Augenblick beginnen, in dem der Bereich des Zweimassensystems anfängt, in dem also die Gegenkraft gegen das Gehäuse gleich P_0 ist. In diesem Augenblick, also zur Zeit $t = 0$, möge die Kurbel mit der Waagerechten den Winkel α (in positiver Drehrichtung) einschließen. Dann gilt $y(0) = r \sin \alpha$ und $y(t) = r \sin(\omega t + \alpha)$. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_1 + c x_1 &= c x_2 - c r \sin(\omega t + \alpha) - P_0, \\ m \ddot{x}_2 + c x_2 &= c x_1 + c r \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Wir setzen allgemein an:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 \cdot t + C_3 + A_1 \cos \tilde{\omega}_0 t + B_1 \sin \tilde{\omega}_0 t, \\ x_2 &= a_2 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 \cdot t + C_4 + A_2 \cos \tilde{\omega}_0 t + B_2 \sin \tilde{\omega}_0 t. \end{aligned}$$

Gehen wir mit diesem Ansatz in die Ausgangsgleichung hinein, dann erhalten wir für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-c r \omega^2 M}{(c - M \omega^2)(c - m \omega^2) - c^2} = \frac{-r}{\frac{m \omega^2}{c} - 1 - \frac{m}{M}}, \\ a_1 &= \frac{+c r \omega^2 m}{(c - M \omega^2)(c - m \omega^2) - c^2} = \frac{r}{\frac{M \omega^2}{c} - 1 - \frac{M}{m}}, \\ a_2 &= -\frac{M}{m} \cdot a_1, \\ A_2 &= -\frac{M}{m} \cdot A_1, \quad B_2 = -\frac{M}{m} \cdot B_1, \\ C_1 &= -\frac{P_0}{M + m}, \\ C_4 &= C_3 + D \quad \text{mit} \\ D &= \frac{m}{c} \cdot \frac{P_0}{M + m} = -\frac{m}{c} \cdot C_1, \\ \tilde{\omega}_0^2 &= c \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Koeffizienten vereinfacht sich der Ansatz zu

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 \cdot t + C_3 + A_1 \cos \tilde{\omega}_0 t + B_1 \sin \tilde{\omega}_0 t,$$

$$x_2 = -\frac{M}{m} a_1 \sin(\omega t + \alpha) + \frac{C_1}{2} \cdot t^2 + C_2 \cdot t + C_3 - \frac{m}{c} \cdot C_1$$

$$-\frac{M}{m} A_1 \cos \tilde{\omega}_0 t - \frac{M}{m} B_1 \sin \tilde{\omega}_0 t.$$

Die Größen a_1 , C_1 und $\tilde{\omega}_0$ sind hierin also bekannt. Als unbekannte Integrationskonstanten verbleiben A_1 , B_1 , C_2 und C_3 . Diese 4 Größen können wir aus den Anfangsbedingungen berechnen. Da die Kurven des Einmassensystems und die des Zweimassensystems und ihre Ableitungen an der Grenze (Gegenkraft gleich P_0) stetig sind, müssen ihre Funktionswerte und ihre Ableitungen gleich sein. Hat der Bär an der Grenze die Lage x_A und die Geschwindigkeit v_0 , während sich das Gehäuse am Nullpunkt und in Ruhe befinden muß, dann gilt:

$$x_2(0) = x_A, \quad \dot{x}_2(0) = v_0,$$

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Die Größen x_A und v_0 lassen sich aus der als Einmassensystem berechneten Bewegungskurve, die zu Beginn der Periode gilt, ermitteln. Sie stellen den Funktionswert und die Ableitung zu dem Zeitpunkt dar, wenn die Gegenkraft auf das Gehäuse gleich der Andruckkraft P_0 ist.

Mit Hilfe der vier Integrationskonstanten sind die Bewegungsgleichungen des Zweimassensystems gelöst.

Es soll nun die zum ersten Beispiel analoge Betrachtung an einem Hammer mit nahezu der doppelten Schlagenergie durchgeführt werden. Der Hammer hat folgende Daten:

Bärmasse	$m = 0,444 \text{ kg}$	
Gehäusemasse	$M = 15 \text{ kg}$	
Kurbelradius	$r = 2 \text{ cm}$	} $e/r = 0,9$
Abstand der Schlagebene	$e = 1,8 \text{ cm}$	
Drehzahl	$n = 1200 \text{ min}^{-1}$	
Kreisfrequenz	$\omega = 125,6 \text{ s}^{-1}$	} $\omega_0/\omega = 1,4$
Eigenkreisfrequenz	$\omega_0 = 175,8 \text{ s}^{-1}$	
Federkonstante	$c = 14 \text{ kp/cm}$	
Rückprallkoeffizient	$k = 0,2$	

Es wurde der schon angedeutete günstige Arbeitspunkt $e/r = 0,9$ und $\omega_0/\omega = 1,4$ gewählt. Mit diesen Daten liefert der Hammer eine Schlagarbeit von $A_s = 186,5 \text{ kp} \cdot \text{cm}$.

In den oberen drei Kurven von Bild 6 sind in analoger Weise wie beim vorhergehenden Beispiel die Kurve der Bärbewegung, die Kurve der Federkompression und die Gegenkraft auf das Gehäuse als Einmassensystem berechnet und untereinander gezeichnet. Ihre Gleichungen sind folgende:

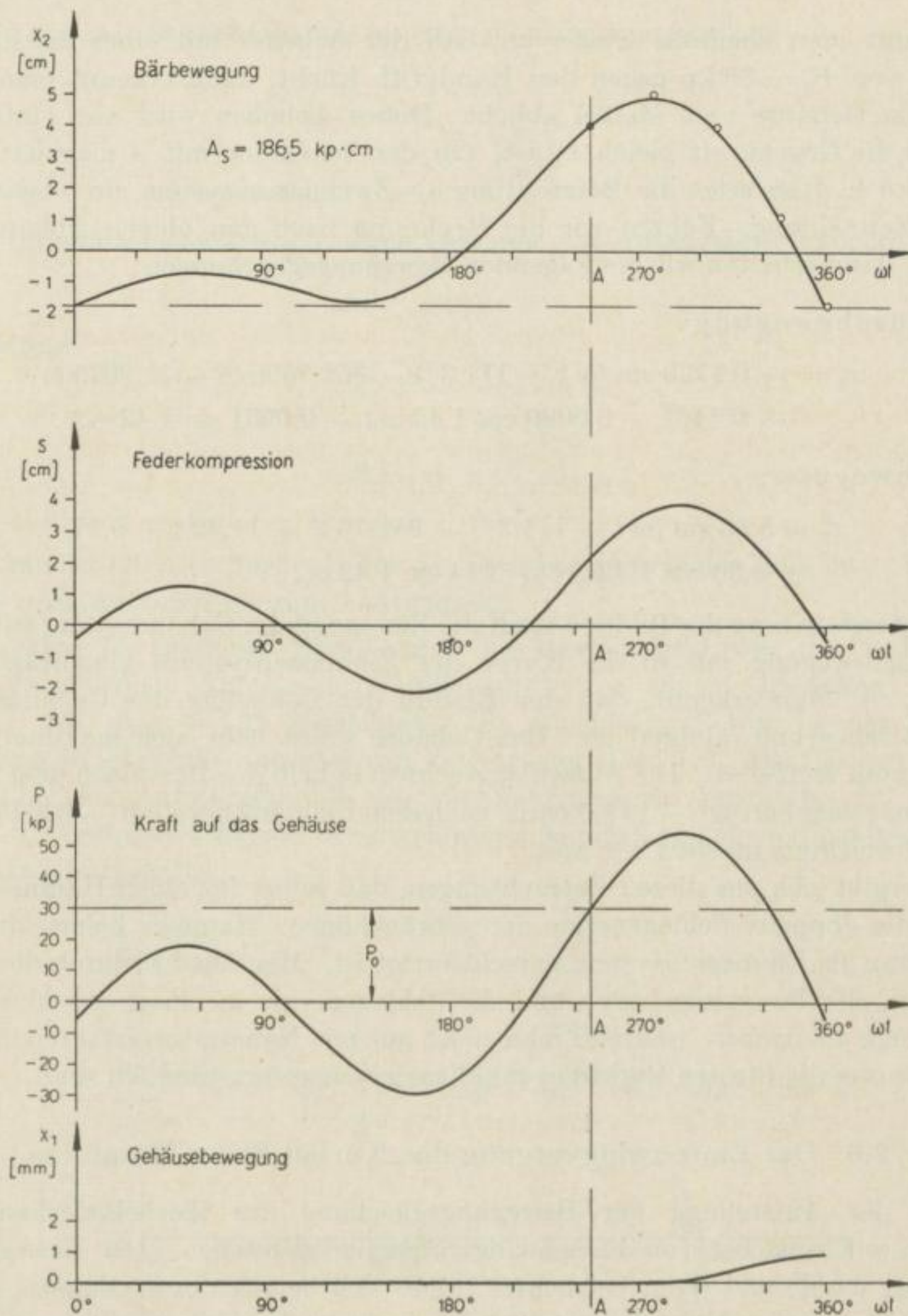


Bild 6

Bärbewegung:

$$x = -2,94 \sin \omega t - 2,82 \cos \omega t + 1,02 \cos 1,4 \omega t + 3,15 \sin 1,4 \omega t.$$

Federkompression:

$$s = x - r \sin (\omega t - 136,2^\circ) = x - 2,0 \sin (\omega t - 136,2^\circ).$$

Kraft auf das Gehäuse:

$$P = c \cdot s \quad \text{mit } c = 14 \text{ kp/cm}.$$

Nimmt man ebenfalls wieder an, daß der Arbeiter mit einer konstanten Kraft von $P_0 = 30$ kp gegen den Handgriff drückt, dann erkennt man, daß sich das Gehäuse vom Meißel abhebt. Dieses Abheben wird also eintreten, sobald die Gegenkraft gleich P_0 ist. (In der Zeichnung mit A markiert, $\omega t_A = 247,5^\circ$). Hier setzt die Betrachtung als Zweimassensystem ein, ebenso die neue Zeitählung. Führen wir die Rechnung nach den obigen Ableitungen durch, dann erhalten wir die folgenden Bewegungsgleichungen:

Gehäusebewegung:

$$x_1 = -0,1139 \sin(\omega t + 111,3^\circ) - 952,7698 t^2 + 11,3975 t \\ + 0,1151 - 0,0090 \cos 1,42 \omega t - 0,0931 \sin 1,42 \omega t .$$

Bärbewegung:

$$x_2 = 3,85 \sin(\omega t + 111,3^\circ) - 952,76 t^2 + 11,39 t + 0,17 \\ + 0,30 \cos 1,42 \omega t + 3,14 \sin 1,42 \omega t .$$

Die unterste Kurve des Bildes 6 stellt die Bewegung des Gehäuses dar, während die Bärbewegung mit in die Kurve des Einmassensystems eingetragen ist (○○○○). Man erkennt, daß der Einfluß der Bewegung des Gehäuses auf die Bärbewegung minimal ist. Das Gehäuse selbst hebt sich maximal etwa 1 mm vom Meißel ab. Die Aufschlaggeschwindigkeit des Bärs nach dem Zweimassensystem beträgt $-913,5$ cm/s, nach dem Einmassensystem $-926,0$ cm/s. Die Abweichung macht 1,4% aus.

Es ergibt sich aus diesen Betrachtungen, daß selbst für einen Hammer, der etwa die doppelte Schlagenergie der gebräuchlichen Hammer liefert, die Berechnung als Einmassensystem gerechtfertigt ist. Man hat hierdurch die Möglichkeit, die Bewegungskurve und die Schlagenergie in einem geschlossenen Ausdruck anzugeben, während man sonst nur mit Näherungsverfahren operieren könnte, die für den Praktiker im allgemeinen zu umständlich sind.

2.6. Der Einschwingvorgang des Kurbel-Feder-Hammers

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung des Kurbelfederhammers hatten wir zunächst von Einschwingvorgängen abgesehen. Der Bewegungsvorgang wurde erst dann betrachtet, wenn sich bereits der stationäre, periodische Bewegungsablauf eingestellt hat. In den folgenden Ausführungen soll der Einschwingvorgang für einen speziellen Fall genauer untersucht werden. Hierzu wird angenommen, zur Zeit $t = 0$ schließe die Kurbel mit der Waagerechten den beliebigen Winkel φ_1 ein und die Feder sei entspannt. Der Bär hat dann zur Zeit $t = 0$ die Lage

$$x(0) = y_1 = -r \sin \varphi_1 . \quad (9)$$

Außerdem sei die Annahme gemacht, daß sich der Motor beim Einschalten zur Zeit $t = 0$ sofort mit der vollen Drehzahl (Kreisfrequenz ω) dreht. Für die Bewegung des Bärs gilt die allgemeine Lösungsgleichung

$$x = a \sin(\omega t - \varphi_1) + A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t . \quad (10)$$

Für a ergibt sich ebenfalls wie im eingeschwungenen Zustand

$$a = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (11)$$

Die Integrationskonstanten lassen sich aus den Anfangsbedingungen (9) und

$$\dot{x}(0) = 0$$

ermitteln:

$$A_1 = (a - r) \sin \varphi_1$$

und

$$B_1 = -a \frac{\omega}{\omega_0} \cos \varphi_1.$$

Somit ist (10) der Ausdruck für die Bewegungskurve des Bärs im 1. Bereich, d. h. vom Anlaufen bis zum 1. Aufschlag.

In Bild 7a sind zur Erläuterung die Bewegungskurven des 1. Bereichs für verschiedene Anfangskurbelstellungen φ_1 zu einem speziellen Beispiel ($e/r = 0,9$; $\omega_0/\omega = 1,2$) gezeichnet. Die zugehörige Bewegung des Kurbelzapfens ist ebenfalls darunter mit eingetragen (Bild 7c). Desgleichen sind in Bild 7b der Aufschlagpunkt des eingeschwungenen Zustandes für $k = 0$, $k = 0,2$ und $k = 0,42$ und die zugehörigen Aufschlaggeschwindigkeiten v_A (als Winkel) festgehalten.

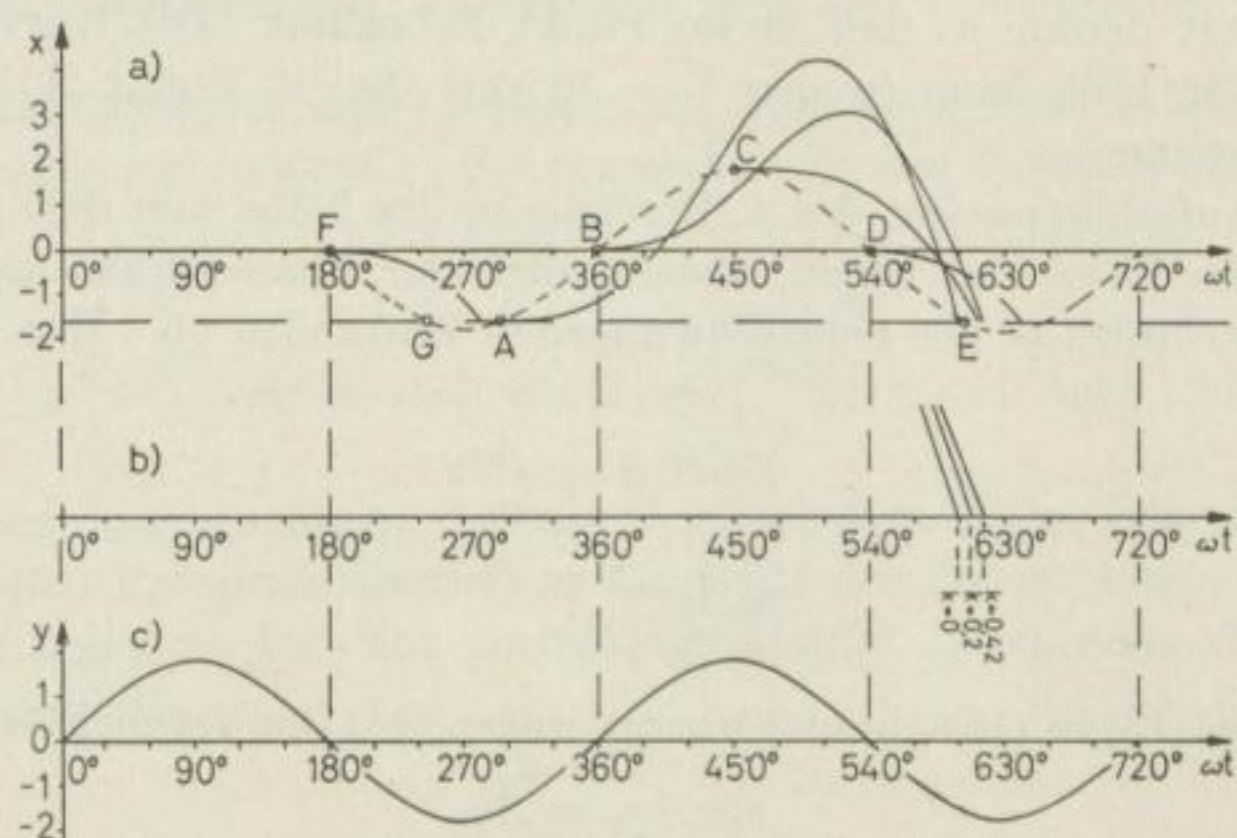


Bild 7

Für alle Anfangskurbelstellungen, die in den Bereich $G-A$ fallen, beginnt die Bewegungskurve im Punkt A . In dem Bereich ist $r \sin \varphi_1 > |e|$. Der Bär liegt auf der Aufschlagebene. Der Bewegungsvorgang setzt erst ein, wenn $r \sin \varphi_1 = |e|$ ist, also im Punkt A .

$k = 0$

Für den folgenden 2. Bereich des Bewegungsvorganges soll zunächst der Spezialfall $k = 0$ untersucht werden. Auch für diesen Bereich gilt die allgemeine Lösung

$$x = a \sin(\omega t - \varphi_2) + A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t. \quad (12)$$

a ist durch (11) festgelegt. Die Integrationskonstanten A_2 und B_2 lassen sich aus den Anfangsbedingungen des 2. Bereichs ermitteln. Diese sind

$$x(0) = -e$$

und

$$\dot{x}(0) = 0.$$

Es ergibt sich

$$A_2 = a \sin \varphi_2 - e$$

und

$$B_2 = -a \frac{\omega}{\omega_0} \cos \varphi_2.$$

Somit ist (12) die Bewegungsgleichung des Bärs im 2. Bereich (vom 1. bis zum 2. Aufschlag).

Den Phasenwinkel φ_2 erhält man aus dem Aufschlagpunkt des 1. Bereichs. Es ist der Winkel zwischen der Nulllage des Kurbelzapfens und dem jeweiligen Aufschlagpunkt. Aus Bild 7 ist zu entnehmen, daß der Aufschlagpunkt des 1. Bereichs bereits in der Nähe des Aufschlagpunktes des eingeschwungenen Zustandes liegt. Etwas abweichend verhält sich die im Punkt D beginnende Kurve. Es ist jedoch möglich, daß man sich die 1. Periode um einen Bereich zurückverlegt denkt, so daß sie im Punkt F beginnt. Die Kurve des nächsten Bereichs fällt dann (wegen $k = 0$) mit der in Punkt A beginnenden Kurve zusammen.

Da die Aufschlagpunkte des 1. Bereichs in der Nähe von denen des eingeschwungenen Zustandes liegen, weicht auch der Phasenwinkel φ_2 nicht sehr vom Phasenwinkel φ des eingeschwungenen Zustandes ab. Wir können also setzen

$$\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi_2 \quad (13)$$

mit

$$\Delta\varphi_2 \ll \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Setzt man (13) in (12) ein und nimmt wegen (14) die Vernachlässigungen

$$\sin \Delta\varphi_2 \approx \Delta\varphi_2$$

und

$$\cos \Delta\varphi_2 \approx 1$$

vor, dann erhält man aus (12)

$$x = a \cdot \sin(\omega t - \varphi) + (a \cdot \sin \varphi - e) \cdot \cos \omega_0 t - \left(a \frac{\omega}{\omega_0} \cos \varphi \right) \cdot \sin \omega_0 t + \Delta\varphi_2 \left[-a \cdot \cos(\omega t - \varphi) + a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega_0 t + a \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega_0 t \right] \quad (15)$$

Die 1. Zeile von (15) ist die Gleichung des eingeschwungenen Zustandes. Zu ihr addiert sich der Ausdruck der 2. Zeile, der von $\Delta\varphi_2$, also von der Größe der Abweichung des jeweiligen Phasenwinkels von dem des eingeschwungenen Zustandes abhängt. Der Phasenwinkel φ des eingeschwungenen Zustandes läßt sich nach den Methoden von 2.2 ermitteln. Es ist

$$\tan \varphi = \frac{A_0 + e}{-A_0 \cdot \varepsilon} \quad (16)$$

mit
$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \tan \left(\pi \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \text{und} \quad A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon^2 (a^2 - e^2)}}{1 + \varepsilon^2}.$$

Zur Bestimmung der Phasenwinkeldifferenz des 3. Bereichs $\Delta\varphi_3$ wird der Aufschlagpunkt des 2. Bereichs benötigt. Er wird in 1. Näherung folgendermaßen bestimmt: Wegen (14) liegt er in der Nähe des Zeitpunktes $t = 2\pi/\omega$. Setzt man in (15) $\omega t = 2\pi$, so erhält man die Lage des Bärs zu diesem Zeitpunkt, wobei die 1. Zeile von (15) $-e$ ergibt:

$$x_2 = x \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = -e + \Delta\varphi_2 \cdot a \left\{ \left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) - 1 \right] \cdot \cos \varphi + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \cdot \sin \varphi \right\}. \quad (17)$$

Der Hammer befindet sich also zu diesem Zeitpunkt um einen von $\Delta\varphi_2$ abhängenden Betrag oberhalb oder „unterhalb“ der Aufschlagebene $x = -e$.

Aus (15) bestimmt sich die Geschwindigkeit des Bärs zu

$$\dot{x} = a\omega \cdot \cos(\omega t - \varphi) + (a \cdot \sin \varphi - e)(-\omega_0) \cdot \sin \omega_0 t - a\omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega_0 t + \Delta\varphi_2 [a\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi) - a\omega_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega_0 t + a\omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega_0 t]. \quad (18)$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 2\pi/\omega$ ist dann (wobei die 1. Zeile von (18) die Aufschlaggeschwindigkeit v_A des eingeschwungenen Zustandes liefert)

$$\begin{aligned} \dot{x} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) &= v_A + \Delta v_{A2} \\ &= v_A + \Delta\varphi_2 \cdot a \left[-\omega \cdot \sin \varphi - \omega_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) + \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir können nun annehmen, daß die Geschwindigkeit des Bärs (für die uns interessierenden Frequenzbereiche) in der Nähe des Zeitpunktes $t = 2\pi/\omega$ in 1. Näherung konstant ist. Der Aufschlagzeitpunkt t_A ist dann der Schnittpunkt der Geraden

$$x = -e \quad (19)$$

mit der Geraden, die durch x_2 verläuft und die Steigung $v_A + \Delta v_{A2}$ hat, also mit der Geraden

$$x = (v_A + \Delta v_{A2}) t - (v_A + \Delta v_{A2}) \frac{2\pi}{\omega} + x_2. \quad (20)$$

Der Aufschlagpunkt ist demnach :

$$t_A = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{e + x_2}{v_A + \Delta v_{A2}}. \quad (21)$$

Da t_A gleichzeitig die Schwingungsdauer des 2. Bereichs darstellt, erkennt man an (21), daß die Schwingungsdauer um den Betrag des 2. Bruches von der des eingeschwingenen Zustandes abweicht.

Der Phasenwinkel des 3. Bereiches φ_3 wird aus dem des 2. Bereiches φ_2 und aus (21) gebildet:

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{(e + x_2) \omega}{v_A + \Delta v_{A2}} = \varphi + \Delta\varphi_2 + \frac{(e + x_2) \omega}{v_A + \Delta v_{A2}}.$$

Die Phasenwinkeldifferenz $\Delta\varphi_3$ des 3. Bereichs ist dann

$$\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_2 + \frac{(e + x_2) \omega}{v_A + \Delta v_{A2}}. \quad (22)$$

Setzt man x_2 aus (17) in (22) ein, wobei die Vernachlässigung

$$v_A + \Delta v_{A2} \approx v_A$$

vorgenommen sei, dann ergibt sich

$$\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_2 \cdot M$$

mit

$$M = 1 - \frac{\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) - 1 \right] \cdot \cos\varphi + \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) \cdot \sin\varphi}{\left[\cos\left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right) - 1 \right] \cdot \cos\varphi + \left(\sin\varphi - \frac{e}{a} \right) \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi\right)}. \quad (23)$$

Führt man die geschilderten Schritte auch bei allen folgenden Bereichen durch, dann erhalten wir die Phasenwinkeldifferenz des n -ten Bereichs zu

$$\Delta\varphi_n = \Delta\varphi_{n-1} \cdot M = \Delta\varphi_2 \cdot M^{n-2}. \quad (24)$$

Ist $|M| < 1$, so geht $\Delta\varphi_n$ für große n gegen Null. Es stellt sich also der eingeschwingene Zustand ein.

Nachfolgend soll ein Beispiel zu (24) berechnet werden. Es sei

$$\begin{array}{l} k = 0 \\ \left. \begin{array}{l} e = 1,62 \text{ cm} \\ r = 1,8 \text{ cm} \end{array} \right\} e/r = 0,9 \\ \left. \begin{array}{l} \omega = 31,42 \text{ s}^{-1} \\ \omega_0 = 37,7 \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \omega_0/\omega = 1,2. \end{array}$$

(Diese Werte entsprechen denen des Bildes 7).

Nach (16) ergibt sich

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = 0,872, & A_0 = + 3,446, \\ \tan\varphi = 1,686, & \varphi = 120,67^\circ. \end{array}$$

(11) liefert $a = 5,89 \text{ cm}$.

Schließlich erhält man nach (23)

$$M = - 0,013.$$

Es ist $|M| < 1$. Die Schwingung stellt sich also auf den eingeschwingenen Zustand ein. Gleichzeitig ist hierdurch die Stabilität der Schwingung nachgewiesen.

$k \neq 0$

Ist $k \neq 0$, dann werden die Betrachtungen zunächst genauso wie vorn durchgeführt. Die allgemeine Bewegungsgleichung ist

$$x = a \cdot \sin(\omega t - \varphi_2) + A_2 \cdot \cos \omega_0 t + B_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (25)$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$x(0) = -e$$

und

$$\dot{x}(0) = v_{R2}.$$

v_{R2} ist die Rückprallgeschwindigkeit zu Beginn des 2. Bereichs. Sie ergibt sich aus der Aufschlaggeschwindigkeit v_{A1} des 1. Bereichs:

$$v_{R2} = -k v_{A1}.$$

Man erhält die Integrationskonstanten von (25)

$$A_2 = a \sin \varphi_2 - e$$

und

$$B_2 = \frac{v_{R2}}{\omega_0} - a \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \cos \varphi_2.$$

Führt man in analoger Weise wie vorn (13) und (14) ein und setzt man außerdem

$$v_{R2} = v_R + \Delta v_{R2}.$$

wobei v_R die Rückprallgeschwindigkeit des eingeschwungenen Zustandes ist, so ergibt sich aus (25)

$$\begin{aligned} x = & a \cdot \sin(\omega t - \varphi) + (a \cdot \sin \varphi - e) \cdot \cos \omega_0 t + \left(\frac{v_R}{\omega_0} - a \frac{\omega}{\omega_0} \cos \varphi \right) \sin \omega_0 t \\ & + \Delta \varphi_2 \cdot a \left[-\cos(\omega t - \varphi) + \cos \varphi \cdot \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega_0 t \right] \\ & + \frac{\Delta v_{R2}}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (26)$$

Die 1. Zeile von (26) ist die Gleichung des eingeschwungenen Zustandes. Setzt man in (26) $\omega t = 2\pi$, so erhält die 1. Zeile den Wert $-e$.

Man bekommt somit

$$\begin{aligned} x_2 = x \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = & -e + \Delta \varphi_2 \cdot a \left\{ \left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) - 1 \right] \cdot \cos \varphi + \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \right\} \\ & + \frac{\Delta v_{R2}}{\omega_0} \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right). \end{aligned}$$

Der Phasenwinkel des eingeschwungenen Zustandes φ ist nach „Teil A“

$$\tan \varphi = \frac{A_0 + e}{-A_0 \cdot \varepsilon}$$

$$\text{mit } \varepsilon = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1-k}{1+k} \cdot \tan \left(\pi \frac{\omega_0}{\omega} \right) \text{ und } A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon^2 (a^2 - e^2)}}{1 + \varepsilon^2}. \quad (27)$$

Aus (26) ergibt sich die Geschwindigkeit des Bärs zu

$$\begin{aligned} \dot{x} = & a \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi) - \omega_0 (a \cdot \sin \varphi - e) \cdot \sin \omega_0 t + (v_R - a \omega \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \omega_0 t \\ & + \Delta \varphi_2 \cdot a [\omega \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \omega_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega_0 t + \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega_0 t] \\ & + \Delta v_{R2} \cdot \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (28)$$

Setzt man $\omega t = 2\pi$, dann liefert die 1. Zeile von (28) die Aufschlaggeschwindigkeit v_A des eingeschwungenen Zustandes. Die 2. Zeile ergibt einen Geschwindigkeitsanteil Δv_{A2} , der von der Phasenwinkeldifferenz zu Beginn der Periode herrührt, und die 3. Zeile einen Geschwindigkeitsanteil, der durch die Rückprallgeschwindigkeitsdifferenz hervorgerufen wird. Es ist also

$$\dot{x} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = v_{A2} = v_A + \Delta v_{A2} + \Delta v_{R2} \cdot \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \quad (29)$$

mit

$$\Delta v_{A2} = \Delta \varphi_2 \cdot a \left[-\omega \cdot \sin \varphi - \omega_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) + \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \right] \quad (30)$$

In gleicher Weise wie vorn sei auch hier die Annahme gemacht, daß in dem uns interessierenden Frequenzbereich die Geschwindigkeit in der Nähe von $t = 2\pi/\omega$ als konstant angesehen werden kann. Der Aufschlagzeitpunkt ergibt sich dann als Schnittpunkt der Geraden $x = -e$ mit der Geraden, die durch x_2 verläuft und die Steigung v_{A2} hat:

$$t_A = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{e + x_2}{v_A + \Delta v_{A2} + \Delta v_{R2} \cdot \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right)}. \quad (31)$$

Den Phasenwinkel φ_3 des 3. Bereichs findet man aus dem des 2. Bereichs φ_2 und aus dem 2. Term. der rechten Seite von (31), wobei die Vereinfachung analog wie vorn vorgenommen sei:

$$v_A + \Delta v_{A2} + \Delta v_{R2} \cdot \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \approx v_A.$$

Man erhält somit für den Phasenwinkel

$$\varphi_3 = \varphi + \Delta \varphi_2 + \frac{\omega}{v_A} (e - x_2). \quad (32)$$

Die Phasenwinkeldifferenz $\Delta \varphi_3$ ist dann, wobei x_2 in (32) eingesetzt wird,

$$\Delta \varphi_3 = \Delta \varphi_2 \cdot N + \Delta v_{R2} \cdot P \quad (33)$$

mit

$$N = 1 - \frac{\left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) - 1 \right] \cos \varphi + \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right)}{\left[\cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) - 1 \right] \cos \varphi + \left(\sin \varphi - \frac{e}{a} \right) \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) - \frac{v_R}{a \omega} \cos \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right)}$$

und

$$P = \frac{1}{v_A} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \sin \left(\frac{\omega_0}{\omega} 2\pi \right) \quad (35)$$

Die Forderung
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \vartheta_n = 0 \quad (43)$$

für beliebigen Anfangsvektor ergibt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}^n = 0. \quad (44)$$

Sind λ_1 und λ_2 die charakteristischen Wurzeln von \mathfrak{A} , so gibt es die beiden Möglichkeiten

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
2. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wir können demnach für \mathfrak{A} setzen

$$\mathfrak{A} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T, \quad (45)$$

wobei T eine geeignete, reguläre Matrix ist. Aus (45) finden wir

$$\mathfrak{A}^n = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} T.$$

Die Forderung (43) bzw. (44) geht also in die Forderungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0 \quad (46)$$

über. (46) ist erfüllt, wenn

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{und} \quad |\lambda_2| < 1. \quad (47)$$

Ist dem 2. Fall entsprechend $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, dann ist die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir können also für \mathfrak{A} setzen

$$\mathfrak{A} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T, \quad (48)$$

wobei T ebenfalls wieder eine geeignete, reguläre Matrix ist.

Aus (48) finden wir

$$\mathfrak{A}^n = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} T.$$

Die Forderung (43) bzw. (44) geht also in diesem Fall in die Forderungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda^{n-1} = 0$$

über. Die erste Forderung ist erfüllt, sobald

$$|\lambda| < 1. \quad (49)$$

Zur Bestimmung des 2. Grenzwertes setzen wir

$$\lambda = \frac{1}{z}.$$

Dann ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \lambda^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{n-1} \cdot \ln z} = 0. \quad (50)$$

(50) ist erfüllt, wenn $|z| > 1$, also

$$|\lambda| < 1.$$

Beide Möglichkeiten führen also zu den gleichen Forderungen (47) bzw. (49).

Die charakteristischen Wurzeln λ von \mathfrak{A} erhält man auf folgende Weise: Man bildet die Matrix

$$\mathfrak{A} - \lambda E = \begin{pmatrix} N - \lambda & P \\ Q & S - \lambda \end{pmatrix}$$

und setzt die Determinante aus dieser Matrix gleich Null. Man erhält somit

$$D = \begin{vmatrix} N - \lambda & P \\ Q & S - \lambda \end{vmatrix} = (N - \lambda)(S - \lambda) - PQ = 0. \quad (51)$$

Die Auflösungen dieser Gleichung nach λ liefert die charakteristischen Wurzeln.

(51) mit (47) ist somit die Bedingung dafür, daß sich die Schwingung auf einen festen Phasenwinkel φ und eine feste Rückprallgeschwindigkeit v_R einspielt.

Es soll ein Beispiel zu (51) berechnet werden:

$$\begin{aligned} k &= 0,42 \\ e &= 1,62 \text{ cm} \\ r &= 1,8 \text{ cm} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} k \\ e \\ r \end{aligned}} \right\} e/r = 0,9$$

$$\begin{aligned} \omega &= 31,42 \text{ s}^{-1} \\ \omega_0 &= 37,7 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \omega \\ \omega_0 \end{aligned}} \right\} \omega_0/\omega = 1,2.$$

Nach (27) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,356 & A_0 &= + 4,088 \\ \tan \varphi &= -3,923 & \varphi &= 104,3^\circ. \end{aligned}$$

Die Aufschlaggeschwindigkeit des eingeschwungenen Zustandes v_A ist

$$v_A = -157,68 \text{ cm s}^{-1}.$$

Man erhält nach (34), (35), (39) und (40)

$$\begin{aligned} N &= -0,102 & P &= -0,005 \\ Q &= -25,984 & S &= -0,13. \end{aligned}$$

Nach (51) findet man daraus die charakteristischen Wurzeln

$$\lambda_1 = +0,246 \quad \lambda_2 = -0,478.$$

Da $|\lambda| < 1$ ist, spielt sich die Schwingung auf einen festen Phasenwinkel und eine feste Rückprallgeschwindigkeit ein. Gleichzeitig ist die Stabilität der Schwingung nachgewiesen.

2.7. Energiekurven praktischer Federhämmer

Da sich gezeigt hat, daß der Hammer des letzten Beispiels im Abschnitt 2.5. ohne weiteres als Einmassensystem behandelt werden kann, sollen die Daten dieses Hammers der folgenden Betrachtung und auch den analogen Betrachtungen in den Teilen B und C zugrunde gelegt werden.

In Bild 8 ist mit Hilfe der y -Werte (Bild 3) die Schlagarbeit A_S in Abhängigkeit von ω_0/ω eingezeichnet, wobei e/r als Parameter fungiert.

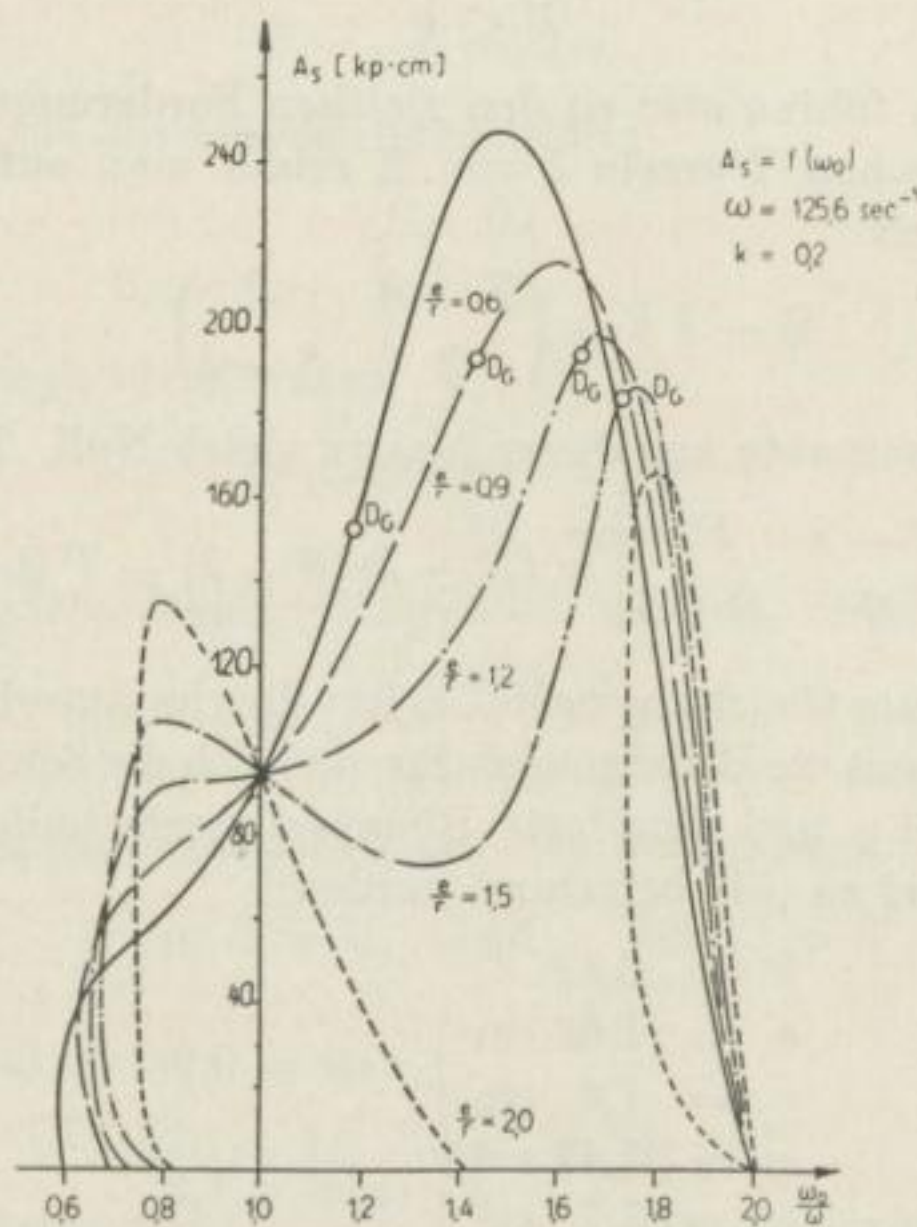


Bild 8

Die Daten des Hammers sind folgende:

Rückprallkoeffizient	$k =$	0,2
Bärmasse	$m =$	0,444 kg
Kurbelradius	$r =$	2,0 cm
Drehzahl	$n =$	1200 min ⁻¹
Kreisfrequenz	$\omega =$	125,6 s ⁻¹

Es zeigt sich, daß das Kreisfrequenzverhältnis $\omega_0/\omega = 1,4$ mit $e/r = 0,9$ günstige Hammerdaten bei einer Schlagarbeit von $A_S = 186,5 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ des im vergangenen Abschnitt berechneten Hammers liefert.

Es sei noch folgendes erwähnt: Während die y -Kurven (Bild 3) für jeden beliebigen Hammer zu verwenden sind und somit Allgemeingültigkeit besitzen, gelten die Energiekurven des Bildes 8 nur für einen bestimmten Hammer mit den angegebenen festen Hammerdaten.

An Hand des Bildes 8 ist zu erkennen, daß die Werte der Schlagenergie außerhalb des Resonanzpunktes entschieden höher liegen als im Resonanzpunkt. Beim in Bild 8 betrachteten Hammer hat die Schlagenergie im günstigsten Arbeitspunkt etwa den doppelten Betrag derjenigen im Resonanzpunkt. Die Kenntnis der Lage des günstigsten Arbeitspunktes ist also zur Erzielung einer hohen Schlagenergie von entscheidender Bedeutung.

3. Konstruktion des Modellhammers und seine Arbeitsweise

3.1. Problemstellung

Auf Grund der theoretischen Betrachtungen und ihrer Erkenntnisse sollten an einem Modellhammer folgende zwei Untersuchungen durchgeführt werden:

1. Bestimmung der Bewegungskurve des Bärs,
2. Bestimmung der Schlagarbeit des Bärs.

Es sollte also festgestellt werden, wie weit die Bewegungsgleichung (7) mit der wirklichen Bewegung übereinstimmt. Dann war der Verlauf der Kurven der Schlagarbeit (Bild 3 und 8) experimentell nachzumessen. In beiden Fällen mußte der Abstand der Aufschlagebene e variiert werden.

Bei der Konstruktion des Modellhammers war es das Ziel, beide Meßvorgänge gleichzeitig durchführen zu können. Außerdem sollte, um der mathematischen Behandlung möglichst nahe zu kommen, ein sinusförmiger Antrieb vorausgesetzt und die Reibung auf ein Minimum reduziert werden.

3.2. Konstruktion der Anlage

Bild 9 zeigt den Grundriß des vollständigen Modellhammers. Die Anlage selbst ist in Bild 10 aufgenommen.

Die gesamte Anlage ist auf einer 25 mm starken Eisenplatte montiert. Als Antrieb dient ein horizontal gelagerter Synchronmotor. Bei den Experimenten wird ein anderer Weg gegangen, als wir ihn bei der Ermittlung der günstigsten Hammerdaten besprochen haben. Dort war die Erregerkreisfrequenz ω fest

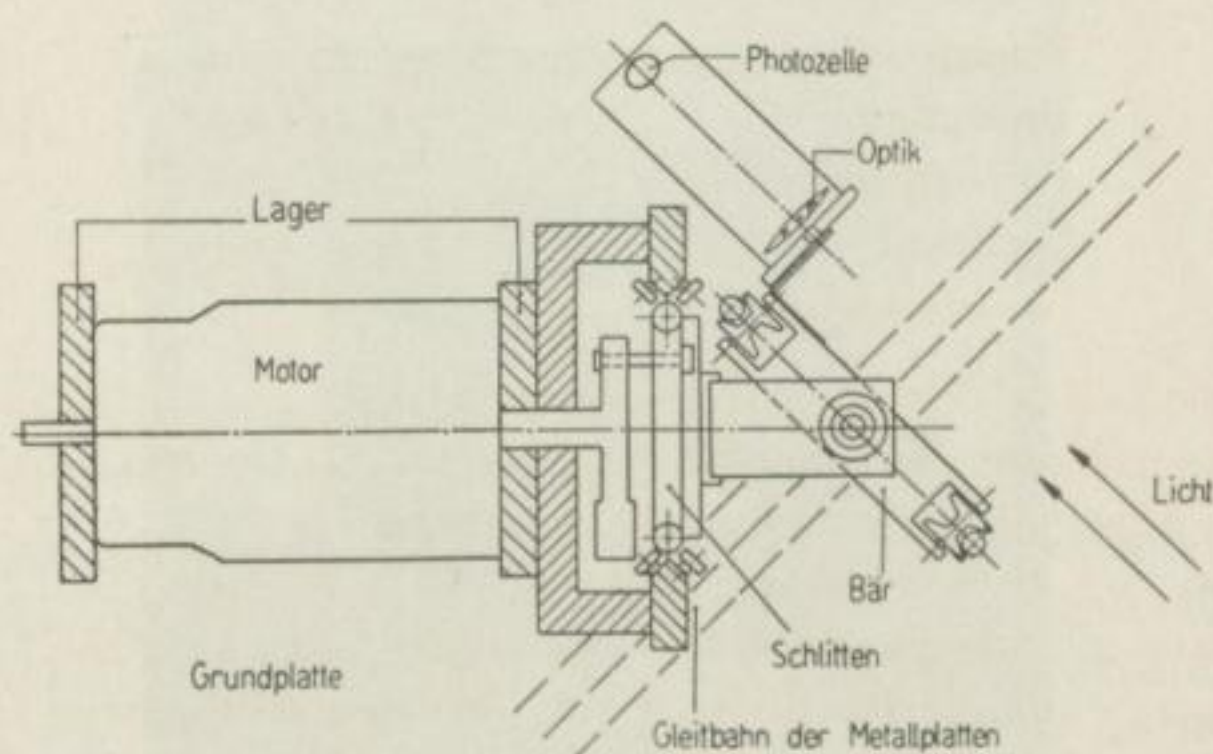


Bild 9

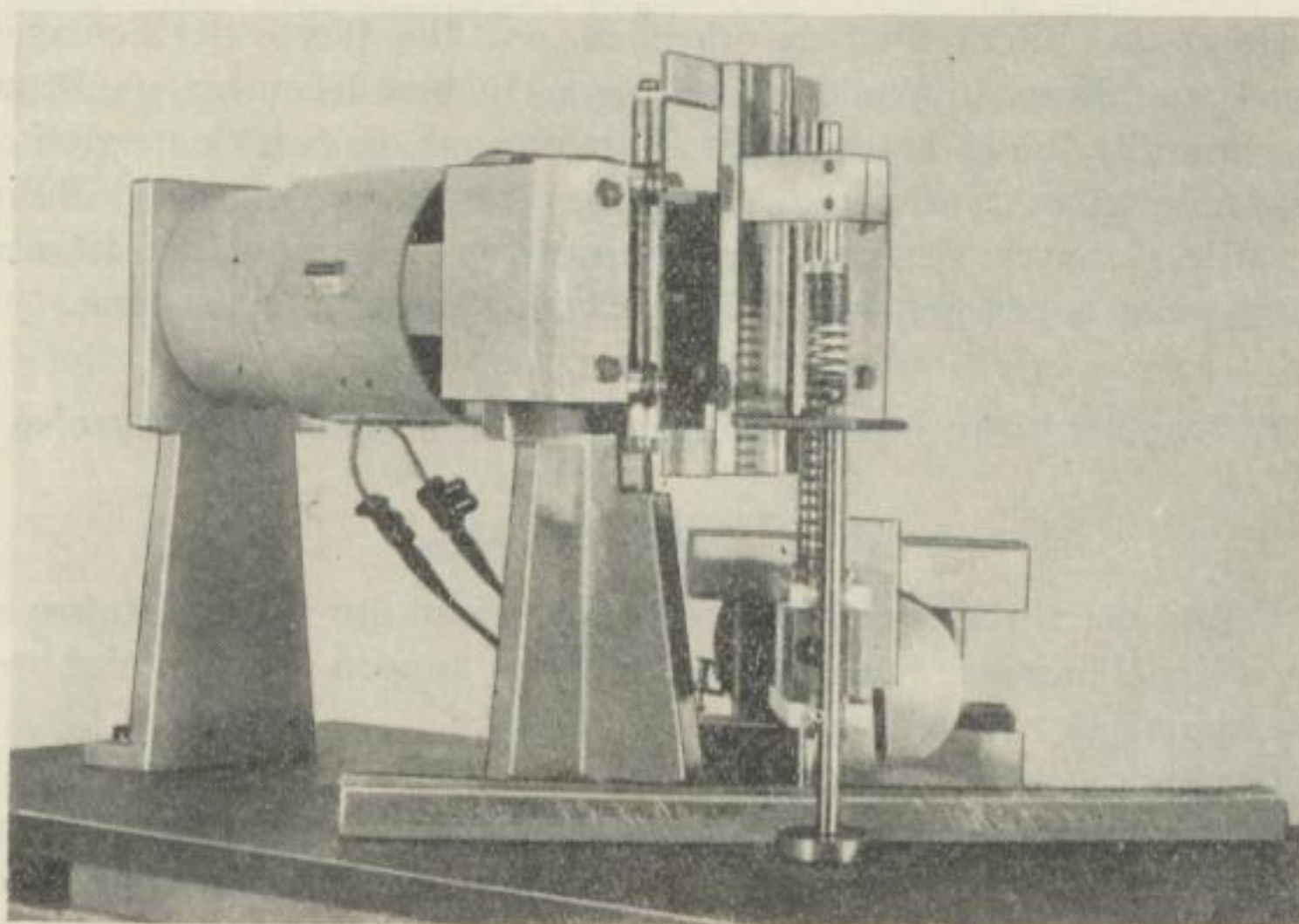


Bild 10

vorgegeben, und die Eigenkreisfrequenz ω_0 wurde durch entsprechende Wahl der Federkonstanten c angepaßt. Da die Experimente eine Kontrolle der Rechnung darstellen, ist es günstiger, die Hammerdaten einschließlich der Federkonstanten c unverändert zu lassen, statt dessen aber die Drehzahl und damit ω zu variieren. Zur Drehzahlregelung ist in der Anlage ein stufenloses Getriebe eingebaut.

Um die Rechnung auch in weiten Bereichen des Rückprallkoeffizienten k kontrollieren zu können, diente als schlagaufnehmendes Material Blei ($k = 0$) und Walzaluminium ($k = 0,42$). Beide Materialien weisen extreme Werte der Rückprallkoeffizienten auf. Eisen mit einem Rückprallkoeffizienten von $k = 0,2$ liegt also dazwischen. Mit Eisen als schlagaufnehmendes Material wird in den Teilen B und C gearbeitet.

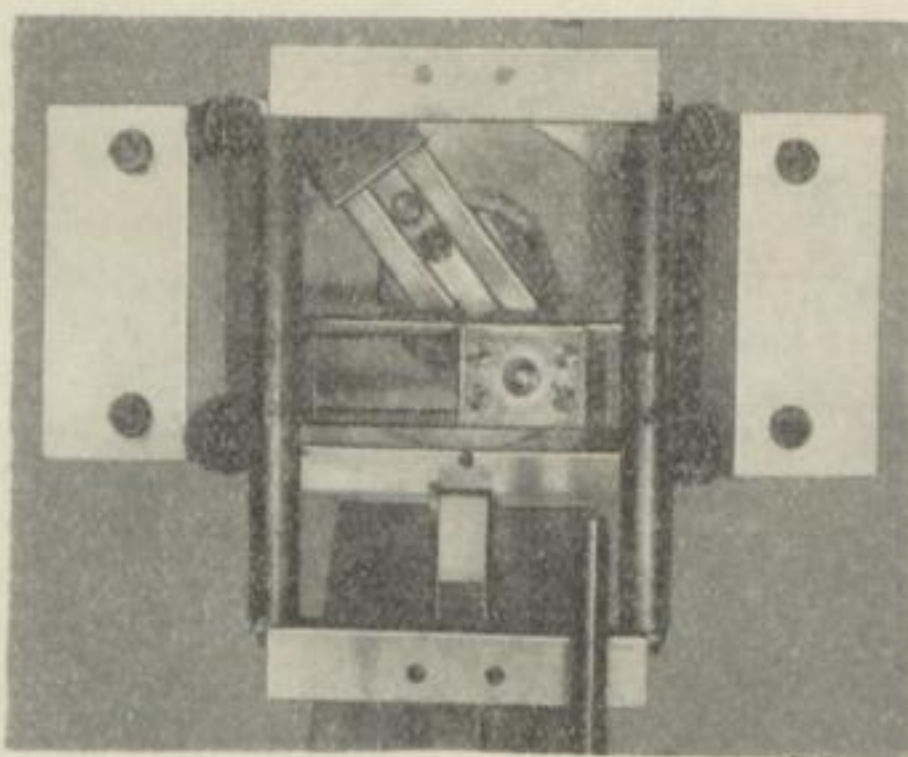


Bild 11

Um zu gewährleisten, daß die Erregung des Federhammers rein sinusförmig ist, wurde die Konstruktion so ausgeführt, daß die Kurbel des Elektromotors in einen waagerechten Schlitz eines Schlittens eingreift, der vertikal bewegt wird (Bild 11). Die Bewegung des Schlittens ist durch diese Anordnung rein sinusförmig und überträgt sich direkt auf die am Schlitten befestigte obere Federhalterung.

An der oberen Federhalterung ist die zum Federhammer gehörende Spiralfeder befestigt (Federkonstante $c = 1 \text{ kp/cm}$). Am unteren Ende der Spiralfeder ist der eigentliche Bär angebracht (Bild 12). Er ist als massiver Schlitten ausgebildet, der durch zwei Rundeisen geführt wird. Um die Reibung möglichst weitgehend herabzusetzen, gleitet der Schlitten in vertikaler Richtung in 4 Rollenlager.

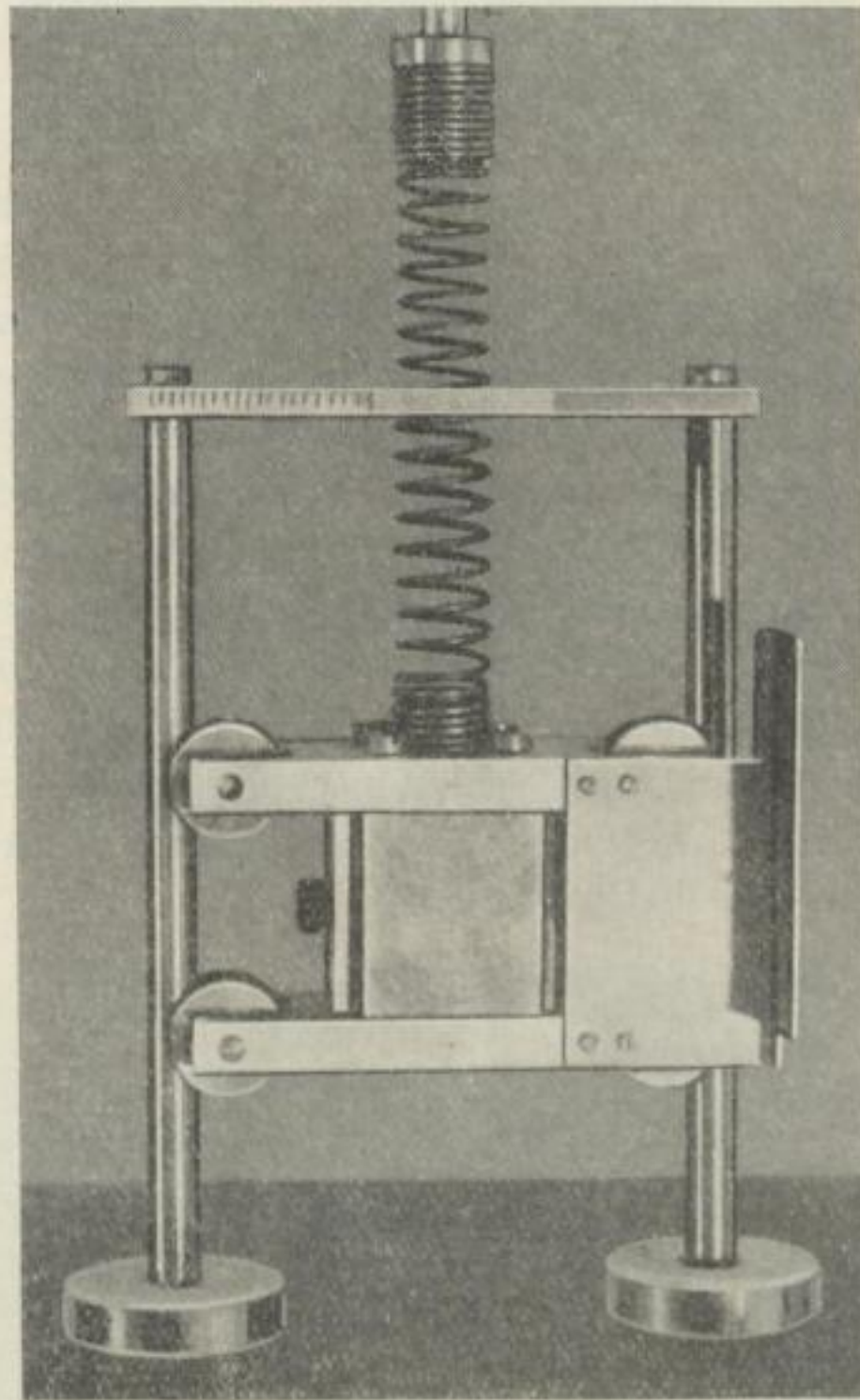


Bild 12

3.3. Aufzeichnung der Schlagarbeit

An der unteren Seite des Bärs ist eine Stahlkugel eingearbeitet, die in verschiedene Metallplatten einschlägt. Die Metallplatten sind 400 mm lang, 30 mm breit und 20 mm hoch. Sie werden während der Messung unter dem schlagenden Bär vorbeigezogen, so daß die Kugel Eindrücke in die Metallplatten schlagen kann. Aus dem Durchmesser der Einschläge läßt sich mit

Hilfe einer Eichkurve die Schlagenergie ermitteln. Die Eichkurve selbst wurde gewonnen, indem Kugeln vom gleichen Durchmesser wie die im Bär eingearbeitete aus verschiedenen Höhen fallen gelassen wurden. Die Durchmesser der Einschläge wurden mit einem Komparator ausgemessen und in die Eichkurve eingetragen.

In analoger Weise ging die Bestimmung des Rückprallkoeffizienten k vor sich, indem aus dem Verhältnis von Fallhöhe zu Rückprallhöhe der Kugel auf das Verhältnis der Geschwindigkeiten geschlossen werden konnte:

$$\frac{v_R}{v_A} = \sqrt{\frac{h_R}{h_A}}$$

Für Blei ergab sich der Rückprallkoeffizient $k = 0$, für Walzaluminium $k = 0,42$.

3.4. Aufzeichnung der Bärbewegung

Um die Bewegungskurve des Bärs aufnehmen zu können, ohne die Anlage zusätzlich dämpfen zu müssen, wurde die Bewegung optisch aufgezeichnet. Neben dem Bär wurde auf der Grundplatte ein Tubus montiert, der an der vorderen Seite durch eine Platte mit einem länglichen, senkrecht stehenden Schlitz verschlossen ist. Dahinter befindet sich eine Linse, die das Licht von dem Spalt auf eine am anderen Ende des Tubus angebrachte Photozelle wirft (siehe Bild 9). Am Bär selbst ist seitlich ein Blech angebracht, das während der Bewegung den Schlitz des Tubus mehr oder weniger abdeckt (Bild 13 und 14).

Wenn der Modellhammer in Betrieb ist, wird der Schlitz des Tubus mit einem Projektor parallel angestrahlt. Der in der Photozelle fließende Strom wird über einen Verstärker einem Schleifen-Oszillographen zugeleitet und dort aufgezeichnet. Die Verstärkeranlage kann so eingeregelt werden, daß Linearität der Aufzeichnung gewährleistet ist.

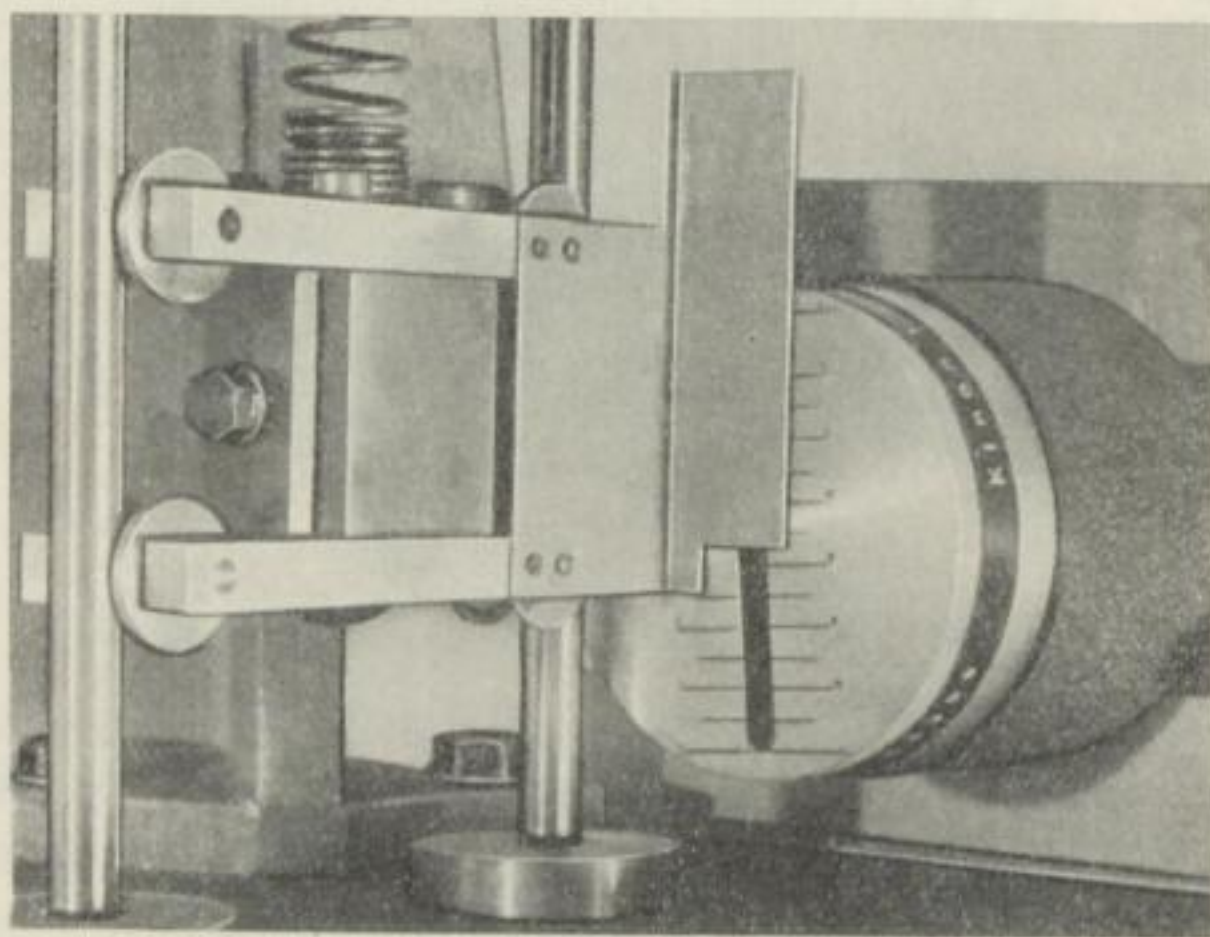


Bild 13

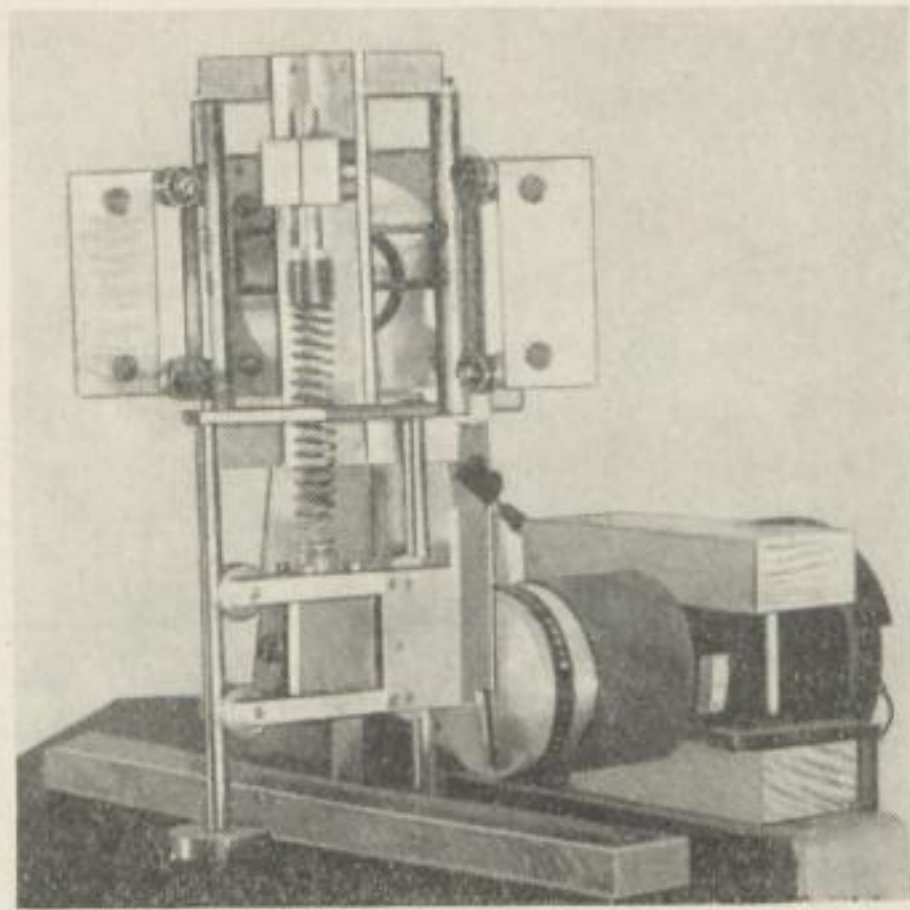


Bild 14

Mit Hilfe der geschilderten Anlage ist es möglich, gleichzeitig die Bewegungskurve und die Schlagenergie aufzunehmen. Die jeweils vorliegende Frequenz kann aus der Oszillographenaufnahme an Hand der mitgezeichneten Zeitmarke nachträglich ermittelt werden. Die Anlage weist folgende Daten auf:

Bärmasse	$m = 700$	g
Federkonstante	$c = 1$	kp/cm
Kurbelradius	$r = 1,8$	cm
Zeitmarke des Oszillographen	$\nu = 100$	s ⁻¹

4. Messungen mit dem Modellhammer

4.1. Energiekurven des Modellhammers

Bei den Experimenten dienten Blei und Walzaluminium als schlagaufnehmende Materialien. In den Bildern 15 und 16 sind die nach Gl. (8) berechneten y -Werte für $k = 0$ und für $k = 0,42$ in Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω eingezeichnet. In der üblichen Weise dient e/r als Parameter. Es ergeben sich analoge Kurven, wie wir sie auch schon in Bild 3 für Eisen ($k = 0,2$) erhalten haben. Berechnen wir mit Hilfe der y -Werte nach Gl. (8) die Schlagarbeit A_s , so liefern die Kurven, die wir jetzt erhalten, ein anderes Bild, als wir es von Bild 7 her gewohnt sind. In Bild 7 hatten wir die Erregerkreisfrequenz ω konstant gehalten, während wir die Eigenkreisfrequenz ω_0 durch entsprechende Anpassung der Federkonstanten variiert hatten. Um aber eine bequeme Kontrolle der Theorie mit Hilfe des Modellhammers durchzuführen, ist es angebracht, sämtliche Hammerwerte einschließlich der Federkonstanten c unverändert zu lassen. Statt dessen wird die Erregerkreisfrequenz ω variiert.

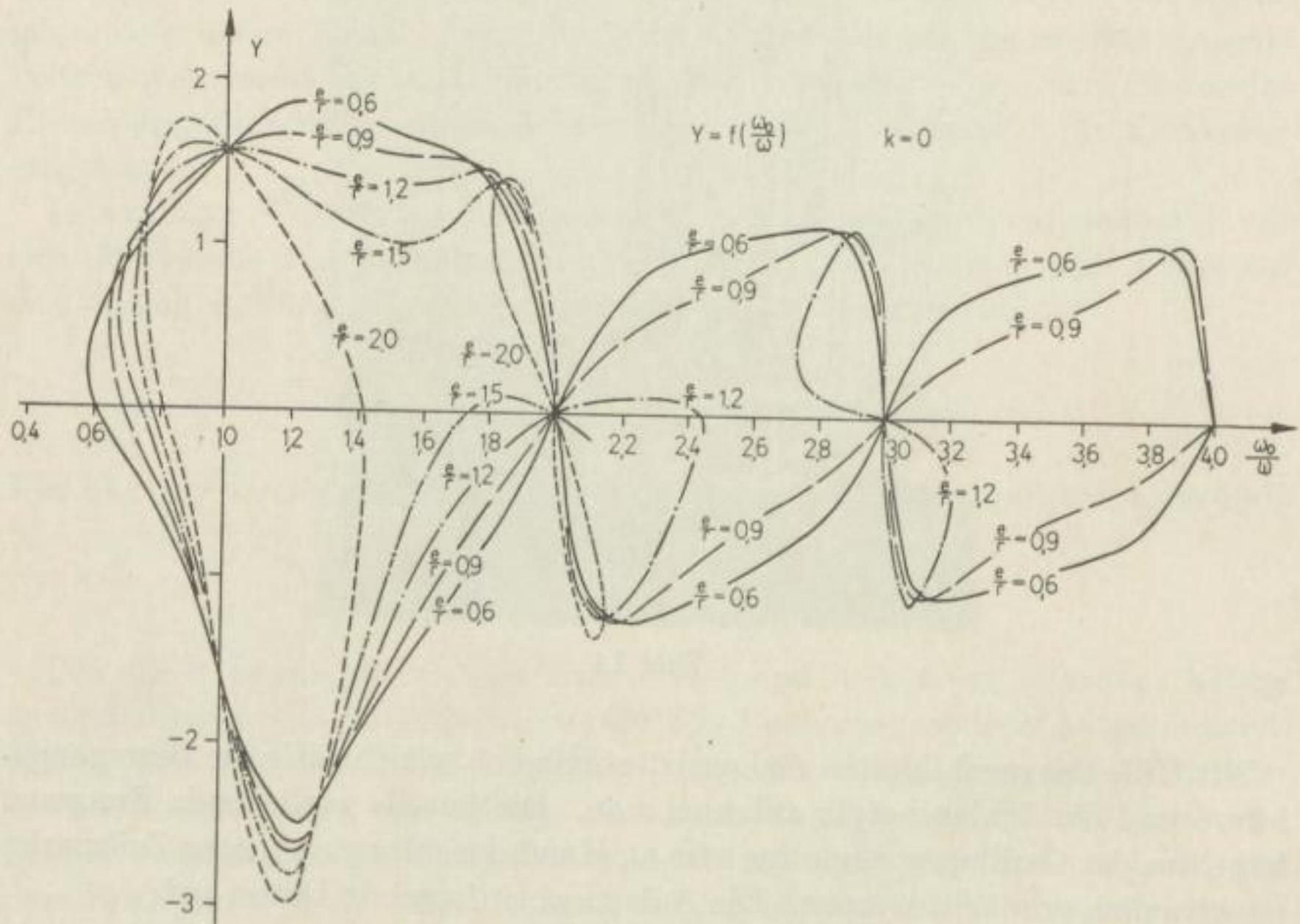


Bild 15

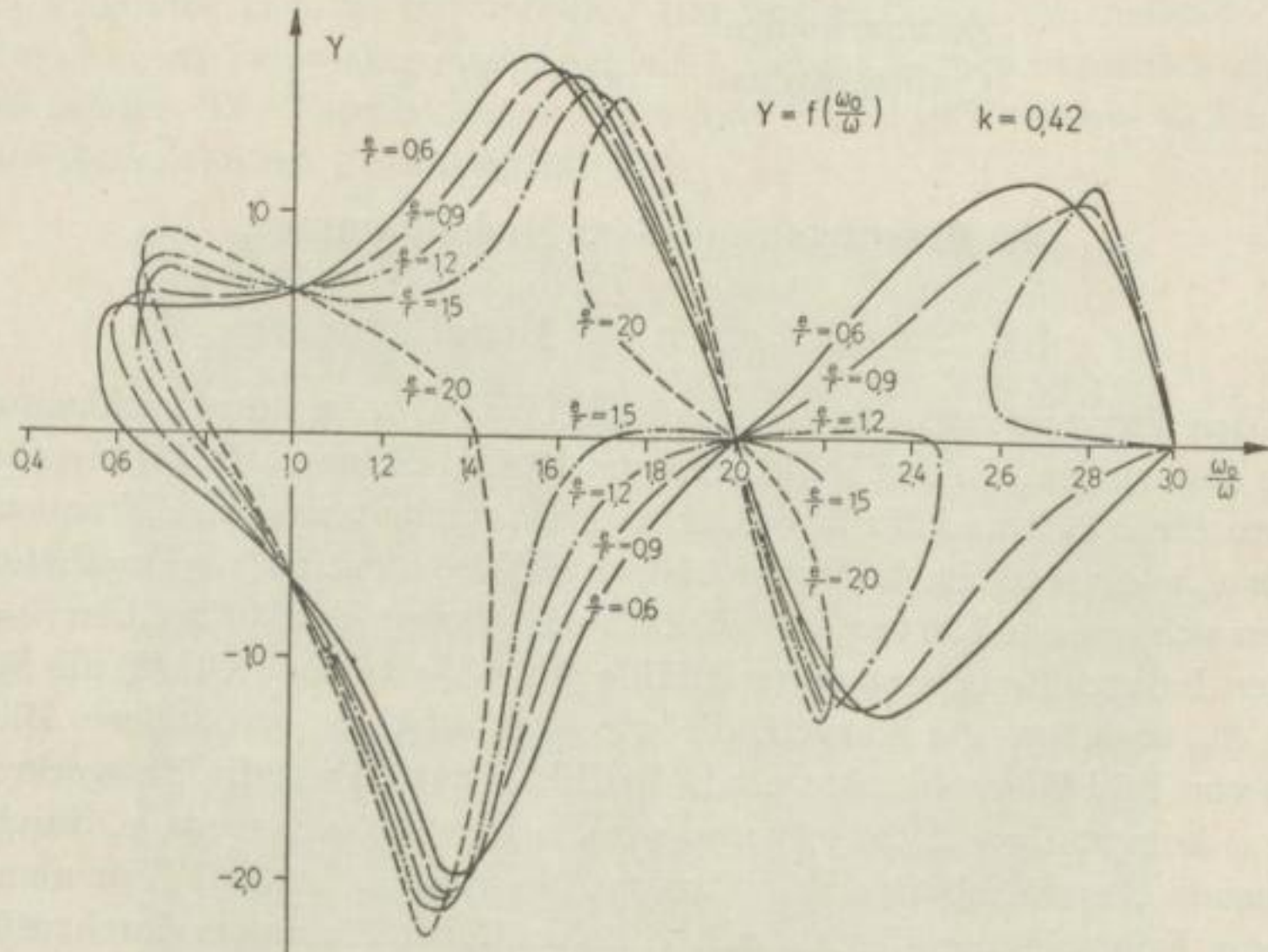


Bild 16

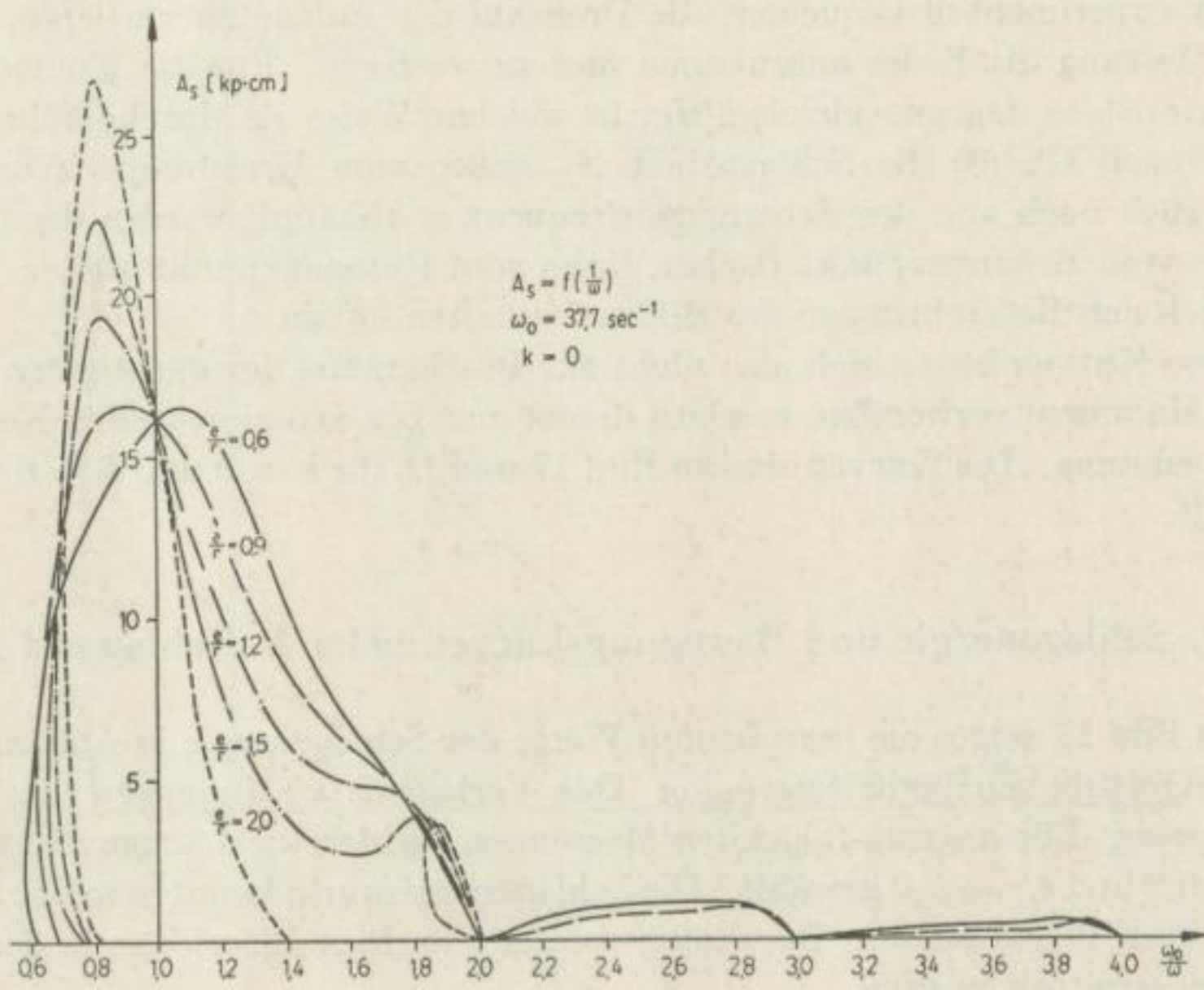


Bild 17

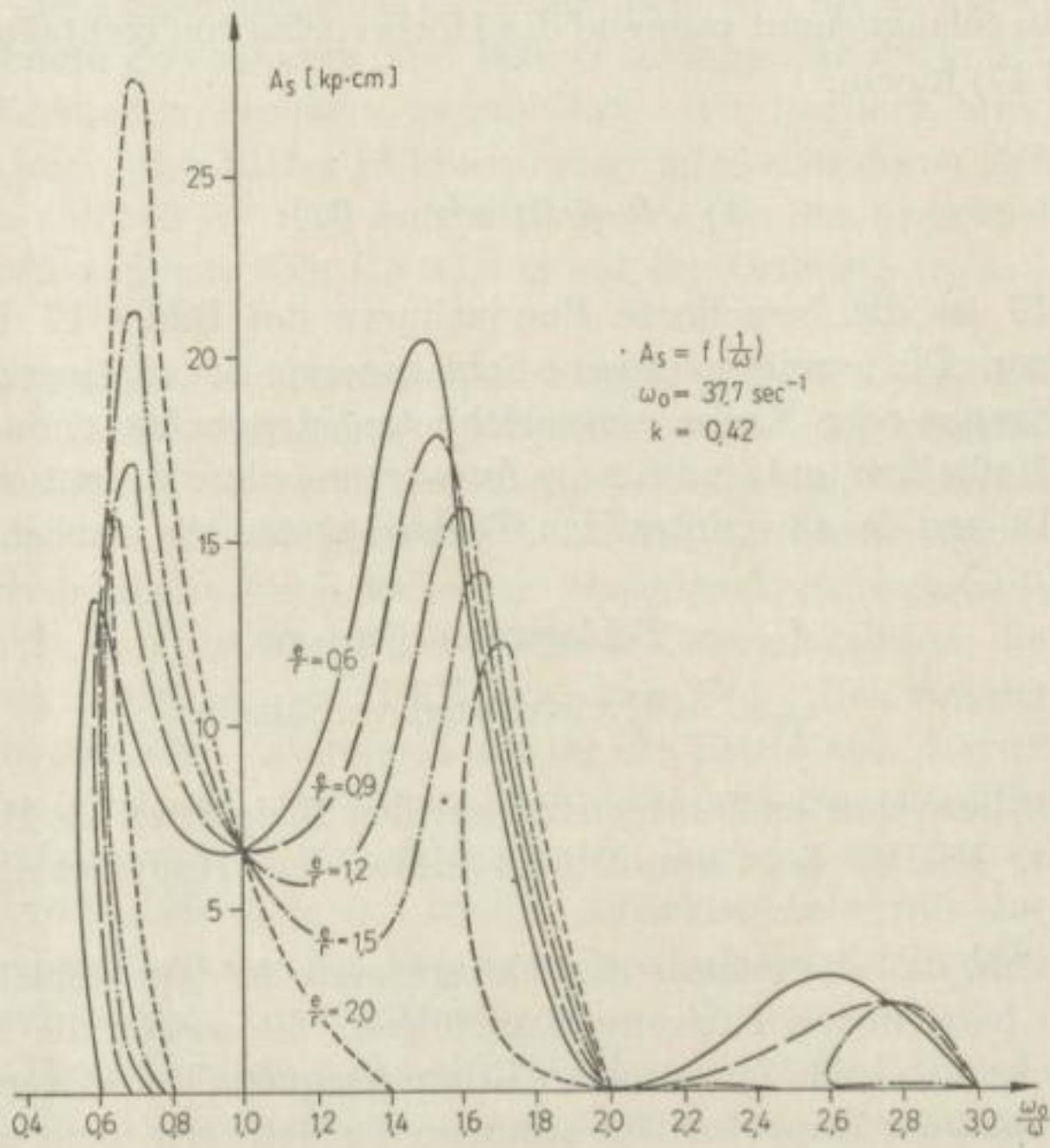


Bild 18

Es ist experimentell bequemer, die Drehzahl der Anlage zu variieren, als für jede Messung die Feder auszubauen und zu wechseln. Für die Kontrolle der Theorie ist es dagegen gleichgültig, in welcher Weise sie durchgeführt wird.

Da nach Gl. (8) die Schlagarbeit A_S außer vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω auch noch von der Erregerkreisfrequenz ω abhängt, werden die Kurven rechts vom Resonanzpunkt flacher, links vom Resonanzpunkt steiler, als wir sie nach den Betrachtungen des Bildes 7 erhalten haben.

Diese Kurven lassen sich also nicht zur Bestimmung der günstigsten Daten eines Hammers verwenden, sondern dienen nur zur experimentellen Kontrolle der Rechnung. Die Kurven sind in Bild 17 und 18 für $k = 0$ und $k = 0,42$ dargestellt.

4.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Blei

Das Bild 17 zeigte die berechneten Werte der Schlagenergie in Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω . Das Verhältnis e/r fungierte hierbei als Parameter. Für die nun folgenden Messungen wurden die Längenverhältnisse $e/r = 0,9$ und $e/r = 2,0$ gewählt. Die Schlagenergiewerte konnten in der bereits erwähnten Weise aus den Durchmessern der einzelnen Einschläge in den Bleiplatten ermittelt werden.

Die Experimente begannen bei niedrigen Drehzahlen, die man schrittweise erhöhte. Das Verhältnis ω_0/ω war also zunächst groß und wurde dann immer kleiner. Man gelangt somit während des Hochregels von rechts in die Energiekurve (Bild 17) hinein.

a) $k = 0$; $e/r = 0,9$:

In Bild 19 ist die berechnete Energiekurve des Bildes 17 für $e/r = 0,9$ herausgezogen. Die jeweils gemessene Schlagenergie ist mit eingezeichnet. Die als kleine Kreuze oder Kreise eingezeichneten Meßpunkte entstammen verschiedenen Meßreihen und sind für die Auswertung ohne Bedeutung.

In Bild 19 und in allen folgenden Bildern gelten die nachstehenden Abkürzungen:

$$A_S = \text{Schlagarbeit [kp} \cdot \text{cm]}$$

$$\omega_0/\omega = \text{Kreisfrequenzverhältnis}$$

Die mit „D“ bezeichneten Punkte sind auf den Bleiplatten als Doppelschläge zu erkennen. Hierbei liegt unmittelbar hinter dem Hauptschlag ein kleiner Nachschlag.

Es zeigt sich, daß die gemessenen Energiewerte in dem Gebiet der Einzelschläge dem berechneten Kurvenverlauf folgen. Sie weisen die Tendenz auf, sich nach links also nach der größeren Erregerfrequenz hin zu verlagern.

In dem Gebiet der Doppelschläge stimmen die Meßwerte nicht mehr mit den berechneten Werten überein. Der mathematische Ansatz gilt dort nicht.

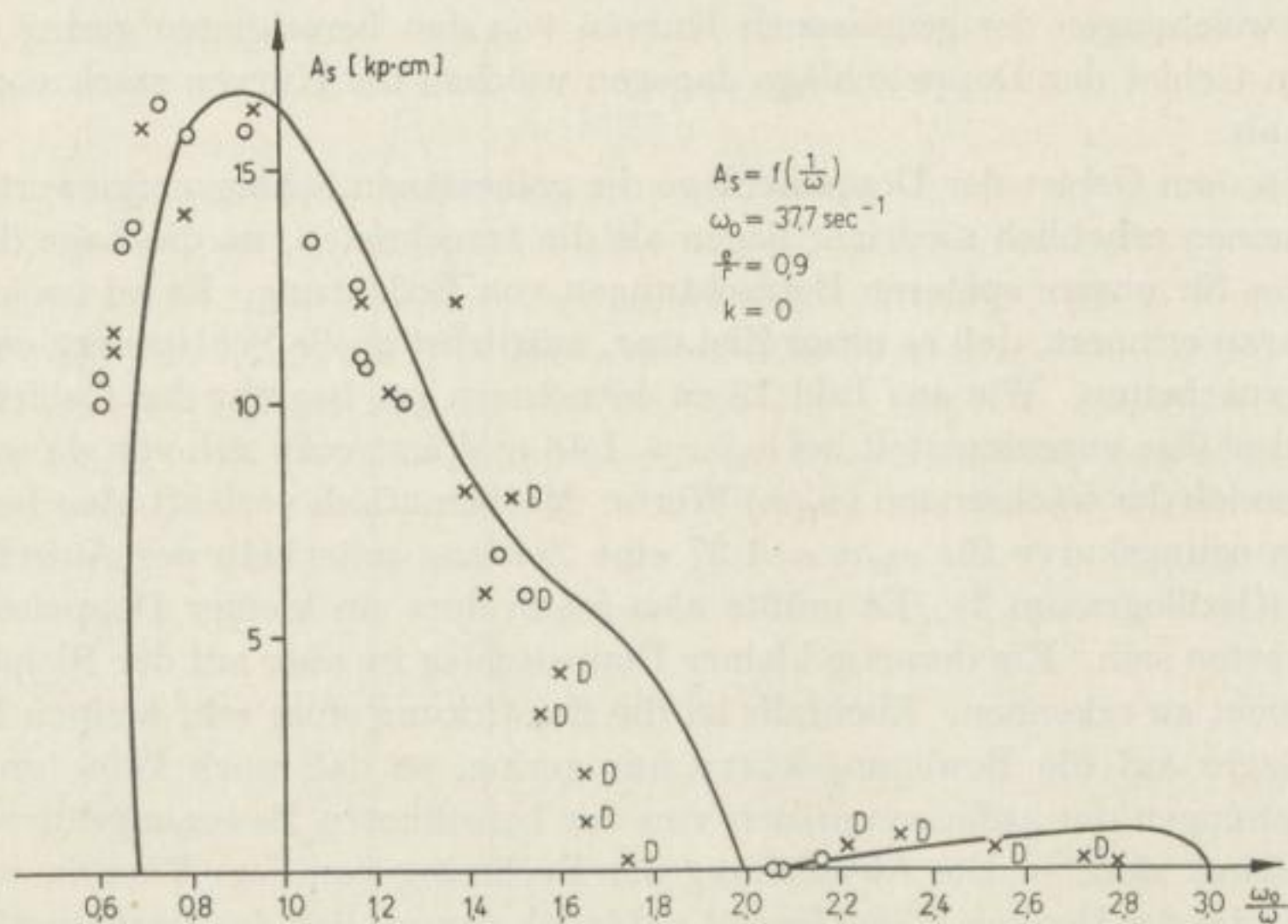


Bild 19

In den Oszillogrammen 1 bis 5 im Anhang am Schluß der Arbeit sind einige der vom Schleifenoszillographen aufgezeichneten Schlagkurven wiedergegeben. Jeweils unter der aufgenommenen Kurve befindet sich die entsprechende nach Gl. (7) berechnete Schlagkurve und ihre Gleichung. Die Kurven sind nach wachsender Erregerkreisfrequenz ω geordnet. Wir kommen also von rechts in die Energiekurve des Bildes 19 hinein. (Die mitgeschriebene Zeitmarke hat eine Frequenz von 100 s^{-1} . Die Aufschlagebene ist in den berechneten Kurven gestrichelt eingezeichnet. Die Einteilung auf der Ordinate ist in „cm“ angegeben.)

Bei sehr niedriger Erregerkreisfrequenz ($\omega_0/\omega = 2,54$; Oszillogramm 1) bildet die berechnete Bewegungskurve einen Sattel aus, der unterhalb der Aufschlagebene verläuft. Es treten also Doppelschläge auf. Vergrößert sich die Erregerkreisfrequenz allmählich, dann hebt sich der Sattel immer mehr. Ist die Erregerkreisfrequenz gleich der halben Resonanzkreisfrequenz ($\omega_0/\omega = 2,0$; Oszillogramm 2), dann berührt die berechnete Bewegungskurve die Aufschlagebene nur noch streifend. Die Schlagarbeit ist Null. Bei weiterer Erhöhung der Erregerkreisfrequenz bildet sich wieder ein Sattel aus, der unterhalb der Aufschlagebene verläuft. Es treten also auch dort Doppelschläge auf. Mit steigender Kreisfrequenz hebt sich der Sattel immer mehr, bis er etwa beim Kreisfrequenzverhältnis $\omega_0/\omega = 1,35$ die Aufschlagebene nur noch streifend berührt (siehe Oszillogramm 3). Von da ab verläuft der Sattel der berechneten Kurve nur noch oberhalb der Aufschlagebene. Es treten also im Gebiet $\omega_0/\omega < 1,35$ keine Doppelschläge mehr auf. Die Oszillogramme 1 bis 5 zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den aufgenommenen und den berechneten Schlagkurven. Es ergibt sich, daß im Gebiet der Einzelschläge

die Abweichungen der gemessenen Kurven von den berechneten gering sind. In dem Gebiet der Doppelschläge dagegen weichen die Kurven stark voneinander ab.

Da in dem Gebiet der Doppelschläge die gemessenen Schlagenergiewerte im allgemeinen erheblich niedriger liegen als die berechneten, ist die Lage dieses Gebietes für unsere späteren Betrachtungen von Bedeutung. Es sei noch einmal daran erinnert, daß es unser Ziel war, möglichst große Schlagenergiewerte herauszuarbeiten. Wie aus Bild 19 zu entnehmen ist, beginnt das Gebiet der Doppelschläge experimentell bei $\omega_0/\omega = 1,48$ und erstreckt sich von da aus in den Bereich der wachsenden (ω_0/ω) -Werte. Mathematisch verläuft aber bereits die Bewegungskurve für $\omega_0/\omega = 1,37$ eine Zeitlang unterhalb der Aufschlagebene (Oszillogramm 3). Es müßte also schon dort ein kleiner Doppelschlag zu erwarten sein. Ein derartig kleiner Doppelschlag ist aber auf der Bleiplatte noch nicht zu erkennen. Ebenfalls ist die Einwirkung eines sehr kleinen Doppelschlages auf die Bewegungskurve nur gering, so daß noch keine großen Abweichungen der aufgenommenen von der berechneten Bewegungskurve zu verzeichnen sind. — Die Abweichung der Rechnung von dem Experiment in dem Gebiet der Doppelschläge beruht natürlich darauf, daß der mathematische Ansatz nur verlangt, der Bär soll sich am Beginn und am Ende der Periode am Ort der Aufschlagebene befinden ($x = -e$), während das Experiment noch zusätzlich fordert, daß sich der Bär auch innerhalb der Periode nicht unter der Aufschlagebene bewegen kann ($x \geq -e$). Da diese letzte Bedingung nicht mit in die Rechnung aufgenommen wird, stellt die im Doppelschlaggebiet nur eine grobe Annäherung dar. Sie wird um so weiter vom Experiment abweichen, je mehr die berechnete Bewegungskurve unterhalb der Aufschlagebene verläuft.

b) $k = 0$; $e/r = 2,0$:

Bild 20 zeigt die aus Bild 17 herausgezogene berechnete Kurve der Energiewerte für $e/r = 2,0$. Die gemessenen Werte sind mit eingetragen.

Es zeigt sich, daß sich die zwei getrennten Äste der Energiekurve auch experimentell nachweisen lassen. Allerdings verläuft die experimentell bestimmte Kurve bei höheren Energiewerten ($\omega_0/\omega < 1,05$) schwach unterhalb der berechneten Kurve.

Für Kreisfrequenzverhältnisse $\omega_0/\omega < 0,7$, also bei hohen Drehzahlen, kommt gar kein Schlag zustande. Der Bär bewegt sich oberhalb der Schlagenebene. Wird die Drehzahl aus diesem hohen Bereich wieder in den normalen Arbeitsbereich zurückgeregelt, dann kommt ebenfalls kein Schlag zustande. Da die Amplitude a der erzwungenen Schwingung kleiner ist als der Abstand e der Aufschlagebene ($a < e$), berührt der Bär gar nicht die Aufschlagebene, und die Eigenschwingung wird nicht angeregt. Erfolgt dagegen beim Hinauffahren bei niedrigen Drehzahlen zunächst einmal ein Schlag, dann ist der Bär auch bei höheren Drehzahlen in der Lage, auf die Aufschlagebene zu schlagen, da die Eigenschwingung bereits angeregt ist.

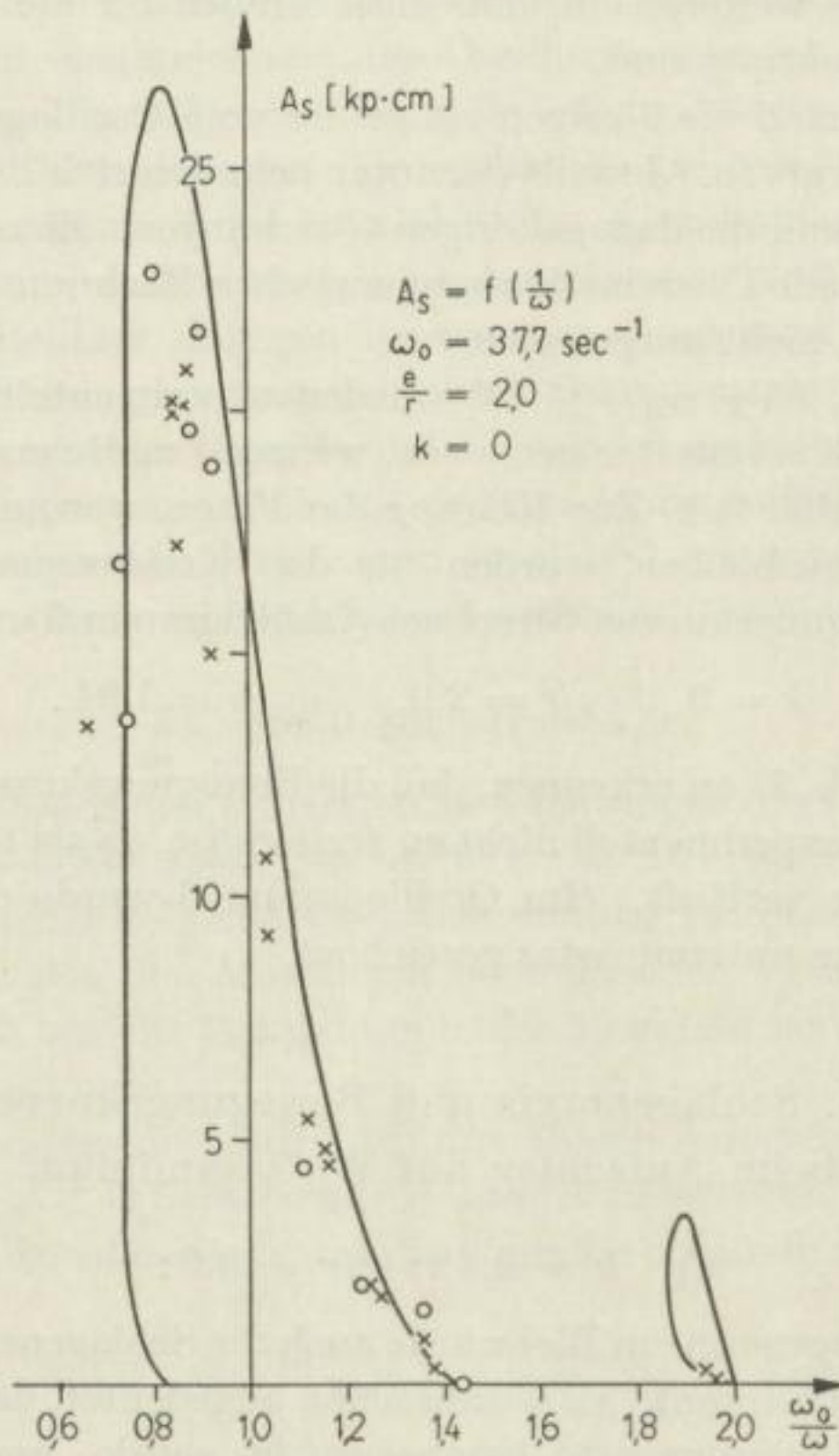


Bild 20

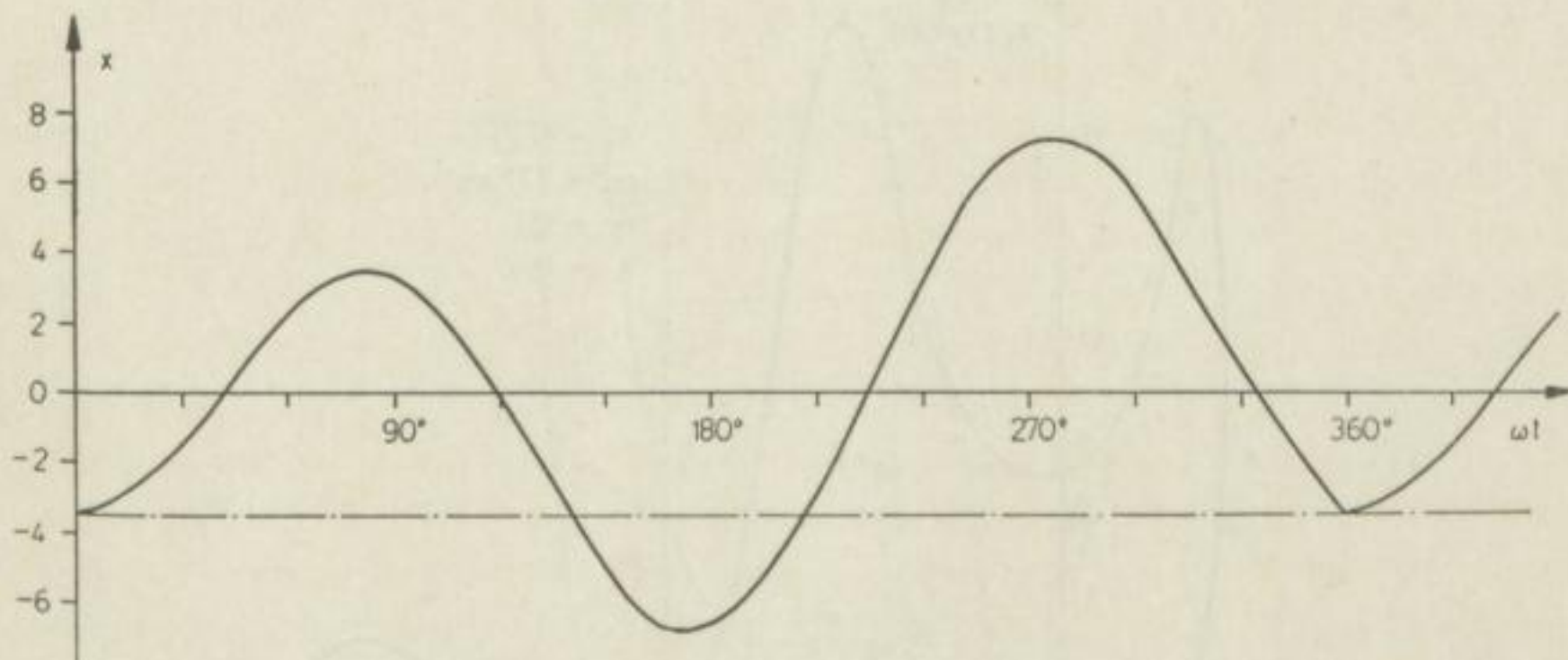


Bild 21

$$x = -1,90 \sin \omega t + 1,55 \cos \omega t - 5,15 \cos (1,94 \omega t) + 0,98 \sin (1,94 \omega t)$$

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß diese Fragen für die Berechnung eines Hammers von Bedeutung sind.

Die Oszillogramme 6 bis 8 zeigen einige der vom Oszillographen aufgenommenen Bewegungskurven. Jeweils darunter befinden sich die nach Gl. (7) berechneten Kurven und die dazugehörigen Gleichungen. Es zeigt sich auch hier eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment. Doppelschläge sind nicht aufgetreten.

In den Bereich $1,85 \leq \omega_0/\omega \leq 2,0$ wurden experimentell nur die Energiewerte des unteren Kurvenastes gemessen, während mathematisch zwei Lösungen möglich sind (Bild 20). Zur Klärung der Frage, warum die Energiewerte des oberen Astes ausbleiben, wurden für das Kreisfrequenzverhältnis $\omega_0/\omega = 1,94$ beide Bewegungskurven berechnet (Oszillogramm 6 und Bild 21).

$$k = 0 \quad e/r = 2,0 \quad \omega_0/\omega = 1,94.$$

Es ist aus der Abb. 21 zu erkennen, daß die Bewegungskurve, die zum oberen Energieast gehört, experimentell nicht zu erzielen ist, da sie teilweise unterhalb der Aufschlagebene verläuft. (Im Oszillogramm 6 wurde deshalb gleich die Bewegungskurve des unteren Astes gezeichnet.)

4.3. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Walzaluminium

a) $k = 0,42$; $e/r = 0,9$:

Ähnlich der Schlagenergie in Blei wurde auch die Schlagenergie des Hammers in Walzaluminium bestimmt. Es wurde schon angedeutet, daß hier absichtlich eine sehr harte Aluminiumsorte herausgesucht wurde, um einen möglichst großen Rückprallkoeffizienten zu erhalten.

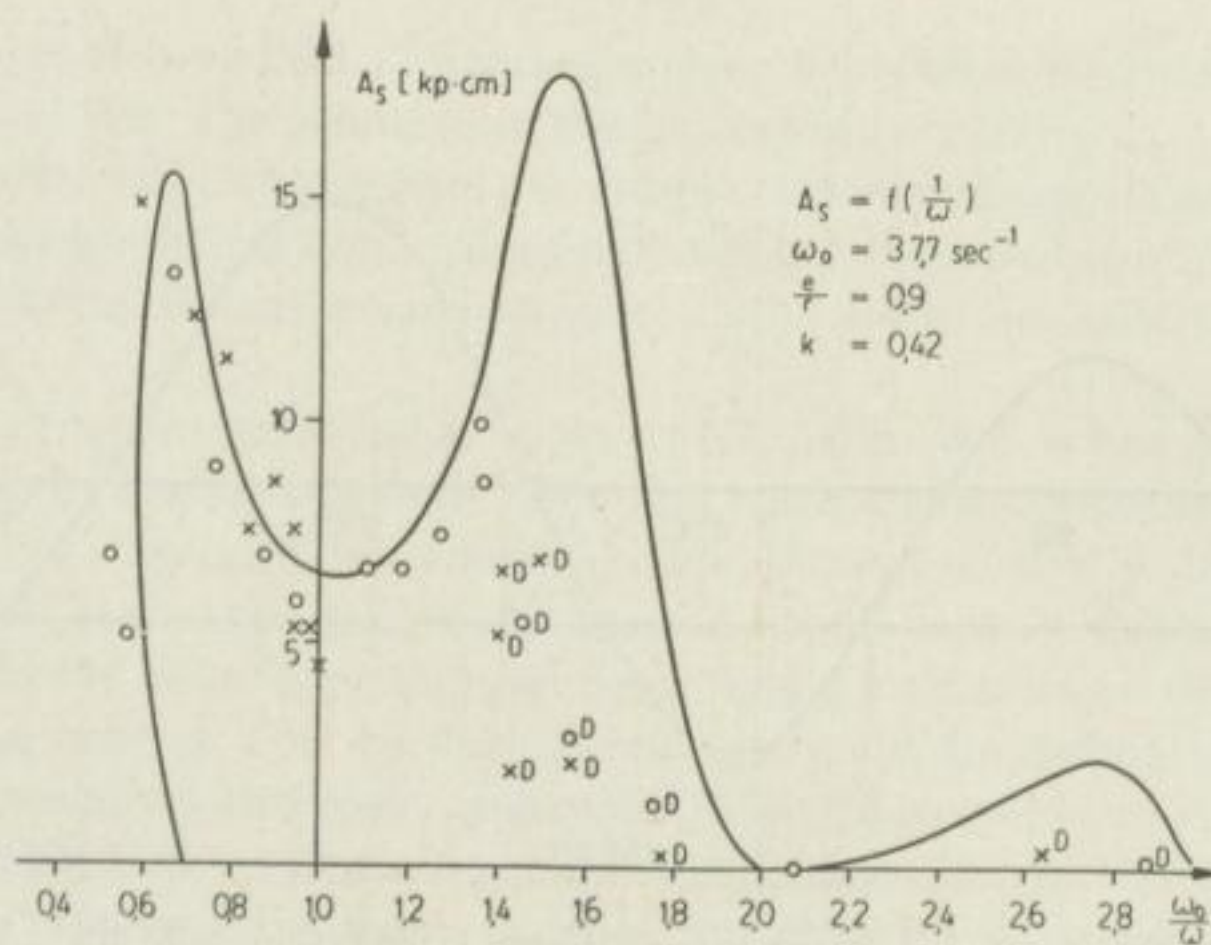


Bild 22

Das Bild 22 zeigt die aus Bild 18 zu $e/r = 0,9$ gehörende Energiekurve. Die Meßpunkte sind mit eingezeichnet. Die Oszillogramme 9 bis 17 zeigen einige der vom Oszillographen aufgezeichneten Bewegungskurven. Die berechneten Kurven sind ebenfalls eingetragen. Es ergibt sich das bereits von den Messungen mit Blei her bekannte Bild: Im Gebiet der Einzelschläge ist die Übereinstimmung zwischen der Rechnung und der Messung zufriedenstellend. Im Gebiet der Doppelschläge dagegen ist aus den schon beim Blei angedeuteten Gründen keine Übereinstimmung möglich. Oszillogramm 9 veranschaulicht gerade die Grenze zwischen Doppel- und Einzelschlaggebiet. Es bildet sich bei dieser Bewegungskurve ein Sattel aus, der gerade die Aufschlagebene berührt. Mit wachsender Drehzahl hebt sich dann der Sattel immer mehr (Oszillogramm 10 und 11), bis ein solcher schließlich ganz ausbleibt (Oszillogramm 12).

b) $k=0,42$; $e/r = 2,0$:

In Bild 23 sind analog den bisherigen Betrachtungen die berechnete Energiekurve und die gemessenen Energiewerte für $e/r = 2,0$ eingetragen. Es zeigt sich ebenfalls eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen der Messung und der Rechnung. Analog den Messungen beim gleichen Verhältnis $e/r = 2,0$ in Blei verlaufen auch hier die Meßpunkte in der Mehrzahl schwach unterhalb der berechneten Energiekurve.

Doppelschläge traten nicht auf. Auf den beiden Ästen der Energiekurve im Bereich $1,62 < \omega_0/\omega < 2,0$ waren nur Meßwerte zu erhalten, wenn der Hammer angestoßen wurde. Sonst bewegte sich der Hammer oberhalb der Aufschlagebene.

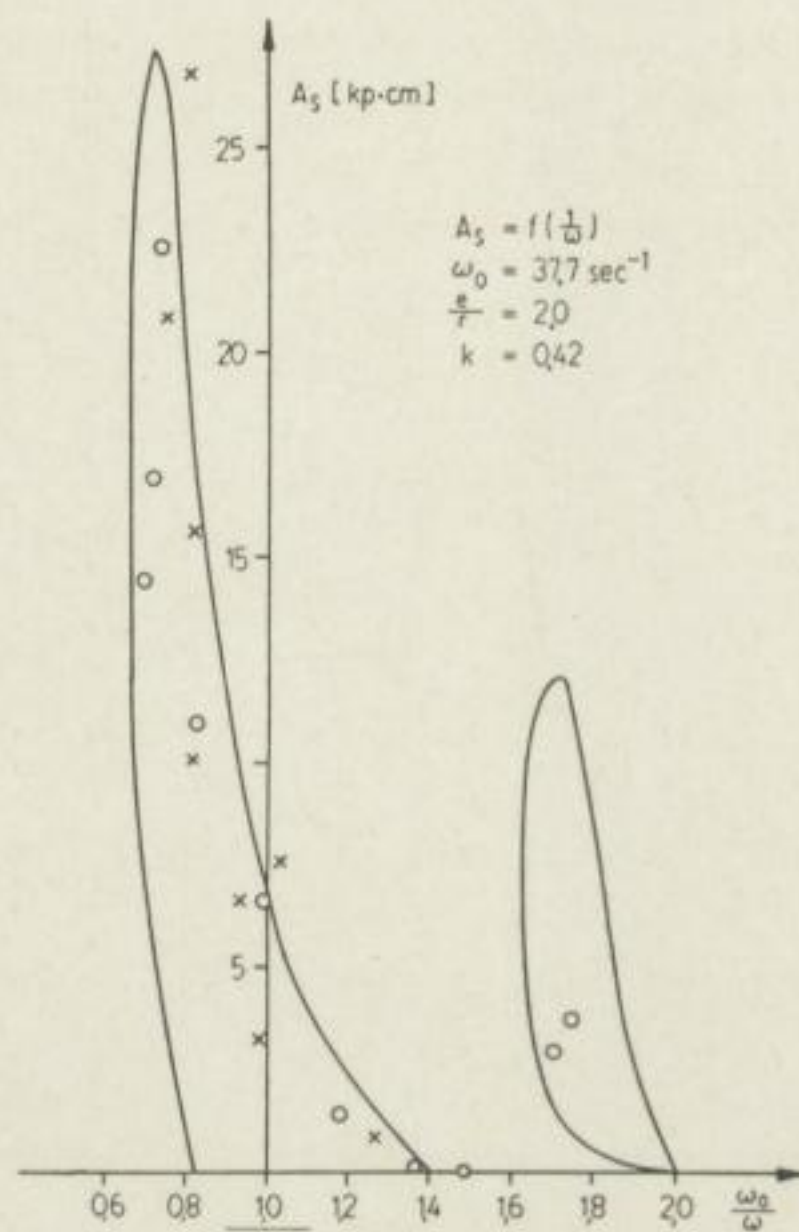


Bild 23

Die Oszillogramme 13 und 14 zeigen einige aufgenommene Bewegungskurven und die zugehörigen berechneten Kurven mit ihren Gleichungen. Für das Kreisfrequenzverhältnis $\omega_0/\omega = 0,81$ sind mathematisch zwei Lösungen möglich. Experimentell stellt sich die Lösung ein, die dem oberen Ast der Energiekurve (Bild 23) entspricht. Der Hammer durchläuft also beim Hochregeln der Drehzahl die Energiekurve stetig.

4.4. Betrachtungen zu den Messungen

Die Gleichung (8) gibt die berechnete Schlagenergie des Hammers an und die Gl. (7) die Bewegungskurve des Bärs. Wie die Messung bestätigt, zeigen die Kurven der Schlagenergie (Bild 17 und 18), daß im Resonanzfall keineswegs die größte Schlagenergie durch den Bär übertragen wird.

Im Resonanzpunkt selbst ist die Schlagenergie für alle Verhältnisse e/r gleich groß.

Vergleicht man die Kurven mit unterschiedlichem Rückprall miteinander, dann ist die Schlagenergie im Resonanzpunkt bei kleinem Rückprall (Blei $k = 0$) erheblich größer als bei großem (Walzaluminium $k = 0,42$). Die Energiemaxima dagegen liegen in beiden Fällen nahezu auf der gleichen Höhe (siehe hierzu Bild 17 und 18).

Übereinstimmend zeigt sich bei allen Experimenten, daß die Richtigkeit der Theorie bestätigt wird.

TEIL B

Gedämpfter Federhammer

Verzeichnis der Sammlungen

Die Sammlungen sind in drei Hauptgruppen eingeteilt:
I. Mineralogische Sammlungen
II. Petrographische Sammlungen
III. Geologische Sammlungen

Die Mineralogischen Sammlungen umfassen die Mineralien der Erde und der Gesteine, die Petrographischen Sammlungen die Gesteine der Erde und der Gesteine, die Geologischen Sammlungen die Gesteine der Erde und der Gesteine.

5. Mathematische Betrachtungen

5.1. Allgemeines

Bei dem im Teil A behandelten Modellhammer war die Dämpfung absichtlich so klein gehalten, daß man ihren Einfluß vernachlässigen konnte. Zu diesem Zweck war der Bär als freier Schwinger an der Feder befestigt und glitt nahezu reibungsfrei in vier Rollenlagern (Bild 12). Bei der gezeigten Anordnung wurde die Feder während der Bewegung auf Druck und auf Zug beansprucht. Da diese Belastungsart oft zum Federbruch an den Einspannstellen führt, ist man in der Praxis dazu übergegangen, andere Konstruktionen zu verwenden: Der Bär wird als Hohlzylinder gebaut, in dessen Innerem sich die Feder befindet [1] [9] [10] (siehe Bild 1).

Die Feder liegt lose im Bärengehäuse und findet an den beiden beweglichen Tellern ein Widerlager. Die Arbeitsweise des Bärs ist folgende (siehe Bild 25): Denken wir uns die Triebstange festgehalten und bewegen den Bär nach unten, dann drückt das Bärengehäuse den oberen Teller nach unten, so daß er an der Stange entlanggleitet. Der untere Teller wird durch die Stange gehalten, und die Feder wird zusammengedrückt. Bewegen wir dagegen bei festgehaltener Kurbelstange den Bär nach oben, dann wird der obere Teller durch das Widerlager an der Stange gehalten. Der untere Teller wird hochgedrückt und gleitet an der Stange entlang nach oben. Die Feder wird auch bei dieser Bewegung zusammengedrückt. Sie wird also nur auf Druck beansprucht. Konstruktionen dieser Art haben den Vorteil, daß die Federn nicht so oft brechen, da keine Einspannstellen vorhanden sind. Der Nachteil dieser Konstruktionen liegt in den größeren Energieverlusten. Zunächst ist die Reibung bei dieser geschlossenen Bauweise entschieden größer als bei der offenen, da hier viel mehr gleitende Teile vorhanden sind. Wenn man auch versuchen könnte, die Reibung durch geschickte Konstruktion und Verarbeitung klein zu halten, treten jedoch weitere Energieverluste durch einen zweiten Faktor auf, der sich nicht unterdrücken läßt. Wir denken uns wiederum die Triebstange festgehalten und drücken den Bär nach oben (Bild 25). Lassen wir jetzt den Bär los, dann wird er nach unten schwingen. Es wandelt sich die potentielle Federenergie in kinetische Energie um. Das Bärengehäuse, der untere Teller und anteilmäßig die Federmasse geraten in Bewegung. Die kinetische Energie der Federmasse entsteht vor allem in der unteren Federhälfte, da die Geschwindigkeit der einzelnen Massenteilchen der Feder von unten nach oben hin abnimmt. In dem Augenblick, in dem der Bär durch die Nullage schwingt, schlägt der untere Teller auf den Fuß der Stange auf und fängt die Bewegung des unteren Tellers und der unteren Federhälfte ab. Der Bär wird also selbst bei Vernachlässigung der Dämpfung nicht die Ausgangsamplitude erreichen können. Beim Zurückschwingen wiederholt sich dieser Vorgang entsprechend umgekehrt. Bei der geschilderten Bärkon-

struktion kommt also zu dem Verlust durch Reibungsarbeit noch der Verlust der angedeuteten kinetischen Energiebeträge hinzu, die beim Aufschlagen der beweglichen Teller verloren gehen. Dieser Energieverlust ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, die der Bär beim Nulldurchgang hat.

5.2. Bewegungsgleichung

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung des Bärs in geschlossener Bauweise können die auftretenden Energieverluste nicht mehr vernachlässigt werden. Wie im vergangenen Abschnitt gezeigt wurde, setzen sie sich in der Hauptsache aus Coulombschen Reibungsverlusten und aus Verlusten, die durch das Aufschlagen der Teller auftreten, zusammen. Da der Hammer nach jedem Schlag neu angeregt wird, können wir, ohne einen großen Fehler zu machen, sämtliche Energieverluste durch Stokesche Reibung ersetzen.

Für unsere Differentialgleichung der Bewegung erhalten wir dann:

$$m \ddot{x} + w \dot{x} + c x = c r \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

oder umgeformt

$$\ddot{x} + 2 \varrho \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (52)$$

mit

$$\frac{w}{m} = 2 \varrho$$

und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$x_1 = a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta) = a \cdot \sin[\omega t - (\varphi + \delta)].$$

Hierin ist

$$a = \frac{r}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4}}}$$

und

$$\tan \delta = \frac{2 \varrho \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist:

$$x_2 = e^{-\varrho t} \cdot (A_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t + B_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t)$$

mit

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}. \quad (53)$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der Unbekannten sind die gleichen wie im ungedämpften Fall:

1. $x(0) = -e,$
2. $x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -e,$
3. $\frac{v_R}{v_A} = -k.$

Die Bedingungen legen also fest, daß sich der Bär im Augenblick des Aufschlages in der Aufschlagebene befinden soll und daß das Geschwindigkeitsverhältnis v_R/v_A gleich dem Rückprallkoeffizienten k sein soll.

Die vollständige Lösung von (52) ist:

$$x = a \cdot \cos(\varphi + \delta) \cdot \sin \omega t - a \cdot \sin(\varphi + \delta) \cdot \cos \omega t + e^{-\varrho t} \cdot A_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t + e^{-\varrho t} \cdot B_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t. \quad (54)$$

Hieraus ergibt sich die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dx}{dt} = a \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi - \delta) - \varrho \cdot e^{-\varrho t} (A_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t + B_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t) + e^{-\varrho t} (-A_0 \bar{\omega}_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t + B_0 \bar{\omega}_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t). \quad (55)$$

Setzen wir die Bedingungen in (54) und (55) ein, dann erhalten wir die Koeffizienten von (54):

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \sin(\varphi + \delta) &= A_0 + e, \\ a \cdot \cos(\varphi + \delta) &= -A_0 \cdot \bar{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$B_0 = A_0 \frac{1 - e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi},$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \left[\frac{1}{\sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{e^{+\varrho \frac{2\pi}{\omega}} - k \cdot e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}}}{1+k} - \frac{1-k}{1+k} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) - \frac{\varrho}{\bar{\omega}_0} \right],$$

$$A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \bar{\varepsilon}^2 (a^2 - e^2)}}{\bar{\varepsilon}^2 + 1}.$$

Die Gleichungen (54) und (56) entsprechen denen des ungedämpften Falles. Für $\varrho = 0$ gehen sie in diese Gleichungen über.

5.3. Gleichung der Schlagarbeit

Die Schlagarbeit A_S können wir als Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Schlag ansetzen:

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot (v_A^2 - v_R^2).$$



Umgeformt:

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot v_R^2 \left(\frac{1 - k^2}{k^2} \right).$$

Setzen wir mit Hilfe von Gl. (55) v_R ein, dann erhalten wir schließlich für die Schlagarbeit:

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot \frac{1 - k^2}{k^2} \cdot A_0'^2 (r\omega)^2 \cdot \left[-\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\bar{e}}{\omega} \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\frac{\bar{e}}{\omega} \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} - \frac{\bar{e}}{\omega} \right]^2 \quad (57)$$

mit

$$A_0' = \frac{A_0}{r} = \frac{-\frac{e}{r} \pm \sqrt{\frac{a^2}{r^2} + \bar{\varepsilon}^2 \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2} \right)}}{1 + \bar{\varepsilon}^2}.$$

Vereinfachen wir noch weiter, dann erhalten wir:

$$A_S = 2m \cdot \frac{1 - k}{1 + k} \cdot (r\omega)^2 \cdot A_0'^2 \times \left[\frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{1}{2} e^{+\frac{\bar{e}}{\omega} 2\pi} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\bar{e}}{\omega} 2\pi} - \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) \right]^2. \quad (58)$$

5.4. Diskussion der Gleichung der Schlagarbeit

Bei der Berechnung der Energiekurven im ungedämpften Fall (Gl. (8)) war es möglich, eine Größe y herauszuziehen, die universellen Charakter besaß. Die Größe y hing nur vom Abstandsverhältnis e/r und vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω ab. Sie konnte auf jeden beliebigen Hammer angewendet werden. Im gedämpften Fall (Gl. (58)) ist die Abspaltung einer derartigen Größe nicht möglich. Wir müssen für jeden Hammer erneut die zugehörige Kurvenschar berechnen.

Ermitteln wir die Energiewerte des gedämpften Hammers in der üblichen Weise in Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis $\bar{\omega}_0/\omega$, so liefert die Gl. (57) im Resonanzpunkt ($\bar{\omega}_0 = \omega$) einen unbestimmten Ausdruck. Setzen wir $\bar{\omega}_0 = \omega$, so wird $\bar{\varepsilon} = \infty$ und $A_0 = 0$. Wir müssen für die Gleichung (57) einen Grenzübergang durchführen. Es ergeben sich folgende zwei Grenzwerte:

$$1. \quad \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} A_0' \cdot \bar{\varepsilon},$$

$$2. \quad \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} A_0' \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\bar{e}}{\omega} \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\frac{\bar{e}}{\omega} \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}.$$

Wir setzen A'_0 und $\bar{\varepsilon}$ aus Gl. (56) und Gl. (57) ein, formen um und führen den Grenzübergang durch. Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} A'_0 \cdot \bar{\varepsilon} &= \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} \frac{-\frac{e}{r}}{1 + \bar{\varepsilon}^2} \cdot \bar{\varepsilon} + \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} \frac{\pm \sqrt{\frac{a^2}{r^2} + \bar{\varepsilon}^2 \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2} \right)}}{1 + \bar{\varepsilon}^2} \cdot \bar{\varepsilon} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4}} - \frac{e^2}{r^2}} \\
 2. \quad \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} A'_0 \cdot \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} &= \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{-\frac{e}{r}}{1 + \bar{\varepsilon}^2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \\
 &+ \lim_{\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega} \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{\pm \sqrt{\frac{a^2}{r^2} + \bar{\varepsilon}^2 \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2} \right)}}{1 + \bar{\varepsilon}^2} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\bar{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4}} - \frac{e^2}{r^2}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} + k \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \right)}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} + k \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \right) \cdot e^{-\frac{2\pi}{\omega}}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4}} - \frac{e^2}{r^2}} \cdot \frac{1 + k}{1 + k e^{-\frac{2\pi}{\omega}}}
 \end{aligned}$$

Die Schlagarbeit am Resonanzpunkt wird somit:

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot \frac{1 - k^2}{k^2} \cdot (r \omega)^2 \cdot \left(\frac{1}{4 \varrho^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^4}} - \frac{e^2}{r^2} \right) \cdot \left[\frac{1 + k}{1 + k e^{-\frac{2\pi}{\omega}}} - 1 \right]^2. \quad (59)$$

Während im ungedämpften Fall die Schlagarbeit im Resonanzpunkt für alle Abstandsverhältnisse e/r dieselbe war, hängt sie beim gedämpften Hammer von e/r ab.

Zur Bestimmung der Nullstellen der Gl. (58) muß $A'_0 = 0$ sein. Die Bedingung ist für $a = \pm e$ erfüllt. Sie lieferte im ungedämpften Fall die Nullstellen links vom Resonanzpunkt ($\omega_0/\omega < 1$).

Rechts vom Resonanzpunkt ($\omega_0/\omega > 1$) ergab sie die Nullstellen für die Abstandsverhältnisse $e/r > 1$, ausgenommen die Nullstellen an den Punkten $\omega_0/\omega = 2; 3; 4; \dots$. Auch im gedämpften Fall liefert diese Bedingung die analogen Nullstellen, für die die Gleichung gilt:

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{\pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^2 + 4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^4}}}. \quad (60)$$

Wollen wir die Schlagarbeit an den Stellen $\bar{\omega}_0/\omega = 2; 3; 4; \dots$ bestimmen, dann kommen wir durch Einsetzen in Gl. (58) auf einen unbestimmten Ausdruck. Führen wir auch hier den Grenzübergang durch, erhalten wir:

$$A_S = 2m \frac{1-k}{1+k} (r\omega)^2 \cdot \left(\frac{\bar{\omega}_0}{\omega}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2}\right) \cdot \left[\frac{(1+k) \left(\frac{1}{2} e^{+e \frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{2} e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} - 1 \right)}{e^{+e \frac{2\pi}{\omega}} - k e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} + k - 1} \right]^2. \quad (61)$$

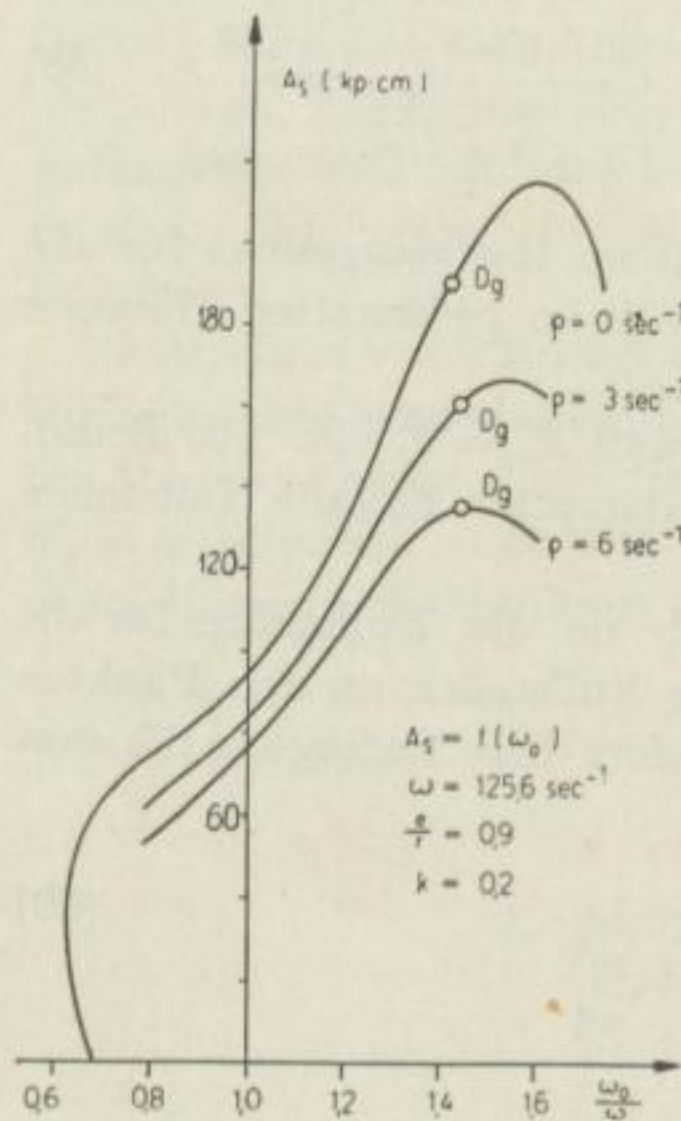
Im Gegensatz zum ungedämpften Fall ergeben sich also an den Punkten $\bar{\omega}_0/\omega = 2; 3; 4; \dots$ keine Nullstellen. Die Schlagarbeit behält einen endlichen Wert.

Wollen wir den Einfluß der Dämpfung auf die Schlagarbeit A_S grob abschätzen, erkennen wir daran, daß in Gl. (58) der Dämpfungsfaktor ρ immer in der Form ρ/ω auftritt, daß der Einfluß der Dämpfung also bei hohen Drehzahlen geringer ist als bei niedrigen. In der Praxis sollte man daher mit möglichst hohen Drehzahlen arbeiten.

5.5. Energiekurven praktischer Federhämmer

Im Teil A wurden die Energiekurven am Beispiel eines praktischen Hammers ohne Berücksichtigung der Dämpfung aufgestellt. Es sollen jetzt mit den gleichen Hammerdaten die Energiekurven bei verschiedenen Dämpfungskoeffizienten ρ aufgestellt werden. Die Daten des Hammers sind folgende:

Rückprallkoeffizient	$k = 0,2$	
Bärmasse	$m = 0,444 \text{ kg}$	
Kurbelradius	$r = 2,0 \text{ cm}$	} $e/r = 0,9$
Abstand der Schlagebene	$e = 1,8 \text{ cm}$	
Drehzahl	$n = 1200 \text{ min}^{-1}$	
Kreisfrequenz	$\omega = 125,6 \text{ s}^{-1}$	



In Bild 24 ist die Schlagenergie in Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω für das Abstandsverhältnis $e/r = 0,9$ aufgetragen. Der Dämpfungsfaktor ρ dient als Parameter.

Bei der Berechnung zeigt sich, daß der Einfluß der Dämpfung auf die Eigenkreisfrequenz des Hammers gering ist. Die folgende nach Gl. (53) mit $\omega_0/\omega = 1,4$ berechnete Tabelle gibt hierüber Aufschluß:

ρ	$\bar{\omega}_0$
0 s^{-1}	$175,80 \text{ s}^{-1} = \omega_0$
3 s^{-1}	$175,77 \text{ s}^{-1}$
6 s^{-1}	$175,70 \text{ s}^{-1}$

Bild 24

Wir können also die Eigenkreisfrequenz des gedämpften und die des ungedämpften Systems einander gleichsetzen: $\bar{\omega}_0 \approx \omega_0$.

Das Bild 24 zeigt, daß der Verlauf der Energiekurve des dämpfungsfreien Hammers in seinen Grundzügen erhalten bleibt, wenn der Hammer Dämpfung aufweist. Die Energiewerte liegen erwartungsgemäß im gedämpften Fall niedriger als im ungedämpften.

Zur Ermittlung des günstigsten Arbeitspunktes ist ebenso wie beim ungedämpften Hammer die Grenze des Doppelschlaggebietes von Bedeutung. Sie wurde mit in die Kurven eingetragen (D_g). Links von der Grenze treten nur Einzelschläge auf, rechts davon nur Doppelschläge. Wie aus Bild 24 zu erkennen ist, wirkt sich der Einfluß der Dämpfung auf die Doppelschlaggrenze nur minimal aus. Es erfolgt eine ganz geringe Verschiebung nach rechts. Aus Bild 24 ist zu erkennen, daß der günstigste Arbeitspunkt zwischen dem Resonanzpunkt ($\omega_0/\omega = 1$) und der Doppelschlaggrenze liegt, und zwar möglichst dicht an dieser Grenze.

Für einen Hammer mit den angeführten Daten ergeben sich in Analogie zu dem in Teil A demonstrierten Hammer bei einem Kreisfrequenzverhältnis $\omega_0/\omega = 1,4$ folgende Werte der Schlagarbeit:

$$\begin{aligned} A_s &= 186,5 \text{ kp} \cdot \text{cm} && \text{mit } \varrho = 0 \text{ s}^{-1} \text{ (Teil A) ,} \\ A_s &= 156,8 \text{ kp} \cdot \text{cm} && \text{mit } \varrho = 3 \text{ s}^{-1} , \\ A_s &= 134,0 \text{ kp} \cdot \text{cm} && \text{mit } \varrho = 6 \text{ s}^{-1} . \end{aligned}$$

Der Bär benötigt hierzu eine Feder mit der Federkonstanten $c = 14 \text{ kp/cm}$.

Es liegen also auch beim gedämpften Hammer die Werte der Schlagenergie außerhalb des Resonanzpunktes entschieden höher als im Resonanzpunkt. Beim soeben berechneten Hammer hat die Schlagenergie im günstigsten Arbeitspunkt nahezu den doppelten Betrag derjenigen im Resonanzpunkt. Es ist daher ohne weiteres einzusehen, daß es vorteilhaft ist, bei der Konstruktion eines Hammers hierauf Rücksicht zu nehmen.

6. Konstruktion eines gedämpften Federhammers

6.1. Problemstellung

Das Bild 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines praktischen Federhammers. Bei der Konstruktion des gedämpften Modellhammers war es das Ziel, die gleichen meßtechnischen Vorteile auszunützen, die die Anlage mit dem ungedämpften Federhammer bot. Es waren dies vor allem folgende:

1. Die Möglichkeit, die Messung der Schlagarbeit und die Aufzeichnung der Bärbewegung gleichzeitig vornehmen zu können.
2. Die Bärbewegung optisch aufzuzeichnen.

Darüber hinaus ergab sich noch die Notwendigkeit, den Bär so zu konstruieren, daß er in dieser Form für den im Teil C behandelten Federhammer mit Vorspannung verwendet werden kann. Die Reibung brauchte bei diesem Bär gegenüber der offenen Bauweise nicht klein gehalten zu werden.

6.2. Konstruktion des Bärs

Bild 25 gibt die Konstruktionszeichnung des Bärs wieder. Die Bilder 26 und 27 zeigen den Bär zusammengesetzt und auseinandergenommen.

Das Gehäuse besteht aus einem Rohr, das oben und unten durch Verschlußstücke abgeschlossen wird. In das untere Verschlußstück ist eine Stahlkugel eingearbeitet, die beim Betrieb des Hammers in Metallplatten einschlägt. Die Schlagenergie wird in der gleichen Weise wie beim offenen Bär durch die Größe

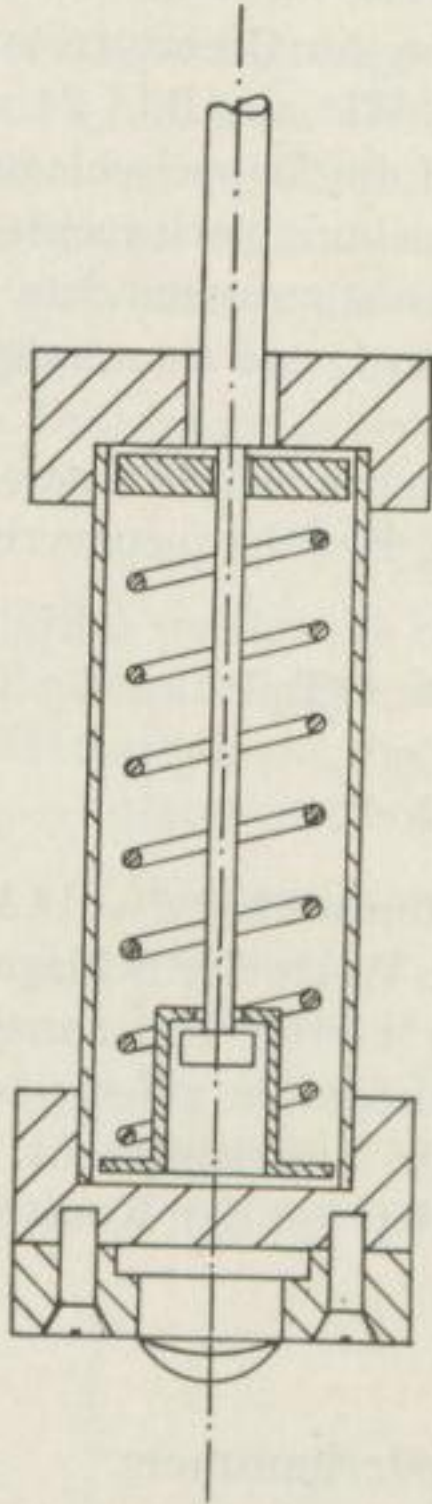


Bild 25

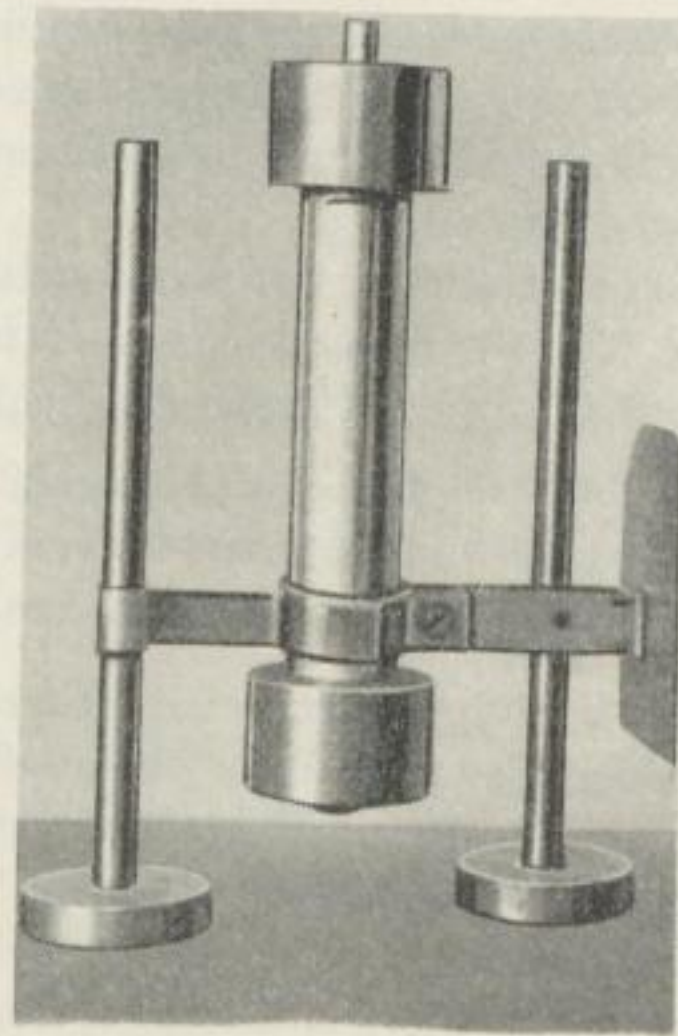


Bild 26

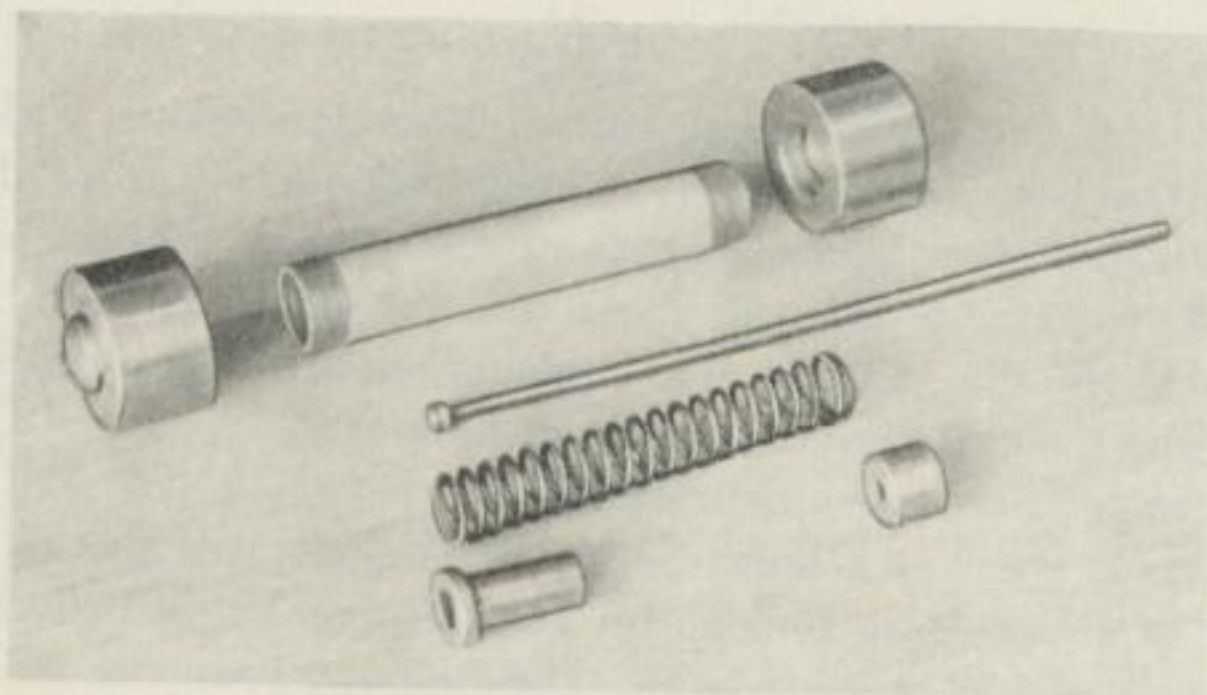


Bild 27

der Einschläge bestimmt. Zur optischen Aufzeichnung der Bärbewegung ist am Gehäuse seitlich ein Blech angebracht, das bei der Bewegung den Schlitz der Photozelle mehr oder weniger abdeckt. Die beweglichen Scheiben im Inneren des Gehäuses sind so gearbeitet, daß sie trotz der unterschiedlichen Form gleiches Gewicht haben.

Als Bärmasse m muß bei dieser Anordnung die Masse des Gehäuses einschließlich des oberen und unteren Verschlußstückes und des Abdeckbleches zuzüglich der Masse einer der beiden beweglichen Scheiben angesehen werden. Eine der beiden Scheiben nimmt jeweils an der Bewegung des Gehäuses teil.

Die technischen Daten des Bärs sind folgende:

Bärmasse	$m = 724$	g
Federkonstante	$c = 1$	kp/cm
Kurbelradius	$r = 0,9$	cm
Abstand der Aufschlagebene	$e = 0,81$	cm
Zeitmarke des Oszillographen	$\nu = 100$	s ⁻¹
Eigenkreisfrequenz (ungedämpft)	$\omega_0 = 36,8$	s ⁻¹
Dämpfungsfaktor	$\rho = 6$	s ⁻¹
Rückprallkoeffizient	$k = 0,2$	

Als Antrieb dient der bereits erwähnte Synchronmotor mit stufenlosem Getriebe.

7. Messungen mit dem gedämpften Federhammer

7.1. Energiekurven des Modellhammers

Analog den Messungen mit dem ungedämpften Hammer sollen auch die Messungen bei vorhandener Dämpfung so durchgeführt werden, daß die Daten des Hammers einschließlich der Federkonstanten c unverändert bleiben, während die Erregerkreisfrequenz ω variiert wird. Es ist dies der günstigere Weg, eine Überprüfung der aufgestellten Theorie vornehmen zu können.

Bei der Berechnung der Energiewerte nach Gl. (58) ergeben sich in gleicher Weise wie beim ungedämpften Hammer auch hier andere Energiekurven, als wir sie in Bild 24 kennengelernt hatten. Da die Schlagarbeit A_S außer vom Kreisfrequenzverhältnis ω_0/ω auch noch von der Erregerkreisfrequenz ω abhängt, verlaufen die Kurven rechts vom Resonanzpunkt niedriger, links vom Resonanzpunkt dagegen höher, als wir sie von Bild 24 her kennen. Die Kurven, die wir erhalten, lassen sich also nicht zur Bestimmung der günstigsten Hammerdaten verwenden, sondern dienen nur der Kontrolle der aufgestellten Theorie.

In Bild 28 sind in dieser Weise nach Gl. (58) die zum Modellhammer gehörenden Energiekurven gezeichnet. Der Dämpfungsfaktor dient als Parameter.

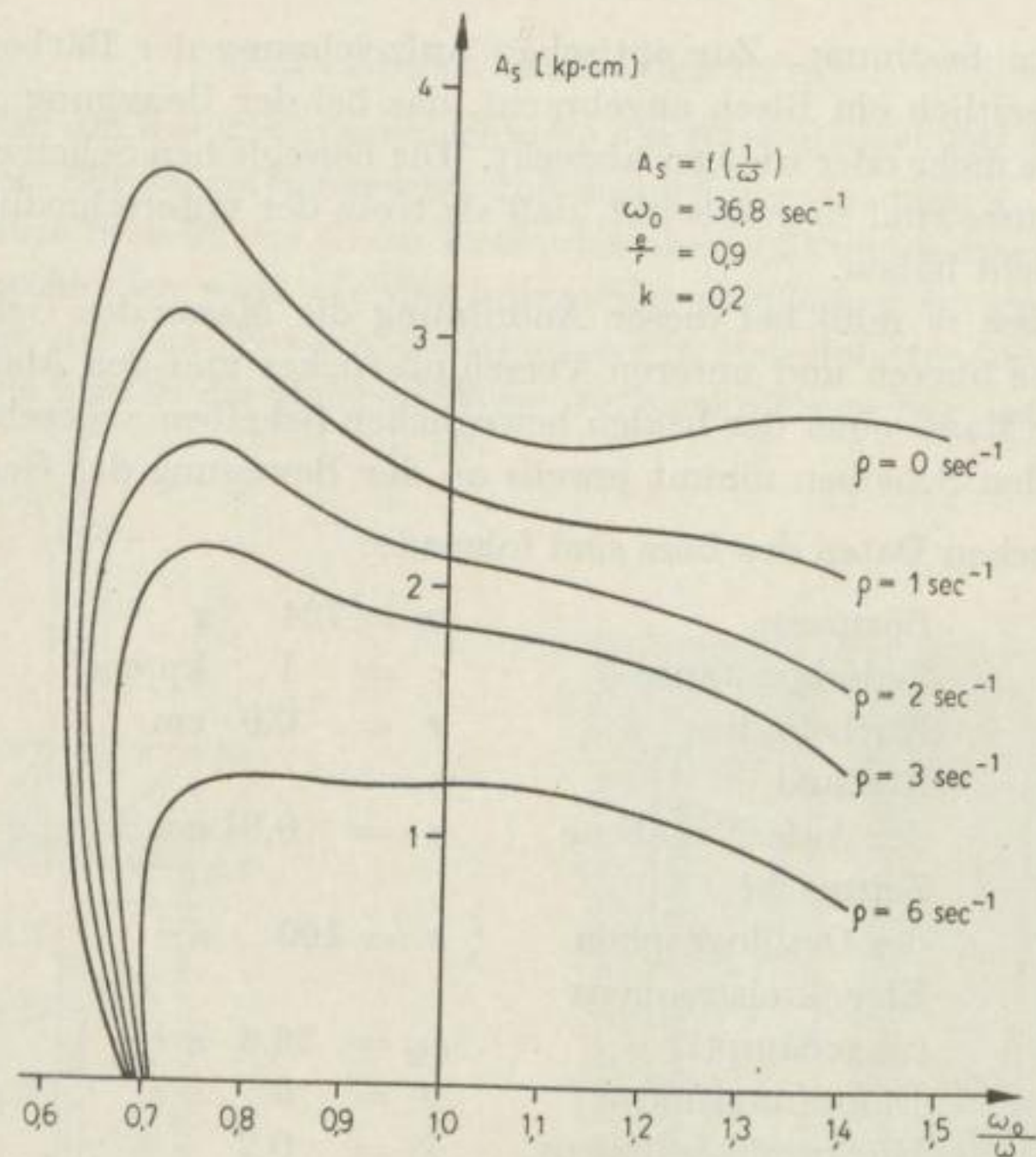


Bild 28

Man erkennt, daß bei diesem Hammer der Einfluß der Dämpfung auf die Schlagarbeit A_s entschieden größer ist als beim Hammer des Bildes 24.

Wie schon besprochen liegt die Ursache darin begründet, daß der Dämpfungsfaktor ρ stets in der Form ρ/ω auftritt. Die Erregerkreisfrequenz ist beim Modellhammer erheblich niedriger ($26 \text{ s}^{-1} < \omega < 53 \text{ s}^{-1}$) als beim Hammer des Bildes 24 ($\omega = 125,6 \text{ s}^{-1}$). Der Einfluß der Dämpfung auf die Schlagarbeit muß also beim Modellhammer größer sein.

Der Einfluß der Dämpfung auf die Eigenkreisfrequenz des Modellhammers ist allerdings zu vernachlässigen. Die folgende Tabelle gibt hierüber Aufschluß (siehe Gl. (53)):

ρ	$\bar{\omega}_0$
0 s^{-1}	$36,81 \text{ s}^{-1} = \omega_0$
1 s^{-1}	$36,80 \text{ s}^{-1}$
2 s^{-1}	$36,76 \text{ s}^{-1}$
3 s^{-1}	$36,69 \text{ s}^{-1}$
6 s^{-1}	$36,30 \text{ s}^{-1}$

Wir können also auch beim Modellhammer die Eigenkreisfrequenz des gedämpften und die des ungedämpften Systems einander gleichsetzen: $\bar{\omega}_0 \approx \omega_0$.

Als schlagaufnehmendes Material dient Eisen mit einem Rückprallkoeffizienten von $k = 0,2$.

7.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Eisen

In ähnlicher Weise wie bei den Experimenten mit dem ungedämpften Hammer beginnen die Messungen zunächst bei niedrigen Drehzahlen, die dann schrittweise hochgeregelt werden. Man gelangt somit während des Hochregels von rechts in die Energiekurve (Bild 28) hinein. Bild 29 enthält die zu den Dämpfungsfaktoren $\rho = 0 \text{ s}^{-1}$ und $\rho = 6 \text{ s}^{-1}$ berechneten Energiekurven des Bildes 28. Die gemessene Schlagenergie wurde mit eingezeichnet. Es zeigt sich, daß die gemessenen Energiewerte dem berechneten Kurvenverlauf folgen.

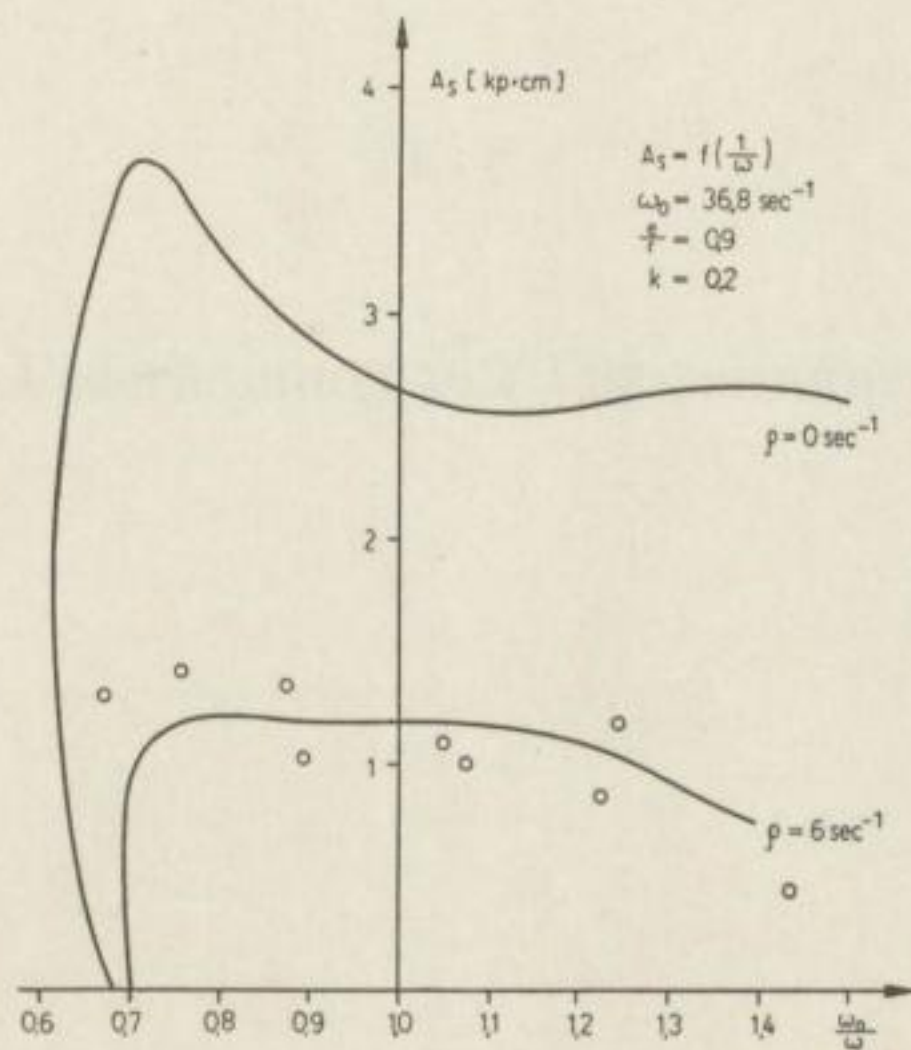


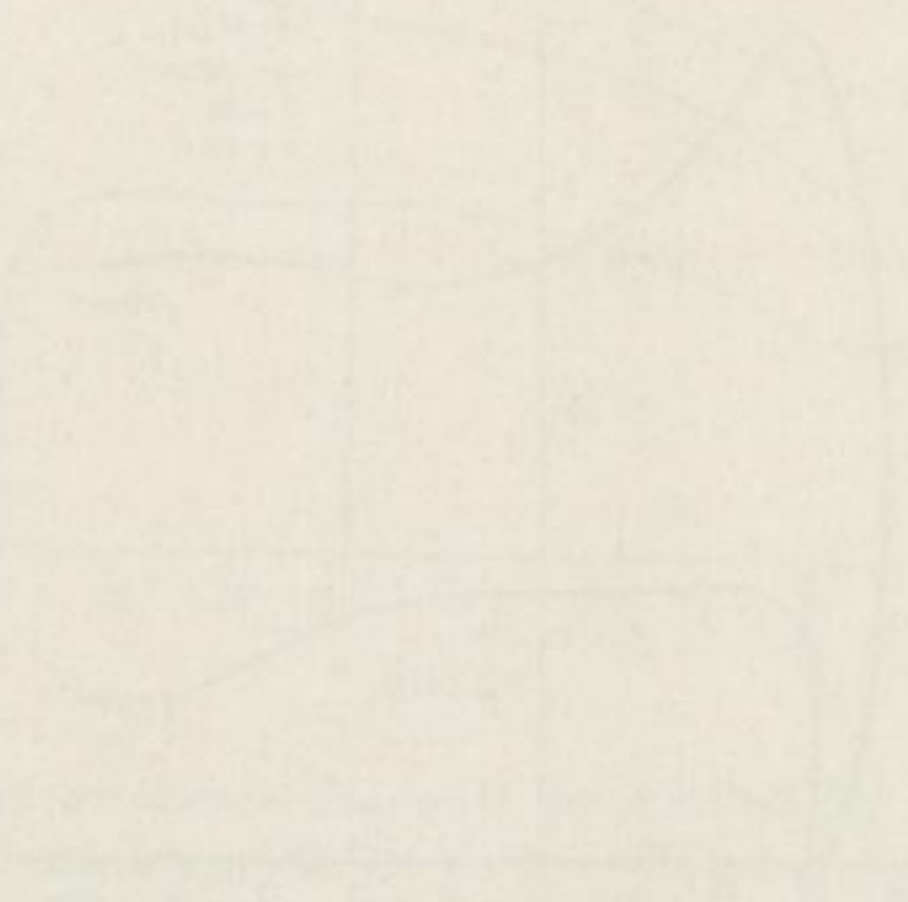
Bild 29

Die Schlagenergiewerte der gedämpften Bewegung betragen etwa 40% der Werte der ungedämpften Bewegung.

In den Oszillogrammen 15 bis 18 sind einige der vom Schleifenoszillographen aufgezeichneten Schlagkurven wiedergegeben. Jeweils unter der aufgenommenen Kurve befindet sich die zugehörige nach Gl. (54) berechnete Bewegungskurve und ihre Gleichung. Die Kurven sind nach wachsender Erregerkreisfrequenz ω geordnet. Es zeigt sich, daß der Grundcharakter, der bei der ungedämpften Bewegung beobachtet wird, auch bei vorliegender Dämpfung erhalten bleibt. Bei niedriger Erregerkreisfrequenz bildet die Bewegungskurve einen schwachen Sattel aus, der sich mit steigender Kreisfrequenz immer mehr hebt. Doppelschläge treten in dem beobachteten Bereich nicht auf.

Auch beim gedämpften Hammer zeigt sich, daß Theorie und Experiment übereinstimmen.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.



Additional faint, illegible text in the lower middle section of the page, likely bleed-through.

TEIL C

Federhammer mit Vorspannung

Verzeichnis der Vorlesungen

1877

8

8. Mathematische Betrachtungen

8.1. Allgemeines

Der Teil B behandelte eine Bärform, bei der sich die Feder im Innern des Bärgehäuses befindet. Die Konstruktion hatte den Vorteil, daß die Federn nicht so leicht brechen. Bei der Konstruktion des Bärs hatte man sich bekanntlich vorgenommen, mit dem gleichen Bär Messungen am vorgespannten Federhammer durchzuführen. Wechselt man den oberen losen Teller des Bärgehäuses (Bilder 25 bis 27) durch entsprechende stärkere aus, so erhält die Feder eine Vorspannung. Um vergleichende Messungen anstellen zu können, wurde darauf geachtet, daß alle Teller trotz der unterschiedlichen Stärke gleiches Gewicht behalten.

Durch die Vorspannung ist die Charakteristik der Feder nicht mehr linear. Sie hat den in Bild 30 gezeigten Verlauf, wobei a_0 die Strecke ist, um die die Feder vorgespannt wird. Die Federcharakteristik verläuft also ebenfalls wie im linearen Fall im ersten und dritten Quadranten, ist aber jeweils um die Strecke $c a_0$ nach oben bzw. nach unten parallel verschoben.

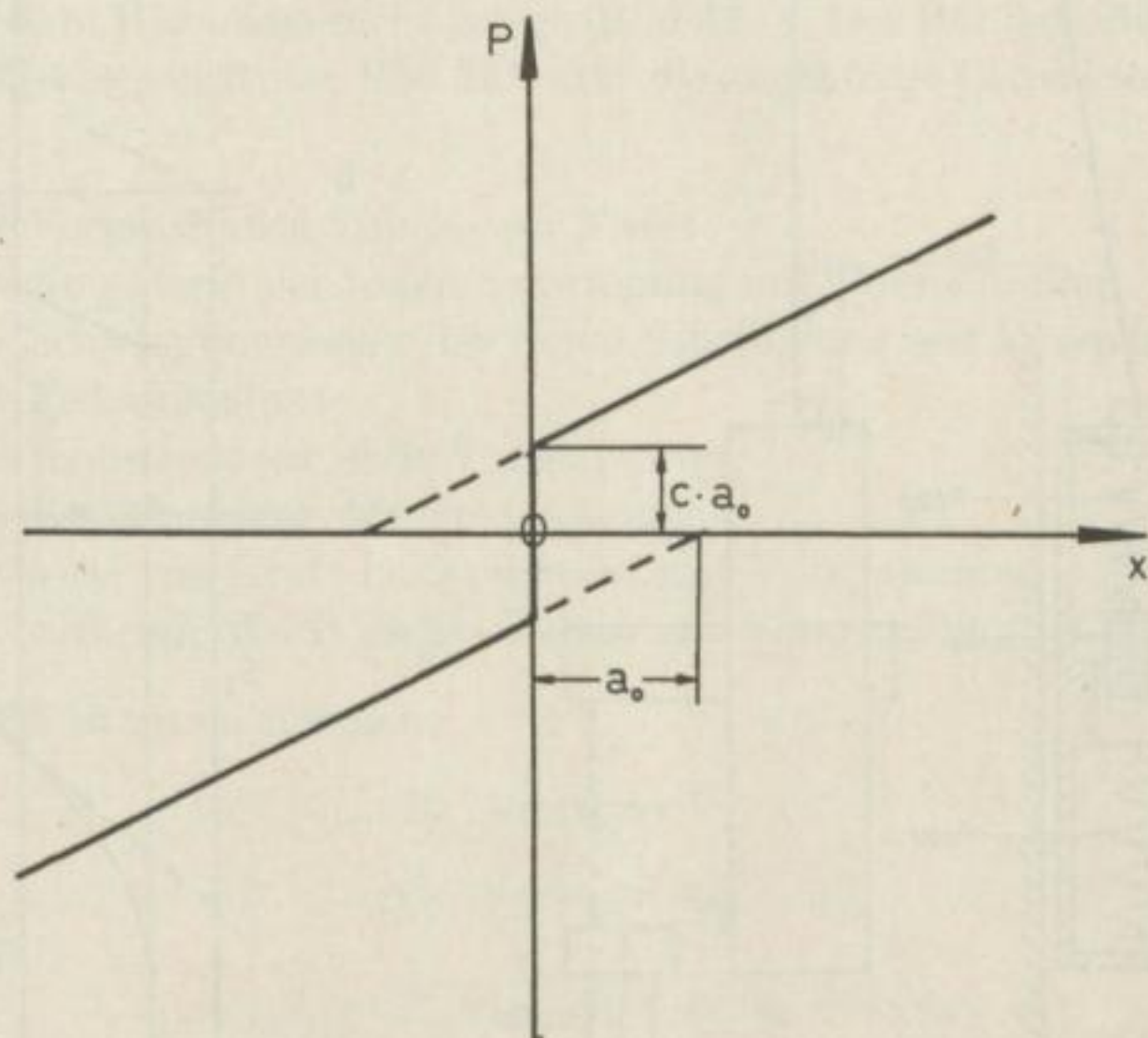


Bild 30

8.2. Bewegungsgleichung

In der schematischen Prinzipzeichnung Bild 31 ist ebenfalls wie im oben beschriebenen Fall der Übersichtlichkeit wegen der Antrieb durch einen Motor mit Kurbelstange dargestellt. In der weiter unten zu beschreibenden Apparatur wird der Antrieb durch die gleiche Schlittenführung vorgenommen wie im Fall der nicht vorgespannten Feder, wodurch die Erregung rein sinusförmig wird.

Die eingeführten Bezeichnungen sind analog denen im Teil A. Die Null-Ebene ist durch die Unterkante des Bärs festgelegt, wenn sich die Kurbel in waagerechter Lage befindet und der Bär die Mittellage im Gehäuse eingenommen hat. Der Abstand des Meißels von der Null-Ebene ist e , der der Bärunterkante in einer beliebigen Lage ist x . Die Feder ist um die Strecke a_0 vorgespannt.

Bewegt sich die Kurbel mit der Kreisfrequenz ω und bildet die Kurbel im Augenblick des Aufschlages mit der Waagerechten den Winkel φ , dann gilt für die Erregung zu einem beliebigen Zeitpunkt

$$y = r \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

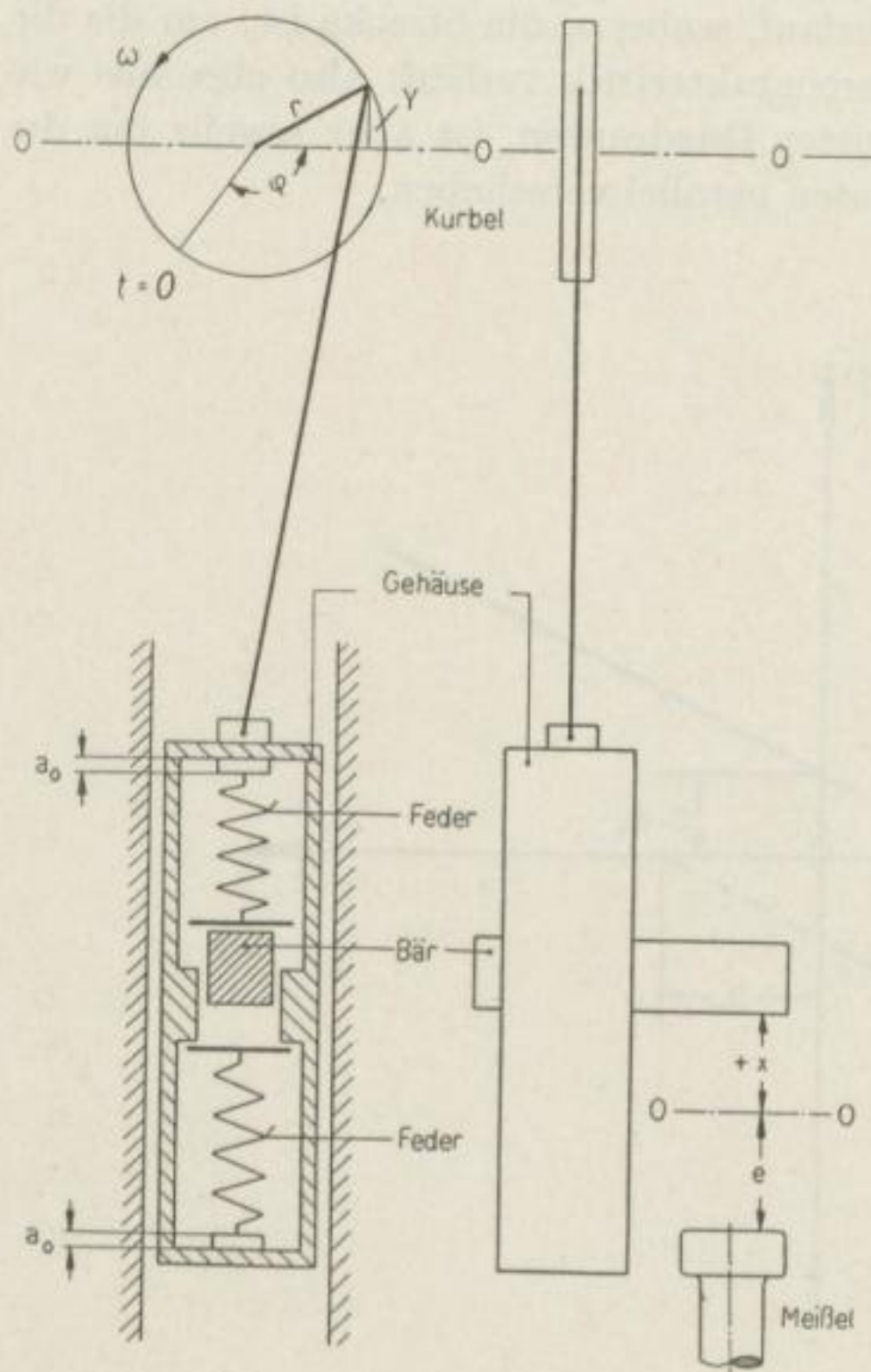


Bild 31

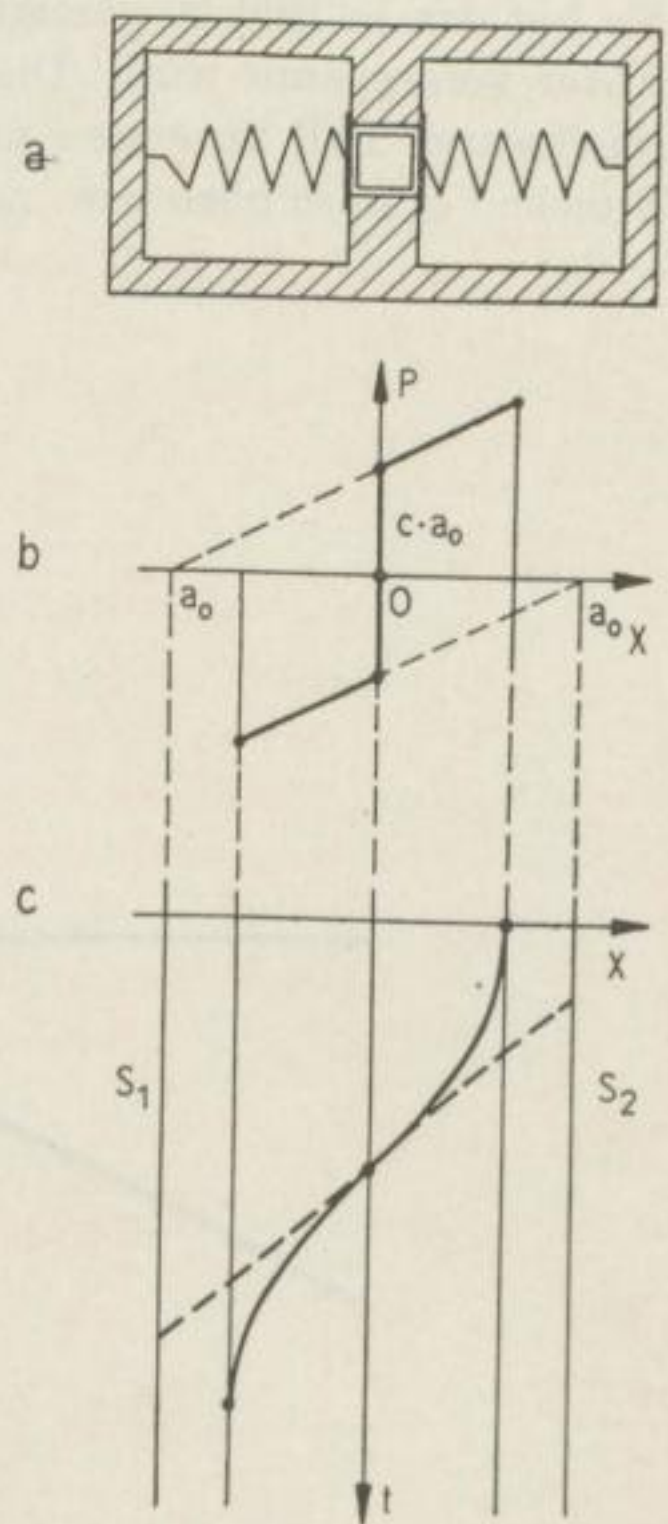


Bild 32

Ist $x = y$, dann befindet sich der Bär in der Mitte des Gehäuses. Die auf den Bär wirkende Federkraft ist Null. Ist $x > y$, dann wird die obere Feder zusammengedrückt, während die untere am Gehäuse anliegt. Es herrscht die in Bild 31 gezeichnete Situation. Auf den Bär wirken also die Kraft, die von der Federvorspannung herrührt, und die, die durch die Auslenkung hervorgerufen wird. Ist $x < y$, dann liegt der umgekehrte Fall vor. Die untere Feder wird zusammengedrückt, während die obere am Gehäuse anliegt. Je nach Lage des Bärs gelten also folgende Gleichungen:

$$m \ddot{x} = -c \cdot [a_0 + (x - y)] \quad \text{für } x - y > 0,$$

$$m \ddot{x} = -c \cdot [-a_0 + (x - y)] \quad \text{für } x - y < 0,$$

mit

$$y = r \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

Anders ausgedrückt können wir schreiben:

$$m \ddot{x} = -c \cdot \{[\operatorname{sgn}(x - y)] \cdot a_0 + (x - y)\} \quad (62)$$

mit

$$y = r \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

Stellen wir die Gleichung um, daß wir rechts nur die Erregung behalten, dann bekommen wir:

$$m \ddot{x} + c \cdot x + [\operatorname{sgn}(x - y)] \cdot c \cdot a_0 = c \cdot y = c \cdot r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (63)$$

Zunächst soll die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Bärs ermittelt werden. Es wirkt also keine Erregung. Wir denken uns das Gehäuse mit den beiden Federn und dem Bär waagrecht gelegt (Bild 32a). Der Bär befindet sich in der Mitte des Gehäuses in Ruhe. Bild 32b gibt die zugehörige Charakteristik an [2].

Es sei:

a_0 = Vorgespannte Strecke der Feder

x_0 = Amplitude der freien Schwingung mit Vorspannung

T = Schwingungsdauer der freien Schwingung mit Vorspannung

c = Federkonstante

ω_0 = Kreisfrequenz ohne Vorspannung

$\hat{\omega}_0$ = Kreisfrequenz mit Vorspannung

P_0 = wirkende Kraft im Nullpunkt mit Vorspannung

P_1 = wirkende Kraft im Maximum mit Vorspannung

Aus Bild 32b ist zu entnehmen:

$$P_0 = c \cdot a_0, \quad (64)$$

$$P_1 = c(a_0 + x_0). \quad (65)$$

Daraus folgt:

$$P_1 - P_0 = c \cdot a_0 + c \cdot x_0 - c \cdot a_0,$$

$$c = \frac{P_1 - P_0}{x_0}.$$

Für die Kreisfrequenz der nicht vorgespannten Feder ergibt sich hieraus:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{P_1 - P_0}{m \cdot x_0}}. \quad (66)$$

Lenken wir den Bär bei vorgespannten Federn um x_0 aus seiner Ruhelage nach rechts aus, dann schwingt er unter dem Einfluß der rechten Feder zurück. Solange er außerhalb des Wirkungsbereiches der linken Feder ist, ist seine Bewegung eine reine Kosinuslinie, die auf die Gerade S_1 bezogen ist, die Kreisfrequenz ω_0 und die Amplitude $A = a_0 + x_0 = \frac{P_1}{c}$ besitzt (Bild 32 c). Hat der Bär die Nulllinie überschritten, dann hört der Einfluß der rechten Feder auf, und es wirkt nur die linke Feder auf den Bär. Die Bewegung ist ebenfalls wieder eine Kosinuslinie, die jetzt auf die Gerade S_2 bezogen ist. Für den Bereich der 1. Viertelperiode gilt also die Gleichung:

$$x = -a_0 + \frac{P_1}{c} \cdot \cos \omega t \quad \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{4}.$$

Für $t = \frac{T}{4}$ wird $x = 0$, also

$$0 = -a_0 + \frac{P_1}{c} \cdot \cos \frac{\omega_0 T}{4}.$$

Mit Gl. (64), (65) und (66) erhalten wir:

$$\frac{a_0}{a_0 + x_0} = \cos \left(\frac{T}{4} \sqrt{\frac{c}{m}} \right).$$

Umgeformt

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \arccos \frac{a_0}{a_0 + x_0}.$$

Für die Kreisfrequenz ergibt sich also:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{1}{\arccos \frac{a_0}{a_0 + x_0}} = \omega_0 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos \frac{a_0}{a_0 + x_0}}. \quad (67)$$

Die Gl. (67) zeigt, daß die Eigenkreisfrequenz der vorgespannten Feder $\hat{\omega}_0$ außer von der Vorspannung auch von der Amplitude abhängt. Es ist bei vorhandener Vorspannung stets $\hat{\omega}_0 > \omega_0$. Ist die Vorspannung $a_0 = 0$, so wird $\hat{\omega}_0 = \omega_0$.

Analog wie im Teil B ersetzen wir die gesamte Dämpfung durch Stokessche Reibung. Aus Gl. (63) erhalten wir dann die vollständige Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \frac{c}{m} \{x + a_0 [\operatorname{sgn}(x - y)]\} = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (68)$$

mit

$$y = r \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

In den folgenden Abschnitten soll die Gl. (68) mit Hilfe von drei verschiedenen Näherungsverfahren gelöst werden. Anschließend wird eine Methode zur Bestimmung der exakten Lösung der Gl. (68) durch sukzessive Approximation ausgearbeitet. Mit ihrer Hilfe werden die Näherungslösungen auf ihre Brauchbarkeit hin kontrolliert.

8.3. Erstes Näherungsverfahren

Zur Lösung der Differentialgleichung (68) verwenden wir das Verfahren der Benutzung der zugeordneten Kreisfrequenz [2]. Dieses Verfahren basiert auf der Erkenntnis, daß die freien Schwingungen eines Systems mit gekrümmter Kennlinie zwar bei großen Amplituden eine Frequenz aufweisen, die von der bei kleinen Amplituden abweicht, daß aber der zeitliche Verlauf des Ausschlages sehr nahe harmonisch bleibt. Die Kreisfrequenz der Sinusbewegung, die die gleiche Periode hat wie die wirkliche Bewegung, ist die „zugeordnete“ Kreisfrequenz $\hat{\omega}_0$. Sie ist von der Amplitude abhängig. In unserem Fall wird sie durch die ebenfalls von der Amplitude abhängigen Eigenkreisfrequenz des vorgespannten Systems $\hat{\omega}_0$ ersetzt.

Wir können danach die Gleichung (68)

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \frac{c}{m} \{x + a_0 [\operatorname{sgn}(x - y)]\} = \frac{c}{m} \cdot r \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

ersetzen durch die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \hat{\omega}_0^2 \cdot x = \frac{c}{m} \cdot r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (69)$$

Wir haben hierdurch bei bekannter Amplitude die gebrochene Charakteristik durch eine Gerade ersetzt.

Die Gl. (69) können wir lösen. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist:

$$x_1 = a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta)$$

mit

$$a = \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\hat{\omega}_0^2} - \frac{\hat{\omega}_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\varrho^2 \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_0^4}}} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Bestimmen wir die Phasenverschiebung, dann bekommen wir:

$$\tan \delta = \frac{2\varrho\omega}{\hat{\omega}_0^2 - \omega^2}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist:

$$x_2 = e^{-\varrho t} \cdot (A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t)$$

Hierin ist

$$\hat{\omega}_0 = \sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \varrho^2}$$

und

$$\hat{\omega}_0 = \omega_0 \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arc} \cos \frac{a_0}{a_0 + x_0}}$$

Die 4 Unbekannten A_0 , B_0 , $\hat{\omega}_0$ und φ lassen sich durch die folgenden vier Bedingungen bestimmen:

$$1. \quad x(0) = -e,$$

$$2. \quad x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -e,$$

$$3. \quad \frac{v_R}{v_A} = -k,$$

$$4. \quad \hat{\omega}_0 = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 \cdot \frac{\pi}{2}}{\arccos \frac{a_0}{a_0 + x_0}}\right)^2 - \varrho^2}.$$

Es sind dies die analogen Bedingungen, wie sie auch im unvorgespantten Fall auftraten. Die vollständige Lösung von Gleichung (69) ist:

$$x = x_1 + x_2 = [a \cdot \cos(\varphi + \delta)] \cdot \sin \omega t - [a \cdot \sin(\varphi + \delta)] \cdot \cos \omega t + e^{-e t} \cdot A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + e^{-e t} \cdot B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t. \quad (70)$$

Mit Hilfe der vier Bedingungen ergeben sich die Koeffizienten:

$$a \cdot \sin(\varphi + \delta) = A_0 + e,$$

$$a \cdot \cos(\varphi + \delta) = -A_0 \cdot \hat{\varepsilon},$$

$$B_0 = \frac{A_0 \left(1 - e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi\right)}{e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi},$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} \left[\frac{1}{\sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{+e \frac{2\pi}{\omega}} - k \cdot e^{-e \frac{2\pi}{\omega}}}{1+k} - \frac{1-k}{1+k} \cdot \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) - \frac{\varrho}{\hat{\omega}_0} \right],$$

$$A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \hat{\varepsilon}^2 (a^2 - e^2)}}{\hat{\varepsilon}^2 + 1}.$$

Die Schlagarbeit A_S erhalten wir in der üblichen Weise als Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Schlag:

$$A_S = \frac{m}{2} (v_A^2 - v_R^2),$$

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot v_R^2 \left(\frac{1-k^2}{k^2} \right),$$

$$A_S = \frac{m}{2} \cdot \frac{1-k^2}{k^2} \cdot A_0^2 (r\omega)^2 \left[-\hat{\varepsilon} + \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1 - e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-e \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} - \frac{\varrho}{\omega} \right] \quad (71)$$

mit

$$A'_0 = \frac{A_0}{r} = \frac{-\frac{e}{r} \pm \sqrt{\frac{a^2}{r^2} + \hat{\varepsilon}^2 \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2} \right)}}{1 + \hat{\varepsilon}^2}.$$

Vereinfachen wir die Gleichung, dann erhalten wir:

$$A_S = 2m \cdot \frac{1-k}{1+k} \cdot (r \cdot \omega)^2 \cdot A'_0 \times \left[\frac{\hat{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{1}{2} e^{+\frac{e}{\omega} 2\pi} + \frac{1}{2} e^{-\frac{e}{\omega} 2\pi} - \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) \right]. \quad (72)$$

8.4. Zweites Näherungsverfahren

Wir gehen von der Gl. (68) aus:

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \frac{c}{m} \{x + a_0 [\operatorname{sgn}(x - y)]\} = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (68)$$

Zur Lösung der Gleichung führen wir die neue Variable ein

$$s = x - y = x - r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (73)$$

s ist die Strecke, um die die Feder jeweils zusammengedrückt ist. Mit Hilfe der Transformation Gl. (73) erhalten wir aus Gl. (68)

$$\ddot{s} + 2\varrho \dot{s} + \frac{c}{m} [s + a_0 \cdot \operatorname{sgn}(s)] = \omega^2 r \cdot \sin(\omega t - \varphi) - 2\varrho \omega r \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (74)$$

Wenden wir auf Gl. (74) das Verfahren der Benutzung der zugeordneten Kreisfrequenz an, dann bekommen wir

$$\ddot{s} + 2\varrho \dot{s} + \hat{\omega}_0^2 \cdot s = \omega^2 r \cdot \sin(\omega t - \varphi) - 2\varrho \omega r \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Führen wir mit Hilfe der Gl. (73) wieder die ursprüngliche Variable x ein, dann erhalten wir

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \hat{\omega}_0^2 \cdot x = \hat{\omega}_0^2 r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (75)$$

Es besteht also auf der rechten Seite ein Unterschied zwischen Gl. (69) und (75). Physikalisch bedeutet die oben gezeigte Entwicklung, daß die vorgespannte Feder durch eine nicht vorgespannte ersetzt wird, deren Federkonstante größer ist. Die neue Federkonstante ist von $\hat{\omega}_0$ und daher von der Vorspannung a_0 und von der Amplitude x_0 (Gl. (67)) abhängig.

Zur Lösung der Gl. (75) können wir auf die Ergebnisse des Teiles B zurückgreifen. Wir müssen lediglich ω_0 durch $\hat{\omega}_0$ ersetzen. Wir kommen somit auf

folgende Ergebnisse:

$$a = \frac{r}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_0^2}\right)^2 + 4 \varrho^2 \cdot \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_0^4}}}, \quad (76)$$

$$\tan \delta = \frac{2 \varrho \omega}{\hat{\omega}_0^2 - \omega^2},$$

$$\hat{\omega}_0 = \sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \varrho^2}.$$

Ist die Bewegungsgleichung

$$x = a \cdot \cos(\varphi + \delta) \cdot \sin \omega t - a \cdot \sin(\varphi + \delta) \cdot \cos \omega t + e^{-\varrho t} \cdot A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + e^{-\varrho t} \cdot B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t, \quad (77)$$

dann gilt für die Koeffizienten

$$a \cdot \sin(\varphi + \delta) = A_0 + e,$$

$$a \cdot \cos(\varphi + \delta) = -A_0 \cdot \hat{\varepsilon},$$

$$B_0 = A_0 \frac{1 - e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi},$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} \cdot \left[\frac{1}{\sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{+\varrho \frac{2\pi}{\omega}} - k \cdot e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}}}{1+k} - \frac{1-k}{1+k} \cdot \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) - \frac{\varrho}{\hat{\omega}_0} \right],$$

$$A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \hat{\varepsilon}^2 (a^2 - e^2)}}{\hat{\varepsilon}^2 + 1}.$$

Für die Schlagarbeit erhalten wir

$$A_S = 2m \frac{1-k}{1+k} (r\omega)^2 \cdot A_0'^2 \cdot \left[\frac{\hat{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{1}{2} e^{+\frac{\varrho}{\omega} 2\pi} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\varrho}{\omega} 2\pi} - \cos \frac{\hat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) \right]^2. \quad (78)$$

8.5. Drittes Näherungsverfahren

Eine weitere Näherungsmethode erhalten wir auf Grund einiger in [1] ange deuteten Betrachtungen: Ist die Vorspannung a_0 der Feder klein gegenüber dem Kurbelradius und gegenüber der Amplitude, dann sind die Abweichungen vom Schwingungsvorgang mit unvorspannter Feder gering. Die Abweichungen bleiben klein, wenn wir für den vorgespannten Fall den gleichen Lösungsweg gehen wie für den nicht vorgespannten Fall. Wir wollen also, obgleich die

Differentialgleichung nicht mehr linear ist, die gesamte Lösung aus der Lösung der freien Schwingung und aus der der erzwungenen Schwingung des Systems zusammensetzen. Die Lösung der freien Schwingung des vorgespannten Hammers ist dann im ungedämpften Fall allgemein

$$x_1 = A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t. \quad (79)$$

Für die Eigenkreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ des vorgespannten Hammers ist uns die exakte Lösung Gl. (67) bekannt. Wir können sie aber auch mit sehr guter Näherung aus der begonnenen Betrachtung heraus finden: Die Eigenkreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ erhalten wir experimentell, wenn wir den Hammer bei feststehender Kurbel auslenken und loslassen. Für diesen Vorgang gilt die Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + c x + c a_0 [\operatorname{sgn}(x)] = 0. \quad (80)$$

Der Ausdruck $c \cdot a_0 \cdot [\operatorname{sgn}(x)]$ wird je nach dem Vorzeichen von x entweder $+c \cdot a_0$ oder $-c \cdot a_0$. Wir können daher diesen Ausdruck als Störung betrachten und in die folgende Reihe entwickeln:

$$c a_0 [\operatorname{sgn}(x)] = \frac{4}{\pi} c a_0 \left[\sin(\hat{\omega}_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \hat{\omega}_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \hat{\omega}_0 t) + \dots \right]. \quad (81)$$

Es muß nach der Kreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ entwickelt werden, da die linke Seite von Gl. (81) im Rhythmus der Eigenschwingung des vorgespannten Hammers ihr Vorzeichen wechselt. Wir erhalten somit aus Gl. (80)

$$m \dot{x} + c x = -\frac{4}{\pi} c a_0 \cdot \sin(\hat{\omega}_0 t) - \frac{4}{3\pi} c a_0 \cdot \sin(3 \hat{\omega}_0 t) - \frac{4}{5\pi} c a_0 \cdot \sin(5 \hat{\omega}_0 t) - \dots \quad (82)$$

Als Lösung der Gl. (82) erhalten wir

$$x = b_1 \cdot \sin(\hat{\omega}_0 t) + b_3 \cdot \sin(3 \hat{\omega}_0 t) + b_5 \cdot \sin(5 \hat{\omega}_0 t) + \dots \quad (83)$$

mit den Koeffizienten

$$b_1 = -\frac{4 c a_0}{\pi (c - m \hat{\omega}_0^2)}, \quad b_3 = -\frac{4 c a_0}{3 \pi (c - 9 m \hat{\omega}_0^2)}, \quad b_5 = \dots$$

Da bei geringer Vorspannung ($a_0 \ll r$) $\hat{\omega}_0$ nur wenig von $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ abweicht, so ist $b_1 \gg b_3 \gg b_5 \gg \dots$, und wir können die Reihe Gl. (83) nach dem ersten Glied abbrechen. Setzen wir den maximalen Ausschlag zur Zeit $\hat{\omega}_0 t = \frac{\pi}{2}$ gleich x_0 , dann bekommen wir für die Eigenfrequenz

$$\hat{\omega}_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a_0}{x_0}\right) \frac{c}{m}}. \quad (84)$$

Die Abweichung vom exakten Wert

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}}{\arccos \frac{a_0}{a_0 + x_0}} \quad (67)$$

ist selbst bei größerem a_0 sehr gering.

Die erzwungene Schwingung erhalten wir experimentell, wenn der Hammer, ohne aufzuschlagen, synchron mit der Erregung läuft. Für diesen Fall können wir ansetzen

$$m \ddot{x} + c x + c a_0 \cdot [\operatorname{sgn}(x)] = c r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (85)$$

Der Ausdruck $c a_0 \cdot [\operatorname{sgn}(x)]$ wechselt hierbei im Rhythmus der Erregung sein Vorzeichen. Wir können ihn also in die folgende Reihe entwickeln:

$$c a_0 \cdot [\operatorname{sgn}(x)] = \frac{4}{\pi} c a_0 \cdot \left[\sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t - \varphi) + \dots \right]. \quad (86)$$

Betrachten wir den Ausdruck Gl. (86) als Störung, dann erhalten wir aus Gl. (85)

$$m \ddot{x} + c x = c r \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \frac{4}{\pi} c a_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \frac{4}{3\pi} c a_0 \cdot \sin(3\omega t - \varphi) - \dots$$

Formen wir um, dann ergibt sich

$$m \ddot{x} + c x = c \left(r - \frac{4}{\pi} a_0 \right) \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \frac{4}{3\pi} c a_0 \cdot \sin(3\omega t - \varphi) - \dots \quad (87)$$

Als Lösung der Gl. (87) setzen wir an

$$x_2 = a_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi) + a_3 \cdot \sin(3\omega t - \varphi) + \dots,$$

wobei sich für die Koeffizienten ergibt

$$a_1 = + \frac{c \left(r - \frac{4}{\pi} a_0 \right)}{c - m \omega^2}, \quad a_3 = - \frac{4 c a_0}{3 \pi (c - 9 m \omega^2)}, \quad a_5 = \dots$$

Da der Hammer in der Nähe der Resonanzstelle arbeitet, können wir die Glieder a_3, a_5, \dots vernachlässigen. Es ist also $a_1 = a$ die Amplitude der erzwungenen Schwingung.

Die gesamte Lösung des Schwingungsvorganges ist

$$x = x_1 + x_2 = A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t + (a \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \omega t - (a \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \omega t \quad (88)$$

mit

$$a = \frac{c \left(r - \frac{4}{\pi} a_0 \right)}{c - m \omega^2} \quad \text{und} \quad \hat{\omega}_0 = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a_0}{x_0}} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a_0}{x_0}}$$

Wir können also die gleichen Ergebnisse wie im unvorgespantten Fall verwenden, wobei die in Gleichung (88) angegebenen Größen für a und $\hat{\omega}_0$ maßgebend sind. Berücksichtigen wir die Dämpfung, dann erhalten wir für die Bewegungsgleichung

$$x = a \cdot \cos(\varphi + \delta) \cdot \sin \omega t - a \cdot \sin(\varphi + \delta) \cdot \cos \omega t + e^{-\epsilon t} \cdot A_0 \cdot \cos \hat{\omega}_0 t + e^{-\epsilon t} \cdot B_0 \cdot \sin \hat{\omega}_0 t \quad (89)$$

mit

$$\widehat{\omega}_0 = \sqrt{\widehat{\omega}_0^2 - \varrho^2},$$

$$\widehat{\omega}_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a_0}{x_0}\right) \frac{c}{m}},$$

$$a = \frac{r - \frac{4}{\pi} \cdot a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\varrho^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^4}}},$$

$$\tan \delta = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Die Koeffizienten von Gl. (89) sind

$$a \cdot \sin(\varphi + \delta) = A_0 + e,$$

$$a \cdot \cos(\varphi + \delta) = -A_0 \cdot \widehat{\varepsilon},$$

$$B_0 = A_0 \cdot \frac{1 - e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \cos \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi}{e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} \cdot \sin \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi},$$

$$\widehat{\varepsilon} = \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} \left[\frac{1}{\sin \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{e^{+\varrho \frac{2\pi}{\omega}} - k \cdot e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}}}{1+k} - \frac{1-k}{1+k} \cos \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) - \frac{\varrho}{\widehat{\omega}_0} \right],$$

$$A_0 = \frac{-e \pm \sqrt{a^2 + \widehat{\varepsilon}^2 (a^2 - e^2)}}{\widehat{\varepsilon}^2 + 1}.$$

Die Schlagarbeit ist:

$$A_S = 2m \frac{1-k}{1+k} (r\omega)^2 \left(\frac{A_0}{r}\right)^2 \cdot \left[\frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi} \left(\frac{1}{2} e^{+\varrho \frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{2} e^{-\varrho \frac{2\pi}{\omega}} - \cos \frac{\widehat{\omega}_0}{\omega} 2\pi \right) \right]^2.$$

8.6. Verfahren der sukzessiven Approximation

Im folgenden Abschnitt soll ein Weg angegeben werden, der die exakte Lösung der Bewegungsgleichung des vorgespannten Hammers liefert. Er hat allerdings den Nachteil, daß er sehr umständlich und langwierig ist. Verhältnismäßig bequem läßt er sich zur Kontrolle der Näherungslösungen verwenden.

Wir denken uns die Bewegungskurve des Hammers in n Bereiche eingeteilt. Die Grenzen dieser Bereiche t_i sollen jeweils durch die Bedingung

$$s(t_i) = x(t_i) - y(t_i) = 0 \quad (90)$$

festgestellt sein, d. h. sie liegen an den Stellen, an denen der Bär im Bärgehäuse (Bild 31) Mittelstellung eingenommen hat. Dies sei der Fall zu den Zeiten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}$. Bild 33 gibt ein entsprechendes Beispiel wieder (mit $n = 3$).

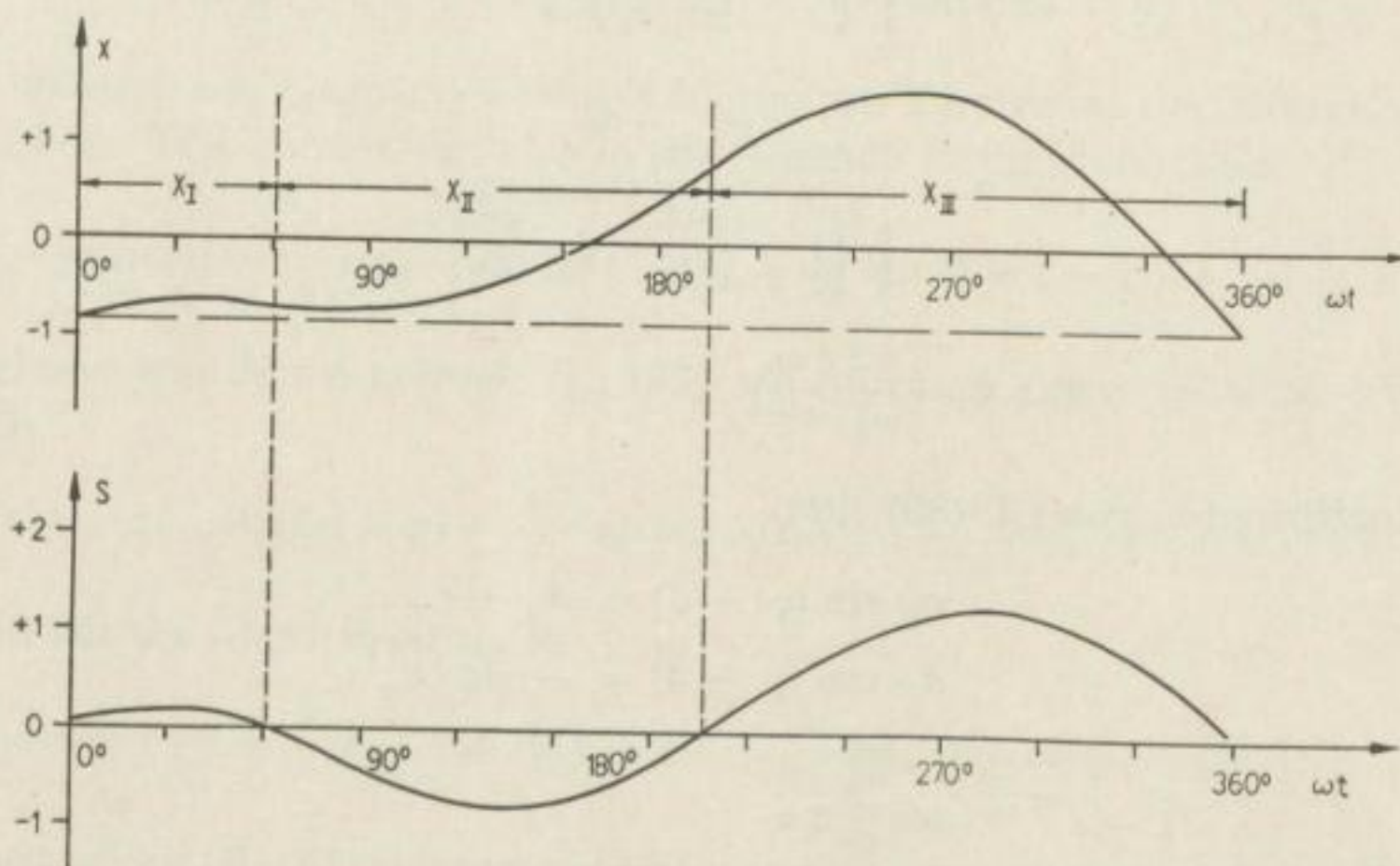


Bild 33

Die Kurve der Federdeformation $s = x - y$ wurde auch eingezeichnet. Es ist in den einzelnen Bereichen abwechselnd $x - y > 0$ und $x - y < 0$.

Für den dämpfungsfreien Fall lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x + \frac{c}{m} a_0 [\operatorname{sgn}(x - y)] = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (63)$$

Ist $x - y > 0$, dann vereinfacht sich Gl. (63) zu

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \frac{c}{m} a_0. \quad (91)$$

Als Lösung erhalten wir allgemein

$$x = A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t + a \cdot \sin(\omega t - \varphi) - a_0 \quad (92)$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Ist $x - y < 0$, dann vereinfacht sich Gl. (63) zu

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \frac{c}{m} a_0. \quad (93)$$

Als Lösung erhalten wir in diesem Fall

$$x = A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t + a \cdot \sin(\omega t - \varphi) + a_0 \quad (94)$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Es gilt also abwechselnd in den einzelnen Bereichen eine der beiden Lösungen Gl. (92) oder Gl. (94), wobei die Randbedingungen dadurch festgelegt sind, daß die Kurven und ihre Ableitungen an den Grenzen $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ stetig ineinander übergehen. An diesen Grenzen müssen also die Funktionswerte und die zeitlichen Ableitungen zweier benachbarter Kurven gleich sein.

Es sei nun angenommen, zur Zeit $t = 0$ sei $s = x - y > 0$. Dann ist im Bereich I $s > 0$, im Bereich II ist $s < 0$, im Bereich III $s > 0$, usw. Wir erhalten also in den einzelnen Bereichen folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} x_I &= A_1 \cdot \cos \omega_0 t & + B_1 \cdot \sin \omega_0 t & + a \cdot \sin (\omega t - \varphi) - a_0 \\ x_{II} &= A_2 \cdot \cos \omega_0 (t - t_1) & + B_2 \cdot \sin \omega_0 (t - t_1) & + a \cdot \sin (\omega t - \varphi) + a_0 \\ x_{III} &= A_3 \cdot \cos \omega_0 (t - t_2) & + B_3 \cdot \sin \omega_0 (t - t_2) & + a \cdot \sin (\omega t - \varphi) - a_0 \\ &\vdots & \vdots & \vdots \\ x_n &= A_n \cdot \cos \omega_0 (t - t_{n-1}) & + B_n \cdot \sin \omega_0 (t - t_{n-1}) & + a \cdot \sin (\omega t - \varphi) - a_0. \end{aligned} \quad (95)$$

(Ist im Bereich I $s < 0$, dann alterniert das Vorzeichen von a_0 in umgekehrter Reihenfolge.) Es sei noch erwähnt, daß die Anzahl n der Bereiche, in die ich die Bewegungskurve einteilen kann, immer ungerade ist, da $s(0) = s(2\pi/\omega)$ sein muß. Die Lösungsgleichungen x_I, \dots, x_n enthalten die Unbekannten $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ und φ . Zu ihrer Bestimmung stellen wir die zu den Gleichungen gehörenden Geschwindigkeiten auf:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= -A_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t & + B_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t & + a \omega \cdot \cos (\omega t - \varphi) \\ \dot{x}_{II} &= -A_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 (t - t_1) & + B_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 (t - t_1) & + a \omega \cdot \cos (\omega t - \varphi) \\ \dot{x}_{III} &= -A_3 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 (t - t_2) & + B_3 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 (t - t_2) & + a \omega \cdot \cos (\omega t - \varphi) \\ &\vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n &= -A_n \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 (t - t_{n-1}) & + B_n \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 (t - t_{n-1}) & + a \omega \cdot \cos (\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (96)$$

Als Bestimmungsgleichungen für die $(2n + 1)$ Unbekannten verwenden wir die Bedingungen an den Grenzen t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Die Funktionswerte zweier benachbarter Kurven müssen gleich sein:

$$x_I(t_1) = x_{II}(t_1); \quad x_{II}(t_2) = x_{III}(t_2); \quad \dots; \quad x_{n-1}(t_{n-1}) = x_n(t_{n-1}). \quad (97)$$

(n-1)-Bedingungen!

Die zeitlichen Ableitungen zweier benachbarter Kurven müssen an den Grenzen gleich sein:

$$\dot{x}_I(t_1) = \dot{x}_{II}(t_1); \quad \dot{x}_{II}(t_2) = \dot{x}_{III}(t_2); \quad \dots; \quad \dot{x}_{n-1}(t_{n-1}) = \dot{x}_n(t_{n-1}). \quad (98)$$

(n - 1)-Bedingungen!

Außerdem gilt:

$$x_I(0) = -e; \quad x_n\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = -e \quad (99)$$

und

$$\frac{\dot{x}_I(0)}{\dot{x}_n\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = -k.$$

Wir erhalten also $(2n + 1)$ Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der $(2n + 1)$ Unbekannten. Somit ist das System lösbar. Die Grenzen $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{n-1}$ sind ebenfalls unbekannt. Wir erhalten sie näherungsweise durch die Gleichungen

$$x(t_i) - y(t_i) = 0.$$

Die Amplitude a der erzwungenen Schwingungen ist gleich der des Bärs ohne Vorspannung

$$a = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2};$$

denn die Differentialgleichungen unterscheiden, sich nur durch ein additives Glied, welches aber in der Lösung separat angeführt wird.

Die Gl. (95) geben also stückweise den exakten Verlauf der Bärbewegung an. Die Schlagarbeit ist die Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Schlag:

$$A_S = \frac{m}{2} (v_A^2 - v_R^2) = \frac{m}{2} \left[\dot{x}_n^2 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) - \dot{x}_1^2(0) \right]. \quad (100)$$

Wir erhalten also die Schlagarbeit A_S mit Hilfe der Bewegungsgleichungen des I. und des letzten Bereiches.

Berücksichtigen wir bei unseren Betrachtungen die Dämpfung, dann erhalten wir die Bewegungsgleichung (68):

$$\ddot{x} + 2\varrho \dot{x} + \frac{c}{m} \left\{ x + a_0 [\operatorname{sgn}(x - y)] \right\} = \frac{c}{m} r \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (68)$$

In der gleichen Weise wie im ungedämpften Fall teilen wir die Periode in n Teile ein. In den einzelnen Bereichen bekommen wir dann die folgenden Lösungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_{\text{I}} &= e^{-\varrho t} \cdot A_1 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t && + e^{-\varrho t} \cdot B_1 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t && + a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta) - a_0 \\ x_{\text{II}} &= e^{-\varrho(t-t_1)} \cdot A_2 \cdot \cos \bar{\omega}_0(t-t_1) && + e^{-\varrho(t-t_1)} \cdot B_2 \cdot \sin \bar{\omega}_0(t-t_1) && + a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta) + a_0 \\ x_{\text{III}} &= e^{-\varrho(t-t_2)} \cdot A_3 \cdot \cos \bar{\omega}_0(t-t_2) && + e^{-\varrho(t-t_2)} \cdot B_3 \cdot \sin \bar{\omega}_0(t-t_2) && + a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta) - a_0 \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ x_n &= e^{-\varrho(t-t_{n-1})} \cdot A_n \cdot \cos \bar{\omega}_0(t-t_{n-1}) && + e^{-\varrho(t-t_{n-1})} \cdot B_n \cdot \sin \bar{\omega}_0(t-t_{n-1}) && + a \cdot \sin(\omega t - \varphi - \delta) - a_0 \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{I}} &= -\varrho \cdot e^{-\varrho t} \cdot [A_1 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t + B_1 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t] \\ &\quad + e^{-\varrho t} \cdot [-A_1 \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0 t + B_1 \bar{\omega}_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0 t] + a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi - \delta) \\ \dot{x}_{\text{II}} &= -\varrho \cdot e^{-\varrho(t-t_1)} \cdot [A_2 \cdot \cos \bar{\omega}_0(t-t_1) + B_2 \cdot \sin \bar{\omega}_0(t-t_1)] \\ &\quad + e^{-\varrho(t-t_1)} \cdot [-A_2 \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \sin \bar{\omega}_0(t-t_1) + B_2 \cdot \bar{\omega}_0 \cdot \cos \bar{\omega}_0(t-t_1)] \\ &\quad + a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi - \delta) \end{aligned} \quad (102)$$

$\dot{x}(0)$ und φ richtig gewählt, so muß die Kurve im letzten Bereich zur Zeit $\omega t = 2\pi$ durch den Punkt $x = -e$ mit der Geschwindigkeit $-\dot{x}(0)/k$ laufen. Die gefundenen Gleichungen geben dann stückweise den richtigen Bewegungsverlauf des Bärs an.

Während die Näherungsmethoden nur für kleine a_0 zu verwenden sind, kann die Approximationsmethode auch auf große Vorspannungen angewendet werden.

8.7. Vergleich der Näherungsverfahren mit der Approximationsmethode

Um die Brauchbarkeit der angeführten drei Näherungsverfahren zu ermitteln, wurden ihre Lösungen mit denen der Approximationsmethode verglichen. Die Oszillogramme 19 bis 21 zeigen die nach den drei Näherungsverfahren berechneten Bewegungskurven des Bärs (punktierter Kurvenverlauf). Den Berechnungen liegen die folgenden Daten des Modellhammers zugrunde:

Rückprallkoeffizient (Eisen)	k	$= 0,2$
Bärmasse	m	$= 724 \text{ g}$
Federkonstante	c	$= 1 \text{ kp/cm}$
Eigenkreisfrequenz (ungedämpft)	ω_0	$= 36,8 \text{ s}^{-1}$
Kurbelradius	r	$= 0,9 \text{ cm}$
Abstand der Aufschlagebene	e	$= 0,81 \text{ cm}$
Dämpfungsfaktor	ρ	$= 6 \text{ s}^{-1}$
Abstandsverhältnis	e/r	$= 0,9$
Kreisfrequenzverhältnis	ω_0/ω	$= 1,17$

Da es das Ziel war, die drei Näherungsverfahren zu überprüfen, wurden den drei Näherungslösungen jeweils die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ und der Phasenwinkel φ entnommen und mit ihrer Hilfe in einmaliger Anwendung der Methode die Lösung der Approximationsmethode berechnet (ausgezogener Kurvenverlauf). Die in den einzelnen Bereichen geltenden Bewegungsgleichungen $x_I(t)$, $x_{II}(t)$ und $x_{III}(t)$ sind in den Oszillogrammen mit eingetragen. Ebenfalls sind die Kurven der Federkompression $s(t)$ eingezeichnet. Die Grenzen t_i der einzelnen Bereiche ergeben sich durch die Bedingung

$$s(t_i) = x(t_i) - y(t_i) = 0$$

(Der günstigste Weg zur Berechnung der Näherungslösungen wird im nächsten Abschnitt angegeben.)

Es zeigt sich an Hand des Oszillogramms 20, daß die Bewegungskurve der II. Näherungsmethode die günstigsten Anfangswerte für die Berechnung der exakten Bewegungskurve liefert. Die in diesem Fall von der exakten Lösung zur Zeit $\omega t = 2\pi$ erreichten Werte sind $x = -0,79$ und $k = 0,205$. Genau müßte man erhalten $x = -0,81$ und $k = 0,2$. Man erkennt außerdem, daß die Abweichung der beiden Bewegungskurven voneinander sehr gering ist.

Die Schlagenergiewerte, die sich aus den drei Näherungslösungen und aus den exakten Lösungen ergeben, sind für den vorliegenden Hammer folgende:

1. Näherungslösung:	0,807 kp · cm
2. Näherungslösung:	1,198 kp · cm
3. Näherungslösung:	0,843 kp · cm
Exakte Lösung:	1,180 kp · cm
(Hammer ohne Vorspannung (nach Teil B):	1,130 kp · cm) .

Es zeigt sich, daß die Schlagenergiewerte der I. und III. Näherungslösung unterhalb, die der II. Näherungslösung und der exakten Lösung oberhalb der des unvorspannten Hammers liegen. Die Schlagenergiewerte der II. Näherungslösung und der exakten Lösung liegen dicht nebeneinander. Auch bei der Berechnung der Schlagenergiewerte ist also das II. Näherungsverfahren das günstigste.

8.8. Energiekurven des gedämpften, vorgespannten Hammers

Im vergangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß das II. Näherungsverfahren Bewegungskurven und Schlagenergiewerte liefert, die denen der Approximationslösung sehr nahe kommen. Die Gln. (77) und (78) geben die Bärbewegung und die Schlagenergiewerte des Hammers nach dem II. Näherungsverfahren an. Im folgenden sollen die gefundenen Ergebnisse auf den gleichen praktischen Hammer angewendet werden, den wir schon in den Teilen A und B herangezogen haben.

Bei der numerischen Berechnung der einzelnen Bewegungskurven und der Schlagenergiewerte tauchen allerdings einige Schwierigkeiten auf. Sie haben ihre Ursache darin, daß die Eigenkreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ des Bärs von der Amplitude x_0 abhängt, die zunächst noch nicht bekannt ist. Im folgenden soll ein günstiger Weg zur Berechnung der einzelnen Bewegungskurven und der zugehörigen Schlagenergiewerte gezeigt werden, wobei die angedeutete Schwierigkeit umgangen wird.

Es seien die Größen m , r , k , ω , ρ und a_0 vorgegeben. Das sind die gleichen Größen, die im Teil A und B vorgegeben wurden, zuzüglich der vorgespannten Strecke a_0 . Der Einfluß der Dämpfung auf die Eigenkreisfrequenz ist in gleicher Weise wie im Teil B zu vernachlässigen. Wir können setzen $\bar{\omega}_0 \approx \omega_0$ und $\hat{\omega}_0 \approx \hat{\omega}_0$. Zur Berechnung der Schlagenergiewerte A_s wird nun zunächst für die Eigenkreisfrequenz $\hat{\omega}_0$ des vorgespannten Systems ein beliebiger Wert angenommen. Dadurch sind wir in der Lage, nach Gl. (77) und (78) die Bewegungskurve und die Schlagarbeit zu berechnen. Alle in den Formeln vorkommenden Größen sind bekannt.

Die Kurve der Bärbewegung und die Kurve der Federverformung können wir zeichnen und danach die Amplitude x_0 bestimmen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß als Amplitude x_0 nicht das Maximum der Bärbewegung gewählt werden darf, das auf die Nulllinie bezogen ist $x(t)$, sondern das Maximum der Bärbewegung, das auf die Gehäusenulllinie bezogen ist, also die Federverformung $s(t)$.

Für die Federverformung erhält man:

$$s = x - y = x - r \sin(\omega t - \varphi).$$

Mit Hilfe der Amplitude x_0 läßt sich dann nach Gl. (67) die gesuchte Eigenkreisfrequenz ω_0 des unvorgespannten Systems bestimmen. Damit sind die Gerätegrößen festgelegt, die die berechnete Schlagenergie A_S liefern.

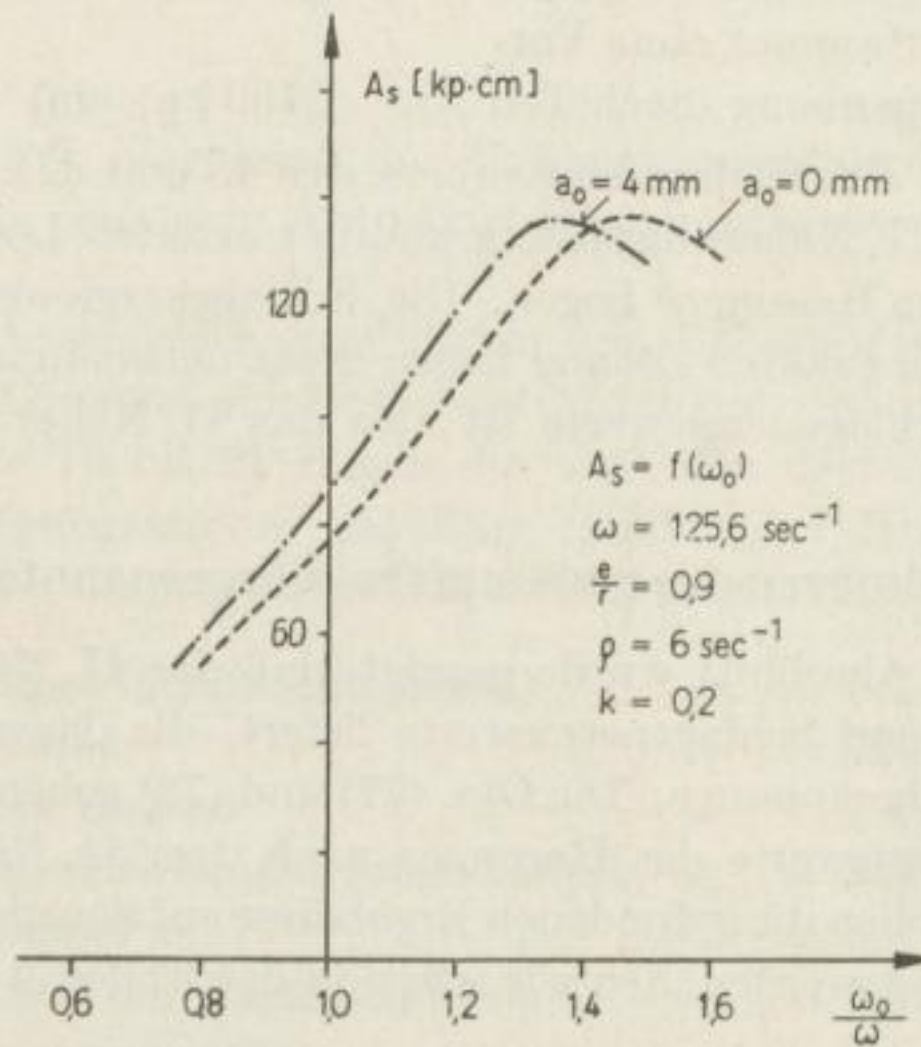


Bild 34

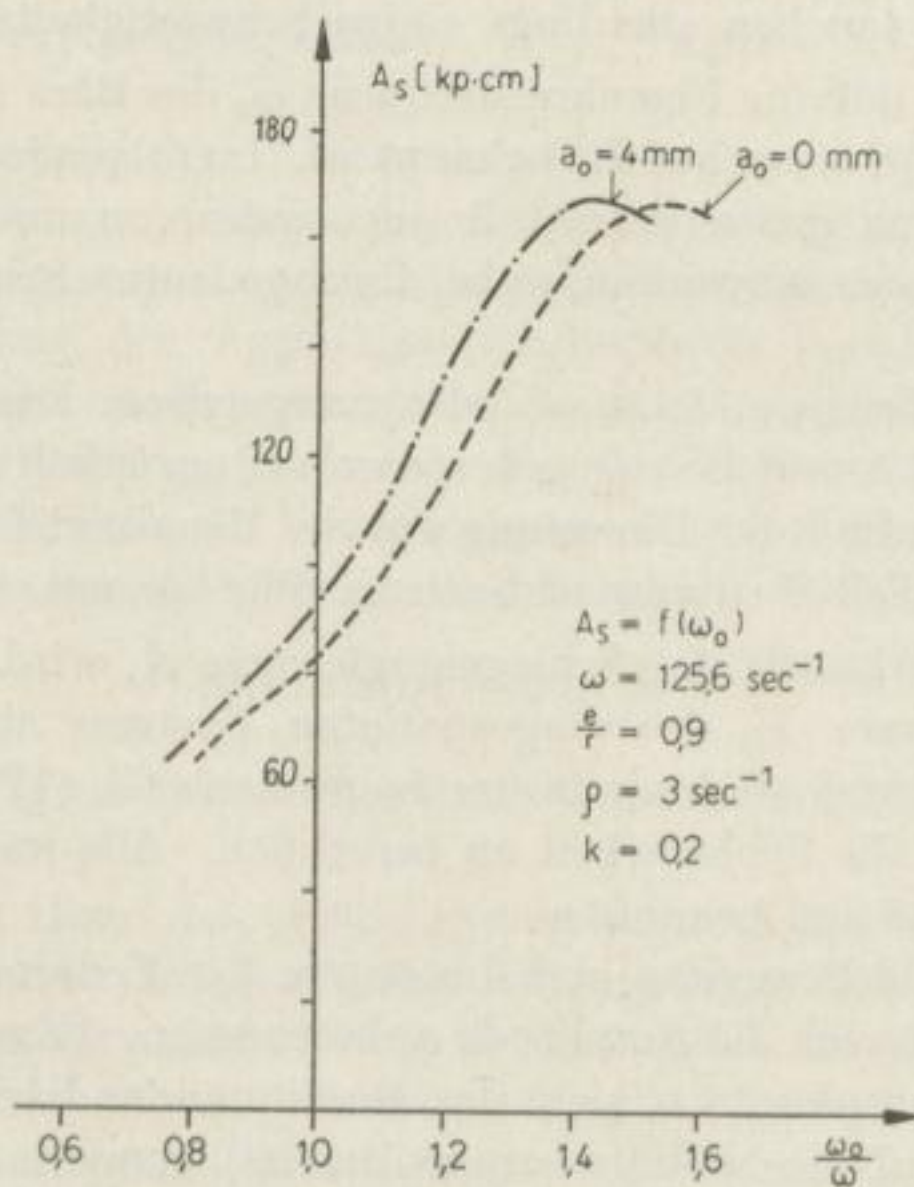


Bild 35

In Bild 34 und 35 sind nach dieser Methode die Schlagenergiewerte des bereits in den Teilen B und C zur Berechnung herangezogenen Hammers eingetragen. Die Daten des Hammers sind folgende:

Rückprallkoeffizient	$k = 0,2$
Bärmasse	$m = 0,444 \text{ kg}$
Kurbelradius	$r = 2,0 \text{ cm}$
Abstand der Schlagebene	$e = 1,8 \text{ cm}$
Drehzahl	$n = 1200 \text{ min}^{-1}$
Kreisfrequenz	$\omega = 125,6 \text{ s}^{-1}$

Die Kurven sind für die Rückprallkoeffizienten $\rho = 3 \text{ s}^{-1}$ und $\rho = 6 \text{ s}^{-1}$ aufgestellt. Die vorgespannte Strecke a_0 dient als Parameter.

Die Kurven der Bilder 34 und 35 zeigen, daß die Schlagarbeit A_S in dem Bereich $0,8 < \omega_0/\omega < 1,35$ mit wachsender Vorspannung zunimmt. Die Vorspannung bewirkt also eine Verbesserung der Schlagarbeit. Die Energiekurve verschiebt sich durch die Vorspannung nach links. Man erhält allerdings den gleichen Wert der Schlagarbeit, den man mit einer vorgespannten Feder erreicht, indem man bei einer unvorspannten Feder die Federkonstante c vergrößert, d. h., indem man also die Feder austauscht. Dadurch vergrößert sich der (ω_0/ω) -Wert, und man gelangt in den Bildern 34 und 35 von einer Kurve mit Vorspannung nach rechts auf die Kurve ohne Vorspannung, wobei die gleiche Schlagenergie erzielt wird.

Das Vorspannen der Feder ist nach den Bildern 34 und 35 also sinnvoll, wenn $\omega_0/\omega < 1,35$ ist, d. h., wenn die Federkonstante c nicht dem günstigsten Arbeitspunkt $\omega_0/\omega = 1,4$ angepaßt wurde. In den Fällen bewirkt die Vorspannung keine Vergrößerung der Schlagarbeit.

An Hand der Bilder 34 und 35 erklärt sich die in der Praxis häufig beobachtete Tatsache, daß Federhämmer, deren Federn eine Vorspannung besitzen, größere Schlagenergiebeträge abgeben als ohne Vorspannung. Da die Hämmer im allgemeinen mehr in Resonanzhöhe arbeiten dürften, geht man infolge der Vorspannung von der Kurve für $a_0 = 0$ im Punkt $\omega_0/\omega = 1$ senkrecht nach oben auf die entsprechend höhere Kurve über und erhält höhere Schlagenergiewerte.

9. Messungen mit dem vorgespannten Federhammer

9.1. Energiekurven des Modellhammers

Für die Messungen wurde der in Teil B erwähnte geschlossene Hammer benutzt. Zu diesem Zweck wurde der bewegliche Teller des Hammers gegen einen entsprechend stärkeren ausgetauscht, so daß die Feder eine Vorspannung erhielt. Um vergleichende Messungen vornehmen zu können, ist darauf geachtet worden, daß die einzelnen Teller trotz der unterschiedlichen Stärke gleiches Gewicht behalten. Den Verhältnissen der Praxis entsprechend, diente Eisen

mit einem Rückprallkoeffizienten von $k = 0,2$ als schlagaufnehmendes Material. Die Feder wurde um die Strecke $a_0 = 1,6$ mm vorgespannt, der Kurbelradius betrug $r = 9$ mm. Der Antrieb erfolgte mit dem schon mehrfach erwähnten Synchronmotor mit stufenlosem Getriebe.

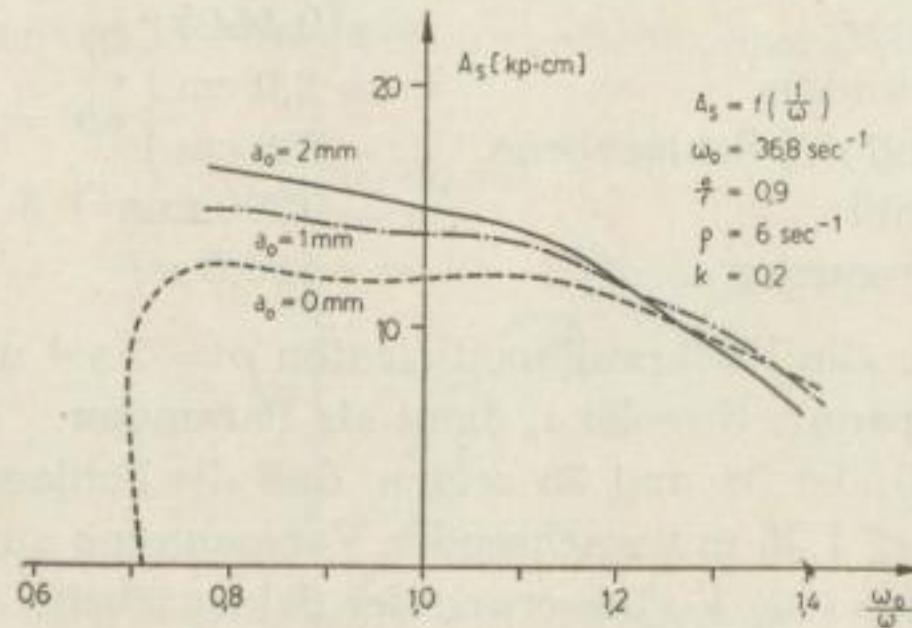


Bild 36

In Bild 36 sind die Werte der Schlagarbeit A_s für den bereits erwähnten Modellhammer nach dem II. Näherungsverfahren berechnet und eingezeichnet. Die Vorspannung a_0 dient als Parameter. In analoger Weise wie in den Teilen A und B zeigen auch hier die Energiekurven, die sich ergeben, wenn die Eigenkreisfrequenz ω_0 konstant ist, eine Abweichung von den Kurven der Bilder 34 und 35. Sie verlaufen aus den in den Teilen A und B besprochenen Gründen rechts vom Resonanzpunkt flacher, links davon steiler als die Kurven der Bilder 34 und 35. Während jene Kurven der Bestimmung der günstigsten Hammerwerte dienten, haben diese Kurven den Zweck, die aufgestellte Theorie auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

9.2. Schlagenergie und Bewegungskurven beim Aufschlag auf Eisen

Bild 37 zeigt die Energiekurve, die in der gleichen Weise für die Vorspannung $a_0 = 1,6$ mm des Modellhammers berechnet ist. Die gemessenen Werte der Schlagarbeit sind mit eingetragen. Zum Vergleich ist auch die berechnete Energiekurve mit eingezeichnet, die sich bei fehlender Vorspannung ergibt ($a_0 = 0$). Man erkennt, daß die gemessenen Werte dem berechneten Kurvenverlauf folgen. In den Oszillogrammen 22 und 23 sind einige der vom Schleifenzillographen aufgezeichneten Bewegungskurven wiedergegeben. Jeweils darunter befinden sich die nach der Approximationsmethode berechneten Kurven mit den entsprechenden Gleichungen. Die Ausgangswerte zur Berechnung des exakten Kurvenverlaufs $\dot{x}(0)$ und φ wurden dem II. Näherungsverfahren entnommen. Die Gültigkeitsbereiche der einzelnen Gleichungen

$$x_I(t), x_{II}(t) \text{ und } x_{III}(t)$$

sind ebenfalls mit eingetragen.

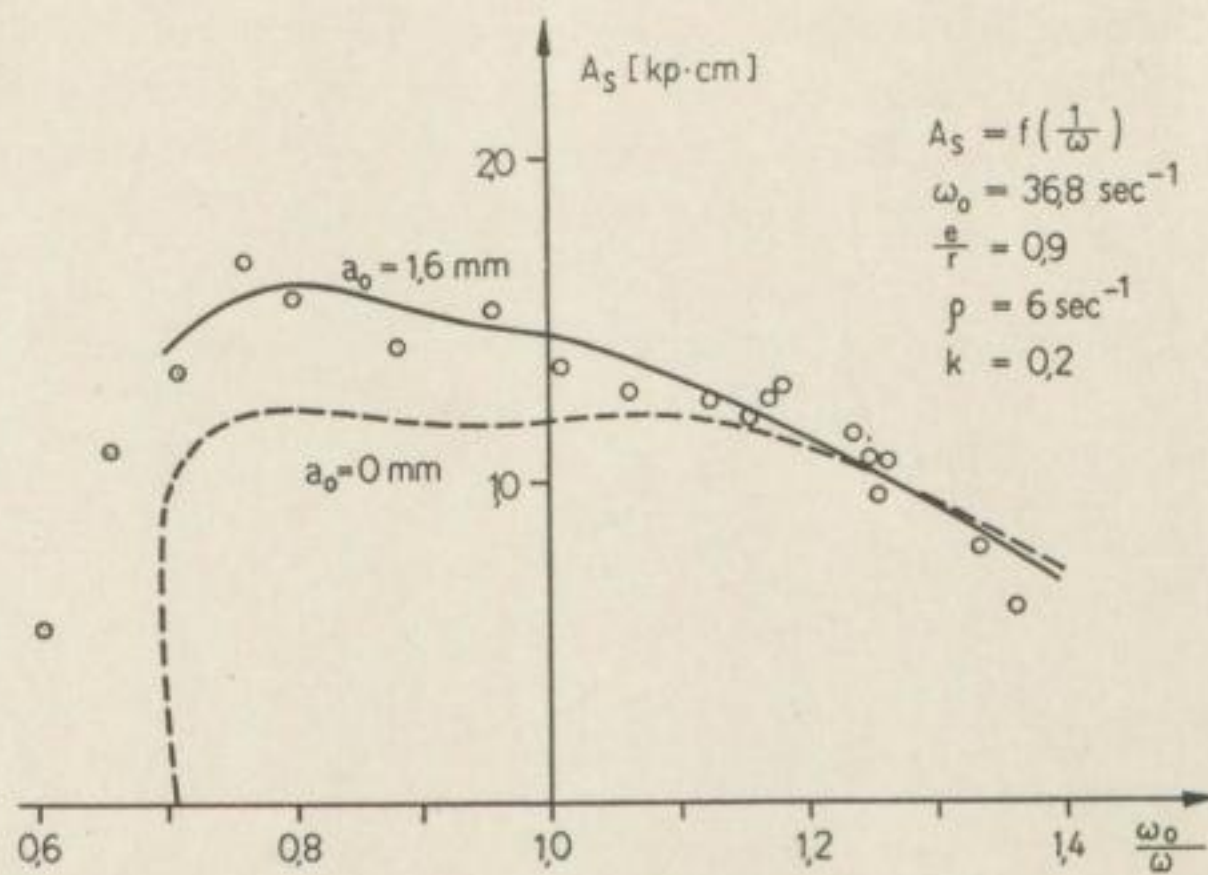


Bild 37

9.3. Betrachtungen zum vorgespannten Federhammer

Der Vergleich der Approximationslösung mit den Näherungslösungen zeigt, daß das II. Näherungsverfahren Ergebnisse liefert, die denen der Approximationsmethode sehr nahe kommen. Das II. Näherungsverfahren führt in die Differentialgleichung der Bewegung zunächst die neue Variable der Federkompression $s(t) = x(t) - y(t)$ ein und wendet darauf das Verfahren der Benutzung der zugeordneten Kreisfrequenz an. Physikalisch bedeutet die Entwicklung, daß die vorgespannte Feder durch eine härtere, unvorspannte ersetzt wird. Die Berechnung der Approximationslösung geht von der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ und vom Phasenwinkel φ aus. Die Größen werden der Lösung des II. Näherungsverfahrens entnommen. Mit Hilfe dieser Größen wird der Kurvenverlauf stückweise ermittelt und kann beliebig genau an den exakten Kurvenverlauf angenähert werden.

Die berechneten Werte der Schlagenergie und der berechnete Verlauf der Bewegungskurven stimmen mit den Messungen überein.

Die Approximationsmethode hat gegenüber der Näherungsmethode jedoch einen großen Vorteil: Die Lösung nach der Näherungsmethode wird gefunden, indem von vornherein ein gewisser Fehler in die Differentialgleichung hineingegeben wird. Dieser Fehler, der von der Größe der Vorspannung abhängt, kann natürlich nie unterschritten werden. Daher läßt sich die Näherungsmethode nur für kleine Vorspannungen verwenden. Die Approximationsmethode dagegen gestattet auch die Berechnung der Bewegungskurven und der Schlagenergiewerte für große Vorspannungen, wobei die Lösung den exakten Werten beliebig genau angenähert werden kann.



Anhang

10. Auswertende Betrachtungen zum Federhammer

Im ersten Hauptteil wird der ungedämpfte Federhammer behandelt. Dieser Abschnitt besitzt vor allem mathematisch-physikalische und experimentelle Bedeutung. Die Rechnung wird unter der Annahme, daß Reibungskräfte nicht vorhanden sind und daß die Erregung rein sinusförmig ist, vorgenommen. Man erhält die Schlagenergie und die Bewegungsgleichung des Bärs.

An einem Modellhammer wird die Richtigkeit der Theorie geprüft. Der Modellhammer selbst wird so konstruiert, daß er den angegebenen Vereinfachungen Rechnung trägt. Die Bewegung des Schlittens ist sinusförmig, und die Dämpfung ist auf ein Minimum reduziert. Die Messungen bestätigen die Richtigkeit der Theorie.

An Hand von Beispielen wird nachgewiesen, daß man Hämmer mit den allgemein üblichen Schlagenergiewerten bis $100 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ als Einmassensystem auffassen kann. Für einen Hammer mit nahezu der doppelten Schlagenergie wird das Problem zusätzlich als Zweimassensystem behandelt. Da der Unterschied der Aufschlaggeschwindigkeiten beider Betrachtungen 1 bis 2% beträgt, können auch derartige Hämmer noch als Einmassensysteme angesehen werden.

Als wichtigste Erkenntnis können wir aus dem Teil A entnehmen, daß die Schlagenergie keineswegs im Resonanzpunkt ihre höchsten Werte erreicht. Außerhalb des Resonanzpunktes können Schlagenergiewerte auftreten, die etwa doppelt so hoch liegen wie die des Resonanzpunktes.

Die in der Praxis verwendeten Federhämmer können nun keineswegs mehr als ungedämpfte Schwinger angesehen werden. Sie führen stark gedämpfte Bewegungen aus. Im zweiten Hauptteil wird dieser Hammer behandelt. Es wird ein Bär in geschlossener Form konstruiert. Diese in der Praxis oft übliche Form hat den Vorteil, daß die Federn nur auf Druck und nicht auf Zug beansprucht werden. Sie brechen daher nicht so leicht. Die Bärform hat den Nachteil, daß die Bewegung gedämpft ist. Die Dämpfungsverluste äußern sich als Coulombsche Reibungsverluste und als Verluste der kinetischen Energie der ständig aufschlagenden Teller. Die gesamten Reibungseinflüsse werden mathematisch durch Stokessche Reibung ersetzt. Mit Hilfe dieser Annahme erhält man die Schlagenergie und die Bewegungskurve des Bärs. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Dämpfung bei höherer Drehzahl geringer ist als bei niedriger. Der Dämpfungsfaktor ρ erscheint in der Gleichung stets in der Form ρ/ω . Bei den Experimenten dient Eisen als schlagaufnehmendes Material mit dem Rückprallkoeffizienten $k = 0,2$. Die in der Praxis auftretenden Rückprallkoeffizienten liegen ebenfalls in der Nähe von $k = 0,2$. Die mit dem Modellhammer durchgeführten Messungen bestätigen die Richtigkeit der abgeleiteten

Theorie. Die gemessenen Schlagenergiewerte und die vom Oszillographen aufgezeichneten Bewegungskurven stimmen mit der Rechnung überein.

Die für die Praxis entscheidende Erkenntnis dieses Hauptteils liegt darin, daß die Schlagenergie ebenfalls wie im ungedämpften Fall außerhalb des Resonanzpunktes erheblich größere Werte annehmen kann als im Resonanzpunkt. Es läßt sich also beim praktischen Hammer durch günstige Wahl der Federkonstanten die Schlagenergie entscheidend verbessern. Bei dem im „Teil B“ dargestellten Hammer ist die günstigste Schlagenergie etwa doppelt so groß wie die im Resonanzpunkt.

Im dritten Hauptteil wird der vorgespannte Federhammer behandelt. Dieser Teil besitzt in gleicher Weise physikalisches und technisches Interesse. Beim vorgespannten Federhammer ist die Federcharakteristik nicht mehr linear, sondern gebrochen. Die aufgestellte nichtlineare Differentialgleichung wird nach drei verschiedenen Näherungsverfahren gelöst. Anschließend wird eine Methode zur Aufstellung der Lösung durch sukzessive Approximation entwickelt. Mit Hilfe dieser Methode kann der exakte Verlauf der Bewegungskurve stückweise angegeben werden. Der Vergleich der Näherungslösungen mit der Approximationslösung zeigt, daß das II. Näherungsverfahren Ergebnisse liefert, die denen der Approximationsmethode sehr nahe kommen. Bei dem II. Näherungsverfahren denkt man sich die vorgespannte Feder durch eine härtere, unvorspannte ersetzt. Die gebrochene Charakteristik geht dadurch in eine lineare über, die eine größere Steigung besitzt.

Die gute Übereinstimmung zwischen der II. Näherungsmethode und Approximationsmethode bei kleinen Vorspannungen zeigt, daß die schwingungstechnischen Verhältnisse nur wenig geändert werden, wenn die vorgespannte Feder durch eine härtere, unvorspannte ersetzt wird. Die Bewegungskurven und die Schlagenergiewerte stimmen in beiden Fällen nahezu überein. Die experimentell gemessenen Schlagenergiewerte und die vom Oszillographen aufgezeichneten Bewegungskurven decken sich ebenfalls mit der Rechnung.

Für die Praxis können wir aus diesem Hauptteil die Tatsache entnehmen, daß durch die Vorspannung die Schlagenergie in dem betrachteten Bereich vergrößert werden. Besonders auffällig wird die Erhöhung der abgegebenen Schlagenergie, wenn der Hammer im Resonanzpunkt oder in seiner nächsten Umgebung arbeitet. Es läßt sich also durch geeignete Wahl der Vorspannung die Schlagenergie eines Federhammers verbessern.

Der Vorteil der Approximationsmethode gegenüber der Näherungsmethode liegt in folgendem: Die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung nach der Näherungsmethode wird gefunden, indem die nichtlineare Federcharakteristik durch eine lineare ersetzt wird. Man gibt also von vornherein einen gewissen Fehler in die Differentialgleichung hinein, der bei der Lösung natürlich nie unterschritten werden kann. Daher läßt sich die Näherungsmethode nur für kleine Vorspannungen verwenden. Die Approximationsmethode gestattet auch die Berechnung der Bewegungskurven und der Schlagenergiewerte für große Vorspannungen, wobei die Lösung den exakten Werten beliebig genau angenähert werden kann.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. R. LIEBOLD, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die großzügige Hilfe und Unterstützung, die er mir während ihrer Fertigstellung gewährt hat.

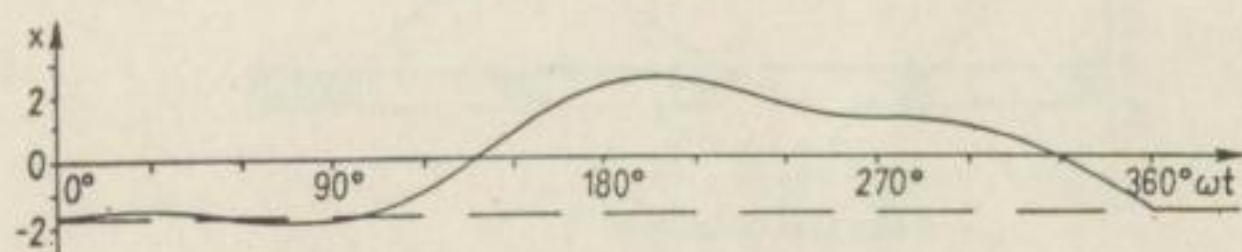
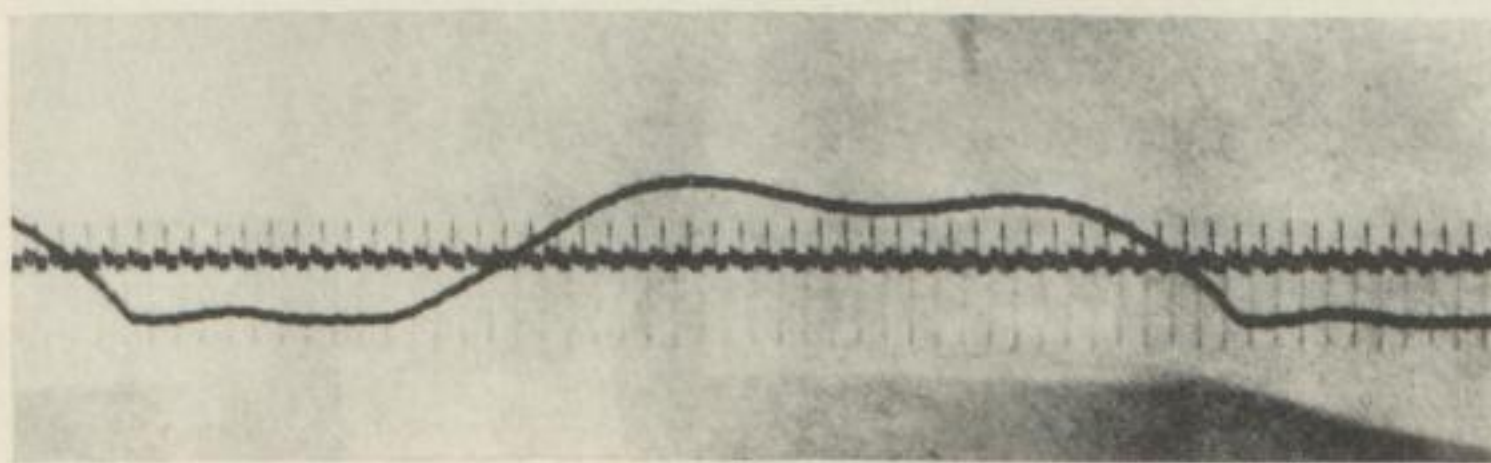
Desgleichen danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. H. GÖCKE für das Interesse, das er der Arbeit entgegengebracht hat und für wertvolle Vorschläge, die er zu ihrer Erweiterung gemacht hat.

11. Literatur

- [1] LIEBOLD, R.: Die Bewegungsvorgänge an elektrisch angetriebenen Abbauhämmern. Bergakademie 5 (1953).
- [2] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. 1. Band. Springer Verlag 1951.
- [3] DEN HARTOG/MESMER: Mechanische Schwingungen. Springer Verlag 1952.
- [4] HOFFMANN, C.: Die Stoßenergieübertragung bei Abbauhämmern. Glückauf 74 (1938).
- [5] ENGEL, L. und H. GLOECKNER: Dynamik des Abbauhammers. Glückauf 87 (1951).
- [6] ARNDT, F.-K.: Prüfung von Bohrhämmer auf dem Bohrprüfstand. Glückauf 93 (1957).
- [7] HASSE, A.: Rückstoßmessung und Rückstoßbeurteilung bei Preßluftwerkzeugen. Glückauf 26 (1935).
- [8] ENGEL, L. und D. SCHMIDT: Die Bestimmung der Bewegungsverhältnisse von Abbauhämmern aus der Druckindizierung. Berg.-Wiss. 4 (1957).
- [9] ZOLTÁN AJTAY: Schlagend wirkend elektrische Handwerkzeuge im Bergbau. Bányászati Lapok (1952).
- [10] MOSKWITIN: Elektrohämmer und Vibratoren mit elektrischem Antrieb, Fachbuchverlag Leipzig 1956.
- [11] DEN HARTOG, MIKINA: Forced vibrations with non-linear spring constants, Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 1932.
- [12] HOFFMANN, C.: „Über das Prüfen von Abbau- und Bohrhämmern“, Zeitschr. f. komprimierte und flüssige Gase sowie für die Preßluft-Industrie 1937/38 Heft 10.
- [13] HOFFMANN, C.: Das Hauhinco-Betriebsprüfgerät für Abbauhämmer und seine Anwendung. Schlägel und Eisen 1954.
- [14] TERPIGOREM, A. M.: Bergbaumaschinen für die Gewinnung von Flözlagerstätten. (Lehrbuch) Verlag Technik, Berlin 1953.
- [15] OPOLSKI, T.: Elektrische Abbauhämmer im Bergbau. Bergbautechnik 1 (1951).
- [16] SCHEFFER, H.: Studie über die Werkweise mit dem Abbauhämmer. Schlägel und Eisen 1954.
- [17] LEHMANN, W.: „Die Elektrotechnik und die elektromotorischen Antriebe“, Springer-Verlag, Berlin 1945.
- [18] MOELLER-WERR: Grundlagen der Elektrotechnik. B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.
- [19] MOELLER-WERR: Gleichstrommaschinen. B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1956.
- [20] Des Ingenieurs Taschenbuch. Hütte Band 2, Verlag Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1951.
- [21] KOCHENDÖRFFER, R.: Determinanten und Matrizen. Teubner-Verlagsgesellschaft Leipzig. 1957.

Oszillogramme

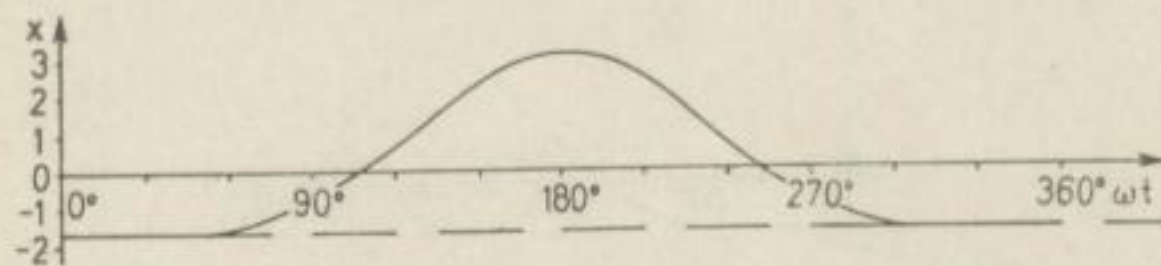
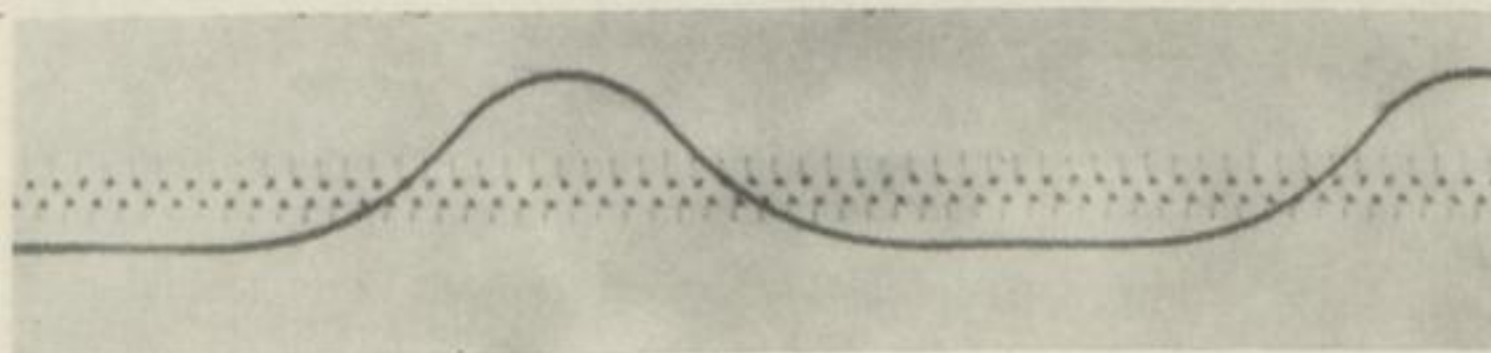
Bestandteil



Oszillogramm 1

$$k = 0 \quad e/r = 0,9 \quad \omega_0/\omega = 2,54$$

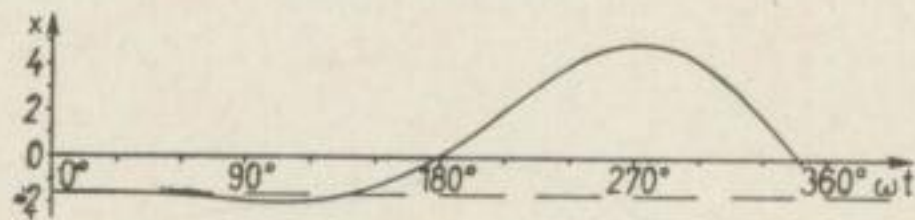
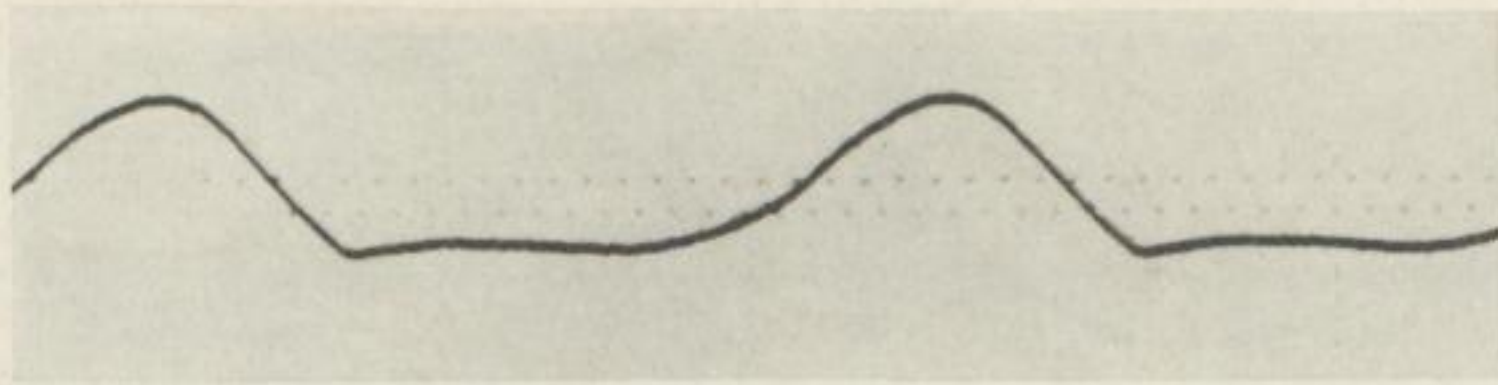
$$x = -1,46 \sin \omega t - 1,54 \cos \omega t - 0,07 \cos (2,54 \omega t) + 0,57 \sin (2,54 \omega t)$$



Oszillogramm 2

$$k = 0 \quad e/r = 0,9 \quad \omega_0/\omega = 2,0$$

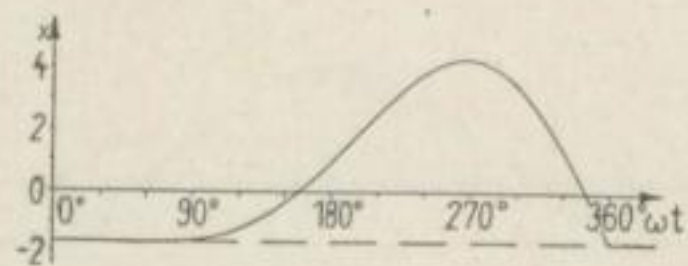
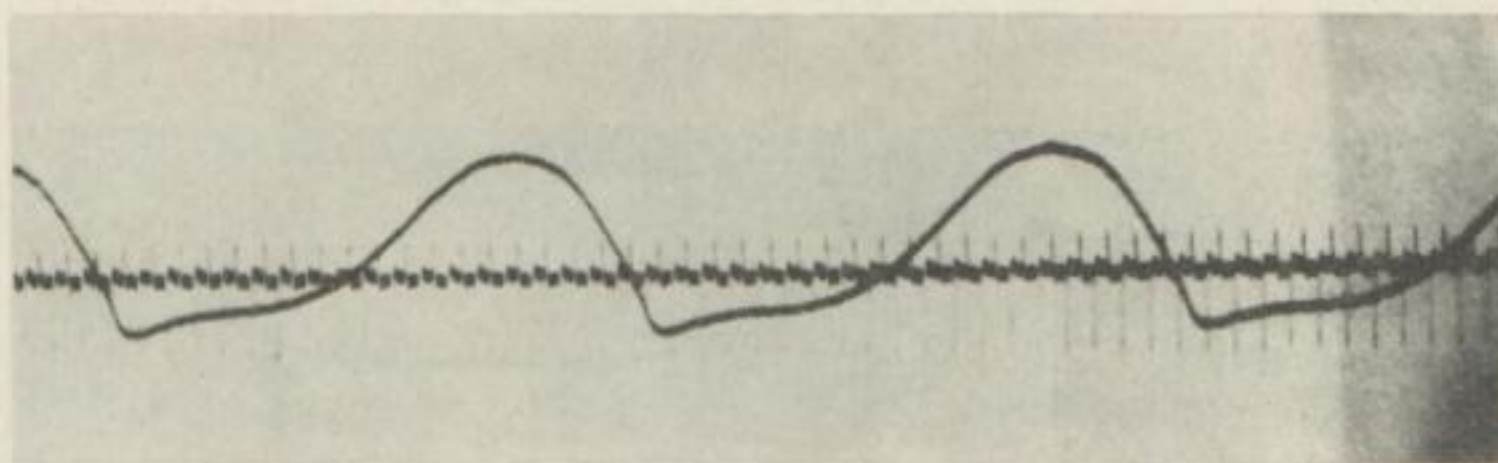
$$x = -2,4 \cos \omega t + 0,78 \cos 2 \omega t$$



Oszillogramm 3

$$k = 0 \quad e/r = 0,9 \quad \omega_0/\omega = 1,37$$

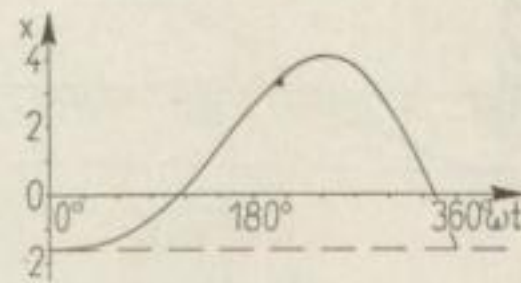
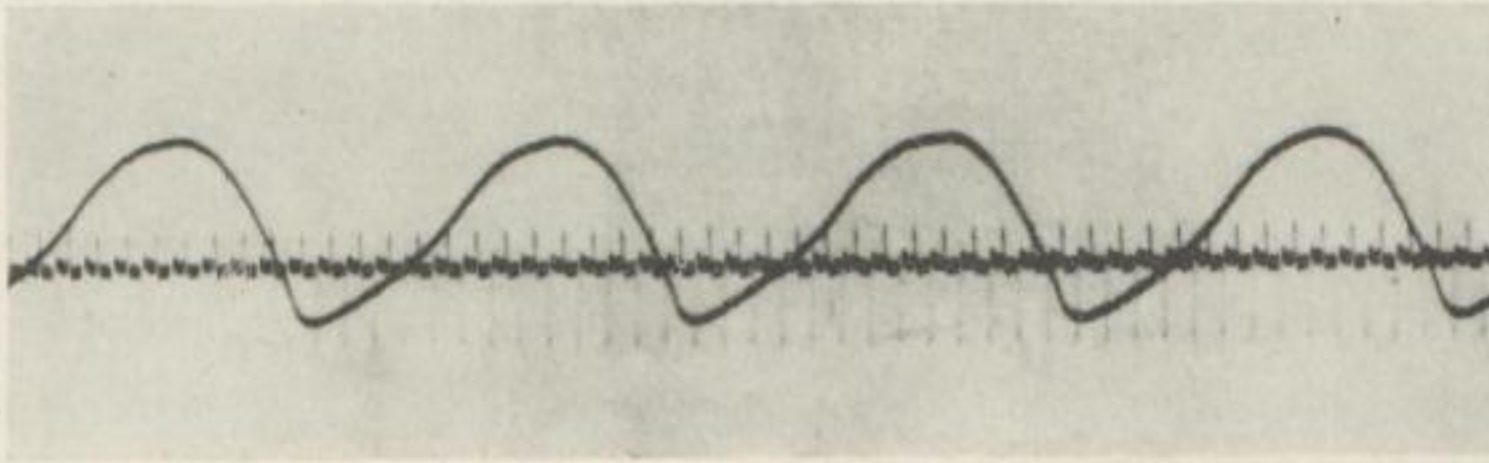
$$x = -3,49 \omega t - 2,72 \cos \omega t + 1,10 \cos (1,37 \omega t) + 2,55 \sin (1,37 \omega t)$$



Oszillogramm 4

$$k = 0 \quad e/r = 0,9 \quad \omega_0/\omega = 1,16$$

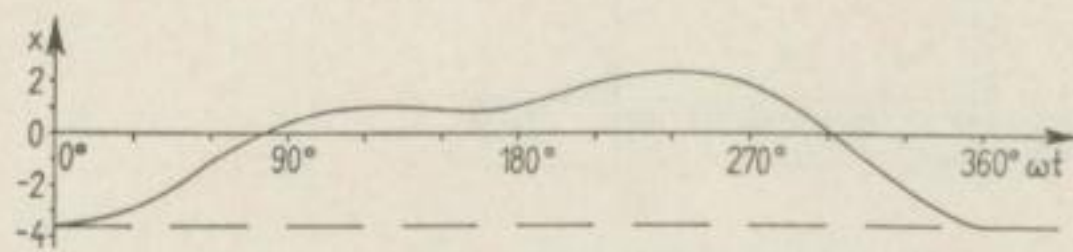
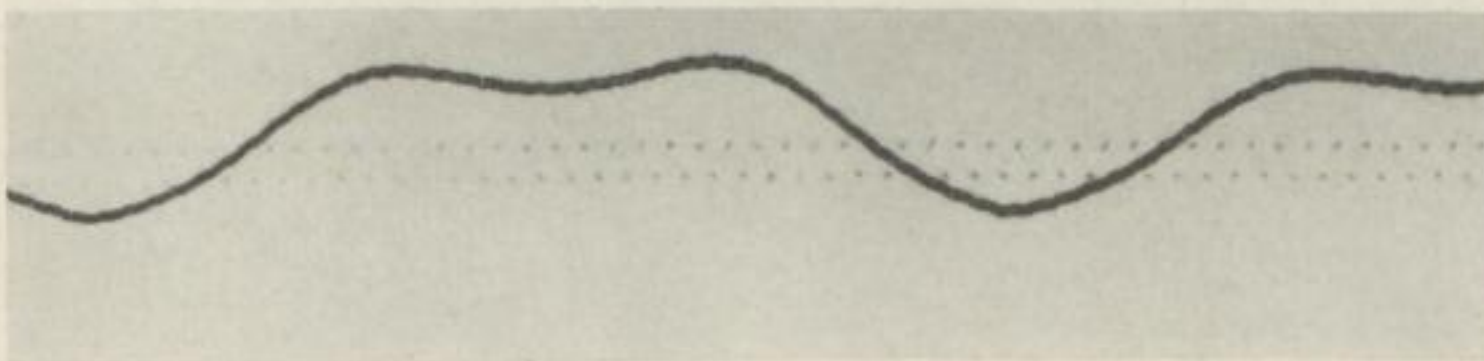
$$x = -3,00 \sin t - 6,33 \cos t + 4,71 \cos (1,16 \omega t) + 2,59 \sin (1,16 \omega t)$$



Oszillogramm 5

$$k = 0 \quad e/r = 0,9 \quad \omega_0/\omega = 0,79$$

$$x = -2,24 \sin \omega t + 2,08 \cos \omega t - 3,70 \cos (0,79 \omega t) + 2,83 \sin (0,79 \omega t)$$

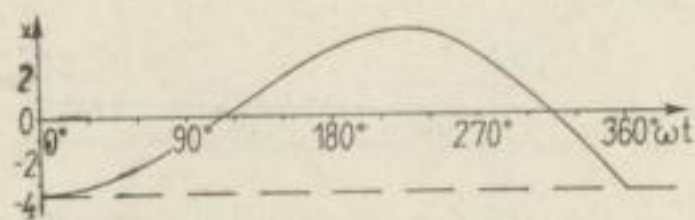
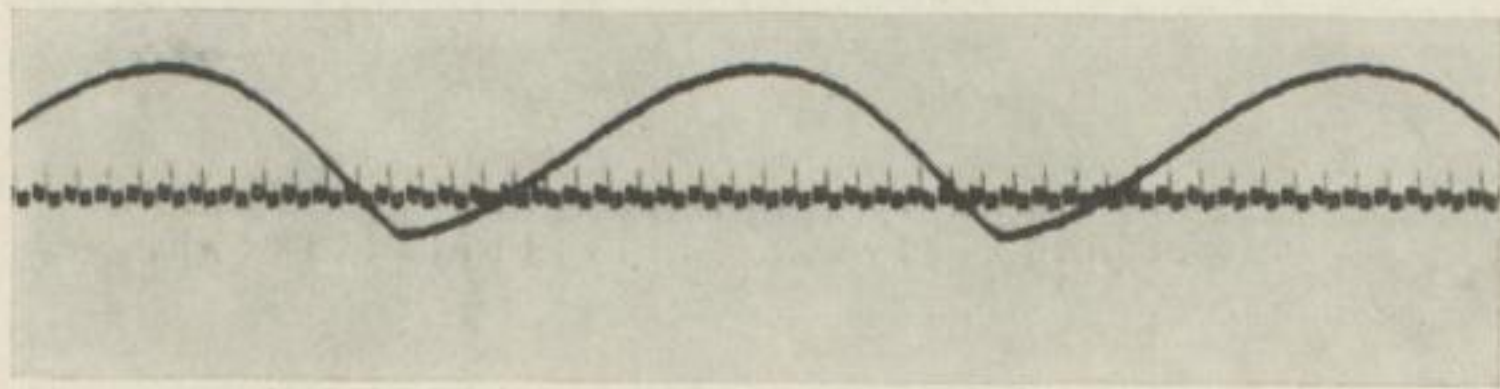


Oszillogramm 6

$$k = 0 \quad e/r = 2,0 \quad \omega_0/\omega = 1,94$$

$$x = -0,81 \sin \omega t - 2,41 \cos \omega t - 1,18 \cos (1,94 \omega t) + 0,22 \sin (1,94 \omega t)$$

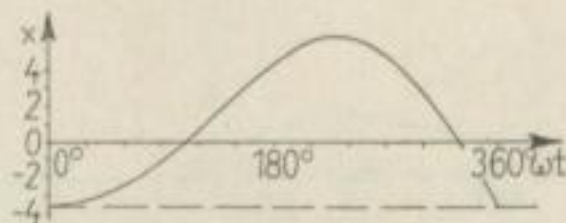
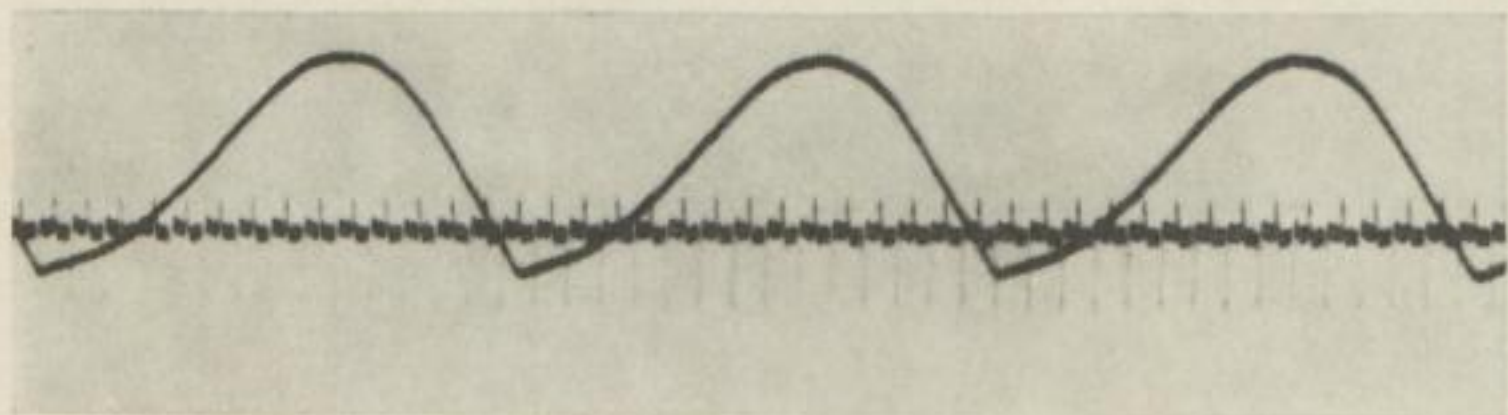




Oszillogramm 7

$$k = 0 \quad e/r = 2,0 \quad \omega_0/\omega = 1,15$$

$$x = -2,05 \sin \omega t - 6,92 \cos \omega t + 3,32 \cos (1,15 \omega t) + 1,77 \sin (1,15 \omega t)$$

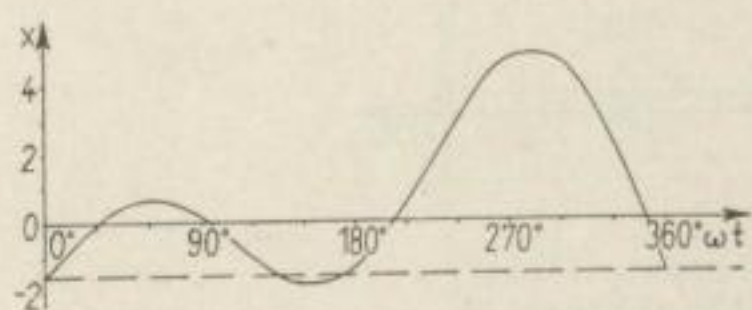
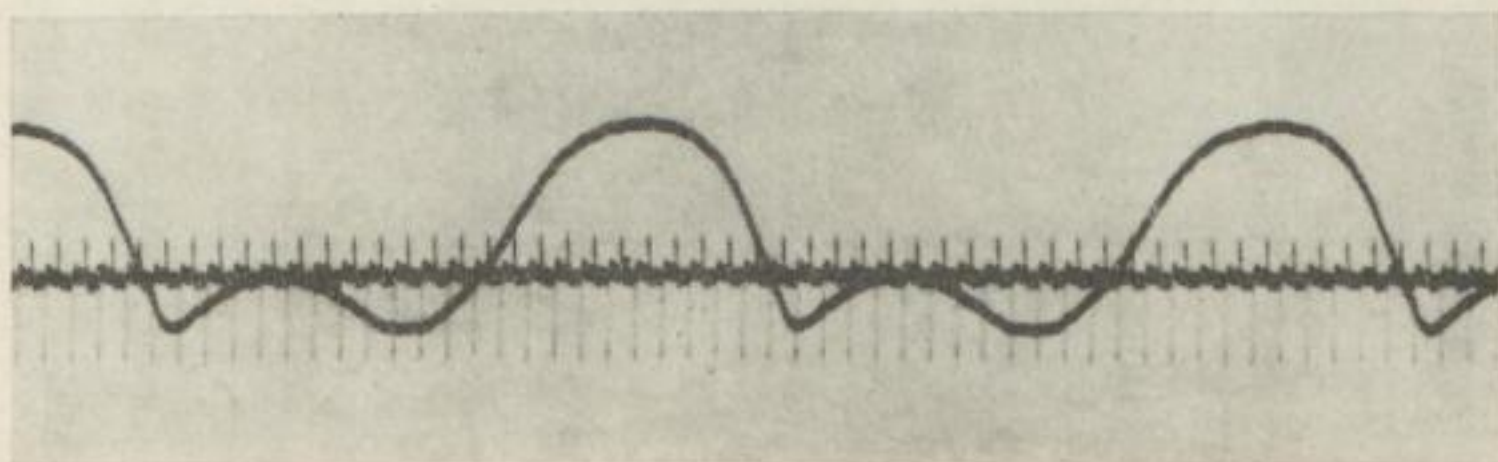


Oszillogramm 8

$$k = 0 \quad e/r = 2,0 \quad \omega_0/\omega = 0,87$$

$$x = -3,10 \sin \omega t + 4,65 \cos \omega t - 8,25 \cos (0,87 \omega t) + 3,57 \sin (0,87 \omega t)$$





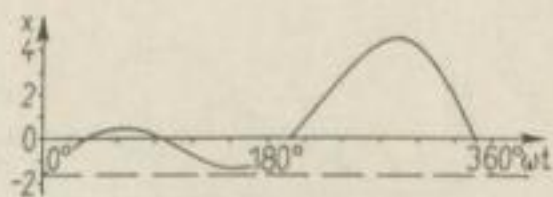
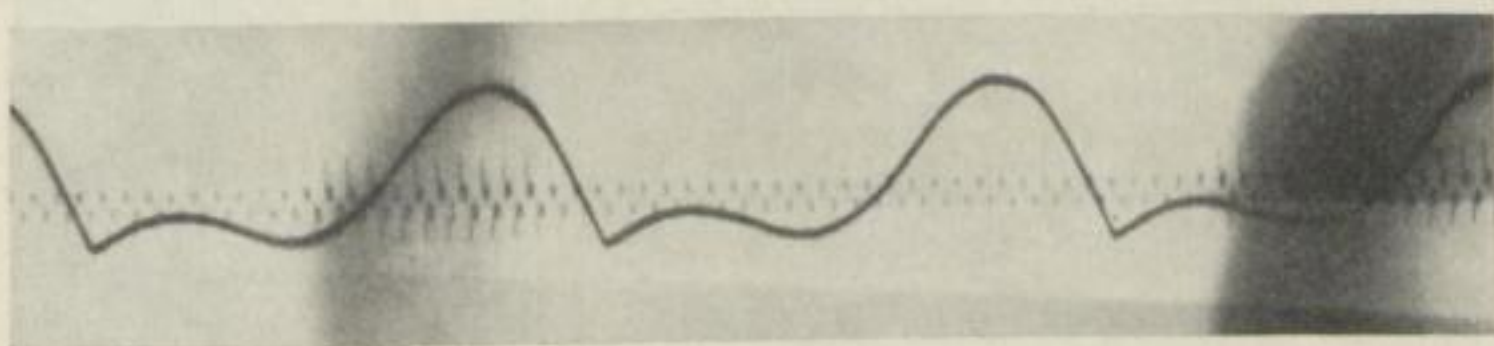
Oszillogramm 9

$$k = 0,42$$

$$e/r = 0,9$$

$$\omega_0/\omega = 1,41$$

$$x = -2,29 \sin \omega t - 2,77 \cos \omega t + 1,15 \cos (1,41 \omega t) + 3,98 \sin (1,41 \omega t)$$



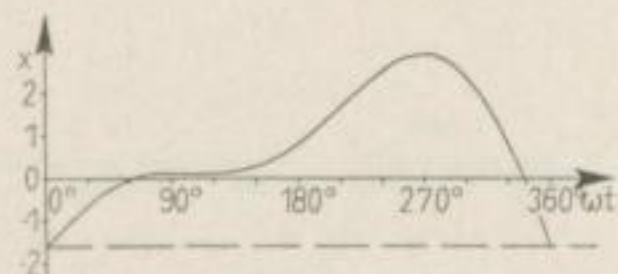
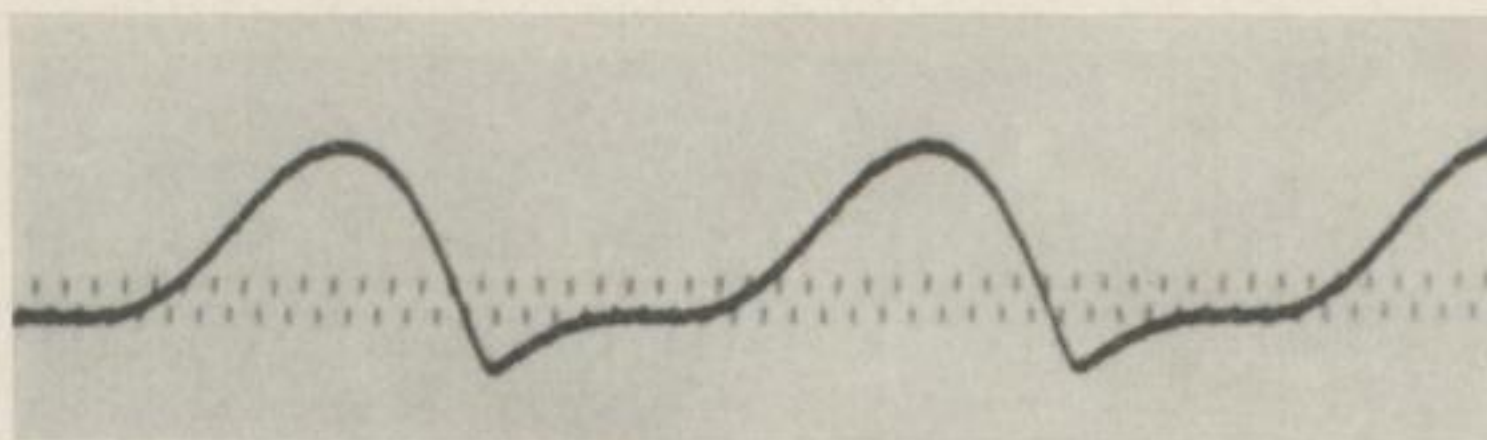
Oszillogramm 10

$$k = 0,42$$

$$e/r = 0,9$$

$$\omega_0/\omega = 1,37$$

$$x = -2,09 \sin \omega t - 3,22 \cos \omega t + 1,60 \cos (1,37 \omega t) + 3,75 \sin (1,37 \omega t)$$



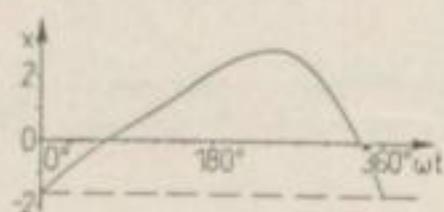
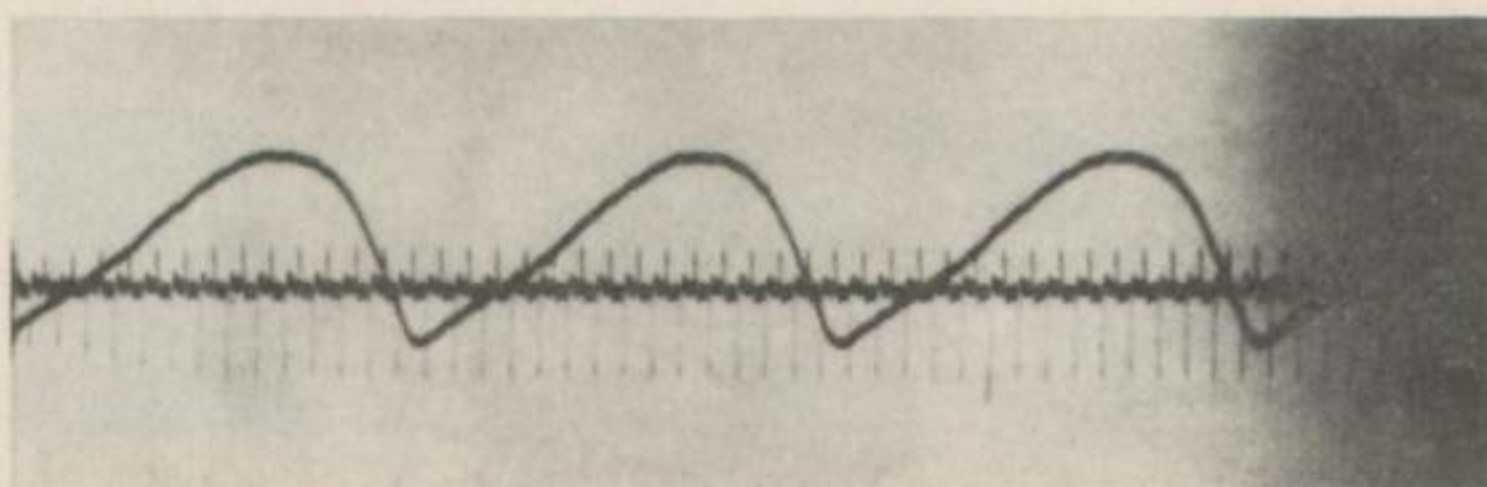
Oszillogramm 11

$$k = 0,42$$

$$e/r = 0,9$$

$$\omega_0/\omega = 1,18$$

$$x = -1,41 \sin \omega t - 6,19 \cos \omega t + 4,57 \cos (1,18 \omega t) + 2,92 \sin (1,18 \omega t)$$



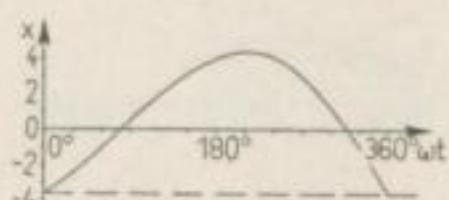
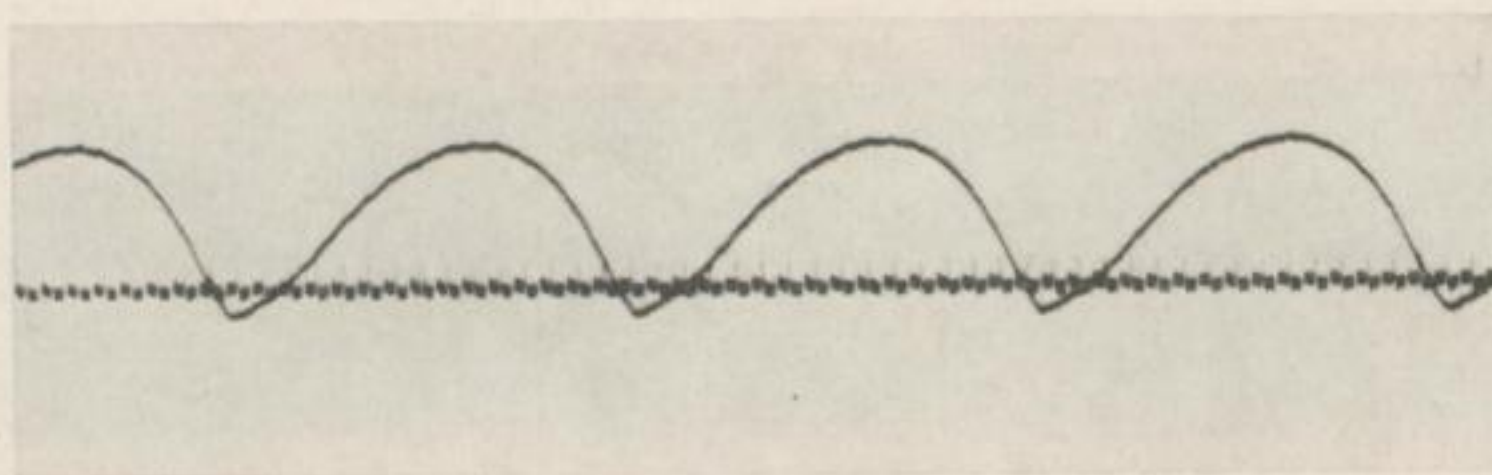
Oszillogramm 12

$$k = 0,42$$

$$e/r = 0,9$$

$$\omega_0/\omega = 0,9$$

$$x = -1,09 \sin \omega t + 7,59 \cos \omega t - 9,21 \cos (0,9 \omega t) + 2,99 \sin (0,9 \omega t)$$



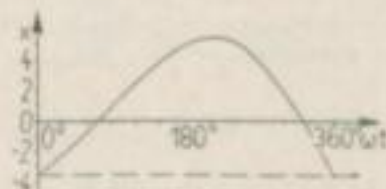
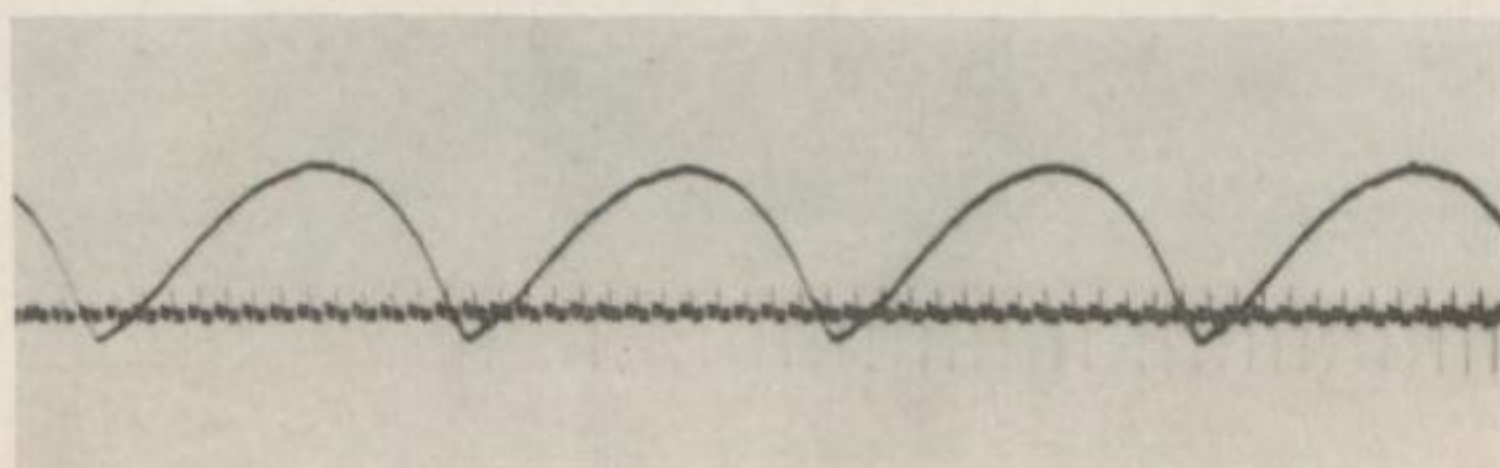
Oszillogramm 13

$$k = 0,42$$

$$e/r = 2,0$$

$$\omega_0/\omega = 0,93$$

$$x = -1,27 \sin \omega t + 11,43 \cos \omega t - 15,03 \cos (0,93 \omega t) + 3,36 \sin (0,93 \omega t)$$



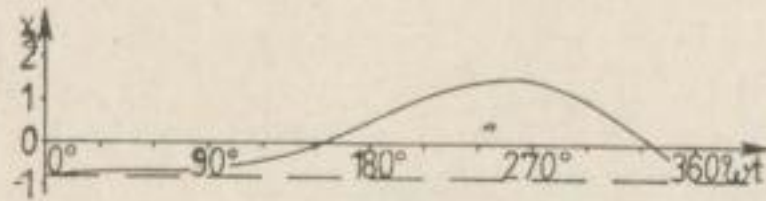
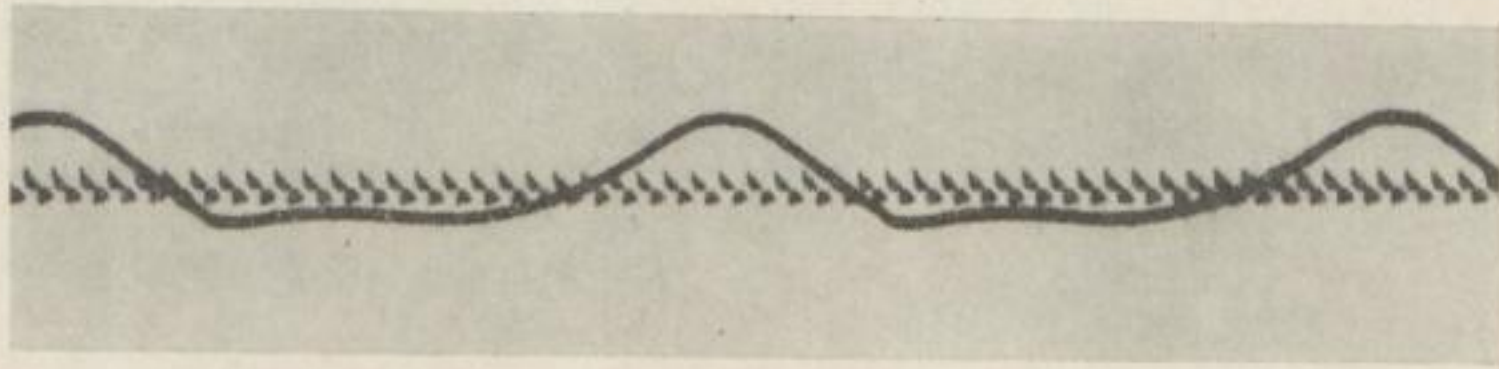
Oszillogramm 14

$$k = 0,42$$

$$e/r = 2,0$$

$$\omega_0/\omega = 0,81$$

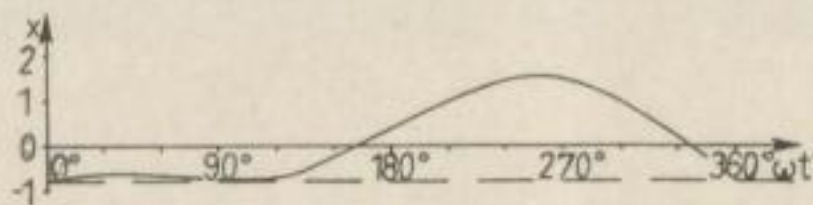
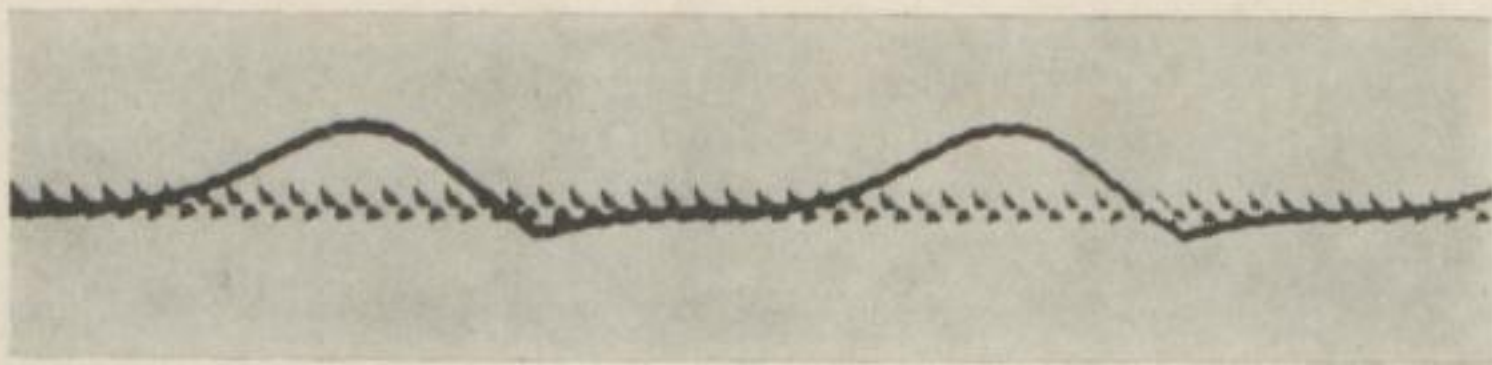
$$x = -1,50 \sin \omega t + 3,08 \cos \omega t - 6,68 \cos (0,81 \omega t) + 4,52 \sin (0,81 \omega t)$$



Oszillogramm 15

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1}; \quad \omega_0/\omega = 1,44$$

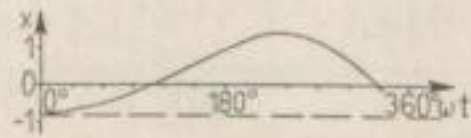
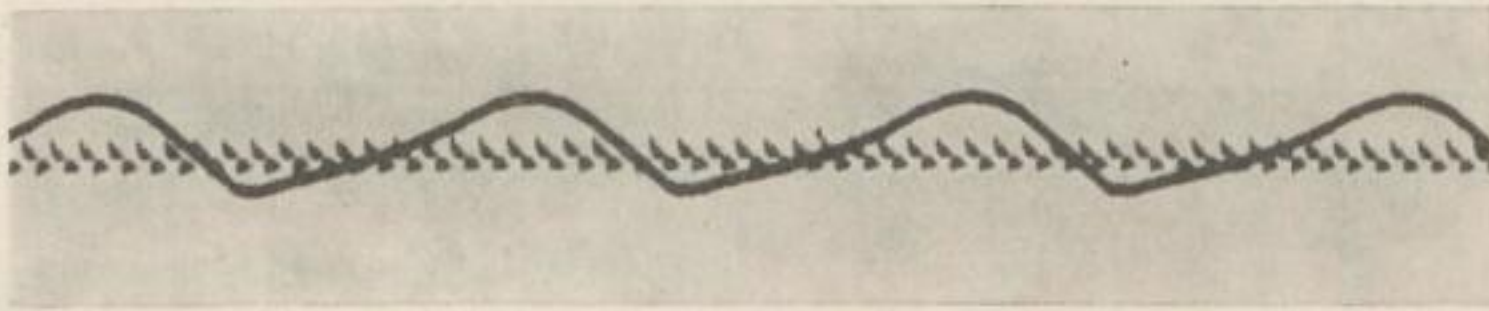
$$x = -1,32 \sin \omega t - 0,89 \cos \omega t + e^{-\varrho t} 0,08 \cos (1,44 \omega t) \\ + e^{-\varrho t} 1,16 \sin (1,44 \omega t)$$



Oszillogramm 16

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 1,23$$

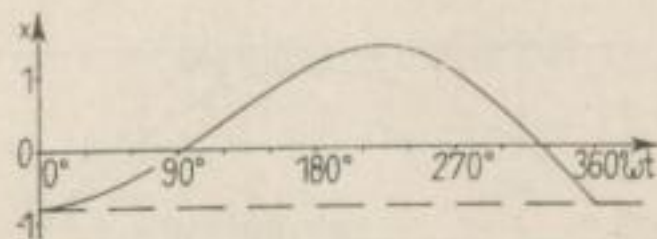
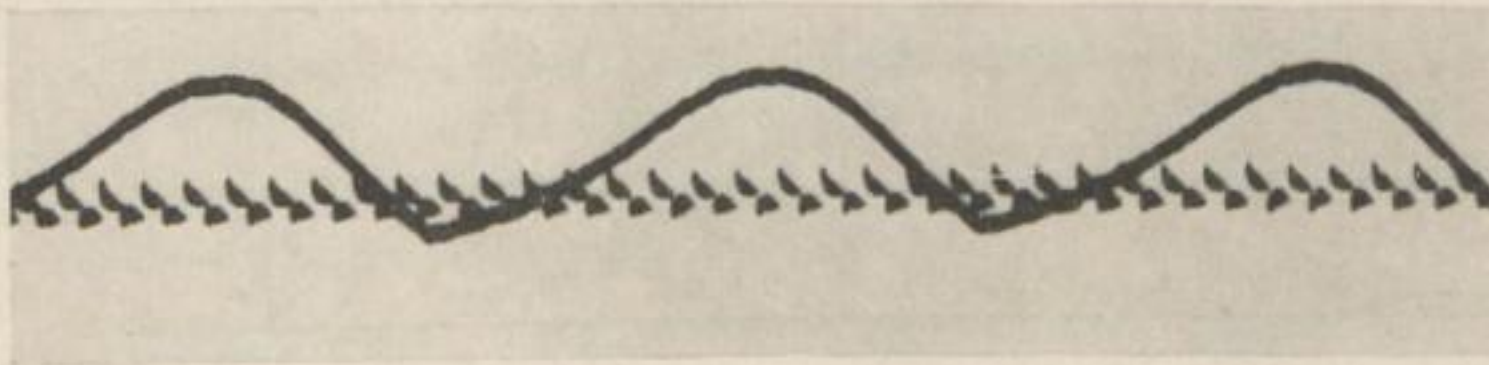
$$x = -1,63 \sin \omega t - 1,30 \cos \omega t + e^{-\varrho t} 0,49 \cos (1,23 \omega t) \\ + e^{-\varrho t} 1,70 \sin (1,23 \omega t)$$



Oszillogramm 17

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1}; \quad \omega_0/\omega = 0,9$$

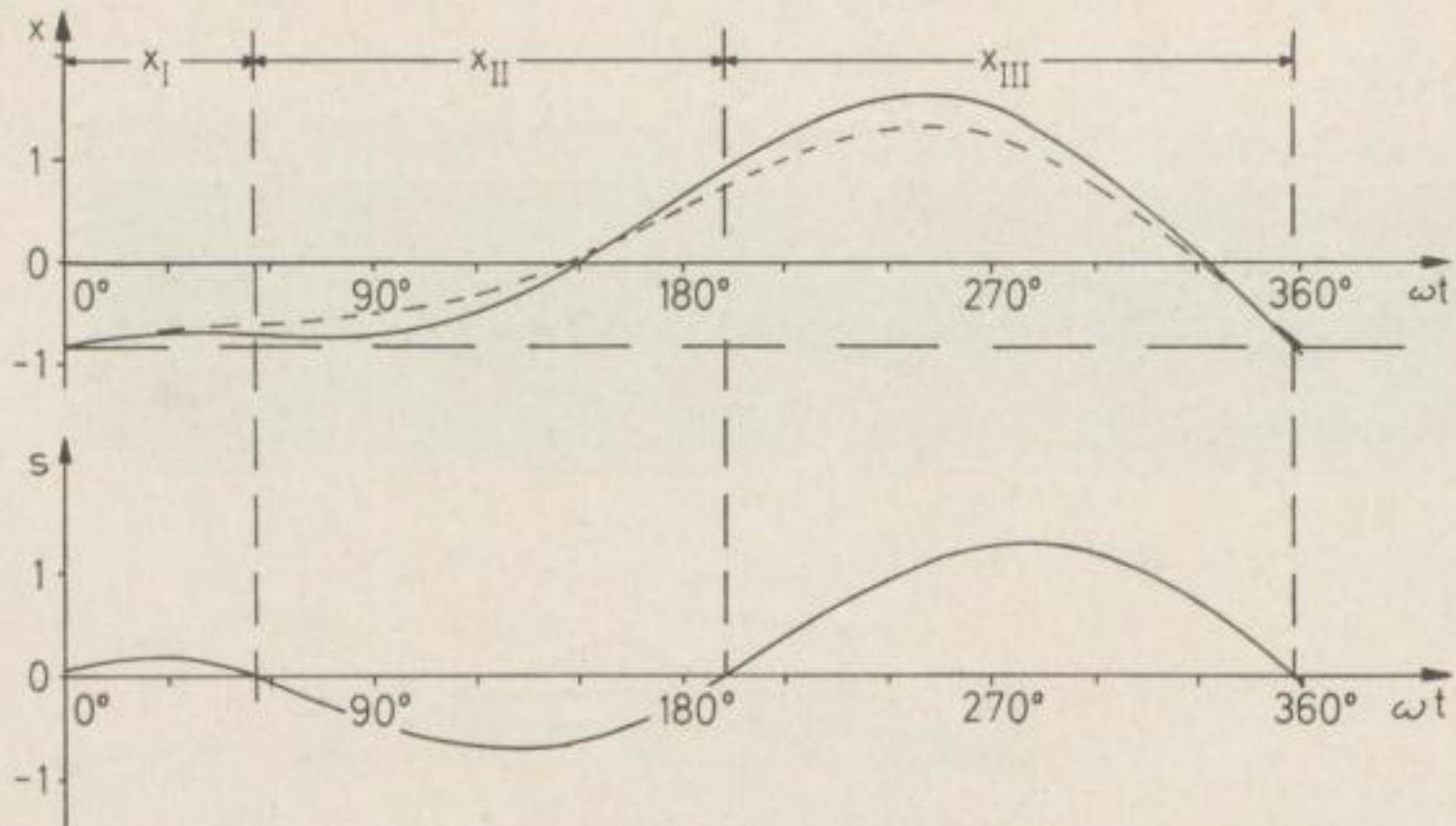
$$x = -2,08 \sin \omega t + 0,04 \cos \omega t - e^{-6t} 0,85 \cos (0,9 \omega t) + e^{-6t} 2,49 \sin (0,9 \omega t)$$



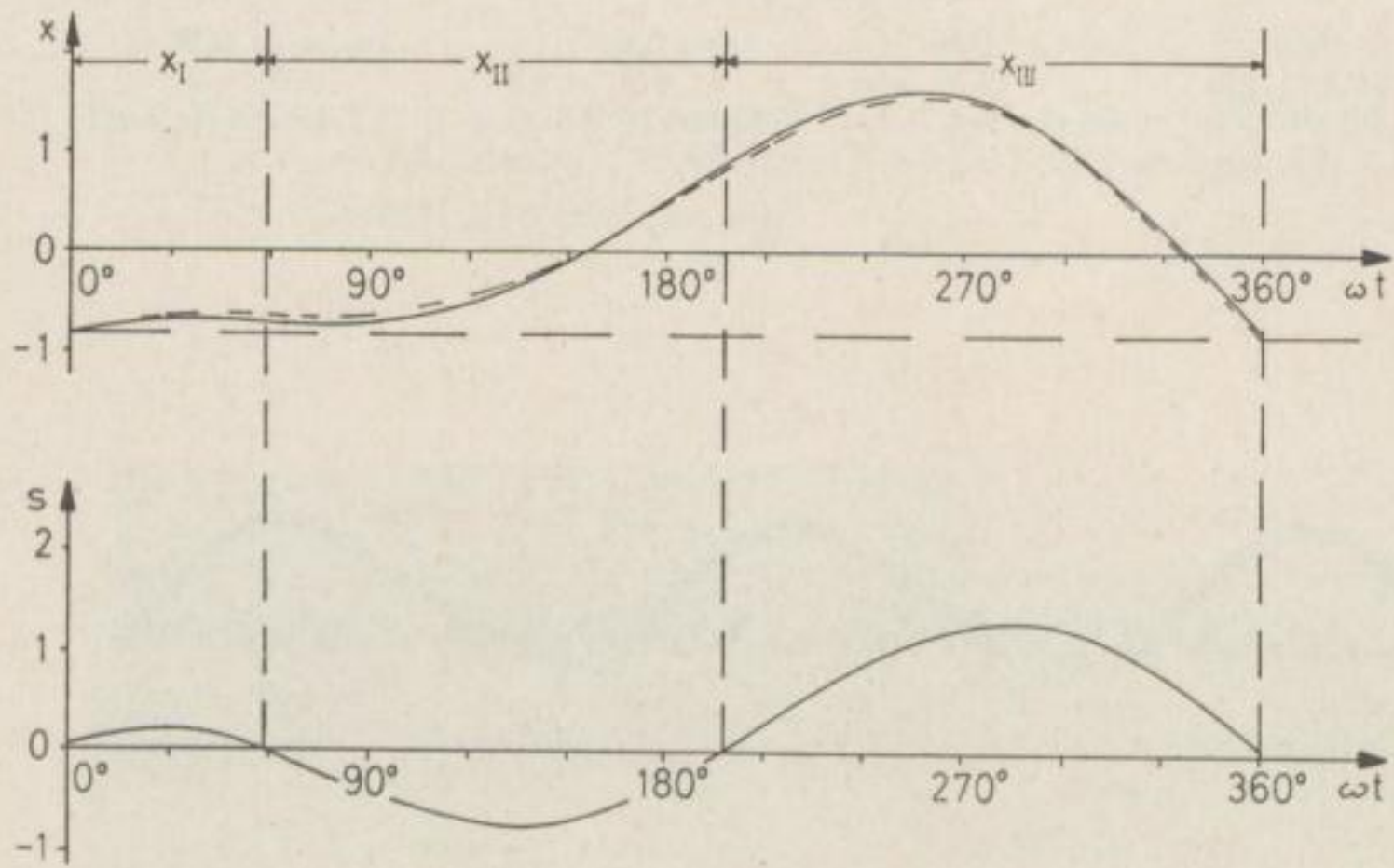
Oszillogramm 18

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 0,75$$

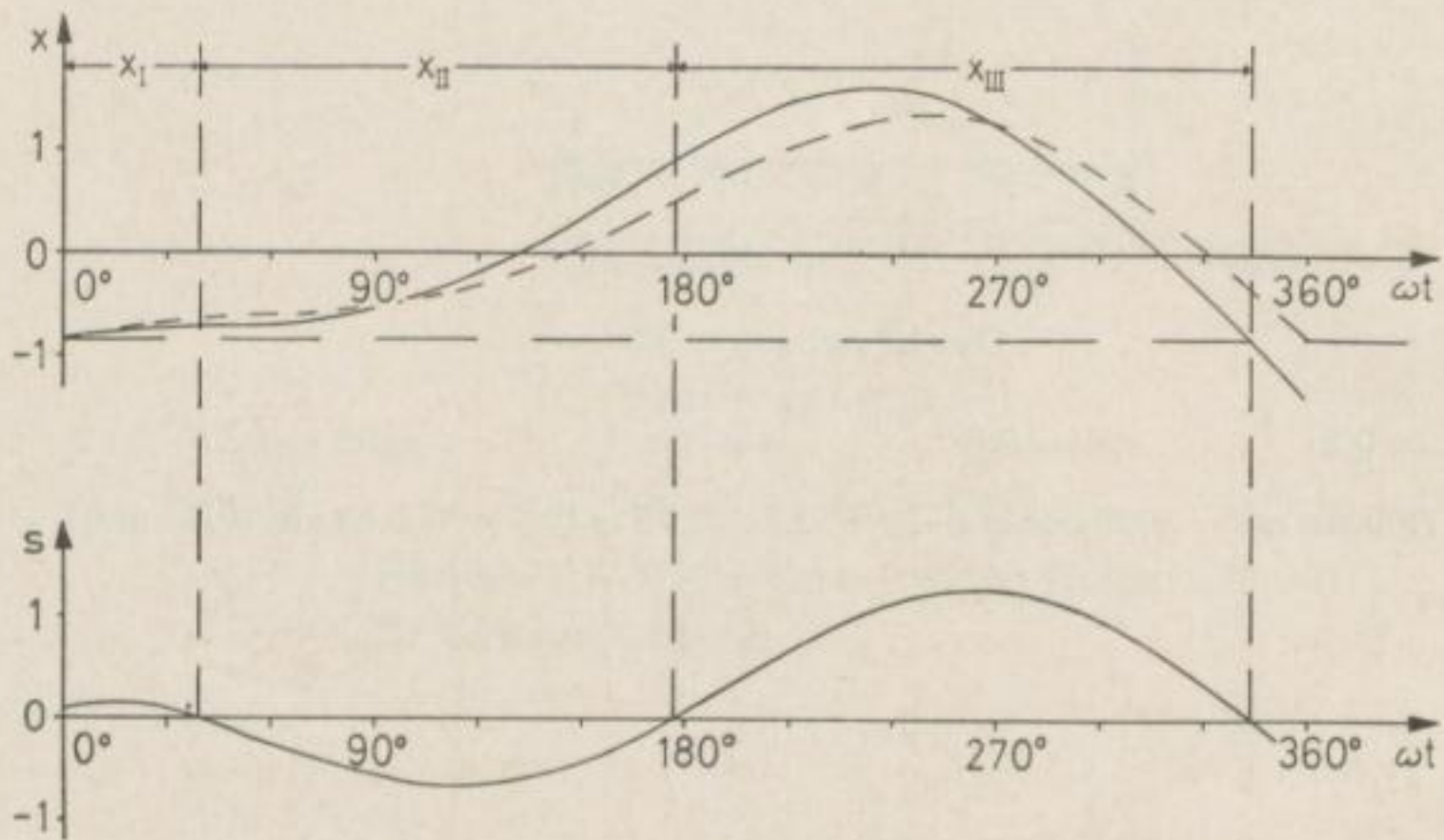
$$x = -1,00 \sin \omega t - 0,09 \cos \omega t - e^{-6t} 0,71 \cos (0,75 \omega t) + e^{-6t} 1,53 \sin (0,75 \omega t)$$



Oszillogramm
19



Oszillogramm
20



Oszillogramm
21

Oszillogramm 19

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad a_0 = 1,6 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 1,17$$

Lösung nach dem I. Näherungsverfahren:

$$x = -1,2083 \cdot \sin \omega t - 1,1421 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 0,3321 \cdot \cos 1,29 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 1,2210 \cdot \sin 1,29 \omega t.$$

Hieraus berechnete Approximationslösung:

$$x_{\text{I}} = -2,0486 \cdot \sin \omega t - 1,0918 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 0,4418 \cdot \cos 1,17 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 2,1115 \cdot \sin 1,17 \omega t - 0,16 \\ x_{\text{II}} = -2,0486 \cdot \sin \omega t - 1,0918 \cdot \cos \omega t + e^{-6(t-t_1)} \cdot 1,4345 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_1) \\ + e^{-6(t-t_1)} \cdot 0,3924 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_1) + 0,16 \\ x_{\text{III}} = -2,0486 \cdot \sin \omega t - 1,0918 \cdot \cos \omega t - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4645 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_2) \\ + e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,469 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_2) - 0,16$$

Oszillogramm 20

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad a_0 = 1,6 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 1,17$$

Lösung nach dem II. Näherungsverfahren:

$$x = -1,5984 \cdot \sin \omega t - 1,31 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 0,5 \cdot \cos 1,25 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 1,6562 \cdot \sin 1,25 \omega t.$$

Hieraus berechnete Approximationslösung:

$$x_{\text{I}} = -2,1206 \cdot \sin \omega t - 0,9441 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 2,2126 \cdot \sin 1,17 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 0,2941 \cdot \cos 1,17 \omega t - 0,16 \\ x_{\text{II}} = -2,1206 \cdot \sin \omega t - 0,9441 \cdot \cos \omega t + e^{-6(t-t_1)} \cdot 1,4669 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_1) \\ + e^{-6(t-t_1)} \cdot 0,3342 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_1) + 0,16 \\ x_{\text{III}} = -2,1206 \cdot \sin \omega t - 0,9441 \cdot \cos \omega t + e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4781 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_2) \\ - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4563 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_2) - 0,16$$

Oszillogramm 21

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad a_0 = 1,6 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 1,17$$

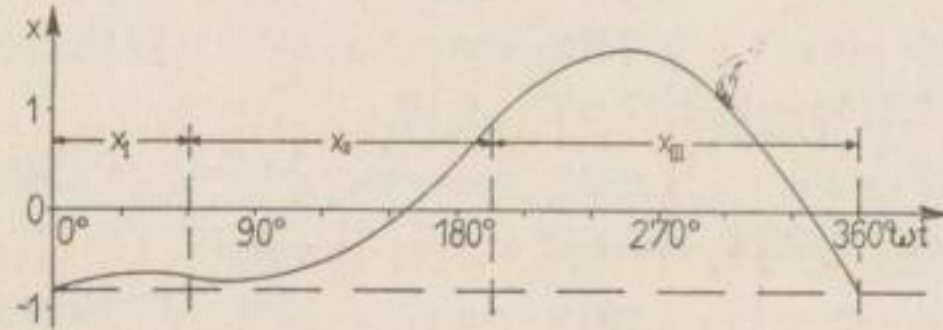
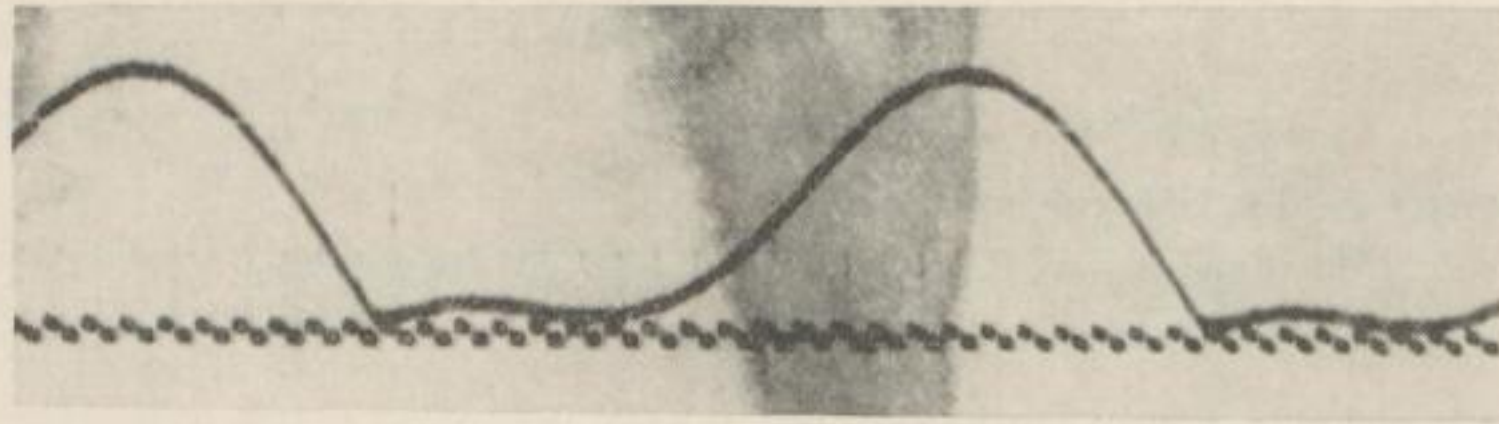
Lösung nach dem III. Näherungsverfahren:

$$x = -1,3164 \cdot \sin \omega t - 1,2218 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 0,4118 \cdot \cos 1,25 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 1,3640 \cdot \sin 1,25 \omega t.$$

Hieraus berechnete Approximationslösung:

$$x_{\text{I}} = -1,7016 \cdot \sin \omega t - 1,579 \cdot \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 0,929 \cdot \cos 1,17 \omega t \\ + e^{-6t} \cdot 1,897 \cdot \sin 1,17 \omega t - 0,16 \\ x_{\text{II}} = -1,7016 \cdot \sin \omega t - 1,579 \cdot \cos \omega t + e^{-6(t-t_1)} \cdot 1,4464 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_1) \\ + e^{-6(t-t_1)} \cdot 0,4908 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_1) + 0,16 \\ x_{\text{III}} = -1,7016 \cdot \sin \omega t - 1,579 \cdot \cos \omega t - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4299 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_2) \\ - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,5426 \cdot \sin 1,17 \omega (t - t_2) - 0,16$$





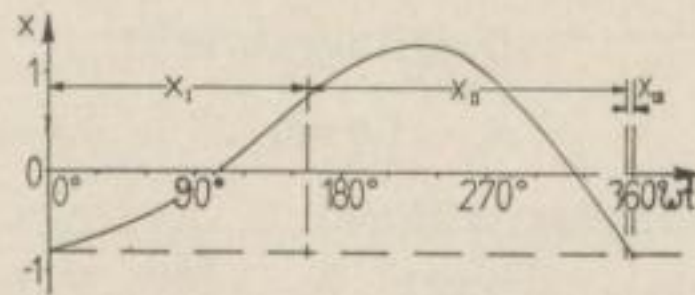
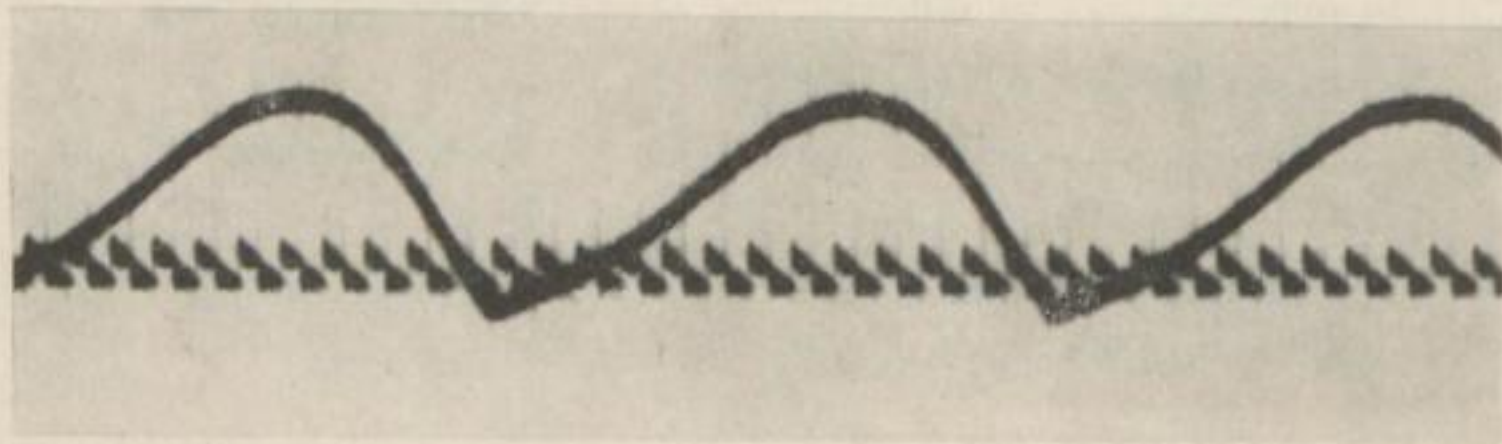
Oszillogramm 22

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad a_0 = 1,6 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 1,17$$

$$x_{\text{I}} = -2,1206 \sin \omega t - 0,9441 \cos \omega t + e^{-6t} \cdot 2,2126 \sin (1,17 \omega t) \\ + e^{-6t} \cdot 0,2941 \cos (1,17 \omega t) - 0,16$$

$$x_{\text{II}} = -2,1206 \sin \omega t - 0,9441 \cos \omega t + e^{-6(t-t_1)} \cdot 1,4669 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_1) \\ + e^{-6(t-t_1)} \cdot 0,3342 \sin 1,17 \omega (t - t_1) + 0,16$$

$$x_{\text{III}} = -2,1206 \sin \omega t - 0,9441 \cos \omega t - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4781 \cdot \cos 1,17 \omega (t - t_2) \\ - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,4563 \sin 1,17 \omega (t - t_2) - 0,16$$



Oszillogramm 23

$$k = 0,2 \quad e/r = 0,9 \quad a_0 = 1,6 \text{ mm} \quad \varrho = 6 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0/\omega = 0,8$$

$$x_{\text{I}} = -1,0134 \sin \omega t + 0,2905 \cos \omega t - e^{-6t} \cdot 1,2605 \cos 0,8 \omega t + \\ + e^{-6t} \cdot 1,4257 \sin 0,8 \omega t + 0,16$$

$$x_{\text{II}} = -1,0134 \sin \omega t + 0,2905 \cos \omega t + e^{-6(t-t_1)} \cdot 1,6445 \cdot \cos 0,8 \omega (t - t_1) \\ + e^{-6(t-t_1)} \cdot 0,1514 \sin 0,8 \omega (t - t_1) - 0,16$$

$$x_{\text{III}} = -1,0134 \sin \omega t + 0,2905 \cos \omega t - e^{-6(t-t_2)} \cdot 1,2546 \cdot \cos 0,8 \omega (t - t_2) \\ - e^{-6(t-t_2)} \cdot 0,5427 \sin 0,8 \omega (t - t_2) + 0,16$$

Im gleichen Verlag erscheinen:

Technologie und Chemie der Braunkohlenverwertung

Von einem AUTORENKOLLEKTIV

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. eh. ERICH RAMMLER
und Lehrbeauftragter Dipl.-Ing. H.-J. v. ALBERTI

624 Seiten mit 274 Bildern und 108 Tabellen – Format 16,5 × 23 cm
Kunstleder 54, – MDN

Die Braunkohle ist als wichtigster Energieträger und als Ausgangsstoff vieler Produkte der chemischen Industrie von besonderer Bedeutung für unsere Volkswirtschaft. Deshalb war es auf Grund der raschen Entwicklung, die sich in den vergangenen Jahren auf dem Gebiet der Braunkohlenveredlung vollzogen hat, notwendig, die hier vorliegende veraltete Fachliteratur durch ein neues Standardwerk zu ersetzen. In guter Zusammenarbeit mit namhaften Wissenschaftlern und Praktikern ist es den Herausgebern gelungen, nicht nur ein dringend benötigtes Fachbuch, sondern darüber hinaus ein unentbehrliches Nachschlagewerk zu schaffen, das den Leser über den derzeitigen Stand der Welttechnik unterrichtet.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE
Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

A 226

BRAUNKOHLENTAGEBAU

XIII. Berg- und Hüttenmännischer Tag

vom 24. bis 27. Mai 1961 in Freiberg

124 Seiten mit 51 Bildern und 24 Tabellen – Format 16,7 × 24 cm
Kartonierte 13,30 MDN

HÄRTIG: Ergebnisse und Erfahrungen mit der LKW-Förderung in Tagebaubetrieben jeder Art und auf Baustellen sowie ihre Anwendung auf die LKW-Nebenförderung in Braunkohlentagebauen – KOWNACKI: Beispiele einer vollständigen Mechanisierung der Gewinnungsarbeiten und der Aufbereitung des Rohstoffes sowie einer komplexen Ausnützung der Lagerstätte in der Baumaterialindustrie – VEB Geologische Erkundung Nord, Berlin: Probleme der Kulturbodenwirtschaft und der Wiedernutzbarmachung in der Niederlausitz. Eine bodenkundliche Lösung? – BALLMANN: Wirtschaftlichkeit des Massentransportes bei Zug- und Bandförderung im Abraumbetrieb der Braunkohlentagebaue – ECKELMANN: Technische, organisatorische und wirtschaftliche Fragen der Strossenendbeladung – KRASNIKOW: Probleme des Abbaus von Lagerstätten nutzbarer Mineralien mit kontinuierlich arbeitenden Tagebaugeräten.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

A 126

BERGBAUMASCHINEN

Förderband-Tagung im VEB Gummiwerk Ballenstedt

am 22. und 23. Mai 1958

126 Seiten mit 143 Bildern und 12 Tabellen

Format 16,7×24 cm · Kartoniert 14, – MDN

WESTPHAL: Stand und Entwicklung der Förderbandtechnik – KIENAST: Entwicklungstendenzen der Fördertechnik im Bergbau – LIEBERWIRTH: Kritische Betrachtung zur Berechnung von Förderbändern – FRENZEL/ROTHE: Betrachtungen zu den in Förderbändern auftretenden Zug- und Biegespannungen – BAHR: Neuere Erkenntnisse beim Antrieb von Förderbändern – BARTH: Das Verhalten der Textilien in der Kälte – NAUCK: Die Veränderung der Gebrauchseigenschaften von Gummi-Textil-Förderbändern im Bereich tiefer Temperaturen – STRZYZ: Das Förderband mit Perlongewebeeinlagen – BOBETH/KITTELMANN: Die Eignung von Chemiefaserstoffen als Einlagematerial für Förderbänder.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

A 179

BERGBAU

BERTHOLD PFEIFFER

Schnittkraft-Untersuchungen an Salzgesteinen im Hinblick auf eine zweckmäßige Gestaltung und Arbeitsweise von Schneidwerkzeugen an zerspanend arbeitenden Gewinnungsmaschinen

88 Seiten mit 42 Bildern und 20 Tabellen

Format 16,7 × 24 cm · Kartoniert 9,— MDN

Ausgehend von der Bedeutung, die der Kenntnis des Schnittkraftaufwandes für die maschinelle Gewinnung von Salzgestein beizumessen ist, wird das Wesen der Schnittkraft aus dem Zerspanungsvorgang heraus erläutert. Dabei werden die Vorgänge beim Zerspanen von Salzgestein und spröden Metallen als grundsätzlich gleichartig betrachtet. Nach Herausstellen der wesentlichen Einflußgrößen auf die Schnittkraft werden Methode und Durchführung von Schnittkraftmessungen im Laboratorium dargelegt, die zur Untersuchung der Abhängigkeit des Schnittkraftaufwandes von der Winkelgebung der Werkzeugschneiden, dem Spanquerschnitt und der Schnittgeschwindigkeit an verschiedenen Salzgesteinsarten dienen. Die Auswertung der Meßergebnisse erfolgt auf der allgemeinen Grundlage der spezifischen Schnittkraft, d. h. der auf die jeweilige Spanquerschnittsfläche bezogenen Schnittkraft und der „Spezifischen Spanstärke“, einer neuen Kennziffer zur Kennzeichnung der Spanquerschnittsform. Unter Heranziehung von Ergebnissen am anstehenden Gesteinsverband werden hinsichtlich der praktischen Bedeutung der Untersuchungen entsprechende Schlußfolgerungen gezogen.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

A 282

BRAUNKOHLENTAGEBAU

Vorträge des XIV. Berg- und Hüttenmännischen Tages

vom 13. bis 16. Juni 1962 in Freiberg

134 Seiten mit 75 Bildern und 14 Tabellen · Format 16,7 × 24 cm

Kartonierte 21,50 MDN

HÄRTIG: Betrachtungen über die Arbeitsweise und den zweckmäßigen Einsatz von Schaufelradbaggern – HOLLWEG: Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen zur Bandanlage Müheln – MATSCHAK/MESSENBRINK: Entwässerungstechnisch-hydrologische Verhältnisse und Kennziffern der Braunkohlenreviere – JOLAS: Hydromechanische Förderung – vorhandene Möglichkeiten und ihre Anwendung beim Vortrieb von Entwässerungstrecken – BUSCH: Geohydrologische und wasserwirtschaftliche Betrachtungen bei Entwässerungen von Braunkohlentagebauen.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

A 287

MARKSCHEIDEWESEN

HELMUT ROUTSCHEK

Ein Universaldarstellungsgerät und seine Anwendung im Bergbau

97 Seiten mit 77 Bildern und 3 Tabellen · Format 16,7 × 24 cm

Kartoniert 23,50 MDN

Der Autor beschreibt in der vorliegenden Arbeit das von ihm im Rahmen einer Dissertation entwickelte Universaldarstellungsgerät. Das Gerät ist nach dem Baukastenprinzip zusammengestellt. Es ermöglicht, nach geringen Umbauten zentral – und parallelperspektivische Bilder sowie Konstruktionen von Anaglyphenbildern und Flachrissen herzustellen. Des weiteren kann das Gerät für das andersmaßstäbliche Umzeichnen verwendet werden. Dieses Gerät, das bereits in der Fertigung ist, wird in allen Markscheidereien Verwendung finden, da es folgende wesentliche Vorteile hat: Vielfache Verwendungsmöglichkeit, einfache Bedienung – auch von Hilfskräften – und hohe Genauigkeit – auch markscheiderischen Ansprüchen genügend. Mit diesem Gerät spart man gegenüber der üblichen Handzeichnung im Durchschnitt 90% der Arbeitszeit ein.

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung, das Buchhaus Leipzig,

Leipzig C 1, Postfach 287, oder der Verlag entgegen

**VEB DEUTSCHER VERLAG FÜR GRUNDSTOFFINDUSTRIE
LEIPZIG**