II

Lehrbuch

der

Arithmetik und Geometrie.

Zum Gebrauche des Unterrichts
bey der academischen Bergschule
zu Freyberg

verfasset

von

Daniel Friedrich Hecht,
Bergschullehrer und Schichtmeister.

Erster Cursus,
enthaltend die gemeine Arithmetik.

Freyberg,
bey Craz und Gerlach.
1812.

Vorerinnerung.

Da gegenwärtiges Lehrbuch für die hiesige academische Bergschule nur bestimmt ist, und hierbey vorzüglich auf die Bedürfnisse derselben Rücksicht genommen werden mußte: so ist daher die Einrichtung dieses Buchs nur von diesem Gesichtspunkte aus zu beurtheilen.

Dieses Lehrbuch soll, wenn die künftigen Umstände eine Fortsetzung gestatten, aus zwey Abtheilungen bestehen, wo

die erste Abtheilung, die gemeine Arithmetik.

die zweyte Abtheilung, die Geometrie, und (ebene) Trigonometrie enthält, weil, nach der von mir gemachten Einrichtung bey dieser Schule, jede Abtheilung die Individuen jeder Klasse während eines Lehrcurses einzeln beschäfftiget.

Da diese Schule vorzüglich für die Bildung künftiger Steiger bestimmt ist, indem nur einzelne von den Schülern in der Folge auch die hiesige Berg-Academie beziehen, so ist die erste Abtheilung dieses Lehrbuchs auch nur auf solche Rechnungen, die einem Steiger etwa vorkommen, eingerichtet. Und eben so wird in der zweyten Abtheilung auch nur wieder auf erstre, jedoch aber auch auf die Subjecte Rücksicht genommen werden, welche etwas weiter fortgehen oder in der Folge mit Nutzen die weitern mathematischen Lehrvorträge bey der Academie hören wollen.

Beym Zusammenstellen der Sätze dieses Lehrbuchs habe ich aus Schellenbergs und Lempens

pens Rechenbuch, so wie aus Lorenzens Grundriß der reinen und angewandten Mathematik das geschöpft, was ich für meinen Zweck und nach meiner Erfahrung für nützlich und brauchbar hielt. Daß ich in der ersten Abtheilung dieses Lehrbuchs nichts von der Eintheilung der Mathematik ꝛc. gesagt habe, ist aus guten Gründen geschehen, indem ich dieses mit mehr Nutzen in der zweyten Abtheilung und beym Anfange des zweyten Lehrcursus vorausschicke, wo auch noch die weitern Lehren der Arithmetik vorgetragen werden.

Zum Schluß dieser ersten Abtheilung des Lehrbuchs habe ich die Freybergische Erztaxe um deswillen beygefügt, damit künftige Grubenvorsteher in vorkommenden Fällen ihre Erzlieferungen vorläufig selbst berechnen können, und habe daher aus diesem Grunde in der vierten Classe dieser Erztaxe der leichtern Rechnung halber die verschiednen Posten für einen Centner angeschlagen, da in der schon vorhandnen Erztaxe in dieser Classe der Anschlag auf jedes Loth Silber-Gehalt gemacht ist, wodurch die Rechnung immer sehr aufgehalten wird.

Freyberg, im Monat October 1812.

D. Fr. Hecht.

Inhalt.

Anzeige zur Berichtigung.

Seite 1	Zeile 5 v. ob.	steht	Grundleheen	statt	Grundlehren
„ 21	„ 1 v. unt.	„	181492	„	181692
	„ 2 v. u.	„	17204	„	17304
„ 27	sind die Beyspiele zur Uebung, statt alle durch 8, der Ordnung nach durch 8, 6, 4, 5, 7 zu dividiren.				
„ 28	Zeile 2 v. ob.	steht	1461392	statt	1461394
„ 30	„ 14 v. ob.	„	1878 1870	„	1850 1850
	„ 17 v. ob.	„	9	„	8
	„ 26 v. ob.	„	43	„	23
„ 32	„ 3 u. 4 v. ob.	„	Nullen	„	Ziffern
„ 35	„ 5 v. u.	„	$\frac{15}{45}$	„	$\frac{15}{20}$
„ 47	„ 1 v. u.	„	$\frac{11}{88}$	„	$\frac{11}{63}$
„ 48	„ 9 v. u.	„	$16\frac{25}{32}$	„	$26\frac{25}{32}$
„ 58	„ 4 v. u.	„	0,623	„	0,625
„ 63	„ 10 v. ob.	„	2 gr.	„	7 gr.
	„ 2 v. u.	„	16 Loth	„	15 Loth
	„ 6 v. u.	„	45 Lachter	„	54 Lachter
„ 65	„ 12 v. u.	„	verbrauchten	„	verkauften
„ 75	„ 3 v. ob.	„	2 pf.	„	2 gr.
	„ 6 v. ob.	„	3 pf.	„	3 gr.
„ 78	„ 12 v. ob.	„	2 : 15	„	2 : 8
„ 79	„ 4 v. ob.	„	mittlern.	„	mittlern gleich.
	„ 18 v. ob.	„	6 : 4	„	6 · 4
„ 80	„ 2 v. ob.	„	3 · 4	„	3 · 8
„ 82	„ 6 v. ob.	„	$\frac{15}{8}$	„	$\frac{15}{8}$
	„ 23 v. ob.	„	$\frac{3}{4} : 3$	„	$\frac{0}{4} : 5$
	„ 24 v. ob.	„	$\frac{3 : 4}{3}$	„	$\frac{3 \cdot 4}{3}$
	„ 27 v. ob.	„	14 : x	„	16 : x
„ 84	„ 11 v. u.	„	7 Lachter	„	14 Lachter
„ 95	„ 5 v. u.	„	34 Fuhren?	„	34 Tonnen?
„ 107	„ 1 v. ob.	„	36 Thlr.	„	35 Thlr.
„ 115	„ 10 v. ob.	„	8 Grubenarbeiter	„	8 Gezeugarbeiter
„ 120	„ 3 u. 5 v. u.	„	Förste	„	Strosse

Erster Abschnitt.

Von den gemeinen Rechnungsarten.

Erstes Kapitel.

Grundlehren von der Natur der ganzen Zahlen und von ihrer Bezeichnung.

§. 1.

Dinge von einerley Art sind solche, an denen man blos dasjenige betrachtet, was sie mit einander gemein haben.

Anmerkung. So sind z. B. sechs Bergeisen und vier Bergeisen Dinge von einerley Art.

§. 2.

Die Menge der Dinge von einerley Art ist eine (ganze) Zahl.

Nimmt man Dinge von gleicher Art nach und nach zusammen, um deren Menge mit Worten bestimmt anzuzeigen, so zählet man.

§. 3.

Nur Dinge von einerley Art lassen sich zusammen zählen, oder können eine Zahl ausmachen (§. 2.).

Anmerk. Dinge von verschiedener Art müssen, wenn sie gezählt werden sollen, unter eine allgemeine Benennung gebracht werden, denn ungleichartige Dinge lassen sich nicht zählen. So sind z. B. 6 Kübel und 3 Tonnen weder 9 Kübel noch 9 Tonnen, wohl aber 9 Stück Fördergefäße.

§. 4.

Das, worin Dinge, welche zusammengezählt werden, übereinstimmen, heißt Eins oder die Einheit.

Jede (ganze) Zahl enthält daher eine gewisse Menge von Einheiten.

Anm. 1. Da man beym Zählen immer mit Eins anfangen muß, so kann die Eins auch eine Zahl heißen, weil sie die Einheit einmal zählt, d. i. anzeigt, daß das Ding nur einmal vorhanden ist. Denn eine Zahl bestimmt, wie viel Einheiten oder Dinge von einerley Art beysammen sind.

Die Wahl der Einheiten ist verschieden. Ein jeder wählt sie nach seinen Absichten, z. B. der Bergmann hat bey Ausmessung der Längen zur Einheit Lachter. Eine Menge Tonnen haben zur Einheit die Tonne. Eine Tonne enthält aber wieder eine gewisse Anzahl Kübel, und dann ist der Kübel die Einheit.

Anm. 2. Eine Zahl, welche mehr übereinstimmende Einheiten enthält, als eine andre, ist größer. Und Zahlen, welche eine gleich große Menge von Einheiten enthalten, sind gleich groß.

Anm. 3. Die Zahlen theilt man in ganze und gebrochene, benannte und unbenannte.

§. 5.

Die Arithmetik oder Rechnenkunst ist nun die Wissenschaft der Zahlen und des Rechnens, oder sie untersucht die Natur der Zahlen, und lehrt die darauf gegründeten Veränderungen, welche mit den Zahlen vorgenommen werden können.

§. 6.

Im gemeinen Leben zählt man von Eins fort bis zehn, nämlich: Eins, zwey, drey, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn. Und so heißen auch die hierdurch entstehenden ersten zehn Zahlen.

Um nun aber große Zahlen bequem auszudrücken, so erwählt man Einheiten von steigenden Klassen, deren eine immer zehnmal mehr enthält als die andere, so daß zehn Einheiten in einer Klasse (bis zu einer gewissen Grenze), nur eine in der nächst folgenden ausmachen.

Die Menge der Einheiten einer Klasse bezeichnet man durch die bekannten arabischen Ziffern, als Zeichen der Zahlen:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Eins,	Zwey,	Drey,	Vier,	Fünf,	Sechs,	Sieben,	Acht,	Neun,

§. 7.

Um aber zu erkennen, zu welcher Klasse diese bezeichneten Einheiten gehören: so eignet man den Einheiten der ersten Klasse den Namen der Einer zu; den Einheiten der zweyten den Namen, Zehner; der dritten, Hunderter; der vierten, Tausender; der fünften Zehntausender; der sechsten Hunderttausender. Auf diese

Art enthält also nach vorigen §. ein Zehner zehn Einer; ein Hunderter zehn Zehner oder hundert Einer; ein Tausender zehn Hunderter, oder hundert Zehner oder tausend Einer ꝛc.

Ein tausend mal tausend aber nennt man eine Million; tausend mal tausend Millionen eine Billion; tausend mal tausend Billionen eine Trillion u. s. w.

§. 8.

Die Klasse oder den Werth der Einheiten (§. 6.) bezeichnet man durch die Stelle, welche eine der obigen Ziffern von der rechten Hand gegen die linke, in derjenigen Ordnung einnimmt, in welcher die Klassen der Einheiten auf einander folgen; so daß man also diese Stellen durch die neben einander stehenden Ziffern bestimmt, und in diejenigen Stellen, wo keine Ziffer stehen soll, das Nullzeichen (0) setzt.

Zusatz. Demnach bedeutet die erste Ziffer von der rechten gegen die linke Hand die Einer, die zweyte aber die Zehner, die dritte die Hunderte u. s. w. So bedeutet also z. B. die Ziffer 6 allein gesetzt, 6 Einer, aber 60, sechs Zehner, 600 sechs Hunderte.

Oder in der Zahl 6539724 bedeutet 4 vier Einer; 2 zwey Zehner, 7 sieben Hunderte, 9 neun Tausende, 3 drey Zehntausende, 5 fünfhundert Tausende, 6 sechs Tausendtausende, oder sechs Millionen.

Ferner in der Zahl 8005 bedeutet 5 fünf Einer, und 8 acht Tausende; die beyden Nullen dazwischen aber bedeuten, daß keine Zehner und Hunderte vorhanden sind, und geben der Ziffer 8, welche durch sie die vierte Stelle erhält, den Werth der Tausende.

§. 9.

Aufgabe. Jede mit Ziffern geschriebene Zahl mit Worten auszusprechen.

Auf-

Auflösung. I. Sind höchstens drey Ziffern beysammen; Einer, Zehner, Hunderte: so erfordert der Sprachgebrauch

1) daß man den Namen **Einer** weglasse, und blos sage: Eins, Zwey, Drey u. s. w.

2) daß man, anstatt Eins, Zwey, Drey Zehner sage: Zehn, Zwanzig, Dreysig, u. s. w.

3) daß man die Einer vor den Zehnern ausspreche, also z. E. bey 24 anstatt zwanzig und vier sage: vier und zwanzig.

Bey einzeln Zehnern läßt man das Wörtchen und weg, so daß man z. E. bey 11, 12, 13 rc. anstatt ein und zehn, zwey und zehn, drey und zehn sage: einzehn, zweyzehn, dreyzehn, jedoch anstatt einzehn, zweyzehn sage, eilf, zwölf.

4) daß man die Hunderte vor den Einern und Zehnern nenne, z. E. 548, fünf hundert acht und vierzig; 719, sieben hundert und neunzehn.

II. Sind über drey bis höchstens sechs Ziffern beysammen: so mache man von der rechten zur linken Hand zwey Abtheilungen, jede zu drey Ziffern. Wenn auch die zweyte Abtheilung zur linken nur eine oder zwey Ziffern erhält: so spreche jede dieser zwey Abtheilungen nach Aufllösung I. aus, und gebe der zweyten zur Linken den Namen der Tausende. Z. E. 4|253, vier Tausend, zwey Hundert drey und funfzig; 24|945, vier und zwanzig Tausend, neun Hundert fünf und vierzig; 345|072, drey hundert fünf und vierzig Tausend, zwey und siebenzig.

III. Sind mehr als sechs Ziffern beysammen, so viel ihrer auch seyn mögen: so mache man von der Rechten zur Linken Abtheilungen zu sechs Ziffern, wenn auch die letzte Abtheilung weniger erhält; spreche jede derselben nach Auflös. II. aus, und gebe der zweyten, dritten, vierten u. s. w. Abtheilung den Namen, Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. z. E.

‴	″	′		
8	209784	321785	234264	sind
Trillionen,	Billionen,	Millionen,	Einer;	

acht Trillionen, zwey hundert und neun Tausend sieben hundert vier und achtzig Billionen, drey hundert ein und zwanzig Tausend sieben hundert fünf und achtzig Millionen, zwey hundert vier und dreysig Tausend zwey hundert vier und sechzig.

§. 10.

Aufgabe. Jede gegebene Zahl recht zu schreiben.

Auflösung. Man bestimme, nach der Größe der aufgegebenen Zahl und der größten darin enthaltnen Einheit, die erforderlichen Klassen, und die Stellen in selbigen durch Punkte; die Millionen, Billionen ꝛc. bemerke man durch einem, zwey ꝛc. Striche, wie in vorigen, und setze sodann die Ziffern nach ihrem Werthe in ihre gehörigen Stellen, und fülle die mangelnden mit einer Null aus. Z. E. Wie schreibt man

ein tausend zwey hundert und zwölf Billionen, fünf hundert sieben und sechzig tausend acht hundert sechs und neunzig Millionen, drey hundert

dert fünf und vierzig tausend sechs hundert acht und siebenzig.

''	'	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
1212	567896	345678.

§. 11.

Die Art bis zehn zu zählen, heißt die Dekadik oder das Decimalsystem; die also abgetheilten Zahlen heißen Decimalzahlen. Die Art, jede Zahl nach einem gewissen System zu bezeichnen und auszusprechen, heißt das Numeriren, oder die Numeration.

Anmerk. Die Römer bedienten sich folgender Zahlzeichen, deren wir uns auch noch in manchen Fällen bedienen, als:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	X.	L.	C.	D.	M.
Eins,	Zwey,	Drey,	Vier,	Fünf,	Sechs,	Zehn,	Funfzig,	Hundert,	Fünfhundert,	Tausend.

und so wird folgende, mit Römischen Ziffern geschriebene Zahl ausgesprochen:

MDCCCXIII.

Ein tausend, acht hundert und dreyzehn.

Zweytes Kapitel.

Die gemeinen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

§. 12.

Jede Zahl läßt sich vermehren und vermindern, und beydes kann auf doppelte Art geschehen. Das Vermehren oder Vergrößern einer Zahl geschieht

schieht entweder, wenn zu einer Zahl eine oder mehrere andere hinzugesetzt werden, z. B. 6 und 2 ist 8 und 4 dazu ist 12; oder wenn eine und eben dieselbe Zahl mehreremal hinzugesetzt wird, z. B. 6 und 6 ist 12 und 6 dazu ist 18; dafür sagt man kürzer, 3 mal 6 ist 18. Jenes heißt die **Addition** oder das Zusammenzählen; dieses die **Multiplication** oder das Vermehren.

Das **Vermindern** einer Zahl geschiehet, entweder wenn von einer Zahl eine kleinere Zahl einmal weggenommen wird; z. B. 6 von 15 bleibt 9; oder wenn eine kleinere Zahl zu wiederholtenmalen von einer größern weggenommen wird; z. B. 6 von 18 bleibt 12, und 6 von 12 bleibt 6, und 6 von 6 bleibt 0; wo man sich kürzer ausdrückt: 6 ist in 18 dreimal enthalten, oder wenn sich 6 in 18 theilen, so erhält jeder 3. Das erstere heißt die **Subtraktion** oder das Abziehen, das letztere die **Division** oder das Theilen.

Aus dem Vermehren und Vermindern der Zahlen entstehen demnach die vier Rechnungsarten der Arithmetik, nämlich das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren.

§. 13.

Die allgemein angenommenen arithmetischen Zeichen, durch welche man die verschiednen Rechnungsarten kurz ausdrückt, sind folgende:

das Zeichen der Addition ist (+), welches durch Plus oder und ausgesprochen wird.
" " der Subtraktion ist (—), welches minus oder weniger gelesen wird.

das

das Zeichen der Multiplikation (· oder ×), welches mal ausgesprochen wird.

" " der Division ist (:), welches dividirt durch gelesen werden kann.

" " der Gleichheit zweyer Zahlen oder Dinge ist (=), welches durch gleich ausgedrückt wird. Z. E.

$3+4=7$, d. h. 3 und 4 ist gleich 7.
$9-3=6$, d. h. 9 weniger 3 ist gleich 6.
5×7 oder
$5\cdot 7\cdot=35$ d. h. 5 mal 7 ist gleich 35.
$32:4$ oder auch
$\frac{32}{4}=8$ d. h. 32 dividirt durch 4 ist $=8$.

I. Addition.

§. 14.

Die Addition lehrt: aus gegebnen Zahlen, welche man die zu summirenden Zahlen nennt, eine andre finden, die allen gegebnen zusammen genommen gleich ist. Diese neue Zahl wird die Summe genannt.

§. 15.

Aufgabe. Ganze Zahlen zu addiren.

Auflösung I. Man schreibe die gegebnen Zahlen so, daß die Ziffern von einerley Ordnung in einer Reihe unter einander stehen, nämlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w.

II. Man zähle die Ziffern in jeder Reihe, von der Rechten an, zusammen (§. 3.), setze die nie-

drig-

drigste Ziffer der Summe unter diese Reihe, und zähle die höhern Ziffern mit zu den Reihen zur Linken.

z. B. Es sollen folgende Zahlen addirt werden, 78945 + 59723 + 2540 + 391, so stehen sie so unter einander:

78945
59723
2540
391
141599 Summa.

Erklärung. Nachdem man unter die zu summirenden Zahlen einen Strich gezogen, so zähle man alle Einer zusammen, und bemerke, wie viel etwa selbige Zehner mit enthalten. Hier z. B. betragen sämmtliche Einer 9, welche man unter die Einer setzt. Die sämmtlichen Zehner machen 19 oder 1 Hunderter und 9 Zehner (§. 8. Zus.), wo also die 9 Zehner unter die Zehner gesetzt, der 1 Hunderter aber zu den folgenden Hunderten mit gezählt wird, welche nun 25 Hunderter, oder 2 Tausender und 5 Hunderter betragen, wo also die 5 Hunderter unter die Hundert zu stehen kommen, und die 2 Tausender zu den übrigen Tausendern mit gezählt werden, und so fährt man bis zu Ende fort, wo man alsdann die Summe aller Zahlen erhält.

Anmerk. Die beste Probe der Addition ist, daß man das Beyspiel oder Exempel zweymal, einmal von unten hinauf, und einmal von oben herunter addirt; stimmen die Summen zusammen, so ist die Rechnung richtig.

Bey-

Beyspiele zur Uebung.

1)	2)	3)	4)
9760	87150	98735	987300942
7804	68319	4037	732116249
3675	46731	124987	90027998
1436	9228	739	821319724
8244	7893	5209	912342099
5869	14908	62429	55231120

5)	6)
4329987092	7930429873542009
739879219	....5173299087ll
5009279	...5329907231072
9872114999	..1399732119732l
732149899	.5321724821l4999
54987309	9217321432103219

7) Bey einer Grube hat man geliefert im

1sten Lohntag	1209	Thlr.
2ten =	1301	Thlr.
3ten =	967	Thlr.
4ten =	1038	Thlr.
5ten =	1192	Thlr.
6ten =	1503	Thlr.

Wie viel hat man in diesem Quartal geliefert?

8) Die Kosten sind bey einer Grube gewesen:

in No. 1 und 2ter Woche	1034	Thlr.
= 3 = 4ter =	925	Thlr.
= 5 = 6ter =	1012	Thlr.
= 7 = 8ter =	1102	Thlr.
= 9 = 10ter =	899	Thlr.
= 11 = 12ter =	735	Thlr.
13ter =	407	Thlr.
und die Nebenausgaben	236	Thlr.

Wie

Wie viel beträgt die ganze Ausgabe in diesem Quartal?

II. Subtraction.

§. 16.

Die Subtraction lehrt: aus zwey gegebnen Zahlen eine dritte finden, welche anzeigt, um wie viel Einheiten die eine von den gegebnen Zahlen größer ist, als die andere. Diese gefundne Zahl heißt der Rest, der **Unterschied** oder die Differenz.

Die Zahl, von welcher abgezogen wird, heißt der Minuendus; welche abzieht der Subtrahendus.

§. 17.

Aufgabe. Ganze Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, und zwar eben so wie bey der Addition (§. 15. I.).

II. In jeder Reihe von der Rechten an nehme man die Ziffern des Subtrahendus von der darüber stehenden Ziffer des Minuendus hinweg, und setze den Rest unter solche Reihe.

III. Ist im Minuendus eine Ziffer so groß, wie die darunter stehende: so setze man eine Null unter solche Reihe.

IV. Ist im Minuend eine Ziffer kleiner, als die darunter stehende: so setze man zu ihr Zehn in Gedanken; und vermindre dafür die nächstfolgende Ziffer

Ziffer im Minuend um Eins, welches mit einem Punkt bemerkt wird, und gemeiniglich borgen heißt.

V. Fallen Nullen zwischen die Ziffer, welche borgt, und von welcher geborgt wird: so setze man in Gedanken die Ziffer 9 für jede der Zwischen-Nullen.

Z. B. Es soll von der Zahl 906295 die Zahl 527493 abgezogen werden, so steht das Beyspiel also:

906295	Minuendus
527493	Subtrahendus
378802	Rest.

Erklär. Denn von 5 Einern 3 Einer weggenommen bleiben 2 Einer, und von 9 Zehnern 9 Zehner weggenommen, bleibt nichts. Von 2 Hunderten können aber nicht 4 Hunderte weggenommen werden, wenn man nicht von den nächststehenden 6 Tausendern einen Tausender oder 10 Hunderter borgt, wodurch man nun 12 Hunderter erhält, und von solchen nun 4 Hunderter wegnehmen kann; daher 8 Hunderter übrig bleiben. Da man nun von den 6 Tausendern einen schon weggenommen hat, also nur noch 5 Tausender übrig bleiben, von welchen man aber nun auch nicht 7 Tausender wegnehmen kann: so muß man nun ein Zehntausendes oder 10 Tausender von den 90 Zehntausendern borgen, welche Tausender man nun zu den 5 Tausendern wieder hinzusetzt, also 15 Tausender nun erhält, wovon man nun die 7 Tausender hinwegnehmen kann, und daher 8 Tau-

sen-

sender verbleiben. Weil von den 90 Zehntausendern nun ein Zehntausender wieder weg ist, also nur noch 89 Zehntausender, oder 8 Hundert-Tausender und 9 Zehntausender sind: so kann man nun von den 9 Zehntausendern 2 Zehntausender, oder von 9 die 2 wegnehmen, bleiben 7, und von der um 1 verminderten 9, d. i. 8 die 5 abziehen, bleiben 3.

Anmerk. Folgen im Minuendus mehrere Nullen neben einander, und man sollte gleich bey der ersten Null borgen, so borget man ebenfalls bey der nächstfolgenden Zahl eine Einheit, wodurch nun alle übrigen Nullen zur 9 werden. Z. B.

˙999˙
800052 Minuendus
672573 Subtrahendus

127479 Unterschied.

Denn da man von den um 1 verminderten 5 Zehnern d. i. den noch übrigen 4 Zehnern nicht 7 Zehner wegnehmen kann, so mußte man nun bey der nächsten Stelle 1 Hunderter borgen. Weil aber weder Hunderter noch Tausender noch Zehntausender im Minuend sind, so muß man 1 Hunderttausender oder 1000 Hunderter, und von diesen erst nun 1 Hunderter oder 10 Zehner zu den 4 Zehnern setzen, wo man also nun 14 Zehner erhält, von welchen man 7 wegnehmen kann. Da aber nun die 1000 Hunderter sich um einen vermindert haben, also nur noch 999 Hunderter oder 9 Zehntausender, 9 Tausender und 9 Hunderter bleiben: so sieht man, in wie fern dann die im Minuend befindlichen Nullen zu 9 werden müssen.

Kommen im Subtrahend Nullen vor, so heißt dies, es soll nichts weggenommen werden, und es werden dann die darüber stehenden Zahlen des Minuend als Rest unter dem Strich gesetzt. Z. B.

˙ ˙
6430023 Minuend
4019224 Subtrahend

2410799 Unterschied.

§. 18.

§. 18.

Wird die Differenz zweyer Zahlen zu der kleinern Zahl addirt, so erhält man die größere wieder; als welche aus der kleinern und der Differenz besteht; daher die Probe der Subtraction.

Addirt man daher den Unterschied und den Subtrahend zusammen, so muß man, wenn richtig subtrahirt ist, den Minuend wieder erhalten.

Unsre vorigen Beyspiele gaben

906295	800052	6430023
527493	672573	4019224
378802	127479	2410799
906295	800052	6430023

Beyspiele zur Uebung.

1) 9734854	2) 80097342	2) 20079432152
6295721	29870401	19989543061

4) Von einem Erzbau hat man 1245 Thlr. Einnahme gemacht, die Gewinnungs- und Aufbereitungskosten aber betragen 978 Thlr. Wie viel hat dieser Erzbau Ueberschuß gegeben?

5) Bey einer Grube sind in einem Quartal 12480 Kübel Gänge gefördert, und davon 10476 Kübel aufbereitet worden. Wie viel Kübel bleiben vorräthig?

6) Die Einnahme beträgt bey einer Grube 2597 Thlr. und die Ausgabe 2601 Thlr. Bleibt Schuld oder Kasse?

7)

7) Der Freyberger Bergbau ist im Jahr 1171 entdeckt worden. Seit wie viel Jahren ist dies nun schon?

8) Die Bergakademie zu Freyberg ist im Jahr 1765 gestiftet worden. Wie lange ist dies?

III. Multiplication.

§. 19.

Die Multiplication lehrt: eine gegebene Zahl so viel mal nehmen, als eine andre Einheiten hat. Jene Zahl heißt der Multiplicandus, diese der Multiplicator. Beyde heißen Faktoren. Die Zahl, welche herauskommt, heißt das **Produkt.**

§. 20.

Da man beym Multipliciren der Zahlen nicht immer nur einfache, sondern mehrentheils zusammengesetzte Zahlen zu multipliciren hat, so setzt die Multiplication der zusammengesetzten Zahlen die Multiplikation der einfachen voraus; daher mit dieser der Anfang gemacht werden muß.

Nach der Erklärung der Multiplication (§. 12.) ist sie nichts anders, als eine wiederholte Addition. Z. B. die Zahl 6 soll 3mal genommen werden, so würde es geschehen, wenn man 6 dreymal zu sich selbst addirte, wodurch man $6 + 6 + 6 = 18$ (§. 13.) erhielte. Allein bey zusammengesetzten Zahlen würde dieses vielen Schwierigkeiten unterworfen seyn; man bedient sich daher mit größerm Vortheile folgender Tafel, welche von ihrem Erfinfinder die Pythagoräische Tafel heißt, oder des sogenannten Einmaleins. Will man z. B. das Product 5 × 7 wissen, so suche man in der ersten Reihe die Zahl 5, und in der obersten die Zahl 7, gehe alsdenn von 7 gerade herunter bis in die fünfte Reihe, so trifft man daselbst das Product 35 an.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Zusatz. Sind einer der einfachen Ziffern Nullen angehängt; so nehme man das Product der Ziffern aus der Tafel, und hänge demselben die Nullen an. Z. B.

$$9 \cdot 20 = 9 \cdot 2 \cdot 10 = 18 \cdot 10 = 180.$$

§. 21.

Aufgabe. Zwey gegebne Zahlen mit einander zu multipliciren.

Erster Fall.

Wenn der Multiplicator nur eine Ziffer hat.

Auflösung. Man multiplicire mit dem Multiplicator jede Ziffer des Multiplicandus von der rechten gegen die linke Hande zu, setze bey jedem Producte die niedrigste Ziffer unter die zugehörige Ziffer des Multiplicandus, und addire die höhere Ziffer zu den nächstfolgenden Pruducten. Z. B. 4528×3.

$$
\begin{array}{r l}
4528 & = \text{Multiplicandus} \\
3 & = \text{Multiplicator} \\
\hline
13584 & = \text{Product.}
\end{array}
$$

Erklär. Denn die 8 Einer 3mal genommen geben 24 Einer oder 2 Zehner und 4 Einer, wo also letztre 4 unter die Einer zu stehen kommt. Aber 2 Zehner 3mal genommen geben 6 Zehner und die vorigen 2 Zehner mit dazu, geben 8 Zehner, welche also ebenfalls unter die Zehner des Multiplicandus zu stehen kommen, u. s. f.

Zweyter Fall.

Wenn der Multiplicandus mehr als eine Ziffer hat.

Auflösung. I. Man setze den Multiplicator unter dem Multiplicandus, so daß die Ziffern von einerley Klasse unter einander stehen.

II. Mit jeder Ziffer des Multiplicators verfahre man nach dem vorhin angegebnen ersten Falle.

III. Jedes der einzelnen Producte setze man so, daß seine niedrigste Ziffer unter die zugehörige Ziffer des Multiplicators kommt.

IV. Diese Producte addire man: so ist ihre Summe das gesuchte Product der gegebnen Zahlen.

Z. B. 4528 × 243

$$\begin{array}{r l}
4528 = & \text{Multiplicandus} \\
243 = & \text{Multiplicator} \\
\hline
13584 & \\
18112 & \text{einzelne Producte.} \\
9056 & \\
\hline
1100304 = & \text{Product.}
\end{array}$$

Erklär. Denn der Multiplicandus mit den Einern multiplicirt giebt Einer, weil es eben so viel ist, als wenn die 3 Einer 4528mal genommen werden sollen; folglich kommt die letzte Zahl der Einer unter die Einer zu stehen, und die folgenden nehmen wie im ersten Falle ihre Stellen ein. Der Multiplicandus mit den 4 Zehnern multiplicirt, oder 4 Zehner 4528mal genommen sind Zehner; also kommt die letzte Ziffer der Zehner unter die Zehner, u. s. f.

Zusatz. Was mit Eins multiplicirt wird, bleibt unverändret, oder eins multiplicirt nicht, und was mit Null multiplicirt wird, ist Nichts, oder wird Null.

Hätte also der Multiplicator eine Eins, so wird der Multiplicandus unverändert herunter gesetzt.

Hat aber der Multiplicator in der Mitte Nullen, so wird das Product davon übergangen, das Product der nächstfolgenden Ziffer aber muß um so viele Stellen weiter zur Linken eingerückt werden, als Nullen im Multiplicator auf einander folgen, damit die Ziffern nicht ihren Werth verlieren.

Befinden sich aber am Ende, bey einem oder auch bey beyden Factoren, Nullen, so nimmt man während der Multiplication keine Rücksicht auf sie, weil man sonst einige Zeilen mit Nullen anfüllen müßte, welche doch in der Addition nichts ändern. Nur müssen die Producte an ihre gehörige Stelle gesetzt und an das Product rechter Hand so viele Nullen angehängt werden, als der eine Factor, oder auch beyde zusammen, enthalten.

Zum

Zum Beyspiel:

1)
```
   6432
    124
 ------
  25728
 12864
 6432
 ------
 797568
```

2)
```
    24368
     4002
 --------
    48736
 97472..
 --------
 97520736
```

3) 34200 × 800 ist
```
   34200
   8  00
 --------
 27360000
```

Anmerk. Da die Ordnung der Factoren willkührlich ist, denn $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$: so wähle man zum Multiplicator den bequemsten oder kleinsten bey zusammengesetzten Zahlen, um weniger einzelne Produkte zu bekommen.

§. 22.

Außer der jetzt angegebenen Methode, zusammengesetzte Zahlen zu multipliciren, hat man noch zwey andre, nämlich:

a) mit zerfälltem Multiplicator durch die Addition,

b) mit zerfälltem Multiplicator durch die Multiplication.

§. 23.

Bey der Multiplication mit zerfälltem Multiplicator durch die Addition, zerfällt man den Multiplicator in seine einzelnen Bestandtheile, nämlich in Einer, Zehner, Hunderte, und vermehrt den Multiplicandus damit auf die möglichst kürzeste Art. Z. B.

a)
```
 365 × 15
 --------
 3650    10
 1825     5
 ----
 5475
```

Oder b)
```
 365 × 15
 1825    10
 ----
 5475     5
```

Erklär. Hier wurde der Multiplicator 15 in 10+5 zerfällt; das zehnfache Product von 365 in a) läßt sich leicht finden, indem man nur eine Null anzuhängen braucht, und nun noch das 5fache Produkt von 356 sucht, und dazu addirt. In b) denkt man sich die Null an den Multiplicandus, wodurch er schon mit 10 vermehrt ist, und schreibt blos das fünffache Product darunter. Eben so ist es in folgenden Beyspielen.

754 × 31		Oder	754 × 31	
22620	30		2262	1
754	1		23374	+30
23374				

1683 × 41	357 × 14	3098 × 61
6732·	1428	18588·
69003	4998	188978

§. 24.

Bey der Multiplication mit gefälltem Factor durch die Multiplication, zerfällt man den Multiplicator in zwey oder mehrere Factoren, multiplicirt dann den Multiplicandus mit einem derselben, mit dem andern aber das durch den ersten erhaltne Product; dieses wieder mit dem dritten Factor u. s. f. Z. E.

Nach der ersten Art (§. 21.)

a)

4326 × 42	
25956	6
181692	7

b)

4326
42
8652
17204
181492

Erklär.

Erklär. Denn nach a) wurde der Factor erst 6mal genommen, wodurch das Product 25956 entsteht, und nun selbiges wieder 7mal genommen, so kam dadurch 181692 zum Product des Ganzen, welches $6 \times 7 = 42$mal so viel als 4326 ist.

Anmerk. Auch kann man bisweilen eine Zahl auf zwey und mehrere Arten zerfällen. Z. B.

$$\begin{array}{rl} 987654 \times & \underbrace{24} \\ \hline 3950616 & 4 \\ \hline 23703696 & 6 \end{array} \qquad \text{Oder} \qquad \begin{array}{rl} 987654 \times & \underbrace{24} \\ \hline 7901232 & 8 \\ \hline 23703696 & 3 \end{array}$$

§. 25.

Oefters hat man solche Multiplicatoren, die sich nicht in Factoren geradezu zerfällen lassen, sondern, wenn man den Multiplicator in zwey oder drey kleinere Factoren zerfällt, entweder die Zahl des Multiplicators nicht völlig erreicht, oder auch zu groß wird. Im ersten Falle wird das Mangelnde mit dem Pluszeichen (+) hinzugesetzt, wodurch angezeigt wird, daß der gegebne Multiplicandus noch so viel mal genommen und zu dem gefundnen Vielfachen addirt werden soll.

Im zweyten Falle wird der Ueberschuß durch das Minuszeichen (—) angezeigt, welches heißt, daß der Multiplicandus noch so viel mal genommen von dem gefundnen Vielfachen subtrahirt werden soll. Z. B.

$$\begin{array}{rl} 4385 \times & \underbrace{29} \\ \hline 17540 & 4 \\ \hline 122780 & 7+1 \\ 4385 & \\ \hline 127165 & \end{array} \qquad \text{Oder} \qquad \begin{array}{rl} 4385 \times & \underbrace{29} \\ \hline 13155 & 3 \\ \hline 13155.0 & 10-1 \\ 4385 & \\ \hline 127165 & \end{array}$$

25689×37		Oder	25689×37
128445	5		$128445 \quad 5$
$899'1'1'5$	$7+2$		$10275'6'0 \quad 8-3$
51378			77067
950593			950493

Anmerk. Besteht jeder der beyden Factoren aus zwey Ziffern, wo aber ein Factor 11 ist; so findet man sogleich das Product, wenn man zwischen den Zahlen des andern Factors ihre Summe, als Einer addirt, setzt.

Z. B. $23 \times 11 = 253$. Denn

$$\begin{array}{r} 32 \\ 11 \\ \hline 32 \\ 32 \\ \hline 352. \end{array}$$

Ferner

$27 \times 11 = 297$; $21 = 11 = 231$.

Beyspiele zur Uebung.

1)	Man multiplicire	1790897	Thaler mit	27
1)	= =	9081765	= =	31
3)	= =	3178697	= =	42
4)	= =	56789	Centner =	100
5)	= =	876543210	= =	440
6)	= =	7654321	Scheffel =	37890

7) Himmelsfürst Fdgr. giebt quartaliter 32 Speziesthaler auf jeden Kux Ausbeute. Nun wird in Freyberger Refier auf 128 Kuxe Ausbeute vertheilt. Wie viel Speziesthaler vertheilt demnach diese Grube quartaliter Ausbeute?

8) Ein Centner Pulver gilt 34 Thlr. Wie viel muß man für 1236 Ctn. bezahlen?

9)

9) Eine Grube ist 68 Fahrten tief. Da nun eine Fahrt 12 Ellen lang ist, wie viel Ellen wird diese Grube tief seyn?

10) Bey einer Grube werden in jeder Schicht im Durchschnitt genommen 35 Tonnen Gänge, jede zu 12 Kübel, gefördert. Wenn nun wöchentlich 6mal getrieben wird, wie viel werden in einem Quartal, das Quartal zu 13 Wochen, und so dann in einem Jahre Kübel Gänge bey dieser Grube zu Tage gefördert?

IV. Division.

§. 26.

Die Division lehrt: eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft eine von zwey gegebnen Zahlen in der andern enthalten sey. Die Zahl, welche dividirt oder getheilt werden soll, heißt der **Dividendus**, und die, womit man dividirt der **Divisor**; diejenige aber, welche durch ihre Einheiten anzeigt, wie viel mal der Divisor im Dividendus enthalten ist, der Quotient.

§. 27.

Aufgabe. Zwey gegebne Zahlen mit einander zu dividiren.

Erster Fall.

Wenn der Divisor nur eine Ziffer hat.

Auflösung. 1) Man suche in dem Einmaleins (§. 20.) wie viel mal der Divisor B in der höchsten Ziffer des Dividendus (2) oder, wenn dieser kleiner als der Divisor ist, in den beyden höchsten Ziffern (26) des Dividendus A stecke.

2) Die gefundne Zahl (8) schreibe man in die Stelle des Quotienten Q, und nach ihr so viel Nullen, als noch Ziffern im Dividendus übrig sind, wie bey C.

3) Mit dem Quotienten C multiplicire man den Divisor B, und subtrahire das Product (3 × 8000 = 24000) von dem Dividendus.

4) Mit dem Reste (2295) verfahre man wieder eben so, wie 1) 2) 3) lehrt, und setze diese Operation eben so bis zu Ende fort.

5) Die also gefundnen Quotienten C, D, E, F, addire man; so ist ihre Summe G (8765) der gesuchte Quotient.

Z. B.

B A	Q
3)26295	8000,C
24000	700,D
2295	60,E
2190	5,F
195	8760,G
180	
15	
15	
0	

Andere Auflösung. Kürzer kann man auch auf folgende Art verfahren:

1) Man suche den ersten Theil des Quotienten (8) und subtrahire sein Produkt in den Divisor (8 × 3 = 24) von dem ersten Theile des Dividendus (26).

2) Dem Reste (2) füge man die folgende Zahl des Dividendus (2) bey, daß sie mit ihm den zweyten Theil des Dividendus (22) mache.

3) Zu diesem zweyten Theile des Dividendus suche man den zweyten Theil des Quotienten (7), verfahre damit, wie mit dem ersten, und wiederhole dieselbe Operation bis zu Ende.

```
              B      A    G
Z. B.        3)26295 | 8765
               24    |
               ---   |
                22   |
                21   |
                ---  |
                 19  |
                 18  |
                 --- |
                  15 |
                  15 |
                  ---|
                   0 |
```

4) Kommt hierbey ein Theil des Dividendus vor, der kleiner als der Divisor ist, wie bey D: so füge man ihm die noch weiter folgende Ziffer (5) des Dividendus bey; bemerke aber dieses jedes Mal durch eine Null im Quotienten, damit dessen Ziffern ihre gehörige Stelle erhalten.

```
Z. B.        3)25215 | 8405
               24    |
               ---   |
                12   |
                12   |
                ---  |
             D   15  |
                 15  |
                 --- |
                   0 |
```

Beyspiele zur Uebung.

1) Man dividire 46291456 durch 8
2) = = 1069284 =
3) = = 144736 =
4) = = 691355 =
5) = = 53483857 =

Zweyter Fall.

Wenn der Divisor mehr als eine Ziffer hat.

Auflösung. Die Art der Operationen ist, wie beym ersten Falle; nur muß man hier bestimmen können, wie viel mal der zusammengesetzte Divisor D in dem ihm gemäßen Theile des Dividendus A, B, C stecke. Dieses nun findet man auf folgende Art:

1) Man nehme an, der Divisor D stecke in dem zugehörigen Theile des Dividendus A so viel mal, als die höchste Ziffer des Divisors (3) in der höchsten oder den beyden höchsten Ziffern (14) dieses Theils nach dem ersten Falle.
2) Multiplicirt man den Divisor D mit der also gefundnen Zahl (4) und erhält ein Product (1448), welches sich, wie bey A, gehörig subtrahiren läßt; so ist die gefundne Zahl (4) der richtige Theil des Quotienten Q.
3) Ist aber solches Produkt zu groß, wie erfolgt, wenn man für B (4) und für C (8) in Q setzt: so vermindere man eine solche Zahl immer um eine Einheit, bis man ein Product erhält, welches sich gehörig subtrahiren läßt. Auf diese Art ist der richtige Theil des Quotienten für B nicht 4, sondern 3, und für C nicht 8, sondern 7.

```
          D        A           Q
Z. B.   362)1461392 | 4037
            1448    |
           ------   |
          B  13.39  |
             1086   |
           ------   |
             2534   |
             2534   |
             ----   |
               0    |
```

Anmerk. Bleibt zuletzt statt der o eine ganze Zahl übrig, welche jedesmal kleiner als der Divisor ist, so wird diese Zahl mit untergesetztem Divisor noch zum Rest hinzugesetzt. Z. B.

```
1)   4) 145329 | 36332, so ist der Quotient 36332¼.
        12 ..  |
        ----
         25 ..
         24 ..
         ----
          13 .
          12 .
          ----
           12
           12
           --
            9
            8
            -
            1
```

```
2)   425) 15.4.107 | 362 257/425.
          1275     |
          -------
           2660
           2550
           -------
            11.07
             850
           -------
             257.
```

Beyspiele zur Uebung.

1)	Man dividire	2128	durch	17.
2)	= =	109312	=	32.
3)	= =	393276	=	39.

4)

4) Man dividire		123120	=	45.
5)	= =	190960	=	56.
6)	= =	3674112	=	69.
7)	= =	222440	=	536.
8)	= =	527513	=	421.
9)	= =	1492668	=	4607.
10)	= =	481536	=	20004.
11)	= =	300049248	=	1209876.
12)	= =	13984844	=	7777.

§. 28.

So wie man oben bey der Multiplication den Multiplicator zerfällen konnte, so kann man hier diese Zerfällung mit dem Divisor vornehmen, nur zerfällt man den Divisor in solche Factoren, so daß kein Rest bleibt; weil die Division mit Plus und Minus große Weitläuftigkeiten verursacht.

Diesen zerfällten Divisor schreibt man zur Linken des Dividenden, macht unter diesen einen Strich, und dividirt nun mit dem ersten Factor oder der ersten Zahl des zerfällten Divisors in den Dividenden, der dadurch erhaltne Quotient wird hierauf mit der andern Zahl des zerfällten Divisors wieder dividirt, der nun erhaltne Quotient wieder mit dem dritten Factor u. s. f. und nun erhält man den eigentlichen Quotienten. Z. B.

Man dividire 130368 durch 24.

24 :		130368	Oder	24 :		130368
4	4)	32592		8	8)	16296
6	6)	5432		3	3)	5432

Anmerk. Der Beweis dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehen.

§. 29.

§. 29.

Bey Zerfällung des Divisors mit mehrern Ziffern suche man eine Zahl (und zwar immer lieber eine größere als kleinere), die in dem gegebnen Divisor ohne Rest aufgeht. Den dadurch erhaltnen Quotienten suche man wieder durch eine Zahl ohne Rest zu theilen, und dies so fort bis zu letzt eine 1 zum Quotienten kommt.

Hierbey merke man folgende Vortheile:

1) Ist die letzte Ziffer (rechts) des Divisors eine 5 oder 0, so läßt sich der Divisor allemal durch 5, und im letzten Fall durch 10 dividiren. Z. B. wäre der Divisor

1725, so ist	1725	oder 1878	1870
5)	345	5)	370
		5)	74

2) ist es eine gerade Zahl, z. B. 2, 4, 6, 9; so kann man den Divisor oder den erhaltnen Quotienten auch durch eine gerade Zahl dividiren. Z. B. 432 läßt sich dividiren 8) 432

54

3) ist es eine ungerade Zahl, z. B. 1, 3, 7, 9; so läßt er sich nur durch eine ungerade Zahl aufheben. Z. B. 161 läßt sich aufheben durch 7, also 7) 161

43

4) enthalten die Ziffern des Divisors oder des erhaltnen Quotienten, als Einer addirt, lauter 9, so läßt sich derselbe allemal durch 9 dividiren; und besteht der Divisor nur aus 3 Ziffern, wovon

von die beyden äußersten als Einer addirt zusammen die mittlere ausmachen, so läßt sich der Divisor durch 11 dividiren. (§. 25. Anm.). Z. B.

54 durch 9=6; 36 durch 9=4; 27 durch 9=3.
165 d. 11=15; 143 d. 11=13; 187 d. 11=17.

Beyspiele.

	1575		2688		945		756
5)	315	8)	336	9)	105	4)	189
5)	63	8)	42	5)	21	9)	21
7)	9	7)	6	7)	3	7)	3
9)	1	6)	1	3)	1	3)	1

§. 30.

Noch einige Vortheile beym Dividiren sind:

1) Befinden sich zur Rechten des Divisors und des Dividenden Nullen, so kann man von beyden gleichviel Nullen abschneiden; z. B. wenn 156000 durch 300 dividirt werden soll, so ist

3φφ) 1560φφ | 520 der Quotient.
15
6
6
0

Oder 24φφ 56160φφ |
4 14040
6 2340

2)

2) Soll der Dividend durch 10, 100, 1000, dividirt werden; so schneidet man von Dividenden von der Rechten nach der Linken so viel Nullen ab, als der Divisor Nullen hat. Die abgeschnittnen Ziffern sind der Rest (§. 27. Anm.), die übrigen zur Linken der abgeschnittnen Ziffern aber der Quotient. Z. B.

$10 : 4694 = 1{,}0 : 369{,}4 = 369\tfrac{4}{10}$.

$100 : 76987 = 1{,}00 : 769{,}87 = 769\tfrac{87}{100}$.

$1000 : 640379 = 1{,}000 : 640{,}379 = 640\tfrac{379}{1000}$.

Beyspiele zur Uebung.

1) Man dividire 627648 durch 24.
2) = = 6846064 = 32.
3) = = 3674112 = 64.
4) = = 65536 = 256.
5) = = 6221880 = 504.
6) = = 11405520 = 1680.
7) = = 33965568 = 72576.
8) Wenn durch einem Pochwerk jährlich 1872 Fuhren Pochgänge durchgepocht werden, wie viel Fuhren werden in einer Woche durchgepocht?
9) Bey einer Grube hat man aus 1384 Centnern Erz 5152 Thl. Einnahme gemacht. Wie hoch ist im Durchschnitt der Centner bezahlt worden.

§. 31.

Die **Probe der Division** geschieht durch die Multiplication, indem man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und wenn ein Rest geblieben, diesen dazu addirt. Hingegen dient die **Division wiederum der Multiplication** zur Pro-

Probe, indem man das Product durch den Multiplicator dividirt. Im ersten Falle muß, wenn richtig gerechnet worden, der Dividend; im zweyten der Multiplicandus wieder herauskommen. Z. B.

```
  376×48      Probe 48:18048
  ------            ------
  2256    6         6  3008
  ------              ------
 18048    8         8   376
```

```
24 : 5745 | 239        Probe   239
     48   |                     24
    ----                      -----
     94                        956
     72                       478
    ----                      -----
     225                      5736
     216                         9
    ----                      -----
       9                      5745
```

Drittes Kapitel.

Die gemeinen Rechnungsarten mit Brüchen.

§. 32.

Wird ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt, und werden davon einige Theile genommen: so heißt die Anzahl solcher Theile oder das Stück, in Vergleichung mit dem Ganzen, ein **Bruch**. Z. E. drey Achttheile (Achtel) eines Lachters heißt, man soll den achten Theil eines Lachters dreymal nehmen.

§. 33.

Zu einem Bruche sind zwey Zahlen erforderlich; der Nenner und der Zähler.

Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile das Ganze oder die Einheit getheilt ist; der Zähler, wie vielmal ein solcher Theil genommen wird. Man sondert diese beyden Zahlen, welche man auch **Glieder** nennt, durch einen Strich von einander, und setzt den Zähler über, den Nenner unter den Strich, z. E. $\frac{3}{8}$ Lachter.

Anmerk. Da ein Bruch das Vielfache von einem gewissen Theile des Ganzen oder der Einheit ist, so heißt er daher auch eine gebrochene Zahl, im Gegensatze einer ganzen Zahl, die das Vielfache des Ganzen oder der Einheit selbst ist.

§. 34.

Man theilt die Brüche in ächte und unächte. Ein ächter Bruch ist der, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner, z. B. $\frac{3}{4}$; ein unächter der, dessen Zähler größer als der Nenner ist, z. B. $\frac{9}{7}$.

Da die Schreibart der Brüche eigentlich eine Division anzeigt (§. 13.); so würde der letztere Bruch $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$ betragen, also aus einer ganzen Zahl und einem Bruch bestehen. Solche Brüche, die außer den Brüchen noch ganze Zahlen enthalten, nennt man auch **gemischte Brüche**, z. B. $3\frac{3}{4}$, $7\frac{5}{8}$, $9\frac{1}{4}$.

§. 35.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit dieser Zahl ent-

entweder blos seinen Zähler multiplicirt, oder blos seinen Nenner dividirt. Und ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit dieser Zahl entweder blos seinen Zähler dividirt, oder blos seinen Nenner multiplicirt.

Beweis. I. Bleibt der Nenner des Bruchs ungeändert, so wird der Bruch um so viel mal größer oder kleiner, um so viel mal man seinen Zähler größer oder kleiner macht. So ist z. B. $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$, und $\frac{4}{9} : 2 = \frac{2}{9}$. Denn in beyden Fällen zählt man einerley Theile des Ganzen, im ersten aber solcher Theile um so viel mal mehrere, im zweyten um so viel mal wenigere.

II. Bleibt der Zähler des Bruchs ungeändert: so wird der Bruch um so viel mal größer oder kleiner, um so viel mal man seinen Nenner kleiner oder größer macht. Z. B. $\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{4}$, und $\frac{5}{8} \cdot 2 = \frac{5}{16}$. Denn in beyden Fällen zählt man gleich viele Theile des Ganzen, im ersten Falle um so viel mal größere, im zweyten um so viel mal kleinere.

Anmerk. 1) Jeder Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, giebt den Zähler. Z. E. $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

2) Die Größe eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man beyde Glieder des Bruchs zugleich mit einerley ganzen Zahlen entweder multiplicirt oder dividirt. Z. B.

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{48}, \text{ und } \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}.$$

3) Jeder Bruch, so wie auch die Einheit, und jede ganze Zahl, läßt sich auf unzählige viele Arten ausdrücken. Z. B.

a) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{18}{24} = \frac{27}{36}$.

 b)

$$\tfrac{6}{12} = \frac{6:2}{12\cdot 2} = \tfrac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \tfrac{1}{2}.$$

b) $1 = \tfrac{4}{4} = \tfrac{5}{5} = \tfrac{144}{144}.$

c) $5 = \frac{5\cdot 2}{2} = \tfrac{10}{2}$; $6 = \frac{6\cdot 8}{8} = \tfrac{48}{8}.$

$$2 = \frac{2\cdot 24}{24} = \tfrac{48}{24};\quad 7 = \frac{7\cdot 1}{1} = \tfrac{7}{1}.$$

Dies letztere nennt man das Reduziren der ganzen, Zahlen in Brüche.

4) Wird bey einem gemischten Bruche z. B. $5\frac{3}{4}$ die am Bruche befindliche ganze Zahl (5) mit dem Nenner des Bruchs (4) multiplicirt, und zu dem Product der Zähler des Bruchs (3) addirt, so sagt man: man richtet den Bruch ein. In diesem Falle würde hier seyn $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.

Beyspiele zur Uebung.

I. zu c.

1)	9	Ganze,	wie viel	betragen diese	12tel?
2)	15	=	=	=	44tel?
3)	102	=	=	=	119tel?
4)	96	=	=	=	48tel?
5)	25	=	=	=	30tel?
6)	29	=	=	=	224tel?
7)	13	=	=	=	9tel?
8)	2	=	=	=	1728tel?

II. zu 4.

1) $3\frac{5}{8}$, wie heißt dieser Bruch eingerichtet?
2) $7\frac{3}{5}$? 3) $12\frac{3}{4}$? 4) $50\frac{7}{9}$? 5) $27\frac{10}{11}$?
6) $18\frac{5}{16}$? 7) $19\frac{7}{8}$? 8) $225\frac{27}{32}$? 9) $148\frac{152}{188}$?
10) $199\frac{172}{397}$?

§. 36.

Einen größern Bruch in einen kleinern verwandeln, oder ihn ohne Veränderung seines Werthes durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrücken, dies nennt man einen Bruch aufheben.

Um Brüche aufzuheben, muß man eine Zahl suchen, mit welcher der Zähler und Nenner des gegebnen Bruchs ohne Rest sich dividiren lassen, und den dadurch erhaltnen Bruch, wenn er sich anders noch mehr aufheben läßt, wieder durch eine Zahl ohne Rest dividiren; z. B. $\frac{756}{1890}$ läßt sich durch 9 aufheben, also

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{9} \\ 756 & 84 \\ \hline 1890 & 210 \end{array}$$

Der erhaltne Bruch $\frac{84}{210}$ läßt sich ferner wieder durch 7 aufheben, denn

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{7} \\ 84 & 12 \\ \hline 210 & 30 \end{array}$$, und $\frac{12}{30}$ wieder durch 6, also

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{6} \\ 12 & 2 \\ \hline 30 & 5 \end{array}$$. Folglich kann man obigen Bruch folgendermaßen abkürzen:

$$\begin{array}{r|r|r|l} \multicolumn{2}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{6} \\ 756 & 84 & 12 & 2 \\ \hline 1890 & 210 & 30 & 5 \end{array}$$

Der Bruch $\frac{22680}{31752}$ läßt sich also aufheben.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} \multicolumn{2}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{9} \\ 22680 & 2520 & 315 & 45 & 5 \\ \hline 31752 & 3528 & 441 & 63 & 7 \end{array}$$

§. 37.

§. 37.

Um nun die Zahl zu finden, mit welcher Zähler und Nenner bey der Aufhebung dividirt werden müssen, so kann man sich folgender Vortheile bedienen:

1) Ist die letzte Ziffer des Zählers und Nenners, oder eins von beyden, eine ungerade Zahl, so kann der Bruch auch nur durch eine ungerade Zahl aufgehoben werden, z. B. $\frac{15}{21}$ durch 3 $= \frac{5}{7}$; $\frac{55}{132}$ durch 11 $= \frac{5}{12}$.

2) Sind aber Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können sie sowohl durch gerade als ungerade Zahlen, wenigstens durch 2 dividirt werden; z. B. $\frac{42}{48}$ durch 6 $= \frac{7}{8}$; $\frac{48}{72}$ durch 24 $= \frac{2}{3}$.

3) Endigen sich Zähler und Nenner auf 5 oder auf 0 und 5, so können sie allemal durch 5 aufgehoben werden; z. B.

$$\frac{75}{135}\,\overset{5}{\Big|}\,\frac{15}{27}\,\overset{3}{\Big|}\,\frac{5}{9} \quad \text{oder} \quad \frac{125}{230}\,\overset{5}{\Big|}\,\frac{25}{46}.$$

4) Endigen sie sich aber beyde auf eine oder mehrere Nullen, so kann von beyden eine gleiche Anzahl von Nullen abgeschnitten werden; d. i. man kann den Bruch durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividiren, z. B.

$$\frac{1\cancel{0}}{5\cancel{0}} = \frac{1}{5};\quad \frac{1\cancel{0}\cancel{0}}{23\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{1}{23};\quad \frac{8\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{56\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = \frac{8}{56}\,\overset{8}{\Big|}\,\frac{1}{7}$$

5) Enthalten die Ziffern des Zählers und Nenners, als Einer addirt, lauter 9: so kann der Bruch allemal durch 9 aufgehoben werden; z. B.

$$\frac{81}{729}\overset{9}{\Big|}\frac{9}{81}\overset{9}{\Big|}\frac{1}{9};\qquad \frac{1458}{2187}\overset{9}{\Big|}\frac{162}{243}\overset{9}{\Big|}\frac{18}{27}\overset{9}{\Big|}\frac{2}{3}$$

Läßt sich die Quersumme des Zählers und die des Nenners durch die Zahl 3 ohne Rest dividiren, so kann man auch den Bruch durch diese Zahl aufheben; z. B. $\frac{294}{315}$; die Summe des Zählers ist 15, und die des Nenners 9; beyde Zahlen lassen sich durch 3 dividiren. Also

$$\frac{294}{315}\overset{3}{\Big|}\frac{98}{105}$$

6) Besteht sowohl der Zähler als Nenner aus drey Ziffern, wovon die zwey äußern so viel betragen, als die mittlere, so darf man nur die mittlere Ziffer des Zählers und Nenners ausstreichen, und der Bruch ist aufgehoben; z. B.

$$\frac{1\cancel{3}2}{2\cancel{5}3}=\frac{12}{23};\quad \frac{2\cancel{4}2}{3\cancel{8}5}=\frac{22}{35};\quad \frac{5\cancel{8}3}{7\cancel{0}2}=\frac{53}{72}.$$

Eigentlich hebt man hier mit 11 auf, und dies beruht auf §. 25. Anm. und §. 29. 4.

7) Kann man keinen passenden Divisor finden, so sucht man den größten gemeinschaftlichen Divisor der Glieder eines Bruches auf folgende Art: Man dividirt die kleinere Zahl

in

in die größere, oder den Zähler in den Nenner, mit den Rest hierauf in den vorigen Divisor; bleibt nochmals ein Rest, so wird dieser wieder der Divisor und der vorige Divisor der Dividend, und so setzt man die Division so lange fort, bis kein Rest bleibt. Der letzte Divisor, der keinen Rest übrig läßt, ist dann der größte gemeinschaftliche Divisor des Bruchs. Bleibt aber 1 zum Rest, so ist dies ein Beweis, daß sich der Bruch nicht aufheben lasse. Z. B. $\frac{434}{465}$ aufzuheben.

```
434|465|1
   |434|
   -----
     31|434|14
       |31 |
       -------
        124
        124
       -----
          0
```

Der letzte Divisor ist 31; also läßt sich der Bruch durch 31 aufheben, und es ist

$$\underbrace{\frac{434}{465}\bigg|\frac{14}{15}}^{31}.$$

Eben so findet man für den Bruch $\frac{553}{869}$ die Zahl 79 als den größten gemeinschaftlichen Divisor.

Für $\frac{151}{373}$ aber bleibt 1 Rest, d. h. Zähler und Nenner lassen sich nur durch 1 aufheben; also bleibt der Bruch unverändert.

Bey=

Beyspiele zur Uebung.

1) Wie heißt der Bruch $\frac{288}{575}$ abgekürzt?
2) = = $\frac{2920}{3780}$ =
3) = = $\frac{96}{768}$ =
4) = = $\frac{945}{1512}$ =
5) = = $\frac{135}{180}$ =
6) = = $\frac{30800}{36960}$ =
7) = = $\frac{65}{104}$ =
8) = = $\frac{9656}{18176}$ =
9) = = $\frac{113}{517}$ =

§. 38.

Aufgabe. Brüche von verschiednen Nennern, unbeschadet ihrer Größe, gleichnamig zu machen, oder unter einerley Benennung, unter einen Generalnenner, zu bringen.

Auflösung. I. Für zwey Brüche mache man das Produkt der beyden Nenner zum Generalnenner, und zum Zähler eines jeden Bruchs das Produkt aus seinem Zähler in den Nenner des andern Bruchs.

Z. E. aus den Brüchen $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{9}$ wird

$$\frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{45}{63} \text{ und } \frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{56}{63}.$$

II. Für drey oder mehrere Brüche mache man das Product aller Nenner zum Generalnenner, und zum Zähler eines jeden Bruchs das Product aus seinem Zähler in die Nenner der übrigen Brüche.

Z. E. aus den Brüchen $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$ wird

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{105}{140}; \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{56}{140};$$

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{7 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{120}{140}.$$

Beweis. In beyden Fällen werden die Glieder eines jeden der gegebnen Brüche mit einerley Zahl multiplicirt, also wird der Werth der Brüche nicht geändert (§ 35. Anm. 2); sie erhalten aber alle einerley Nenner, weil derselbe das Produkt aus allen Nennern, also aus einerley Faktoren ist.

Beyspiele zur Uebung.

Diese Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

1) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$
2) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$
3) $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$
4) $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{9}$
5) $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{24}{52}$, $\frac{41}{87}$, $\frac{25}{73}$, $\frac{21}{29}$

§. 39.

Da nun aber bey dem vorigen Verfahren, Brüche unter einerley Benennung zu bringen, der Generalnenner bey vielen Brüchen ein großes Produkt ausmacht, so kann man auch den immer kleinsten Generalnenner auf folgende Art finden.

Man schreibt nämlich alle Nenner der gegebnen Brüche in eine Reihe. Dann sucht und erwählt

wählt man sich einen Divisor, der sich in die mehresten Nenner ohne Rest theilen läßt, und schreibt die Quotienten unter eine darunter gezogene Linie; unter diese Linie setzt man auch diejenigen Nenner, in welche der erwählte Divisor nicht ohne Rest aufgeht. Nun versucht man es mehrmals, ob sich etwa ein oder der andre Nenner durch einen andern Divisor ohne Rest aufheben lasse, und streicht ihn dann ebenfalls aus. Lassen sich endlich die übrig gebliebnen Nenner nochmals durch eine Zahl verkleinern, so erwählt man sich noch einen Divisor und verfährt, wie mit den vorigen. Hierauf werden die übrig gebliebnen Nenner nebst den erwählten Divisoren mit einander multiplicirt, wodurch man stets den kleinsten Generalnenner erhalten wird.

In diesem wird dann mit allen Nennern der gegebnen Brüche dividirt, mit den Zählern derselben aber multiplicirt. Die Produkte hiervon sind die Zähler der Brüche, welche alle den gemeinschaftlichen Nenner haben und den gegebnen gleich sind.

Wenn z. B. die Brüche a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ unter einerley Benennung gebracht werden sollten, so würde ihr gröster Generalnenner seyn

$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 = 192;$$

ihren kleinsten hingegen würde man also finden:

$$\begin{array}{ll} & \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{8} \\ \hline 2) & \quad 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{4} \\ \hline 2) & \quad 3 \cdot \quad \cancel{2} \\ \hline 2) & \quad 3 \qquad 1 \end{array}$$

Also

Also der kleinste Generalnenner

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Diese Brüche würden daher von einerley Nenner betragen:

	24	
$\frac{1}{2}$	12	$\frac{12}{24}$
$\frac{2}{3}$	8	$\frac{16}{24}$
$\frac{3}{4}$	6	$\frac{18}{24}$
$\frac{7}{8}$	3	$\frac{21}{24}$

Ferner die Brüche b) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{4}{15}$ unter eine Benennung zu bringen:

$$\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{10} \cdot 15$$

2) $\cancel{3} \quad 2 \cdot 5 \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot 15$

3) $2 \cdot 5 \quad 5 \cdot 5$

5) $2 \cdot$

Also der kleinste Generalnenner

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 60.$$

	60	
$\frac{1}{2}$	30	$\frac{30}{60}$
$\frac{2}{3}$	20	$\frac{40}{60}$
$\frac{3}{4}$	15	$\frac{45}{60}$
$\frac{4}{5}$	12	$\frac{48}{60}$
$\frac{1}{6}$	10	$\frac{10}{60}$
$\frac{7}{10}$	6	$\frac{42}{60}$
$\frac{4}{15}$	4	$\frac{16}{60}$

Beyspiele zur Uebung.

1) Die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{14}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{34}{35}$, $\frac{11}{49}$ unter einerley Nenner zu bringen,

2) die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{23}{24}$, $\frac{15}{48}$?

3) die Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{35}$, $\frac{11}{45}$, $\frac{17}{63}$, $\frac{23}{56}$?

4) = $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{33}{45}$, $\frac{21}{96}$?

I. Addition der Brüche.

§. 40.

Aufgabe. Brüche zu einander zu addiren.

Auflösung. I. Haben die gegebnen Brüche einen gemeinschaftlichen Nenner: so ist offenbar ihre Summe ein Bruch, dessen Zähler die Summe der gegebnen Zähler, und dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner ist.

Z. E. $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9}$ zu addiren.

$\frac{2}{9}$ oder 2
$\frac{4}{9}$ = 4
$\frac{7}{9}$ = 7
$\frac{8}{9}$ = 8

Summe $= \frac{21}{9} = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$

Anmerk. 1. Sind gemischte Brüche (§. 34.) zu addiren, so addire man erst die Brüche, und sodann die in den Brüchen enthaltenen Ganzen zu den übrigen ganzen Zahlen.

Z. B. $4\frac{3}{8} + 5\frac{1}{8} + 7\frac{5}{8} + 12\frac{7}{8}$ zu addiren,

$4\frac{3}{8}$
$5\frac{1}{8}$
$7\frac{5}{8}$
$12\frac{7}{8}$

$28\frac{15}{8} = 28 + 2 = 30.$

Beyspiele zur Uebung.

Wie viel betragen

1) $\frac{3}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} + \frac{11}{24} + \frac{13}{24} + \frac{17}{24}$?

2) $\frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16} + \frac{11}{16} + \frac{13}{16} + \frac{15}{16}$?

3)

3) $15\frac{7}{8} + 101\frac{5}{8} + 93\frac{3}{8} + 7\frac{1}{8} + 19\frac{5}{8}$?

4) $15 + 16\frac{7}{12} + 4\frac{5}{12} + 19\frac{11}{12} + 24\frac{9}{12}$?

II. Haben die Brüche aber verschiedne Nenner, so bringe man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner (§. 38. 39.), da dann der vorige Fall eintritt.

Z. E. $\frac{5}{7} + \frac{8}{9} = \frac{45}{63} + \frac{56}{63} = \frac{101}{63} = 1\frac{38}{63}$.

Die Summe der Brüche a und b des §. 39. würde betragen:

a) 24

$\frac{1}{2}$	12	12
$\frac{2}{3}$	8	16
$\frac{3}{4}$	6	18
$\frac{7}{8}$	3	21

Summe $= \frac{67}{24} = 2\frac{19}{24}$ (§. 34.)

b) 60

$\frac{1}{2}$	30	30
$\frac{2}{3}$	20	40
$\frac{3}{4}$	15	45
$\frac{4}{5}$	12	48
$\frac{1}{6}$	10	10
$\frac{7}{10}$	6	42
$\frac{4}{15}$	4	16

Summe $= \frac{231}{60} = 3\frac{51}{60}$ (§. 34.)

Anmerk. 2. Sollen gemischte Brüche addirt werden: so kann man sie entweder in unächte verwandeln (§. 35. Anm. 4.), oder bequemer die ganzen Zahlen besonders, und die Brüche besonders addiren.

Z. E. $8\frac{3}{4} + 5\frac{2}{5} = \frac{35}{4} + \frac{27}{5} = \frac{175}{20} + \frac{108}{20} = \frac{283}{20} = 14\frac{3}{20}$. Oder

$$\begin{array}{r|c|l} & 20 & \\ 8\frac{3}{4} & 5 & 15 \\ 5\frac{2}{5} & 4 & 8 \\ \hline 14\frac{3}{20} & & \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20} \end{array}$$

Beyspiele zur Uebung.

Wie viel ist die Summe von

1) $3\frac{1}{2}$, $6\frac{2}{3}$, $8\frac{7}{8}$, $5\frac{4}{9}$, $20\frac{23}{24}$?

2) $2\frac{7}{8}$, $15\frac{5}{6}$, $19\frac{1}{3}$, $50\frac{1}{4}$, $39\frac{41}{48}$, $\frac{89}{96}$?.

3) $\frac{1}{4}$, $16\frac{4}{5}$, $27\frac{7}{8}$, $15\frac{15}{16}$, $\frac{17}{32}$?

4) $9\frac{3}{4}$, $12\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{3}$, $15\frac{7}{12} + 23\frac{14}{25}$?

5) $2\frac{5}{8}$, $6\frac{3}{4}$, $4\frac{4}{5}$, $8\frac{7}{10}$, $5\frac{17}{110}$, $3\frac{9}{35}$, $2\frac{21}{22}$, $1\frac{7}{88}$?

6) $2\frac{3}{8}$, $1\frac{1}{4}$, $4\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{55}$, $\frac{109}{110}$, $\frac{51}{88}$?

7) $13\frac{1}{2}$, $14\frac{2}{3}$, $15\frac{3}{4}$, $16\frac{4}{5}$, $17\frac{5}{6}$, $18\frac{6}{7}$, $19\frac{7}{8}$, $20\frac{8}{9}$, $21\frac{4}{10}$, $22\frac{10}{11}$?

8) $9\frac{7}{8}$, $5\frac{3}{5}$, $17\frac{2}{11}$ $19\frac{2}{3}$, $18\frac{24}{35}$, $26\frac{7}{24}$?

II. Subtraction der Brüche.

§. 41.

Aufgabe. Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Haben die gegebnen Brüche einen gemeinschaftlichen Nenner, oder sind sie darauf gebracht: so ist offenbar ihre Differenz ein Bruch, dessen Zähler die Differenz der gegebnen Zähler, und dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner ist; z. E.

a) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b) $\frac{8}{9} - \frac{5}{7} = \frac{56}{63} - \frac{45}{63} = \frac{56-45}{63} = \frac{11}{63}$.

Anmerk.

Anmerk. 1. Was von der Addition gemischter Brüche gesagt ist, läßt sich auch auf ihre Subtraction leicht anwenden; z. B.

a)
$$\begin{array}{r} 4\frac{5}{9} \\ 2\frac{3}{9} \\ \hline 2\frac{2}{9} \end{array} \text{ Differenz.}$$

b)
$$\begin{array}{rcl} 12\frac{8}{9} & = & 12\frac{56}{63} \\ 9\frac{3}{7} & = & 9\frac{27}{63} \\ \hline & & 3\frac{29}{63} \end{array} \text{ Differenz.}$$

c)
$$\begin{array}{rcl} 11\frac{3}{8} & = & 11\frac{9}{24} \\ 4\frac{2}{3} & = & 4\frac{16}{24} \\ \hline & & 6\frac{17}{24} \end{array} \text{ Differenz.}$$

In diesem letzten Falle muß man nämlich, um $\frac{16}{24}$ von $\frac{9}{24}$ subtrahiren zu können, von den 11 Ganzen 1 Ganzes $= \frac{24}{24}$ (§. 35. Anm. 3. b) borgen und diese $\frac{24}{24}$ zu den $\frac{9}{24}$ addiren, wodurch man nun $\frac{33}{24}$ erhält, von welchen man nun $\frac{16}{24}$ hinwegnehmen kann.

Anmerk. 2. Die Probe ist hier wie bey ganzen Zahlen (§. 18.), nämlich: die Summe der Differenz und des Subtrahend ist gleich dem Minuend.

Beyspiele zur Uebung.

1)	Man subtrahire	$\frac{1}{2}$	von	$\frac{5}{6}$;	so ist der Rest?
2)	=	=	$8\frac{19}{36}$	=	$21\frac{35}{36}$;	=
3)	=	=	$15\frac{1}{3}$	=	$73\frac{5}{7}$;	=
4)	=	=	$18\frac{1}{4}$	=	$16\frac{25}{32}$;	=
5)	=	=	$9\frac{3}{5}$	=	$12\frac{1}{7}$;	=
6)	=	=	$17\frac{3}{8}$	=	$29\frac{1}{9}$;	=
7)	=	=	$19\frac{8}{9}$	=	$36\frac{2}{7}$;	=
8)	=	=	$48\frac{3}{7}$	=	$96\frac{1}{19}$;	=

III. Multiplication der Brüche.

§. 42.

Aufgabe. Brüche in einander zu multipliciren.

Auf-

Auflösung. Man multiplicire Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner; und mache also einen Bruch, dessen Zähler das Product aus den gegebnen Zählern, und dessen Nenner das Product aus den gegebnen Nennern ist; worin sich oft Factoren gegen einander aufheben lassen.

Z. E. $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$.

Erklär. Nach §. 19. heißt zwar multipliciren eine Zahl so oft nehmen, als die andre Einheiten hat. Da nun aber beym Multipliciren der Brüche, von den beyden Factoren jeder kleiner als 1 ist, und nur erst $1 \times 1 = 1$ ist, so sieht man ein, daß das Product zweyer ächten Brüche kleiner als 1, d. h. ein Bruch seyn muß.

Brüche multipliciren heißt daher, von dem Multiplicandus ($\frac{5}{7}$) den sovielten Theil nehmen, als der Nenner des Multiplicators ($\frac{3}{4}$) anzeigt (hier also von $\frac{5}{7}$ der 4te Theil $\frac{5}{7 \cdot 4}$ (§. 35.) $= \frac{5}{28}$) und diesen Theil des Multiplicandus ($\frac{5}{28}$) so vielmal wieder nehmen, als der Zähler des Multiplicators (3) anzeigt ($\frac{5}{28}$ mit 3 multiplicirt $= \frac{5 \cdot 3}{28} = \frac{15}{28}$ (§. 35.). Es ist daher z. B.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{4 \cdot 7 \cdot 9} \times 5 \cdot 2 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 9} =$$

$$= \frac{1 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{5}{2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{5}{42}.$$

Anmerk. Sind die gegebnen Factoren gemischte Brüche, so verwandle man sie in unächte (§. 35. Anm. 4.). Z. E.

a) $4\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{3} = \frac{19}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{152}{12} = 12\frac{8}{12} = 12\frac{2}{3}$.

b) $4\frac{5}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{37}{8} \times \frac{2}{9} = \frac{74}{72} = 1\frac{2}{72} = 1\frac{1}{36}$.

c) $4\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} = 6$.

d) $6\frac{4}{7} \times 8\frac{3}{4} = \frac{46}{7} \times \frac{35}{4} = \frac{23}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{115}{2} = 57\frac{1}{2}$.

Beyspiele zur Uebung.

Wie heißen die Producte von

1) $6 \times \frac{3}{4}$? 2) $8 \times \frac{5}{6}$? 3) $12\frac{7}{8} \times 13\frac{5}{6}$? 4) $9\frac{31}{64} \times 8\frac{7}{72}$? 5) $14\frac{39}{48} \times 17\frac{24}{97}$? 6) $12\frac{1}{4} \times 10\frac{11}{192}$? 7) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$? 8) $3\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{7} \times 4\frac{1}{25}$?

IV. Division der Brüche.

§. 43.

Aufgabe. Brüche in einander zu dividiren.

Auflösung. Man multiplicire den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor. Z. E.

$$\frac{5}{9} : \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Denn bringt man die Brüche unter einerley Benennung, so hätte man

$$\frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 3} : \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 3}{27} : \frac{2 \cdot 9}{27}$$

welches gewiß dasselbe ist, als $5 \cdot 3 : 2 \cdot 9 =$

$$\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 9} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2}.$$

Anmerk. 1. Sind die gegebnen Brüche gemischt, so verwandle man sie in unächte (§. 35. Anm. 4.). Z. E.

a) $7\frac{2}{3} : 2\frac{4}{5} = \frac{23}{3} : \frac{14}{5} = \frac{23}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{115}{42} = 2\frac{31}{42}.$

b) $8\frac{2}{3} : 4 = \frac{26}{3} : \frac{4}{1} = \frac{26}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{12} = 2\frac{1}{6}.$

c) $8 : \frac{2}{3} = \frac{8}{1} : \frac{2}{3} = \frac{8}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12.$

Anmerk. 2. Auch hier ist die Probe der Multiplication und Division wie bey ganzen Zahlen (§. 31.).

Beyspiele zur Uebung.

Wie heißt der Quotient von

1) $\frac{3}{4} : 3$?

2) $\frac{8}{9} : 4$; $\frac{6}{7} : 2$; $\frac{12}{17} : 6$?

3) 9 Personen theilen sich in $\frac{2}{3}$ Kux. Was erhält
4) 12 = = = $\frac{1}{8}$ jeder?
5) 24 = = = $\frac{15}{22}$ =
6) 8 = = = $12\frac{2}{3}$ =
7) Dividire $9\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3}$; $12\frac{7}{8} : 9\frac{2}{7}$; $18\frac{5}{7} : 2\frac{8}{9}$.
8) = $\frac{7}{8} : \frac{8}{12}$; $\frac{5}{9} : \frac{5}{32}$; $\frac{8}{9} : \frac{9}{64}$.

Von Decimalbrüchen.

§. 44.

Ein Decimalbruch heißt jeder Bruch, dessen Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. überhaupt eine Einheit irgend einer zusammengesetzten Ordnung (§. 8. Zus.) ist; z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{8}{1000}$.

Bey einem gemeinen Bruche theilt man nämlich das Ganze und die Theile des Ganzen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; bey einem Decimalbruche theilt man das Ganze und die Theile des Ganzen immerfort durch die Zahl Zehn, daß also eine Einheit irgend einer zusammengesetzten Ordnung der Nenner des Bruchs wird; der Zähler aber jede beliebige ganze Zahl seyn kann, kleiner oder größer als der Nenner, je nachdem der Bruch ächt, als $\frac{345}{1000}$ oder unächt, als $\frac{6573}{1000}$, ist.

Zusatz 1. Sind mehrere Decimalbrüche von verschiednen Nennern gegeben, so lassen sie sich sehr leicht unter einerley Benennung, und für sich sowohl, als mit ganzen Zahlen in eine Summe bringen. So ist z. B. $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{9}{1000} = \frac{379}{1000}$, und $45\frac{370}{1000} = \frac{54000}{1000} + \frac{379}{1000} = \frac{54379}{1000}$.

Zusatz 2. Dergleichen Summen von Decimalbrüchen befolgen also mit den ganzen Zahlen einerley Gesetz, daß ihre Ziffern nach ihren Stellen von der Linken zur Rechten immer einen zehnmal kleinern, oder von der Rechten zur Linken immer einen zehnmal größern Werth erhalten. Sie können daher auch wie ganze Zahlen geschrieben werden, wenn man sie nur durch irgend ein Zeichen von ganzen Zahlen absondert. Hierzu hat man das Komma gewählet, welches vor einem Decimalbruche zur Linken, entweder hinter die ganze Zahl, oder wenn keine vorhanden ist, hinter eine Null gesetzt wird, und das Einerzeichen heißt. Nach dieser Regel schreibt man die vorigen Brüche $\frac{379}{1000} = 0,379$; $54\frac{379}{1000} = 54,379$. Die fehlenden Stellen bezeichnet man hier, so wie bey ganzen Zahlen, durch Nullen. Z. E. $\frac{5}{10} + \frac{7}{1000}$ wird geschrieben 0,507; und $\frac{4}{1000}$ schreibt man 0,004.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wie schreibt man $3\frac{5}{100}$? 2) $9\frac{56}{10000}$? 3) $\frac{39}{1000000}$? 4) $7\frac{3}{1000000}$? 5) $2\frac{21}{100000}$? 6) $\frac{31}{1000000000}$?

Zusatz. 3) Jeder Zahl mit dem Einerzeichen lassen sich unbeschadet ihres Werthes, zur Rechten oder Linken so viele Nullen als man will, ansetzen. Soll aber eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt oder dividirt werden, so versetze man das Einerzeichen im ersten Falle nach der Rechten, im zweyten nach der Linken um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen. Z. E.

5936,8542	mit 100	multiplicirt	wird	593685,42.
0,825	: 1000	:	:	825.
5,4(00)	: 1000	:	:	5400. Aber
5936,8542	mit 100	dividirt,	wird	59,368542.
0,825	: 1000	:	:	0,000825.
5,4	: 1000	:	:	0,0054. (§. 30 2.)

Denn den zweyten Bruch könnte man auch schreiben 0000,825; und den dritten 0005,4.

Beyspiele zur Uebung.

1) 547,29 durch 1000 multiplicirt und dividirt; 2) 25,9 mit 100 multiplicirt und dividirt; desgleichen 3) 0,25 mit 10000; 4) 5,003 mit 1000; 5) 0,00093 mit 1000; 6) 3,0001 mit 100.

I. Addition.

§. 45.

Aufgabe. Gegebne Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebnen Zahlen so, daß die mit dem Komma bezeichneten Einer, also auch alle übrige Ziffern nach ihren Ordnungen, unter einander stehen, und beobachte übrigens dasselbe Verfahren, welches bey der Addition ganzer Zahlen §. 15. vorgeschrieben ist; weil hier eben die Gesetze der Numeration statt finden, worauf sich solches Verfahren gründet. Z. E.

479,45	95,72786	0,79305
70,7	0,00904	0,2003
0,5943	0,0007	0,1
36,0000	257,89	0,004
586,7443	353,62760	1,09735

Beyspiele zur Uebung.

4,3742	15,27345	19,734587
5,90739	9,8793	8,94512
15,0731458	5,732004	7,311459
2,97873	2,5119	2,4531
0,473	19,732	5,200032

125,937	2,730973	5,9431257
539,97834	1,987341	29,7321129
25,0731	231,004301	128,521731
27,93451	29,7321	19,7237
9,8734	15,923211	8,2245918

II. Subtraction.

§. 46.

Aufgabe. Gegebne Decimalbrüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebnen Zahlen, wie im vorigen §. bey der Addition, unter einander, nur daß man noch in die leeren Stellen nach dem Komma Nullen setze, und verfahre wie §. 17. bey der Subtraction ganzer Zahlen, und nach eben den Gründen. Z. E.

37,051	6,002	8,0000000
9,430	2,700	5,2903721
27,621	3,302	2,7096279

Beyspiele zur Uebung.

12,79834	5,973841	6,00321154
9,703	4,89102	3,99973002

119,732	11,973	5,001
89,93721154	9,73000028	1,9990001

III. Multiplication.

§. 47.

Aufgabe. Gegebne Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man verrichte die Multiplication, als wären die gegebnen Factoren ganze Zahlen, und schneide in den gefundnen Producte von der

der Rechten gegen die Linke durch das Einerzeichen so viele Stellen ab, als in beyden Factoren zusammen abgeschnitten sind. Z. E.

3,245	463,25	0,4321
2,34	3,02	0,032
12980	92650	8642
9735	138975	12963
6490	1399,0150	0,0138272
7,59330		

Denn $3,245 \times 2,34 = \frac{3245}{1000} \times \frac{234}{100} = \frac{759330}{100000} = 7,59330.$ (§. 30. 2.)

$463,25 \times 3,02 = \frac{46325}{100} \times \frac{302}{100} = \frac{13990150}{10000} = 1399,0150.$

$0,4321 \times 0,032 = \frac{4321}{10000} \times \frac{32}{1000} = \frac{138272}{10000000} = 0,0138272.$

Beyspiele zur Uebung.

1) $32,4903 \times 21,301$; 2) $309,4003 \times 48,32$; 3) $119,52297 \times 32,00031$; 4) $0,003972 \times 0,000301$; 5) $0,30020014 \times 0,325$.

IV. Division.

§. 48.

Aufgabe. Einen gegebnen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

Auflösung. I. Man verrichte die Division, als wäre der Dividendus eine ganze Zahl, und schneide in dem Quotienten, wenn man ihn in ganzen Zahlen gefunden hat, durch das Einerzeichen so viele Stellen von der Rechten zur Linken ab, als in dem gegebnen Dividendus abgeschnitten sind. 5) 9,385|1,877

```
5) 9,385|1,877
   5
   --
   43
   40
   --
    38
    35
    --
    35
```

Denn drückt man den gegebnen Dividendus als einen gemeinen Bruch aus ($\frac{9385}{1000}$), und dividirt seinen Zähler mit dem gegebnen Divisor ($9385 : 5 = 1877$), so ist der gefundne Quotient noch mit dem Nenner, welcher die Einheit einer zusammengesetzten Ordnung ist, zu dividiren, daher in dem Quotienten genau so viele Stellen von der Rechten und Linken durch das Einerzeichen abzuschneiden sind ($\frac{1877}{1000} = 1,877$. §. 30. 2.)

II. Bleibt ein Rest, so kann man ihm eine Null beyfügen und die Division zuweilen ohne Ende fortsetzen, wenn man mit dem jedesmaligen neuen Reste immer so verfährt; wodurch man den Quotienten, wo nicht genau, doch immer genauer finden kann.

```
28) 749,7|26,775
    56
    ---
    189
    168
    ---
     217
     196
     ---
      210
      196
      ---
       140
       140
       ---
         0
```

Bey=

Beyspiele zur Uebung.

1) 11318,454 durch 243; 2) 1230,875 : 43;
3) 399,875 : 7; 4) 30,925 : 1237;
5) 123331,3245 : 345; 6) 1728,05 : 25;
7) 329,037 : 29; 8) 1,237059 : 324;
9) 0,7372 : 6.

§. 49.

Aufgabe. Gegebne Decimalbrüche mit einander zu dividiren.

Auflösung. Man mache den Divisor, durch Weglassung des Einerzeichens, zur ganzen Zahl, und rücke im Dividendus das Einerzeichen genau um eben so viele Stellen nach der Rechten zu: so sind beyde Glieder mit einerley Zahl multiplicirt; wodurch der Quotient seinen vorigen Werth behält, und der Fall im vorigen §. wieder eintritt. Z. E.

$$\frac{13{,}338}{5{,}7} = \frac{133{,}38}{57} = 2{,}34;$$

$$\frac{9{,}33890}{2{,}35} = \frac{933{,}890}{235} = 3{,}974;$$

$$\frac{0{,}08}{0{,}00016} = \frac{0{,}08000}{0{,}00016} = \frac{8000}{16} = 500.$$

Anmerk. Auch kann man sich hier der Division mit zerfälltem Divisor wie in §. 28. bedienen, wenn der Divisor als ganze Zahl angesetzt wird. Z. E.

$$\begin{array}{rll} 2{,}4 & \text{in} & 7{,}8168 \quad \text{oder} \\ \underbrace{24} & \text{in} & 78{,}168 \\ \hline 4 & & 19{,}542 \\ \hline 6 & & 3{,}257 \end{array}$$

Bey-

Beyspiele zur Uebung.

1) 3257,84375 durch 7,025;
2) 0,000041393 52 : 0,12033;
3) 722,9375 : 21,5;
4) 1839,77568 : 3,24;
5) 85475 : 3,25;
6) 7986 : 3,75.

Zusatz 1. Dieses Bisherige läßt sich auch auf die Division mit ganzen Zahlen anwenden. Nämlich:

a) hat man den Quotienten in ganzen Zahlen gefunden, und ist ein Rest geblieben, so kann man durch Beyfügung von Nullen die Operation fortsetzen: und dadurch den Quotienten einen Decimalbruch beyfügen. z. E. $\frac{7497}{28} = 267,75$.

b) Sind dem Divisor Nullen angehängt, so kann man diese weglassen, wenn man im Minnendus genau so viele Stellen durch das Einerzeichen abschneidet; z. E. $\frac{3684}{600} = \frac{38,64}{6}$.

Zusatz 2. Auf eben die Art läßt sich auch jeder gemeine Bruch durch einen Decimalbruch, wo nicht genau, doch so genau, als man will, ausdrücken, wenn man dem Zähler ein Komma und so viele Nullen beyfügt, so weit der Decimalbruch es erfordert, oder man ihn suchen will.

Z. E. $\frac{1}{5} = \frac{1,0}{5} = 0,2$; $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$;

$\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75$; $\frac{1}{4} = \frac{1,00}{4} = 0,25$;

$\frac{1}{3} = \frac{1,0000....}{3} = 0,3333....$; $\frac{1}{6} = \frac{1,0000}{6} =$ $0,1666....$; $\frac{1}{7} = 0,142857|142857|142857....$

Zusatz 3. Will man einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln, so schreibe man den zehntheiligen Bruch als einen gemeinen Bruch, und hebe ihn auf. Z. B. $0,623 = \frac{625}{1000}$.

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{625}^{125} & 5 \\ \hline 1000 & 8 \end{array}$$

Bey

Bey solchen Decimalbrüchen aber, die ohne Ende fortgehen, nehme man so viele Ziffern, als nach der Natur desselben zu einer Wiederhohlung erfordert werden. Diese Ziffern sehe man nun ebenfalls als den Zähler eines gemeinen Bruchs an, dessen Nenner aber aus so viel 9 bestehet, als der Zähler Ziffern enthält. Z. B. von dem Decimalbruch 0,296262... nehme man 296, so sieht man diese Zahl als einen Bruch dessen Zähler 296 und Nenner 999 ist, an, und hebt diesen Bruch $\frac{296}{999}$ auf.

$$\frac{\overset{37}{296}}{999}\Bigg|\frac{8}{27}$$

Beyspiele zur Uebung.

I. Folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{7}{45}$; $\frac{8}{35}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{5}{9}$.

II. Folgende Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

1) 0,2666; 2) 0,6666.... 3) 0,85;
4) 0,09090... 5) 0,625; 6) 0,428571428...
7) 0,6363... 8) 0,333....

Viertes Kapitel.

Die gemeinen Rechnungsarten mit benannten Zahlen.

§. 50.

Eine benannte Zahl ist, die nebst der Menge der Einheiten, auch noch die Art, den Namen derselben angiebt; eine unbenannte Zahl aber, die blos die Menge der Einheiten ohne ihren Namen bestimmt.

§. 51.

§. 51.

Die Einheit einer benannten Zahl, oder eines größern Namen, wird im gemeinen Leben sowohl, als in den Wissenschaften, auf mancherley Art in gleiche Theile getheilt, und dadurch auf eine gewisse Menge von Einheiten des kleinern Namens gebracht oder reducirt. Die Zahl, welche diese Menge bestimmt, heißt die Reductionszahl.

Anmerk. Sollen z. B. eine Menge Ellen in Fahrten verwandelt werden, so muß man wissen, wie viel Ellen eine Fahrt machen. Da nun bey uns 1 Fahrt 12 Ellen lang ist, so ist die Zahl 12 die Reductionszahl.

Ueber die Eintheilung der Maaße, Gewicht u. Münzen u. dergl. sehe man die hinten angehängte Beylage. I

§. 52.

Aufgabe. Eine benannte Zahl zu reduciren, das ist, auf den kleinern oder größern Namen zu bringen.

Auflösung. I. Die gegebne Zahl wird auf den kleinern Namen gebracht, wenn man sie mit der Reductionszahl multiplicirt.

Z. E. 312 Lachter $= 7 \cdot 312$ Leipziger Fuß $= 2184$ Fuß.

II. Die gegebne Zahl wird auf den größern Namen gebracht, wenn man sie mit der Reductionszahl dividirt.

Z. E. 1587 Lachterzolle $= \frac{1587}{10}$ Achtellachter $= \frac{1587}{10 \cdot 8}$ Lachter $= \frac{1587}{80} = 19^{\circ}, 6', 7''$, d. h. 19 Lachter, 6 Achtel und 7 Zolle.

Bey-

Beyspiele zur Uebung.

1) Wie viel betragen 721 Lachter, Achtel und Zolle?
2) = = 132 Lachter, Leipziger Ellen und Füsse?
3) = = 325 Mark Silber, Loth und Quent?
4) = = 8 Gezeugstrecken, Fahrten, Ellen und Fusse?
5) = = 12 Schock große Treibe-Tonnen Kübel?
6) = = 72 anderthalbführige Pochwerkskasten, Kübel?
7) = = 18 Bürden Stahl, Pfunde?
8) = = 44 Waagen Eisen, = ?
9) 172 Lachter, 7 Achtel, 9 Zoll, wie wiel betragen diese Primen?
10) 127943 Lachter Primen, wie viel betragen diese Lachter, Achtel, Zolle?
11) 98736 Fuß, wie viel betragen diese Fahrten und Lachter?
12) 1440 Kübel Berge, wie viel geben diese große, mittlere und kleine Tonnen? ferner große, mittlere und kleine Hunde?
13) 9600 ℔. Stahl, wie viel sind dies Centner?
14) 2112 ℔. Eisen, = = Wagen?
15) 1440 Pfennige, wie viel sind dies Thaler, Groschen?
16) 720 Kübel, wie viel betragen diese Ziehen, jedes zu 2 Schock gerechnet?
17) Wie viel betragen 8 Thlr. 4 gr. 6 pf. Pfennige?
18) = = 24 Thlr. 23 gr. 9 pf. Pfennige?

19)

19) Wie viel sind 112 Cent. 2 Stein, 8 ℔. 7 Lth. 1 Quent, Quente?

20) Wie viel sind 12 Mark 15 Loth 3 Quent, Quent?

21) Wie viel betragen 12789 Pfennige, Thaler, Groschen, Pfennige?

22) Wie viel betragen 56789 Quent, Mark, Loth, Quent?

§. 53.

Eine Zahl ist ungleichbenannt (z. E. 5 Lr. 7 Achtel, 3 Zoll), wenn sie aus verschiednen, einander untergeordneten Arten von Einheiten, die alle auf eine Art gebracht werden können, besteht; gleichbenannt aber, wenn alle ihre Einheiten von einer Art sind (z. E. 534 Lachterzolle).

Anmerk. 1. Gleichbenannte Zahlen von einerley Namen werden, wie die unbenannten Zahlen, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, ohne daß dazu besondre Regeln nöthig sind. Nur ist zu merken, daß der Multiplicator stets unbenannt seyn müsse (§. 19.); der Divisor aber sowohl benannt als unbenannt seyn könne (§. 26.)

Anmerk. 2. Durch die Reduction läßt sich jede ungleichbenannte Zahl auf eine gleichbenannte bringen, und dann nach der Art der unbenannten Zahlen behandeln. Um aber eine oft beschwerliche Reduction zu ersparen, sind Regeln für ungleichbenannte Zahlen nöthig, welche hier folgen.

I. Addition.

§. 54.

Aufgabe. Ungleichbenannte Zahlen zu einander zu addiren.

Auflösung. I. Man schreibe die gegebnen Zahlen so, daß die Sorten von einerley Namen unter einander stehn.

II. Man suche die Summe der niedrigsten Sorte, und reducire sie auf die zu nächst höhere Sorte. Bleiben bey dieser Reduction Einheiten der niedrigsten Sorte übrig, so setze man diese unter ihre gehörige Columne unter den Strich; füge aber die zunächst höhern Sorten den nächst höhern gleichartigen Sorten bey.

III. Eben so verfahre man mit jeder folgenden Columne. Z. E. Folgende Posten

	35 Thlr.	2 gr.	4 pf.
	29 =	12 =	9 =
	54 =	23 =	11 =
	27 =	19 =	7 =
betragen	147 Thlr.	15 gr.	7 pf.

Die Summe der Pfennige = 31; diese betragen $\frac{31}{12}$ gr. = 2 gr. 7 pf. (§. 52. II.). Die Summe der Groschen 61; diese betragen nebst den vorigen 2 Grosch. = 63, und diese nun = $\frac{63}{24}$ Thlr. = 2 Thlr. 15 gl.

15 Lachter	7 Achtel	9 Zoll
13 =	6 =	7 =
14 =	3 =	8 =
10 =	5 =	1 =
45 Lachter	7 Achtel	5 Zoll

25 Zoll = $\frac{25}{10}$ Achtel = 2 Achtel 5 Zll. (§. 52. II.) 21 Achtel + 2 Atl. = 23 Atl. und diese = $\frac{23}{8}$ Lr. = 2 Lr. 7 Achtel.

19 Mark	14 Loth	2 Quent
17 =	12 =	3 =
16 =	9 =	1 =
12 =	16 =	2 =
67 Mark	4 Loth	—

8 Quent = $\frac{8}{4}$ Loth = 2 Loth. 52 Loth = $\frac{52}{16}$ = 3 M. 4 L.

Bey=

Beyspiele zur Uebung.

1) Eine Grube hat in einem Quartale folgende Erzeinnahme gemacht, als: in No. 1ster Woche 198 Thlr. 4 gr. 4 pf.; in No. 2. und 3. Woche 194 Thlr. 1 gr. 3 pf.; in No. 4. und 5. Woche 233 Thlr. 13 gr. 11 pf.; in No. 6. und 7. Woche 210 Thlr. 20 gr. 10 pf.; in No. 8 und 9. Woche 196 Thlr. 4 gr. —, und in No. 10. und 11te Woche 264 Thlr. 4 gr. 3 pf. Wie viel hat sie in diesem Quartale geliefert?

2) In einem Quartal hat eine Grube geliefert: 1) 12 Mark 15 Loth 2 Qu. 2) 13 M. 2 Loth 1 Qu. 3) 14 M. 14 Loth 1 Qu. 4) 13 M. 7 Loth 2 Qu. 5) 13 M. 12 Loth 2 Qu. 6) 18 M. — 3 Qu. Wie viel beträgt dies Mark, Loth, Quent?

3) Bey einer Grube sind in einem Quartal folgende Ausgaben nöthig gewesen, als: 602 Thlr. 19 gr. 10 pf. an Löhnen; 174 Thlr. 9 gr. 1 pf. an Gedingarbeit; 12 Thlr. 8 gr. 8 pf. an ledigen Schichten; 108 Thlr. 12 gr. — an Pulver; 78 Thlr. 17 gr. — an Schmiedekosten; 70 Thlr. an Holz; 106 Thlr. 4 gr. 4 pf. an andern Bergmaterialien; 170 Thlr. 18 gr. — an Fuhrlöhnen; 173 Thlr. 15 gr. 9 pf. Insgemein. Wie groß war die Ausgabe?

4) Eine Grube hat folgende Teufen: 19 Lachter 7 Achtel 3 Zoll von Tage bis obern Stolln; von diesem bis tiefen Stolln 39 Lachter 4 Achtel 5 Zoll; von tiefen Stolln bis halberst. Gezeugstrecke 8 Lr. 7 Achtel 9 Zoll; von dieser bis erster Gezeugstrecke 8 Lr. 3 Achtel 7 Zoll. Von der

der ersten Gezeugstrecke bis 2ten 17 Lachter und 3 Zoll; von der 2ten bis 3ten 16 Lr. 6 Achtel 8 Zoll; von der 3ten bis 4ten 17 Lr. 1 Achtel 2 Zoll; und von der 4ten bis 5ten 16 Lr. 7 Achtel 9 Zoll. Wie tief ist dieses Gebäude?

5) Eine Grube hat folgenden Eisenvorrath, als: 15 Waagen 34 ℔. Seileisen; 877 Waagen 19 ℔. Reifeisen; 79 Waagen 3 ℔. Böhrereisen. Summe?

6) Folgende Gewichte an Erzen hat eine Grube in einem Quartal geliefert, als: $130\frac{3}{4}$ Cent. 11 ℔.; $155\frac{7}{8}$ Cent. 12 ℔.; $148\frac{1}{4}$ Cent. 2 ℔.; $163\frac{3}{8}$ Cent. 9 ℔.; $157\frac{1}{8}$ Cent. 5 ℔.; $149\frac{1}{8}$ Cent. 12 ℔. Summe?

7) Die Einnahme hat bey einer Grube betragen: 1297 Thlr. — 7 pf. an verkauften Erzen; 1 Thlr. 5 gr. 9 pf. an Schaustufen; 3 Thlr. — 8 pf. an Beytrag zu Erzfuhrlöhnen; 11 Thlr. 9 gr. — an Gnadensteuer; 12 Thlr. 15 gr. 1 pf. an Schmiedezins; 48 Thlr. 4 gr. 9 pf. an verbrauchten Materialien; 56 Thlr. 20 gr. 2 pf. an Einnahme Insgemein. Also überhaupt?

8) Folgende Gewichte sollen addirt werden: 132 Cent. 84 ℔. 16 Lth.; 1256 Cnt. 96 ℔. 24 Lth.; 99 Cnt. 109 ℔. 31 Lth.; 137 Cnt. 55 ℔. 16 Lth.; 87 Cnt. 22 ℔. 21 Lth.; 375 Cnt. 97 ℔. 29 Lth.; 79 Cnt. 85 ℔. 30 Lth.

II. Subtraction.

§. 55.

Aufgabe. Ungleichbenannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man schreibe die Sorten gehörig unter einander, wie im vorigen §. 54.

II. Man subtrahire in jeder Columne, von der niedrigsten Sorte an, die Zahlen des Subtrahendus von denen des Minuendus, und setze den Rest gehörig unter die Columne.

III. Ist bey solchen Verfahren eine Zahl im Subtrahend größer als im Minuend: so borge man eine Einheit der höhern Sorte, welche man auf die kleinere reducirt, damit davon die Subtraction geschehen, und zu dem Reste die zugehörige Zahl im Minuend addirt werden könne.

Z. E. von 34 Thlrn. 7 gr. 2 pf. soll man abziehen 19 Thlr. 23 gr. 11 pf.

34 Thlr.	7 gr.	2 pf.
19 =	23 =	11 =
14 Thlr.	7 gr.	3 pf.

Denn von 2 pf. kann man nicht 11 pf. wegnehmen, man muß erst einen Groschen, welcher 12 pf. hat, borgen, so hat man nun 14 pf. von welchen man nun 11 pf. wegnehmen kann. Und so ist es auch bey dem Groschen.

Von	78 Cnt.	4 lb.	3 Loth
	19 =	55 =	2 =
	58 =	59 =	1 =

Von	37 Lr.	5 Achtel	6 Zoll
	12 =	7 =	8 =
	24 =	5 =	8 =

Einer ist geboren den 26. May 1767. und gestorben den 6. April 1809. Wie alt wurde er?

Dies

Dies stehet also:

den 6ten April	1809	Jahr	3 Mon.	6 Tage	
= 26ten May	1767	=	4 =	26 =	
		41 Jhr.	10 Mon.	11 Tage.	

Beyspiele zur Uebung.

1) Ein Stück Gebirge steigt von der Sohle eines Baches aus 79 Lachter und 6 Zoll auf, und fällt darauf bis zu einen Maasenstein 7 Lachter 6 Achtel 7 Zoll ab. Wie hoch liegt der Maasenstein über der Sohle des Baches?

2) Die Hängebank des Schachtes B liegt über der Hängebank des Schachtes A 12 Lachter 3 Zoll; die Hängebank des Schachtes C liegt unter B 3 Lr. 5 Achtel 9 Zoll. Liegt die Hängebank des Schachtes A über oder unter der Hängebank des Schachtes C, und wie viel?

3) Die Hängebank des Schachtes B liegt über einer andern des Schachtes A 7 Lachter 3 Achtel 4 Zoll, und die Hängebank des Schachtes C unter der Hängebank B 13 Lr. 7 Achtel. 9 Zoll. Wie liegt die Hängebank des Schachtes C gegen der des Schachtes A.

4) Bey einer Grube hat die Einnahme in einem Quartal betragen, was die Aufgabe 7) der vorigen des §. 54. besagt, und die Ausgabe ist gewesen, was die Aufgabe 3) in vorigen Beyspielen zum §. 54. angiebt. Hat man Ueberschuß oder Schulden gemacht?

5) Bey einer Grube hatte man zu Anfange des Quartals 139 lb. Pulver vorräthig; während

des Quartals 3 Cent. angeliefert, und in No. 1. Woche 9 lb.; in No. 2. und 3. Woche 28 lb.; in No. 4. und 5 Woche 68 lb.; in No. 6. und 7. Woche 30 lb.; in No. 8. und 9. Woche 52 lb.; in No. 10. und 11. Woche 62 lb.; und in No. 12. und 13. Woche hat man 94 lb. verschossen. Was bleibt Vorrath?

6) Eine Grube hat im vorigen Quartal geliefert 194 Mark 3 Quent Silber, und in diesem 201 Mark 15 Loth 1 Quent. Wie viel hat sie in diesem Quartal mehr geliefert?

7) Einer hat eingenommen 28 Thlr. 14 gl. $3\frac{1}{2}$ pf. und ausgegeben 19 Thlr. 21 gl. $8\frac{5}{8}$ pf. Wie viel muß er noch haben?

8) Einer ist geboren den 7. May 1757. und gestorben den 19. May 1779. Wie alt wurde er?

III. Multiplication.

§. 56.

Da auch in der Multiplication mit benannten Zahlen der Multiplicator anzeigt, wie viel mal der Multiplicandus zu sich selbst zu addiren ist (*§. 12. 19.*): so muß der Multiplicator allemal eine unbenannte Zahl seyn, oder darauf gebracht werden; das Product ist alsdann allemal von der Art des Multiplicandus.

Anmerk. Denn eine gewisse Summe von Thalern, Groschen, Pfennigen; oder Lachtern, oder Centnern u. dergl. kann man nur 2, 3, 4 u. s. w. mal nehmen.

§. 57.

§. 57.

Aufgabe. Ungleichbenannte Zahlen mit einer unbenannten zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire jede Sorte des Multiplicandus mit dem Multiplicator von der niedrigsten an; bringe das gefundne Product nach §. 52. auf seine höhern und niedrigen Einheiten; setze Letztere unter die jedesmalige Columne, und addire Erstere zu dem Producte der nächstfolgenden Columne.

Z. E. Die Summe von 24 Thlrn. 8 gl. 11 pf. siebenfach zu machen:

1) 24 Thlr. 8 gr. 11 pf. × 7

170 Thlr. 14 gr. 5 pf.

Denn 7 × 11 pf. = 77 pf. = $\frac{77}{12}$ Groschen = 6 gr. 5 pf. und

7 × 8 gr. + 6 gr. = 56 gr. + 6 gr. = 62 gr. = $\frac{62}{24}$ Thlr. = 2 Thlr. 14 gr.

7 × 24 Thlr. + 2 Thlr. = 168 Thlr. + 2 Thlr. = 170 Thlr.

Oder:

2) 48 Lachter 3 Achtel 7 Zoll 5 Primen × 8

387 = 6 = — = — =

Denn 8 × 5 Primen = 40 Pr. = $\frac{40}{10}$ Zoll = 4 Zoll

8 × 7 Zoll + 4 Zoll = 56 Z. + 4 Z. = 60 Z. = $\frac{60}{10}$ Achtel = 6 Achtel

8 × 3 Achtel + 6 Achtel = 24 + 6 Achtl. = 30 A. = $\frac{30}{8}$ Lr. = 3 Lr. 6 A.

8 × 48 Lr. + 3 Lr. = 344 Lr. + 3 Lr. = 387 Lachter.

Oder

Oder

3) 12 Mark 15 Loth 3 Quent × 12

155 = 13 = — =

4) 34 Cent. 2 Stein 8 Pfund 8 Loth × 16

551 = 3 = — = — =

§. 58.

Läßt sich der Multiplicator, zumal wenn er zusammengesetzt ist, in Factoren zerlegen (wie §. 23. 24. 25.): so multiplicire man zuerst mit dem ersten Factor, und das gefundne Product mit dem zweyten.

Das vorige dritte Beyspiel würde man also multipliciren:

12 Mark	15 Loth	3 Quent	×	12
38 =	15 =	1 =		3
155 =	13 =	— =		4

Und das vierte Beyspiel:

34 Cent.	2 Stein	8 Pfund	8 Loth	×	16
137 =	4 =	11 =	— =		4
551 =	3 =	— =	— =		4

Wenn 7 Cnt. 15 Pfund 8 Loth 2 Quent 17 mal genommen werden sollten. So ist

7 Cnt.	15 Pfd.	8 Loth	2 Qt.	×	17
28 =	61 =	2 =	— =		4
					4 + 1
114 =	24 =	8 =	— =	Hierzu	
7 =	15 =	8 =	2 =		
121 =	39 =	16 =	2 =		

Oder

Oder wenn 24 Lachter 7 Achtel 3 Zoll 34 mal genommen werden sollten, so wäre

24 Lachter	7 Achtel	3 Zoll	× 34	
124 =	4 =	5 =	5 7 — 1	
871 =	7 =	5 =	Hiervon	
24 =	7 =	3 =		
847 =	— =	2 =		

Beyspiele zur Uebung.

1) Es stehen vier Schächte unter einander, wovon jeder 19 Lachter 7 Achtel 9 Zoll 5 Primen tief ist. Wie groß ist die Tiefe sämmtlicher Schächte?

2) Wenn man mit einem Abteufen alle Wochen 7 Achtellachter 3 Zoll 9 Primen niederrückte, wie tief würde man in 13 Wochen, und in einem Jahre gekommen seyn?

3) Wenn die Fuhre Holz mit 1 Thlr. 18 gr. bezahlt wird, wie viel wird man für 138 Fuhren bezahlen müssen?

4) Wenn das Wochenlohn eines Doppelhäuers 1 Thlr. 3 gr. beträgt, wie viel macht dies auf ein Quartal oder 13 Wochen und auf ein Jahr?

5) Wenn der Centner Pulver 34 Thlr. 8 gr. und der Centner Stahl 12 Thlr. 16 gr. kostet, was kosten von diesen beyden Sorten 145 Centner?

6) 237 mal 1415 Thlr. 18 gr. 7 pf.?

7) 78 = 236 Lachter 7 Achtel 9 Zoll 7 Primen?

8)

8) 96 mal 535 Cent. 3 Stein 19 Pfund 3 Loth?
9) 75 = 8 Wispel, 14 Scheffel, 12 Metzen?

IV. Division.

§. 59.

Bey der Division in benannten Zahlen kann der Divisor sowohl benannt, als auch unbenannt seyn. Im ersten Falle, wo er jedoch mit dem Dividendus von einerley Art seyn muß, fragt man, wie viel mal der Divisor im Dividendus enthalten sey (§. 26.), da dann der Quotient unbenannt ist; im zweyten, wie groß der Theil des Dividendus sey, den der Divisor anzeigt, da dann der Quotient mit dem Dividendus von einerley Art ist.

§. 60.

Aufgabe. **Ungleichbenannte Zahlen zu dividiren.**

Erster Fall.

Wenn der Divisor unbenannt ist.

Z. E. Es sollen A 454 Thlr. 22 gr. 3 pf. unter B 17 Personen zu gleichen Theilen getheilt, das ist, mit 17 dividirt werden.

B	A			C	D	E
17)	454 Thlr.	22 gr.	3 pf.	26 Thlr.	18 gr.	3 pf.
	34	a) 288	c) 48			
	114	b) 310	d) 51			
	102	17	51			
	12 Thlr.	140	0			
	24	136				
	a) 288 gr.	4 gr.				
		12				
		c) 48 pf.				

Auf-

Auflösung. Mit B (17) dividire man den höchsten Namen in A (454 Thlr.). Dies giebt den Quotienten C (26 Thlr.), und den Rest a (12 Thlr. = 12 Thlr. × 24 = 288 gr.). Diesen Rest a (288) addire man reducirt zu den folgenden Namen (288 gr. + 22 gr. = 310 gr.), und dividire die Summe b (310) wieder mit B (17). Dies giebt den Quotienten D (18 gr.) und den Rest c (4 gr. = 4 · 12 = 48 pf.), womit man wie zuvor verfährt; da dann der gesammte Quotient C + D + E (26 Thlr. 18 gr. 3 pf.) anzeigt, wie viel jeder bekommt.

Ferner sollen getheilt werden,

229 Thlr. 20 gr. 3 pf. durch 15

15)	229 Thlr.	20 gr.	3 pf.	15 Thlr. 7 gr. 9 pf.
	15	96	132	
	79	116	135	
	75	105.	135	
	4 Thlr.	11 gr.	0	
	24	12		
	96 gr.	132 pf.		

387 Lachter 6 Achtel — Primen durch 8

8)	387 Lr.	6 Ach.	48 Lr. 3 Achtel 7 Zoll 5 Primen.
	32	24	
	67	30 ⸗	
	64	24	
	3 Lr.	6 Achtel	
	8	10	
	24 Acht.	60 Zoll	
		56 ⸗	
		4 Zoll	
		40 Primen	
		40 ⸗	
		0	

Zwey⸗

Zweyter Fall.

Wenn der Divisor auch benannt ist.

Z. E. Es sollen 454 Thlr. 22 gr. 3 pf. so vertheilt werden, daß jeder 26 Thlr. 18 gr. 3 pf. erhalte; wie viel Personen können hieran Antheil nehmen?

Auflösung. Man bringe beyde Zahlen auf den kleinsten Namen, und suche nach den gemeinen Regeln der Division, wie viel mal die kleinere Zahl in der großen enthalten ist. In diesem Falle hier sind

26 Thlr. 18 gr. 3 pf. und 454 Thlr. 22 gr. 3 pf.

24		24	
624 gr.		10896 =	
18 =		22	
642 =		10918 =	
12		12	
7704 =		131016 =	
3		3	
7707 =	in	13'1'019 =	17 Personen.
		7707 =	
		53949	
		53949	
		0	

§. 61.

Für die Division einer ungleichbenannten Zahl durch einer ganzen Zahl ist nun ebenfalls die Zerlegungsmethode wie §. 28. öfters sehr brauchbar und leicht.

Die

Die vorhin im ersten Falle angegebnen Beyspiele würde man daher auch so dividiren können.

15) 229 Thlr. 20 gr. 3 pf.
3 | 76 „ 14 „ 9 „
5 | 15 „ 7 „ 9 „

1 Thlr. = 24 gr.
20 „
3) 44

2 pf. = 24 pf.
3 „
3) 27 pf.

1 Thlr. = 24 gr.
14 „
5) 38

3 pf. = 36 pf.
9
45 „

Oder

8) 387 Lr. 6 Achtel
4 | 96 „ 7 „ 5 Zoll
2 | 48 „ 3 „ 5 „ 5 Pr.

3 Lr. = 24 Atl.
6 „
4) 30 „

2 Atl. = 20 Zll.
4) 5 „

Beyspiele zur Uebung.

1) Eine Grube hat in einem Quartal 1549 Thlr. 18 gr. 7 pf. an Erzen geliefert: Wie viel beträgt hiervon das Achtzehnde?

2) Wie groß ist der 24ste Theil von 256 Lr. 5 Achtel 8 Zoll 6 Prim.?

3) Eine Länge von 2649 Lachtern soll in 18 Theile getheilt werden; wie groß ist ein Theil?

4) Eine Grube hat in 12 Jahren 1509 Mark 13 Loth 2 Quent Silber geliefert; was kommt im Durchschnitt auf ein Jahr?

5) Unter 125 Personen werden 379 Thlr. 4 gr. vertheilt, wie viel bekommt jeder?

6) Wie viel mal sind 2 Centner 15 Pfund 8 Loth in 36 Centnern 39 Pfund 8 Loth enthalten?

7) 409 Thlr. 2 gr. 8 pf. sollen unter eine gewisse Anzahl Personen vertheilt werden, daß jede

25

25 Thlr. 13 gr. 8 pf. erhält; wie viel Personen gehören dazu?

8) Es sollen dividirt werden:

188 Lr. 6 Achtellr. 5 Zoll 8 Pr. durch 5 Lr. 7 A. 9 Z. 6 Pr.

123 Lr. 7 A. 9 Z. 5 Pr. durch 15 Lr.

Zweyter Abschnitt.

Von den Proportionen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Lehren von den Proportionen.

§. 62.

Vier Zahlen heißen proportionirt, z. E. 3, 6, 4, 8, wenn die erste (3) in die zweyte (6), und die dritte (4) in die vierte dividirt, gleiche Quotienten geben, $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$. Man pflegt alsdann auch zu sagen: daß sich die erste Zahl zur zweyten, wie die dritte zur vierten verhalte, oder daß das erste und zweyte Paar einerley Verhältnis haben; und nennt die Gleichheit der Verhältnisse eine Proportion, zu deren Bezeichnung man sehr bequem das Divisions- und Gleichheitszeichen gebraucht, nämlich $3 : 6 = 4 : 8$.

Die proportionirten Zahlen 3, 6, 4, 8 heißen die Glieder der Proportion $3 : 6 = 4 : 8$, und zwar:

zwar: die erste (3) und vierte (8) äußere, die zweyte (6) und die dritte (4) mittlere, die erste (3) und dritte (4) Vorderglieder, und die zweyte (6) und vierte (8) Hinterglieder der beyden Verhältnisse.

Das erste (3) und dritte (4), so wie das zweyte (6) und vierte (8) Glied nennt man auch ähnlichliegende Glieder.

Anmerkung. Sind die Vorderglieder kleiner als die Hinterglieder, so heißt die Proportion steigend, wie

$3 : 6 = 4 : 8$; oder
$3 : 12 = 2 : 15$;

sind aber die Vorderglieder größer als die Hinderglieder, so ist die Proportion eine fallende, wie

$6 : 3 = 8 : 4$ oder
$4 : 2 = 6 : 3$, oder
$15 : 5 = 18 : 6$.

§. 63.

Der Quotient, den das erste Glied in das zweyte, oder das dritte in das vierte Glied dividirt, giebt, heißt der Name des Verhältnisses oder der Exponent, welcher bey einer steigenden Proportion eine ganze Zahl, bey einer fallenden ein Bruch ist.

So ist z. B. in der Proportion a) $3 : 6 = 4 : 8$ der Verhältnisname $= \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$; in der Proportion b) $15 : 5 = 18 : 6$ aber der Name des Verhältnisses $\frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Zusatz. Ein Product aus dem ersten Glied in den Namen des Verhältnisses giebt das zweyte Glied des Verhältnisses. So ist z. B. in der vorigen Proportion

a) $6 = 3 \cdot 2$; $8 = 4 \cdot 2$; und in der Proportion
b) $5 = 15 \cdot \frac{1}{3}$, $6 = 18 \cdot \frac{1}{3}$.

§. 64.

In jeder Proportion, $3 : 6 = 4 : 8$, ist das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern.

Beweis. Nach der angenommenen Proportion $3 : 6 = 4 : 8$, ist $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ (§. 62.), oder unter einerley Benennung gebracht, $\frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3}$, folglich, mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt, $6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$.

Eben so ist in $\underline{15 : 5 = 18 : 6}$

$$15 \cdot 6 = 5 \cdot 18.$$

Zusatz 1. Zu jeden drey gegebnen Zahlen 3, 6, 4, findet man die vierte Proportionalzahl, die man mit x zu bezeichnen pflegt, wenn man die erste in das Product der beyden andern dividirt, oder den Verhältnisnamen der beyden ersten Glieder mit dem dritten multiplicirt.

Denn es soll seyn $\underline{3 : 6 = 4 : x}$, folglich

$$3x = 6 \cdot 4;$$

mit 3 dividirt, $x = \frac{6 \cdot 4}{3}$ oder $\frac{6}{3} \cdot 4$

$$= \frac{24}{3} \text{ oder } 2 \cdot 4 = 8.$$

Zusatz 2. Ist das erste Glied die Einheit, $1 : 4 = 5 : x$, so ist $x = 4 \cdot 5$; das ist: das Product aus zwey Zahlen ist die vierte Proportionalzahl zur Einheit und den beyden Factoren.

Ist das zweyte Glied die Einheit, $5 : 1 = 20 : x$, so ist $x = \frac{20}{5}$; das ist: der Quotient aus zwey Zahlen ist die vierte Proportionalzahl zum Divisor, der Einheit und dem Dividendus.

§. 65.

Aus jeder Proportion $3 : 6 = 4 : 8$ folgt auch durch Umkehrung $6 : 3 = 8 : 4$, und durch Verwechselung $3 : 4 = 6 : 8$.

Beweis. Da nach der angenommenen Proportion $3 \cdot 4 = 6 \cdot 4$ (§. 64.): so ist,

1) wenn man mit dem Producte der Hinterglieder $6 \cdot 8$ dividirt, $\frac{3 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{6 \cdot 4}{6 \cdot 8}$, und diese Brüche aufgehoben $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, folglich $6 : 3 = 8 : 4$ (§. 62.).

2) Wenn man mit dem Producte der beyden letzten Glieder $4 \cdot 8$ dividirt, $\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{6 \cdot 4}{8 \cdot 4}$, und diese Brüche aufgehoben $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, folglich $4 : 3 = 8 ; 6$, und durch Umkehrung $3 : 4 = 6 ; 8$.

§. 66.

Sind vier Zahlen proportionirt: so bleiben sie auch noch proportionirt, wenn man die beyden ersten oder die beyden letzten, oder ähnlichliegende Glieder mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt.

Wenn $4 : 8 = 6 : 12$, so ist auch

1) $4 \cdot 2 : 8 \cdot 2 = 6 : 12$, d. i.
$8 : 16 = 6 : 12$ und daher
$8 \times 12 = 16 \cdot 6$ (§. 64.)
d. i. $96 = 96$.

2) $4 : 8 = 6 \cdot 3 : 12 \cdot 3$ d. i.
$4 : 8 = 18 : 36$, daher
$2 = 2$ (§. 62.)

3) $4 \cdot 3 : 8 \cdot 3 = 6 \cdot 4 : 12 \cdot 4$ d. i.
$12 : 24 = 24 : 48$, dies giebt
$2 = 2$ (§. 62.)

$$4)\ \tfrac{4}{2} : 8 = \tfrac{6}{2} : 12 \text{ d. i.}$$
$$2 : 8 = 3 : 12 \text{ und}$$
$$2 \times 12 = 8 \cdot 3\ (\S. 64.)$$

Eben so folgt aus obiger Proportion

$$5)\ 4 \cdot 3 : 8 = 6 \cdot 3 : 12, \text{ d. i.}$$
$$12 : 8 = 18 : 12$$
$$6)\ \tfrac{4}{2} : \tfrac{8}{4} = \tfrac{6}{2} : \tfrac{12}{4} \text{ d. i. } 2 : 2 = 3 : 3$$
$$7)\ 4 : \tfrac{8}{2} = 6 : \tfrac{12}{2} \text{ d. i. } 4 : 4 = 6 : 6$$
$$8)\ \tfrac{4}{2} : \tfrac{8}{2} = \tfrac{6}{3} : \tfrac{12}{3} \text{ d. i. } 2 : 4 = 2 : 4.$$

Zusatz 1. Multiplicirt man von zwey Brüchen jeden mit dem Nenner des andern, so wird ihr Verhältnis durch ganze Zahlen ausgedrückt.

Z. E. $\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{7} = 3 \cdot 7 : 5 \cdot 4 = 21 : 20$

Denn multiplicirt man diese Brüche mit dem Producte aus ihren Nennern, so ist offenbar

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{4} : \frac{5 \cdot 4 \cdot 7}{7} = 3 \cdot 7 : 5 \cdot 4.$$

Zusatz 2. Zur Erläuterung des Bisherigen mögen noch folgende Beyspiele dienen:

I zu den Zahlen 4, 12, 32, nach der Ordnung hier, die vierte Proportionalzahl zu finden?

Auflösung. 1) Nach §. 64. Zus. 1. soll sich verhalten

$$4 : 12 = 32 : x$$
$$\text{folgl. } x = \frac{12 \cdot 32}{4} = 96. \text{ Daher}$$
$$4 : 12 = 32 : 96.$$

2) Oder nach §. 64. Zusatz suche man den Exponenten des Verhältnisses, nämlich:

$$4 : 12 = 32 : x$$
$$3, \text{ und multiplicire diesen mit } 32,$$
$$\text{also } x = 32 \cdot 3 = 96.$$

3) Oder nach §. 66. dividire man die fordern ähnlichliegenden Glieder durch einerley Zahl, als:

$$4 : 12 = 32 : x \text{ oder}$$
$$\tfrac{4}{4} : 12 = \tfrac{32}{4} : x \text{ d. i.}$$
$$1 : 12 = 8 : x$$
$$\text{also } x = 8 \cdot 12 = 96.$$

Oder hätte man die Proportion
$12 : 15 = 16 : x$ so dividire man,

4) um x zu finden, entweder erst die beyden ersten oder die fordern ähnlichliegenden Glieder durch eine Zahl, welche in beyden aufgeht, nämlich:

$\frac{12}{3} : \frac{15}{3} = 16 : x$ d. i.

$4 : 5 = 16 : x$ (§. 66. 8.)

also $x = \frac{5 \cdot 16}{4} = 20$. Oder nach §. 66, 4.

$\frac{12}{4} : 15 = \frac{16}{4} : x$ d. i.

$3 : 15 = 4 : x$

also $x = \frac{4 \cdot 15}{3} = \frac{60}{3} = 20$.

II. Zu den Zahlen 18, 15, 12 die vierte Proportionalzahl zu finden:

Auflösung. 1) $18 : 15 = 12 : x$ d. i. auch n. §. 66.

$\frac{18}{3} : \frac{15}{3} = 12 : x$

$6 : 5 = 12 : x$ also $x = \frac{60}{6} = 10$.

2) $\frac{18}{6} : 15 = \frac{12}{6} : x$ d. i.

$3 : 15 = 2 : x$ also $x = \frac{30}{3} = 10$.

Oder nach §. 65.

3) $18 : 12 = 15 : x$ oder nach §. 63. Zus. weil hier der Exponent $= \frac{2}{3}$, also $x = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10$.

III. Zu den Zahlen $\frac{3}{4}$, 5, 9 das x zu finden:

$\frac{3}{4} : 3 = 9 : x$ oder nach §. 66.

$\frac{3 : 4}{4} : 5 \cdot 4$

$3 : 20 = 9 : x$, also $x = 60$.

Zu $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ 16 das x zu finden:

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = 16 : x$, d. i. $3 \cdot 6 : 5 \cdot 4 = 14 : x$

§. 66. Zus. d. i. $18 : 20 = 16 : x$

also $x = \frac{20 \cdot 16}{18} = 17\frac{7}{9}$.

Zu $\frac{5}{7}$, 9, $\frac{3}{8}$ das x zu finden:

$\frac{5}{7} : 9 = \frac{3}{8} : x$, oder

$\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = 9 : x$ oder

$5 \cdot 8 : 3 \cdot 7 = 9 : x$ d. i.

$40 : 21 = 9 : x$, also $x = 4\frac{29}{40}$.

Beyspiele zur Uebung.

1) Zu den Zahlen 9, 27, 36 die vierte Zahl zu
2) " " 7, 21, 25 finden?

3)

3) Zu den Zahlen 4, 9, 12 die vierte Zahl zu
4) " " 4, $\frac{3}{4}$, 9 finden?
5) " " $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{9}$, 11 " "
6) " " $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{8}$, 21 " "
7) " " $\frac{3}{4}$, 6, $\frac{7}{9}$ " "
8) " " 8, $\frac{5}{6}$, 15 " "
9) " " 8, 3, 72 " "
10) " " 7, 35, 63 " "
11) " " 18, 3, 72 " "
12) " " $3\frac{5}{8}$, $1\frac{3}{4}$, 12 " "

§. 67.

Werden die Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt: so sind die Producte in eben der Ordnung proportionirt; welches man Zusammensetzung der Proportionen nennt.

Beweis. Es sey

$$\begin{array}{rl|l} & 6 : 2 = 9 : 3 & \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \\ & 8 : 4 = 10 : 5 & \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \\ \hline \text{also} & 6 \cdot 8 : 2 \cdot 4 = 9 \cdot 10 : 3 \cdot 5 & \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{10} \\ \text{d. i.} & 48 : 8 = 90 : 15 & \\ & 6 = 6 & \end{array}$$

Zusatz. Ist daher

$$\begin{array}{l} 2 : \cancel{4} = 3 : 6 \\ \cancel{4} : \cancel{12} = 5 : 15 \\ \cancel{12} : 3 = 4 : 1 \\ \hline \end{array}$$

so ist $2 : 3 = 3 \cdot 5 \cdot 4 : 6 \cdot 15 \cdot 1 = 60 : 90$

 Oder

Oder ist

$$3 : \cancel{6} = 4 : \cancel{8}$$
$$\cancel{6} : \cancel{18} = \cancel{8} : \cancel{24}$$
$$\cancel{18} : 36 = \cancel{24} : 48$$

so ist $3 : 36 = 4 : 48$

Zweytes Kapitel.

Von den Proportionen in benannten Zahlen.

§. 68.

Nur Dinge von einerley Art können zu einander ein Verhältnis haben; als welches aus dem Quotienten erkannt wird, den das fordere Glied in das folgende Glied dividirt, giebt.

Z. E. 3 Lachter zu 7 Ellen kann kein Verhältnis seyn, wohl aber 3 Lachter : 6 Lr. oder 7 Ellen : 14 Ellen.

Anmerk. Haben die Dinge von einerley Art verschiedene Namen, so können sie öffters auf einerley Namen gebracht werden. Z. E. 7 Lachter : 2 Ellen ist ein Verhältnis, nämlich das Verhältnis 7 · 14 Fuß : 2 · 2 Fuß, d. i. 98 Fuß : 4 Fuß.

§. 69.

Vier Größen sind proportionirt, wenn das Verhältnis des einen Paars, dem Verhältnis des andern Paares gleich ist (§. 61.).

Z. E. 4 Pfund kosten 3 Thlr. und 8 Pfund kosten 6 Thlr., wo 4 Pfund : 8 Pfund = 3 Thlr. : 6 Thlr.; aber nicht 4 Pfund : 3 Thlr. = 8 Pfund : 6 Thlr., welches widersinnig ist (§. 68.)

§. 70.

§. 70.

Zwey Größen verschiedner Art stehen mit einander in geraden Verhältnis, wenn beyde nach einerley Maaße entweder zugleich wachsen, oder zugleich abnehmen; so daß mit derjenigen Zahl, womit die eine Größe entweder multiplicirt, oder dividirt wird, auch die andre multiplicirt, oder dividirt werden muß.

Hiernach stehet in geraden Verhältnis

1) die Zeit, oder die Anzahl der Arbeiter, mit der Größe der Arbeit.

2) Das Gewicht, oder die Größe und Anzahl der Waare, mit der Größe des Preises, u. s. w.

Z. E. Wenn 4 Häuer in einer gewissen Zeit vor einem Ort 3 Lachter Ortslänge auffahren, so werden 2 · 4 Häuer = 8 Häuer bey derselben Festigkeit des Gesteins und in derselben Zeit 2 · 3 Lachter = 6 Lachter auffahren.

§. 71.

Zwey Größen verschiedner Art stehen mit einander in verkehrtem Verhältnis, wenn die eine Art nach eben dem Maaße wächst, nach welchem die andere abnimmt; so daß mit derjenigen Zahl, womit die eine multipliciret wird, die andre dividirt werden muß.

Hiernach stehet in verkehrten Verhältnis

1) die Zahl der Arbeiter mit der Zeitdauer der Arbeit.

2) Die Zahl der Menschen mit der Zeitdauer der vorräthigen Lebensmittel u. s. f.

Z. E. Wenn 3 Häuer in 4 Wochen 2 Lachter Ortslänge auffahren könnten, es sollte aber diese Länge in 2 Wochen aufgefahren werden: so würden dazu 6 Häuer erfordert werden.

§. 72.

Das Verhältnis zweyer Größen von gleichen Namen ist dem Verhältnis ihrer Zahlen gleich.

Z. E. 4 Lachter : 8 Lachter = 4 : 8, weil $\frac{8\ \text{Lr.}}{4\ \text{Lr.}} = \frac{8}{4} = 2$ ist.

Zusatz. 1) Sind die Glieder einer Proportion benannte Zahlen: so läßt sich jedes der beyden gleichen Verhältnisse durch unbenannte Zahlen ausdrücken, nachdem vorher ihre Glieder auf einerley Namen gebracht worden, wenn sie nicht schon selbst einerley Namen haben.

Z. E. Die Proportion §. 69. 4 Pfund : 8 Pfund = 3 Thlr. : 6 Thlr. heißt 4 : 8 = 3 Thlr. : 6 Thlr. oder 4 : 8 = 3 : 6.

Zusatz. 2. Eine solche Veränderung des Ausdrucks ist nothwendig, wenn die Lehren der Proportionen auf benannte Zahlen angewendet werden sollen. Z. E. Aus der Form in §. 69. 4 Pfund : 8 Pfund = 3 Thlr. : 6 Thlr. würde nach §. 64. folgen 4 Pfund × 6 Thlr. = 8 Pfund × 3 Thlr., welches widersinnig ist; da hingegen aus der andern Form in vorigen Zusatz 4 : 8 = 3 Thlr. : 6 Thlr. richtig folgt 4 × 6 Thlr. = 8 × 3 Thlr.

§. 73.

Die Vorschrift, eine Größe zu finden, welche mit drey gegebnen Größen eine Proportion ausmache, oder das vierte Glied der Proportion, das man mit x zu bezeichnen pflegt, aus den drey ersten gegebnen Gliedern zu berechnen (§. 64. Zus. 1.) heißt die Regel de Tri, oder die Regel von drey Gliedern.

Z.

Z. E. 4 Pfund kosten 3 Thlr., was kosten 8 Pfund? Hier sind 3 Thlr. : x Thlr. in dem Verhältnis der 4 Pfund : 8 Pfund, oder der 4 : 8; daß also 4 Pfund : 8 Pfund = 3 Thlr. : x Thlr., oder 4 : 8 = 3 Thlr. : x Thlr.,

folglich $x = \frac{8 \cdot 3}{4}$ Thlr. = 6 Thlr.

Anmerk. Sind die Glieder in den beyden gleichen Verhältnissen nicht von einerley Namen, so müssen sie vorher darauf gebracht werden, ehe man sie durch unbenannte Zahlen ausdrückt (§. 72. Z. 1.).

Z. E. 1 Centner kostet 3 Thlr. 16 gl., was kosten 5 Pfund? Hier setzt man 1 Cent. : 5 Pfund = 3 Thlr. 16 gr. : x. Dies giebt 110 Pfund : 5 Pfund = 88 gr. : x gr., und nun 110 : 5 = 88 gr. : x gr.; oder auch 110 : 5 = 88 : x, nur daß man sich hierbey den Namen von x bemerkt.

§. 74.

Allgemein heißt die Vorschrift, zu einer gegebnen Größe eine andre mittelst gegebner Verhältnisse zu finden, die Proportionsrechnung. Diese ist entweder einfach, wenn ein einziges gegebnes Verhältnis hinreicht, oder zusammengesetzt, wenn mehrere gegebne Verhältnisse erforderlich sind.

Die einfache Proportionsrechnung heißt die Regel de Tri (§. 73.); die zusammengesetzte hingegen erhält nach der Anzahl der gegebnen Glieder der verschiednen Proportionen, auch verschiedne Namen, als: Regel de Quinque, Kettenrechnung u. s. w.

Sowohl die einfache, als auch die zusammengesetzte Proportionsrechnung wird wieder in die gerade (§. 70.) und umgekehrte (§. 71.) eingetheilt.

I. Einfache Proportionsrechnung.

A. Gerade Regel de Tri.

§. 75.

Um eine Aufgabe der Regel de Tri (§. 73.) richtig aufzulösen, so muß

1) die Aufgabe richtig angesetzt werden. Von den drey gegebnen Gliedern bringt man nämlich das bekannte gleichartige Verhältnis in das erste und zweyte Glied, doch so, daß die Fragezahl allemal in das zweyte Glied zu stehen komme. Das Prädikat des ersten Gliedes, welches mehrentheils eine Angabe von dessen Werth in Dingen anderer Art enthält, schreibt man in das dritte Glied (§. 73.).

2) Die beyden Glieder des ersten Verhältnisses müssen einerley Benennung haben; haben sie diese nicht, so müssen sie noch vor der Rechnung unter einerley Benennung gebracht werden (§. 73. Anm.)

3) Die mittlern Glieder werden nun mit einander multiplicirt, und das Product durch das erste dividirt (§. 64. Zus. 1.). Auch kann man sich öffters die Rechnung dadurch sehr erleichtern, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividirt, und dann mit dem dritten Glied multiplicirt (§. 64. Zus. und §. 67. Zus. 2. 1 2.).

4) Das vierte Glied enthält die nämliche Benennung, welche das dritte Glied hat (§. 73. Anm.).

§. 76.

§. 76.

Der Deutlichkeit wegen und zu einiger Erleichterung für Anfänger handelt man in der einfachen Regel de Tri von Multiplications- Divisions- und gemischten Aufgaben.

Multiplications-Aufgaben sind solche, wo bey gleicheu Bennungen der beyden ersten Glieder der Proportion das erste Glied 1 ist und wo man nur die mittlern Glieder mit einander zu multipliciren hat, um das vierte unbekannte Glied zu finden (§. 64. Zus. 2. 1.).

Divisions-Aufgaben sind solche, wo bey gleichen Benennungen der ersten Glieder, das zweyte oder dritte 1 ist, und weil 1 nicht multiplicirt, nur das erste ins zweyte oder dritte dividirt wird.

In gemischten Aufgaben aber ist, bey gleicher Benennung des ersten Verhältnisses, in keinem der drey gegebnen Glieder eine 1. Da muß dann nach der allgemeinen Regel §. 64. Zus. 1. verfahren werden oder nach der Regel 3 des vorigen §. Ueber die leichtere Auflösung jeder dieser Art Aufgaben lassen sich mehrere speziellere Regeln geben, wovon hier nur die vorzüglichsten folgen:

a) Multiplications-Aufgaben.

§. 77.

Regel 1. Wenn das dritte Glied aus zwey oder mehrern Sorten besteht, das zweyte Glied aber eine kleine Zahl, oder eine solche enthält, die sich leicht zerfällen läßt, so multiplicirt man das dritte Glied mit dem zweyten, als dem wahren Multiplicator.

Z. E. Wenn 1 Centner 5löthiges Erz mit 2 Thlr. 4 gr. 6 pf. bezahlt wird, was werden für 6 Centner von demselben Erz bezahlet werden. Die drey Glieder dieser Proportion stehen also:

1 Cent. : 6 Cent. = 2 Thlr. 4 gr. 6 pf. : x, oder

1 : 6 = 2 Thlr. 4 gr. 6 pf. : x.

Also x = 6 × 2 Thlr. 4 gr. 6 pf. (§. 64. Zus. 2.) und daher nach §. 57. x =

2 Thlr.	4 gr.	6 pf.	(6
13 Thlr.	3 gr.	— pf.	

Anmerk. Auch hier läßt sich die Regel des §. 58. anwenden. Voriges Beyspiel lies sich auch so auflösen:

2 Thlr.	4 gr.	6 pf.	× 6
4.	9.	—	2
13 Thl.	3 Thl.	—	3

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn der Centner Pulver 34 Thlr. 8 gr. kostet, was kosten 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 Centner?

2) Die Bürde Stahl kostet 12 Thlr. 8 gr. ohne Accise, und da man für jede Bürde 5 gr. Accise entrichten muß: was kosten 4, 5, 6, 8 Bürden ohne und mit Accise?

3) Ein Schock Spündenagel kosten 4 gr. 2 pf. was kosten 12, 16, 20, 24, 28, 35 Schock?

4) Wenn der Centner $3\frac{1}{2}$löthiges Silbererz mit 1 Thlr. 9 gr. 10 pf. bezahlt wird, was erhält man für 8, 12, 16, 24 Centner dergleichen Erz Bezahlung?

§. 78.

§. 78.

Regel 2. Wenn das zweyte Glied aus einer so großen Zahl besteht, die sich nicht ohne viele Mühe in kleinere Factoren zerfällen läßt, da thut man allemal am besten, wenn man die geringere Geldsorte als einen Theil der höhern annimmt.

Z. B. Wenn der Centner 1löthiges Silbererz mit 6 gr. bezahlt wird, was machen 8 Centner für eine Bezahlung?

1 Cent. : 8 Cent. = 6 gr. : x gl. Oder
$1 : 8 = \frac{1}{4}$ Thlr. : x Thlr. Also
$x = 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$ Thlr.

Oder, bey 2löthigen Silbererzen wird der Centner mit 16 gr. bezahlt; was werden demnach für 12 Cent. bezahlt werden müssen?

1 Cent. : 12 Cent. = 16 gr. : x oder
$1 : 12 = \frac{2}{3}$ Thlr. : x Thlr. Also
$x = 12 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$ Thlr.
(§. 73. Anm.)

Zusatz. Um zu erfahren, was für ein Theil eine niedrige Sorte von der höhern sey, so nimmt man die bekannte ganze Zahl (z. B. hier 6 gr. oder 16 gr.) als den Zähler eines Bruchs an und setzt die Reduktionszahl (§. 51.) als Nenner darunter und sucht dann den Bruch so viel wie möglich abzukürzen. So sind also z. B.

$$6 \text{ gr.} = \tfrac{6}{24} \text{ Thlr.} = \frac{\overset{6}{\smile}\; 6}{24} \Big| \frac{1}{4} \text{ Thlr. (§. 36. 37.)}$$

$$16 \text{ gr.} = \tfrac{16}{24} \text{ Thlr.} = \frac{\overset{8}{\smile}\; 16}{24} \Big| \frac{2}{3} \text{ Thlr.}$$

Eben

Eben so verfährt man bey Pfennigen: z. B.

$$4 \text{ pf.} = \tfrac{4}{12} \text{ pf.} = \frac{\overset{4}{\smile}\,4}{12} \Big| \frac{1}{3} \text{ gr. oder auch}$$

$$4 \text{ pf.} = \tfrac{4}{288} \text{ Thlr.} = \frac{\overset{4}{\smile}\,4}{288} \Big| \frac{1}{72} \text{ Thlr.}$$

Z. B. Eine Grube erhält von jedem Centner gelieferten Erz 6 pf. Fuhrlohn-Betrag aus der General-Schmelz-Administrations-Kasse. Wenn nun diese Grube 458 Cent. Erz in einem Quartal geliefert hat, wie viel wird sie aus jener Kasse erhalten?

1 Cent. : 458 Cent. = 6 pf. : x pf. oder
1 : 458 = $\frac{1}{2}$ gr. : x gr. Also
$x = \frac{458}{2} = 229$ gr. $= \frac{229}{24} = 9$ Thlr. 13 gr.
(§. 52 II.) Oder auch
1 Cent. : 458 Cent. = $\frac{6}{288}$ Thlr. : x Thlr. d. i.
1 : 458 = $\frac{1}{48}$ Thlr. : x Thlr. Also
$x = \frac{458}{48}$ Thlr. = 9 Thlr. 13 gr.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn eine zweyböhrige Röhre 8 gr. kostet, was werden 183 Stück kosten?

2) Wie hoch werden 15 zweymännische gewöhnliche Kübelhölzer kommen, wenn für 1 Stück 6 gr. bezahlt werden?

3) Für eine Erzkörbe werden 3 gr. bezahlt, wie viel wird man für 32 Stück bezahlen müssen?

4) Wenn das Pfund Leder mit 8 gr. bezahlt wird, was werden 1 Centner 68 Pfund kosten?

5) Was werden 2 Cent. 34 Pfund Inselt kosten, wenn das Pfund mit 6 gr. bezahlt wird?

6) Wenn man für 1 Keilhaue zu schärfen 6 pf. geben muß, wie viel wird man für 25 Stück bezahlen müssen?

7) Für 1 Schock Laimwolgern giebt man im Gedinge 4 pf., was wird man für 325 Schock geben müssen?

8) Wenn man für 1 Fuhre Scheideerz in das Pochhaus zu fahren 4 gr. bezahlen muß, wie viel wird man für 42 Fuhren bezahlen müssen?

§. 79.

Eine große Schwierigkeit bey Aufgaben dieser Art verursachen öfters die unbequemen Pfennige und Groschen. Die unbequemen Pfennige sind: 5, 7 und 11. Die unbequemen Groschen sind: 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23. Kommen diese in einer Aufgabe vor, so verfährt man auf folgende Art:

1) man zerfällt die unbequemen Pfennige oder Groschen durch die Addition, und nimmt sie dann als Theile von einem Groschen, Gulden oder Thaler an. So kann man z. B. 7 Pfennige in 6 und 1 zerfällen; 6 pf. sind $\frac{1}{2}$ gr. und 1 pf. ist von 6 pf. der sechste Theil; 19 gr. kann man in 12, 6 und 1 zerfällen; 12 gr. ist $\frac{1}{2}$ Thlr., 6 gr. von 12 gr. ist $\frac{1}{2}$, und 1 gr. von 6 pf. = $\frac{1}{6}$.

Z. B. Wenn man für 1 Fuhre Pochgänge, zu fahren 7 gr. geben müßte, was würden 96 Fuhren kosten? So ist

1 Fuhre : 96 Fuhren = 7 gr. : x Thlr.

4)	24	6	4
6	4	1	6
	28 Thlr.		

Erklär.

Erklär. Denn die 7 gr. sind hier in 6 gr. und 1 gr. zerfällt. 6 gr. sind $\frac{1}{4}$ Thlr. und 1 gr. ist von 6 gr. = $\frac{1}{6}$. Mit dem Nenner 4 wurde das zweyte Glied dividirt und der dadurch erhaltne Quotient wieder durch den Nenner 6; beyde Quotienten zusammen geben 28 Thlr.

2) Oder man kann gleich das zweyte Glied für diejenige Sorte annehmen, die das dritte Glied enthält, dasselbe dann durch die Division in die höhere Sorte verwandeln, und hierauf die mittlern Glieder in einander multipliciren. Enthält z. B. das dritte Glied unbequeme Groschen, so nimmt man das zweyte Glied für Groschen an, dividirt es durch 24 zu Thalern, und nun erst multiplicirt man die mittlern Glieder. So würde man vorige Angabe auch also auflösen.

1 Fuhre : 96 Fuhren = 7 gr. ($\frac{7}{24}$ Thlr.)

24) 4 Thlr. (7

28 Thlr.

Weil hier das dritte Glied Groschen enthält, so wurde das zweyte Glied, die 96 Fuhren, gleich für so viel Groschen angenommen und durch 24 dividirt, so kommen 4 Thlr.; multiplicirt man nun die mittlern Glieder, so kommen 28 Thlr.

Oder: Wenn 1 Pfund Juchtenleder 11 gr. kostet, was kosten 85 Pfund?

1 Pfund : 85 Pfund = 11 gr.

3)	28 Thlr.	8 gr.	8	3
4)	7 „	2 „	2	4
2)	3 „	13 „	1	2
	38 Thlr.	23 gr.		

Oder

Oder

1 Pfund : 85 Pfund = 11 gr. ($\frac{11}{24}$ Thlr.)

24) 3 Thlr. 13 gr. (11

38 Thlr. 23 gr.

Oder

1 Pfund : 85 Pfund = 11 gr.

24 3 Thlr. 13 gr. (11 = 3 · 3 + 2

10 Thlr. 15 gr. (3

31 Thlr. 21 gr. (3

7 Thlr. 2 gr.

38 Thlr. 23 gr. (s. §. 58.)

Zusatz. Ist im dritten Gliede eine solche Zahl enthalten, wo nur noch 1 mangelt, um die höhere Sorte zu erreichen, so kann man gleich das 2te Glied für so viele Ganze der höhern Sorte annehmen und den Betrag des einen noch mangelnden davon abziehen.

Z. B. Wie theuer kommen 173 Ellen, die Elle zu 11 pf.?

1 Elle : 173 Ellen = $\underbrace{\text{11 pf.}}_{\text{1 gr. — 1 pf.}}$

12) 14 gr. 5 pf.

158 gr. 7 pf.

24) 6 Thlr. 14 gr. 7 pf.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn 1 Tonne Steinkohlen incl. Fuhrlohn 19 gr. kostet, was kosten 34 Fuhren?

2) Ein großes Abläuterfaß kostet 23 gr. was 15 Stück?

3) Was werden 19 Stück zweymännische Zoberhölzer kosten, wenn 1 Stück 13 gr. kostet?

§. 80.

Enthält das dritte Glied zwey oder drey Münzsorten, so nimmt man die niedrigern Sorten als Theile der höhern an und dividirt mit den Nennern das zweyte Glied.

Z. B. Wie theuer kommen 120 Lachter Bergseil, das Lachter zu 3 gr. 2 pf.?

1 Lr. : 120 Lr. = 3 gr. 2 pf.
8   15 $\frac{1}{8}$ Thlr. $\frac{1}{18}$ von 3 gr.
18   = 20
15 Thlr. 20 gr. —

Erklär. Denn die 3 gr. im dritten Gliede sind $\frac{1}{8}$ Thlr., 120 mal 3 gr. sind also eben so viel als $\frac{120}{8}$ Thlr. = 15 Thlr. Da nun 2 pf. von 3 gr. oder 36 pf. der 18te Theil sind, so darf man nur die 15 Thlr. durch 18 dividiren und dann beyde Quotienten addiren, welche 15 Thlr. 20 gr. betragen.

Beyspiele zur Uebung.

1) Ein Lachter Bergseil kostet 2 gl. 6 pf., was 100 Lachter?

2) Ein Pfund Helferseil kostet 6 gr. 6 pf., was 1 Centner 4 Pfund?

3) Ein Pfund Grubenlichte kosten 4 gr. 8 pf., was 1 Cent. 18 Pfund?

4) Ein Centner Erz 13 gr. 2 pf., was 25 Cent.?

§. 81.

Regel 3. Enthält das zweyte oder dritte Glied oder beyde Glieder einen Bruch, so verfährt man damit, wie man Brüche multiplicirt, und wie bereits §. 42. gelehret worden.

Z. B. 1) Wenn 1 Lachter Ort für 15 Thlr. verdungen ist, wie viel werden $\frac{3}{8}$ Lachter betragen?

1 Lr. : $\frac{3}{8}$ Lr. = 15 Thlr. (3

45

8) 5 Thlr. 15 gr.

Oder 2) wenn 4 Doppelhäuer vor einem Ort binnen 4 Wochen $4\frac{1}{2}$ Lr. aufgefahren haben, und solchen das Lachter incl. Pulver für 5 Thlr. 6 gr. verdingt gewesen ist; wie viel werden solche nach Abzug ihres Wochenlohns und der 16 Pfund Pulver á 8 gr., so sie hierbey verschossen haben, gewinnen oder verlieren?

1 Lr. : $4\frac{1}{2}$ Lr. = 5 Thlr. 6 gr.

d. i. 1 : $\frac{9}{2}$ = 5 Thlr. 6 gr. (9

47 Thlr. 6 gr.

2) 23 Thlr. 15 gr.

oder 1 Lr. : $4\frac{1}{2}$ Lr. = $5\frac{1}{4}$ Thlr. : x

d. i. 1 : $\frac{9}{2}$ = $\frac{21}{4}$ Thlr. : x Thlr.

$$x = \frac{9 \times 21}{2 \times 4} = \frac{189}{8} = 23\tfrac{5}{8}\ \text{Thlr.}$$

Da nun das Doppelhäuerlohn wöchentlich 1 Thlr. 3 gr. in 4 Wochen 4 mal 1 Thlr. 3 gr. oder 4 Thlr. 12 gr. und folglich von 4 Doppelhäuern in 4 Wochen 4×4 Thlr. 12 gr. oder 18 Thlr. beträgt; so wie die 16 Pfund Pulver á 8 gr. $= 16 \times \frac{1}{3}$ Thlr. $=$ 5 Thlr. 8 gr. betragen, so muß untersucht werden; ob der Werth der aufgefahrnen Länge größer oder kleiner als das gewöhnliche Lohn der Arbeiter incl. des Pulvers ist, wo dann im ersten Falle die Arbeiter gewinnen, im letzten verlieren.

In diesem Falle hier würde das Lohn und das Pulver zusammen 18 Thlr. + 5 Thlr. 8 gr. = 23 Thlr. 8 gr. betragen, und die Arbeiter hätten daher 23 Thlr. 15 gr. — 23 Thlr. 8 gr. = 7 gr. gewonnen.

Da in Freyberger Berg-Amts-Refier alle vierzehn Tage Lohntag ist, so wird dies in den Registern gewöhnlich so aufgestellt:

Den 4 Doppelhäuern, welchen vor dem ..... Ort bey .... Lachter Höhe incl. des Pulvers das Lachter für 5 Thlr. 6 gr. verdingt gewesen, und welche in 4 Wochen $4\frac{1}{2}$ Lachter aufgefahren haben, beträgt

23 Thlr.	15 gr.	—	Hiervon
5 Thlr.	8 gr.	—	für 16 Pfd. Pulver á 8 gr.
6.	16.	—	abschlägl. Lohn auf vorige 14 Tage, (wöchentl. á Person 20 gr.)
12 Thlr.	—	—	
11 Thlr.	15 gr.	—	Verbl.

Bey-

Beyspiele zur Uebung.

1) In einem Abteufen ist 6 Doppelhäuern das Lachter abzuteufen für 30 Thlr. verdungen. Solche haben in 4 Wochen $1\frac{1}{4}$ Lachter abgeteuft und dabey 26 Pfund Pulver verschossen. Was haben diese gewonnen oder verloren?

2) Vor einem Ort ist 6 Doppelhäuern das Lachter für $8\frac{1}{2}$ Thlr. verdungen, und haben solche in 4 Wochen $3\frac{3}{4}$ Lachter aufgefahren, aber dabey 15 Pfund Pulver verschossen. Was haben diese gewonnen oder verloren.

3) Bey einem Stollnortsbetrieb wird, um die Berge am Tage zu fördern, für jedes Lachter aufgefahrne Länge 1 Thlr. 12 gr. gegeben. Wenn man nun vor diesem Ort in einem Quartale $4\frac{3}{8}$ Lachter aufgefahren hat, wie viel werden die Förderungslöhne betragen?

4) Einer Grube kostet der Centner Pulver incl. der Accise und Tragelohn 35 Thlr. 4 gr. Nun hat sie an einer andern Grube $\frac{3}{8}$ Centner abgelassen, was kosten diese?

5) Wenn einer Grube der Centner Stahl 12 Thlr. 16 gr. kommt, und sie verkauft $\frac{5}{16}$ Centner, was kosten diese?

6) Auf Weilarbeit ist 8 Mann das Lachter Ort für $26\frac{3}{4}$ Thlr. verdungen; solche haben in 4 Wochen $1\frac{5}{8}$ Lachter aufgefahren, und dabey 24 Pfund Pulver verschossen. Was erhalten diese?

7) Wenn der Centner Erz mit 38 Thlr. 16 gr. bezahlt wird, was erhält man für $\frac{3}{8}$ Centner?

8) Eine Grube hat $15\frac{5}{8}$ Centner Erz geliefert, wo der Centner mit 11 Thlr. 16 gr. bezahlt wird. Was erhält sie?

b) Divisions-Aufgaben.

§. 82.

Regel 1. Man dividirt mit dem ersten Glied, als dem Divisor, in das dritte, und ist der Divisor eine solche Zahl, die sich leicht durch die Multiplication zerfällen läßt, so dividirt man damit in das dritte Glied, wie oben §. 60. und 61. gelehret worden.

Z. B. 1) Wenn nach dem Beyspiel 2 des §. 81. die 4 Doppelhäuer nach allen Abzügen noch 11 Thlr. 15 gr. erhalten, was bekommt jeder?

4 Doppelh. : 1 Doppelh. = 11 Thlr. 15 gr.

4) 2 Thlr. 15 gr. 9 pf.

Und da bey diesem Beyspiele alle 4 Häuer 7 gr. gewonnen haben, so gewinnt jeder?

4 H. : 1 H. = 7 gr.

4) 1 gr. 9 pf.

2) Von einer gewissen Arbeit erhalten 15 Mann 25 Thlr. 16 gr. 3 pf., was erhält jeder?

15 M. : 1 M. =		25 Thlr.	16 gr.	3 pf.
5	5)	5 =	3 =	3 =
3	3	1 Thlr.	17 gr.	1 pf.

Bey=

Beyspiele zur Uebung.

1) Eine Grube hat 24 Centner Pulver für 737 Thlr. 6 gr. gekauft, was kostet 1 Centner?

2) Wenn der Centner Pulver 36 Thlr. 16 gr. kostete, was kostet 1 Pfund?

3) Wenn 26 Cent. Stahl 320 Thlr. 16 gr. kosten, was kostet 1 Centner?

4) Was erhält jeder in den Aufgaben 1. 2. und 6. zum §. 81.

§. 83.

Regel 2. Besteht das erste oder dritte Glied, oder bestehen beyde aus Brüchen, so wird damit verfahren, wie man Brüche dividirt, d. h. man kehrt den Divisor um und multiplicirt die Brüche (§. 43.).

Z. B. 1) Wenn $\frac{3}{4}$ Ellen 18 gr. kosten, was kostet 1 Elle?

$\frac{3}{4}$ Elle : 1 Elle = 18 gr. : x gr.

$x = 18 \cdot \frac{4}{3}$ gr. $= \frac{72}{3}$ gr. $= 24$ gr. $= 1$ Thlr.

2) $\frac{5}{8}$ Cent. kosten 13 Thlr. 3 gr. was 1 Cent.?

$\frac{5}{8} : 1 =$ 13 Thlr. 3 gr.

(8

105 —

5)

21 Thlr.

3) 9 Pfund kosten $\frac{7}{8}$ Thlr. was 1 Pfund?

$9 : 1 = \frac{7}{8}$ Thlr. : x Thlr.

x Thlr. $= \frac{7}{8 \cdot 9} = \frac{7}{72}$ Thlr. $= 2$ gr. 4 pf.

4)

4) $13\frac{3}{4}$ Pfund kosten $18\frac{1}{3}$ gr. was 1 Pfund?

$13\frac{3}{4}$ Pfund : 1 Pfund $=$ $18\frac{1}{3}$ gr. : x Thlr.

d. i. $\frac{55}{4} : 1 = \frac{55}{3}$ gr. : x gr.

$x = \frac{55}{3} \times \frac{4}{55} = \frac{4}{3}$ gr. $=$ 1 gr. 4 pf.

Beyspiele zur Uebung.

1) $\frac{3}{8}$ Centner Pulver kosten 13 Thlr. 4 gr. 6 pf. was 1 Centner?

2) $\frac{1}{8}$ Centner Stahl kostet 1 Thlr. 14 gr. $7\frac{1}{2}$ pf. was 1 Centner?

3) $\frac{5}{16}$ Lachter Ort kosten 20 Thlr. was kostet 1 Lachter?

c) Gemischte Aufgaben.

§. 84.

Gemischte Aufgaben kann man öffters sehr abkürzen und dieselben in Multiplications- oder Divisionsaufgaben verwandeln, wenn man die Glieder geschickt gegen einander aufzuheben, und das erste oder zweyte Glied, wo es nämlich angehen will, auf 1 zu bringen sucht. Denn für größere in Proportion stehende Zahlen kann man kleinere, welche mit jenen einerley Verhältnis haben, annehmen. So kann man z. B. folgende Proportion auf folgende Art verändern:

6 Ellen	:	24 Ell.	=	2 Thlr.	:	8 Thlr.
1 Elle	:	4 Ell.	=	2 Thlr.	:	8 Thlr.
3 =	:	24 =	=	1 =	:	8 =
2 =		8 =	=	2 =		8 =

Die Richtigkeit dieser Abkürzungen erhellet nicht nur aus §. *66.*, sondern auch aus §. *64.* daß näm-

nämlich das Product der äußern Glieder allemal so viel beträgt, als das Product der innern.

§. 85.

Regel 1. Man versucht die beyden Glieder des ersten Verhältnisses oder auch das erste und dritte Glied durch eine gewählte Zahl abzukürzen, oder das eine gegen das andre auf 1 zu bringen (§. 66.).

Dies geschieht, wenn die im Verhältnis stehenden Glieder entweder durch eine Zahl ohne Rest dividirt werden, oder wenn man das eine Glied durch das andere ohne Rest dividiren kann.

Z. B. 5 Pfund kosten 1 Thlr. 6 gr. was kosten 40 Pfund?

5 Pfund : 40 Pfund = 1 Thlr. 6 gr. : x oder
1 : 8 = 1 Thlr. 6 gr. : (§. 77.)
10 Thlr. — —(8

Oder auch

$5 : 40 = 30$ gr. : x gr., d. ist.
$1 : 40 = 6$ gr. : x gr.
$= \frac{1}{4}$ Thlr. : x Thlr.
x Thlr. $= 40 \cdot \frac{1}{4}$ Thlr. $= 10$ Thlr.

Beyspiele zur Uebung.

1) 4 Stämme Holz kosten 2 Thlr. 16 gr., wie hoch kommen 48 Stämme?

2) Wie theuer kommen 100 Klaftern Holz, wenn 10 Klaftern 45 Thlr. kosten?

3) 6 Tagelöhner bekommen wöchentlich 4 Thlr. 20 gr., wie viel werden 18 Tagelöhner in einer Woche erhalten?

4) 8 Doppelhäuer erhalten lohntäglich 9 Thlr., was müssen 64 Doppelhäuer erhalten?

§. 86.

Ist das Verhältnis der Glieder, wegen der Größe der Zahlen nicht leicht zu übersehen, so kann man das erste durch das zweyte und umgekehrt, und das erste durch das dritte und umgekehrt dividiren.

Z. B. 72 Pfund kosten 16 Thlr. 14 gr. 5 pf. wie theuer kommen 7 Cent. 94 Pfund?

72 ℔. : 7 Cent. 94 ℔. = 16 Thlr. 14 gr. 5 pf. : x

110 ———— 199 Thlr. 5 gr. —(12

d. i. 72 ℔. : 864 ℔.

oder 1 : 12 ,

Erklär. Da hier der Exponent oder Name des Verhältnisses (§. 63) 12 ist, so durfte man nur das dritte Glied mit dem Exponenten multipliciren, um das vierte Glied zu erhalten (§. 63. Zus.

Anmerk. Durch die Bestimmung des Exponenten wird die Rechnung mehrentheils sehr abgekürzt.

Z. B. Wenn 429 Stück 132 Thlr. 15 gr. 3 pf. kosten, was kosten 143 Stück?

429 Stück : 143 Stück = 132 Thlr. 15 gr. 3 pf. : x

143

3) 44 Thlr. 5 gr. 1 pf.

Hier ist der Exponent $= \frac{143}{429} \Big| \frac{1}{3}$

Oder:

Wie theuer kommen 6 Cnt. 20 Pfund, wenn 53 Pfd. mit 106 Thlr. bezahlt werden?

53 lb. : 6 Cent. 20 lb. = 106 Thlr. : x Thlr.

53)

1 „ : 6 Cent. 20 lb. = 2 Thlr. : x Thlr.

110

680

1360 Thlr. (2

Er-

Erklärung. Hier ließ sich das erste Glied durch das dritte dividiren, und dadurch wurde gefunden, was 1 Pfund kostet, nämlich 2 Thlr. Multiplicirt man nun 6 Cent. 20 Pfund = 680 Pfund mit 2 Thlr., so kommen 1360 Thlr.

Oder

6 Pfund 24 Loth kosten 2 Thlr. 13 gr. 4 pf., was kosten 5 Pfund 8 Loth?

6 lb. 24 Lth. : 5 lb. 8 Lth. = 2 Thlr. 13 gr. 4 pf.
32 : 32 — (7
216 Lth : 168 Lth. — 17 : 21 : 8 :
24) 9 : 7 : — 9) 1 Thlr. 23 gr. $8\frac{4}{9}$ pf.

Erklär. Nachdem die ersten Glieder unter einerley Benennung gebracht worden, so ließ sich leicht übersehen, daß beyde durch die Zahl 24 verkleinert werden können ($\frac{168}{216} = \frac{7}{9}$ nach (*§. 37. 7.*). Daraus entstand das Verhältnis 9 : 7 (*§. 62.*) u. s. w.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn 4 Lachter Ort 24 Thlr. 23 gr. 4 pf. kosten, was werden 144 Lachter aufzufahren kosten?

2) Was werden 60 Stämme Holz kosten, wenn man für 4 Stämme Holz 7 Thlr. bezahlen muß?

3) Für 5 Böhrer auszuschmieden bezahlt man 1 gr., was bezahlt man für 625 Stück?

4) 2 Schock Bergeisen auszuschmieden kosten 5 gr. was daher 48 Schock?

5) 20 Ellen für 65 Thlr. 16 gr. 7 pf. was gelten 80 Ellen?

6) 36 Ellen zu 8 Thlr. 16 gr. 5 pf. was kommen 324 Ellen?

7)

7) Ein Fuhrmann bedingt die Fracht von 35 Centnern für 40 Thlr. 20 gr., er erhält aber nur 29 Centner, wie viel wird er nun bekommen?

§. 87.

Regel 2. Enthält das erste Glied 1 in einer größern Sorte, das zweyte aber kleinere Sorten, so zerstreut man die Sorten im 2ten Gliede in solche Theile, welche ohne Rest aus der grössern Sorte des ersten Gliedes zu nehmen sind, und dividirt in das dritte.

Z. B. Wenn 1 Pfund 4 Thlr. 16 gr. gilt, was gelten 9 Lothe?

1 Pfund : 9 Loth =		4 Thlr.	16 gr.	
8 | 4		1 =	4 =	
1 | 8		—	3 =	6 pf.
		1 Thlr.	7 gr.	6 gr.

Erklär. Hier ist nicht nöthig die zwey ersten Glieder unter einerley Benennung zu bringen, sondern man zerstreuet die 9 Lothe in 8 und 1 Loth; 8 Loth ist $\frac{1}{4}$ Pfund, und 1 Loth von 8 Lothen der 8te Theil. Also gelten 8 Loth den 4ten Theil von 4 Thlr. 16 gr. = 1 Thlr. 4 gr., und 1 Loth den 8ten Theil von 1 Thlr. 4 gr. oder 28 gr. = 3 gr. 6 pf. Daher beyde Quotienten zusammenaddirt 1 Thlr. 7 gr. 6 pf. betragen.

Oder, was kostet 1 Pfund 26 Loth 1 Quent, wenn 6 Pfund mit 35 Thlr. bezahlt werden?

6 ℔. : 1 ℔. 26 Loth 1 Qu. = 36 Thlr. 20 gr.

1	16 | 2	1	6) 5 Thlr.	20 gr.	— pf.
	8 | 2	8 von	2) 2 =	22 =	—
	2 | 4	2 Loth	2) 1 =	11 =	—
			4) —	8 =	9 =
			8) —	1 =	$1\frac{1}{8}$ =
			10 Thlr.	14 gr.	$10\frac{1}{8}$ pf.

Oder 1 Cent. Pulver kostet 35 Thlr. 4 gr., was 60 Pfund?

1 Cent. : 60 ℔. = 35 Thlr. 4 gr. —

55	2te Theil von 110 ℔.	2) 17 Thlr.	14 gr.	—
5	11te von 55 ℔.	11) 1 =	14 =	$4\frac{4}{11}$ pf.
		19 Thlr.	4 gr.	$4\frac{4}{11}$ pf.

Oder was kosten 48 Pfund, wenn 1 Centner mit 33 Thlr. 14 gr. 8 pf. bezahlt wird?

1 Cent. : 48 ℔. = 33 Thlr. 14 gr. 8 pf.

10	11te Theil v. 110 ℔.	11) 3 =	1 =	4 =	
30	3mal mehr	9 =	4 =	—	(3
6	5te Theil von 30 ℔.	5) 1 =	20 =	—	
2	3te Theil von 6 ℔.	3) — =	14 =	8	
		14 Thlr.	16 =	—	

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn der Centner Erz mit 77 Thlr. 8 gr. bezahlt wird, was erhält man für 34 lb.?

2) Was erhält man für 65 Pfund Erz, wo der Centner mit 193 Thlr. 8 gr. bezahlt wird?

3) Wenn der Centner Stahl 12 Thlr. 16 gr. kostet, wie hoch kommen 45 Pfund?

4) Wie hoch kommen 36 Pfund 9 Loth Pulver, wenn der Centner 35 Thlr. 4 gr. kostet?

§. 88.

Kann man eine vorkommende gemischte Aufgabe nach der ersten und zweyten Regel nicht ausrechnen, so verfährt man ganz nach der gemeinen Regel §. 64. Zus. 1. multiplicirt nämlich die mittlern Glieder und dividirt das Product durch das erste Glied. Z. B.

Wenn 5 Centner 16 Thlr. 9 gr. 9 pf. kosten, was 7 Centner?

5 Cent : 7 Cent. = 16 Thlr. 9 gr. 9 pf. (7
114 Thlr. 20 gr. 3 pf.
5) 22 Thlr. 23 gr. 3 pf.

Oder

5 Cent. : 7 Cent. = 16 Thlr. 9 gr. 9 pf.
16 — 8|3 6|2
112 Thlr. — 1|8 3|2
3) 2 = 8 gr. —
8) — = 7 = —
2) — = 3 = 6 pf.
2) — = 1 = 9 =
114 Thlr. 20 gr. 3 pf.
5) 22 Thlr. 23 gr. 3 pf.

Oder

Oder

5 Cent. : 7 Cent. = 16 Thlr. 9 gr. 9 pf.

```
                 16 Thlr. 9 gr. 9 pf.
                 24
                 ----
                 73
                 32
                 ----
                 393 gr.
                  12
                 ----
                 795
                393
                 ----
                4725 pf.
                   7
                 ----
               33075
           5)  -----
               6615 pf. | 551 gr. | 22 Thlr.
          12)  60       | 48      |
               ----  24) ----
                61       71
                60       48
               ----     ----
                15       23 gr.
                12
               ----
                 3 pf.
```

Anmerk. Kommen in einem der Vorderglieder kleinere Einheiten noch vor, so muß man beyde Glieder gleichnamig machen.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn 31 Schock 21 Thlr. 9 gr. 4 pf. kosten, was kommen 353 Scheck?

2) Was kosten 17 Centner, wenn 5 Pfund 5 Loth für 4 Thlr. 6 gr. 9 pf. gegeben werden?

§. 89.

Bey gemischten Aufgaben mit Brüchen, werden ebenfalls die mittlern Glieder mit einander multiplicirt und das Product durch das erste dividirt, nur mit dem Unterschiede, daß sie wie Brüche multiplicirt und dividirt werden.

Z. B. $\frac{3}{4}$ Pfund : $\frac{7}{8}$ Pfund $= \frac{2}{3}$ Thlr. : x

$$x = \frac{14}{24} : \frac{3}{4} = \frac{14}{24} \cdot \frac{4}{3} = \frac{56}{72}\Big|^{8}\frac{7}{9} \text{ Thlr.}$$

Oder nach §. 66. Zusatz

$\frac{3}{4}$ Pfund : $\frac{7}{8}$ Pfund $= \frac{2}{3}$ Thlr. : x

$3 \cdot 8 : 4 \cdot 7 = \frac{2}{3}$ Thlr. : x

d. i. $24 : 28 = \frac{2}{3}$ Thlr. : x, also

$$x = \frac{28 \cdot 2}{24 \cdot 3} = \frac{56}{72} = \frac{7}{9} \text{ Thlr.}$$

Ferner, $\frac{3}{4}$ Centner kosten 5 Thlr. 14 gr. 6 pf. was 3 Centner?

$\frac{3}{4}$ Cent. : 3 Cent. = 5 Thlr. 14 gr. 6 pf. d. i.

3 : 4 · 3 = 5 Thlr. 14 gr. 6 pf.

(4

22 = 10 = —

(3

67 = 6 = —

3)

22 Thlr. 10 gr. —

Oder 12 Centner für 78 Thlr., was $\frac{4}{5}$ Cent.?

12 Cent. : $\frac{4}{5}$ Cent. = 78 Thlr. d. i.

12 · 5 = · 4 = 312 = (4

5) $62\frac{2}{5}$

12) $5\frac{1}{5}$ Thlr.

Oder

Oder nach der Decimalberechnung:

12 Cent. : 0,8 Cent. = 78 Th.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}8 & \\ \hline 12)\ 62{,}4 & 5{,}2\ \text{Th.} = 5\tfrac{1}{5}\ \text{Th.} \\ 60 & \\ \hline 24 & \\ 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

§. 90.

Zu der einfachen geraden Regel de Tri rechnet man auch noch die Zins oder Interesserechnung und Reductionsrechnung. Durch erstre findet man, wie viel ein gewisses Kapital in einer gewissen Zeit Zinsen trage, und zwar nach Verhältnis eines andern Kapitals. Dies andre Kapital, nach welchem man die Zinsen bestimmt, ist gewöhnlich 100, und daher nennt man auch die Zinsen selbst Prozente (pro Cent).

z. B. 1) Wie viel betragen die jährlichen Interessen oder Zinsen von 2800 Thlr. zu 4 Prozent?

1~~00~~ Thlr. Kpt. : 28~~00~~ Thlr. Kpt. = 4 Thlr. Zins

112 Thlr. (4

2) Wie viel betragen die jährlichen Zinsen von 2900 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Prozent?

1~~00~~ Thlr. K. : 29~~00~~ Thlr. K. = 4 Thlr. 12 gr. Z.

$$\begin{array}{lrrl} \underbrace{29}_{4} & & & \\ & 18 & — & (4 \\ \hline 7 + 1 & 126 & — & (7 \\ & 4 & 12 & \\ \hline & 130\ \text{Thlr.} & 12\ \text{gr.} & \end{array}$$

3)

3) Wenn die Zinsen von 2900 in 1 Jahre 130 Thlr. 12 gr. betragen, wie viel betragen sie in 4 Jahren und 8 Monaten?

1 Jahr : 4 J. 8 Mon. = 130 Thlr. 12 gr.

~~12~~	12	913 = 12 gr.	(7
12 M.	56	1827 = —	(2
3	7	3) 609 Thlr. —	
4	8 2		

4) Von einem gewissen Kapital tragen die jährlichen Zinsen $31\frac{1}{2}$ Thlr., wie lange muß dasselbe stehen, bis es $157\frac{1}{2}$ Thlr. Zinsen trägt?

$31\frac{1}{2}$ Thlr. Zins : $157\frac{1}{2}$ Thlr. Z. = 1 Jahr
d. i. 63 : 315 = 1 =

315	5 Jahr.
0	

Beyspiele zur Uebung.

1) Wie viel betragen die jährlichen Zinsen von 8900 Thlr. zu 5 Prozent?

2) Wie viel in 4 Jahren 6 Monaten?

3) Wie lange muß das Kapital stehen, bis es 3337 Thlr. 12 gr. Zinsen trägt?

§. 91.

Die Reductionsrechnung lehrt verschiedne Münzsorten, Maaße und Gewichte mit einander vergleichen. Die Hauptregel hierbey ist diese:

Man sucht das kleinste Verhältnis auf, in welchem beyde Sorten, die man vergleichen oder reduziren will, mit einander übereinkommen, und setzt es dann mit der Frage gehörig in Proportion.

Z.

Z. B. 3 Gulden machen 2 Thlr., wie viel werden demnach 1350 Gulden Thaler betragen?

$$
\begin{array}{l}
3 \text{ fl.} : \underline{1350 \text{ fl.}} = 2 \text{ Thlr.} \\
\qquad \underline{2700} \; (2 \\
3) \; 900 \text{ Thlr.}
\end{array}
$$

Oder 3 Species-Thaler machen 4 Thlr., wie viel werden 675 Species, Thaler betragen?

$$
\begin{array}{l}
3 \text{ S.} \; \underline{675 \text{ S.}} = 4 \text{ Thlr.} \\
\qquad \underline{2700} \; (4 \\
3) \; 900 \text{ Thlr.}
\end{array}
$$

Oder 7 Leipziger Fuß oder $3\frac{1}{2}$ Elle betragen 1 Lachter, wie viel werden 1271 Ellen Lachter ausmachen?

$$
\begin{array}{l}
3\tfrac{1}{2} \text{ Elle} : 1071 \text{ Ell.} = 1 \text{ Lr.} : x \text{ Lr.} \\
\text{d. i. } \tfrac{7}{2} \text{ ,} \;\; : \underline{1071 \text{ Ell.}} = 1 \text{ ,} : x \text{ ,} \\
\qquad \underline{2142} \; (2 \\
7) \; 306 \text{ Lachter.}
\end{array}
$$

Oder, weil 1071 Ellen $= 2 \cdot 1071$ Fuß $= 2142$ Fuß machen, so hat man auch

$$
\begin{array}{l}
7 \text{ Fuß} : \underline{2142 \text{ Fuß}} = 1 \text{ Lr.} : x \text{ Lr.} \\
7) \; 306 \text{ Lachter.}
\end{array}
$$

Anmerkung. Bey ohngefähren Längenbestimmungen rechnet man auf 1 Lachter 3 gewöhnliche Schritt; z. B. Wie viel machen 597 Schritt ohngefähr Lachter?

$$
\begin{array}{l}
3 \text{ Schritt} : \underline{597 \text{ Schritt}} = 1 \text{ Lr.} : x \text{ Lr.} \\
3) \; 199 \text{ Lachter.}
\end{array}
$$

Beyspiele zur Uebung.

1) Himmelsfürst Fundgrube giebt auf jedem Kux quartaliter 32 Species-Thaler Ausbeute. Wie viel

viel beträgt dies auf 128 Kuxe in jedem Quartal und in einem Jahre in Thalern?

2) Wie viel sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 Fahrten Lachter?

3) = = 5, 10, 15, 20 Lachter Fahrten?

4) = = 1748 Lachterzolle Leipziger Zolle?

5) = = 14 Lachter 2 Achtel 5 Zoll Fahrten?

B. Umgekehrte Regel de Tri.

§. 92.

Die umgekehrte Regel de Tri unterscheidet sich von der geraden dadurch, daß von den vier Größen, aus welchen die Proportion bestehet, zwey in eben dem Verhältnis zunehmen, als die beyden andern abnehmen, und so umgekehrt; z. B. wenn 6 Mann in 4 Tagen eine gewisse Arbeit machen, so können 12 Mann dieselbe Arbeit in 2 Tagen verrichten (§. 71.). Hier sagt man: die Grössen stehen in ungeraden Verhältnis.

Uebrigens entsteht hierdurch bey der Operation selbst kein Unterschied; denn man bestimmt auch hier das vierte Glied der Proportion auf eben diese Art, wie bey der geraden Regel de Tri, wenn man nur Achtung giebt, ob mehr oder weniger herauskommen muß, und darnach den Ansatz richtet.

Z. B. 6 Gezeugarbeiter bringen über eine gewisse Arbeit 4 Tage zu, in wie viel Tagen werden 8 Gezeugarbeiter damit fertig?

Hier sieht man sogleich ein, daß 8 Gezeugarbeiter bey gleicher Anstrengung und Fleiß, und wenn

wenn sonst keine Hindernisse vorfallen, in kürzerer Zeit mit dieser Arbeit fertig werden müssen, als wenn nur 6 Arbeiter sind. Demnach setzt man nicht

6 Gezeugarb. : 8 G. = 4 Tage : ($5\frac{1}{3}$) Tage, weil dadurch mehrere Tage herauskommen, sondern umgekehrt

$$8\,\text{G.} : 6\,\text{G.} = 4\,\text{Tage} : x\,\text{Tage, also}$$

$$x = \frac{6 \times 4}{8} = \frac{24}{8} = 3\,\text{Tage.}$$

Also bringen 8 Grubenarbeiter über jene Arbeit nur 3 Tage zu.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn 4 Häuer eine gewisse Ortlänge in 12 Wochen auffahren, wie lange werden ihrer 6 damit zubringen?

2) 6 Zimmerlinge wollen ein Tagegebäude in 12 Wochen zu Stande bringen; das Gebäude soll aber in 8 Wochen fertig seyn, wie viel Zimmerlinge werden dazu erfordert?

3) In 8 Schichten saubern 6 Grubenjungen eine Wasserseige; sie soll aber in 6 Schichten rein seyn, wie viel werden dazu Grubenjungen nöthig seyn.

4) 7 Fahrten machen 24 Lachter. Wenn nun 1 Lachter Abteufen 63 Thlr. kommt, wie hoch kommt 1 Fahrt abzuteufen?

II. Zusammengesetzte Proportionsrechnung.

§. 93.

Die zusammengesetzte Proportionsrechnung hat es mit mehrern Gliedern aus verschiednen gegebnen Proportionen zu thun (§. 67. u. 74.), zu welchen ein oder mehrere Glieder gesucht werden müssen. Nach der Anzahl der gegebnen Glieder giebt man dieser Rechnungsart verschiedne Namen. Besteht sie aus 5 gegebnen Gliedern, so heißt sie die Regel von Fünfen oder Regula de Quinque, und besteht sie aus mehrern Gliedern, die Kettenrechnung, wo hier nur von ersterer noch gehandelt werden soll.

Unter den gegebnen Gliedern können sich nun etliche finden, die in einem geraden, andre hingegen, welche in einem umgekehrten Verhältnisse stehen, daher man auch diese Rechnungsarten in die geraden und umgekehrten eintheilt.

A. Gerade Regel von Fünfen.

§. 94.

Um Aufgaben der Regel von Fünfen gehörig in Ansatz zu bringen und das zu suchende Glied zu finden, so kann dies auf zweyerley Art geschehen

1) durch mehrere Ansätze und

2) durch einem Ansatz.

Z. B. Wenn 3 Arbeiter in 7 Tagen 5 Thlr. erhalten, wie viel werden demnach 7 Arbeiter in 12 Tagen bekommen?

Hier-

Hieraus lassen sich 2 Proportionen formiren:

a) 3 Arb. : 7 Arb. = 5 Thlr. : x Thlr.

$$x = \frac{7 \times 5}{3} = \frac{35}{3} = 11\tfrac{2}{3} \text{ Thlr.}$$

b) 7 Tage : 12 Tage = $11\frac{2}{3}$ Thlr. : y Thlr.

= $\frac{35}{3}$ Thlr. : y Thlr.

$$y = \frac{12 \cdot 35}{7 \cdot 3} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ Thlr.}$$

Kürzer aber schließt man so:

3 Arb. : 7 Arb. = 5 Thlr. : x Thlr.

7 Tage : 12 Tage = x Thlr. : y Thlr.

d. i. $3 \times 7 : 7 \times 12$ = 5 Thlr. : y Thlr. (§. 67.)

oder 3 : 12 = 5 „ : y „

auch 1 : 4 = 5 „ : y „

also y = $4 \cdot 5$ = 20 Thlr.

Beyspiele zur Uebung.

1) 3 Häuer fahren in 4 Wochen 2 Lachter auf, wie viel Lachter werden 8 Häuer in 6 Wochen auffahren?

2) In 4 Wochen fahren 4 Häuer 6 Lachter auf, wie viel schlägt auf eben diesem Gestein 1 Häuer in 2 Wochen heraus?

3) Wenn 24 Mann in 6 Wochen 864 Lachter Graben auswerfen, was können 68 Mann in 13 Wochen fertigen?

4) Wenn bey Führung eines Grabens 12 Mann in 6 Wochen 293 Lachter graben, wie viel werden Arbeiter in 4 Wochen $325\frac{5}{9}$ Lachter zu graben nöthig seyn?

5) In 4 Wochen fahren 3 Häuer 6 Lachter auf, wie lange bringt 1 Häuer über $\frac{3}{4}$ Lachter auf diesem Gesteine herauszuschlagen zu?

6) Wenn 1 Doppelhäuer wöchentlich 5 pf. zur Knappschaftskasse giebt, wie viel beträgt dies von 100 Häuern in einem Jahre?

7) Bey einem Ort rechnet man auf jedes Lachter aufgefahrner Länge 7 Schock Kübel Berge, welche 200 Lachter zu Tage aus zu fördern sind. Wenn nun in jeder Schicht 2 Schock Kübel auf 40 Lachter Länge gefördert werden, wofür man etwa 4 gr. giebt, wie hoch würde bey diesem Orte von jedem Lachter aufgefahrner Länge die Bergförderung kommen?

8) Wenn man 2 Schock Kübel auf 40 Lachter in jeder Schicht fördert, wie viel Schichten wird man über 7 Schock auf 200 Lachter zu fördern, zubringen?

9) Ein Fuhrmann verlangt für 15 Centner gegoßner Eisenwaare auf 16 Meilen weit 36 Thlr. wie viel wird derselbe bekommen, wenn er 32 Centner 45 Meilen fährt?

B. Umgekehrte Regel von Fünfen.

§. 95.

Die umgekehrte Regel von Fünfen enthält solche Aufgaben, wo man nach vorher angestellten Untersuchung einsieht, daß von zwey gleichnamigen Dingen das größere weniger, und das kleinere mehr hervorbringen muß, und wo man dann die beyden gleichnamigen Größen in umgekehrter Ordnung schreibt.

Z. B. Wenn 3 Grubenjungen 12 Lachter Wasserseige in 4 Schichten saubern, wie viel Jungen werden erfordert, um 20 Lachter in 2 Schichten zu saubern? Hier schließt man:

$$
\begin{array}{llll}
 & 12 \text{ Lr.} : 20 \text{ Lr.} & = 3 \text{ Grubenj.} & : x \\
 & 2 \text{ Sch.} : 4 \text{ Sch.} & = x & : y \text{ Grj.} \\
\hline
 & 12 \cdot 2 : 20 \cdot 4 & = 3 \text{ G.} & : y \text{ G.} \\
\text{d.i.} & 3 \cdot 2 : 20 & = 3 & : y \\
\text{oder} & 2 : 20 & = 1 & : y \\
\hline
\end{array}
$$

$$y = \tfrac{20}{2} = 10 \text{ Grubenjungen.}$$

Erklärung. Denn wenn 3 Grubenjungen in 4 Schichten 12 Lachter lang saubern, so würden 5 Grubenjungen dazu gehören, um 20 Lr. zu säubern, (12 Lr. : 20 Lr. = 3 Grubenj. : 5 Grj.) denn je mehr Arbeit, desto mehr Arbeiter. Aber in der Aufgabe wird gefragt, wie viel Jungen zu 20 Lachtern in 2 Schichten gehören? Dies ist ein umgekehrtes Verhältnis; denn je weniger Zeit zu einer Arbeit bestimmt wird, desto mehr Leute gehören dazu, um dieselbe zu vollenden. Daher 2 Schichten zu 4 Schichten, statt 4 Schichten : 2 Schichten.

Beyspiele zur Uebung.

1) Wenn 3 Häuer in 4 Wochen 2 Lachter auffahren, wie viel werden Häuer erfordert, um in 6 Wochen 8 Lachter aufzufahren?

2) 5 Tagemäurer machen in 3 Tagen 120 Ellen Mauer, wie viel Zeit werden 4 Mäurer zu 576 Ellen brauchen?

3) Wenn ein Fuhrmann 12 Centner 15 Meilen weit zu fahren für 18 Thaler fährt, wie weit wird er 30 Centner für 81 Thlr. fahren?

4) Wenn 6 Häuer auf jede 8 Lachter Förste nachzureissen 5 Pfund Pulver erhalten, wie viel Lachter Förste werden bey derselben Festigkeit des Gesteins 18 Häuer mit 50 Pfund Pulver nachreissen?

Bey=

Beylagen zur Arithmetik.

I.

Eintheilung der bey uns gewöhnlichen Münzen, Gewichte, Maaße u. s. w.

A. Münzen.

Ein Species-Thaler	=	2 Gulden,
„ Gulden	=	16 Groschen,
„ Thaler	=	24 „
„ Groschen	=	12 Pfennige,
„ Pfennig	=	2 Heller.

B. Gewichte.

Ein Centner	=	5 Stein oder 110 ℔. (Pfund),
„ Stein	=	22 ℔.
„ Pfund	=	32 Loth oder 2 Mark,
„ Mark	=	16 Loth,
„ Loth	=	4 Quent.
Eine Bürde Stahl	=	120 ℔.
„ Waage Eisen	=	44 ℔.

C.

C. Längen-Maaß.

Eine Ruthe ist gewöhnlich 8 Leipziger Ellen; bey ökonomischen Vermessungen aber 7 Ellen 14 Zoll.

Eine Elle	=	2 Fuß,
„ Fuß	=	12 Zoll,
„ Zoll	=	12 Linien.

Beym Bergbau hat man

1) das Lachter, welches 7 Leipziger Fuß hält.

   Das Lachter theilt man in 8 Achtel,
   ein Achtel in 10 Lachterzolle,
   „ Zoll „ 10 Primen.

Also hält ein Lachter 80 Lachterzolle oder 84 Leipziger Zolle.

2) Die Fahrt, welche zu 12 Ellen oder 24 Fuß gerechnet wird.

3) Die Gezeugstrecke, welche entweder zu 6 Fahrten oder auch zu 20 Lachter angenommen wird.

Beym Vermessen auf Gängen hat man **Fundgruben, Maaßen und Wehre.**

Eine Fundgrube ist in Freyberg			60	Lachter	lang.
„ Maaße	„	„	40	„	„
Ein Wehr	„	„	20	„	„

In andern Sächs. Bergwerksresieren ist

eine Fundgrube	42	Lachter	lang,
„ Maaße	28	„	„
„ Wehr	14	„	„
„ Lehn	7	„	„

Die

Die Breite des Feldes wird allemal durch die Vierung (rechtwinklicht $3\frac{1}{2}$ Lr. ins Hangende und $3\frac{1}{2}$ Lr. ins Liegende mit der Fallungslinie des Ganges) und des Ganges Mächtigkeit bestimmt.

Auf Stockwerken und Flötzen hat man geviertes Feld.

In Freyberg ist eine gevierte Fundgrube 42 Lr. lang und breit,
" " Maaße 28 Lr. lang und breit,
in Altenberg " " Fundgrube 28 Lr. lang und breit,
" " Maaße 14 Lr. lang und breit,
in Marienberg " " Fundgrube 42 Lr. und 28 Lr. breit,
" " Maaße 28 Lr. lang und breit,
in Annaberg " " Fundgrube 42 Lr. lang und 28 Lr. breit,
" " Maaße 28 Lr. lang und breit,
in Neustädter Refier " Fundgrube 42 Lr. lang und 21 Lr. breit,
" " Maaße 28 Lr. lang und 21 Lr. breit.

D. Bier-Maaß.

Ein Faß = 2 Tonnen,
" Tonne = 72 Kannen,
" Kanne = 2 Nößel.

E.

E. Getraide-Maaß.

Ein Wispel	=	2 Malter,
= Malter	=	12 Scheffel,
= Scheffel	=	4 Viertel,
= Viertel	=	4 Metzen,
= Metze	=	2 Mäßchen.

F. Förderungs-Maaß in Freyberger Refier.

Ein Kübel	=	2500 Cubiczoll,
	=	0,3077 Dresdner Scheffel,
	=	4,9233 Metzen, ohngefehr 5 Metzen.
Eine große Tonne	=	12 Kübel,
= mittlere =	=	10 =
= kleine =	=	8 =
Ein großer Hund	=	6 =
= mittlerer =	=	4 =
= kleiner =	=	3 =
Ein Stürzer oder Ausschlagkasten	=	18, 27 bis 30 Kübel.

Der Pochwerkskasten zu 1 Fuhre = 18 Kübel,
= $1\frac{1}{2}$ = = 27 =

Der Karrn hält ohngefehr 2 Kübel ohne Aufsatz,
3 = mit =

Die Kalktonne der Stadt Freyberg	=	$15\frac{17}{25}$ Metze oder
	=	7963,5 Cubiczoll,
Die Kalktonne zu Lengefeld	=	$15\frac{9}{25}$ Metze oder
	=	7800 Cubiczoll.

Eine solche Tonne gebrannter Kalk reicht zu $11\frac{1}{4}$ Cubicelle Scheibenmauer.

G.

G. Eintheilung der Zeit.

Ein Jahr hat 12 Monate oder 52 Wochen, 1 Tag und 6 Stunden; oder 365 Tage und 6 Stunden.

Drey Monate machen ein Vierteljahr aus, welches beym Bergbau Quartal genannt, und in 13 Wochen getheilt wird.

Das 1ste Quartal von Weyhnachten bis Ostern heißt Reminiscere,
= 2te = von Ostern bis Johannis heißt Trinitatis,
= 3te = von Johannis bis Michael heißt Crucis,
= 4te = von Michael bis Weyhnachten heißt Luciae.

Ein Monat wird gewöhnlich zu 4 Wochen gerechnet. Die Monate selbst sind verschieden an der Zahl der Tage und heißen:

1) Januar,	dieser hat	31	Tage,
2) Februar,	= =	28	Tage, und in einem Schaltjahr 29 Tage.
3) März,	= =	31	Tage,
4) April,	= =	30	=
5) May,	= =	31	=
6) Junius,	= =	30	=
7) Julius,	= =	31	=
8) August,	= =	31	=
9) September,	= =	30	=
10) October,	= =	31	=
11) November,	= =	30	=
12) December,	= =	31	=

Anmer=

Anmerkung. Um zu erfahren, ob dieses oder jenes Jahr ein Schaltjahr sey, darf man nur mit der Zahl 4 in die Jahrzahl dividiren; geht die Division ohne Rest auf, so ist es ein Schaltjahr; bleibt aber ein Rest, so zeigt dieser an, wie viel Jahre seit dem letzten Schaltjahre verflossen sind. Z. B. $\frac{1812}{4} = 443$, also das Jahr 1812 ein Schaltjahr; aber $\frac{1814}{4} = 443$, nebst dem Rest 2 d. h. das Jahr 1814 ist das 2te Jahr nach dem Schaltjahre 1812.

H. Andere zählbare Dinge.

1 Schock (1 ßo.) hält 4 Mandel oder 60 Stück.
1 Mandel hält 15 Stück
1 Dutzend = 12 =
1 Ballen Pappier hält 10 Ries
1 Ries = = 20 Buch
1 Buch Schreibepappier 24 Bogen
1 = Druckpappier 25 Bogen.

II.

Freybergische Erztaxe.

Erste Classe.

In dürren, d. i. Kies und Bley-Zuschläge bedürfenden Erzen wird das Loth Silber-Gehalt bezahlt, als:

	Das Loth Silber mit		Folglich der Centner					
			mit			bis		
	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.
Bey 1 löthigen,	6	—	—	6	—			
1¼ =	6	6	—	8	1½			
1½ =	7	—	—	10	6			
1¾ =	7	6	—	13	1½			
2 =	8	—	—	16	—			
2¼ =	8	4	—	18	9			
2½ =	8	8	—	21	8			
2¾ =	9	—	1	—	9			
3 bis 3¼	9	4	1	4	—	1	6	4
3½ = 3¾	9	8	1	9	10	1	12	3
4 = 4¼	10	—	1	16	—	1	18	6
4½ = 4¾	10	3	1	22	1½	2	—	8¼
5 = 5¼	10	6	2	4	6	2	7	1½
5½ = 5¾	10	9	2	11	1½	2	13	9¾
6 = 6¾	11	—	2	18	—	3	2	3
7 = 7¾	11	6	3	8	6	3	17	1½
8 = 11½	12	—	4	—	—	5	18	—
12 = 15½	12	6	6	6	—	8	1	9
16 = 23½	13	—	8	16	—	12	17	6
24 = 31½	13	6	13	12	—	17	18	3
32 = 47½	14	—	18	16	—	27	17	—
48 = 63½	14	3	28	12	—	37	6	1½
64 und drüber	14	6	38	16	—	u. s.	f.	

Zweyte Classe.

Kiesige und glanzige Erze, so entweder guten Stein geben, oder 16 bis 30 ℔. Bley-Gehalt im Centner haben, werden auf jedes Loth Silber-Gehalt bezahlt, wie folgt:

Bey Loth Silber-Gehalt			Das Loth Silber mit		Folglich der Centner					
					mit			bis		
			gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.
—		—	—	—	—	6	—			
¼			25	—	—	6	3			
½			13	—	—	6	6			
¾			9	—	—	6	9			
1			7	—	—	7	—			
1¼			7	6	—	9	4½			
1½			8	—	—	12	—			
1¾			8	6	—	14	10½			
2			9	—	—	18	—			
2¼			9	4	—	21	—			
2½			9	8	1	—	2			
2¾			10	—	1	3	6			
3	bis	3¼	10	4	1	7	—	1	9	7
3½	=	3¾	10	8	1	13	4	1	16	—
4	=	4¼	11	—	1	20	—	1	22	9
4½	=	4¾	11	3	2	2	7½	2	5	5¼
5	=	5¼	11	6	2	9	6	2	12	4½
5½	=	5¾	11	9	2	16	7½	2	19	6¾
6	=	6¾	12	—	3	—	—	3	9	—
7	=	7¾	12	6	3	15	6	4	—	10½
8	=	11½	13	—	4	8	—	6	5	6
12	=	15½	13	6	6	18	—	8	9	9
16	=	32	14	—	9	8	—	18	16	—

Anmerkung. Erze, deren Silbergehalt im Centner 2 Mark übersteiget, gehören allemal zur ersten Classe.

Dritte Classe,

welche nur Kupfererze unter sich begreifet. Und wird, wenn der Centner

3 ℔. Kupfer hält, jedes ℔. mit	—	2 gr.	—
6 = = =	—	2 =	3 pf.
10 = = =	—	2 =	6 =
15 = = =	—	2 =	9 =
21 = = =	—	3 =	—
28 = = =	—	3 =	3 =
36 und mehr ℔. jedes ℔. bezahlt mit	—	3 =	6 =

Anmerkung. Die Bezahlung des in solchen Kupfererzen befindlichen Silber-Gehalts aber, geschiehet, nach derselben Beschaffenheit, entweder nach der ersten oder zweyten Classe der Erztaxe.

Vierte Classe,

wobey der Ansatz für einen Centner gilt.

Silber-Gehalt.	30 ℔. Bley.			35 Pfund.			40 Pfund.			45 Pfund.			50 Pfund.			55 Pfund.			60 Pfund.			65 Pfund.		
Lothe.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.
—	—	21	—	1	2	9	1	8	6	1	14	3	1	20	—	2	1	9	2	7	6	2	13	9
¼	—	23	2	1	4	8	1	10	2	1	15	10	1	21	10	2	3	7	2	8	—	2	14	—
½	1	1	4	1	6	7	1	11	10	1	17	6	1	22	11	2	4	2	2	8	8	2	14	3
¾	1	3	6	1	8	9	1	13	6	1	19	—	2	—	—	2	4	9	2	9	3	2	14	6
1	1	5	6	1	10	3	1	15	—	1	19	9	2	—	6	2	5	3	2	10	—	2	14	9
1¼	1	7	10½	1	12	6¾	1	17	4¼	1	12	½	2	2	10	2	7	7½	2	12	3¾	2	17	1¼
1½	1	10	6	1	15	3	1	20	—	2	—	9	2	5	6	2	10	3	2	15	—	2	19	9
1¾	1	13	11	1	18	7	1	23	6½	2	3	7½	2	8	3½	2	13	1¼	2	17	9¼	2	22	7
2	1	17	—	1	21	4	2	2	—	2	6	8	2	11	6	2	16	2	2	21	—	3	1	8
2¼	1	19	6	2	—	2¼	2	4	10½	2	10	1½	2	14	5¼	2	19	3¾	3	—	—	3	4	8¼
2½	1	22	8	2	3	5½	2	8	3	2	12	10	2	17	10	2	22	5	3	3	2½	3	8	—
2¾	2	1	11½	2	6	9¼	2	11	7	2	16	2	2	20	11¾	3	1	9½	3	6	7¼	3	11	2¼
3	2	5	6	2	10	3	2	15	—	2	19	9	3	—	6	3	5	—	3	9	—	3	13	—
3¼	2	9	11½	2	15	1¼	2	20	3	3	1	4¼	3	6	6½	3	11	5	3	15	9	3	20	1
3½	2	11	9½	2	16	5½	2	21	5	3	2	1	3	6	9	3	11	8½	3	16	4½	3	21	½
3¾	2	16	¾	2	21	¾	3	2	4½	3	7	4½	3	12	4½	3	17	8½	3	22	8¼	4	3	8¼
4	2	18	4	2	23	4	3	4	—	3	8	8	3	13	4	3	18	4	3	23	—	4	3	8
4¼	2	22	5¾	3	3	9½	3	8	9	3	13	8½	3	18	8	3	23	11¼	4	4	11¼	4	9	10¾

Silber-Gehalt.	30 ℔. Bley.			35 Pfund.			40 Pfund.			45 Pfund.			50 Pfund.			55 Pfund.			60 Pfund.			65 Pfund.		
Lothe.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.	Thlr.	gr.	pf.
4½	3	1	1½	3	6	—	3	10	6	3	15	4½	3	20	3	4	—	9	4	5	7½	4	10	6
4¾	3	5	2½	3	10	4	3	15	1	3	20	2¾	4	1	4½	4	6	1½	4	11	3¼	4	16	5
5	3	8	—	3	12	7	3	17	2	3	21	9	4	2	4	4	6	11	4	11	6	4	16	1
5¼	3	12	—	3	16	9¾	3	21	7½	4	2	5¼	4	7	3	4	12	¾	4	16	10½	4	21	8¼
5½	3	15	6½	3	20	1½	4	—	8½	4	4	10	4	9	5	4	14	—	4	18	7	4	23	7½
5¾	3	19	6¼	4	—	3¾	4	5	1¼	4	9	5	4	14	2½	4	19	—	4	23	9½	5	5	¾
6	3	23	—	4	3	—	4	8	—	4	11	6	4	16	—	4	20	—	5	1	—	5	6	6
6¼	4	2	11½	4	7	1½	4	12	4	4	15	11¾	4	20	8	5	—	10	5	6	½	5	11	9¼
6½	4	6	11	4	11	3	4	16	8	4	20	5½	5	1	4	5	5	8	5	11	1	5	17	½
6¾	4	10	10½	4	15	4½	4	21	—	5	—	11¼	5	6	—	5	10	6	5	16	1½	5	22	3¾
7	4	14	3	4	18	4	4	23	—	5	2	6	5	7	2	5	11	3	5	17	1	5	23	6
7¼	4	18	2¼	4	22	5	5	3	3	5	6	10½	5	11	8½	5	15	11¼	5	21	11¾	6	4	7½
7½	4	22	1½	5	2	6	5	7	6	5	11	3	5	16	3	5	20	7½	6	2	10½	6	9	9
7¾	5	2	¾	5	6	7	5	11	9	5	15	7½	5	10	9½	6	1	3¾	6	7	9¼	6	14	10½
8	5	5	4	5	9	4	5	13	4	5	17	4	5	21	4	6	1	4	6	8	—	6	16	—
8½	5	13	2	5	17	5	5	21	8	6	1	11	6	6	2	6	10	5	6	17	6	7	2	—
9	5	21	—	6	1	6	6	6	—	6	10	6	6	15	—	6	19	6	7	3	—	7	12	—
9½	6	4	10	6	9	7	6	14	4	6	19	1	6	23	10	7	4	7	7	12	6	7	22	—
10	6	11	10	6	16	10	6	21	10	6	22	8	7	2	10	7	12	—	7	17	—	7	22	10
10½	6	19	7½	7	—	10½	7	6	1½	7	7	—	7	11	4½	7	21	—	8	2	3	8	8	4½
11	7	3	5	7	8	11	7	14	5	7	15	4	7	19	11	8	6	—	8	11	6	8	17	11
11½	7	11	2½	7	16	11½	7	22	8½	7	23	8	8	4	5½	8	15	—	8	20	9	9	3	5½
12	7	16	—	7	21	—	8	2	—	8	7	—	8	11	—	8	16	—	8	21	—	9	2	—
12½	7	23	8	8	4	10½	8	10	1	8	15	3½	8	19	5½	9	—	8	9	5	10½	9	11	1
13	8	7	4	8	12	9	8	18	2	8	23	7	9	3	11	9	9	4	9	14	9	9	20	2
13½	8	15	—	8	20	7½	9	2	3	9	7	10½	9	12	4½	9	18	—	9	23	7½	10	5	3
14	8	21	6	9	2	2	9	8	—	9	12	8	9	17	4	9	23	2	10	3	10	10	8	6
14½	9	5	1½	9	9	11½	9	16	—	9	20	10	10	1	8	10	7	8½	10	12	6½	10	17	4½
15	9	12	9	9	17	9	10	—	—	10	5	—	10	10	—	10	16	3	10	21	3	11	2	3½
15½	9	20	4½	10	1	6½	10	8	—	10	13	2	10	18	4	11	—	9½	11	5	11½	11	11	1
16	10	2	8	10	8	—	10	13	4	10	18	8	11	—	—	11	5	4	11	10	8	11	16	—

Anmerkung. Erze, so über eine Mark Silber im Centner halten, erlangen, nach Beschaffenheit ihres Bleyes oder Silber-Gehalts, die Bezahlung der ersten oder zweyten Classe.