II

Lehrbuch
der
Arithmetik und Geometrie.

Zum Gebrauche des Unterrichts
bey der academischen Bergschule
zu Freyberg
verfasset
von

Daniel Friedrich Hecht,
Bergschullehrer und Schichtmeister.

Zweyter Cursus,
enthaltend die allgemeine Arithmetik,
die gemeine Geometrie und
Trigonometrie.

Freyberg,
bey Craz und Gerlach.
1814.

Vorerinnerung.

Da dieses Werkchen die Fortsetzung meines Lehrbuchs über die gemeine Arithmetik ist, welches im Jahr 1812. unter dem Titel **Lehrbuch der Arithmethik und Geometrie, erster Cursus,** erschien, und ich bereits in der Vorerinnerung dieses ersten Cursus alles das, was vorauszuschicken mir nöthig schien, so wie den Gesichtspunct, von welchem aus dieses Lehrbuch zu beurtheilen ist, schon bemerkt habe: so bedarf gegenwärtiger zweyter Cursus keiner besondern Vorrede. Inzwischen sey es mir erlaubt, hier noch Einiges über die Veranlassung dieses Lehrbuchs mitzutheilen; diese ist: weil ich beym Unterricht der reinen Elementar-Mathematik einen Leitfaden nöthig habe, welcher mit Rücksicht auf Bergbau und Markscheidekunst bearbeitet seyn muß; ferner, weil das Dicti-

Dictiren von Heften in so ferne theils schädlich ist, als sich beym Nachschreiben leicht Fehler einschleichen, woraus für die Lernenden mancherley Beschwerden und Mißverständnisse entstehen; theils weil dadurch eine Menge Zeit verloren geht, so daß dabey der Lehrer öfters keine Zeit zu mündlichen Erklärungen, practischen Uebungen und Beyspielen für die vorgetragnen Sätze behält.

Uebrigens ist mein herzlicher Wunsch, daß beyde Bändchen den Nutzen stiften mögen, den ich mit beyden zu stiften wünsche; so wie meine größte Belohnung ich nur für diese halten werde, wenn dieser zweyte Cursus ebenfalls den Beyfall der Sachverständigen erhält, welcher bereits dem ersten schon zu Theil wurde.

Freyberg, im Monat April 1814.

D. Fr. Hecht.

Inhalt.

Vier-

Fünf=

III. Die Trigonometrie.

Anzeige zur Berichtigung.

Seite	39	Zeile	5	von unten	steht	jede	statt	jeder
„	41	„	1	„	„	nd	„	nb
„	45	„	3	„	„	log 5	„	log 5,6.
„	46	„	3	„	„	p · g	„	p · q
		„	4	„	„	p · g	„	p · q
„	56	„	3	von oben	„	Fig. 2.	„	Fig. 1.
„	72	„	11	von unten	„	Zeichnen	„	Ziehen
„	82	„	2	„	„	haben	„	seyn
„	96	„	12	von oben	„	Vielecks	„	Vieleck
„	129	„	9	von unten	„	Kugelschnitts	„	Kugelschnitts durch den Mittelpunct der Kugel
„	130	„	7	„	steht	Glieder	statt	Cylinder
„	154	„	5	„	„	$\frac{64' \cdot 168'}{280'-268'}$	„	$\frac{64' \cdot 168'}{280'-168'}$
„	167	„	2	„	„	jedem	„	jenem
„	168	„	12	von oben	„	$1\frac{1}{4}$ Elle	„	$1\frac{1}{8}$ Elle
„	169	„	13	„	„	$G\left(\frac{H-h}{2}\right)$	„	$G\left(\frac{H+h}{2}\right)$
„	172	„	16	„	„	der	„	den
„	181	„	21	„	„	log 1300''	„	log 1030''
„	191	„	15	„	„	§. 171.	„	§. 173.
„	192	„	9	von unten	„	log 1	„	log r

Einleitung.

I. Eintheilung der Mathematik.

§. 1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von der Größe an sich, oder lehrt die Eigenschaften der Größe, und zieht daraus Regeln, die Größe in allen Fällen deutlich zu erkennen und genau zu bestimmen, das ist, sie auszumessen.

Größe aber ist diejenige Eigenschaft der Dinge, vermöge welcher sie sich vermehren und vermindern lassen.

Anmerkung. Die Mathematik oder Größenlehre betrachtet an den Körpern nur ihre Größe oder den Raum, welchen die Körper einnehmen, ohne die übrigen Eigenschaften der Körper, als Dichtigkeit, Trägheit, Schweere rc. in Betracht zu ziehen, und giebt Anweisung, von der Größe in allen Fällen eine deutliche Erkenntniß und genaue Bestimmung zu erlangen.

§. 2.

Die Größe kann aber auf zweyerley Art betrachtet werden:

1) als eine bloße Menge, die aus Theilen besteht, welche in beliebiger Verbindung seyn können.

Diese Größen nennt man abgesonderte. Dergleichen Größen sind die Zahlen.

2) als ein aus zusammenhängenden Theilen bestehendes Ganzes, so daß da, wo ein Theil aufhört, der andere anfängt. Diese Art von Größen heißen stetige, und dergleichen Größen sind Raum und Zeit.

§. 3.

Betrachtet die Mathematik die Größe an sich, ohne auf die anderweitigen Eigenschaften der Dinge zu sehen, an denen sich die Größe befindet, so heißt sie die **reine Mathematik.**

Untersucht man aber die Größen der wirklichen Dinge in der Natur, wendet die Sätze der reinen Mathematik auf die in der Natur vorhandnen Gegenstände an, und zieht von den anderweitigen Eigenschaften der Körper (§. 1. Anm.) eine oder die andere mit in Betracht, so entsteht die **angewandte Mathematik.** Daher die Eintheilung der Mathematik

I. in die **reine** und

II. in die **angewandte.**

§. 4.

Sowohl die reine als angewandte Mathematik theilt man wieder in besondre Abschnitte, die wegen ihres ansehnlichen Umfanges als besondre Wissenschaften angesehen werden.

Die reine Mathematik besteht

1) aus den arithmetischen und

2) aus

b) aus den geometrischen Wissenschaften, weil es zweyerley Arten von Größen giebt, nämlich abgesonderte und stetige (§. 2).

§. 5.

Die arithmetischen Wissenschaften enthalten

A. die gemeine Arithmetik, und

B. die allgemeine Arithmetik, wo Leztre wieder

a) in die Buchstabenrechnung und

b) in die Analysis zerfällt, oder in die Wissenschaft, unbekannte Größen, die man als bekannt annimmt, aus ihrem Verhältniß gegen bekannte zu finden.

§. 6.

Die geometrischen Wissenschaften werden abgetheilt

A. in die niedre oder gemeine Geometrie. Sie enthält

a) die Epipedometrie,

b) die Stereometrie und

c) die Trigonometrie.

Die Epipedometrie oder die ebene Geometrie schränkt alle ihre Untersuchungen auf einerley Ebene ein; die Stereometrie oder körperliche Geometrie handelt von den Körpern, und betrachtet zugleich zwey oder mehrere Ebenen, selbst auch gebogne Flächen, durch welche Körper begrenzt werden.

Die Trigonometrie behandelt die stetige Größe arithmetisch, und lehrt insbesondere die Seiten und Winkel eines Triangels berechnen.

B. in die höhere Geometrie. Diese untersucht alle Arten von krummen Linien.

§. 7.

Die angewandte Mathematik kann füglich in drey Wissenschaften eingetheilt werden. Nämlich

1) in die Mechanik, oder die Wissenschaft von den Kräften der Körper.
2) in die Optik, die Wissenschaft von den Erscheinungen, welche das Licht gewährt.
3) in die Astronomie, von den Körpern des Weltgebäudes.

II. Kunstwörter der mathematischen Lehrart.

§. 8.

Die mathematische Lehrart besteht

I. aus Erklärungen. Diese geben deutliche und bestimmte Begriffe von den abzuhandelnden Gegenständen. Und

II. aus Sätzen. Diese sind

1) Grundsätze, welche behaupten, daß etwas sey oder nicht sey, und dessen Wahrheit sogleich erkannt wird, so bald man nur die Worte versteht; z. B. Jede Größe ist sich selbst oder ihren Theilen gleich.

2) Lehrsätze, wenn die Wahrheit des Satzes erst aus andern Wahrheiten abgeleitet werden muß.

3) Forderungen, wo etwas zu bewerkstelligen verlangt wird, und die Art der Bewerkstelligung und deren Richtigkeit von selbst in die Augen fällt; z. B. Um jeden gegebnen Punct mit jeder gegebnen geraden Linie einen Kreis zu beschreiben.

4) Aufgaben, welche die Art der Verrichtung lehren, deren Richtigkeit aber dargethan werden muß.

5) Zusätze, welche schon in einem andern Satz enthalten sind oder daraus unmittelbar gefolgert werden können.

6) Anmerkungen, welche einer Erklärung, einem Lehrsatze, einer Aufgabe oder einem Zusatze zur Erläuterung, Geschichte, Lehrvortrage oder Anwendung beygefügt werden.

7) Lehnsätze, welche in den Zusammenhang des Vortrags zwar nicht gehören, aber in der Absicht eingeschaltet werden, damit ein folgender Satz durch dessen Hülfe erwiesen werden könne.

§. 9.

Zu einem Lehrsatze gehört:

a) der Satz selbst, der aus dem Angenommenen und der Aussage besteht.

b) die Construction, oder Verzeichnung der Hülfslinien zu Führung des Beweises, wo solches nöthig ist.

c) der

c) der Beweis, der die Aussage aus dem Angenommenen mittelst bekannter Sätze herleitet.

§. 10.

Zu einer Aufgabe gehört:

a) die Frage selbst, die aus dem Gegebnen und dem Gesuchten besteht.

b) die Auflösung, die das Gesuchte aus dem Gegebnen finden lehrt.

c) der Beweis, der die Richtigkeit der Aufgabe zeigt.

§. 11.

Der Beweis besteht in der augenscheinlichen Darstellung der Verbindung des zu beweisenden Satzes mit ungezweifelten Gründen, welche entweder für sich einleuchtend sind, als die Erklärungen, Grundsätze und Forderungen, oder im Vorhergehenden bereits bewiesen worden sind.

NB. Wenn sich in diesem Cursus auf den ersten oder auf die gemeine Arithmetik bezogen wird, so wird dies durch den Buchstaben A. angezeigt werden. z. B. (A. §. 40.) heißt, daß in dem ersten Cursus oder in der gemeinen Arithmetik der §. 40. nachzusehen ist.

I.

Allgemeine Arithmetik.

Mathematische Zeichen.

§. 12.

Zuförderst merke man folgende Zeichen:

der Gleichheit $=$	der Addition $+$
= Aehnlichkeit $\backsim$	= Subtraction $-$
des Größern $>$	= Multiplication $\times$ oder $\cdot$
= Kleinern $<$	= Division $:$

$A = B$; d. h. die Größe A ist gleich der Größe B.
$A \backsim B$; = = A = ähnlich = B.
$A > B$; = = A = größer als = B.
$A < B$; = = A = kleiner als = B.
$A + B$; = zu A ist B addirt, oder A plus B.
$A - B$; = von A ist B subtrahirt, oder A minus B.
$A \times B$ oder $A \cdot B$; d. h. A ist mit B multiplicirt.
$A : B$ oder $\frac{A}{B}$; d. h. A ist durch B dividirt.

Allge=

Allgemeine Grundsätze.

§. 13.

Von gleichen Dingen, A und B, läßt sich, der Größe unbeschadet, das eine für das andre, also A anstatt B, und B anstatt A, setzen.

§. 14.

Jede Größe A ist sich selbst, so wie auch allen ihren Theilen a und b zusammen gleich; also größer, als jeder ihrer Theile.

$A = A$; $A = a + b$; $A > a$; $A > b$. Oder

$$9 = 6 + 3;\ 9 > 6;\ 9 > 3.$$

§. 15.

Zwey Größen A und B, die einer dritten Größe C gleich sind, sind selbst gleich.

Ist $A = B$, und $B = C$, so ist $A = C$.

Anmerk. Man stellt dies gewöhnlich so:

$$\begin{array}{rl} & A = B \\ & B = C \\ \hline \text{also} & A = C \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rl} & 12 = 8 + 4 \\ & 12 = 9 + 3 \\ \hline \text{folgl.} & 8 + 4 = 9 + 3 \end{array}$$

§. 16.

Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt, giebt Gleiches.

$$\begin{array}{rl} \text{Ist} & A = B \\ \text{und} & C = D \\ \hline \text{so ist} & A + C = B + D \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rl} & M = N \\ & P = P \\ \hline \text{also} & M + P = N + P \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rl} & 8 = 2 \cdot 4 \\ & 5 = 5 \\ \hline \text{also} & 8 + 5 = 2 \cdot 4 + 5 \\ \text{d. i.} & 13 = 8 + 5 \end{array}$$

§. 17.

Gleiches von Gleichem weggenommen, läßt Gleiches.

Ist $A = B$ oder $E = H$
und $D = F$ $\quad G = G$

so ist $A - D = B - F$ so ist $E - G = H - G$

oder $12 = 9 + 3$
$7 = 7$

so ist $12 - 7 = 9 + 3 - 7$

§. 18.

Gleiches zu Ungleichem hinzugesetzt, giebt Ungleiches.

Ist $A > B$ oder $A > B$
$C = D$ $\quad E = E$

so ist $A + C > B + D$ so ist $A + E > B + E$

oder $9 > 7$
$3 = 3$

$9 + 3 > 7 + 3$

§. 19.

Gleiches von Ungleichem weggenommen, läßt Ungleiches.

Ist $A > D$ oder $A > D$ oder $15 > 9$
$F = N$ $\quad E = E$ $\quad 4 = 4$

$A - F > D - N$ $\quad A - E > D - E$ $\quad 15 - 4 > 9 - 4$

hingegen

$F = N$ $\quad E = E$
$A > D$ $\quad B < F$

$F - A < N - D$ $\quad E - B > E - F$

§. 20.

Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.

$$\frac{\text{Ist } A = B}{\text{so ist } n \cdot A = n \cdot B} \quad \text{oder} \quad \frac{2 \text{ thlr.} = 3 \text{ Gulden}}{\text{folgl. } 4 \cdot 2 \text{ thlr.} = 4 \cdot 3 \text{ Gulden.}}$$

§. 21.

Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.

$$\frac{\text{Ist } A = B}{\text{so ist } \frac{A}{m} = \frac{B}{m}} \quad \text{oder} \quad \frac{6 \text{ Ellen} = 12 \text{ Fuß}}{\text{folgl. } \frac{6 \text{ El.}}{2} = \frac{12 \text{ F.}}{2}}$$

§. 22.

Ungleiches durch Gleiches multiplicirt, giebt Ungleiches.

$$\frac{\text{Ist } A > B}{\text{so ist } n \cdot A > n \cdot B} \quad \text{oder} \quad \frac{12 < 19}{\text{folgl. } 4 \cdot 12 < 4 \cdot 19}$$

§. 23.

Ungleiches durch Gleiches dividirt, bringt Ungleiches.

$$\frac{\text{Ist } A > B}{\text{so ist } \frac{A}{m} > \frac{B}{m}} \quad \text{oder} \quad \frac{8 > 6}{\text{folg. } \frac{8}{2} > \frac{6}{2}}$$

Erster

Erster Abschnitt.

Von den gemeinen Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 24.

Erklärung. Die allgemeine Arithmetik oder die Rechenkunst mit Buchstaben lehrt die Rechnung mit allgemeinen Größen, welche durch beliebige Buchstaben des Alphabeths a, b, c, d ꝛc. als unbestimmte und allgemeine Zeichen bezeichnet werden.

Anmerk. 1. Die gemeine Arithmetik lehrt die Rechnung mit bestimmten Zahlen, die durch die gemeinen arabischen Ziffern, als bestimmte und festgesetzte Zeichen, bezeichnet werden.

Anmerk. 2. Jede Veränderung, die mit der Größe vorgenommen werden kann, ist entweder eine Vermehrung oder eine Verminderung (§. 1.), und die Art und Weise, wie man diese Veränderung vornimmt, heißt eine Rechnungsart.

Jede Größe kann aber auf zweyerley Art vermehrt und vermindert werden.

Eine Größe wird vermehrt, indem man entweder ungleiche Theile zusetzt, als $6+4+2=12$; oder immer gleiche Theile zusetzt, als $6+6+6=3\cdot6=18$. Die erste Art der Vermehrung heißt die Addition, und die zweyte die Multiplication.

Eine Größe wird vermindert, indem man entweder eine ungleiche Größe wegnimmt, als $9-5=4$; oder immer gleiche Größen wegnimmt, als $18-6=12$, und $12-6=6$, und $6-6=0$, oder $18-6-6-6=0$, d. h. die Größe 6 ist in der Größe $18=$ 3mal enthalten. Die erste Art der Verminderung heißt die Subtraction, und die zweyte die Division. Daher die bekannten vier Rechnungsarten der Arithmetik, nämlich die Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

§. 25.

Erklärung. Sind die Größen, welche zu einander addirt werden sollen, alle einander gleich: so giebt die Summe ein Vielfaches jeder dieser Größen, z. E. $a + a + a = 3a$. Die Zahl, welche das Vielfache der Größe a anzeigt, heißt ihr Coefficient, welcher neben die Größe linker Hand gesetzt wird; nämlich in der Form $3a$ ist 3 der Coefficient von a.

§. 26.

Erklärung. Sind die Größen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, alle einander gleich: so heißt das Product eine Potenz jeder dieser Größen, z. E. $a \cdot a \cdot a = a^3$. Die Zahl, welche anzeigt, wievielmal die Größe a mit sich selbst zu multipliciren sey, heißt ihr Exponent, welcher der Größe rechter Hand oben beygesetzt wird; nämlich in der Form a^3 ist 3 der Exponent von a.

Anmerk. 1. So ist also z. B. $a \cdot a = a^2$; $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$; und umgekehrt $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Daher $a^3 \cdot a^4 = a^7$.

Anmerk. 2. $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$. Denn

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3.$$

Hieraus folgt z. B. $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$, weil ja $\frac{a^5}{a^5} = 1$ ist, d. h. jede Potenz, deren Exponent $= 0$ ist, ist $= 1$.

Anmerk. 3. Anstatt $3a + 3b - 3g$ setzt man $3(a + b - g)$, und anstatt $\frac{a}{4} - \frac{c}{4} + \frac{d}{4}$ setzt man $\frac{a - c + d}{4}$. Im ersten Falle nennt man die Zahl 3 den gemeinschaftlichen Factor, und im zweyten die Zahl 4 den gemeinschaftlichen Divisor.

§. 27.

Erklärung. Entgegengesetzte Größen heißen Größen von einerley Art, wenn sie in einer solchen Beziehung genommen werden, daß die eine das Gegentheil der andern bedeutet. Von zwey solchen Größen nennt man die eine bejaht (positiv), die andere aber verneint (negativ), und bezeichnet jene durch das Zeichen der Addition (+), diese aber durch das Zeichen der Subtraction (—); weil diese Rechnungsarten wirklich einander entgegengesetzt sind (§. 24. Anm. 2.).

Bey bejahten Größen wird das Vorzeichen (+) oft weggelassen, muß aber immer dabey gedacht werden.

Anmerk. Gewöhnlich erläutert man den Begriff von entgegengesetzten Größen durch Beyspiele, die von dem gemeinen Begriffe Vermögen (oder baares Geld) und Schulden hergenommen sind. Vermögen wird alsdann mit + und Schuld mit — bezeichnet; oder Vermögen nennt man eine bejahte, und Schuld eine verneinte Größe.

So ist z. B. + 40 thlr. Vermögen eine bejahte, und — 10 thlr. Schuld eine verneinte Größe.

Wer 40 thlr. Vermögen und 40 thlr. Schulden hat, hat eigentlich nichts, weil $+ 40 - 40 = 0$; und wer 40 thlr. Vermögen und 60 thlr. Schulden hat, ist eigentlich nur 20 thlr. schuldig, weil $+ 40 - 60 = - 20$. Wer hingegen 40 thlr. Vermögen und 10 thlr. Schulden hat, hat nur 30 thlr. Vermögen, denn $+ 40 - 10 = + 30$.

Oder $+ 9a$ und $- 4a = + 5a$; $- 12a$ und $+ 5a = - 7a$.

§. 28.

Aufgabe. Entgegengesetzte Größen zu addiren.

Auf-

Auflösung. Man setze die Größen, welche mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, unter einander, rechne die bejahten und verneinten Größen zusammen, nehme das Kleinere von dem Größern, und schreibe vor das, was übrig bleibt, das Zeichen des Größeren. Z. B.

$$\begin{array}{rrrr} & 3a & -4b & +2c \\ & 2a & +3b & -5c \\ \hline \text{Summa} & 5a & -b & -3c \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2c & +3d & -4g & & \\ -7c & +2d & +8g & -3m & \\ 4c & -7d & -g & -7m & -2n \\ \hline -c & -2d & +3g & -10m & -2n \end{array}$$

§. 29.

Aufgabe. Entgegengesetzte Größen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man setze die mit einerley Buchstaben bezeichneten Größen unter einander, und setze zu dem Subtrahend eine Größe hinzu, welche mit den Subtrahend zusammen dem Minuend gleich ist; so ist diese hinzugesetzte Größe die Differenz zwischen den entgegengesetzten Größen. Z. B.

$$\begin{array}{rrrr} & 5a & +4b & -9d \\ & -3a & +9b & -7d \\ \hline \text{Differenz} = & 8a & -5b & -2d \\ \hline \text{Probe} & 5a & +4b & -9d \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & -9b & +3d & & \\ 6a & +8b & -4d & +9m & -p \\ \hline -a & -17b & +7d & -9m & +p \\ \hline 5a & -9b & +3d & & \end{array}$$

Anmerk.

Anmerk. Die Regel für die Subtraction mit entgegengesetzten Größen ist gewöhnlich diese: man verwandle die Zeichen des Subtrahend in die entgegengesetzten, und addire. Z. B.

$$\begin{array}{rrr} 5a & +4b & -9d \\ -\ 3a & +9b & -7d \\ + & - & + \\ \hline 8a & -5b & -2d \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & -9b & +3d & & \\ 6a & +8b & -4d & +9m & -p \\ - & - & + & - & + \\ \hline -\ a & -17b & +7d & -9m & +p \end{array}$$

§. 30.

Lehrsatz. Zwey Factoren von einerley Zeichen geben ein positives, und zwey Factoren von verschiednen Zeichen ein negatives Product.

Beweis. Daß zwey positive Factoren ein positives Product geben, ist durch sich selbst klar. Also $+a \cdot +b = +ab$. Aber auch $-a \cdot -b = +ab$. Denn eine verneinte Größe durch eine verneinte multipliciren, heißt, die verneinte Größe verneint, d. i. ihr Entgegengesetztes, nämlich das Bejahte, so vielmal nehmen, als der verneinte Factor Einheiten hat. Folglich ist das Product bejaht.

Eben so muß auch $+a \cdot -b$ oder $-a \cdot +b = -ab$ seyn, weil dies eigentlich heißt, man soll die bejahte Größe so vielmal verneint nehmen, als der verneinte Multiplicator Einheiten hat; oder die verneinte Größe wirklich so vielmal nehmen, als der bejahte Factor Einheiten enthält, wo also in beyden Fällen das Product verneint oder negativ seyn muß.

§. 31.

§. 31.

Aufgabe. Allgemeine Größen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man setze den Multiplicator unter den Multiplicandus, multiplicire alle Theile des Letztern mit jedem Theil des Erstern, und bestimme die Zeichen nach vorigem §. Die so erhaltnen einzelnen Producte nach §. 27. addirt, geben das gesuchte Product. Z. B.

$$\begin{array}{r}
3a - 2b + 2d \\
5a - 3b \\
\hline
-9ab + 6b^2 - 6bd \\
15a^2 - 10ab + 10ad \\
\hline
15a^2 - 19ab + 10ad + 6b^2 - 6bd
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
-4a + 5b - 5g \\
5a - 7b + 3g \\
\hline
-12ag + 15bg - 15g^2 \\
28ab - 35b^2 + 35bg \\
-20a^2 + 25ab - 25ag \\
\hline
-20a^2 + 53ab - 37ag - 35b^2 + 50bg - 15g^2
\end{array}$$

§. 32.

Lehrsatz. Zwey Größen mit gleichen Zeichen in einander dividirt, geben einen positiven, und zwey Größen mit ungleichen Zeichen in einandet dividirt, einen negativen Quotienten.

Beweis.

Da $+a \cdot +b = +ab$, so ist $\frac{+a \cdot +b}{+a} = \frac{+ab}{+a} = +b$

$-a$

$$-a\cdot+b=-ab, \text{ so ist } \frac{-a\cdot+b}{-a}=\frac{-ab}{-a}=+b$$

$$-a\cdot-b=+ab, \text{ „ } \frac{-a\cdot-b}{-a}=\frac{+ab}{-a}=-b$$

$$+a\cdot-b=-ab, \text{ „ } \frac{+a\cdot-b}{+a}=\frac{-ab}{+a}=-b$$

nach §. 21.

§. 33.

Aufgabe. Allgemeine Größen in einander zu dividiren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der Divisor einfach ist, so zeige man die Division nur an, und streiche, wenn der Divisor mit dem Dividend oder einzelne Glieder desselben gemeinschaftliche Factoren haben, diese gegen einander weg.

Z. B. $\frac{20a^2-12ab+8ad-8ag}{4a}$

$$=\frac{5a\cdot4a}{4a}-\frac{3b\cdot4a}{4a}+\frac{2d\cdot4a}{4a}-\frac{2g\cdot4a}{4a}$$

$$=5a-3b+2d-2g.$$

Zweyter Fall. Wenn der Divisor und Dividend zusammengesetzte Ausdrücke sind, so ordne man die Glieder in beyden nach einerley Buchstaben, (gewöhnlich nach dem, welcher die höchsten Potenzen enthält,) dividire mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden; mit dem gefundnen Quotienten multiplicirt man alle Glieder des Divisors nach §. 31. und ziehe diese vom Dividenden ab nach §. 29. Bleibt ein Rest, so verfährt man mit dem ersten Glied desselben wie vorher. Z. B.

$$\frac{6a^2 + 2ab - 7ad - 8b^2 + 2d^2}{3a + 4b - 2d} \text{ giebt}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
3a + 4b - 2d & 6a^2 + 2ab - 7ad - 8b^2 + 2d^2 & 2a - 2b - d \\
 & 6a^2 + 8ab - 4ad & \\
\hline
 & \quad - 6ab - 3ad - 8b^2 + 2d^2 & \\
 & \quad - 6ab \qquad - 8b^2 + 4bd & \\
\hline
 & \qquad - 3ad \qquad - 4bd + 2d^2 & \\
 & \qquad - 3ad \qquad - 4bd + 2d^2 & \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Anmerk. Geht die Division nicht auf, so setzt man zum letzten Gliede des Quotienten den letzten Rest als einen Bruch, dessen Nenner der Divisor und dessen Zähler der Rest ist. Z. B.

$$\begin{array}{r|l|l}
4a + 2b & 8a^2 - 8ab - 6b^2 + 4g & 2a - 3b + \dfrac{4g}{4a+2b} \\
 & 8a^2 + 4ab & \\
\hline
 & \quad - ab - 6b^2 & \\
 & \quad - ab - 6b^2 & \\
\hline
 & \qquad + 4g &
\end{array}$$

Zweyter Abschnitt.

Von den Potenzen und der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 34.

Erklärung. Eine Potenz heißt ein Product von gleichen Factoren.

Einer dieser Factoren heißt die **Wurzel** der Potenz. Die Anzahl der gleichen Factoren bestimmt den Grad (Namen, Exponenten) der Potenz (§. 25.). So heißt z. B. ein Product aus

zwey

zwey, drey, vier gleichen Factoren die zweyte, dritte, vierte Potenz dieses Factors oder dieser Wurzel. Die zweyte Potenz nennt man auch das Quadrat, die dritte Potenz den Cubus oder Würfel.

§. 35.

Erklärung. Eine Zahl zu einer Potenz erheben, heißt die Zahl so viel mal mit sich selbst multipliciren, als der vorgeschriebne Grad der Potenz anzeigt. Z. B.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \text{ oder } 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \text{ oder } \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{16}.$$

Zusatz. Jede folgende Potenz einer gegebnen Zahl entsteht, wenn man ihre nächstvorhergehende Potenz mit dieser Zahl multiplicirt; z. B. $a^2 \cdot a = a^3$; $a^3 \cdot a = a^4$, oder $3^2 \cdot 3 = 3^3 = 27$.

§. 36.

Erklärung. Die Wurzel aus einer gegebenen Zahl ziehen, heißt eine Zahl finden, die zu der Potenz vom vorgeschriebnen Exponenten erhoben der gegebnen Zahl gleich ist.

Diese arithmetische Operation anzuzeigen, schreibt man vor die Zahl das Zeichen $\sqrt{\ }$, in die Oeffnung des Wurzelzeichens den Grad der Potenz. Bedeutet es die Wurzel der zweyten Potenz oder die Quadratwurzel, so schreibt man nichts in die Oeffnung des Wurzelzeichens. Z. B.

$$\sqrt{16} = 4, \text{ weil } 4^2 = 16$$

$$\sqrt[3]{27} = 3, \text{ » } 3^3 = 27.$$

§. 37.

Aufgabe. Die Potenzen aller einfachen Zahlen oder das Wurzeltäflein zu machen.

Auflösung. Die Quadrate der einzelnen Ziffern giebt das Einmaleins (A. §. 20.), und es lassen sich hieraus nach §. 35. Zus. die folgenden Potenzen machen. Daher entsteht folgendes Wurzeltäflein:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

§. 38.

Lehrsatz. Das Quadrat einer zweytheiligen Größe besteht aus dem Quadrat des ersten Theils, aus dem zweyfachen Product beyder Theile, und aus dem Quadrat des zweyten Theils.

Beweis. Es sey die zweytheilige Größe $= a + b$, oder z. B. die Zahl $26 = 20 + 6$; so ist das Quadrat dieser zweytheiligen Größe oder Zahl $= (a + b)^2$ oder $(20 + 6)^2 =$

$$\begin{array}{lcll} a + b & \text{oder} & 20 + 6 & = 26 \\ a + b & & 20 + 6 & = 26 \\ \hline ab + b^2 & & 20 \cdot 6 + 6^2 = 120 + 36 & = 156 \\ a^2 + ab & & 20^2 + 20 \cdot 6 = 400 + 120 & = 520 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & \text{oder} & 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 6 + 6^2 = 400 + 240 + 36 & = 676 \end{array}$$

Zusatz. Das Quadrat einer vieltheiligen Größe oder Zahl kann man nach dem Quadrat einer zweytheiligen ordnen, wenn man die ersten Theile der vieltheiligen Größe als den ersten, den letzten aber als den zweyten Theil der zweytheiligen Größe annimmt. So ist z. B.

$$(a + b + c)^2 = (A + c)^2 = A^2 + 2Ac + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$

§. 39.

§. 39.

Aufgabe. Aus jeder gegebnen Zahl, die eine vollkommne Quadratzahl ist, die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. 1) Man theile die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede von zwey Ziffern. Die letzte kann auch eine Ziffer haben.

2) Von der letzten Classe suche man die Wurzel oder die nächst niedrige aus dem Wurzeltäflein (§. 37.), um dann ihr Quadrat von dieser Classe abzuziehen. Die Wurzel wird gewöhnlich zur Rechten hinter die Quadratzahl geschrieben.

3) Man setze jetzt die folgende ganze Classe zu dem Reste der letzten Classe, verdopple den gefundnen Theil der Wurzel, und setze diese neue Zahl so, daß wenn sie eine einfache ist, sie gleich unter der ersten Zahl hintern Classenstrich zu stehen kommt, wenn sie aber eine zusammengesetzte Zahl ist, ihre letzte Ziffer unter der ersten Zahl hinterm Classenstrich steht. Mit dieser Zahl dividire man in das Herabgesetzte mit Uebergehung der letzten Ziffer, um den neuen Wurzeltheil zu erhalten. Dieser wird mit dem Divisor und nun mit sich selbst multiplicirt, und das Ganze von jenem Herabgesetzten abgezogen.

4) Zu dem Reste setzt man die folgende Classe der Quadratzahl, betrachtet es wieder als ein Ganzes, und nachdem man den zweyten Wurzeltheil hinter den ersten geschrieben, verdoppelt man beyde, als ein Ganzes betrachtet, und dividirt eben so in das Herabgesetzte, mit Uebergehung der letzten Ziffer u. s. f.

Fol-

Folgende Beyspiele werden dies erläutern:

$$
\begin{array}{rr|l|l}
\multicolumn{3}{r|}{\text{Quadratzahl}} & \text{Wurzel} \\
 & & & a + b \\
 & 6 & 76 & 2 \quad 6 \\
a^2 = & 4 & & \\
\hline
 & 2 & 76 & = 2ab + b^2 \\
2a = & (& 4) & \\
2ab = & 2 & 4 & \\
b^2 = & & 36 & \\
\hline
 & 2 & 76 & \\
\hline
 & & 0 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l|l|l}
\multicolumn{4}{r|}{\text{Quadratzahl}} & \text{Wurzel} \\
 & & & & \overset{A}{\overbrace{a + b}} + c \\
 & 23 & 42 & 56 & 4 \quad 8 \quad 4 \\
a^2 = & 16 & & & \\
\hline
 & 7 & 42 & & = 2ab + b^2 \\
2a = & (& 8) & & \\
2ab = & 6 & 4 & & \\
b^2 = & & 64 & & \\
\hline
 & 7 & 04 & & \\
\hline
 & & 38 & 56 & = 2(a+b)c + c^2 \\
2A = 2(a+b) = & & (9 & 6) & \\
2Ac = 2(a+b)c = & & 38 & 4 & \\
c^2 = & & & 16 & \\
\hline
 & & 38 & 56 & \\
\hline
 & & & 0. & \\
\end{array}
$$

Zusatz 1. Ist der Divisor größer als der geblichne Rest und die erste Zahl der herabgesetzten Classe, so ist der neue Theil der Wurzel 0. Z. B.

```
 9|12|04|302
 9
 —
  |12
 (|6)
  —
  12|04
  (6|0)
  12|0
    | 4
  12|04
     0
```

Zusatz II. Ist die Zahl, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, keine vollständige Quadratzahl, so muß man am Ende durch Hinzusetzung von Nullen, wie bey der Division mit Decimalbrüchen (A. §. 49. Zus. I.), sich der Wurzel zu nähern suchen. Doch hier mit dem Unterschied, daß man für jede neue Classe zwey Nullen hinzufügt. Aus dem Bisherigen ergiebt sich nämlich, daß die Anzahl der Classen mit der der Wurzeltheile übereinstimmt, so daß eine Quadratzahl von 2 Classen auch eine zweytheilige Wurzel u. s. f. hat.

Aus der Zahl 8682, die keine vollständige Quadratzahl ist, wird die Wurzel gezogen, wie folget:

```
 Zahl |Wurzel
 86|82|93,17 . .
 81
 ——
  5|82
 (1|8)
  5|49
   33|00
  (18|6)1
     1439|00
     (186|2)
     1303|4
         |49
    130389
     13511 - - - -
```

Anmerk. 1. Um sich zu überzeugen, daß die Rechnung richtig ist, so multiplicire man die gefundne Wurzel mit sich selbst, und addire bey einer unvollständigen Quadratzahl zum Producte den letztverbliebnen Rest, so wird die Quadratzahl herauskommen. Das Quadrat von

93,17 ist nämlich	8680,6489
der letzte Rest	1,3511
	8682,0000

Anmerk. 2. Auf gleiche Art wird man zu Werke gehen, wenn aus einem Decimalbruch die Quadratwurzel gezogen werden soll Aus einem gemeinen Bruch zieht man die Quadratwurzel, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner zieht. Wenn diese aber keine vollständigen Quadratzahlen sind, so suche man die Wurzel wieder durch Näherung. Z. B.

$$\sqrt{\tfrac{36}{49}} = \tfrac{6}{7};\ \sqrt{\tfrac{16}{81}} = \tfrac{4}{9};\ \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1{,}73}{2}\ldots$$

§. 40.

Lehrsatz. Der Würfel einer zweytheiligen Größe besteht aus dem Würfel des ersten Theils, aus dem dreyfachen Product sowohl des Quadrats des ersten Theils in den zweyten Theil, als auch des Quadrats des zweyten Theils in den ersten Theil, und aus dem Würfel des zweyten Theils.

Beweis. Es sey wieder die zweytheilige Größe $= a + b$; so findet man:

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{Wurzel} = & & a & + b & & \\
 & & a & + b & & \\
\hline
\text{Zweyte Potenz} = & a^2 & + 2ab & + b^2 & & (\text{§. 38.}) \\
 & & & a & + b & (\text{§.35. Zus.}) \\
\hline
 & & a^2b & + 2ab^2 & + b^3 & \\
 & a^3 + & 2a^2b & + ab^2 & & \\
\hline
\text{Dritte Potenz} = & a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3. &
\end{array}$$

Zusatz. Beym Würfel einer vieltheiligen Wurzel verfährt man auf ähnliche Weise wie im §. 38. Zus. Nämlich $(a+b+c)^3 = (A+c)^3 = A^3 + 3A^2c + 3Ac^2 + c^3$ $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$.

§. 41.

Aufgabe. Aus jeder gegebnen Zahl, die eine vollkommne Cubikzahl ist, die Cubikwurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung. 1) Man theile die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede von drey Ziffern; die letzte kann auch nur eine Ziffer haben.

2) Nehme man den Würfel in dem Wurzeltäflein (§. 37.), welcher der letzten oder ersten Classe zur Linken gleich ist, oder den nächst kleinern. Dessen Wurzel wird ebenfalls zur Rechten hinter die Cubikzahl gesetzt; der Würfel selbst aber von dieser ersten Classe abgezogen.

3) Zu dem Rest schreibe man die folgende Classe der gegebnen Zahl, und setze das dreyfache Quadrat des ganzen gefundnen Theils der Wurzel als einen Divisor so, daß dessen letzte Ziffer, von der Linken an gezählt, unter der ersten Zahl der herabgeschriebnen Classe stehe. Mit demselben dividire man nun die über ihm stehenden Zahlen, und setze den Quotienten an den vorigen Wurzeltheil. Darauf nehme man

4) das Product aus dem neuen Quotienten und seinem Divisor, und schreibe es unter den Divisor, daß sich dessen letzte Zahl unter der ersten der heruntergesetzten Classe befinde. Eben so schreibe man auch unter die mittlere Ziffer dieser Classe das Product aus dem dreymal genommenen Quadrat des neuen Quotienten und dem vorigen Wurzeltheil, auf gleiche Art unter die letzte Ziffer den Würfel des neuen Quotienten.

Diese drey Producte werden addirt, und die Summe von den über ihn stehenden Ziffern abgezogen.

5) Zu dem Reste setzt man wieder die folgende Classe und wiederholet so das Verfahren von 3) und 4).

Folgende Beyspiele werden dies erläutern:

$$
\begin{array}{rr|l|l}
 & \multicolumn{2}{c|}{\text{Cubikzahl}} & \text{Wurzel} \\
 & & & a + b \\
 & 15 & 635 & 2 \quad 5 \\
a^3 = & 8 & & \\
\hline
 & 7 & 625 = 3a^2b + 3ab^3 + b^3 & \\
3a^2 = & (1 & 2) & \\
3a^2b = & 6 & 0 & \\
3ab^2 = & 1 & 50 & \\
b^3 = & & 125 & \\
\hline
 & 7 & 625 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|r|l|l}
 & \multicolumn{3}{c|}{\text{Cubikzahl}} & \text{Wurzel} \\
 & & & & a + b + c \\
 & 432 & 081 & 216 & 7 \quad 5 \quad 6 \\
a^3 = & 343 & & & \\
\hline
 & 89 & 081 & = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \\
3a^2 = & (14 & 7) & & \\
3a^2b = & 73 & 5 & & \\
3ab^2 = & 5 & 25 & & \\
b^3 = & & 125 & & \\
\hline
 & 78 & 875 & & \\
\hline
 & 10 & 206 & 216 = 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 & \\
3(a+b)^2 = & (1 & 687 & 5) & \\
3(a+b)^2c = & 10 & 125 & 0 & \\
3(a+b)c^2 = & & 81 & 00 & \\
c^3 = & & & 216 & \\
\hline
 & \multicolumn{2}{r|}{10206} & 216 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Zusatz. Ist die Zahl, aus welcher die Cubikwurzel gezogen werden soll, keine vollständige Cubikzahl, so verfährt man auf ähnliche Weise wie §. 39. Zus. II., nur daß man jeder neuen Classe drey Nullen anhängt.

Auch in Hinsicht der Probe und bey Brüchen verhält es sich wie §. 39. Anm. 1. u. 2.

Dritter Abschnitt.

Einige Anwendungen der Buchstabenrechnung.

§. 42.

Erklärung. Eine Gleichung heißt jeder Ausdruck für die Gleichheit zweyer ein oder mehrnahmigen Größen, besonders wenn darinn gegebne oder bekannte mit gesuchten oder unbekannten Größen verbunden sind. Die unbekannten Größen werden durch die letztern Buchstaben des Alphabeths, z, y, x ꝛc. die bekannten durch die erstern a, b, c ꝛc. bezeichnet.

§. 43.

Erklärung. Die beyden gleichgesetzten Größen heißen die Seiten, und ihre durch die Vorzeichen verbundnen Theile die Glieder der Gleichung, welche hiernach 2=, 3=, 4= und mehrgliedrig seyn kann.

Z. E. Die Gleichung $ax = bc$ ist zweygliedrig; die Gleichung

$$ax + bx - cx = dg - eg$$

eine fünfgliedrige, welche aber durch den Ausdruck $(a + b - c)x = (d - e)g$ zweygliedrig wird.

§. 44.

§. 44.

Grundsatz. Wird zu beyden Seiten einer Gleichung Einerley addirt, oder davon subtrahirt; oder werden beyde Seiten mit Einerley multiplicirt oder dividirt; oder werden beyde Seiten zu einerley Potenz erhoben, oder daraus einerley Wurzel ausgezogen: so bleibt noch eine Gleichung.

Zusatz I. Einerley Größen mit einerley Vorzeichen auf beyden Seiten heben einander auf. Z. E.

Aus $x + b - c = a + b - c$ wird $x = a$. Oder
„ $x + 9 - 4 = 5 + 9 - 4$ „ $x = 5$.

Zusatz II. Jedes Glied der Gleichung läßt sich mit entgegengesetzten Zeichen von der einen Seite auf die andere versetzen. Z. E.

Aus $x + b - c = m + g$ wird $x = m + g - b + c$, oder
„ $x + 9 - 4 = 5 + 3$ „ $x = 5 + 3 - 9 + 4 = 3$, od.
d. i. $x + 5 = 8$; daher $x = 8 - 5 = 3$.

Auf ähnliche Art wird auch ein Factor oder Divisor auf die andere Seite gebracht. Z. E.

Aus $\frac{x}{a} = \frac{b}{n}$ wird $x = \frac{ab}{n}$ oder
„ $\frac{x}{3} = \frac{8}{4}$ „ $x = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$.
„ $nx = gm$ „ $x = \frac{gm}{n}$
„ $6x = 30$ „ $x = \frac{30}{6} = 5$.

Zusatz III. Durch Herausbebung des gemeinschaftlichen Factors (§. 26 Anm. 3.) und durch Division mit dem gemeinschaftlichen Factor läßt sich die Gleichung einfacher darstellen. Z. E. Aus

$ax - bx + dx = gm + gp$ wird

$(a - b + d)\,x = g\,(m + p)$ Also $x = \frac{g(m+p)}{a-b+d}$

Oder aus $15 b^2 = 24\,ab + 3\,bx$ wird
$5b = 8a + x$; daher $x = 5b - 8a$

Zusatz IV.

Zusatz IV. Die Brüche werden aus einer Gleichung weggeschafft, wenn man alle Glieder mit dem Product aus allen Nennern oder mit dem General-Nenner (A. §. 38. 39.) multiplicirt. Z. E. Aus

$\frac{a}{r} = \frac{b}{e} - \frac{c}{n}$ wird $\frac{aren}{r} = \frac{bren}{e} - \frac{cren}{n}$;

das giebt, wenn man jedes Glied mit seinem Nenner dividirt, $aen = brn - cre$. Oder aus $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 4 = 2$ wird, $\frac{x \cdot 4}{4} + \frac{x \cdot 4}{2} - 4 \cdot 4 = 2 \cdot 4$, oder $x + 2x - 16 = 8$, d. i. $3x - 16 = 8$; daher $3x = 8 + 16 = 24$, oder $x = \frac{24}{3} = 8$.

§. 45.

Um eine Gleichung aufzulösen, oder den Werth unbekannter Größen aus gegebner Bedingung mittelst Gleichungen herzuleiten, so sind hierzu drey Operationen erforderlich:

1) Die Formation der Gleichung: Man nenne nämlich das unbekannte x, und bringe es so in Rechnung, als wenn es schon bekannt wäre; indem man es nach den Bedingungen der Aufgabe mit den bekannten Größen verbindet, diese Verbindung durch die gemeinen arithmetischen Zeichen ausdrückt, und diejenigen Ausdrücke einander gleich setzt, die es nach den Erfordernissen der Aufgabe seyn sollen.

2) Die Reduction der Gleichung: Ist nämlich in der formirten Gleichung noch Manches, was sich wegschaffen, zusammenziehen oder geschickter ausdrücken läßt: so bewerkstellige man dieses nach §. 44. und dessen Zusätzen.

3) Die

3) Die Solution der Gleichung: Man versetze nämlich alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine Seite, so daß auf der andern blos die Glieder mit bekannten Größen bleiben; bringe die einzelnen Coefficienten der unbekannten Größe in eine algebraische Summe und dividire damit in die andere Seite der Gleichung.

Beyspiele zur Uebung.

1) $ax + bm - g = n - p$ Also x?
2) $gx + bx - mx = ng + np$ „ x?
3) $4x + 3x - 5x = ab + am$ „ x?
4) $9x + 2x - 4x = 84$ „ x?
5) $3x + 12 - 9 = 39$ „ x?
6) $5x - 9 + 1 = 13 - 2x$ „ x?
7) $5x + 6x + 9 = 48 - 3 + 11x - 3x$ „ x?
8) $x + 3x - 20 + 5x + 2 = 63$ „ x?
9) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} - \frac{x}{12} - 3 = 12$ „ x?
10) $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} - \frac{x}{3} - 4 = 18$ „ x?
11) $\frac{3x}{2} - \frac{4x}{9} + \frac{5x}{6} - 2 = 32$ „ x?
12) $\frac{5x}{12} + \frac{7x}{24} + \frac{9x}{48} - 2 = 41$ „ x?

Beyspiel 1. Drey Personen sollen sich in 170 thlr. so theilen, daß die zweyte Person zweymal so viel als die erste und noch 10 thlr.; die dritte aber als die erste und zweyte zusammen, weniger 30 thlr. erhält. Wie viel Thaler wird jede Person erhalten?

Auf-

Auflösung. Die erste Person erhalte x thlr.; so erhält die zweyte $2x + 10$ thlr., und die dritte $x + 2x + 10 - 30 = 3x - 20$ thlr.; und es ist daher

1) x
2) $2x + 10$
3) $3x - 20$

das ist $6x - 10 = 170$

$6x = 170 + 10 = 180$ (§. 44. Zus. II.)

also $x = \frac{180}{6} = 30$ thlr. (§. 44. Zus. II.)

Demnach erhält

die erste Person	30 thlr.		= 30 thlr.
= zweyte	=	$2 \cdot 30 + 10$	= 70 =
= dritte	=	$3 \cdot 30 - 20$	= 70 =
		alle drey Pers.	= 170 thlr.

Beyspiel 2. Bey einer Grube sind 525 Mann im Frühdrittel, der dritte Theil der ganzen Belegung im Mittags, und der vierte Theil der Belegung im Nachtdrittel: wie stark ist die ganze Belegung?

Auflösung. Man setze die ganze Belegung $= x$ Mann; so sind 525 Mann früh, $\frac{x}{3}$ zu Mittage und $\frac{x}{4}$ in der Nacht, und daher

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 525 = x \qquad \cdot 12$$

$$4x + 3x + 6300 = 12x \text{ (§. 44. Zus. IV.)}$$

$$6300 = 12x - 7x = 5x$$

$$\frac{6300}{5} = 1260 \text{ Mann} = x.$$

Es

Es waren daher im Frühdrittel $= 525$ Mann

im Mittagsdrittel $\frac{x}{3} = 420$ =

im Nachtdrittel $\frac{x}{4} = 315$ =

Ueberhaupt 1260 Mann.

Beyspiel 3. Bey einer Grube hat man zwey Haufen Erz. In dem einen Haufen hält der Centner 15 Loth Silber, und im andern der Centner 6 Loth Silber. Man will nun eine Post von 18 Centnern zu 8 Loth Silbergehalt liefern: wie viel Centner wird man von jedem Erzhaufen hinzunehmen müssen.

Auflösung. Man setze, daß man von dem guten Erzhaufen x Centner nehme, so müßte man von dem geringern Erzhaufen $18 - x$ Centner nehmen. Da nun jeder Centner des guten Erzes 15 Loth Silber hält, so halten die x Centner $= 15 \cdot x$ Loth Silber; weil ferner jeder Centner von dem geringern Erz 6 Loth Silber enthält, so halten die $18 - x$ Centner $= 6(18 - x)$ Loth Silber, und die 18 Centner, jeder zu 8 Lothen Silber, $= 18 \cdot 8 = 144$ Loth Silber. Es muß demnach seyn

$$15x + 6(18 - x) = 144$$

d. i. $$15x + 108 - 6x = 144$$

$$9x = 144 - 108 = 36$$

$$x = \frac{36}{9} = 4 \text{ Ct.}$$

Demnach muß man vom guten Erz 4 Cnt.

vom geringern $18 - 4 = 14$ =

nehmen, und es halten

4 Cent.

4 Ct.	zu 15 Loth	=	60 Loth Silber	
14 =	= 6 =	=	84 =	= Also
18 Ct.	zu 8 Loth	=	144 =	= wie

oben.

Anmerkung. Wollte man blos das Verhältniß der Mischung wissen: so setze man

die Quantität
des Guten $= x$, folglich ihr Werth $= 15x$
des Geringern $= y$, , $= 6y$
der Mischung $= x + y$, , $= 8(x+y)$,
dieser besteht aus den beyden vorigen $15x + 6y$. Daher

$$8(x+y) = 8x + 8y = 15x + 6y \text{ oder}$$

$$8y - 6y = 15x - 8x$$

d. i. $2y = 7x$, oder

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{2}, \text{ dieß giebt}$$

$x : y = 2 : 7$ (A. §. 66.), d. h. von dem guten Erz müßte man 2 Theile und von dem geringen 7 Theile nehmen, um 8löthiges Erz zu erhalten, welches auch mit dem obigen Verhältniß $4 : 14 = 2 : 7$ übereinstimmt.

Gewöhnlich verfährt man so, um das Verhältniß der Mischung zu erfahren:

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{8} \\ 15 & 2 \\ 6 & 7 \end{array}$$

man zieht den geringen Gehalt (6 Loth) von dem gesuchten (8 Loth), und den gesuchten (8) von dem größten Gehalt (15 Loth) ab, so erhält man auch voriges Verhältniß des Guten zum Geringen $= 2 : 7$.

§. 46.

Aufgabe. Die Summe zweyer Größen oder Zahlen sey $= S$, ihre Differenz $= D$: was ist der Werth dieser Größen?

Auflösung. Nennt man die größere Größe oder Zahl $= x$, und die kleinere $= y$, so ist

$$x + y = S$$
$$x - y = D$$

daher $2x = S + D$ (§ 16.)

und 1) $x = \frac{S+D}{2} = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$

Aber $2y = S - D$ (§. 17.)

2) $y = \frac{S-D}{2} = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$, d. h.

man findet 1) die größere Größe oder Zahl, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz der Größen oder Zahlen addirt, und 2) die kleinere Größe oder Zahl, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt.

Z. B. Die Summe zweyer Zahlen sey $= S = 56$, und ihre Differenz $= D = 22$, so ist

die größere

$$x = \frac{S}{2} + \frac{D}{2} = \frac{56}{2} + \frac{22}{2} = 28 + 11 = 39,$$

die kleinere

$$y = \frac{S}{2} - \frac{D}{2} = \frac{56}{2} - \frac{22}{2} = 28 - 11 = 17.$$

§. 47.

Beyspiel 1. Man hat zwey Erzhaufen A und B: wenn man 3 Cnt. von A unter 5 Cnt. von B mengt, so sind in diesen 8 Cnt. 44 Loth Silber; mengt man aber 5 Cnt. von A unter 7 Cnt. von B, so sind in diesen 12 Centnern 68 Loth Silber enthalten. Wie viel Loth Silber hält jeder Centner im Haufen A, und im Haufen B.

Auf-

Auflösung. Man setze, jeder Centner im Haufen A halte x Loth, und jeder Cent. im Haufen B halte y Loth Silber, so sind
das erstemal $3x$ Lth. $+ 5y$ Lth. $= 44$ Lth. Silber,
das zweytemal $5x$ Lth. $+ 7y$ Lth $= 68$ = =
Hier muß man nun aus jeder Gleichung für eine der unbekannten Größen einen Ausdruck suchen, so müssen diese Ausdrücke für einerley Größe einander gleich seyn. Aus der ersten Gleichung folgt

für $x = \frac{44 - 5y}{3}$, und aus der zweyten

= $x = \frac{68 - 7y}{5}$. Demnach ist

$$\frac{44 - 5y}{3} = \frac{68 - 7y}{5}, \text{ oder}$$

$5(44 - 5y) = 3(68 - 7y)$ (§. 20. u. 44. Zus. 4.)
das ist

$$220 - 25y = 204 - 21y \text{ (§. 25. Anm. 3.)}$$

Demnach

$$220 - 204 = 25y - 21y$$

d. i. $16 = 4y$

oder $\frac{16}{4} = 4 = y$.

Nun ist aber $x = \frac{44 - 5 \cdot 4}{3} = \frac{44 - 20}{3} = \frac{24}{3} = 8$

$$x = \frac{68 - 7 \cdot 4}{5} = \frac{68 - 28}{5} = \frac{40}{5} = 8,$$

d. h. jeder Centner im Haufen A hält 8 Loth und jeder im Haufen B hält 4 Loth Silber; und es geben im ersten Fall
3 Ct. zu 8 Lth. u. 5 Ct. zu 4 Lth. $= 24 + 20 = 44$ L.
im zweyten Fall
5 Ct. zu 8 Lth. u. 7 Ct. zu 4 Lth. $= 40 + 28 = 68$ L. Silber.

Beyspiel 2. Zwey Oerter A und B, so mit einander durchschlägig gemacht werden sollen, liegen 56 Lachter von einander entfernt, und man fährt vor dem Orte A quartaliter 5 Lachter auf. Erst nach 4 Quartalen kann das Gegenort B belegt werden, und man glaubt vor solchem quartaliter 7 Lachter aufzufahren. In wie viel Quartalen werden nun beyde Oerter von jetzt an durchschlägig werden, und wie viel Lachter wird man mit jedem Ort aufgefahren haben?

Auflösung. Man setze, das Ort B werde in x Quartalen mit A durchschlägig, so hat man vom Anfange der Belegung an vor dem Orte B $= 7x$ Lachter, und vor dem Orte A $= (4 + x) 5 = 20 + 5x$ Lachter aufgefahren, und es ist daher

$$7x + 5x + 20 = 56$$

oder $$12x + 20 = 56$$

$$12x = 56 - 20 = 36$$

also $x = \frac{36}{12} = 3$, d. h. die beyden Oerter werden von jetzt an in 3 Quartalen mit einander durchschlägig, und man hat daher vom Anfange der Belegung an mit dem Orte A

$= 20 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$ Lachter

mit dem Orte B

$= 7 \cdot 3 =$ 21 Lachter

aufgefahren, welches 56 Lachter beträgt.

§. 48.

Jede Wurzelgröße läßt sich als eine Potenz ansehen, deren Exponent ein Bruch ist, dessen Zähler

ler der Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen, und dessen Nenner der Exponent des Wurzelzeichens ist.

Z. B. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. Denn es ist

$$(\sqrt[3]{a^2})^3 = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2,$$
$$(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2,$$

Daher $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$.

So ist also $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$; $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$; $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$. Allgemein $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Lehren von den Proportionen.

§. 49.

Erklärung. Die Vergleichung zweyer gleichartigen Größen mit einander, in Ansehung ihrer Größe, nennt man ein **Verhältniß**; und die Gleichheit zweyer Verhältnisse eine **Proportion**.

Wenn also die Größe a (3) in der Größe b (6) eben so oft enthalten ist, als die Größe c (4) in der Größe d (8); so muß das **Verhältniß** (oder der Quotient) $\frac{b}{a}$ $\left(\frac{6}{3}\right)$ dem Verhältnisse $\frac{d}{c}$ $\left(\frac{8}{4}\right)$ gleich seyn; oder es muß, wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, die Größe a (3) zur Größe b (6) sich

sich verhalten, wie die Größe c (4) zur Größe d (8).

Daher man die Gleichheit zweyer Verhältnisse oder eine Proportion sehr bequem durch das Divisions- und Gleichheitszeichen zu bezeichnen pflegt, nämlich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ $\left(\frac{6}{3} = \frac{8}{4}\right)$ oder gewöhnlicher $a : b = c : d$ $(3 : 6 = 4 : 8)$.

Anmerkung. Größen, die gleiche Quotienten geben oder gleiche Brüche, bilden daher eine Proportion. Weil z. B. $\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$, so ist $3 : 12 = 4 : 16$; oder wenn $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, so ist auch $n : m = q : p$.

§. 50.

Erklärung. Die vier Größen a, b, c, d, welche die Proportion $a : b = c : d$ ausmachen, heißen Glieder, und zwar: äußre, das erste (a) und vierte (d); mittlere, das zweyte (b) und dritte (c); ähnlichliegende oder **homologe**, die **Vorderglieder** (a und c) sowohl, als die **Hinterglieder** (b und d) der beyden Verhältnisse.

§. 51.

Erklärung. Der Quotient, den das Vorderglied in das Hinterglied dividirt giebt, heißt **der Name des Verhältnisses** oder der **Exponent**; und dieser kann sowohl eine ganze Zahl, als ein Bruch seyn.

Zusatz I. Ist daher $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = e$, so ist $b = ae$, $d = ce$ (§. 44. Zus. 2.) Daher die allgemeine Form der Proportion $a : b = c : d$ auch $a : ae = c : ce$, woraus man sieht, daß das Hinterglied ein Product aus dem Vorderglied in den Exponenten ist. Z. E. In der Proportion

3 : 6

$$3:6 = 4:8 \text{ ist der Exp.} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$\text{daher } 6 = 3 \cdot 2 \text{ und } 8 = 4 \cdot 2.$$

$$6:3 = 8:4 \text{ ist der Exp.} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\text{daher } 3 = 6 \cdot \tfrac{1}{2} \text{ und } 4 = 8 \cdot \tfrac{1}{2}.$$

Zusatz II. Sind zwey Verhältnisse $a:b$ und $c:d$ einem dritten $g:f$ gleich, so sind sie einander selbst gleich; weil sie mit dem dritten einerley Exponenten haben. Denn

wenn $a:b = c:d$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (§. 49. Anm.)

" $a:b = g:f$, " $\frac{b}{a} = \frac{f}{g}$

also $c:d = g:f$ oder $\frac{d}{c} = \frac{f}{g}$.

§. 52.

Erklärung. Sind die mittlern Glieder einer Proportion verschiedne Größen ($a:b = c:d$), so heißt die Proportion eine abgesonderte; sind aber die mittlern Glieder einer Proportion gleiche Größen ($a:b = b:c$), so heißt die Proportion eine stetige.

Zusatz. Die allgemeine Form der abgesonderten Proportion ist daher $a:ae = b:be$ (§. 51. Zus. I.)

" stetigen " " $a:ae = ae:ae^2$.

§. 53.

Lehrsatz. In jede Proportion $a:b = c:d$ sind die Producte der äußern und mittlern Glieder gleich, d. h. $ad = bc$.

Beweis. Die angenommene Proportion giebt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (§. 49.), oder unter einerley Benen-

nung

nung gebracht, $\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}$, folglich mit ac jede Seite der Gleichung multiplicirt, $bc = ad$ (§. 44.).

Andrer Beweis. Nach der allgemeinen Form $a : ae = b : be$ (§. 52. Zus.) ist offenbar $a \cdot be = ae \cdot b$.

Zusatz I. Für $a : b = c : d$ ist $ad = bc$, folglich $d = \frac{bc}{a} = \frac{b}{a} \cdot c = e \cdot c$, (weil $\frac{b}{a}$ den Exponenten $= e$ giebt), d. h. man findet zu drey gegebnen Gliedern einer Proportion das vierte Glied, wenn man das Product der mittlern Glieder mit dem ersten dividirt, oder wenn man den Exponenten mit dem dritten Glied multiplicirt. Dies ist die sogenannte Regel de tri.

Zusatz II. Aus $a : b = b : c$ hat man
1) $b^2 = ac$, folglich $b = \sqrt{ac}$.
2) $c = \frac{b^2}{c}$: d. h. man findet zwischen zwey Gliedern das mittlere, wenn man aus dem Product derselben die Quadratwurzel zieht; und zu zwey Gliedern das dritte, wenn man das Quadrat des zweyten durch das erste dividirt. Z. B.

$$4 : x = x : 9$$

also $x = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. Daher

$$4 : 6 = 6 : 9.$$

§. 54.

Lehrsatz. Aus jeder abgesonderten Proportion $a : b = c : d$ folgt auch durch Umkehrung $b : a = d : c$, und durch Verwechselung $a : c = b : d$.

Beweis. 1) Die angenommne Proportion giebt $ad = bc$, und mit bd dividirt, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, und aufgehoben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $b : a = d : c$ (§. 49. Anm.).

2) Die

2) Die angenommne Proportion giebt $bc = ad$, folglich auch $\frac{bc}{ba} = \frac{ad}{ab}$, oder $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$; folglich $a : c = b : d$.

§. 55.

Lehrsatz. Aus jeden zwey gleichen Producten, $ad = bc$, läßt sich eine Proportion formiren, wenn man die Factoren des einen Products zu äußern, und die Factoren des andern Products zu mittlern Gliedern macht; also $a : b = c : d$ und $a : c = b : d$.

Beweis. Da $ad = bc$, so ist, wenn mit bd dividirt wird, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, d. i. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $b : a = d : c$, oder durch Umkehrung $a : b = c : d$, und wieder durch Verwechselung $a : c = b : d$.

§. 56.

Lehrsatz. Sind vier Größen proportionirt, $a : b = c : d$, so bleiben sie auch noch proportionirt, wenn man die beyden ersten, oder die beyden letzten, oder die ähnlichliegenden Glieder der Proportion mit einerley Größe multiplicirt oder dividirt.

Beweis. 1) Da vermöge der angenommnen Bedingung
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist auch $\frac{nb}{na} = \frac{d}{c}$, und $\frac{b}{a} = \frac{md}{mc}$; folglich $na : nd = c : d$, und $a : b = mc : md$.

Oder

Oder, da $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist auch
$\frac{b:n}{a:n} = \frac{d}{c}$, und $\frac{b}{a} = \frac{d:m}{c:m}$; folglich
$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$, und $a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$.

2) Die angenommne Proportion giebt auch durch Verwechselung $a : c = b : d$; folglich nach dem ersten Fall $na : nc = mb : md$, oder
$$na : mb = nc : md$$
zweyten " $\frac{a}{n} : \frac{c}{n} = \frac{b}{m} : \frac{d}{m}$, oder
$$\frac{a}{n} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{m}.$$

§. 57.

Lehrsatz. **Sind vier Größen proportionirt, $a : b = c : d$, so bleiben sie auch proportionirt, wenn man alle Glieder zu einerley Potenz erhebt, oder aus allen Gliedern einerley Wurzel auszieht.**

Beweis. Aus der angenommenen Proportion folgt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, und hieraus z. B. $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{d}{c}\right)^2$, d. i. $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2}$, d. i. $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$. Und weil $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist auch z. B.
$\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{d}{c}\right)}$, d. i. $\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{d}}{\sqrt[3]{c}}$,
oder $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$.

§. 58.

Lehrsatz. Sind vier Größen proportionirt, $a : b = c : d$, so verhalten sich die Summen oder Differenzen

1) der homologen Glieder, wie die Glieder jeder der beyden gleichen Verhältnisse, $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$.

2) der Glieder der beyden gleichen Verhältnisse, wie die homologen Glieder, $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$.

Beweis. 1) Da $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$ (§. 53.), folglich cd addirt oder subtrahirt, $ad \pm cd = bc \pm cd$, das ist $(a \pm c)d = (b \pm d)c$; folglich $a \pm c : b \pm d = c : d = a : b$ (§. 55.).

2) Da $a : b = c : d$, so ist auch durch Verwechselung $a : c = b : d$, woraus wie im ersten Beweise folgt $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$.

Zusatz I. Obige Proportionen lassen sich theils durch Umkehrung, theils durch Verwechselung in mancherley Formen bringen.

a) Aus $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$ folgt durch Verwechselung $a \pm c : a = b \pm d : b$ oder $a \pm c : c = b \pm d : d$, d. i. das erste Glied plus oder minus dem dritten verhält sich zum ersten oder dritten, wie das zweyte Glied plus oder minus dem vierten zum zweyten oder vierten.

b) Aus $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$ folgt durch Verwechselung $a \pm b : a = c \pm d : c$, oder $a \pm b : b = c \pm d : d$, d. i. das erste Glied plus oder minus dem zweyten verhält sich zum ersten oder zweyten, wie das dritte Glied plus oder minus dem vierten zum dritten oder vierten.

Zusatz II. Sind drey oder mehrere Verhältnisse einander gleich, $A : a = B : b = C : c$ u. s. f., welches man auch durch $A : B : C = a : b : c$ ausdrückt; so verhält sich auch nach vorigem Zus., und zwar nach b),

$$A + B + C : A = a + b + c : a \text{ oder}$$
$$A + B + C : a + b + c = A : a = B : b = C : c.$$

§. 59.

Lehrsatz. Werden die Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt: so sind die Producte in eben der Ordnung proportionirt, und geben eine zusammengesetzte Proportion.

Beweis. Es sey

$$\begin{array}{rl} & a : b = c : d \\ \text{und} & e : f = g : h \\ \hline \text{so ist} & ae : bf = cg : dh \end{array}$$

Denn da

$$\begin{array}{c} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \\ \frac{f}{e} = \frac{h}{g} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{so ist } \frac{bf}{ae} = \frac{dh}{cg}$$

Hieraus folgt auch der Satz für drey und mehrere Proportionen.

Zusatz I. Ist hierbey ein Hinterglied in der vorhergehenden Proportion einem Vordergliede in der folgenden gleich; so kann man diese Glieder in der Zusammensetzung übergehen, weil sie sonst durch die Division nach §. 56. gegen einander aufgehoben würden. Z. E. Es sey

$$\begin{array}{rl} 1) & a : b = c : d \\ & b : g = f : m \\ \hline \text{so ist} & a : g = cf : dm \\ & \quad = (c : d) + (f : m) \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{rl} 2) & a : b = c : d \\ & b : g = d : m \\ & g : p = m : s \\ \hline & a : p = c : s \end{array}$$

Zusatz II. Sind die einzelnen Verhältnisse einander gleich: so heißt das aus denselben zusammengesetzte Verhältniß ein vielfaches jedes einzelnen; nämlich das zweyfache, dreyfache rc. oder das quadratische, kubische rc. Z. E. Es sey

a : b

$$\begin{array}{l} a:b = c:d \\ b:g = c:d \\ \hline \text{so ist } a:g = c^2:d^2 \\ \qquad\quad = 2(c:d) \end{array} \qquad \begin{array}{l} a:b = c:d \\ b:g = c:d \\ g:m = c:d \\ \hline a:m = c^3:d^3 \\ \qquad = 3(c:d). \end{array}$$

Anmerk. Auf diesen Sätzen beruht die zusammengesetzte Proportionsrechnung (A. §. 93.).

Fünfter Abschnitt.
Von den Logarithmen.

§. 60.

Erklärung. Setzt man von einer beliebigen Zahl b, die aber bejaht und größer als 1 ist, die Potenzen aller Grade von 0 an, so heißen die Exponenten dieser Potenzen ihre Logarithmen. Z. E. für $b = 2$ erhält man

$$\begin{array}{cccccccccc} 2^0, & 2^1, & 2^2, & 2^3, & 2^4, & 2^5, & 2^6, & 2^7, & 2^8, & 2^9, \\ 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & 128, & 256, & 512, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2^{10}, & 2^{11}, & 2^{12}, & \text{ꝛc.} \\ 1024, & 2048, & 4096, & \text{ꝛc. Zahlen,} \\ 10, & 11, & 12, & \text{ꝛc. Logarithmen,} \end{array}$$

wo also z. B. $3 = \log 8$, d. h. 3 der Logarithme der Zahl 8 ist.

Zusatz. Da $2^{1\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$ (§. 48.) $= 2{,}82..$ wofür man allenfalls 3 setzen kann: so ist $1\frac{1}{2} = 1{,}5 = \log 3$; ferner weil $2^{2\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 5{,}6$; so wäre $2\frac{1}{2} = 2{,}5 = \log 5$ Und so findet man auf diese Art Werthe, welche den zwischen den Zahlen 2 und 4, 4 und 8 ꝛc. fallenden ganzen Zahlen nahe kommen.

§. 61.

§. 61.

Erklärung. Die Zahl b, oder im vorigen Beyspiel die Zahl 2, welche bey allen diesen Potenzen zum Grunde liegt, heißt die Grundzahl; da dann allemal 0 der Logarithmus der Einheit, (§. 26. Anm. 2.), und 1 der Logarithmus der Grundzahl ist.

§. 62.

Erklärung. Hat man für eine angenommene Grundzahl die Logarithmen der natürlichen Zahlen gefunden: so heißt dieses ein logarithmisches System, deren es so viele giebt, als Grundzahlen angenommen werden können; da dann diejenige Zahl, die in einem Systeme 1 zum Logarithmus hat, die Grundzahl dieses Systems ist (§. 61.).

§. 63.

Lehrsatz. Man findet den Logarithmen eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt; und den Logarithmen eines Quotienten, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividend subtrahirt.

Beweis. Es sey in einem logarithmischen System, dessen Grundzahl x ist, $p = x^m$, und $q = x^n$, daß also m und n die Logarithmen von p und q sind (§. 60.): so ist

1) $p \cdot g = x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ (§. 26. Anm. 1.), folglich $m + n = \log(p \cdot g)$; z. B. $\log(4 \cdot 128) = \log 4 + \log 128 = 2 + 7 = 9 = \log 512$.

2) $p : q = x^m : x^n = x^{m-n}$ (§. 26. Anm. 2.), folglich $m - n = \log(p : q) = \log\left(\frac{p}{q}\right)$ (§. 60.); z. E. $\log\left(\frac{2048}{16}\right) = \log 2048 - \log 16 = 11 - 4 = 7 = \log 128$.

Zusatz I. Da die Zahl $64 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4$, so ist $= \log 4^3 = \log 4 + \log 4 + \log 4 = 3 \log 4$; d. h. man findet den Logarithmen einer Potenz, wenn man den Logarithmen der Wurzel oder der gegebnen Zahl mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Also $\log 4^3 = 3 \cdot \log 4 = 3 \cdot 2 = 6 = \log 64$.

Zusatz II. Da $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$ (§. 48.), so ist nach vorigem Zusatz $\log \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} \cdot \log 64 = \frac{\log 64}{3}$, d. h. man findet den Logarithmen der Wurzel, wenn man den Logarithmen der Potenz oder gegebenen Zahl mit den Wurzel-Exponenten dividirt.

Z. E. $\sqrt{4096} = \frac{\log 4096}{2} = \frac{12}{2} = 6 = \log 64$.

Zusatz III. Es sey $1024 = 4^x$, so ist $\log 1024 = x \log 4$, folglich $x = \frac{\log 1024}{\log 4} = \frac{10}{2} = 5$, (also $1024 = 4^5$) das ist, man findet den Exponenten einer Potenz, wenn man den Logarithmen der Potenz (1024) mit dem Logarithmen der Wurzel (4) dividirt.

Zusatz IV. Mittelst der Logarithmen wird demnach das Multipliciren und Dividiren der Zahlen in die Addition und Subtraction ihrer Logarithmen, das Potenziren aber und Extrahiren der Zahlen in eine leichte Multiplication und Division ihrer Logarithmen verwandelt.

§. 64.

Erklärung. Dasjenige logarithmische System, dessen Grundzahl 10 ist, heißt das gemeine oder Briggische.

Die-

Dieses System, bey welchem Folgendes

$10^0, \quad 10^1, \quad 10^2, \quad 10^3, \quad 10^4$ ꝛc.

1, 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. (Zahlen)

0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. (Logarithmen)

angenommen worden, ist, bald nach der durch Johann Neper im Jahr 1614 vollbrachten Erfindung der Logarithmen, von Heinrich Brigg berechnet, und von Adrian Vlacq vollendet worden, und in unsern gemeinen logarithmischen Tafeln zu finden.

Anmerkung. Man hat größere und kleinere logarithmische Tafeln berechnet. Von letztern ist folgendes Handbuch eins der vorzüglichsten:

George Vega, logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Leipzig 1800. 4. Zweyte Ausgabe. Preis 1 thlr. 12 gr.

Für unsern Gebrauch reicht man aber auch mit folgenden kleinern Tafeln aus, nämlich:

Logarithmische Tafeln für die Zahlen, Sinus und Tangenten, neu geordnet von Moritz von Prasse, ordentl. Prof. der Mathem. zu Leipzig. Leipzig 1810, in Commission bey P. J. Besson. Preis 9 gr.

§. 65.

Erklärung. Im Briggischen System sind die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 größer als 0, und kleiner als 1; derer zwischen 10 und 100 größer als 1, und kleiner als 2 u. s. w. Diese Logarithmen müssen also Brüche seyn, so daß jeder aus 0, oder einer ganzen Zahl und einem Decimalbruche bestehet. Jene ganze Zahl heißt die Kennziffer oder Characteristik, dieser Bruch aber die Mantisse.

Zusatz I. Die Kennziffer giebt an, zwischen welche Potenzen der Grundzahl 10 die dem Logarithmen zugehörige Zahl fällt, und ist allemal um 1 geringer, als die Menge der Ziffern jeder Zahl.

Ist

Ist also n die Menge der Ziffern einer ganzen Zahl, so ist $n - 1$ die Kennziffer ihres Logarithmen; und ist n die Kennziffer eines Logarithmus, so muß die zugehörige Zahl $n + 1$ ganze Decimalstellen haben. Deswegen ist die Kennziffer in den Tafeln gewöhnlich weggelassen, und kann sehr leicht ersetzt werden. Will man daher z. B. den Logarithmen der Zahl 2175 wissen, so findet man S. 15. in den Prasseschen Logarithmentafeln die Mantisse 33746, und es ist daher $\log 2175 = 3{,}33746$, weil die Zahl 2175 vier ganze Decimalstellen hat, also die Characteristik des Logarithmen $4 - 1 = 3$ seyn muß, indem diese Zahl zwischen 1000 und 10000, oder zwischen 10^3 und 10^4 fällt.

Umgekehrt zu den Logarithmen 2,34044 gehört eine Zahl mit 3 ganzen Decimalstellen, nämlich 219.

Zusatz II. Wird eine Zahl mit einerley Zahl multiplicirt und dividirt, so bleibt die Zahl ungeändert. So ist z. B. $\frac{314 \cdot 100}{100} = 314$; oder $\log\left(\frac{314 \cdot 100}{100}\right) = \log 314 + \log 100 - \log 100 = 2{,}49693 + 2{,}00000 - 2{,}00000$ (§. 63.) $= 4{,}49693 - 2{,}00000$, welches man auch schreibt $4{,}49693 - 2$, d. h. der Logarithme einer Zahl bleibt ungeändert, wenn man die Characteristik um eine beliebige Zahl vermehrt, aber auch wieder um dieselbe Zahl vermindert. So ist also der Logarithme $2{,}45213 = 4{,}45213 - 2$.

Anmerkung. Um zu einer Zahl, die aus 5 Ziffern (34387) besteht, den zugehörigen Logarithmen zu finden, verfahre man so: man suche die Mantisse zu den 4 ersten Ziffern (53631); sodann suche man in dieser Reihe die Differenz zweyer nächsten Mantissen ($631 - 618 = 13$), so gilt diese (13) für die Zahl 10. Nun schließe man: wie 10 zu der fünften Zahl (7), so die Differenz der Mantissen zu dem Theil, welcher, wegen der fünften Zahl, der schon gefundenen Mantisse noch beyzufügen ist ($10 : 7 = 13 : 9{,}1$). Diese vierte Proportionalzahl (9) addirt man zu der in Tafeln gefundenen Mantisse ($53631 + 9 = 53640$), so giebt die Summe die zu den 5 Ziffern gehörige Mantisse. Die Characteristik ist bey 5 ganzen Zahlen 4.

Umgekehrt, zu einem Logarithmen, dessen Characteristik 4 ist (4,57839), die zugehörige Zahl zu finden, welche also aus 5 ganzen Zahlen besteht; so suche man eine vierziffrige Zahl, welche der gegebnen Mantisse am nächsten kommt (3787); ferner suche man nun ebenfalls in dieser Gegend die Differenz zweyer nächsten Mantissen ($841 - 830 = 11$), so wie die Differenz zwischen der Man-

Mantisse, wozu die gefundene vierziffrige Zahl gehört, und der gegebnen Mantisse (839 — 830 = 9). Weil nun zur ersten Differenz die Zahl 10 gehört, so sucht man zu der ersten und zweyten Differenz so wie zu der Zahl 10 die vierte Proportionalzahl, welche sodann die fünfte fehlende Ziffer ist (11 : 9 = 10 : 8; und es gehört demnach zum Logarithmen 4,57839 die Zahl 37878).

§. 66.

Aufgabe. Den Logarithmen jedes ächten Bruchs zu finden.

Auflösung. Es sey der Logarithme des Bruches $\frac{3}{4}$ zu finden.

Da bey jedem Bruch eigentlich der Zähler (3) durch den Nenner (4) zu dividiren ist: so darf man nur den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers subtrahiren (§. 63.), und es ist $\log\frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = 0{,}47712 - 0{,}60206 = (1{,}47712 - 1) - 0{,}60206$ (§. 65. Zus. II.) $= 0{,}87506 - 1$, das ist: $\log\frac{7{,}5}{10} = \log\frac{75}{100} = \log 0{,}75$.

Anmerkung.

Da $0{,}87506 - 1 = \log\frac{7{,}5}{10} = \log 0{,}75$, u. daher

$$0{,}87506 - 2 = \log\frac{7{,}5}{100} = \log 0{,}075$$

$$0{,}87506 - 3 = \log\frac{7{,}5}{1000} = \log 0{,}0075 \text{ u. s. w.}$$

so bedeutet daher ein Logarithme, der vorne zur Characteristik 0, und hinten noch eine negative Characteristik hat, allemal den Logarithmen eines Decimalbruches, zu welchem man nun sehr leicht die zugehörige Zahl finden kann, wenn man der der Mantisse zugehörigen Zahl so viele Nullen vorsetzt, als die negative Characteristik anzeigt, und davon eine Null für die Ganzen abschneidet. Und so läßt sich auch umgekehrt der Logarithme zu einem Decimalbruche sehr leicht finden.

§. 67.

Beyspiel. Das Product 1) von 24×48, und 2) von $0{,}25 \times 0{,}05$ mittelst der Logarithmen zu finden.

Auflösung. Nach den Tafeln ist

$$
\begin{array}{ll}
1) & \log 24 = 1{,}38021 \\
& \log 48 = 1{,}68124 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\log 24 + \log 48 = 3{,}06145 = \log 1152.$$

$$
\begin{array}{ll}
2) & \log 0{,}25 = 0{,}39794 - 1 \\
& \log 0{,}05 = 0{,}69897 - 2 \\
\hline
& 1{,}09691 - 3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\log 0{,}25 + \log 0{,}05 = 0{,}09691 - 2 = \log 0{,}0125.$$

§. 68.

Beyspiel. Den Quotienten 1) von $\frac{864}{24}$ und 2) von $\frac{0{,}00068}{0{,}02}$ mittelst der Logarithmen zu finden.

Auflösung. Es ist

$$
\begin{array}{ll}
1) & \log 864 = 2{,}93651 \\
& \log 24 = 1{,}38021 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\log 864 - \log 24 = 1{,}55630 = \log 36.$$

$$
\begin{array}{ll}
2) & \log 0{,}00068 = 0{,}83251 - 4 \\
& \log 0{,}02 = 0{,}30103 - 2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\log 0{,}00068 - \log 0{,}02 = 0{,}53148 - 2 = \log 0{,}034.$$

§. 69.

Beyspiel. 1) Aus 2025 die Quadratwurzel, und

und 2) aus 4913 die Cubikwurzel mittelst der Logarithmen zu finden.

Auflösung. Es ist $\log 2025 = 3{,}30643$, und daher $\log \sqrt{2025} = \frac{3{,}30643}{2} = 1{,}65321$ $= \log 45$.

Ferner $\log 4913 = 3{,}69135$; daher $\log \sqrt[3]{4913} = \frac{3{,}69135}{3} = 1{,}23045 = \log 17$.

Anmerkung. Der Nutzen der Logarithmen wird sich vorzüglich bey trigometrischen Aufgaben zeigen.

II.
Die gemeine Geometrie.

Erster Abschnitt.
Von den geradlinigen Figuren.

Erstes Kapitel.
Grundbegriffe von Linien, der Ebene, Winkeln und Figuren.

§. 70.

Erklärung. Ein Körper heißt der Raum, der nach allen Seiten zusammenhängend (stetig) ausgedehnt und begrenzt ist; oder was eine bestimmte Länge, Breite und Tiefe hat. Die Grenzen des Körpers heißen Flächen, die blos Länge und Breite haben; die Grenzen der Flächen aber Linien, die blos Länge haben; und die Grenzen der Linien Puncte, die keine Ausdehnung, also gar keine Theile haben.

Anmer=

Anmerkung. In der Geometrie betrachtet man nur den Raum, den ein wirklicher Körper einnimmt. Die Fläche ist daher kein Theil des Körpers, die Linie kein Theil der Fläche, der Punct kein Theil der Linie.

§. 71.

Erklärung. Eine gerade Linie ist die, deren Puncte alle nach einerley Gegend zu liegen; eine krumme aber, wo kein Theil gerade ist.

Anmerk. Eine Linie kann anfangen und aufhören, wo man will. Daher kann man in ihr überall Puncte annehmen, oder sich nur einen Punct vorstellen, der nach und nach in verschiedne Stellen der Linie gekommen wäre. Hiernach sagt man: die Linie entstehe aus der Bewegung eines Punctes. Es beschreibt aber der Punct eine gerade Linie, wenn er beständig nach einerley Gegend zugehet, also den einmal angenommenen Weg nie ändert; eine krumme Linie aber, wenn er niemals nach einerley Gegend zu fortgehet, sondern seinen Weg nach dem Gesetze der Stetigkeit beständig ändert.

§. 72.

Forderung. Von jedem gegebnen Puncte zum andern eine gerade Linie zu ziehen; und jede gegebne gerade Linie an beyden Enden gerade fort zu verlängern.

Anmerkung 1. Durch jede zwey Puncte einer geraden Linie ist ihre Lage, und durch die beyden Endpuncte ihre Länge gegeben. Von einer geraden Linie, die von einem gegebnen Punct zum andern gezogen ist, sagt man auch: sie verbinde die beyden Puncte.

Anmerk. 2. Man zieht eine Linie, wenn man z. B. die Spitze eines Bleystiftes auf dem Papiere fortbewegt, wobey man auf die Breite des dadurch entstehenden Strichs nicht Rücksicht nimmt, sondern blos auf seine Ausdehnung in die Länge. Zu Ziehung dieser Linien bedient man sich eines Linials.

§. 73.

Grundsatz. Zwey gerade Linien können nicht mehr als einen einzigen Punct mit einander

ander gemein haben, also auch keinen Raum einschließen.

Denn giengen zwey gerade Linien durch zwey Puncte, so hätten sie einerley Lage, das ist, sie fielen auf einander, und machten also nur eine und dieselbe Linie aus. Schlössen zwey gerade Linien einen Raum ein, so müßten sie in ihren beyden Endpuncten zusammentreffen, also zwey Puncte gemein haben, welches unmöglich ist.

§. 74.

Erklärung. Eine Fläche heißt eben, oder eine Ebene, wenn eine gerade Linie, die zwey beliebige Puncte in der Fläche verbindet, ganz in die Fläche fällt. Eine gebogne oder krumme Fläche heißt, deren kein Theil gerade ist.

Anmerkung 1. Im Folgenden werden alle Puncte, Linien, Winkel, Figuren in einer Ebene betrachtet, wenn es auch nicht ausdrücklich gesagt wird.

Anmerk. 2. Die Oberfläche des stillstehenden Wassers heißt eine horizontale oder söhlige (in der bergmännischen Sprache) Ebene, und jede in einer solchen Ebene gezogne gerade Linie, eine horizontale oder söhlige Linie.

§. 75.

Erklärung. Gleichlaufend oder parallel heißen zwey gerade Linien, die in einer Ebene liegen und sich nie schneiden, man mag sie so weit verlängern als man will.

Anmerkung 1. Treffen zwey gerade Linien in einem Punct zusammen, so heißen sie zusammenlaufend, und entfernen sie sich von einem Punct auseinander, auseinanderlaufend.

Anmerk. 2. Jede Linie, so mit einer söhligen Linie parallel geht, ist ebenfalls eine söhlige Linie.

§. 76.

§. 76.

Erklärung. Ein ebener geradliniger Winkel BAC [Tab. I. Fig. 2.], oder überhaupt ein Winkel, heißt die Neigung, welche zwey gerade Linien BA, AC in einer Ebene gegen einander haben, wenn sie in einem Punct A zusammentreffen, ohne in einer einzigen geraden Linie zu liegen.

Die geraden Linien BA, CA, welche den Winkel BAC einschliessen, heißen die Schenkel, und der Punct A, wo die Schenkel zusammentreffen, der Scheitel des Winkels.

Zusatz. Man betrachtet beym Winkel nicht die Fläche zwischen den beyden Schenkeln, auch nicht die Länge der Schenkel, sondern blos ihre Neigung, wovon allein die Größe des Winkels abhängt, so ist also DAB $>$ CAB.

Man pflegt jeden Winkel entweder nach seinen Schenkeln DAB, oder nach seinem Scheitel A, oder nach einem in die Oeffnung geschriebenen kleinen Buchstaben x $=$ DAB $=$ A zu benennen.

§. 77.

Erklärung. Haben zwey Winkel ACD und BCD [F. 2.] einen Scheitel C und einen Schenkel CD gemein, und die beyden äußern Schenkel CA und CB machen eine gerade Linie AB: so heißen sie Nebenwinkel. Sie entstehen, wenn auf einer geraden Linie AB, in irgend einem ihrer Zwischenpuncte C, eine andre gerade Linie CD aufstehet, oder, wenn ein Schenkel AC des Winkels ACD nach B verlängert wird.

Winkel, wie BAC und DAC [F. 1.], welche zwar einen Scheitel A und einen Schenkel AC gemein haben, aber die beyden äußern Schenkel BA und DA nicht in gerader Linie sind, heißen anstoßende oder anliegende Winkel.

Winkel, wie ECA und BCD, [F. 3.] welche entstehen, wenn die Schenkel eines Winkels rückwärts durch den Scheitel C verlängert werden, heißen **Scheitelwinkel.** Eben so sind auch ECB und ACD **Scheitelwinkel.**

Anmerkung. Scheitelwinkel entstehen durch die Schneidung zweyer gerader Linien.

§. 78.

Erklärung. Eine gerade Linie CD [F. 4.] ist auf einer andern AB **winkelrecht** oder **normal**, wenn sie mit ihr gleiche Nebenwinkel ACD und BCD macht. Oder eine **winkelrechte Linie** ist der gemeinschaftliche Schenkel zweyer gleicher Nebenwinkel (§. 77.).

§. 79.

Erklärung. Ein **rechter Winkel** [F. 4.] heißt der, dessen Schenkel winkelrecht auf einander sind, oder der seinem Nebenwinkel gleich ist. Ein **schiefer Winkel** [F. 2.] heißt, der kein rechter ist, und zwar ein **stumpfer** ACD, wenn er größer, ein **spitzer** DCB, wenn er kleiner als ein rechter ist.

Anmerkung. In der Folge soll der rechte Winkel durch R angezeigt, und eine winkelrechte Linie der Kürze wegen eine Winkelrechte oder Normale genannt werden.

§. 80.

Erklärung. Eine **Figur** ist eine allenthalben begrenzte ebene Fläche; insbesondere eine geradlinige Figur, die von geraden Linien begrenzt ist. Diese Linien heißen die **Seiten** der Figuren, und machen zusammen ihren **Umfang** oder **Umring** aus.

Eine **reguläre** Figur heißt die, deren Seiten sowohl, als Winkel, alle gleich sind. Jede andre Figur heißt **irregulär.**

§. 81.

§. 81.

Erklärung. Eine dreyseitige Figur oder ein Triangel, auch Dreyeck, ist von drey; eine vierseitige Figur oder Viereck von vier; eine vielseitige Figur oder Vieleck (Polygon) ist von mehr als vier geraden Linien begrenzt.

Anmerkung. Die Seite AB [F. 5.], über der man sich eine Figur ACB verzeichnet denkt, heißt die Grundlinie, die Seiten AC, BC über der Grundlinie AB eines Triangels ACB heißen seine Schenkel.

§. 82.

Erklärung. Die Triangel werden eingetheilt I. in Bezug auf ihre Seiten, 1) in gleichschenkliche [F. 5.], die zwey gleiche Seiten AC, BC, 2) in gleichseitige [F. 6.], die drey gleiche Seiten, und 3) in ungleichseitige [F. 8. 9.], die drey ungleiche Seiten haben; II. in Ansehung der Winkel, 1) in rechtwinkliche [F. 7.], welche einen rechten Wnikel, 2) in stumpfwinkliche [F. 9.], welche einen stumpfen Winkel, und 3) in spitzwinkliche [F. 8.], welche nur spitze Winkel haben.

§. 83.

Erklärung. Auch bey Vierecken wird auf Seiten und Winkel Rücksicht genommen. Ein Quadrat [F. 10.] ist ein gleichseitiges und rechtwinkliches Viereck; ein Rectangel (Oblongum) [F. 11.] ist zwar rechtwinklich, aber nicht gleichseitig; ein Rhombus [F. 12.] ist gleichseitig, aber schiefwinklich; ein Rhomboid [F. 13.], wenn die gegenüberstehenden Seiten gleich und die Winkel schief; ein Trapez [F. 14.], wenn zwey Seiten,

wie

wie DF und AB, parallel aber ungleich, und ein Trapezoid [F. 15.], wenn Seiten und Winkel ungleich sind.

§. 84.

Erklärung. Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

Anmerkung. Parallelogramme sind die vier Figuren 10. 11. 12. und 13.

§. 85.

Erklärung. Ein Kreis [F. 16] ist eine ebene Figur von einer einzigen Linie, dem Umringe oder der Peripherie, so eingeschlossen, daß alle von einem gewissen innern Puncte C, dem Mittelpuncte, bis zur Peripherie gezogne gerade Linien CD, CE, CF, welche Halbmesser heißen, einander gleich sind.

Oder, ein Kreis wird von einer geraden Linie CF beschrieben, welche sich in einer Ebene um ihren unverrückten Endpunct C ringsum drehet.

Anmerkung. Da die beyden Spitzen des Zirkels (d. h. des Instruments, womit man gewöhnlich Kreise beschreibt,) immer die Endpuncte einer geraden Linie vorstellen und dieselben bald nahe bald ferne von einander gestellt werden können, so sieht man sehr leicht den Grund ein, wie und warum man mit jeder geraden Linie einen Kreis beschreiben, auch wie man von einer geraden Linie eine andere kleinere abschneiden kann.

§. 86.

Erklärung. Jede durch den Mittelpunct C laufende und an beyden Enden von der Peripherie begrenzte gerade Linie DE, heißt der Durchmesser, und ist folglich der doppelte Halbmesser.

Jede

Jede andere gerade Linie HG von einem Puncte der Peripherie bis zum andern, welche nicht durch den Mittelpunct gehet, heißt eine Sehne oder Chorde. Eine gerade Linie MN, welche auswendig den Kreis in einem Puncte berührt, heißt eine Tangente.

Ein Stück der Kreisfläche HLG zwischen der Sehne HG und einem Stück der Peripherie HLG, (einem Kreisbogen), heißt **Kreisabschnitt**; und ein Stück der Kreisfläche FCE zwischen zwey Halbmessern CE und CF und einem Kreisbogen FE heißt **Kreisausschnitt**.

§. 87.

Grundsatz. **Alle Halbmesser, folglich auch alle Durchmesser eines oder gleicher Kreise sind einander gleich.**

Zweytes Kapitel.

Von den Triangeln, besonders von ihrer Congruenz, ihren Seiten und Winkeln.

§. 88.

Aufgabe. **Ueber einer gegebnen geraden Linie DF [F. 6.] einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.**

Auflösung und Beweis. Um die Endpuncte der Linie DF beschreibe man mit den Halbmessern DF, FD Kreise, die einander in E schneiden, und ziehe von E nach D und F gerade Linien.

Denn

Denn da die drey Seiten des Dreyecks DEF Halbmesser gleicher Kreise sind, so sind sie einander gleich (§. 87.). Folglich das △ DEF gleichseitig.

§. 89.

Erklärung. Figuren sind congruent oder decken einander, wenn man sie so auf einander legen kann, daß beyder Grenzen ganz in einander fallen.

§. 90.

Grundsatz. Figuren, die einander dekken, sind einander gleich; und gleiche gerade Linien sowohl, als gleiche Winkel, decken einander.

Anmerkung. Figuren können gleich seyn, ohne sich zu decken. Man muß daher Gleichheit der Figuren aus der Congruenz, und Gleichheit ihres Flächenraums ohne Congruenz, unterscheiden.

Das Zeichen der Congruenz zweyer Figuren ist $\cong$ (§. 12.), weil congruente Figuren ähnlich und gleich sind.

§. 91.

Grundsatz. Alle rechte Winkel sind einander gleich; denn sie decken einander.

§. 92.

Grundsatz. In zwey congruenten Triangeln, ABC [F. 17.] und abc [F. 18.], stehen gleichen Seiten auch gleiche Winkel, und gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber.

§. 93.

Lehrsatz. Zwey Triangel, ABC, abc, sind congruent, wenn zwey Seiten nebst dem eingegeschlossenen Winkel in dem einen Triangel so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Es sey AB = ab, AC = ac, BAC = bac, so lege man diese Winkel und Seiten in der gehörigen Ordnung auf einander. Der Punct c wird dann auf den Punct C, b auf B zu liegen kommen. Folglich fällt auch bc auf BC (§. 73.). Demnach decken diese Triangel einander (§. 92.).

§. 94.

Lehrsatz. Zwey Triangel ABC, abc sind congruent, wenn eine Seite nebst den daran liegenden Winkeln so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Es sey AB = ab, CAB = cab, CBA = cba, und man lege beyde Dreyecke mit diesen gleichen Stücken auf einander, so wird ac auf AC, bc auf BC fallen, und sind jetzt nicht mehr als vier, sondern als zwey gerade Linien zu betrachten, die sich nur in einem Puncte schneiden können (§. 73.). Es decken sich also diese beyden Dreyecke.

§. 95.

Lehrsatz. In jedem gleichschenklichen Triangel ACB [F. 19.] sind die Winkel an der Grundlinie AB; und, wenn man die Schenkel CA, CB verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie gleich.

Beweis. Man verlängre die gleichen Schenkel CA, CB, mache CD = CE, folglich AD = BE, und ziehe DB, EA. Nun ist

1) $\triangle CAE \cong \triangle CBD$; weil $CE = CD$, $CA = CB$, und $ECA = DCB$ (§. 93.). Folglich ist $CAE = CBD$, $E = D$, und $AE = DB$ (§. 92.).

2) $\triangle BAE \cong \triangle ABD$; weil $E = D$, $EA = DB$, und $BE = AD$ (§. 93.). Folglich ist $ABE = BAD$, die Winkel unter der Grundlinie; auch $EAB = DBA$ (§. 92.).

3) Nach Obigem ist $CAE = CBD$, und $EAB = DBA$. Nimmt man nur das letztre Gleiche vom ersten weg, so bleibt $CAB = CBA$ (§. 17.), die Winkel an der Grundlinie.

Zusatz I. Jeder Triangel mit zwey gleichen Winkeln BAC und ABC ist gleichschenklich.

Zusatz II. In einem gleichseitigen Triangel sind alle Winkel gleich; und ein Triangel, der lauter gleiche Winkel hat, ist gleichseitig. Daher gehört der gleichseitige Triangel zu den regulären Figuren (§. 80.).

§. 96.

Lehrsatz. Zwey Triangel, ACB [F. 17.], acb [F. 18.], sind congruent, wenn die drey Seiten in dem einen Triangel so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Werden die beyden Triangel ACB, acb mit ihrer längsten Seite $AB = ab$ an einander gelegt, so daß a auf A, b auf B, und c außerhalb den $\triangle ACB$ fällt; so entstehen, wenn man die Hülfslinie Cc zieht, zwey gleichschenkliche Triangel CAc, CBc, in welchen, weil vermöge der Voraussetzung $AC = Ac$ und $BC = Bc$, $o = x$, $u = y$ (§. 95.), also $o + u = x + y$, d. i. $C = c$ (§. 16.) ist. Die diesen Winkel einschließenden Seiten sind aber nach dem Angenommnen auch in bey-

beyden Triangeln ACB, acb gleich, folglich diese beyden Triangel congruent (§. 93.).

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art läßt sich der Satz beweisen, wenn man die Triangel auch mit ihren andern Seiten an einander legt.

§. 97.

Aufgabe. **Einen gegebnen Winkel** ADB [F. 20.] **in zwey gleiche Theile zu theilen, oder zu halbiren.**

Auflösung und Beweis. Man mache beliebig DA = DB, ziehe AB, beschreibe über AB einen gleichseitigen $\triangle$AEB, und ziehe DE. Diese halbirt ADB.

Denn, da DE = DE, auch angenommen DA = DB, und AE = BE: so ist ADE = BDE (§. 96.) $= \frac{ADB}{2}$.

§. 98.

Aufgabe. **Eine gegebne gerade Linie** AB [F. 20.] **in zwey gleiche Theile zu theilen, oder zu halbiren.**

Auflösung und Beweis. Ueber AB beschreibe man den gleichseitigen $\triangle$ADB (§. 88.), und halbire den Winkel ADB durch DE (§. 97.), diese halbirt AB.

Denn, da DC = DC, auch angenommen AD = BD, und ADC = BDC: so ist AC = BC $= \frac{AB}{2}$ (§. 92.).

Zusatz. Durch wiederholtes Halbiren läßt sich der Winkel sowohl, als die Linie, in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile theilen.

§. 99.

Aufgabe. Auf einer gegebnen geraden Linie AB [F. 21.] durch einen in ihr gegebnen Punct F eine winkelrechte Linie zu errichten.

Auflösung und Beweis. Zu beyden Seiten von F nehme man beliebige gleiche Stücke FD, FE, beschreibe über DE den gleichseitigen (oder auch gleichschenklichen) △DCE, und ziehe CF: so ist diese CF winkelrecht auf AB.

Denn, weil nach der Construction FD = FE, und DC = EC, auch CF = CF: so ist DFC = EFC (§. 96.) = R, und CF winkelrecht (§. 78.) auf AB.

§. 100.

Aufgabe. Auf eine gegebne gerade Linie AB [F. 21.] von einem außer ihr gegebnen Puncte C eine winkelrechte Linie zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Auf der andern Seite der Linie AB nehme man einen beliebigen Punct G, beschreibe um C mit CG einen Kreis, welcher AB in D und E schneide, halbire DE in F (§. 98.), und ziehe CF: so ist diese CF winkelrecht auf AB.

Denn zieht man CD, CE, welche gleich sind (§. 87.): so ist CD = CE, und nach der Construction DF = EF, und CF = CF. Folglich DFC = EFC (§. 96.) = R, und CF winkelrecht (§. 78.) auf AB.

Anmerkung. Ist die Linie AB eine horizontale Linie (§. 74. Anm. 2.), so heißt die winkelrechte Linie FC eine senkrechte, lothrechte oder seigre Linie. Umgekehrt ist jede auf eine lothrechte Linie gezogne Normallinie eine horizontale oder söhlige Linie. Daher man mittelst des Richtscheits und der Setzwage eine horizontale Linie darstellen kann.

§. 101.

Lehrsatz. Nebenwinkel, ACD, BCD [F. 2.], sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis. Wären die Nebenwinkel einander gleich, so wären sie selbst zwey rechte Winkel (§. 76.). Sind sie aber ungleich, wie in beystehender Figur, so errichte man auf AB aus C eine Winkelrechte CE (§. 99.), daß also ACE + BCE = 2R (§. 78.). Da nun ACD = ACE + ECD, so ist ACD + BCD = ACE + ECD + BCD = ACE + BCE. Folglich ist ACD + BCD = 2R.

Zusatz. Alle Winkel in einer Ebene um einen Punct C (F. 3.): sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

§. 102.

Lehrsatz. Scheitelwinkel, ACE, BCD [F. 3.], sind einander gleich.

Beweis. Da AB, ED gerade Linien sind (§. 77.): so ist ACE + ECB = 2R, und BCD + ECB = 2R (§. 101.). Folglich ist ACE + ECB = BCD + ECB, und daher ACE = BCD. Eben so beweißt man, daß ECB = ACD.

§. 103.

Lehrsatz. Bey jedem Triangel ABC [F. 22.] ist, wenn man eine der Seiten AB verlängert, der äußere Winkel CBD größer, als jeder der beyden ihm gegenüber liegenden innern Winkel BAC, ACB.

Beweis.

Beweis. Man halbire BC in E, ziehe AEF, mache $EF = EA$, und ziehe BF.

Da $EB = EC$, $EF = EA$, nach der Construction, und $BEF = CEA$ (§. 102.): so ist $EBF = ECA$ (§. 93.), folglich $EBD > ECA$.

Verlängert man CB nach G, und construirt, wie zuvor: so wird auf eben die Art bewiesen, daß $ABG > CAB$. Nun ist $CBD = ABG$ (§. 102.). Folglich ist $CBD > BAC$.

Demnach ist der äußere Winkel CBD größer als jeder der beyden innern Winkel BCA, BAC.

§. 104.

Lehrsatz. In jedem Triangel ACB [F. 22.] sind jede zwey innere Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte.

Beweis. Denn da $CAB < CBD$ (§. 103.): so ist $CAB + CBA < CBD + CBA$ (§. 18.), d. i. $< 2R$ (§. 101.). Eben so wird dieses von $BAC + ACB$, und von $ACB + ABC$ bewiesen.

Zusatz I. Liegen daher an einer Seite der Linie BC [F. 23.] zwey Winkel o und u, deren Summe kleiner als 2R; so laufen die Schenkel BA, CD nach dieser Gegend hin zusammen; ihre Verlängerungen BE, CF aber entfernen sich auf der entgegengesetzten Seite, wo $x + y < 2R$ (§. 101.).

Zusatz II. In jedem rechtwinklichen sowohl, als stumpfwinklichen Triangel sind die beyden übrigen Winkel spitz. In einem gleichschenklichen Triangel sind die Winkel an der Grundlinie, und in einem gleichseitigen alle drey Winkel spitz.

Zusatz III. Von einem Punct ist auf eine gerade Linie nur eine Rechtwinkliche möglich.

§. 105.

Lehrsatz. Zwey Triangel ABC, abc [F. 24. 25.] sind congruent, wenn zwey Winkel und

die einem dieser Winkel gegenüberliegende Seite in dem einen Triangel so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Es sey $A = a$, $C = c$, und $AB = ab$, so ist auch $AC = ac$, und $\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§. 93.). Denn gesetzt, AC und ac wären ungleich, und also etwa $AC > ac$, so daß $AD = ac$. Da nun $C = c$, so wäre auch $BDA = c = C$, welches gegen §. 103. ist. Unter jenen Bedingungen muß also $AC = ac$ seyn, und demnach sind die Triangel congruent.

Anmerkung. Diese vier Sätze von der Congruenz der Triangel (§. 93. 94. 96. 105.) gehören zu den wichtigsten und folgenreichsten der ganzen Mathematik. Man sagt daher, daß ein Triangel bestimmt werde, wenn folgende Stücke von ihm gegeben sind:

1) entweder ein Winkel und die denselben einschließenden zwey Seiten; oder

2) eine Seite und die beyden anliegenden Winkel, oder

3) alle drey Seiten; oder

4) zwey Winkel und eine Seite, die einem der gegebnen Winkel gegenüber liegt.

§. 106.

Lehrsatz. In jedem Triangel ABC [F.26.] steht der größern Seite auch ein größerer Winkel, und dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Beweis. I. Theil. Es sey $AC > AB$. Macht man $AD = AB$, und ziehet BD: so ist $ADB = ABD$ (§. 95.). Nun ist $ADB > ACB$ (§. 103.). Folglich ist auch $ABD > ACB$; folglich noch mehr $B > C$.

II. Theil.

II. Theil. Es sey $B > C$. Wäre nun $AC = AB$: so wäre $B = C$ (§. 95.); wäre aber $AC < AB$: so wäre $B < C$ (I. Theil). Da nun beydes gegen die Voraussetzung: so ist AC weder $=$ noch $< AB$, folglich ist $AC > AB$.

Zusatz. Die rechtwinkliche Linie CD [F. 5.] ist unter allen Linien die kleinste, welche von einem Punct C nach einer geraden Linie AB laufen, und heißt der Abstand oder die Entfernung des Punctes C von der Linie AB; weil für jede andere Linie CB der Winkel bey B spitz, folglich $CB > CD$ ist.

§. 107.

Lehrsatz. In jedem Triangel ABC [F. 27.] sind zwey Seiten zusammen immer größer als die dritte.

Beweis. Man verlängere CA nach D zu, mache $AD = AB$, und ziehe BD. Da $ABD = D$ (§. 95.): so ist $B > D$, folglich $CD > BC$ (§. 106.). Nun ist $CD = CA + AD = CA + AB$. Folglich ist $CA + AB > BC$.

Eben so wird bewiesen, daß $AB + BC > AC$, und daß $AC + CB > AB$.

§. 108.

Aufgabe. Aus drey geraden Linien AB, BC, CA [F. 28.], wovon zwey zusammen größer als die dritte sind, einen Triangel zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Auf einer geraden Linie DE trage man eine der gegebnen Linien AB; beschreibe mit der zweyten BC und mit der dritten AC aus den Endpuncten B und A Krei-

se,

se, und ziehe von deren Durchschnittspuncte C gerade Linien nach B und A: so ist ABC der verlangte Triangel.

Denn betrachtet man die Linien BC und AC als Halbmesser verschiedner Kreise, und die Puncte B und A als Scheitelpuncte zweyer Winkel des Triangels, so wird der dritte Scheitelpunct C bestimmt, wo sich die Peripherien der Kreise durchschneiden, weil hier beyde Linien BC und AC zusammentreffen.

§. 109.

Aufgabe. **Einen gegebnen Winkel DFG [F. 29.] an einem gegebnen Punct B [F. 28.] einer gegebnen Linie BE zu tragen.**

Auflösung und Beweis. Durch die Schenkel des gegebnen Winkels lege man beliebig eine gerade Linie DG, wodurch man den Triangel DFG erhält, aus dessen Seiten sich der Triangel CBA verzeichnen läßt (§. 108.); da dann FG = BA, FD = BC, und DG = CA, folglich DFG = CAB ist (§. 96.).

Anmerkung 1. Ein anderes Verfahren, um den gegebnen Winkel F an B zu tragen, ist dieses: man beschreibe zwischen den Schenkeln des gegebnen Winkels DFG mit einem beliebigen Halbmesser FL einen Bogen LN; mit demselben Halbmesser aus B einen Bogen SM, trägt man nun die Sehne NL aus S in R, und zieht durch R die Linie BC; so ist der Winkel CBA = F.

Anmerk. 2. Mit Hülfe des Transporteurs einen Winkel abzutragen, wird weiter unten gelehrt werden.

Drittes Kapitel.

Von den Parallellinien und den Parallelogrammen.

§. 110.

Erklärung. Wenn zwey Parallellinien (§. 75.) AB, CD [Tab. II. F. 30.], von einer dritten Linie EG geschnitten werden, so entstehen acht Winkel. Unter diesen heißen

o und x oder y und z, einseitig innere Winkel.
u und m oder n und p, einseitig äußere Winkel.
x und y oder z und o, Wechselwinkel.

§. 111.

Lehrsatz. Werden zwey gerade Linien AB, CD [F. 30.] von einer dritten EG so geschnitten, daß 1) die beyden einseitig innern Winkel $o + x = 2R$; 2) der äußere Winkel u = dem innern entgegengesetzten Winkel x, oder $u = x$, oder 3) die Wechselwinkel x und y, oder $x = y$ ist: so sind die Linien AB, CD parallel.

Beweis. I. Theil. Nach §. 101. sind $o + y = x + z = 2R$; also $o + x + y + z = 4R$. Aber nach der Voraussetzung sollen $o + x = 2R$; also werden auch $y + z = 2R$ seyn. Nähme man daher an, daß sich die Linien AB und CD auf der rechten Seite von EG etwa schnitten, so müßten nach §. 104. $o + x < 2R$, und daher nach dessen Zusatz I. $y + z > 2R$ seyn, welches aber der Voraussetzung, daß $o + x =$

2R

$2R$ seyn sollen, und der daraus gezognen Folgerung, daß auch $y + z = 2R$ sind, zuwider wäre. Also können, wenn $o + x$ oder $y + z = 2R$ sind, die Linien AB und CD sich nie schneiden, sondern müssen parallel seyn.

II. Theil. Da $x = u$ seyn soll, so ist $x + o = u + o$. Aber $u + o = 2R$ (§. 101.); folglich auch $x + o = 2R$, und AB und CD parallel (I. Theil).

III. Theil. Weil $x = y$ seyn soll, so ist $x + o = y + o$. Aber $y + o = 2R$, folglich $x + o = 2R$, und AB und CD parallel (I. Theil). Oder weil $x = y = u$, so sind nach dem II. Theile AB und CD parallel.

§. 112.

Aufgabe. Durch einen gegebnen Punct C [F. 31.] eine gerade Linie einer gegebnen AB parallel zu ziehen.

Auflösung. In AB nehme man einen beliebigen Punct A, ziehe AC, mache $x = y$ (§. 109.): so ist der Schenkel CD mit AB parallel (§. 111. III. Theil).

Anmerkung. Auf §. 111. beruht auch das Zeichnen paralleler Linien mittelst zweyer congruenten hölzernen Winkel, oder mittelst Winkel und Linial, wo die letztere Methode die bequemste ist. Man legt nämlich bey einem rechtwinklichen hölzernen Winkel die längere Seite, von denen den rechten Winkel einschließenden Seiten, an die gegebene Linie, an die kürzere ein Linial, schiebt sodann den Winkel an dem Liniale bis zu dem gegebnen Puncte fort, und zieht nun an der längern Seite des Winkels eine Linie durch den gegebnen Punct, so ist diese Linie mit der gegebnen parallel.

§. 113.

Lehrsatz. Werden zwey Parallellinien AB, CD [F. 30.] von einer dritten Linie EG geschnitten; so sind 1) zwey einseitig innere Winkel $o + x = 2R$; 2) ein einseitig innerer Winkel dem einseitig äußern, oder $x = u$; und 3) die Wechselwinkel gleich, oder $x = y$.

Beweis. I. Theil. Wären $o + x < 2R$, so liefen die Linien AB, CD nach dieser Gegend hin zusammen, und wären $o + x > 2R$, so würden diese Linien dahin auseinander laufen (§. 104. Zus. I.); also in beyden Fällen nicht parallel seyn, welches der Voraussetzung entgegen wäre, da sie doch parallel seyn sollen. Also müssen $x + o = 2R$ seyn, weil dann nur nach §. 111. AB und CD parallel seyn können.

II. Theil. Sind AB und CD parallel; so sind nach dem I. Theil $x + o = 2R$. Aber auch $u + o = 2R$. Also $x + o = u + o$; folglich $x = u$ (§. 17.).

III. Theil. Ist AB parallel CD, so ist nach dem II. Theil $x = u$. Aber auch $y = u$, folglich $x = y$ (§. 15.).

Zusatz I. Durch einen Punct gehet mit einer geraden Linie nur eine einzige parallel.

Zusatz II. Gerade Linien, welche einer dritten parallel sind, sind selbst parallel.

§. 114.

Lehrsatz. Bey jedem Triangel ABC [F. 32.] ist der äußere Winkel ACD den beyden

den innern ihm gegenüber liegenden B und A zusammen gleich. Auch sind alle drey innere Winkel des Triangels zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis. Durch C sey CE der AB parallel (§. 112.): so ist $o = A$, und $u = B$ (§. 113.); folglich $o + u = ACD = A + B$ (§. 16.), der äußere Winkel den beyden innern gleich.

Da hiernach $ACD = A + B$: so ist, wenn x hinzukommt, $ACD + x = A + B + x$. Nun sind $ACD + x = 2R$ (§. 101.). Folglich sind auch $A + B + x = 2R$, die drey innern Winkel zwey rechten gleich.

Zusatz. Ist ein Winkel in dem einem Triangel so groß, als in dem andern: so sind die beyden übrigen zusammen in dem einen so groß, als in dem andern. Und sind zwey Winkel zusammen in dem einen Triangel so groß, als in dem andern: so ist auch der dritte Winkel in dem einen so groß, als in dem andern.

Anmerkung. Aus dem Lehrsatz läßt sich beurtheilen, wie vielerley Arten von Triangeln in Rücksicht der Winkel möglich seyn. Ein Triangel kann folglich nur einen rechten oder einen stumpfen oder lauter spitze Winkel haben.

§. 115.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramm ABCD sind die einander gegenüber liegenden Winkel sowohl, als Seiten gleich. Auch wird das Parallelogramm von der Diagonale AC halbirt.

Beweis. Da AD, BC, und BA, CD parallel sind (§. 84.): so ist $x = o$, und $u = y$ (§. 113.). Nun ist $AC = CA$; folglich ist

$\triangle ADC$

$\triangle ADC \cong \triangle CBA$ (§. 94.); auch $AD = CB$, und $DC = AB$, ferner $D = B$ (§. 92.). Endlich ist auch $A = C$, nämlich $x + y = o + u$.

Zusatz I. Sind in einer vierseitigen Figur zwey einander gegenüber liegende Seiten parallel und gleich: so sind die beyden andern Seiten auch parallel und gleich.

Zusatz II. Sind in einer vierseitigen Figur jede zwey einander gegenüber liegende Seiten gleich: so sind sie parallel.

Zusatz III. Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleich.

Zusatz IV. Normalen (§. 79. Anm.) zwischen Parallellinien sind parallel und gleich.

Zusatz V. Ein Parallelogram mit einem rechten Winkel hat lauter rechte Winkel.

§. 116.

Lehrsatz. Sind in einem Parallelogramm die Diagonalen FG, HE [T. I. F. 2.] gleich: so ist das Parallelogramm ein rechtwinkliches.

Beweis. Da nach der Voraussetzung $FG = HE$, und nach §. 115. $EF = GH$, und $EG = EG$: so ist $\triangle FEG \cong \triangle HGE$ (§. 96.) und $E = G$ (§. 92.). Nun ist aber $E + G = 2R$ (§. 113.); folglich $E = H = G = F = R$ (§. 115. Zus. V.).

Anmerkung. Auf diesem Satz beruht die Construction der Schachtgeviere. Denn ein Schachtgeviere ist ein rechtwinkliches Parallelogramm, in welchem FH, EG die Jöcher, EF, GH die Kappen vorstellen. Hat daher der Zimmerling die Jöcher und Kappen beschlagen und geschnitten, so legt er die gleich langen Kappen auf die gleich langen Jöcher in der Form eines Vierecks, und mißt mit dem Sperrmaas übers Kreuz so lange, bis er die Diagonalen EH, GF gleich lang findet. Hat er die Diagonalen von gleicher Länge gefunden, so liegen die Jöcher und Kappen richtig, und er macht nun das Schachtgeviere vollends fertig.

§. 117.

§. 117.

Aufgabe. Aus einem gegebnen Winkel BCD [T. II. F. 33.] und den beyden einschließenden Seiten BC, DC, das Parallelogramm zu vollenden.

Auflösung. Man beschreibe aus D mit DA = BC, aus B mit BA = DC Bogen, ziehe aus D und B nach dem Durchschnittspunct A gerade Linien DA, BA; so erhält man das Parallelogramm ABCD (§. 115. Zus. 2.).

Zusatz I. Ist BCD ein rechter Winkel: so entstehet das Quadrat oder Rectangel, je nachdem BC, DC gleich oder ungleich sind; ist aber BCD schief, so entsteht der Rhombus oder Rhomboid, je nachdem BC, DC gleich oder ungleich sind. Hieraus erhellet die Möglichkeit der §. 83. beschriebnen Figuren, die alle Arten der Parallelogramme erschöpfen.

Zusatz II. Hieraus erhellet zugleich, wie aus einer geraden Linie das Quadrat, dessen Seite diese Linie ist, beschrieben werden könne; ferner, daß gleiche Seiten gleiche Quadrate, und gleiche Quadrate gleiche Seiten geben müssen; desgleichen, daß das Quadrat zu den regulären Figuren (§. 80.) gehöre.

Viertes Kapitel.

Von der Gleichheit des Flächenraums geradliniger Figuren.

§. 118.

Erklärung. Die Höhe einer Figur ist die vom Gipfel auf die Grundlinie gefällte Normale, wie LP [T. I. F. 8.] für den Triangel MLN, und MP, GN [F. 12. 13.] für die Vierecke KL, FH.

Zusatz. Figuren zwischen einerley Parallellinien haben gleiche Höhe.

§. 119.

Lehrsatz. Parallelogramme [T. II. F. 34.], wie auch Triangel, von gleicher Höhe und auf einerley Grundlinie, sind einander gleich.

Beweis. 1) Die Parallelogramme ABCD, BCFE zwischen den Parallellinien BC, AF haben die gemeinschaftliche Grundlinie BC, und es sey E in der verlängerten AD, daß BE die CD in G schneidet.

Da AB = CD, EB = CF, auch AD = BC = EF (§. 115.), und daher AE = DF: so ist $\triangle$ BAE $\cong$ $\triangle$ CDF (§. 96.); folglich, wenn man $\triangle$ DGE hinwegnimmt, und darauf $\triangle$ BGC hinzusetzt, ABCD = BCFE. Auf ähnliche Art, und noch leichter, wird der Satz bewiesen, wenn E in D selbst oder zwischen A und D fällt.

2) Hieraus folgt der Satz für die Triangel ABC, FCB, als welche die Hälften der Parallelogramme sind (§. 115.), folglich, wie diese, gleich seyn müssen.

Zusatz. Ein Parallelogramm BD ist doppelt so groß, als ein Triangel FCB von gleicher Höhe und Grundlinie.

§. 120.

Lehrsatz. Wenn man in einem Parallelogramm aus dem Mittelpunct E [F. 33.] einer Diagonale AC eine beliebige Linie FG ziehet, welche zwey einander gegenüber stehende Seiten schneidet, so wird das Parallelogramm halbirt.

Beweis.

Beweis. Da $x = 0$ (§. 113.), $n = m$ (§. 102.), nach der Voraussetzung $AE = CE$, also $\Delta AEF \cong \Delta CEG$ (§. 94.); so ist $\Delta ADC - \Delta AEF = \Delta CBB - \Delta CEG$ (§. 115. und §. 17.), d. i. $FDCE = BGEA$. Daher $FDCE + \Delta ECG = BGEA + \Delta AEF$ (§. 16.), d. i. $FDCG = BGFA$.

§. 121.

Lehrsatz. Sind in einem Parallelogramme AC [F. 35.] durch einen beliebigen Punct E der Diagonale BD gerade Linien FG, HK den Seiten CB, BA parallel gezogen: so sind die beyden Parallelogramme AE, EC, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

Beweis. Da $\Delta BAD \cong \Delta DCB$ (§. 115.): so ist $\Delta BFE + AE + \Delta EKD = \Delta BHE + EC + \Delta EGD$. Da aber auch $\Delta BFE = \Delta BHE$, und $\Delta EKD = \Delta EGD$ (§. 115.): so bleibt $AE = EC$ übrig.

§. 122.

Aufgabe. Einen gegebnen Triangel ABC [F. 36.] in ein Parallelogramm, unter einem gegebnen Winkel, zu verwandeln.

Auflösung. Man halbire BC in E (§. 98.), ziehe AE, trage an E den gegebnen Winkel FEC (§. 109.), lege durch A der BC die AG, und durch C der EF die CG parallel (§. 112.): so ist FECG das verlangte Parallelogramm.

Beweis.

Beweis. Da FECG = 2 · △AEC (§. 119. Zus.), und △ABC = 2 · △AEC (§. 119.): so ist FECG = △ABC.

§. 123.

Aufgabe. Einen gegebnen Triangel in ein Parallelogramm, unter einem gegebnen Winkel und einer gegebnen Seite, zu verwandeln [F. 35.].

Auflösung. Es sey der gegebne Triangel in das Parallelogramm AFEK, unter dem gegebnen Winkel AFE verwandelt (§. 122.). Man verlängere nun AK, bis KD der gegebnen Seite gleich sey, und vollende die Figur AC (§. 177.): so ist das Parallelogramm AE, oder der gegebne Triangel, dem Parallelogramm EC gleich (§. 121.), worin EG = KD, und EHC = KEG = AFE (§. 113.).

Zusatz. Halbirt man des △ABC Seite AB in D (§. 98.), zieht durch D die DE mit BC, durch C die EC mit AB parallel (§. 112.): so ist das Parallelogramm BDEC = △ABC. Der Beweis hiervon läßt sich leicht einsehen.

§. 124.

Aufgabe. Eine gegebne fünfseitige Figur ABCDE [F. 38.] in einen Triangel zu verwandeln.

Auflösung und Beweis. Man ziehe die Diagonalen CA, CE. Ferner ziehe man aus B mit CA die BG, aus D mit CE die DF parallel, bis sie in G und F die verlängerte Seite AE schneiden. Zieht man aus C nach den Durchschnitts-

punceten

puncten G, F, die Linien CG, CF: so ist nach §. 119. $\Delta ABC = \Delta AGC$, $\Delta EDC = \Delta EFC$, und $\Delta ACE = \Delta ACE$; folglich $ABCDE = \Delta GCF$.

Zusatz I. Wäre das Sechseck ABCDEF in einen Triangel zu verwandeln, so muß solches erst in ein Fünfeck ABCGF umgewandelt werden, indem man durch Verlängerung der Seite FE und Ziehung der Parallele DG mit der Diagonale CE, den ΔCDE dem ΔCGE gleich macht, und auf diese Art eine fünfseitige Figur erhält. Hätte man ein Siebeneck, so müßte solches in ein Sechseck, und dieses wieder in ein Fünfeck verwandelt werden.

Zusatz II. Diese Aufgabe kommt sowohl bey Feld- und Ackervertauschungen, als auch bey Grenzberichtigungen vor. Z. B. Die Grenze zweyer an einander rainender Grundstücke mache die gebrochene Linie EFGH [F. 40.], und die Besitzer dieser Grundstücken wünschten, daß von H aus die Rainung in gerader Linie an AB anstieße: so müßte man, um die neue Rainung zu berichtigen, auf folgende Art verfahren: durch den Punct F ziehe man mit der Linie EG die Parallele FK, und von G nach K die Linie GK: so ist $\Delta EKG = \Delta EFG$ (§. 119.), und die Rainung würde nun KGH seyn. Zieht man nun durch G mit KH die Parallele GL, und von H nach L die Linie HL: so ist $\Delta KGH = \Delta KLH$ (§. 119.), und die Linie HL ist die neue Rainung.

Anmerkung. Soll man eine vielseitige Figur in ein Parallelogramm verwandeln, so muß sie erst in einen Triangel, und dieser nach §. 123. in ein Parallelogramm verwandelt werden.

§. 125.

Lehrsatz. Bey jedem rechtwinklichen Triangel ABC [F. 42.] ist das Quadrat der Hypotenuse (der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite) BC so groß, als zusammen die Quadrate der Katheten (der den rechten Winkel einschließenden Seiten) BA, AC.

Beweis.

Beweis. Beschreibet man auf den Seiten des Triangels die Quadrate BE, BG, AK, und ziehet AL der CE parallel: so theilt solche das Quadrat BE in die Rectangel BL, LC; da dann zu beweisen ist, daß BL = BG, und LC = AK, folglich BE = BG + AK oder □BC = □BA + □AC ist.

1) Ziehet man AD, CF, so ist △ABD = $\frac{1}{2}$BL (§. 119. Zus.). Aus eben dem Grunde ist, weil GA, AC in einer geraden Linie liegen, △FBC = $\frac{1}{2}$BG. Nun ist in den beyden Quadraten AB = BF, BD = BC, und, wenn zum Winkel ABC der rechte Winkel bey B aus beyden Quadraten hinzukommt, ABD = FBC: also △ABD = △FBC (§. 93.). Folglich ist auch $\frac{1}{2}$BL = $\frac{1}{2}$BG, also BL = BG.

2) Ziehet man AE, BK, so wird auf eben die Art, wie zuvor, bewiesen, daß LC = AK. Daher BL + LC = BG + AK, d. i. □BC = □BA + □AC.

Zusatz I. Dieser Satz (welcher nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagorische Lehrsatz heißt) zeigt zugleich, daß das Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der einen Kathete um das Quadrat der andern Kathete übertreffe, oder daß □BC − □BA = □AC, und □BC − □AC = □BA sey. Man schreibt dieß nach §. 34. auch so: $BC^2 = BA^2 + AC^2$; folglich $BC^2 - BA^2 = AC^2$, und $BC^2 - AC^2 = BA^2$. Hieraus folgt noch: $BC = \sqrt{BA^2 + AC^2}$; $AC = \sqrt{BC^2 - BA^2}$, und $BA = \sqrt{BC^2 - AC^2}$ (§. 44.).

Zusatz II. Wären die beyden Katheten AB, AC in Zahlen gegeben, etwa AB = 4 Zoll, AC = 3 Zoll, so könnte man daraus die Länge der Hypotenuse durch Rechnung finden. Denn $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ Zoll (§. 37.). Vermittelst der Zahlen 3, 4 und 5 läßt sich ein rechtwinklicher Triangel construiren.

Anmerkung 1. Die flache Teife eines Schachtes, dessen Seigerteife und Sohle (Benennungen, welche §. 176. Zus. V. erklärt sind,) bilden stets ein rechtwinkliches Dreyeck, wo die Hypotenuse BC die flache Teife, die untere Kathete AC die Sohle, und die aufrechtstehende AB die Seigerteife vorstellt.

Beyspiele.

1) Findet man auf einem Grubenriß die Seigerteife eines Schachtes 18 Lachter, 6 Achtel, 4 Zoll, und die Sohle 4 Lachter 3 Achtel 2 Zoll: so beträgt die flache Teife, wenn alles auf Lachterzolle reducirt wird (A. §. 52.), $= \sqrt{1504^2 + 352^2} = 1544$ Zoll $= 19$ Lr., 2 Achtel, 4 Zoll, oder $5\frac{5}{8}$ Fahrten.

2) Die flache Teife eines Schachtes ist 18 Fahrten, und seine Sohle 5 Lachter, 7 Achtel; wie viel beträgt seine Seigerteife?

3) Ein andrer Schacht, dessen Seigerteife 15 Lachter, 6 Achtel beträgt, hat 6 Fahrten flache Teife. Wie viel beträgt die Sohle dieses Schachtes?

Anmerk. 2. Bey diesen beyden letzten Beyspielen müssen die Fahrten erst auf Lachtermaas reducirt werden (A. §. 52.).

Anmerk. 3. Ist in einem rechtwinklichen Triangel die Länge der einen Kathete eine gerade Zahl, und nennt man solche $= a$, so ist die andere Kathete allemal $\frac{a^2}{4} - 1$, und die Hypotenuse $= \frac{a^2}{4} + 1$, wenn diese Größen ganze Zahlen und rationale oder vollkommne Wurzeln seyn sollen. Z. B. Es sey die eine Kathete $a = 8$, so ist die andre $= \frac{a^2}{4} - 1 = \frac{8^2}{4} - 1 = \frac{64}{4} - 1 = 16 - 1 = 15$, und die Hypotenuse $= \frac{a^2}{4} + 1 = 16 + 1 = 17$. Und es ist $17^2 = 8^2 + 15^2$, d. i. $289 = 64 + 225$.

Ist hingegen die eine Kathete eine ungerade Zahl, ebenfalls $= a$, so ist die andre Kathete $= \frac{a^2-1}{2}$, und die Hypotenuse $= \frac{a^2+1}{2}$, wenn nämlich diese Größen ebenfalls ganze Zahlen und vollkommne Wurzeln haben sollen.

Es sey z. B. die eine Kathete $a = 5$, so ist die andre $= \frac{a^2 - 1}{2} = \frac{5^2 - 1}{2} = \frac{25 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12$, und die Hypotenuse $= \frac{a^2 + 1}{2} = \frac{5^2 + 1}{2} = \frac{25 + 1}{2} = \frac{26}{2} = 13$. Und es ist $13^2 = 5^2 + 12^2$, d. i. $169 = 25 + 144$.

Der Beweis folgt aus dem Lehrsatz §. 125.

§. 126.

Aufgabe. Ein Quadrat zu finden, welches zwey gegebnen Quadraten zusammen, oder welches ihrem Unterschiede gleich sey [F. 41.].

Auflösung. 1) Man lege die Seiten BA, AC der gegebnen Quadrate unter einem rechten Winkel BAC an einander, und ziehe BC: so ist $BC^2 = AB^2 = BC^2$.

2) Man errichte auf der Seite AD [F. 42.] des gegebnen kleinen Quadrats die Normale AC, und beschreibe aus D, mit der Seite DC des gegebnen größern Quadrats, einen Kreisbogen, welcher die Normale AC in C schneidet: so ist $CD^2 - DA^2 = CA^2$.

Zusatz. Soll ein Quadrat gefunden werden, welches noch einmal so groß als ein gegebnes ist; so ist die Diagonale des gegebnen Quadrats die Seite hierzu.

§. 127.

Lehrsatz. Ist bey einem Triangel BAC [F. 42.] das Quadrat einer Seite BC so groß, als zusammen die Quadrate der beyden andern CA, CB: so schließen letztere einen rechten Winkel BAC ein.

Beweis. Es sey AD auf AC winkelrecht, $AD = AB$, und DC gezogen: so ist $CD^2 = DA^2 + AC^2$ (§. 125.). Nun ist nach der Voraussetzung $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Folglich $CD^2 = BC^2$, und $CD = BC$ (§. 117. Zus. II.). Nun war auch $AD = AB$, und $AC = AC$. Folglich $BAC = CAD$ (§. 96.) $= R$ (§. 79.).

Zweyter Abschnitt. Vom Kreise.

Erstes Kapitel. Gerade Linien im Kreise.

§. 128.

Aufgabe. Den Mittelpunct eines gegebnen Kreises zu finden [F. 43.].

Auflösung. Man ziehe in dem gegebnen Kreise beliebig eine Sehne AB, halbire sie in E, und errichte auf ihr die Normale EF: so ist in solcher des Kreises Mittelpunct, den man findet, wenn man die Normale zu beyden Seiten bis zum Umkreis nach F und D verlängert, und DF in C halbirt.

Beweis. Gesetzt, des Kreises Mittelpunct wäre nicht in DF, sondern außerhalb, etwa in G. Ziehet man nun GE, GA, CB: so wäre $GA = CB$ (§. 87.).

(§. 87.). Nun ist AE = BE, und GE = GE. Folglich wäre $\triangle GEA \cong \triangle GEB$ (§. 96.); und GEA = GEB = R (§. 79.). Nun ist nach der Construction FEB = R. Folglich wäre GEB = FEB, welches unmöglich ist. Demnach kann des Kreises Mittelpunct nicht außerhalb DF seyn, folglich ist derselbe in DF, also in der Mitte C, und DF zugleich ein Durchmesser oder Diameter.

§. 129.

Lehrsatz. Kreise von gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind gleich.

Beweis. Man ziehe die Durchmesser (§. 86.) der Kreise, und lege den einen Kreis auf den andern, daß die Endpuncte ihrer gleichen Durchmesser und ihre Mittelpuncte auf einander fallen (§. 128.). Gesetzt nun, die Peripherien fielen nicht in allen Puncten auf einander: so folgte, daß die Halbmesser der Kreise ungleich wären, welches gegen die Voraussetzung wäre. Daher decken Kreise von gleichen Halbmessern oder Durchmessern einander.

Zusatz. Jeder Durchmesser FD [F. 43.] theilt den Kreis in zwey congruente Theile DAF, DBF, oder halbirt ihn.

§. 130.

Erklärung. Ein Halbkreis heißt die Figur zwischen dem Durchmesser und dem halben Kreisumringe.

Zusatz. Jede Sehne AB theilt den Kreis in zwey entgegengesetzte ungleiche Abschnitte, von denen der mit dem Mittelpuncte AFB der größere, und der andere ADB der kleinere ist.

§. 131.

§. 131.

Lehrsatz. Eine Normallinie EC [F. 43.] auf die Sehne AB, in ihrer Mitte E, gehet durch den Mittelpunct des Kreises C. Eine Normallinie CE, vom Mittelpuncte C auf die Sehne AB, trifft ihre Mitte E. Eine gerade Linie CE, vom Mittelpuncte C nach der Mitte der Sehne E, ist auf ihr winkelrecht.

Beweis. 1) Erhellet aus §. 128.

2) Ziehet man die Halbmesser CA, CB: so ist CE = CE, A = B (§. 95.), und bey E sind rechte Winkel (§. 79.); folglich ist AE = BE (§. 105.).

3) Da AE = BE, CE = CE, und AC = BC, so ist AEC ≐ BEC (§. 96.); folglich CE auf AB winkelrecht (§. 78.).

Zusatz. Von einem gleichschenklichen Triangel ACB gilt Folgendes:

1) Die gerade Linie CE von der Spitze C nach der Mitte der Grundlinie AB ist auf derselben winkelrecht, und halbirt den Winkel an der Spitze.

2) Die Normallinie CE, von der Spitze auf die Grundlinie, halbirt die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

3) Die gerade Linie CD, welche den Winkel an der Spitze halbirt, ist winkelrecht auf der Grundlinie, und halbirt dieselbe.

4) Eine Normallinie EC auf die Grundlinie in ihrer Mitte gehet durch die Spitze.

§. 132.

Aufgabe. Durch drey gegebne Puncte A, B, D [F. 44.], die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auf-

Auflösung. Man ziehe AB, BD, halbire sie in E, F, und errichte die Normallinien EC, FC, die einander in C schneiden. Aus diesem Puncte C ziehe man mit dem Halbmesser CA einen Kreis, der durch die Puncte A, B, D gehen wird.

Beweis. Man ziehe die gerade Linie EF: so ist, weil bey E und F rechte Winkel sind, $CEF + CFE < 2R$. Folglich laufen EC, FC an dieser Seite in einem Punct C zusammen (§. 104. Zus. I.). Ziehet man nun CA, CB, CD: so ist, weil $AE = BE$, $EC = EC$, $AEC = BEC$, auch $CA = CB$ (§. 93.). Eben so beweißt man, daß $CD = CB$. Folglich gehet der Kreis aus C durch alle drey Puncte A, B, D.

Zusatz I. Drey Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmen eines Kreises Mittelpunct und Halbmesser.

Zusatz II. Zwey Kreise können einander nicht in mehr als zwey Puncten schneiden, weil drey Puncte nur einen Kreis bestimmen.

§. 133.

Lehrsatz. Sind Sehnen des Kreises einander gleich: so sind sie in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte. Und sind sie in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte: so sind sie einander gleich. Bey Ungleichheit der Sehnen aber, oder der Entfernung, ist die größere Sehne näher, und die nähere größer. Endlich ist auch der Durchmesser größer, als jede Sehne [F. 45.].

Beweis. Vom Mittelpunct C ziehe man auf die Sehnen AB, DE die Normalen CF, CH (§. 100.),

(§. 100.), welche die Sehnen halbiren (§. 131.), und ihre Entfernungen von C sind (§. 106. Zus.). Zieht man nun die gleichen Halbmesser CA, CE, deren Quadrate also einander gleich sind: so ist $CA^2 = CF^2 + FA^2$, und $CE^2 = CH^2 + HE^2$ (§. 125.); folglich $CF^2 + FA^2 = CH^2 + HE^2$.

1) Ist nun $AB = DE$, folglich $FA = HE$, also $FA^2 = HE^2$: so ist auch $CF^2 = CH^2$, also $CF = CH$.

2) Ist $CF = CH$, also $CF^2 = CH^2$: so ist $FA^2 = HE^2$, also $FA = HE$, folglich $AB = DE$.

3) Ist $AB < CD$, folglich $FA < HE$, also auch $FA^2 < HE^2$: so ist $CF^2 > CH^2$ (§. 19.), also $CF > CH$.

4) Ist $CF > CH$, also $CF^2 > CH^2$: so ist $FA^2 < HE^2$, also $FA < HE$, folglich auch $AB < DE$.

Endlich ziehe man noch DC bis G verlängert. Da $DC + CE > DE$ (§. 107.), aber $DC + CE = DG$ (§. 86.) ist: so ist $DG > DE$.

§. 134.

Lehrsatz. Eine Normallinie MN [T. I. F. 16.] auf des Kreises Halbmesser CE, durch dessen Endpunct E, liegt ganz außerhalb des Kreises.

Beweis. In MN nehme man einen beliebigen Punct L, und ziehe CL: so ist $CL > CE$ (§. 106.), folglich B außerhalb des Kreises.

Zusatz I.

Zusatz I. 1) Die Normallinie MN durch des Halbmessers Endpunct E ist eine Berührungslinie oder Tangente (§. 86.) des Kreises. 2) Jede Tangente ist eine Normallinie MN durch des Halbmessers Endpunct E. 3) Eine Tangente berührt daher den Kreis nur in einem Puncte. 4) Durch jeden Punct im Umkreise ist nur eine Tangente möglich.

Zusatz II. Durch einen gegebnen Punct E in der Peripherie des Kreises eine Tangente zu ziehen, ziehe man den Halbmesser CE und errichte auf ihn in E eine Normallinie MN.

Zusatz III. Auf der Tangente MN ist die gerade Linie CE von des Kreises Mittelpuncte nach dem Berührungspuncte winkelrecht.

Zusatz IV. Eine winkelrechte Linie CE auf der Tangente MN im Berührungspuncte E gehet durch des Kreises Mittelpunct.

§. 135.

Aufgabe. An einem um C [T. II. F. 46.] beschriebnen Kreis von dem außerhalb desselben gegebnen Puncte B eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe BC, errichte auf derselben in A, wo sie den Kreis schneidet, eine Normallinie EH, schneide solche in H, mittelst eines Kreisbogens aus C mit CH, und ziehe CH, BG: so ist BG die verlangte Tangente.

Beweis. Da CB = CH, CG = CA, und BCG = HCA: so ist CGB = CAH (§. 93.) = R, folglich BG eine Tangente.

Zusatz. Zieht man von dem Berührungspuncte E die EC, und von B nach dem Durchschnittspuncte F die BF, so ist BF auch eine Tangente.

§. 136.

Erklärung. Kreise, welche aus einem Mittelpuncte C [F. 47.] mit verschiednen Halbmessern CA, CB gezogen sind, heißen concentrisch.

Zusatz. Kreise, die einander schneiden, haben eine gemeinschaftliche Sehne AB [F. 48.] durch ihre beyden Durchschnittspuncte; daher gehet eine Normallinie auf dieser Sehne in ihrer Mitte E durch beyder Kreise Mittelpuncte C, D (§. 131.).

Zweytes Kapitel.
Winkel im Kreise.

§. 137.

Erklärung. Der Winkel am Mittelpuncte (Centriwinkel) ACB [Tab. III. F. 49.] heißt der, dessen Scheitel der Mittelpunct, und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind. Der Winkel an der Peripherie (Peripheriewinkel) AEB heißt der, dessen Scheitel in der Peripherie ist, und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind. Von beyden sagt man, daß sie auf dem Bogen stehen, den ihre Schenkel von der Peripherie abschneiden.

§. 138.

Lehrsatz. Der Winkel am Mittelpuncte ist doppelt so groß, als der Winkel an der Peripherie, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Beweis. 1) Liegt des Kreises Mittelpunct C [F. 49.] im Schenkel des Winkels am Umkreise AED: so ist, weil CA = CE (§. 87.), CAE = CEA (§. 95.). Folglich ist ACD = CAE + AEC (§. 114.) = 2AED.

2) Liegt C zwischen den Schenkeln [F. 49.] des Winkels AEB, und man ziehet ECD: so ist nach

nach dem ersten Falle ACD = 2 AED, und BCD = 2 BED; folglich ACB = 2 (AED + BED) = 2 AEB.

3) Liegt C [F. 50.] außerhalb des Winkels AEB, und man ziehet ECD: so ist nach dem ersten Falle DCB = 2 DEB, und DCA = 2 DEA; folglich DCB — DCA = ACB = 2 (DEB — DEA) = 2 AEB.

Zusatz. Alle Peripherlewinkel, die auf einerley Bogen stehen, sind einander gleich.

§. 139.

Lehrsatz. Ein Peripheriewinkel ABD [F. 51.], der auf einer Hälfte der Peripherie, d. i. dem Halbkreise AED steht, ist ein rechter.

Beweis. Man ziehe durch den Mittelpunct C die BCE: so ist nach §. 138. ACE = 2 ABE, und DCE = 2 DBE. Folglich ACE + DCE = 2 (ABE + DBE) = 2 ABD. Da aber ACE + DCE = 2 R (§. 101.), so ist 2 ABD = 2 R, und ABD = R.

Zusatz I. Hieraus folgt, daß, wenn ein Peripheriewinkel auf einem größern Bogen als der Halbkreis ist, steht, er größer als ein rechter, d. i. ein stumpfer seyn muß; wenn er aber auf einem kleinern Bogen steht, er kleiner als ein rechter oder ein spitzer seyn muß.

Zusatz II. Durch drey Puncte A, B, D, die in den Schenkeln eines rechten Winkels ABD liegen, läßt sich ein Kreis beschreiben, wenn man AD ziehet und in C halbirt. Auch läßt sich aus der gegebnen Hypotenuse AD und einer Kathete DB sehr leicht ein rechtwinkliches Dreyeck ABD construiren, wenn man über AD einen Halbkreis ABD beschreibt, und aus D mit DB diesen in B durchschneidet, so ist AB die andere Kathete.

Anmer-

Anmerkung. Legt man an den rechten Winkel ABD einen von Holz oder Messing gearbeiteten Winkelhaken, so kann man leicht prüfen, ob er gut und genau gearbeitet sey.

§. 140.

Aufgabe. Am Endpuncte A [F. 52.] einer geraden Linie AB eine Normallinie AE zu ziehen.

Auflösung. Mit einer beliebigen Linie AD beschreibe man über AB ein gleichseitiges Dreyeck ACB, verlängere die dem Puncte gegenüber liegende Seite DC, mache CE = CD, und ziehe von A nach E die AE: so ist EA auf AB normal.

Beweis. Da vermöge der Construction CE = CA = CD, so läßt sich mit einer dieser Linien über ED ein Halbkreis beschreiben, wo dann DAE ein Winkel im Halbkreise und folglich ein rechter ist (§. 139.).

§. 141.

Lehrsatz. Die gegenüber liegenden Winkel jedes Vierecks ABDE [F. 53.] im Kreise sind zwey rechten Winkeln gleich.

Beweis. Ziehet man AD, BE: so ist EAD = EBD, und BAD = BED (§. 138. Zus.), folglich BAE = EBD + BED; folglich, wenn BDE hinzukommt, BAE + BDE = EBD + BED + BDE = 2 R (§. 114.). Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß auch AED + ABD = 2 R.

§. 142.

Lehrsatz. In gleichen Kreisen, also auch in einem Kreise, haben gleiche Winkel und gleiche Sehnen auch gleiche Bogen; und gleiche Bogen auch gleiche Winkel und gleiche Sehnen [F. 54. 55.].

Beweis. 1) Die Winkel ACB, acb sind gleich. Legt man also c auf C, daß ca auf CA liegt: so fällt cb auf CB. Nun sind die Kreise gleich, also auch ihre Halbmesser; folglich fällt a auf A, b auf B. Da nun die ganzen Peripherien einander decken, so decken sich auch die Bogen ab und AB.

Aus der Gleichheit der Sehnen AB, ab, folgt die Gleichheit der Winkel C, c, also auch die Gleichheit der Bogen AB, ab.

2) Die Bogen AB, ab sind gleich. Gesetzt nun, die Winkel wären ungleich, etwa ACB > acb: so sey ACD = acb, und daher nach Vorigem der Bogen AD = dem Bogen ab. Nun ist angenommen Bogen AB = B. ab; folglich wäre B. AD = B. AB, welches unmöglich ist. Demnach können die Winkel ACB, acb nicht ungleich, und müssen also gleich seyn.

Da nun aus der Gleichheit der Winkel und der Gleichheit der Halbmesser die Gleichheit der Sehnen AB, ab folgt: so folgt auch diese aus der Gleichheit der Bogen.

Zusatz I. Da sich also nach dem Bisherigen die Bogen verhalten, wie die Winkel: so werden die Bogen ebenfalls halbirt, wenn man die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte halbirt (§. 97.).

Zusatz II. Hieraus folgt ferner, daß die Bogen als das Maas der Winkel können betrachtet werden, wenn diese mit ihrem Scheitel am Mittelpuncte eines Kreises stehen. Man bedient sich aber der Bogen eines Kreises allemal, wenn man die Größe eines Winkels bestimmen will, und theilt gewöhnlich die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile oder Grade. Es ist folglich einerley, ob man sagt, alle Winkel um den Mittelpunct sind $= 4R$ (§. 101. Zus.), oder sind $= 360$ Grad, und daher $2R = 180$ Grad, $R = 90$ Grad.

Jeden Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile oder Minuten; jede Minute in 60 gleiche Theile oder Secunden u. s. w. Die Grade bezeichnet man der Kürze wegen mit $^\circ$, die Minuten mit $'$, die Secunden mit $''$ u. s. w., so daß also, wenn von Winkeln die Rede ist, $56^\circ, 7'. 35''$ einen Winkel von 56 Graden, 7 Minuten und 35 Secunden bedeutet.

Zusatz III. Der Bergmann theilt, um horizontale oder söhlige Winkel zu messen, den Kreis in 2 mal 12 gleiche Theile oder Stunden; jede Stunde in 8 gleiche Theile oder Achtel; jedes Achtel wieder in 4 gleiche Theile, und der Markscheider jeden solchen vierten Theil oder ein Viertelachtel wieder in 3 gleiche Theile, wo er einen solchen Theil ein Plus oder Minus nennt. Es ist demnach

1 Stunde $= \frac{360^\circ}{2 \cdot 12} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$.

2 „ $= \quad = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.

1 Achtelstunde $= \frac{15^\circ}{8} = 1^\circ, 52' 30''$.

2 „ $= 2 \cdot (1^\circ, 52', 30'') = 3^\circ, 55'$.

1 Viertelachtel $= \frac{1^\circ, 52', 30''}{4} = 0^\circ, 28', 7'' 30'''$.

1 Plus oder Minus $= \frac{0^\circ, 28', 7'', 30'''}{4} = 0^\circ, 9', 22'', 30'''$.

Man kann daher jeden Winkel in Stunden, Achtel ꝛc. und umgekehrt jeden Stundenwinkel in Grade, Minuten ꝛc. sehr leicht verwandeln.

Zusatz IV. Bekanntlich bedient sich der Bergmann bey der söhligen Winkelmessung des Compasses, d. i. eines in 2 mal 12 Stunden eingetheilten Ringes, über dessen Mittelpuncte eine Magnetnadel sich frey bewegt, die ihre Richtung nach Mitternacht nimmt, und deren Richtungen daher an verschiednen, jedoch nicht zu weit von einander entfernten, Orten mit einander parallel sind. Um nun den Winkel anzugeben, den eine Linie mit der (magnetischen)

Mittags-

Mittagslinie macht, so sagt der Bergmann: die Linie streicht. So sagt er z. B. sie streicht Stunde 3,4, d. h. sie macht mit der Mittagslinie einen Winkel von 3 Stunden und 4 Achteln.

Von einer Linie, welche eine andre rechtwinklich schneidet, oder deren Streichen von der letztern um 6 Stunden verschieden ist, sagt der Bergmann: sie macht mit letztrer das Winkelkreuz, und ihr Streichen nennt er die Winkelkreuzstunde. Man findet die Winkelkreuzstunde einer Linie, deren Streichen unter Stunde 6 ist, wenn man zu dem Streichen 6 Stunden addirt, und wenn das Streichen über Stunde 6 ist, wenn man von dem Streichen 6 Stunden subtrahirt. So ist z. B. die Winkelkreuzstunde von Stunde 3,5 = 3,5 + 6 = Stunde 9,5; die Winkelkreuzstunde von St. 10,3 = 10,3 − 6 = St. 4,3.

Die Stunden bezeichnet man ebenfalls mit °, die Achtelstunden mit ′. So heißt z. B. 5°,6′ = Stunde 5 und 6 Achtel.

§. 143.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Pappiere zu messen [F. 57.].

Auflösung. Hierzu bedient man sich eines halben Kreises von Messing, Horn, Pappier, der in 180 Grade ꝛc. oder 12 Stunden ꝛc. eingetheilt ist, und welcher ein Transporteur heißt. Man lege den Mittelpunct desselben an den Scheitelpunct C des Winkels BCA, das Linial aber an den Schenkel AC, und zähle die Grade ꝛc. oder Stunden ꝛc., welche der andere Schenkel CB auf dem Transporteur abschneidet.

Zusatz. Mittelst des Transporteurs läßt sich nun auch ein in Graden ꝛc. oder Stunden ꝛc. gegebner Winkel BCA an einen gegebnen Punct C einer gegebnen Linie AC tragen (§. 109. Anm. 2.). Man legt den Mittelpunct des Transporteurs auf den gegebnen oder angenommnen Punct C, und die innere Seite desselben an die Linie CA, zählet die gegebne Anzahl Grade ꝛc. oder Stunden ꝛc. ab, bezeichnet den Punct D auf dem Pappiere, und verbindet ihn mit dem Scheitelpuncte C durch eine gerade Linie; so erhält man den verlangten Winkel.

Drittes

Drittes Kapitel.

Geradlinige Figuren in und um den Kreis.

§. 144.

Erklärung. Eine geradlinige Figur im Kreise heißt die, deren Seiten Sehnen des Kreises, und eine Figur um den Kreis, deren Seiten Tangenten des Kreises sind.

Zusatz. Um einen gegebnen Triangel einen Kreis zu beschreiben lehrt die Aufgabe §. 132.

§. 145.

Aufgabe. Ein reguläres Vielecks zu zeichnen [F. 56.].

Auflösung und Beweis. Man theile die Peripherie eines Kreises in lauter gleiche Theile, und ziehe an den Theilungspuncten gerade Linien von einem zum andern, so entstehen gleiche Sehnen, welche zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte und zu gleichen Bogen gehören (§. 142.).

Zusatz I. Man unterscheide hier Polygonwinkel und Winkel am Mittelpuncte. Erstre werden durch die mit einander verbundnen Sehnen gebildet, und so sind hier ABD, BDE, DEF ꝛc. Polygonwinkel oder solche Winkel, welche am Umfange innerhalb des Vielecks oder Polygons liegen. Dagegen ACB, BCD ꝛc. Winkel am Mittelpuncte oder Centriwinkel (§. 137.).

Zusatz II. Um ein Quadrat im Kreise zu beschreiben, lasse man zwey Durchmesser sich rechtwinklich durchschneiden, und verbinde die Endpuncte derselben durch gerade Linien.

§. 146.

Aufgabe. Die Größe des Polygonwinkels

in

in einem gegebnen regulären Vieleck zu finden [F. 56.].

Auflösung und Beweis. Man ziehe die Halbmesser CA, CB, CD ꝛc., so entstehen im regulären Polygon so viele Triangel, als die Figur Seiten hat. Alle diese Triangel sind wegen der drey Seiten, die in einem so groß als in dem andern sind, congruent (§. 96.). Daher sind auch alle Winkel, in gehöriger Ordnung genommen, gleich (§. 92.). Die Winkel eines jeden Triangels sind ferner zwey rechten Winkeln gleich (§. 114.); eben so die Winkel um den Mittelpunct $C = 4R$ (§. 101. Anm.). Zieht man aber die Winkel um den Mittelpunct von der Summe der Winkel aller Triangel im Polygon zusammen ab, so bleiben die Polygonwinkel übrig. Wenn diese gleich wären, so dürfte man nur mit ihrer Anzahl in ihre Summe dividiren, um die Größe eines einzelnen zu erhalten. Daß sie aber wirklich gleich sind, läßt sich leicht erweisen; denn da $\triangle ACB \cong \triangle BCD \cong \triangle DCE$ u. s. w. und $CBA = CDB$, $CBD = CDE$ (§. 92.), u. s. w.: so ist auch $CBA + CBD = CDB + CDE$, d. i. $ABD = BDE$. Der Polygonwinkel wird also gefunden, wenn man von der Summe von zweymal so viel rechten Winkeln, als die Figur Seiten oder Triangel hat, vier rechte abzieht, und den Rest durch die Anzahl der Seiten dividirt.

Zusatz I. Nennt man die Anzahl der Seiten $= n$, so ist also allgemein die Größe des Polygonwinkels

$$= \frac{n \cdot 2R - 4R}{n} = \frac{n \cdot 2R - 2 \cdot 2R}{n} = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot 2R.$$

Der Polygonwinkel des regulären Sechsecks ist also $= \left(\frac{6-2}{6}\right) \cdot 180^\circ = \frac{4}{6} \cdot 180^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$; des regulären Fünfecks $= \left(\frac{5-2}{5}\right) \cdot 180° = \frac{3}{5} \cdot 180° = 3 \cdot 36° = 108°$; u. s. f.

Zusatz II. Die innern Winkel am Umfange einer jeden vielseitigen Figur betragen $= (n-2) \cdot 2R$ Grad. Ist also die Anzahl der Seiten $= n = 5$, so ist die Winkelsumme aller innern Winkel am Umfange $= (5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$.

Zusatz III. Die geraden Linien aus des Kreises Mittelpunct C nach den Winkelpuncten des regulären Polygons halbiren jeden Polygonwinkel.

§. 147.

Aufgabe. Die Größe des Centriwinkels im regulären Polygon zu finden.

Auflösung. Da alle Winkel um einen Punct herum $= 4R$, und hier die Winkel alle gleich sind (§. 146.), so dividire man mit der Anzahl der Seiten in 4R, um die Größe eines solchen Winkels zu erhalten.

Zusatz. Ist n die Anzahl der Seiten wieder, so ist der Centriwinkel beym regulären Polygon $= \frac{4R}{n} = \frac{360°}{n}$.

Für ein Sechseck daher $= \frac{360°}{6} = 60°$

" " Fünfeck " $= \frac{360°}{5} = 72°$.

§. 148.

Lehrsatz. Jedes reguläre Polygon ist einem Triangel gleich, welcher die Höhe eines einzelnen Triangels im Polygon und eine dem Umfange des Polygons gleiche Grundlinie hat [F. 56. 58.].

Beweis.

Beweis. Da die Polygonseiten gleich sind, folglich ihr Abstand CH vom Mittelpuncte des Kreises, in welchem das Polygon beschrieben, gleich ist (§. 133.), folglich alle Triangel, in welche das Polygon getheilt ist, einerley Höhe haben: so ist das in dem Kreise beschriebene Polygon einem Triangel ACK gleich, welcher die Höhe CH eines einzelnen Polygontriangels, und eine dem Umfange des Polygons gleiche Grundlinie AK hat.

§. 149.

Aufgabe. **Ein reguläres Polygon in einem Kreise zu beschreiben, dessen Halbmesser gegeben ist [F. 56.].**

Auflösung. Man setze an den gegebnen Halbmesser CA den Winkel ACB am Mittelpunct (§. 147.), beschreibe mit dem Halbmesser die Peripherie; der Winkel am Mittelpuncte schneidet den Bogen AB, dessen Sehne so oft im Kreise herumgetragen wird, als die Figur Seiten hat.

§. 150.

Aufgabe. **Ein reguläres Polygon um einen Kreis zu beschreiben [F. 59.].**

Auflösung. An den beliebig verlängerten Halbmesser CA trage man den Centriwinkel (§. 147.) ACD; halbire diesen Winkel durch die Linie CB, daß diese bis an die Peripherie reicht; errichte an B die Tangenten BD, BA (§. 134. Zus. II.), so daß diese die Schenkel CD, CA des Centriwinkels DAC schneiden: so entsteht der Triangel DAC, der zu dem verlangten regulären Polygon gehört, welches jetzt leicht zu ergänzen ist. Man nimmt dazu entweder einen neuen Kreis, dessen Halbmesser CA ist, oder zieht die Schenkel CE, CF, CG u. s. w. der übrigen Centriwinkel (§. 149.), verlängert sie, und trägt die gefundne Seite AD nach DE, EF u. s. f.

§. 151.

Aufgabe. Ein reguläres Polygon über einer gegebnen Linie AB [F. 56.] zu beschreiben.

Auflösung. Man berechne den Polygonwinkel (§. 146. Zus. I.), halbire ihn, und setze die eine Hälfte an A, die andere an B (§. 146. Zus.). Da, wo sich die beyden Schenkel AC und BC durchschneiden, ist der Mittelpunct eines Kreises, den man jetzt vollendet, und worin sich die übrigen Triangel des Polygons beschreiben lassen (§. 142. 146.).

Anmerkung. Zu Auftragung der Winkel an A und B bedient man sich der Aufgabe §. 143. Zusatz.

§. 152.

Lehrsatz. Die Seite des regulären Sechsecks ist dem Halbmesser des Kreises gleich.

Beweis. Berechnet man den Polygonwinkel eines regulären Sechsecks, so findet man ihn = 120° (§. 146. Zus. I.) Wollte man nun das reguläre Sechseck über einer gegebnen Linie beschreiben (§. 151.), folglich den Polygonwinkel halbiren, so würde man diese Hälfte eben so groß finden, als den Centriwinkel, nämlich = 60° (§. 147. Zus.). Da nun alle Winkel eines Triangels in

diesem

diesem Polygon = 60° werden, also alle drey Winkel einander gleich sind, so sind auch alle Seiten einander gleich (§. 95. Zus. II.). Daher auch der Halbmesser einer Seite des Umfangs gleich.

Zusatz I. Aus dem regulären Sechseck entsteht ein reguläres Zwölfeck, wenn man alle Winkel am Mittelpuncte halbirt, die gerade Linie, die sie halbirt, bis an die Peripherie des Kreises zieht, worin das Sechseck steht; es werden die neuen Sehnen, deren jetzt zwölf entstehen, den Umfang des regulären Zwölfecks bilden. Auf diese Art kann man weiter hinaus das reguläre Vierundzwanzigeck rc. bilden, so daß man der Peripherie des Kreises immer näher kommt. Aber immer wird doch, so sehr man auch die Anzahl der Seiten vermehrt, die im Kreise beschriebne Figur kleiner seyn, als der Kreis, und ihr Umfang kleiner als die Peripherie.

Zusatz II. Denkt man sich ferner eine reguläre Figur um den Kreis beschrieben (§. 150.) und man vermehrt ihre Seiten (§. 152. Zus. I.), so wird zwar ihr Umfang immer etwas größer seyn als die Peripherie, folglich sie auch selbst größer als der Kreis. Je mehr man indessen die Anzahl ihrer Seiten verdoppelt, desto mehr wird sie sich dem Kreise nähern, daß der Unterschied zuletzt ganz unbedeutend wird. So kommen beyde reguläre Figuren, sowohl die innerhalb, als die außerhalb des Kreises, bey fortgesetzter Vermehrung ihrer Seiten einander so nahe, daß sie sich selbst im Kreise verlieren werden, und man kann also sagen: der Kreis sey einem regulären Polygon von unendlich vielen Seiten gleich zu rechnen.

§. 153.

Noch muß hier einer krummlinigen Figur erwähnt werden, welche so vielfältig bey Gegenständen des Bergbaues vorkommt, nämlich die Ellypse [F. 62.]. Sie ist eine ovale krummlinige Figur, und ihre Eigenschaften sind kurz diese:

1) hat sie zwey Durchmesser AB, ED, welche die Axen der Ellypse heißen, und zwar der große Durchmesser AB die große Axe, der kleine Durchmesser ED die kleine Axe. Beyde ste-

hen in ihrer Mitte C rechtwinklich auf einander und halbiren sich.

2) hat sie zwey Mittelpuncte F, f, welche ihre Brennpuncte heißen.

3) ist in der Ellypse die Summe zweyer Linien, welche man aus den Brennpuncten F, f, nach einem beliebigen Punct E oder G in dem Umfang der Ellypse zieht, so groß, als die große Axe AB. Also $FE + fE = FG + fG = AB$.

Wenn daher die große Axe AB und kleine Axe ED gegeben sind, so kann man sehr leicht die Brennpuncte F, f der Ellypse finden, indem man mit der halben großen Axe $AC = BC$ aus dem Endpunct E der kleinen Axe einen Kreisbogen beschreibt, welcher die große Axe in F und f zweymal schneidet: so sind diese Durchschnittspuncte F, f die Brennpuncte der Ellypse.

Anmerkung. Die Bodenfläche der Kübel ist eine Ellypsenfläche; auch kommt die Ellypsenfläche bey der Grubenmauerung vor.

§. 154.

Aufgabe. Eine Ellypse zu beschreiben.

Auflösung. 1) Sind die große und kleine Axe AB, ED gegeben, so suche man nach dem Vorigen die Brennpuncte F, f. Theilt man nun die große Axe AB in mehrere Theile, und beschreibt z. B. mit dem Theil AM aus F, f Bogen zu beyden Seiten der großen Axe AB, und eben so mit dem andern Theile BM aus f, F zu beyden Seiten der großen Axe Bogen, welche erstere durchschneiden: so hat man zu beyden Seiten Puncte in in dem Umfang der Ellypse. Und so findet man mehrere Puncte.

2) Mechanisch lößt man die Aufgabe, wenn man einen Faden, dessen Länge der großen Axe AB gleich ist, in den Brennpuncten F, f mit seinen Endpuncten befestigt, und dann einen Stift an dem immer gleich gespannten Faden umherführt.

Dritter Abschnitt.

Von den Proportionallinien und den ähnlichen Figuren.

---

§. 155.

Erklärung. Sind vier Linien so beschaffen, daß sich die erste zur zweyten, wie die dritte zur vierten verhält; so heißen sie Proportionallinien [F. 60.].

Zusatz. Wäre z. B. die Linie A = 2 Zoll, die B = 3 Zoll, die Linie C = 2 Fuß, und die D = 3 Fuß, so würden sich verhalten:

A : B = 2 Zoll : 3 Zoll = 2 : 3
C : D = 2 Fuß : 3 Fuß = 2 : 3

also A : B = C : D (§. 51. Zus II.).

Anmerkung. Bey den Proportionallinien gilt alles das, was von §. 49. bis 59. von den Proportionen überhaupt gesagt worden ist.

§. 156.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien [F. 61.].

Beweis.

Beweis. Man theile die Grundlinie AB des Parallelogramms ABDC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, hier 3, trage einen solchen Theil beliebigemal, hier 5mal, auf die verlängerte AB, aus B in E, und ergänze nun über der Grundlinie BE das Parallelogramm BEFD. Zieht man nun aus allen Theilungspuncten Linien mit der Seite AC parallel: so erhält man lauter gleiche Parallelogramme (§. 119.). Nun ist das Parallelogramm

$$ABDC = AH + KL + FD \quad = 3AH$$
$$BEFD = BN + MR + QU + PG + SF = 5BN$$
$$= 5AH.$$

Daher verhält sich

$$ABDC : BEFD = 3AH : 5AH = 3 : 5$$

aber auch $AB : BE \quad = 3 : 5$

folglich $ABDC : BEFD = AB : BE$ (§. 51. Zus.).

Zusatz I. Sind die Parallelogramme Rectangel (§. 83.): so kann man AC und BD für ihre Grundlinien, und AB, BE für ihre Höhen annehmen. Demnach verhalten sich Rectangel, also auch Parallelogramme, auf gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

Zusatz II. Da jede Diagonale das Parallelogramm halbirt (§. 115.): so verhält sich auch $\frac{1}{2}ABDC : \frac{1}{2}BEFD = AB : BE$, d. i. $\triangle ACB : \triangle BDE = AB : BE$, so daß auch Triangel von gleichen Höhen sich wie die Grundlinien, und von gleichen Grundlinien, wie die Höhen verhalten.

§. 157.

Lehrsatz. Eine gerade Linie DE [F. 63.] im Triangel ABC, einer beliebigen Seite BC parallel gezogen, schneidet die beyden andern Seiten proportionirt; auch ist eine gerade Linie DE, welche zwey Seiten des Triangels proportionirt schneidet, der dritten parallel.

Beweis.

Beweis. 1) Ist DE der BC parallel, und man zieht BE, CD, so ist △DEB = △EDC (§. 119.), folglich △ADE : △DBE = AD : DB, und △AED : △ECD = AE : EC (§. 156. Zus. II.). Weil aber △DEB = △EDC, so verhält sich auch △ADE : △DBE = AE : EC, und weil zuerst △ADE : △DBE = AD : DB, so folgt: AD : DB = AE : EC (§. 51. Zus. II.).

2) Ist AD : DB = AE : EC, so ist DE der BC parallel. Denn wäre DE nicht parallel, so muß es irgend eine andere Linie geben, welche der BC parallel ist. Diese sey DF: dann ist nach 1) AD : DB = AF : FC; aber nach der Voraussetzung AD : DB = AE : EC; daher wäre AF : FC = AE : EC (§. 51. Zus. II.), oder AF : AE = FC : EC (§. 54.), welches nicht seyn kann; daher kann auch nicht DF, sondern DE der BC parallel seyn.

Zusatz. Aus der Proportion AD : DB = AE : EC, unter 1), folgt AD + DB : AD = AE + EC : AE (§. 58. Zus. I. b.), d. i. AB : AD = AC : AE, und a) AB : AC = AD : AE (§. 54.). Weil aber aus AD : DB = AE : EC, auch AD : AE = DB : EC (§. 54.): so ist auch b) AB : AC = DB : EC.

§. 158.

Erklärung. Geradlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie

1) gleichwinklich, d. h. die Winkel der einen Figur den Winkeln der andern nach der Ordnung gleich, und

2) die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, nach der Ordnung proportionirt sind.

§. 159.

Lehrsatz. Sind in zwey Triangeln ABC, abc [F. 64.] die Winkel gegenseitig gleich: so sind auch ihre Seiten proportionirt; folglich die Triangel ähnlich.

Beweis. Es sey $A = a$, und $B = b$, folglich auch $C = c$ (§. 114. Zus.). Weil also $A = a$, so kann man den Δabc auf ΔABC legen, daß die Schenkel ab, ac auf AB, AC fallen (§. 90.), und es wird der Punct b in D, c in E fallen, und $\Delta ADE \cong \Delta abc$ (§. 93.), also auch $ADE = b$, $AED = c$ (§. 92.). Weil aber nach der Voraussetzung auch $B = b$, so ist auch $ADE = B$, folglich DE der BC parallel (§. 111.); daher (nach §. 157. Zus.) 1) $AB : AC = AD : AE = ab : ac$. Legt man den Δabc auf ΔABC dergestalt, daß der Winkel b auf den gleichen Winkel B zu liegen kommt, so ist auch $\Delta abc \cong \Delta DBF$, und $BFD = c = C$, also DF der AC parallel. Daher 2) $BC : BA = BF : BD = bc : ba$. Nach 1) ist aber $AB : AC = ab : ac$. Daher 3) $BC : AC = bc : ac$ (§. 51. Zus. II.).

§. 160.

Lehrsatz. Sind in zwey Triangeln ABC, abc [F. 65.] die Seiten proportionirt: so sind auch die Winkel gegenseitig gleich, folglich die Triangel ähnlich.

Beweis. Es sey $BA : BC = ba : bc$
und $BC : AC = bc : ac$

folglich auch $BA : AC = ba : ac$
(§. 51. Zus. II.).

Man

Man mache cbd = B, bcd = C (§. 109.), daß also auch d = A (§. 114. Zus.): so ist nach vorigem Satz △BAC ∽ △bdc, und daher 1) BA : BC = bd : bc. Nun ist nach der Voraussetzung BA : BC = ba : bc; folglich bd : bc = ba : bc, oder bc : bc = bd : ba (§. 54.). Da nun bc = bc, so ist auch bd = ba.

Ferner 2) BC : AC = bc : cd. Aber nach der Voraussetzung BC : AC = bc : ac; folglich bc : cd = bc : ac, und bc : bc = cd : ac; daher auch cd = ac.

Da hiernach bd = ba, cd = ac, bc = bc: so ist △bdc mit △bac gleichwinklich (§. 96.). Nun ist nach der Construction △bdc mit △BAC gleichwinklich; folglich ist auch △bac mit △BAC gleichwinklich.

§. 161.

Lehrsatz. Zwey Triangel ABC, abc [F. 66.], in denen ein Winkel gegenseitig gleich, und die ihn einschließenden Seiten proportionirt sind, sind auch gleichwinklich, folglich ähnlich.

Beweis. Es sey A = bac, und AB : AC = ab : ac. Macht man nun cad = A = bac, und acd = C, daß also auch d = B ist: so ist AB : AC = ad : ac (§. 159.). Nun ist nach der Voraussetzung AB : AC = ab : ac; folglich ist ad : ac = ab : ac, und ad : ab = ac : ac = 1 : 1; folglich ad = ab. Nun ist ac = ac, und dac = bac; folglich ist acd = acb = C, und adb = abc = B (§. 93.).

Anmerkung. Diese drey Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Triangel, stehen mit denen von der Congruenz derselben

selben in Verbindung, und dienen einander gegenseitig zur Erläuterung (§. 105. Anm.).

Dort wurde die Gleichheit und Aehnlichkeit zugleich, hier aber nur die Aehnlichkeit bestimmt.

Die Gleichheit der Winkel wird bey dem einen wie bey dem andern erfordert. In Absicht der Seiten war dort die Gleichheit, hier aber nur die Proportion derselben nothwendig.

§. 162.

Lehrsatz. Jeden rechtwinklichen Triangel AEB [F. 67.] theilt die Normallinie ED, von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, in zwey dem ganzen und einander selbst ähnliche Triangel AED, DEB.

Beweis. Da ADE = AEB = R, und A = A; folglich AED = B: so ist ΔADE $\backsim$ ΔAEB (§. 159.). Eben so ist BDE = AEB = R, und B = B, also auch BED = A, folglich ΔBDE $\backsim$ ΔAEB. Hiernach ΔAEB $\backsim$ ΔADE $\backsim$ ΔBDE.

Zusatz. Aus der Aehnlichkeit der Triangel folgt:

1) AE : EB = AD : DE = DE : DB.
2) AB : AE = AE : AD, und
3) AB : BE = BE : DB.

§. 163.

Aufgabe. Eine gegebne Linie AB [F. 68.] in gleichen Verhältnissen mit einer andern beliebig getheilten Linie AC zu theilen.

Auflösung. An die gegebne Linie AB lege man die in D, E getheilte AC unter beliebigem Winkel BAC; ziehe BC und mit ihr durch die Theilpuncte Parallellinien DF, EG: so wird dadurch AB in gleichen Verhältnissen mit AC geschnitten.

Beweis.

Beweis. Hier ist unmittelbar AD : DE = AF : FG und AE : EC = AG : GB (§. 157.).

Anmerkung. Diese Aufgabe findet dann statt, wenn ein Plan oder Riß auf ein vorgegebnes Blatt Pappier grösser oder kleiner getragen werden soll.

§. 164.

Aufgabe. Eine gegebne gerade Linie AB [Tab. IV. F. 69.] in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. An die gegebne AB lege man unter beliebigem Winkel A die unbegrenzte AC, und trage auf dieselbe so beliebig viel gleiche Theile, als AB haben soll, z. E. 5 Theile bis C; ziehe BC, und mit ihr durch die Theilpuncte Parallellinien DH, EK, FL, GM.

Beweis. Hierdurch wird nach §. 163. AB in gleichen Verhältnissen mit AC, also in eben so viele gleiche Theile getheilt.

§. 165.

Aufgabe. Zu drey gegebnen geraden Linien die vierte, oder zu zweyen die dritte Proportionallinie zu finden [F. 70.].

Auflösung. Man mache einen beliebigen Winkel A; trage die zwey ersten der gegebnen Linie AB, BC auf den einen Schenkel, die dritte AD auf den andern; ziehe BD, und mit ihr durch C die Parallellinie CE: so ist AB : BC = AD : DE; folglich, wenn AD = BC ist, auch AB : BC = BC : DE.

§. 166.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebnen geraden

den Linien die mittlere Proportionallinie zu finden [F. 67.].

Auflösung. Bringt man die gegebnen Linien AD, DB in eine gerade Linie AB, beschreibt aus deren Mitte C mit CA einen Halbkreis: so ist die Normallinie DE auf AB in D die gesuchte Linie (§. 162. Zus.).

§. 167.

Lehrsatz. Aehnliche Triangel ABC, DEC [F. 71.] sind in quadratischem Verhältniß ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Beweis. Bringt man die Triangel mit einem gemeinsamen Winkel z. E. C zusammen, und zieht BD: so ist $\triangle ABC : \triangle CBD = AC : CD$ (§. 156. Zus. II.), und $\triangle CBD : \triangle CDE = BC : CE$; folglich $\triangle ABC : \triangle CDE = AC \cdot BC : CD \cdot CE = (AC : CD) + (BC : CE)$ (§. 59. Zus. I.). Da aber auch $AC : CD = BC : CE$ (§. 158.): so ist $\triangle ABC : \triangle CDE = (AC : CD) + (AC : CD) = 2(AC : CD) = AC^2 : CD^2 = BC^2 : EC^2 = AB^2 : ED^2$.

Zusatz I. Zieht man die Normallinie AH aus dem Winkel A auf BC (§. 100.), und die Linie FK parallel mit BC: so ist $\triangle BAC \backsim \triangle FAK$, und $\triangle BAH \backsim \triangle FAG$ (§. 159.). Folglich $AB : AF = BC : FK$, und $AB : AF = AH : AG$; daher auch $BC : FK = AH : AG$ (§. 51. Zus. II.) und $BC : AH = FK : AG$ (§. 54.). Da nun der $\triangle BAC \backsim \triangle FAK$, so ist auch $\triangle ABC : \triangle AFK = BC^2 : FK^2 = AH^2 : AG^2$.

§. 168.

Lehrsatz. Aehnliche Figuren ABCDE, abcde [F. 72.] lassen sich in lauter Triangel zerlegen.

Beweis. 1) Ziehet man ähnlich liegende Diagonalen BE, be; EC, ec: so ist (weil $A = a$, und $EA : ea = AB : ab$) $\triangle EAB \backsim \triangle eab$, auch $EBA = eba$, und $EB : eb = BA : ba$ (§. 161.). Nun ist auch $ABC = abc$, folglich $EBC = ebc$, und $AB : ab = BC : bc = EB : eb$; folglich ist $\triangle EBC \backsim \triangle ebc$, auch $ECB = ecb$, und $EC : ec = BC : bc$ (§. 161.). Hieraus folgt wie zuvor $\triangle EDC \backsim \triangle edc$.

2) Oder nimmt man innerhalb der einen Figur einen beliebigen Punct F, und in der andern einen ähnlich liegenden Punct f (den man erhält, wenn man aus dem $\triangle FDC$ die Winkel an der Grundlinie DC an dc trägt), und ziehet von solchem Puncte gerade Linien nach allen Winkeln in beyden Figuren: so erhält man auch lauter ähnliche Triangel; denn $\triangle FDC \backsim \triangle fdc$, und $CD : cd = DF : df$ (§. 159.). Nun ist auch $CDE = cde$, also $FDE = fde$, und $CD : cd = DE : de = DF : df$; folglich ist $\triangle FED \backsim \triangle fed$ u. s. w. Hieraus folgt, wie zuvor, $\triangle FAE \backsim \triangle fae$, und so auch für die übrigen Triangel; da immer aus der Aehnlichkeit des einen Paars die Aehnlichkeit des nächstfolgenden geschlossen werden kann.

Zusatz I. Die aus ähnlichen Triangeln nach der Ordnung zusammengesetzten Figuren, ABCDE, abcde, sind ähnlich.

Zusatz II. Um auf dc eine der ABCDE ähnliche Figur zu verzeichnen, theile man diese in Triangel, mache $\triangle cde$ mit $\triangle CDE$, oder $\triangle cdf$ mit $\triangle CDF$ gleichwinklich, und verfahre mit den übrigen Triangeln auf eben die Art: so ist das Verlangte geschehen.

Zusatz III. Legt man f auf F, und fd auf FD: so fallen auch die übrigen Linien aus f und F auf einander (§. 90.), und die Seiten beyder Figuren sind parallel (§. 111.).

Zusatz IV.

Zusatz IV. Zieht man durch einen beliebigen Punct d einer Linie, wie FD, eine Parallellinie mit DC, und sofort durch c, und die übrigen hierdurch bestimmten Puncte, Parallellinien mit den übrigen Seiten: so wird die innere Figur der äußern ähnlich (§. 159.).

§. 169.

Lehrsatz. Sind zwey Figuren einander ähnlich: so verhalten sich ihre Umringe wie ein Paar ähnlich liegende Seiten, ihre Flächen aber wie die Quadrate solcher Seiten [F. 72.].

Beweis. 1) Da die Figuren ähnlich sind: so ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea (§. 158.); folglich AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab (§. 58. Zus. II.) = BC : bc (§. 158.).

2) Da die Figuren ähnlich sind, so lassen sie sich in ähnliche Triangel zerlegen (§. 168.), welche sich folglich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (§. 167.); folglich, weil alle Seiten proportionirt sind, wie die Quadrate eines Paares AB, ab verhalten, also selbst proportionirt sind. Demnach ist $\triangle$ABE : $\triangle$abe = $\triangle$EBC : $\triangle$ebc = $\triangle$EDC : $\triangle$edc, folglich ABCDE : abcde = $\triangle$ABE : $\triangle$abe = $AB^2 : ab^2$ (§. 167.) = $BE^2 : be^2$ (§. 158.).

§. 170.

Lehrsatz. Sind zwey ähnliche Figuren ABCDE, abcde [F. 74.] im Kreise beschrieben: so verhalten sich ihre Umringe wie die Halbmesser oder Durchmesser der Kreise, ihre Flächen aber wie die Quadrate solcher Halbmesser oder Durchmesser.

Beweis. Es seyn F, f die Mittelpuncte der Kreise, also AG, ag die Durchmesser, und man ziehe AC, ac, BG, bg. Da $\triangle ABC \backsim \triangle abc$, so ist $BCA = bca$ (§. 158.), und daher auch $BGA = bga$ (§. 138. Zus.). Nun ist auch $ABG = abg$ (§. 139.). Folglich ist $AB : ab = AG : ag$ (§. 159.) $= AF : af$. Nun sind die Umringe der Figur $= AB : ab$ (§. 169.), folglich auch $AG : ag = AF : af$, und ihre Flächen $= AB^2 : ab^2$ (§. 169.), folglich auch $AG^2 : ag^2 = AF^2 : af^2$.

Zusatz I. Alle reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl, folglich auch Kreise (§. 152. Zus. II.), sind ähnlich (§. 158.), und haben folglich auch obige Verhältnisse. Kreislinien verhalten sich daher wie ihre Durchmesser oder Halbmesser, Kreisflächen aber wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser.

Zusatz II. Da sich also Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser verhalten, so lassen sich nach §. 126. zwey Kreise in einen verwandeln. Wenn man die Durchmesser oder Halbmesser derselben rechtwinklich zusammen stellt: so ist die Hypotenuse dieses rechtwinklichen Triangels der Durchmesser oder Halbmesser eines Kreises, dessen Fläche gerade so groß, als die Flächen beyder Kreise zusammengenommen, ist.

Beyspiel. Man hat in einem Schacht zur Gewältigung der Grundwasser zwey Pumpen neben einander stehen, wo der Durchmesser der einen Kolbenröhre 3 Zoll, der Durchmesser der andern 4 Zoll beträgt. Nun will man aber eine einzige Pumpe einbauen, welche eben so viel Wasser heben soll. Wie groß wird der Durchmesser dieser neuen Kolbenröhre werden müssen?

Auflösung. Man quadrire beyde Durchmesser, und ziehe aus ihrer Summe die Quadratwurzel; so giebt diese die Größe des Durchmessers der Kolbenröhre (§. 125. Zus. II.). Also $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 15} = \sqrt{25} = 5$ Zoll.

Anmerkung. Der Beweis hiervon folgt weiter unten §. 200. Zus.

§. 171.

Lehrsatz. Sind durch einen Punct D [F. 75.] innerhalb des Kreises zwey Sehnen AB, FE gelegt: so geben die Abschnitte der einen die mittlern, der andern aber die äußern Glieder einer Proportion.

Beweis. Ziehet man AF, EB: so ist A = E, und F = B (§. 138. Zus.), auch A = A (§. 102.); folglich AD : FD = DE : DB (§. 159.).

Zusatz. Ist AB [T. III. F. 67.] der Durchmesser, und EF auf ihm normal: so ist in voriger Proportion FD = DE (§. 131.); folglich AD : DE = DE : DB, wie §. 162. Zus. II.

§. 172.

Aufgabe. Aus der gegebnen Sehne EF [F. 67.] eines Bogens EBF, und der Höhe DB desselben, den Durchmesser des Kreises zu finden.

Auflösung. Da nach §. 171. Zus. DB : DE = DE : AD, so darf man nur zu der gegebnen Höhe DB des Bogens EBF und der halben Sehne ED = FD (§. 171. Zus.) das dritte Proportionalglied finden, und die gefundne Zahl zu der Höhe des Bogens addiren; wodurch man den Durchmesser des Kreises erhält. Dieser halbirt, giebt den Halbmesser. Z. B.

Es sey die Höhe eines Bogens DB = 4 Zoll, die Sehne desselben EF = 12 Zoll, also die halbe Sehne DE = 6 Zoll; so ist 4 : 6 = 6 : AD, folglich AD = $\frac{6 \cdot 6}{4}$ = $\frac{36}{4}$ = 9 Zoll. Daher DB + AD = AB = 4 + 9 = 13 Zoll, und der Radius AC = BC = $\frac{13}{2}$ = 6,5 Zoll.

Anmer-

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich bey Verfertigung der Chablonen zu Mauerbögen anwenden.

Beyspiel. Es soll auf einem Stolln die Förste durch Mauerung verwahrt werden. Die Weite des Gewölbes soll 1 Elle 18 Zoll, und die Höhe desselben 6 Zoll werden. Wie lang wird der Halbmesser des Bogens zur Chablone werden müssen?

§. 173.

Lehrsatz. Gehen von einem Puncte A [T. IV. F. 76.], außerhalb des Kreises, zwey gerade Linien AB, AD durch den Kreis: so sind sie mit ihren äußern Abschnitten AE, AF umgekehrt proportionirt.

Beweis. Ziehet man BF, DE: so ist B = D (§. 138. Zus.), A = A, also auch AED = AFB (§. 114. Zus.); folglich AB : AD = AF : AE (§. 159.).

Vierter Abschnitt.

Von der Lage der Ebenen.

§. 174.

Grundsatz. Jede gerade Linie, jede zwey Parallellinien, jeder Winkel, jeder Triangel liegen in einer Ebene; oder es läßt sich durch dieselben eine Ebene legen.

Zusatz I. Durch jede drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, wird die Lage einer Ebene bestimmt.

Zusatz II. Jede gerade Linie, die zwey Parallellinien schneidet, ist mit ihnen in einer Ebene.

Zusatz III. Der Durchschnitt zweyer Ebenen ist eine gerade Linie. Ist eine von diesen Ebenen eine horizontale oder söhlige (§. 74. Anm. 2.), so ist der Durchschnitt eine horizontale oder söhlige Linie.

§. 175.

Erklärung. Eine gerade Linie ist auf einer Ebene winkelrecht oder normal, wenn sie mit allen in dieser Ebene liegenden geraden Linien, mit denen sie in Berührung kommt, rechte Winkel macht.

Zusatz. Alle Normallinien auf einer Ebene sind unter sich parallel.

§. 176.

Erklärung. Die Neigung einer Ebene gegen eine andere Ebene wird durch den Winkel zweyer auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt normal stehender Linien bestimmt.

Zusatz I. Ist dieser Neigungswinkel ein rechter, so stehen die beyden Ebenen auf einander winkelrecht; hingegen schief, wenn der Neigungswinkel ein schiefer ist.

Zusatz II. Eine Ebene durch den Neigungswinkel gelegt, steht auf den Ebenen winkelrecht.

Zusatz III. Steht eine Ebene auf einer Horizontalebene winkelrecht, so ist erstre eine senkrechte, lothrechte oder seigre Ebene, welche man auch Verticalebene nennt.

Zusatz IV. Bey Gängen nennt man den Neigungswinkel, den eine Gangebene mit der Horizontalebene macht, das Fallen des Ganges; die Linie, welche in der geneigten Ebene liegt und auf dem Durchschnitt beyder Ebenen normal steht, die Fallungslinie des Ganges.

Zusatz V. Die Länge einer gegen eine Horizontalebene geneigten Linie nennt man in der Markscheidekunst eine flache Länge oder flache Teife. Der Punct der flachen Länge, welcher die Ebene berührt, heißt der Anfangspunct, und der andere, außerhalb der Ebene liegende, der Endpunct; die winkelrechte Linie, welche man von dem Endpunct der flachen Länge auf die Ebene zieht, die Seigerteife; der Punct, wo die Seigerteife die Ebene trifft, der Seigerpunct des Endpunctes, und die Entfernung des Seigerpunctes vom Anfangspuncte, die Sohle der flachen Länge. Den Winkel, den

den die flache Länge mit der Sohle macht, nennt man den Neigungswinkel der flachen Länge.

§. 177.

Lehrsatz. Zwey Winkel BFD, HGK [F. 77.] (in verschiedenen Ebenen, aber nach einer Seite der ihre Scheitel verbindenden geraden Linien FG), deren gleichliegende Schenkel GH, FB und GK, FD parallel sind, sind einander gleich.

Beweis. Macht man FB = GH, FD = GK, und ziehet HB, BD, DK, KH: so sind BH, DK mit FG (§. 115. Zus. I.) gleich und parallel, folglich auch DB = HK. Folglich ist BFD = HGK (§. 96.).

§. 178.

Erklärung. Parallele Ebenen heißen die, welche, so weit man sie auch an allen Seiten erweitern mag, nie zusammentreffen; also keine Linie, folglich keinen Punct mit einander gemein haben.

Zusatz. Alle unter einander entfernte horizontale oder söhlige Ebenen sind einander parallel.

§. 179.

Lehrsatz. Werden zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten: so sind die Durchschnittslinien parallel.

Beweis. Träfen die verlängerten Durchschnittslinien in einem Puncte zusammen, der also in beyden Ebenen wäre: so müßten die Ebenen zusammentreffen, also nicht parallel seyn (§. 179.), welches gegen die Voraussetzung wäre.

Zusatz I.

Zusatz I. Sind die parallelen Ebenen, welche von einer dritten geschnitten werden, horizontale oder söhlige Ebenen; so sind die Durchschnittslinien auch horizontale oder söhlige Linien (§. 174. Zus. III.), folglich parallele Linien.

Zusatz II. Daher sind die Streichungslinien einer Gangebene (auf der Gangebene gezogne söhlige Linien) parallele Linien.

Zusatz III. Den Winkel, den die Streichungslinie eines Ganges mit der Mittagslinie (eine Linie, nach deren Richtung ein auf einer horizontalen Ebene senkrechter und von der Sonne gerade zur Mittagszeit beschienener Stift seinen Schatten wirft,) macht, heißt das Streichen des Ganges. Um jedoch den Winkel anzugeben, den auch andere söhlige Linien mit der Mittagslinie machen, so nennt man auch dieses, doch sehr uneigentlich, das Streichen dieser Linien (§. 142. Zus. IV.).

Fünfter Abschnitt.
Von den Körpern.

§. 180.

Erklärung. Ein Körper heißt ein nach Länge, Breite und Tiefe ausgedehnter, und an allen Seiten begrenzter Raum (§. 70.). Ein eckiger Körper wird von lauter ebenen Flächen, ein runder von einer gekrümmten Fläche ganz oder zum Theil begrenzt.

Anmerkung. Von eckigen Körpern werden hier blos das Prisma und die Pyramide, und von den runden blos der Cylinder, der Kegel und die Kugel betrachtet.

§. 181.

Erklärung. Die Ebene, über der man sich den Körper beschrieben gedenkt, heißt die Grundfläche

fläche des Körpers, der sich entweder in eine Spitze, oder noch in eine obere Grundfläche endigt. Eine Normallinie von der Spitze oder der obern Grundfläche auf die untere heißt die Höhe des Körpers. Die Flächen zwischen der Spitze, oder zwischen der obern und untern Grundfläche, heißen Seitenflächen, und die Durchschnitte jeder zwey Seitenflächen heißen Seitenlinien oder Kanten. Ein zum Theil runder Körper hat eine gekrümmte Seitenfläche, ein ganz runder Körper aber eine gekrümmte Oberfläche.

§. 182.

Erklärung. Eine Ecke des Körpers oder ein körperlicher Winkel wird von mehr als zwey ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB [F. 78*.], die alle in verschiednen Ebenen liegen, an ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte A eingeschlossen.

Zusatz I. Die Beschaffenheit einer Ecke beruhet auf der Anzahl und Größe der die Ecke einschließenden ebenen Winkel, und auf deren Neigungen gegen einander.

Zusatz II. Die Summe der ebenen Winkel, welche einen körperlichen Winkel einschließen, ist allemal kleiner als vier rechte Winkel (§. 101. Zus.).

§. 183.

Erklärung. Zwey Ecken passen in einander oder sind congruent, wenn sie von gleich viel nach der Reihe gleichen und ähnlich geneigten ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

Zwey Körper sind congruent oder passen in einander, wenn sie von gleich viel nach der Reihe congruenten und ähnlich geneigten ebenen Figuren begrenzt werden.

§. 184.

Erklärung. Aehnliche Körper, ABDC, abdc [F. 78*.], heißen die, welche von gleich vielen, nach der Reihe ähnlich geneigten ebenen Figuren eingeschlossen werden.

§. 185.

Erklärung. Reguläre Körper heißen solche, die durch lauter congruente reguläre Figuren, welche lauter congruente Ecken machen, begrenzt werden; und zwar wird ein Hexaeder oder Würfel von sechs gleichen Quadraten, ein Tetraeder von vier gleichen gleichseitigen Triangeln, ein Octaeder von acht dergleichen, ein Ikosaeder von zwanzig dergleichen, ein Dodekaeder von zwölf gleichen regulären fünfseitigen Figuren begrenzt.

Anmerkung. Warum es nicht mehr reguläre Körper giebt, erfolgt aus §. 146. Zus. I. und §. 182. Zus. II.

§. 186.

Erklärung. Ein Prisma ist der körperliche Raum zwischen zwey geradlinigen, parallelen und congruenten Figuren HGK, BFD [F. 77.] (den Grundflächen), und so viel Parallelogrammen BG, FK, BK (den Seitenflächen), als eine der Grundflächen Seiten hat.

Oder: Ein Prisma wird von einer geradlinigen Figur BFD beschrieben, die sich so bewegt, daß einer ihrer Winkelpuncte B in einer geraden Linie BH so fortrückt, daß sich die Ebene der Figur stets parallel bleibt.

Anmerkung. Nach der Zahl der Seitenflächen oder der Seiten der Grundflächen, heißt das Prisma, drey-, vier-, vielseitig.

§. 187.

Aufgabe. Ein Prisma zu beschreiben [F. 77.].

Auflösung. Man stelle auf eine beliebige geradlinige Figur BFD in einem ihrer Winkelpuncte B willkührlich eine gerade Linie BH; ziehe mit derselben durch die übrigen Winkelpuncte F, D gleichlange Parallellinien FG, DK, und verbinde die Puncte H, G, K durch gerade Linien HG, GK, HK: so entsteht ein Prisma.

Beweis. Denn da BH mit FG, FG mit DK, DK mit BH parallel und gleich ist, so ist auch HG mit BF, GK mit FD, HK mit BD parallel und gleich (§. 115. Zus. I.). Folglich sind die Seitenflächen BG, FK, BK Parallelogramme und gleich. Nun sind auch die Grundflächen BFD, HGK parallel, folglich auch die Winkel FBD = GHK, u. s. w. (§. 177.); also sind die beyden parallelen Grundflächen congruent; folglich ist der Körper ein Prisma.

Zusatz. Ein Prisma mit einer Ebene der Grundfläche parallel durchschnitten, giebt eine der Grundfläche gleiche und ähnliche Figur.

§. 188.

Erklärung. Ist die Seite BH [F. 77.], also auch FG, KD auf der Grundfläche BFD winkelrecht: so heißt das Prisma gerade, sonst aber schief. Die Seite des geraden Prisma ist zugleich seine Höhe (§. 181.).

§. 189.

Erklärung. Ein Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind [F. 78.].

Anmerk

Anmerkung. Es ist gleichviel, welche gegenüberstehende Seiten eines Parallelepipedums man als die Grundflächen betrachten will.

§. 190.

Erklärung. Ein rechtwinkliches Parallelepiped heißt solches, welches gerade ist (§. 188.), und Rectangel zu Grundflächen hat; oder, welches von sechs Rectangeln eingeschlossen ist.

§. 191.

Erklärung. Ein Würfel oder ein Hexaeder ist ein Prisma, das von sechs gleichen Quadraten eingeschlossen ist.

§. 192.

Lehrsatz. Zwey Parallelepipede von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich groß [F. 79.].

Beweis. Es sey DBGN ein schiefes Parallelepiped. Man errichte auf seiner Grundfläche FCNG ein rechtwinkliches (§. 190.) EAGN, von derselben Höhe (§. 181.); so werden die gleich großen Stücke EBCF, LKGN (§. 183.) nur mit einander verwechselt, und erstres an die Stelle des letztern gebracht. Und so umgekehrt.

§. 193.

Lehrsatz. Alle Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen körperlichen Inhalt, oder sind gleich groß.

Beweis. Da ein Prisma nicht immer ein Parallelogramm zur Grundfläche hat, so verwandle

man

man seine Grundfläche, die etwa aus einem oder mehrern Triangeln besteht, in ein Parallelogramm (§. 124. Anm.): so erhält man ein Parallelepiped, dessen Grundfläche eben so groß, als die des drey oder vielseitigen Prisma's. Da nun die Höhen in beyden gleich genommen sind, so wird das Parallelepiped mit demselben gleichen Inhalt haben (§. 192.).

Zusatz I. Theilt man die Seite AB der Grundfläche AC eines Parallelepipeds AF in gleiche Theile, etwa 8, und legt durch alle Theilpuncte mit AE parallele Ebenen: so entstehen lauter gleich große Parallelepipede (§. 192.). Enthält nun die AH etwa 3 gleiche Theile, also das Parallelepiped EH 3 kleinere gleich große Parallelepipede, und HB, 5 gleiche Theile, also das Parallelepiped DB 5 kleinere gleich große Parallelepipede: so verhält sich EH : DB = 3 : 5. Aber auch die Grundflächen dieser Parallelepipede, nämlich AK : HC = 3 : 5. Also EH : DB = AK : HC, d. h. 1) Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen [F. 78.].

Ist AF ein rechtwinkliches Parallelepiped, so können AH, HB die Höhen der Parallelepipede EH, DB vorstellen. Da aber dann diese Parallelepipede gleiche Grundflächen haben, so verhalten sich 2) Parallelepipede von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

Zusatz II. Da sich jedes Parallelepiped in zwey dreyseitige Prismen, und jedes vielseitige Prisma in so viel dreyseitige Prismen, als die Grundfläche Triangel enthält, zerlegen läßt: so verhalten sich überhaupt 1) Prismen von gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen, und 2) Prismen von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen.

§. 194.

Erklärung. Eine Pyramide ist der körperliche Raum zwischen einer geradlinigen Figur BCD [F. 78*.] (der Grundfläche), und so vielen Triangeln (den Seitenflächen), als die Grundfläche Seiten hat, welche alle in einem Puncte (der Spitze) sich vereinigen.

Anmer-

Anmerkung. Die Pyramide wird eben so, wie das Prisma nach der Zahl der Seiten der Grundfläche bestimmt. Eine Normallinie AG von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

§. 195.

Lehrsatz. Jeder Schnitt HEK [F. 78*.] durch die Pyramide, der mit der Grundfläche parallel geführt wird, ist der Grundfläche BDC ähnlich.

Beweis. Denn durch den parallelen Schnitt entstehen auf den Seitenflächen parallele Linien HE und BD, EK und DC, HK und BC; folglich jeder Winkel des Durchschnitts dem gleichnamigen Winkel der Grundfläche gleich, KHE = CBD (§. 177.), auch die gleichnamigen Seiten in beyden Figuren proportionirt, weil AH : AB = HK : BC = HE : BD (§. 157.); folglich ist der Schnitt HEK der Grundfläche BDC ähnlich (§. 158.).

Zusatz. Von der Spitze A ziehe man die Normale AG auf die Grundfläche BDC, welche daher auch auf dem Schnitt HEK normal seyn muß, daß also AF, AG die Entfernungen der beyden Figuren von der Spitze sind: so sind die Durchschnitte HF, BF auch parallel (§. 179.), und es ist AH : AB = AF : AG = HF : BG (§. 157.). Daher ist wegen der Aehnlichkeit der beyden Figuren (§. 158.) der Schnitt zur Grundfläche, also $\triangle HEK : \triangle BDC = HE^2 : BD^2$ (§. 169) $= HF^2 : BG^2 = AF^2 : AG^2$, d. i. wie die Quadrate der Entfernungen von der Spitze.

§. 196.

Lehrsatz. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Beweis. Sollten die Pyramiden noch nicht dreyseitig seyn; so verwandle man sie in solche, und behalte Grundfläche und Höhe bey (§. 124.). Die

durch

durch dieselben in gleicher Höhe mit der Grundfläche parallelen Schnitte werden in allen gleich seyn; denn sie sind mit den einander gleichen Seiten der Grundflächen parallel und proportional. Durch solche Schnitte entstehen Pyramidenstücke, die man, wenn ihre Höhe sehr unbedeutend ist, für Prismen ansehen kann. Weil aber diese unter solchen Umständen gleich sind (§. 193.), so müssen es auch die Pyramidenstücke seyn, und da die ganze Pyramide aus solchen Theilen bestehet, so müssen auch die Pyramiden selbst gleich seyn.

§. 197.

Lehrsatz. **Jede dreyseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe [F. 80.].**

Beweis. Man ziehe die Diagonalen BD, AF, BF der Seitenflächen AE, DC, CE.

Da ABED ein Parallelogramm: so ist △ADB = △BED (§. 115.); folglich sind die Pyramiden ABDF, DBEF, deren gemeinschaftliche Spitze F ist, einander gleich (§. 196.). Nun haben aber die beyden Pyramiden ABCB, DEFB, gleiche Grundflächen ABC, DEF (§. 186.), und weil diese Grundflächen auch parallel liegen, auch einerley Höhe: folglich sind auch die Pyramiden ABCF, DEFB einander gleich.

Daher Pyr. ABDF = Pyr. DFEB = Pyr. ABCF; folglich jede der dritte Theil des Prisma's ABDEFC.

Zusatz. Da sich ein vielseitiges Prisma in so viele dreyseitige Prismen theilen läßt, als Triangel in der Grundfläche sind: so ist auch die vielseitige Pyramide der dritte Theil

Theil des vielseitigen Prisma's von eben der Höhe, über eben der Grundfläche. Auch gelten hier die Verhältnisse des §. 193. Zu. II. Nämlich Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen.

§. 198.

Erklärung. Ein Cylinder oder eine Walze ist der körperliche Raum zwischen zwey gleichen und parallelen Kreisen (den Grundflächen) und einer an die Peripherien beyder Kreise gelegten krummen Fläche (der Seitenfläche), so daß jene dadurch mit einander verbunden sind [F. 81.].

Eine gerade Linie AB von dem Mittelpunct des einen Kreises bis zu dem andern heißt die Axe des Cylinders. Steht die Axe auf der Grundfläche winkelrecht, so heißt der Cylinder ein gerader, wenn dieß nicht ist, ein schiefer.

Zusatz. Jeder Schnitt CK durch die Axe des Cylinders AB, ist ein Parallelogramm, und wenn der Cylinder gerade ist, ein Rectangel.

§. 199.

Lehrsatz. Jeder Schnitt FML, der durch den Cylinder parallel mit der Grundfläche DK geführt wird, ist ein der Grundfläche gleicher Kreis, und sein Mittelpunct E in der Axe AB.

Beweis. Da jede Seite des Cylinders, wie CD, der Axe AB parallel ist (§. 198. Zus.): so schneidet eine Ebene durch AB, CD die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien AD, EF (§. 179.), die also gleich sind (§. 115.). Eben so beweißt man, daß AH = EM, und AK = EL. Da

nun

nun AD = AH = AK, so ist auch EF = EM = EL; folglich ist F im Umfange eines Kreises, der E zum Mittelpuncte, und EF = AD zum Halbmesser hat.

§. 200.

Aufgabe. Den Cylinder mit dem Prisma zu vergleichen.

Auflösung. Man kann sich die Grundfläche eines Cylinders auch als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten vorstellen (§. 152. Zus. II.). Demnach zerfiele die krumme Seitenfläche des Cylinders in unendlich viele Parallelogramme, deren Grundlinien klein, die Höhen gleich der Axe des Cylinders wäre. Der Cylinder wird also einem Prisma von unendlich vielen Seiten gleich seyn.

Zusatz. Von dem Cylinder muß also dasselbe gelten, was vom Prisma gilt (§. 193.). Also Cylinder von gleichen Höhen und Grundflächen sind gleich; und Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen (§. 193. Zus. II.), oder wie die Quadrate ihre Durchmesser oder Halbmesser (§. 170. Zus. I.). Auf diesem Satze beruht die Aufgabe des §. 170. Zus. II.

§. 201.

Erklärung. Ein Kegel ist der körperliche Raum zwischen einem Kreise (der Grundfläche) und einer krummen Fläche (der Seitenfläche), welche um die Peripherie jenes Kreises so gelegt ist, daß sie außerhalb desselben einen Punct A (die Spitze) trifft, von dem lauter gerade Linien AB, AD (die Seiten) nach dem Umfange der Grundfläche gezogen werden können, welche ganz in die Seitenfläche fallen.

Eine

Eine gerade Linie AC, von der Spitze nach dem Mittelpunct der Grundfläche, heißt die Axe des Kegels. Ist die Axe AC winkelrecht auf der Grundfläche, so heißt der Kegel ein **gerader**, und wenn dieß nicht ist, ein **schiefer**.

Zusatz. Jeder Schnitt des Kegels KAB durch die Axe AC ist ein Triangel, und wenn der Kegel gerade ist, ein gleichschenklicher Triangel; weil $\triangle ACB \cong \triangle ACK$; folglich $AB = AK$ ist.

§. 202.

Lehrsatz. Jeder Schnitt FGH durch den Kegel, der parallel mit der Grundfläche BDK geführt wird, ist ein Kreis, und sein Mittelpunct E in der Axe AC.

Beweis. Die Ebenen ACB, ACD schneiden die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien CB, EF und CD, EG (§. 179.); daher $AC : AE = CB : EF = CD : EG$ (§. 157.). Nun ist $CB = CD$; folglich ist auch $EF = EG$, u. s. w. Demnach sind F, G u. s. w. im Umfange eines Kreises, der E zum Mittelpuncte, und EF zum Halbmesser hat.

Zusatz. Der Schnitt des Kegels FH verhält sich zur Grundfläche BK, wie $EF^2 : CB^2$ (§. 170. Zus. I.); folglich auch wie $AE^2 : AC^2$ (vergleiche §. 195. Zus.).

§. 203.

Aufgabe. Den Kegel mit der Pyramide zu vergleichen.

Auflösung. Da die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, und man sich diesen als ein Polygon von unendlich vielen Seiten vorstellen

kann

kann (§. 152. Zus. II.): so denke man sich die Grundfläche des Kegels als ein solches Polygon, die krumme Seitenfläche aber als aus so vielen Triangeln bestehend, als die Grundfläche Seiten hat, die sich alle in der Spitze des Kegels als in einem Puncte vereinigen. Der Kegel wird daher wie §. 200. einer Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen gleich seyn.

Zusatz I. Der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche.

Zusatz II. Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich (§. 200. Zus.). Ferner verhalten sich Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen (§. 197. Zus.).

§. 204.

Erklärung. Eine Kugel ist der körperliche Raum, welchen ein Halbkreis beschreibt, der sich rings um seinen unverrückten Durchmesser bewegt.

Zusatz I. Jeder Schnitt der Kugel durch den Mittelpunct ist folglich ein Kreis, und jeder Theil der Kugelfläche ist vom Mittelpuncte gleich weit entfernt. Ferner stellt jede gerade Linie von einem Punct der Kugelfläche durch den Mittelpunct nach einem andern einen Durchmesser der Kugel dar.

Zusatz II. In einer Kugel oder gleichen Kugeln sind alle Durchmesser, folglich alle Halbmesser gleich.

Zusatz III. Ein Kreis, dessen Mittelpunct mit dem eines Kugelschnitts zusammentrifft, heißt hier ein größter Kreis; denn jeder andere, dessen Mittelpunct mit dem der Kugel nicht zusammentrifft, ist kleiner (§. 133.).

§. 205.

Lehrsatz. Die Kugel ist zwey Drittel eines Cylinders, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind [F. 83.].

Beweis. Wenn das Rechteck ABGD, welches den Halbkreis AWB umgiebt, sich um die unbewegbewegliche Normallinie WC drehet: so beschreibt ABGD einen Cylinder, DCG einen Kegel, und AWB eine Halbkugel. Da alle diese drey Körper einerley Höhe WC haben; so folgt, daß man aus dem einen eben so viele dünne Scheiben wird schneiden können, als aus dem andern und dritten, wenn man jeder Scheibe einerley Höhe oder Dicke giebt. Man nehme daher an, daß alle drey Körper parallel mit den Grundflächen durchschnitten würden, und die Schnitte eine unmerklich kleine Entfernung von einander hätten, so müßte nicht nur der Cylinder, sondern auch der Kegel und die Halbkugel dadurch in lauter kleine Cylinder von einerley Höhe zergliedert werden. Es sey nun UV parallel mit AB, folglich auch mit DG, so stellt OM den Halbmesser eines Durchschnitts im Kegel, ON den Halbmesser eines Durchschnitts in der Halbkugel, und OV selbst den Halbmesser eines Durchschnitts im Cylinder vor. Da aber, wegen Aehnlichkeit der Triangel COM, CWG (§. 159.), die Seite $OM = OC$, weil $CB = WG = WC$; so ist, weil im rechtwinklichen Triangel NOC nach §. 125. $CN^2 = CO^2 + ON^2$, auch $CB^2 = OV^2 = OM^2 + ON^2$. Weil sich nun Cylinder von einerley Höhen, wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten (§. 200. Zus.), so müssen die beyden kleinen Glieder, deren Halbmesser OM und ON sind; d. i. ein Theil des Kegels und ein Theil der Halbkugel zusammengenommen, einem Theile des Cylinders, welcher eben die Höhe und zum Halbmesser OV hat, nothwendig gleich seyn. Da dies nun von allen übrigen Scheiben gilt, daß nämlich überall ein Theil des Kegels nebst einem Theile der Halbkugel so groß, als ein Theil des Cylinders ist: so muß auch der ganze Kegel und die ganze Halbkugel zusammen dem ganzen Cylinder gleich seyn. Es ist aber der Kegel, welcher einerley Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder hat, $\frac{1}{3}$ von dem Cylinder (§. 203. Zus. I.). Folglich muß die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder enthalten, dessen Durchmesser AB dem Durchmesser der Halbkugel, und dessen Höhe WC dem Halbmesser der Halbkugel gleich ist. Also die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind.

Zusatz. Man kann sich die Kugel als aus unzählig viel kleinen Pyramiden zusammengesetzt vorstellen, deren Grundflächen an der Oberfläche der Kugel, die Spitzen aber im Mittelpunct sich vereinigen. Alle diese Pyramiden sind einer einzigen Pyramide gleich, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und deren Höhe der Halbmesser der Kugel ist.

Sechster Abschnitt.

Von den geometrischen Messungen.

Erstes Kapitel.

Messung der Figuren.

§. 206.

Erklärung. Messen heißt, das Verhältniß einer Größe gegen eine andere Größe derselben

Art, die man das Maas nennt, durch eine Zahl angeben.

Zusatz. Zur Messung eines Winkels bedient man sich daher wieder eines Winkels (§. 142. Zus. II.), zur Ausmessung einer Linie wieder einer Linie, zur Ausmessung einer Fläche wieder einer Fläche, und zur Ausmessung eines Körpers wieder eines Körpers.

Anmerkung. Zur Ausmessung der Winkel hat man mehrere Instrumente, wovon hier aber nur die Boussole oder der Compaß (§. 142. Zus. IV.) erwähnt werden soll, weil selbiges Instrument für den Bergmann das bequemste ist. Da man die Beschaffenheit und Behandlung desselben besser aus dem mündlichen Unterrichte lernt: so ist eine Beschreibung und Abbildung davon überflüssig. Um über Tage oder auf dem Felde mittelst des Compasses Winkel zu messen, so befestiget man ihn gewöhnlich auf ein leichtes Stativ, oder bey ohngefähren Winkelbestimmungen hält man ihn frey in der Hand.

§. 207.

Aufgabe. Einen Winkel über Tage oder auf dem Felde mittelst des Compasses zu messen [F. 84.].

Auflösung I. Es sey der Winkel BcA. Man bringe den Mittelpunct des Compasses über den Scheitel c des auszumessenden Winkels BcA, und stelle ihn mittelst einer kleinen Setzwaage horizontal.

Nun wende man den Compaß so herum, daß der auf dem Boden des Compasses mit N bezeichnete Punct, welcher in der 12ten Stundenlinie liegt, nach dem Objecte B zu liegt, und drehe den Compaß so lange, bis die verlängerte 12te Stundenlinie SN auf das Object in B trifft, welches man leicht mittelst ein Paar Dioptern, welche genau in der Verticalebene der 12ten Stundenlinie angebracht sind, erhalten kann.

In dieser Lage lüftet man nun vermittelst des Schiebers, der an jedem Compaß angebracht ist, die Nadel, läßt sie in Ruhe kommen, und bemerkt hierauf, welche Weltgegend, wie viel Stunden und Theile die nördliche Spitze auf dem Ringe anzeigt; hier z. B. NO 2,3 (§. 142. Zus. IV.).

Hierauf wende man das Instrument, bis die verlängerte 12te Stundenlinie das Object in A trifft, lasse die Nadel ebenfalls in Ruhe kommen, und bemerke abermals die Weltgegend, Stunden und Theile, z. B. SO 6,2.

Auflösung II. Oder man verfährt auch so: Man schlägt in dem Scheitel c, so wie in den Richtungen der Schenkel cB, cA, etwa in D und E, senkrechte Pfähle ein, in deren Köpfen man messingene Holzschrauben einschraubt. Von D bis c, so wie von c bis E, zieht man nun eine Schnur sehr straff an, welche man an jeder Schraube jedesmal umwickelt, damit die Schnur nicht zurückgeht, so stellen diese Schnüre die Schenkel des Winkels vor.

Den Compaß hält man nun in söhliger Lage entweder an jede Schnur an, so, daß die 12te Stundenlinie des Compasses entweder in die Axe der Schnur fällt, oder mit ihr parallel geht; oder man hängt den Compaß, mittelst eines Gehäuses, das mit Haken versehen und in welchem Gehäuse er vermöge seiner Schwere sich selbst horizontal stellt, an die Schnur Dc an, jedoch jedesmal so, daß der Punct N der 12ten Stundenlinie vorausgeht, so giebt die Nadel, sobald sie ruhig ist, die Lage und Winkel des Schenkels Bc gegen die (magnetische) Mittagslinie an. Eben so verfährt man an der Schnur oder Schenkel Ec.

Anmer-

Anmerkung 1. Letzterer Methode muß man sich unter Tage oder in der Grube zur Winkelmessung bedienen, wo man die Schrauben auf geschlagne Spreitzen einschraubt, um die Schnur daran zu befestigen.

Anmerk. 2. Zur ohngefähren Winkelbestimmung nimmt man den Compaß in die Hand, und richtet die 12te Stundenlinie in den Schenkel des Winkels ein.

Anmerk. 3. Da alle Figuren im Grundriß auf einer Ebene, wozu man die Horizontalebene gewählt hat, gezeichnet werden, also alle Linien und Winkel söhlige oder horizontale Winkel seyn müssen; so folgt daraus, warum man beym Winkelmessen den Compaß jedesmal so viel als möglich horizontal halten muß, weil man dadurch sogleich den söhligen Winkel erhält (§. 177. 179. Zus.).

§. 208.

Aufgabe. Einen über Tage gemessenen Winkel auf das Pappier zu bringen, oder den Winkel zuzulegen [F. 85.].

Auflösung I. Soll der in voriger Aufgabe gemessene Winkel BcA zugelegt werden; so setze man den Compaß auf das Pappier, und drehe ihn so lange, bis die nördliche Spitze der Magnetnadel auf Stunde 12 bey dem Puncte N einspielt. Ist sie ruhig; so ziehe man an der Seite der Platte, welche mit der 12ten Stundenlinie parallel geht, eine Linie NS für die Mittagslinie.

Nun nehme man, nachdem man das Pappier befestigt hat, einen Punct c an, lege an selbigen die Seite des Compasses, die mit der 12ten Stundenlinie parallel geht, und drehe selbige so lange bis die Nadel NO 2,3 einspielt. Ist die Nadel ruhig, so ziehe man an dieser Seite nach dem Puncte N der 12ten Stundenlinie zu eine feine Linie mit Bleystift cb.

Drehe

Dreht man nun an c dieselbe Seite des Compasses so lange, bis die Nadel auch SO 6,2 einspielt und zieht die Linie ca am Rande des Compasses ebenfalls nach dem Puncte N der 12ten Stundenlinie zu: so hat man auf diese Art den gemessenen Winkel zugelegt. Die Gleichheit der gemessenen und zugelegten Winkel folgt aus §. 142. Zus. IV.

Auflösung II. Man nehme auf dem Pappiere eine Linie NS für die Mittagslinie, und in derselben einen Punct c an, an welchen man mittelst des Transporteurs nach §. 143. Zus. die gemessenen Winkel tragen kann.

Auflösung III. Oder man zeichne auf ein Blatt Pappier die Eintheilung des Compasses und die wahren Weltgegenden, [wie Fig. *,] befestige diese Zeichnung mit Wachs aufs Pappier. Man lege nun einen hölzernen Winkel in den Quadranten NO auf St. 2,3, und schiebe diese Linie nach §. 112. Anm. in den auf dem Pappiere angenommenen Punct c [F. 85.] ab. Legt man nun den Winkel in den Quadranten SO an St. 6,2, und schiebt auf vorige Weise diese Linie auch in c ab: so erhält man den Winkel bca, und, wenn man in c auch die Lage der Mittagslinie NS abschiebt, die richtige Lage der Schenkel bc und ac gegen die Mittagslinie.

§. 209.

Erklärung. Um den Neigungswinkel einer Ebene gegen eine Horizontalebene (§. 176.) oder den Neigungswinkel einer Linie gegen eine Horizontalzontalebene zu finden, bedient man sich des Gradbogens, eines in zweymal 90 Grade eingetheilten Halbkreises, aus dessen Mittelpunct ein an einem Faden befestigtes Loth den Neigungswinkel an dem Rande desselben abschneidet. An den Enden des Halbmessers sind Haken angebracht, um den Gradbogen erforderlichen Falls aufhängen zu können.

§. 210.

Aufgabe. Den Neigungswinkel ACB [F. 88.] einer schief angespannten oder flachen Schnur AC gegen eine söhlige Ebene oder Linie CB zu finden.

Auflösung. Man hänge den Gradbogen EF in der Mitte der Schnur AC auf; so schneidet das Loth EL einen Bogen oL ab, der das Maas des Winkels GEH = ACB ist. So viel Grade und Theile also das Loth am Rande abschneidet, so groß ist auch der Winkel ACB.

Denn da MFN ein Halbkreis, und Bog. MF = Bog. NF = 90°: so ist der Halbmesser EF auf MN normal; folglich CEG ein rechtwinklicher Triangel, und der Winkel CEG ein rechter Winkel (§. 142. Zus. II.).

Da ferner das Loth EL, also auch seine Verlängerung EH, auf der Horizontalebene oder Horizontallinie CB senkrecht steht: so ist nach §. 162. der Winkel HEG = ECH = ACB.

Zusatz I. Da die Winkel C und EGC einander zu 90 Grad ergänzen (§. 114.), und die verlängerte GE die AC rechtwinklich schneidet: so muß auch umgekehrt jede Linie KG auf einer andern AC normal stehen, wenn der erstern Linie KG Neigungswinkel EGC mit dem Neigungswinkel ECG der andern Linie AC zusammen 90° macht.

Hierauf

Hierauf gründet sich die Legung der Einstriche in Schächten. Ist z. B. die Tonnenlage des Schachtes (Winkel, welchen der Schacht mit der Horizontalebene oder einer söhligen Ebene macht,) 60 Grad, so wird der Einstrich unter einem Winkel von $90° - 60° = 30$ Grad gelegt.

Zusatz II. Denkt man sich an dem hangenden Saalband eines Ganges die Fallungslinie des Ganges (§. 176. Zus. IV.), und hält nach der Richtung derselben den Gradbogen an; so schneidet das Loth am Rande des Gradbogens das Fallen des Ganges ab, oder den Winkel, welchen die Gangebene mit der Horizontalebene macht.

§. 211.

Wahlsatz. Zur Ausmessung gerader Linien bedient man sich eines Maases, man nennt es eine Ruthe, den zehnten Theil der Ruthe einen Fuß, den zehnten Theil des Fusses einen Zoll, und den zehnten Theil des Zolles eine Linie. Diese Eintheilung nennt man das zehntheilige oder Decimalmaas.

Nach dem zwölftheiligen oder Duodecimalmaas bestehet die Ruthe aus 12 Fussen, der Fuß aus 12 Zollen, der Zoll aus 12 Linien.

Die Ruthen bezeichnet man mit °, die Fusse mit ', die Zolle mit '', und die Linien mit '''. Z. B. $7°, 3', 4'', 5'''$ heißt: 7 Ruthen, 3 Fuß, 4 Zolle, 5 Linien.

Zusatz. In Sachsen nimmt man bey Ausmessung der Grundstücke die Ruthe zu 7 Ellen 14 Zollen Leipziger Maas, und beym Straßenbau die Ruthe zu 8 Ellen an.

Beym Bergbau hat man das Lachter, welches $3\frac{1}{2}$ Elle oder 7 Leipziger Fuß hält. Man sehe Beylage I. zur Arithmetik, erster Cursus.

Anmerkung. Die Lachter, Achtel, Zolle ꝛc. bezeichnet man ebenfalls wie die Ruthen, Fusse, Zolle ꝛc.

§. 212.

§. 212.

Aufgabe. Die Ruthe und das Lachter mit einander zu vergleichen.

Auflösung. Kennt man die Eintheilungsarten dieser Maase: so verfahre man nach Arithmetik §. 91. des ersten Cursus. Oder da

die Ruthe 7 Ellen 14 Zoll $=$ 182 Leipziger Zoll,
das Lachter 7 Fuß $=$ 84 " "
so ist 1 Ruthe : 1 Lachter $= 182 : 84 = 13 : 6.$

Also 6 Ruthen $=$ 13 Lachter.

Anmerkung. Um Zehntellachter in Achtellachter, oder umgekehrt, Achtellachter in Zehntellachter zu verwandeln: so darf man nur im ersten Falle die Zehntellachter mit 0,8 multipliciren, und im zweyten Falle die Achtellachter mit 0,8 dividiren. Z. B. $\frac{5}{10}$ Lr. $= 0,8 \cdot 5 = 4,0$ $=$ 4 Achtellachter, und $\frac{6}{8}$ Lr. $= \frac{6}{0,8} = 7,5 = \frac{7}{10}$ Lachter 5 Zolle.

§. 213.

Aufgabe. Einen verjüngten Maasstab zu verzeichnen, welcher dient, gerade Linien auf dem Pappiere zu messen und aufzutragen [Tab. V. F. 86. 87.].

Auflösung. In Fig. 86. bedeute BC eine Ruthe, und in Fig. 87. ein Lachter, die man auf die Linie AK aus B bis A beydemal 10mal trägt; so bedeutet im ersten Falle BA 10 verjüngte Ruthen, im zweyten 10 verjüngte Lachter. Auf BA errichte man in A die Normallinie Ao, auf welcher man beliebig AL nimmt, und so oft aufträgt, als Theile in BC enthalten seyn sollen. Durch die erhaltenen Theilpuncte lege man Linien mit AB parallel, und ziehe, nachdem aus G bis o auch 10mal

BC getragen, die parallelen Transversallinien Bg, C2, u. s. w.; so ist das Verlangte geschehen. Denn da nach der Construction auch Gg = g2 u. s. w. = BC gemacht wird: so ist nach §. 164. in Fig. 86. Dd = $\frac{1}{10}$ BC = 1 Fuß; Ee = $\frac{2}{10}$ BC = 2 Fuß u. s. w., und in Fig. 87. Dd = $\frac{1}{8}$ BC = 1 Achtel; Ee = $\frac{2}{8}$ BC = 2 Achtellachter u. s. w.

Anmerkung. Die schicklichste Größe des Maasstabes richtet sich nach den jedesmaligen Absichten und der Größe des Raums.

Auf unsern Grubenrissen rechnet man auf 1 Leipziger Zoll 10 verjüngte Lachter.

§. 214.

Erklärung. Eine verticale Fläche (§. 176. Zus. III.) errichten, heißt eine gerade Linie abstekken; und deren Größe finden, heißt die gerade Linie messen. Eine gerade Linie auf dem Pappiere heißt dieser auf dem Felde gemäß, wenn sie nach dem verjüngten Maasstabe so groß, als nach der Ausmessung auf dem Felde ist.

Zusatz I. Sind von mehrern ausgesteckten Stäben, jede drey unmittelbar auf einander folgende in einer lothrechten Ebene (wozu man sich eines Bleylothes bedient): so sind alle diese Stäbe in dieser lothrechten Ebene; weil nach dieser Voraussetzung jeder erste und vierte Stab mit dem dritten und zweyten in einer lothrechten Ebene ist.

Hieraus sieht man, wie man verfahren muß, um gerade Linien auf dem Felde abzustecken.

Zusatz II. Um gerade Linien zu messen, so bedient man sich hierzu entweder einer geraden hölzernen Stange (Maasstab) oder der Meßkette, mit welcher das Messen viel schneller, als mit dem Maasstabe bewerkstelliget wird.

Anmerkung. Jede Meßkette ist gewöhnlich 5 Ruthen oder Lachter lang. Die einzelnen Ruthen oder Lachter werden durch besondere Zeichen oder große Ringe, einzelne Fusse oder Achtellachter durch kleinere Ringe bemerkt, und an beyden Enden sind ganz weite Ringe, wodurch die ganze Meßkette gehörig ausgespannt wird.

§. 215.

§. 215.

Aufgabe. Es ist eine flache Länge GH [T. I. F. 7.] und ihr Neigungswinkel G bekannt; man soll daraus die Seigerteife HK und Sohle GK (§. 176. Zus. V.) der Länge GH finden.

Auflösung. Auf eine gerade Linie GK trage man den gegebnen Neigungswinkel G (§. 143. Zus.), so wie vermittelst des verjüngten Maasstabes die Länge der Linie GH aus G in H. Fällt man nun von H aus auf GK eine Normallinie HK (§. 100.): so ist HK die Seigerteife und GK die Sohle der Linie GH, welche Linien man nun vermittelst des verjüngten Maasstabes messen kann.

Zusatz I. Wäre GH die flache Teife eines Schachtes, G die Tonnenlage (Neigungswinkel) des Schachtes; so würde HK die Seigerteife und GK die Sohle des Schachtes seyn.

Zusatz II. Umgekehrt kann man aus der gegebnen Sohle GK und Seigerteife KH den Neigungswinkel G und flache Teife GK finden, wenn man erstre beyden Linien GK, KH auf die Schenkel eines rechten Winkels trägt, die flache Teife GH mittelst des verjüngten Maasstabes und den Winkel G mit dem Transporteur mißt (§. 143.).

Auch kann man in diesem Falle die flache Teife GH mittelst des Pythagorischen Lehrsatzes berechnen (§. 125. Zus. I. und II.).

Zusatz III. Die dem Neigungswinkel gegenüberstehende Kathete (§. 125.) giebt stets die Seigerteife, und die an dem Neigungswinkel anliegende Kathete die Sohle, welche auch den Grundriß der Linie giebt.

Die im §. 215. angeführte Aufgabe lehrt also aus der Länge einer flachen Schnur und ihrem Neigungswinkel die Sohle und Seigerteife derselben finden. Weiß man nun noch das Streichen der Linie (§. 179. Zus. I. II. und §. 207. Anm. 1.): so kann man selbige nach §. 208. zulegen, und ihre Sohle nach dem verjüngten Maasstabe bestimmen, woraus sich denn das Aufnehmen mehrerer an einander hängender Winkel oder das Aufnehmen ganzer Strecken und Schächte ergiebt.

Bey-

Beyspiele zur Uebung.

1) Ein Schacht ist auf einem 60 Grad fallenden Gange 12 Fahrten niedergebracht; wie groß ist die Sohle und Seigerteife dieses Schachtes?

Anmerkung. Hier müssen die Fahrten auf Lachtermaas reducirt werden.

2) Auf einem Grubenriß findet man die Sohle eines Schachtes $24\frac{7}{8}$ Lr. und die Seigerteife $80\frac{5}{8}$ Lachter. Wenn nun der Schacht auf einerley Gange niedergebracht ist; wie viel wird a) das Fallen des Ganges, und b) die flache Teife des Schachtes betragen?

3) Ein Schacht giebt bey jeder Fahrt flachen Teife $2^\circ, 3', 4''$ Seigerteife und $1^\circ, 4', 4''$ Sohle; wie viel wird dieser Schacht bey $69^\circ, 7'$ flacher Teife Sohle und Seigerteife geben?

4) Ein Gang giebt auf einer Stollnsohle bey $1^\circ, 3'$ Seigerteife $0^\circ, 2' 5''$ Sohle. Wenn nun zwischen dem Stolln und der Oberfläche des Gebirges $62^\circ, 3' 4''$ Seigerteife sind; wie viel wird a) die fläche Teife eines vom Tage abzusinkenden Schachtes, b) die Sohle dieses Schachtes betragen, und c) nach was für einer Tonnenlage muß der Schacht abgesunken werden?

§. 216.

Aufgabe. Auf einer Strecke AB [T. V. F. 89.] hat man bey E einen Gang FG angefahren, welcher dem Orte unter einem gewissen Winkel entfällt. Nun will man auf der tiefern Strecke CD denselben Gang anfah-

anfahren. Es wird gefragt: wie weit das Ort D bis an den Gang zu treiben ist?

Auflösung. Es sey EACD der Grundriß der beyden Strecken und eines Schachtes, welcher von der obern Strecke auf die tiefere niedergeht. Man nehme auf der Streichungslinie des Ganges FG einen Punct F an, und errichte in solchem eine Normallinie FH (§. 99.). Von F in G trage man die Sejgerteife, welche zwischen den beyden Puncten E und D Statt findet, und die man entweder aus dem Seigerriß, oder aus der flachen Teife des Schachtes und dem Fallen des Ganges, worauf der Schacht und die Strecken AE und CD abgesunken und getrieben sind, erhält (§. 215.); an G trage man ferner einen Winkel FGH, welcher der Ergänzungswinkel zu 90° von dem Fallungswinkel des Ganges ist (§. 215. Zus. III.). (Ist das Fallen des Ganges z. B. 60°, so ist der Winkel bey $G = 90° - 60° = 30°$.) Zieht man nun durch den Punct H, wo nämlich der Schenkel GH die errichtete Normallinie FH schneidet eine Parallellinie LN (§. 112.); so ist diese die Streichungslinie des Ganges in der tiefern Streckensohle CD (§. 179. Zus. II.). Verlängert man die Linie CD; so giebt die Linie DM an, wie weit man das Ort D noch zu treiben hat, welche Länge man nun auf dem Maasstabe, nach welchem der Grundriß verfertiget ist, abmessen kann.

Zusatz. Diese Aufgabe ist eine der wichtigsten für den practischen Bergmann.

Eben so wie man die Streichungslinien von höhern Strekken nach tiefern angeben kann, lassen sich auch umgekehrt Streichungslinien von tiefern nach höhern angeben, und das Ausstreichen der Gänge am Tage finden.

Bey-

Beyspiel zur Uebung.

Mit einem obern Stollnort, welches von einem Schachte aus, auf einem Stunde 2, 3 streichenden und 70 Grad fallenden Gange, in Mittag 19 Lachter erlängt ist, hat man einen Stunde 7 streichenden Spathgang überfahren, welcher 46 Grad in Mittag fällt. Da nun das tiefe Stollnort 14 Lachter tiefer unter dem obern weggeht, auch schon vom Schachte aus 28 Lachter in Mittag getrieben ist: so will man wissen, in wie viel Lachtern man den Spathgang mit dem tiefern Ort anfahren wird?

§. 217.

Aufgabe. Man soll die Entfernung AB [T. IV. F. 84. 85.] zweyer Objecte, A, B, auf dem Felde bestimmen, die sich wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht geradezu messen läßt. Man kann aber von einem dritten Standpuncte c aus zu beyden Objecten, A, B, hinzukommen und messen.

Auflösung. Nachdem man die Linien cB, CA als Seiten des ΔcBA gemessen hat, messe man auch den Winkel BcA (§. 207.). Da auf solche Art ein Winkel mit den daran liegenden Seiten gegeben ist; so ist das Dreyeck bestimmt (§. 105. Anm.), und man kann nun den Winkel BcA auf das Pappier in bca (§. 208.), so wie die Seiten cB, cA mittelst des verjüngten Maasstabes in cb, ca tragen. Nun muß die Seite bc so viele verjüngte Theile enthalten, als BC wahre

Theile

Theile enthält (§. 161.), und es darf daher nur bc auf dem verjüngten Maasstabe gemessen werden.

Zusatz. Wären Bc, cA zwey Strecken, deren Längen und Richtungen man wüßte: so kann man sie auf ähnliche Weise in Grundriß bringen, und die Länge der Linie BA aus der Zulage des $\triangle$ bca erfahren, im Fall etwa von B nach A ein Queerschlag angelegt werden sollte.

Beyspiel zur Uebung.

Ein Stolln geht von einem gewissen Puncte A weg 156 Lachter gegen SO. Stunde 10,6 bis B, von B ferner wieder 234 Lr. gegen SW. St. 3,1 bis C an einen Tageschacht. Man will aus gewissen Ursachen von A nach C einen Queerschlag treiben; in welcher Stunde und nach welcher Weltgegend wird selbiger zu treiben seyn?

§. 218.

Aufgabe. Man soll den Abstand zweyer Puncte, A, B [T. V. F. 90. 91.], auf dem Felde messen, zu deren keinem man kommen kann.

Auflösung. Man nehme eine der AB, dem Abstande der Puncte A, B, ohngefähr parallele u. gleiche Standlinie FG an, messe selbige, so wie aus ihren Endpuncten F, G, die Winkel GFA, GFB, FGB, FGA. Hierauf trägt man aufs Pappier die verjüngte Linie fg, und an f den Winkel gfa = GFA, an g den Winkel fga = FGA: so ist nach §. 159. $\triangle$ gfa $\backsim$ $\triangle$ GFA. Trägt man nun auch die übrigen Winkel in gehöriger Ordnung auf, so ist auch $\triangle$ fgb $\backsim$ $\triangle$ FGB; und daher fg : FG = fa : FA = fb : FB. Da nun auch afb = AFB, also auch $\triangle$ fab $\backsim$ $\triangle$ FAB (§. 161.); so enthält also ab so viel verjüngte Theile als AB wahre Theile.

Zusatz I.

Zusatz I. Auf diese Aufgabe gründet sich das Aufnehmen ganzer Figuren, wenn man nämlich eine Seite der Figur als Standlinie annehmen kann, aus deren Endpuncten sich die Figur übersehen läßt. Auch kann man zuweilen in der Figur eine Linie annehmen, aus deren Endpuncten sich die Figur übersehen, folglich in alle Winkel visiren läßt.

Zusatz II. Will man eine Figur aufnehmen, die sich nicht übersehen läßt, so muß man die Figur an ihrem Umfange aufnehmen, und sich der Aufgabe §. 217. bedienen.

Zusatz III. Da sich jede Figur durch Diagonalen in Triangel zertheilen läßt; so kann man eine Figur auch messen, indem man alle Seiten der Triangel EAB, EBC, EDC [T. IV. F. 72.] mißt, ihre Größe aufschreibt, und nun die Triangel in eben der Ordnung aufs Pappier aufträgt.

Oder man nimmt innerhalb der Figur einen Punct F [F. 73.] an, bestimmt die um F herumliegenden Winkel, mißt die jeden Winkel einschließenden Seiten, und trägt Alles in gehöriger Ordnung auf. Der Beweis dieses Verfahrens ergiebt sich aus §. 168. und dessen Zusätzen.

Anmerkung 1. Auch diese letzte Aufgabe §. 218. läßt sich auf bergmännische Gegenstände anwenden.

Anmerkung 2. So wie man von den Endpuncten einer Linie FG [T. V. F. 90.] aus einen dritten Punct A vorwärts bestimmen kann, so läßt sich aus dem Streichen und der Größe der Linie FG, so wie aus dem Streichen der Linien FA, GA der Punct A rückwärts bestimmen. Dieser Fall erleichtert und befördert das Aufnehmen ganzer Gegenden sehr; auch hat man nicht nöthig, den Faden der Messung zu folgen.

Anmerkung 3. Wegen des in der Folge zu berechnenden Flächeninhalts, welcher nach Quadratruthen ꝛc. bestimmt wird, muß man sich zu dem Lachtermaasstab einen gleichlautenden Ruthenmaasstab machen, wobey man sich der Aufgabe §. 212. bedient, indem man nämlich vom Lachtermaasstab 13 ganze Lachter nimmt, und diese in 6 Theile theilt, wodurch man 6 Ruthen erhält (§. 164.).

Beyspiele zur Uebung.

1) Auf einer Strecke, welche auf einem Morgengange in Stunde 4. gegen Nordost getrieben, hat man einen Stunde 10. streichenden Gang überfahren, welcher 50 Grad in Mitternacht Morgen fällt; in 50 Lachter einen mit letzterm parallel streichenden, welcher aber 80 Grad in

Mitternacht-Morgen fällt. In wie viel Lachter Seigerteife werden beyde Gänge unter der Strecke sich kreutzen, und wie viel Lachter würde man von der Strecke nieder auf jedem Gang bis ans Kreutz abteifen müssen?

2) Mit einem Stollnort, welches St. 7. in Abend getrieben wird, ist ein Gang, welcher St. 11., und in 20 Lachtern wieder ein Gang, der St. 2,4. streicht, überfahren worden. Nach welcher Weltgegend, in welcher Entfernung vom Stolln werden die Gänge zusammen kommen, und wie viel Lachter würde man vom Stolln aus auf jedem Gange bis an das Kreutz beyder Gänge auffahren müssen?

3) In Tab. IV. Fig. 72. sey EB = 24 Lr. 7 Achtel, EA = 18°, 5'; AB = 12°, 6'; BC = 19°, 5'; EC = 35°, 2'; ED = 19°, 2' und DC = 32°, 7'. Man soll die Figur verzeichnen.

4) Ein Feld sey durch 11 Rainsteine bestimmt, und zwar sey:

von 1 bis 2.	NO.	Std.	$2,7\frac{1}{4}$m	= 16 Lr.	– Acht.	5 Z.
„ 2 „ 3.	SO.	„	$8,5\frac{1}{2}$m	= 14 „	4 „	– „
„ 3 „ 4.	„	„	$8,5\frac{3}{4}$	= 13 „	1 „	6 „
„ 4 „ 5.	SW.	„	$1,6\frac{3}{4}$	= 12 „	2 „	4 „
„ 5 „ 6.	SO.	„	$9,0\frac{1}{4}$p	= 28 „	5 „	– „
„ 6 „ 7.	SW.	„	$2,2\frac{1}{2}$p	= 24 „	– „	– „
„ 7 „ 8.	NW.	„	$8,5\frac{1}{2}$m	= 30 „	4 „	3 „
„ 8 „ 9.	„	„	8,5	= 33 „	5 „	4 „
„ 9 „ 10.	„	„	9,3p	= 9 „	5 „	3 „
„ 10 „ 11.	„	„	$3,7\frac{3}{4}$m	= 22 „	1 „	– „
„ 11 „ 1.	SO.	„	$7,5\frac{1}{4}$	= 4 „	7 „	8 „

Man soll dieses Feld nach diesen Daten zulegen.

§. 219.

§. 219.

Aufgabe. Einen Rectangel ABCD [T. V. F. 92.] auszumessen, oder seinen Flächeninhalt zu bestimmen.

Auflösung. Es sey des Rectangels Grundlinie AD und Höhe AB nach einerley Maase AF = AE getheilt. Von den Zahlen 3, 4, nach welchen solches Maas in beyden Linien enthalten ist, mache man das Product, $3 \cdot 4 = 12$: so giebt dieses den Flächeninhalt des Rectangels.

Beweis. Ziehet man durch die Theilpuncte mit AB, AD Parallellinien: so wird dadurch der Rectangel in lauter gleiche Quadrate, deren eins EF ist, getheilt, die daher zusammen mit dem Rectangel gleichen Inhalt haben. Nun lassen sich so viel solcher Quadrate wie EF an AD und an AB setzen, als AF in AD und AB enthalten ist. Erstres giebt die Zahl der Quadrate in einer Reihe an AD, und letztres, wie viel solcher Reihen längs AB gesetzt werden können. Folglich bestimmt das Product aus beyden Zahlen die Menge aller Quadrate.

§. 220.

Wahlsatz. Zur Ausmessung der Flächen braucht man ein Quadrat, wie EF [F. 92.], das Quadratmaas, welches eine Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll rc. heißt, je nachdem die Seite des Quadrats wie AE eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll lang ist.

Zusatz I. Hiernach sieht man leicht ein, daß nach der Decimaleintheilung 1 Quadratruthe 100 Quadratfuß; ein Quadratfuß 100 Quadratzoll rc. enthalte.

Zusatz II. Ein Quadratfuß ist also der hundertste Theil einer Quadratruthe = 0,01 einer Quadratruthe; 2 Quadratfuß = 0,02 einer Quadratruthe; oder 0,1 einer Quadratruthe = 10 Quadratfuß, 0,2 einer Quadratruthe = 20 Quadratfuß rc.; 1 Quadratzoll = 0,01 eines Quadratfusses, 2 Quadratzoll = 0,02 eines Quadratfusses rc; und man kann sich daher bey der Berechnung der Flächen der Decimalbrüche mit Vortheil bedienen (A. §. 47.).

§. 221.

Aufgabe. Ein Parallelogramm FGHD [T. I. F. 13.] und Triangel FGD auszumessen.

Auflösung. Von G fälle man auf die Grundlinie FD die Normallinie GN: so giebt, wenn man FD und die Höhe GN gemessen, das Product aus beyden den Inhalt des Parallelogramms; dessen Hälfte aber den Inhalt des Triangels.

Beweis. Da dieses Product den Inhalt eines Rectangels unter den Linien FD, GN giebt (§. 219.): so giebt es auch den Inhalt des dem Rectangel gleichen Parallelogramms FGHD (§. 119.); folglich dessen Hälfte den Inhalt des dem halben Parallelogramme gleichen Triangels FGD (§. 119. Zus.).

Z. B. Es sey $FD = 7^\circ, 2'$, und $GN = 4^\circ, 8'$; so ist der Flächeninhalt des Parallelogramms FGHD $= 7,2 \times 4,8 = 34,56$ Quadratruthen, d. i. 34 □Ruthen und 56 □Fusse. Also der Inhalt des $\triangle FGD = \frac{34,56}{2} = 17,28$ Quadratruthen, d. i. 17 □Ruthen und 28 □Fusse.

Zusatz I. Nennt man allgemein die Grundlinie eines Parallelogramms oder Triangels $= a$, die Höhe $= b$, und den Inhalt des erstern $= P$, des letztern $= T$: so ist allgemein 1) $P = ab$; 2) $\frac{P}{a} = b$; 3) $\frac{P}{b} = a$, und der Inhalt eines Triangels ist allgemein 4) $T = \frac{ab}{2}$; 5) $\frac{2T}{a} = b$; 6) $\frac{2T}{b} = a$.

Zusatz II.

Zusatz II. Ziehet man aus dem gefundnen Inhalte eines Parallelogramms die Quadratwurzel, oder sucht man zwischen der Grundlinie und Höhe eines Parallelogramms die mittlere Proportionallinie (§. 166.): so ergiebt sich die Seite eines Quadrats von gleichem Inhalte. Da sich nun eben so alle Figuren durch Quadrate ausmessen, und in Quadrate verwandeln lassen; so heißt die Findung ihres Inhaltes ihre Quadratur, welches besonders beym Kreise und andern krummlinigen Figuren gewöhnlich ist. Den Kreis quadriren heißt also seinen Flächeninhalt finden.

§. 222.

Aufgabe. Ein Trapez ABFD [T. I. F. 14.] auszumessen.

Auflösung. Durch die Diagonale BD theile man das Trapez in zwey Triangel ABD, DBF, welche einerley Höhe DE = GB (§. 115. Zus. IV.) haben. Demnach ist der Inhalt des Trapezes

$$ABFD = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{DF \cdot GB}{2} = \left(\frac{AB + DF}{2}\right) \cdot GB.$$

Zusatz. Da sich jedes irreguläre Viereck oder Trapezoid durch die Diagonale MF [F. 15.] in zwey Triangel MDF, MNF theilen läßt, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie MF haben; so ist der Inhalt des Trapezoids

$$MNFD = \frac{MF \cdot DE}{2} + \frac{MF \cdot GN}{2} = \left(\frac{DE + GN}{2}\right) \cdot MF.$$

Z. B. Es sey in Fig. 14. AB = 5°, DF = 8° und GB = 3°, 8'; so ist der Inhalt des Trapezes ABFD = $\left(\frac{5+8}{2}\right) \cdot 3{,}8 = \frac{13}{2} \cdot 3{,}8 = 6{,}5 \cdot 3{,}8 = 24{,}70$ = 24 □ Ruthen und 70 □ Fuß.

In Fig. 15. sey DE = 3°, 8'; GN = 2°, 4' und MF = 7°, 2'; so ist der Inhalt MNFD = $\left(\frac{3{.}8 + 2{.}4}{2}\right) \cdot 7{,}2 = \frac{6{,}2}{2} \cdot 7{,}2 = 3{,}1 \cdot 7{,}2 = 22{,}32$ = 22 □ Ruthen und 32 □ Fuß.

§. 223.

Aufgabe. Jede vielseitige Figur auszumessen [T. V. F. 93.].

Auflö-

Auflösung I. Man theile die Figur ABCDEFG durch Diagonalen BG, BF, FC, CE in Triangel, welche einzeln ausgemessen (§. 221.) zusammen den Inhalt der Figur geben. Z. B.

$$\Delta BAG = \frac{BG \cdot AH}{2} = \frac{36^\circ,6' \cdot 19^\circ,2'}{2} = \frac{702,36}{2} = 351^{\square\circ},36^{\square'}$$

$$\Delta BFG = \frac{BG \cdot KF}{2} = \frac{36^\circ,6' \cdot 15^\circ,2'}{2} = \frac{556,32}{2} = 278^{\square\circ},16^{\square'}$$

$$\Delta CBF = \frac{CF \cdot EL}{2} = \frac{29^\circ,2' \cdot 20^\circ,4'}{2} = \frac{595,68}{2} = 297^{\square\circ},84^{\square'}$$

$$\Delta CFE = \frac{CE \cdot FM}{2} = \frac{38^\circ \cdot 15^\circ,6'}{2} = \frac{592,80}{2} = 296^{\square\circ},40^{\square'}$$

$$\Delta CDE = \frac{CE \cdot DN}{2} = \frac{38^\circ \cdot 11^\circ,6'}{2} = \frac{440,80}{2} = 220^{\square\circ},40^{\square'}$$

Also ABCDEFG $= 1444^{\square\circ},16^{\square'}$

Oder mit Hülfe §. 222. Zus.

$$BAGF = \left(\frac{AH + KF}{2}\right) \times BG = \left(\frac{19,2 + 15,2}{2}\right) \cdot 36,6 = 629^{\square\circ},52^{\square'}$$

$$\Delta CBF = \frac{CF + BL}{2} = \frac{29,2 \cdot 20,4}{2} = 297^{\square\circ},84^{\square'}$$

$$CDEF = \left(\frac{FM + ND}{2}\right) \times CE = \left(\frac{15,6 + 11,6}{2}\right) \cdot 38 = 516^{\square\circ},80^{\square'}$$

Also ABCDEFG $= 1444^{\square\circ},16^{\square'}$

Auflösung II. Oder man theile die Figur ABCDEFG [F. 94.] in Trapeze. Man lege nämlich durch zwey nächste Winkel B und C eine gerade Linie HN, ziehe von A auf HN eine Normallinie HA, und ziehe mit selbiger durch alle übrige Winkel G, B, F, C, E, D Parallellinien KG, BL, MF, CE, ND: so wird dadurch die Figur in Trian-

Triangel und Trapeze zerlegt, deren Höhen sich in der Linie HN befinden (§. 115. Zus. IV.); da dann die Ausmessung der Triangel nach §. 221. und der Trapeze nach §. 222. geschiehet. Z. B.

$$\triangle PAG = \frac{PG \times KH}{2} = \frac{27°,6' \cdot 16°}{2}$$
$$= 220^{□°},60^{□'}$$

$$PGLB = \left(\frac{PG + BL}{2}\right) \times KB = \left(\frac{27°,6' + 30°}{2}\right) \cdot 10°$$
$$= 288^{□°},00^{□'}$$

$$BLFM = \left(\frac{BL + MF}{2}\right) \times BM = \left(\frac{30° + 24°,8'}{2}\right) \cdot 8°8'$$
$$= 241^{□°},12^{□'}$$

$$MFEC = \left(\frac{MF + CE}{2}\right) \times MC = \left(\frac{24°,8' + 38°}{2}\right) \cdot 14°,8'$$
$$= 464^{□°},72^{□'}$$

$$\triangle CDE = \frac{CE \times CN}{2} = \frac{38° \cdot 12°}{2}$$
$$= 228^{□°},00^{□'}$$

Also ABCDEFG $= 1442^{□°},44^{□'}$

Zusatz. Nimmt man das arithmetische Mittel beyder Flächen $\frac{1444,16 + 1442,44}{2} = 1443^{□°},30^{□'}$; so kann solches für dem wahren Flächeninhalt der Figur gelten. Da man nun auf einen Scheffel Feld 150 □ Ruthen rechnet; so würde, wenn die Fläche ABCDEFG ein Stück Feld oder dergleichen wäre, diese Fläche $= \frac{1443,30}{150} = 9,62$ Scheffel $= 9$ Scheffel, 10 Metzen enthalten. Ist der Werth eines Scheffel Feldes bekannt, so kann man nun den Werth des ganzen Stückes berechnen.

Anmerkung. Beyspiele zur Uebung sind die nach §. 218. angegebnen 3. u. 4.

§. 224.

Aufgabe. Von einem Triangel ein verlangtes Stück abzuschneiden.

Auflö-

Auflösung I. Wenn die Theilungslinie aus einem Winkel gezogen wird [T. I. F. 8.].

Soll von dem Triangel MLN der Triangel MVN abgeschnitten werden, dessen Inhalt bekannt ist: so dividire man den doppelten Inhalt desselben durch die Grundlinie MN, so ist der Quotient die Höhe PR des $\triangle$MVN (§. 221. Zus. I. 5)). Diese gefundne Höhe trägt man auf die Höhe PL des $\triangle$MLN aus P in R, zieht durch R mit der MN die Parallellinie VS, und aus N nach dem Durchschnittspunct V die NV: so ist der verlangte $\triangle$MVN abgeschnitten (§. 119.).

Z. B. Es soll von dem Triangel MLN, dessen Grundlinie MN $= 20^{\circ}$, ein $\triangle$MVN von $72^{\square\circ}$ abgeschnitten werden; so ist die Höhe des $\triangle MVN = \frac{2 \cdot 72^{\square\circ}}{20^{\circ}} = \frac{144^{\square\circ}}{20^{\circ}} = 7^{\circ},2' = PR$, welche man aus P in R trägt, und nun verfährt, wie gesagt worden: so enthält der $\triangle$MVN die verlangten 72 Quadratruthen.

Auflösung II. Wenn die Theilungslinie mit einer Seite des Triangels parallel geht.

Soll von dem $\triangle$BAC [T. IV. F. 71.] ein Stück BFKC abgeschnitten werden, so daß die Theilungslinie FK mit BC parallel geht: so ziehe man das verlangte Stück BK von dem $\triangle$BAC ab, so bleibt $\triangle$FAK übrig, und weil FK mit BC parallel seyn soll, so ist $\triangle BAC \backsim \triangle FAK$ (§. 159.). Zieht man nun von A auf die gegenüberstehende Seite BC eine Normallinie AH, so ist nach §. 165. Zus. $\triangle BAC : \triangle FAK = AH^2 : AG^2$; folglich $\sqrt{\triangle BAC} : \sqrt{\triangle FAK} = AH : AG$ (§. 57.); also $AG = AH \cdot \frac{\sqrt{\triangle FAK}}{\sqrt{\triangle BAC}} = AH \cdot \sqrt{\left(\frac{\triangle FAK}{\triangle BAC}\right)}$. Die gefundne

Länge

Länge AG trägt man aus A in G, zieht durch G mit BC die FK parallel: so ist $\triangle BAC - \triangle FAK = BFKC$.

Z. B. Im $\triangle BAC$ sey $BC = 28°$, $HA = 16°$, folglich der Inhalt des $\triangle BAC = 224^{\square°}$. Von diesem $\triangle BAC$ soll ein Stück BFKC von $150^{\square°}$ abgeschnitten werden, so daß die Theilungslinie FK mit BC parallel geht. Da nach Auflösung II. $AG = AH \cdot \sqrt{\left(\frac{\triangle FAK}{\triangle BAC}\right)}$, und $\triangle FAK = \triangle BAC - BK = 224^{\square°} - 150^{\square°} = 74^{\square°}$; so ist $AG = 16 \cdot \sqrt{\left(\frac{74}{224}\right)} = 16 \cdot \sqrt{0{,}3303} = 16 \cdot 0{,}5747 = 9{,}6$ Ruthen $= 9°, 6'$, welche man aus A in G trägt, und durch G mit BC die FK parallel zieht: so ist $BFKC = 150$ □Ruthen.

§. 225.

Aufgabe. Von einem Trapez BFKC [F. 71.], dessen parallele Seiten BC, FK und Höhe GH gegeben sind, ein Stück FKLM abzuschneiden, daß die Theilungslinie LM mit den beyden parallelen Seiten BC, FK auch parallel geht.

Auflösung. Man verlängere die beyden nicht parallelen Seiten BF, CK, bis sie sich in A schneiden, und ziehe aus dem Durchschnittspunct A auf die gegenüberstehende BC die Normale AH; so ist AG die Höhe eines über der kleinern parallelen Seite stehenden Triangels FAK, welche Höhe AG man also bestimmen kann. Weil nämlich FK parallel mit BC, so ist $\triangle BAC \backsim \triangle FAK$ (§. 159.), und daher $BC : FK = AH : AG$ (§. 167. Zus.), und

und $BC - FK : FK = AH - AG : AG = GH : AG$ (§. 58. Zus. I. b)). Folglich $AG = \frac{GH \cdot FK}{BC - FK}$, daher man nun den Inhalt des $\triangle FAK = \frac{FK \cdot AG}{2}$ finden kann, welchen Inhalt man zum Trapez BFKC hinzusetzt, um den Inhalt des $\triangle BAC$ zu erhalten. Addirt man zum $\triangle FAK$ das abzuschneidende Stück FKLM; so entsteht der $\triangle LAM$, welcher, weil LM mit FK, BC parallel gehen soll, ebenfalls dem $\triangle BAC$ ähnlich ist. Daher ist nach §. 224. Auflös. II. die Höhe des $\triangle LAM$, nämlich $AN = AH \cdot \sqrt{\left(\frac{\triangle LAM}{\triangle BAC}\right)} = (AG + GH) \cdot \sqrt{\left(\frac{\triangle LAM}{\triangle BAC}\right)}$. Subtrahirt man von AN die vorhin gefundene AG, trägt die Differenz $AN - AG = GN$ aus G in N, und zieht durch N mit BC oder FK die Parallellinie LM: so ist das verlangte Stück FKML abgeschnitten.

Z. B. Es sey $BC = 28°, FK = 16°, 8'$, $GH = 6°, 4'$: so ist nach §. 222. der Inhalt des Trapezes $FKCB = 143^{□°}, 36^{□'}$, von welchem ein Stück $FKML = 19^{□°}$ abgeschnitten werden soll. Nach der gegebnen Auflösung ist die Höhe des $\triangle FAK$ über der kleinern Parallele $FK = AG = \frac{GH \cdot FK}{BC - FK} = \frac{64' \cdot 168'}{280' - 168'} = \frac{10752^{□'}}{112'} = 96' = 9°, 6'$; daher Inhalt $\triangle FAK = \frac{FK \cdot AG}{2} = \frac{16{,}8 \cdot 9{,}6}{2} = 80^{□°}, 64^{□'}$; $\triangle BAC = 143{,}36 + 80{,}64 = 224^{□°}$; $\triangle LAM = 19^{□°} + 80^{□°}, 64^{□'} = 99^{□°}, 64^{□'}$. Folglich $AN = (9°, 6' + 6°, 4') \cdot \sqrt{\left(\frac{99{,}64}{224}\right)}$

$= 16$

$= 16 \cdot \sqrt{0,4448} = 16 \cdot 0,66 = 10°, 6'$; und $GN = AN - AG = 10°, 6' - 9°, 6' = 1°$, welche man aus G in N trägt, und durch N mit BC die Parallellinie LM zieht: so sind die verlangten $19^{\square°}$ in FKML abgeschnitten.

Zusatz. Wäre ein Stück, welches an der größern Parallellinie BC liegt, wie LMCB, abzuschneiden: so zieht man das abzuschneidende Stück LMCB von dem ganzen Trapez FKCB erst ab, so bleibt das andre Stück FKML an der kleinern Parallele FK übrig, welches man nach der oben gegebnen Auflösung abschneidet.

§. 226.

Aufgabe. Eine gegebne Flächenfigur in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Auflösung I. Wenn die Theilungslinien keine bestimmte Richtung haben [T. V. F. 93.].

Man suche zuerst nach §. 223. Auflös. I. den Inhalt der Figur ABCDEFG, und dividire selbigen durch die Theilungszahl; so erhält man den Inhalt eines jeden Theiles. Nun untersucht man, ob der erste, oder erste und zweyte Triangel zusammen größer oder kleiner als ein Theil sind, wo man sodann entweder von dem letzten Triangel das überflüssige, oder von dem folgenden Triangel das fehlende Stück nach §. 224. Auflös. I. abschneiden müßte.

Z. B. Soll ein Feld von 1443 Quadratruthen (s. Beyspiel zum §. 223.) in 3 Theile getheilt werden; so enthält ein Theil $= \frac{1443}{3} = 481$ □Ruthen. Da nun der erste △BAG nur 351 □Ruthen enthält; so müssen von dem folgenden BFG noch $481 - 351 = 130^{\square°}$ abgeschnitten wer-

werden. Nun ist die Diagonale BG, als Grundlinie des fehlenden Triangels, $= 36°, 6'$; folglich nach §. 221. Zus. I. 5) die zugehörige Höhe $= \frac{2 \cdot 130}{36,6} = 7°, 1'$. Diese gefundne Höhe trägt man nach §. 224. Auflös. I. aus K in P, zieht mit BG die Parallellinie PR, und von B nach R die Linie BR: so ist ABRG der dritte Theil des Ganzen. Da nun von dem $\triangle BGF = 130^{\square°}$ abgeschnitten; so enthält selbiger mit dem $\triangle BCF$ zusammen $= 148,36 + 297,84 = 446^{\square°}, 20^{\square'}$, so daß also von dem folgenden $\triangle CFE = 481 - 446,20 = 34$ □Ruthen, 80 □Fuß abzuschneiden sind. Da man hier $CF = 29°, 2'$ zur Grundlinie annehmen kann, so ist die Höhe $CS = \frac{2 \cdot 34,80}{29,2} = 2°,3'$. Zieht man durch S mit CF die SF parallel, und aus F nach T die Linie FT; so ist BRFT, so wie TDEF, der dritte Theil des Ganzen.

Auflösung II. Wenn die Theilungslinien parallel gehen sollen [F. 94.].

Sollen die Theilungslinien z. B. mit der Diagonale CE parallel gehen; so ziehe man durch alle Winkelpuncte der Figur mit der CD Parallelen, suche nach §. 223. Auflös. II. den Inhalt der Figur, und bestimme vermittelst der Theilungszahl den Inhalt eines jeden Theiles. Nun untersucht man auch hier, ob der erste Triangel, oder der erste Triangel und das erste Trapez zusammen, größer oder kleiner als ein Theil sind, wo im ersten Falle abgeschnitten, im andern zugesetzt werden muß, worüber die Aufgaben §. 224. Auflös. II. und §. 225. hinlänglich Erläuterung geben.

Z. B.

Z. B. Auch hier gelte das Beyspiel §. 233. Auflös. II., wo die dort berechnete Fläche von $1443^{\square\circ}$ ebenfalls in 3 Theile zu theilen sey, also jeder Theil $= \frac{1443^{\square\circ}}{3} = 481^{\square\circ}$ enthält. Da nun $\triangle$ APG $+$ PGLB $= 220^{\square\circ}, 60^{\square'} + 288^{\square\circ} = 508^{\square\circ}, 60^{\square'}$ enthalten, so muß von dem Trapez PL nach §. 225. ein Trapez von $508{,}60 - 481 = 27^{\square\circ}, 60^{\square'}$ abgeschnitten werden, weil $\triangle$PAG $+$ PL um so viel größer als der dritte Theil des Ganzen ist. Zu diesem Trapez gehört eine Höhe von $1^\circ, 3'$, welche man aus B in Q trägt, und mit BL die QR parallel zieht; so ist AQRG $=$ der dritte Theil vom Ganzen. Eben so erhält man die zweyte Theilungslinie ST, wenn man zum $\triangle$CDE das, was noch zum dritten Theil fehlt, von dem Trapez MFEC abschneidet.

§. 227.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regulären Polygons oder Vielseits zu finden [T. III. F. 56. 58.].

Auflösung. Da das reguläre Polygon einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfange des Polygons und die Höhe der Höhe eines einzelnen Triangels im Polygon gleich ist: so findet man nach §. 221. den Inhalt eines regulären Polygons, wenn man den Umfang desselben in die Höhe eines einzelnen Polygon-Triangels multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt.

Z. B. Im regulären Sechseck sey die Polygonseite $= 10'$, die Höhe des Polygontriangels

$= 8,'6$: so ist der Inhalt dieses regulären Sechsecks $= \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,6}{2} = 258^{\square'}$.

§. 228.

Aufgabe. Die Seite eines regulären Polygons und der Halbmesser des darum beschriebenen Kreises CB [F. 56.] sind gegeben; man soll die Seite BL eines Polygons von doppelt so viel Seiten finden.

Auflösung. Wird von C auf BD die Normallinie CNL gezogen: so halbirt sie die Sehne in N, und den Bogen in L (§. 142.). Ziehet man also BL: so ist diese die Seite eines Polygons von noch einmal so viel Seiten. Nun ist $CN^2 = BC^2 - BN^2$, und $CN = \sqrt{(BC^2 - BN^2)}$ (§. 125. Zus. I.), also auch $NL = CL - CN$ gegeben. Folglich kann man $BL = \sqrt{(BN^2 + NL^2)}$ finden.

Diese Berechnung zu erleichtern setzt man den Halbmesser $CB = CL = 1$; $BD = a$, folglich $BN = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$, $BN^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, und die gesuchte Polygonseite $BL = b$, so ist: $BL^2 = BN^2 + NL^2$, d. i. $b^2 = \frac{a^2}{4} + NL^2 = \frac{a^2}{4} + (1 - CN)^2 = \frac{a^2}{4} + 1 - 2CN + CN^2$

$$= \frac{a^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + 1 - \frac{a^2}{4}$$

$$= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}};$$

$$\text{folglich } b = \sqrt{\left(2 - 2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)}.$$

Z. B.

Z. B. Für das reguläre Sechseck ist BD = dem Halbmesser (§. 152.), also CB = BD = a = 1; folglich $1 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}$, folglich $2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}732050$, und $\sqrt{\left(2-2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\right)} = \sqrt{(2-1{,}732050)} = 0{,}5176\ldots = b = BL$ die Seite des Zwölfecks.

Auf eben die Art, wie man hier aus der Seite des Sechsecks die Seite des Zwölfecks gefunden hat, findet man aus dieser die Seite des 24Ecks, aus diesem die Seite des 48Eck u. s. w.; da man dann für ein 768Eck gefunden hat 0,0081812.. welches mit der halben Seitenzahl 384 multiplicirt das Product 3,1415.. giebt, als den halben Umfang für den Halbmesser = 1, oder, welches einerley ist, als den ganzen Umfang für den Durchmesser = 1.

Anmerkung. Durch viel weitre Fortsetzung der Rechnung hat man gefunden, daß für den Halbmesser = 1 der halbe Umfang, oder für dem Durchmesser = 1 der ganze Umfang sey =

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 u. s. w.

Diese Zahl für die Peripherie des Kreises (§. 152. Zus. II.) wird der Kürze wegen mit π bezeichnet, und ist unter dem Namen der Ludolphischen Zahl bekannt. Zur Ausübung wird dieselbe nie so weit, am häufigsten bis zur dritten Decimalstelle, gebraucht. Man setzt daher das Verhältniß des Diameters zur Peripherie =

$1 : 3{,}141 = 1 : \pi$.

§. 229.

Aufgabe. Aus dem gegebnen Durchmesser eines Kreises FB = 2FC = d = 2r [F. 56.] seine Peripherie = p, und seinen Inhalt = A zu finden.

Auflö-

Auflösung. Da alle Kreise einander ähnlich sind (§. 170. Zus. I.); so verhält sich $1 : \pi = d : p$. Also

1) $p = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$, d. h. man findet die Peripherie eines Kreises, wenn man den Durchmesser oder doppelten Halbmesser mit der Ludolphischen Zahl ($\pi = 3{,}141 \cdot\cdot$) multiplicirt. Da nach §. 152. Zus. II. der Kreis einem regulären Polygon von unendlich vielen Seiten gleichet, und man nach §. 227. den Inhalt eines regulären Polygons findet, wenn man den Umfang desselben mit der Höhe eines Polygontriangels multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt: so findet man auch den Inhalt eines Kreises, wenn man die Kreisperipherie mit dem Halbmesser (hier Höhe des Polygontriangels) multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt, also $A = \frac{p \cdot r}{2}$. Da aber $p = 2r \cdot \pi$, so ist

2) $A = \frac{2r \cdot \pi \cdot r}{2} = r^2 \cdot \pi$, oder weil $r = \frac{d}{2}$, und $r^2 = \frac{d^2}{4}$, so ist auch

3) $A = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot 3{,}141 = d^2 \cdot 0{,}785$ d. h. man findet den Inhalt eines Kreises, wenn man entweder das Quadrat des Halbmessers mit der Ludolphischen Zahl, oder das Quadrat des Diameters mit dem vierten Theil der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

Zusatz. Aus $A = r^2 \pi$, oder $A = \frac{d^2 \pi}{4}$ folgt, $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, oder $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$.

Aus

Aus $p = d \cdot \pi = 2r\pi$ folgt $d = \frac{p}{\pi}$, und $r = \frac{2\pi}{p}$.

Z. B. 1) Der Durchmesser eines Siebes sey 12 Zoll, so enthält das Sieb $= 12^2 \cdot 0{,}785 = 144 \cdot 0{,}785 = 113$ Flächen- oder Quadratzoll. 2) Der Umfang eines Baumes sey $= 72$ Zoll, so ist die Stärke desselben $= d = \frac{72}{3{,}141} = 22{,}9$ Zoll.

§. 230.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Ringes (die Fläche zwischen zwey concentrischen Kreisen) zu finden.

Auflösung. Nennt man den Halbmesser des größern Kreises $= R$, des kleinern $= r$; so findet man den Inhalt des Ringes, wenn man die Differenz der beyden Quadrate der Halbmesser mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt. Also der Inhalt des Ringes $= R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$. Oder nennt man die Durchmesser D, d; so ist der Inhalt des Ringes auch $= (D^2 \cdot 0{,}785) - (d^2 \cdot 0{,}785) = (D^2 - d^2) \cdot 0{,}785$.

Z. B. Eine 12zollige Kolbenröhre sey $\frac{5}{8}$ Zoll stark: so ist $D = 12\frac{5}{8} = 12{,}625$ Zoll, $d = 12$ Zoll, und daher der Inhalt des Ringes $= (12{,}625^2 - 12^2) \cdot 0{,}785 = (159{,}39 - 144) \cdot 0{,}785 = 74{,}89$ □Zoll, oder 74 Quadratzoll und 89 Quadratlinien.

§. 231.

Aufgabe. Für einen gegebnen Centriwinkel $BCD = x$ [F. 56.] die Länge des zugehörigen Kreisbogens $BLD = B$ in Theilen des Halbmessers r anzugeben.

Auflö-

Auflösung. Da $180° : x = r\pi : B$, so ist $B = \frac{r\pi \cdot x}{180}$.

Z. B. Es sey $r = 5$ Fuß, $x = 36°,15'$; so ist $B = 5 \cdot 3,141 \cdot \frac{36°,15'}{180°} = 15,705 \cdot \frac{2175'}{10800'}$ $= 15,705 \cdot 0,201 = 3,15$ Fuß, oder 3 Fuß, $1\frac{4}{5}$ Zoll; also beynahe 3 Fuß, 2 Zoll.

Zusatz. Umgekehrt läßt sich wieder ein Kreisbogen in Theilen des Halbmessers durch Grade, Minuten rc. ausdrükken. Denn $x = \frac{B \cdot 180°}{r\pi}$.

Z. B. Der Halbmesser eines Kreises sey $= r = 6$ Fuß, und der Bogen $B = 8$ Fuß: so ist $x = \frac{8}{6 \cdot 3,141} \cdot 180° \cdot 60'$ $= 0,42 \cdot 10800' = 4536' = 75°,36'$.

§. 232.

Aufgabe. Den Inhalt des Ausschnitts BCD [F. 56.], und des Abschnitts BLDN zu finden.

Auflösung I. Aus dem Winkel BCD des Ausschnittes berechne man die Länge des Bogens BD (§. 231.), und multiplicire sie mit dem halben Halbmesser. Denn der Inhalt des Kreises (für den Radius BC) $= BC^2 \cdot \pi$ (§. 229. Auflös. 2)). Nun verhält sich aber $BC^2 \cdot \pi$: Ausschnitt BCD $=$ $2BC \cdot \pi$: Bog. BLD. Daher Ausschnitt BCD $= \frac{BC^2 \cdot \pi \cdot \text{Bog.BLD}}{2BC \cdot \pi} = \frac{BC \cdot \text{Bog.BLD}}{2}$.

Auflösung II. Aus der Sehne BD und der Höhe CN berechne man den $\triangle$BCD, und subtrahire seinen Inhalt von dem in Auflös. I. gefundenen Inhalte des Ausschnitts: so giebt diese Differenz den Inhalt des Abschnitts BLDN.

Z. B.

Z. B. Es sey BC = 5', Winkel BCD = 36°, 15', BD = 2', 1'', CN = 4', 7''; so ist der Bogen BLD = 3', 2''. Also der Ausschnitt BCD = $\frac{3,2 \cdot 5}{2}$ = 8 □Fuß, und der △BCD = $\frac{4,7 \cdot 2,1}{2}$ = 4,93 □Fuß; daher der Abschnitt BLDN = 8 — 4,93 = 3,07 □Fuß.

§. 233.

Aufgabe. Eine Fläche ABFD [T. II. F. 47.], welche von zwey concentrischen Bogen, AD, BF, eingeschlossen wird, auszumessen.

Auflösung. Es sey der Bogen AD, der Halbmesser AC und die Entfernung AB der beyden Bogen von einander gegeben: so findet man den äußern Bogen BF durch folgende Proportion: CA : CB = B. AD : B. BF, d. i. CA : (CA + AB) = B. AD : B. BF, also $\mathfrak{B}.BF = \frac{\mathfrak{B}.AD \cdot (CA + AB)}{CA}$. Berechnet man nun nach der vorigen Aufgabe, §. 232., den größern Ausschnitt FCB, und zieht davon den kleinern Ausschnitt DCA ab; so bleibt die Fläche ABFD übrig. Daher ist ABFD =

$$\frac{CB \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} - \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} = \frac{(CA + AB) \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} - \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} = \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} + \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} - \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2}.$$

Da aber $\mathfrak{B}.BF = \frac{\mathfrak{B}.AD \cdot (CA + AB)}{CA}$; so ist

$$ABFD = \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD \cdot (CA + AB)}{2 \cdot CA} + \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} - \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} = \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} + \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} + \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} - \frac{CA \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} = \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.AD}{2} + \frac{AB \cdot \mathfrak{B}.BF}{2} =$$

$\frac{AB \cdot (\text{B. } AD + \text{B. } BF)}{2}$ (§. 25. Anm. 3.), d. h. man findet eine Fläche ABFD, welche zwischen zwey concentrischen Bogen eingeschlossen ist, wenn man die halbe Summe der Bogen mit ihrer Entfernung multiplicirt.

Z. B. Es sey der Halbmesser CA = 30″, AB = 6″, und die Länge des innern Bogens AD = 20″: so ist der äußre Bogen BF = 24 Zoll. Daher die Fläche ABFD = $\left(\frac{20+24}{2}\right) \times 6 = 22 \cdot 6 = 132$ □Zoll.

Zusatz. Eben so kann man aus der gegebnen Länge beyder Bogen BF, AD, und ihrer Entfernung AB den Halbmesser AC finden. Denn, da BF : AD = (BA + AC) : AC, und daher (BF — AD) : AD = BA : AC (§. 58. Zus. I. b)): so ist $AC = \frac{AD \cdot AB}{BF - AD}$.

Beyspiel. Bey einem Radscheider sey der äußere Bogen BF = 5 Ellen, 5 Zoll, der innere Bogen AD = $4\frac{1}{2}$ Elle, 11 Zoll, und die Breite desselben AB = $\frac{1}{2}$ Elle: wie hoch wird das Rad?

Anmerkung. Dergleichen Bogen, wie BF, AD, heißt man auch ähnliche Kreisbogen.

Beyspiel zur Uebung.

Es sey der innere Halbmesser eines Gewölbes = 51 Zoll, und die Länge des innern Bogens = 34 Zoll, die Stärke des Gewölbes = 18 Zoll; wie groß wird der Inhalt der Stirne dieses Gewölbes seyn?

§. 234.

Aufgabe. Den Flächeninhalt der Ellypse zu finden [T. III. F. 62.].

Auflö-

Auflösung. Nennt man die große Axe AB = a, die kleine Axe ED = b: so ist der Inhalt der Ellypse = $\frac{ab \cdot \pi}{4}$ = ab · 0,785, d. h. man findet den Inhalt der Ellypse, wenn man das Parallelogramm aus der großen und kleinen Axe mit dem vierten Theil der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

Z. B. Es sey a = 11 Fuß, b = 5 Fuß: so ist der Inhalt dieser Ellypse = 11 · 5 · 0,785 = 55 · 0,785 = $43^{\square'}$,175.

Zusatz. Nennt man bey zwey concentrischen Ellypsen in der größern Ellypse die große Axe AB = A, die kleine Axe DE = B, in der kleinern Ellypse die große Axe HK = a, die kleine Axe LM = b: so ist der Flächeninhalt des elliptischen Ringes AHMDKBLE = $\frac{A \cdot B \cdot \pi}{4} - \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$ = $(A \cdot B - a \cdot b)\frac{\pi}{4}$.

Z. B. Es sey A = 10', B = 6', a = 8', b = 4': so ist der Inhalt des elliptischen Ringes = (10 · 6 — 8 · 4) · 0,785 = $21^{\square'}$,98.

Zweytes Kapitel.
Messung der Körper.

§. 235.

Aufgabe. Ein rechtwinkliches Parallelepiped AF [T. IV. F. 78.], auszumessen.

Auflösung. Das Rectangel ABCD sey des Körpers Grundfläche, und die Normallinie AH seine Höhe. Man messe seine drey Seiten AB, AD, AH mit einerley Maaße (AB = 5, AD =

3,

3, AH = 4): so giebt das Product aus den gefundnen Zahlen (5·3·4 = 60), nach welchen solches Maas in den Seiten enthalten ist, den körperlichen Inhalt des Parallelepipeds.

Beweis. Hat man einen Würfel, dessen Seite das genommene Maas ist: so lassen sich an AB und an AD so viele Würfel setzen, als AB und AD Theile haben, und es giebt das Product aus den beyden Zahlen die Menge der Würfel in einer Schicht, die die Grundfläche ABCD deckt. Solcher Schichten aber können im Parallelepiped so viele über einander seyn, als die Höhe AH Theile hat. Demnach giebt das gefundne Product, mit der Zahl der Theile in AH multiplicirt, die gesammte Menge der Würfel, die den körperlichen Raum des Parallelepipeds ausfüllen.

Anmerkung. Der Kürze wegen wird auch öfters gesagt, daß man Länge, Breite und Höhe, oder Grundfläche und Höhe, in einander multiplicire; da man eigentlich diese Größen durch Zahlen ausdrückt, und solche mit einander multiplicirt.

§. 236.

Wahlsatz. Zur Ausmessung der Körper braucht man einen Würfel, das Cubikmaas, welches eine Cubikruthe, Cubikfuß, Cubikzoll oder Cubiklinie heißt, je nachdem die Seite des Würfels eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll oder eine Linie lang ist.

Zusatz. Hieraus sieht man leicht ein, daß nach der Decimal- oder Duodecimal-Eintheilung ein Cubikfuß 1000 oder 1728 Cubikzoll, ein Cubikzoll 1000 oder 1728 Cubiklinien enthalte und daß man sich im erstern Falle der Decimalbrüche wie §. 220. bedienen kann.

§. 237.

Aufgabe. Jedes Prisma und jeden Cylinder auszumessen.

Auflösung. Man messe den Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit der Höhe.

Beweis. 1) Ein schiefes Parallelepiped ist dem rechtwinklichen AF [F. 78.] von gleicher Grundfläche ABCD und Höhe AH gleich (§. 192.), und wird daher, wie dieses, aus dem Product der Grundfläche in die Höhe bestimmt.

2) Das dreyseitige Prisma ist der Hälfte des Parallelepipeds AF auf 2 $\triangle$ABD in der Höhe AH gleich, und wird also auch aus dem Product des $\triangle$ABD in AH bestimmt.

3) Das vielseitige Prisma, welches aus so vielen dreyseitigen Prismen von gleicher Höhe bestehet, als Triangel sind, in die sich die Grundfläche theilen läßt, wird daher auch aus dem Producte aller dieser Triangel, das ist, der ganzen Grundfläche in die Höhe, bestimmt.

4) Der Cylinder ist einem Prisma von unzählig vielen Seiten gleich (§. 200.), und wird daher wie das vielseitige Prisma ausgemessen, nur daß hier die Grundfläche ein Kreis ist.

Z. B. 1) Ein Ort wird mit $1\frac{1}{4}$ Lachter Höhe und $\frac{1}{2}$ Lachter Weite getrieben; so sind in 1 Lachter Länge $= 1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{8}$ Cubiklachter enthalten. Da nun 1 Lachter 84 Ellenzolle, also 1 Cubiklachter $= 84 \cdot 84 \cdot 84 = 592704$ Cubikzolle enthält: so sind in jedem Raume $= \frac{5}{8} \cdot 592704 = 370440$ Cubikzolle enthalten.

Ein

Ein Kübel enthält 2500 Cubikzolle, also würde das in jenem Raum befindliche Gestein $\frac{370440}{2500}$ = 148 Kübel ausmachen. Weil aber das Gestein sich nicht der Natur gemäß in den Kübel wieder zusammensetzen läßt, sondern man bey einer mittlern Gesteinsfestigkeit ohngefähr 3,25mal mehr rechnen kann: so würde die zu fördernde Anzahl Kübel Berge aus jenem ausgehauenen Raume = $148 \cdot 3{,}25 = 481$ Kübel = 8 Schock, 1 Kübel betragen.

2) Wenn ein Graben oben 2 Ellen weit, auf der Sohle $1\frac{1}{2}$ Elle weit, $1\frac{1}{4}$ Elle tief, und 1200 Lachter lang werden soll: so würden $\left(\frac{4+3}{2}\right) \cdot 2{,}25 \cdot 8400 = 6615000$ Cubikfuß, oder 851875 Cubikellen Erde auszuwerfen seyn.

3) Wenn eine Welle 30 Zoll stark und 6 Ellen lang ist: so enthält solche $1{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 12 = 58{,}87$, beynahe 59 Cubikfuß, Holz.

4) Wenn die Stirne eines Gewölbes 720 □Zolle beträgt, und das Gewölbe 3 Ellen lang wäre: so würden in diesem Gewölbe $\frac{720 \cdot 72}{1728}$ = 30 Cubikfuß Mauer enthalten seyn (§. 233.).

Zusatz I. Nennt man allgemein die Grundfläche eines Prisma's = G, die Höhe = H, bey einem Cylinder den Halbmesser der Grundfläche = R; so ist der körperliche Inhalt 1) eines jeden Prisma's $P = G \cdot H$, und 2) eines jeden Cylinders $Z = R^2 \pi \cdot H$. Aus 1) folgt $G = \frac{P}{H}$, und $H = \frac{P}{G}$, aus 2) folgt $R = \sqrt{\left(\frac{Z}{H \cdot \pi}\right)}$, und $H = \frac{Z}{R^2 \cdot \pi}$.

Zusatz II. Die Cubikwurzel aus dem Inhalte eines Prisma's oder Cylinders, giebt die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte; wodurch sich also der Körper in einen Cubus verwandeln läßt. Daher heißt die Findung seines Inhalts die Cubatur.

Zusatz III.

Zusatz III. Will man den Inhalt einer Treibetonne berechnen [T. V. F. 95.], deren Vorderseite AK höher als die Rückseite BH ist: so denke man sich durch G mit der Grundfläche AC eine parallele Ebene EH, wodurch man die Tonne in zwey Körper von gleicher Grundfläche AC und EH zerschneidet, nämlich in ein Parallelepiped ACEH und in ein halbes Parallelepiped EHF. Nennt man nun die gleichen Grundflächen AC = EH = G, die größere Höhe AF = H, die kleinere Höhe BG = EA = h; so ist der Inhalt des Parallelepipeds ACEH = G · h, und des halben Parallelepipeds EHF $= G \cdot \left(\frac{H-h}{2}\right)$. Also die ganze Tonne $= G \cdot h + G\left(\frac{H-h}{2}\right) = Gh + \frac{GH}{2} - \frac{Gh}{2} = \frac{GH}{2} + \frac{Gh}{2} = G\left(\frac{H-h}{2}\right)$, d. h. man findet den Inhalt einer Treibetonne, wenn man den Inhalt der innern Bodenfläche derselben mit der halben Summe beyder Höhen multiplicirt.

Zusatz IV. Nennt man den größern Halbmesser einer cylindrischen Röhre = R, den kleinern = r, und die Länge der Röhre = L; so ist der körperliche Inhalt der Röhre $= (R^2\pi \cdot L) - (r^2\pi \cdot L) = (R^2 - r^2)\pi \cdot L$, d. h. man findet den körperlichen Inhalt einer Röhre, wenn man den Inhalt ihres Ringes (§. 230.) mit der Länge der Röhre multiplicirt. Dasselbe gilt auch für elliptische Röhren (§. 234. Zus.).

Z. B. Eine hölzerne Röhre ist 6 Zoll stark, der Durchmesser ihrer innern Hölung 2 Zoll, und die Röhre 6 Ellen lang: so ist ihr körperlicher Inhalt $= \frac{(3^2 - 1^2) \cdot 3{,}141 \cdot 144}{1728}$ $= 2{,}09$ Cubikfuß.

Zusatz V. Da die Seitenflächen des Prisma's Parallelogramme sind, die man nach §. 221. ausmisset: so geben diese zusammen die ganze Seitenfläche des Prisma's. Nennt man daher bey einem geraden Prisma den Umfang desselben AB + BC + CD + DA = p, die Länge AH = l; so ist bey einem geraden Prisma die Seitenfläche = p · l, d. h. ein Product aus dem Umfang in die Länge.

Nennt man beym geraden Cylinder die Länge desselben auch = l, den Halbmesser der Grundfläche = r: so ist der Umfang des Cylinders = p = 2 · rπ (§. 229. I.); folglich die Seitenfläche des geraden Cylinders = 2 · l · rπ.

§. 238.

§. 238.

Aufgabe. Jede Pyramide und jeden Kegel auszumessen.

Auflösung und Beweis. Da jede Pyramide oder jeder Kegel der dritte Theil eines Prisma's oder Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist (§. 197. u. §. 203. Zus. I.); so messe man den Inhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit dem dritten Theile der Höhe.

Zusatz. Da die Seitenflächen der Pyramide Triangel sind, welche man nach §. 221. ausmisset: so geben diese zusammen die ganze Seitenfläche der Pyramide.

Die Seitenfläche des geraden Kegels ist einem Kreisausschnitt gleich, dessen Bogen die Peripherie der Grundfläche, und dessen Halbmesser die Länge des Kegels ist. Nennt man also die Länge des geraden Kegels $= l$, den Halbmesser der Grundfläche $= r$; so ist nach §. 232. der Inhalt der Seitenfläche des geraden Kegels $= \frac{2 r \pi \cdot l}{2} = r l \pi$.

§. 239.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden [T. IV. F. 82.].

Auflösung. Für den abgekürzten Kegel sind die beyden Grundflächen BDK, FGH, und deren Abstand EC gegeben. Es sey ferner der Halbmesser $CB = R$, der Halbmesser $EF = r$, und die Höhe $CE = h$. Man denke sich die Höhe CE, und die Seite BF bis zur Spitze A verlängert: so ist, weil die Grundflächen parallel sind, nach §. 202. $CB : EF = CA : EA$; folglich $CB - EF : EF = CA - EA : EA$ (§. 58. Zus. I. b)), das ist $R - r : r = EC : EA = h : EA$; folglich $EA = \frac{h \cdot r}{R - r}$; und $CB - EF : CB = CA - EA : CA$,

$: CA$, d. i. $R - r : R = h : CA$; folglich $CA = \frac{R \cdot h}{R - r}$. Demnach ist

1) der ganze Kegel $= \frac{BC^2 \cdot \pi \cdot AC}{3} = \frac{R^2 \cdot \pi}{3} \cdot \frac{R \cdot h}{R - r} = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \frac{R^3}{R - r}$ (§. 238.).

2) der obere Kegel $= \frac{EF^2 \cdot \pi \cdot EA}{3} = \frac{r^2 \pi}{3} \cdot \frac{rh}{R - r} = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \frac{r^3}{R - r}$. Demnach der Unterschied von beyden Kegeln oder

3) der abgekürzte Kegel $= \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \frac{R^3}{R - r} - \left(\frac{h \cdot \pi}{3} \cdot \frac{r^3}{R - r}\right) = \frac{h \cdot \pi}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right) = \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2)$, d. h. man findet den Inhalt eines abgekürzten Kegels, wenn man die Summe der Quadrate der Halbmesser der Grundflächen und einen Rectangel aus beyden Halbmessern mit der Ludolphischen Zahl und dem dritten Theil des Abstandes beyder Grundflächen multiplicirt.

Zusatz I. Nennt man den körperlichen Inhalt eines abgekürzten Kegels $= K$: so ist nach Vorigem $K = \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2) = \frac{h}{3} (R^2 \pi + Rr\pi + r^2 \pi)$. Nun giebt aber $R^2 \pi$ die größere Grundfläche $= G$, $r^2 \pi$ die kleinere Grundfläche des Kegels $= g$, und $Rr\pi$ ist $= \sqrt{R^2 r^2 \pi^2} = \sqrt{G \cdot g}$. Daher der körperliche Inhalt eines jeden abgekürzten Kegels und jeder abgekürzten Pyramide, deren parallele Grundflächen G, g, und Höhe $= h$ gegeben sind, $= \frac{h}{3} (G + \sqrt{G \cdot g} + g)$, d. h. man findet den körperlichen Inhalt jeder abgekürzten Pyramide, wenn man die Summe beyder Grundflächen nebst der Quadratwurzel aus dem Product beyder Grundflächen mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt.

Von letztrer Formel können leicht Anwendungen auf die Berechnung der Kübel, Baumstämme ꝛc. gemacht werden.

Z. B. 1) Es seyn die Grundflächen einer abgestumpften Pyramide, Kegel ꝛc. nämlich $G = 16\square'$, $g = 4\square'$, und die Entfernung derselben oder $h = 9'$: so ist der körperliche Inhalt dieses abgestumpften Körpers $= \frac{9}{3}\cdot(16+\sqrt{16\cdot4}+4) = 3\,(16+8+4) = 3\cdot 28 = 84$ Cubikfuß.

2) Ein Stamm Holz sey an dem einen Ende 18 Zoll, an dem andern 6 Zoll stark, und 18 Ellen lang: so ist sein Cubikinhalt $= \frac{36\cdot 3{,}141}{3}\cdot\left(\frac{1{,}5^2}{4}+\frac{1{,}5\cdot 0{,}5}{4}+\frac{0{,}5^2}{4}\right) =$ 30,62, reichlich $30\frac{1}{2}$, Cubikfuß.

Zusatz II. Die Seitenflächen der abgekürzten geraden Pyramide sind Trapeze von gleichen Höhen, deren Inhalt man nach §. 222. findet.

Die Seitenfläche des abgekürzten Kegels ist eine Fläche, welche von zwey concentrischen Bogen, der Peripherien der obern und untern Grundfläche, eingeschlossen wird. Den Inhalt dieser Fläche berechnet man nach §. 233. Nennt man daher bey der abgekürzten Pyramide oder bey dem abgekürzten Kegel den kleinern Umfang $= p$, den größern Umfang $= P$, und die Länge des Körpers $= l$; so ist der Inhalt der Seitenfläche $= \frac{p+P}{2}\cdot l$. Für den abgestumpften Kegel ist die Seitenfläche besonders $= (r+R)\,\pi\cdot l$, wenn r den Halbmesser der kleinern, R den Halbmesser der größern Grundfläche bedeutet.

§. 240.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Nach §. 205. ist die Kugel zwey Drittel eines Cylinders, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Nennt man daher den Halbmesser der Kugel $= r$: so wäre der Inhalt der Grundfläche des Cylinders $= r^2\pi$, und da die Höhe des Cylinders $= 2r$, also der körperliche Inhalt des Cylinders $= 2r^3\pi$ (§. 237. Beweis 4)). Folglich

der

der körperliche Inhalt der Kugel $= \frac{2}{3} \cdot 2r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$, d. h. man findet den Inhalt der Kugel, wenn man den vierfachen Würfel des Halbmessers der Kugel mit dem dritten Theile der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

Zusatz I. Nach §. 205. Zus. kann man sich die Kugel als eine Pyramide denken, deren Grundfläche $= G$, die Oberfläche der Kugel, und deren Höhe der Halbmesser der Kugel $= r$ ist. Demnach müßte seyn $\frac{G \cdot r}{3} = \frac{4}{3}r^3 \cdot \pi$ (§. 238.): folglich, wenn man mit $\frac{r}{3}$ auf beyden Seiten dividirt, $G = 4r^2\pi$, d. h. die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß, als ihre größte Kreisfläche.

Zusatz II. Nennt man den körperlichen Inhalt zweyer Kugeln K, k, und ihre Halbmesser R, r: so ist $K = \frac{4}{3}R^3 \cdot \pi$, $k = \frac{4}{3}r^3\pi$. Also $K : k = (\frac{4}{3}\pi \cdot R^3) : (\frac{4}{3}\pi \cdot r^3) = R^3 : r^3$, d. h. Kugeln verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Halbmesser oder Durchmesser.

Zusatz III. Da $r = \frac{d}{2}$, also $r^3 = \frac{d^3}{8}$, so ist auch der Inhalt der Kugel $k = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \pi = \frac{4}{24} \cdot d^3\pi = \frac{1}{6} \cdot d^3\pi$, d. h. man findet auch den Inhalt der Kugel, wenn man den Würfel ihres Durchmessers mit dem sechsten Theil der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

Zusatz IV. Aus $k = \frac{4}{3}r^3\pi$ folgt $r = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$; oder aus $k = \frac{d^3\pi}{6}$, folgt $d = \sqrt[3]{\frac{6k}{\pi}}$.

Z. B. Der Halbmesser einer Kugel sey $= 5$ Zoll: so ist ihr Inhalt $= \frac{4 \cdot 5^3 \cdot 3{,}141}{3} = 523{,}5$ Cubikzoll, ihre Oberfläche $= 4 \cdot 5^2 \cdot 3{,}141 = 314{,}1$ Quadratzoll.

III.

III.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.
Von den trigonometrischen Linien.

§. 241.

Erklärung. Die Trigonometrie lehrt, aus drey gegebnen Stücken eines Triangels (worunter wenigstens eine Seite seyn muß) die übrigen durch Rechnung zu finden, oder einen Triangel aufzulösen.

§. 242.

Erklärung. Eine winkelrechte Linie BE [Tab. V. Fig. 96.], von dem Endpuncte B des Bogens AB auf den durch den Anfangspunct A laufenden Halbmesser AC oder Durchmesser AD, heißt der Sinus des Kreisbogens AB. — Das Stück des Durchmessers AE, vom Anfangspuncte A bis zum

zum Sinus BE, ist der Queersinus oder Sinus versus des Bogens AB. — Des Bogens GB Sinus BN = EC, welcher den Bogen AB zu einem Quadranten ergänzt, heißt der Cosinus des Bogens AB.

Anmerkung. Ist in einem rechtwinklichen Triangel die eine Kathete der Sinus eines Kreisbogens, so ist die andere Kathete der Cosinus desselben Kreisbogens.

§. 243.

Lehrsatz. Der Sinus BE [F. 96.] eines Kreisbogens AB ist die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Beweis. Verlängert man BE, bis sie den Kreis in F schneidet: so ist, weil CA auf BF winkelrecht, BE = FE (§. 131.), und AB = AF (§. 142.) $= \frac{BAF}{2}$.

Zusatz I. Zwey Bogen, wie AB und BGD, die einander zu zwey Quadranten oder zu 180 Grad ergänzen, haben einerley Sinus; weil die doppelten Bogen eine gemeinschaftliche Sehne haben.

Zusatz II. Rückt man die Sehne BF, doch so, daß sie stets winkelrecht auf AD bleibt, von A nach D fort, und von D nach A zurück: so wächst diese Sehne, also auch ihre Hälften, von o an in A und D bis zum Durchmesser GH, und nimmt von da an wieder ab bis wieder zu o in D und in A. Da nun die Sehne eines Halbkreises oder eines Bogens von 180 Graden, das ist, der Durchmesser GH die größte Sehne (§. 133.), folglich der Halbmesser GC = BC = AC der größte Sinus ist; so heißt der Sinus eines Quadranten, oder der Sinus eines Bogens von 90 Graden der Sinus totus, weil alle übrige Sinus der Bogen unter 90 Graden kleiner, als der Halbmesser des Kreises sind.

§. 244.

Aufgabe. Für den Cosinus und Sinus versus eines Bogens allgemeine Formeln zu finden.

Auflö-

Auflösung. Man setze den Bogen $AB = x$, und den Sinus totus $CB = r$: so ist

1) $CB^2 = BE^2 + CE^2$ (§. 125.), das ist, $r^2 = \sin x^2 + \cos x^2$; folglich $CE = \sqrt{(CB^2 - BE^2)}$, d. i. $\cos x = \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}$.

2) $AE = AC - CE$, das ist, $\sin \operatorname{vers} x = r - \cos x$.

Anmerkung. Wenn es heißt $\sin x^2$, $\cos x^2$: so bezieht sich der Exponent nicht auf den Bogen, sondern auf die Linie, und es müßte eigentlich $(\sin x)^2$, $(\cos x)^2$ heißen.

§. 245.

Aufgabe. Den Sinus und Cosinus der einfachen und der doppelten Bogen mit einander zu vergleichen [F. 97.].

Auflösung. Mit dem Halbmesser $CA = r$ beschreibe man den Halbkreis ABD. Für den Bogen $AB = x$ ziehe man die Normallinie $BE = \sin x$. Nun ziehe man die Sehnen AB, BD, und die Normallinie CF, mit der also BD parallel ist (§. 139. u. §. 111): so ist $AF = FB$ (§. 131.) $= \sin \frac{1}{2} x$ (§. 243.), $CF = \cos \frac{1}{2} x$ (§. 242. Anm.), $DB = 2 CF = 2 \cos \frac{1}{2} x$; weil die Triangel AFC, ABD, BED, wegen der Winkel bey F, B und E, so wie bey C und D, ähnlich sind (§. 159. u. 162.). Daher verhält sich $CA : AF = BD : BE$, das ist, $r : \sin \frac{1}{2} x = 2 \cdot \cos \frac{1}{2} x : \sin x$; folglich $\sin x = \frac{2 \cdot \cos \frac{1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{2} x}{r}$, oder $\sin 2x = \frac{2 \cos x \cdot \sin x}{r}$.

Anmerkung. Weiß man also den Sinus und Cosinus eines Winkels: so kann man den Sinus, und mittelst diesem nach vorigem §. auch den Cosinus, eines doppelt so großen Winkels finden.

§. 246.

Erklärung. Die im Anfangspuncte A [F. 96.] eines Kreisbogens AB ihn berührende Linie AP, welche von dem durch den Endpunct B laufenden und gehörig verlängerten Halbmesser CP abgeschnitten wird, heißt die Tangente des Kreisbogens AB. — Der verlängerte Halbmesser CP heißt die Secante des Bogens AB. — Die Linien GR, CR, nämlich die Tangente und Secante des Bogens GB, welcher den Bogen AB zu einem Quadranten ergänzt, heißen die **Cotangente** und **Cosecante** des Bogens AB.

§. 247.

Aufgabe. Für die Tangente, Secante, Cotangente und Cosecante eines Kreisbogens allgemeine Formeln zu finden [F. 96.].

Auflösung. Da AP mit EB parallel, so ist (§. 157.) für den Sinus totus CA = CB = CG = r, und für einen Bogen AB = x

1) CE : EB = CA : AP, das ist, $\cos x : \sin x = r : \operatorname{tang} x$; folglich $\operatorname{tang} x = \frac{r \cdot \sin x}{\cos x}$.

2) CE : CA = CB : CP, d. i. $\cos x : r = r : \sec x$; folglich $\sec x = \frac{r^2}{\cos x}$. Weil ferner BN parallel mit RG, so ist

3) CN : NB = CG : GR, d. i. $\sin x : \cos x = r : \operatorname{cotg} x$; folglich $\operatorname{cotg} x = \frac{r \cdot \cos x}{\sin x}$.

4) CN : CG = CB : CR, d. i. $\sin x : r = r : \operatorname{cosec} x$; folglich $\operatorname{cosec} x = \frac{r^2}{\sin x}$.

§. 248.

Lehrsatz. Die trigonometrischen Linien ähnlicher Kreisbogen verhalten sich, wie die Halbmesser dieser Bogen [F. 98].

Beweis. Aus der Spitze C des Winkels ACB ziehe man mit den Halbmessern CA, Ca die ähnlichen Kreisbogen (§. 233. Anm.) AB, ab; auch deren Sinus BD, bd, und Tangenten AE, ae: so ist (§. 157.)

$$CB : Cb = BD : bd = CD : Cd$$
$$\text{d.i. } R : r = \sin AB : \sin ab = \cos AB : \cos ab.$$

Ferner

$$CA : Ca = AE : ae = CE : Ce$$
$$\text{d.i. } R : r = tg\,AB : tg\,ab = \sec AB : \sec ab.$$

Von den Cotangenten und Cosecanten gilt eben dieß; weil sie die Tangenten und Secanten der Ergänzung zum Quadranten sind. Sonst kann es auch von ihnen auf eben die Art erwiesen werden.

Zusatz I. Theilt man die beyden Halbmesser in gleich viele Theile, so kommt derer z. E. für sin AB und sin ab eine gleiche Anzahl, welche blos auf der Größe des Winkels ACB beruhet, dessen Maas der Bogen AB sowohl, als der Bogen ab ist. Man kann daher alle trigonometrischen Linien auch auf Winkel beziehen, so daß z. E. sin x der Sinus sowohl des Winkels, als auch des zugehörigen Bogens ist: dessen wirkliche Größe auf die Größe des angenommenen Halbmessers r ankommt; aber allgemein blos durch sein Verhältniß zu solchem Halbmesser angezeigt wird.

Zusatz II. Berechnet man für einen angenommenen Halbmesser die Sehnen der Kreisbogen auf ähnliche Art, wie §. 228.: so geben ihre Hälften die Sinus der halben Kreisbogen (§. 243.).

So ist also z. B. für dem Halbmesser $r = 1$ die Seite des regulären Sechsecks auch $= 1$ (§. 152.); folglich die halbe Seite des regulären Sechsecks, d. i. $0{,}5 = \sin\frac{60^\circ}{2}$ $= \sin 30^\circ$ (§. 243.); $\cos 30^\circ = \sqrt{(1 - \sin 30^2)} = \sqrt{(1 - 0{,}5^2)} = 0{,}86602$ (§. 244.); $\tan 30^\circ = \frac{1 \cdot \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}$ (§. 247.)

(§. 247.) $= \frac{0,50000}{0,86602} = 0,57735$; $\cot 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{0,86602}{0,50000} = 1,73205$. Die halbe Seite des regulären Zwölfecks ist $= \sin 15°$ ꝛc.

Hiernach sind, mit Anwendung mancherley Kunstgriffe, die hier nicht erklärt werden können, die Sinus der Kreisbogen für den Quadranten berechnet worden; wodurch sich, mittelst der §. 244. und §. 247. gedachten Formeln, auch die übrigen trigonometrischen Linien bestimmen, und, so viel davon nöthig sind, zusammen in Tafeln bringen lassen.

Zusatz III. Zu den in solchen Tafeln berechneten Zahlen lassen sich die zugehörigen Logarithmen mittelst der logarithmischen Tafeln für die gemeinen Zahlen finden; woraus also noch eine Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Linien, oder für die künstlichen trigonometrischen Linien, im Gegensatz der natürlichen (Zus. II.), entstanden ist.

Anmerkung. Bey Auflösung der trigonometrischen Aufgaben kann man die Rechnung auf doppelte Art führen: entweder mit den natürlichen Linien, oder mit den künstlichen, d. i. mit ihren Logarithmen; welches letztere in den meisten Fällen vorzuziehen ist. Die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln ist gewöhnlich in der Einleitung dieser Tafeln enthalten, und wird beym Unterricht die Erläuterung hierüber auch noch gegeben.

Zweyter Abschnitt.
Auflösung der Triangel.

Erstes Kapitel.
Rechtwinkliche und gleichschenkliche Triangel.

§. 249.

Aufgabe. Einen rechtwinklichen Triangel HKG [T. I. F. 7.] aufzulösen.

Auflösung I. Für den Halbmesser $GH = r$ ist $HK = \sin G$, und $GK = \cos G$. Daher $r : \sin G = GH : HK$, und $r : \cos G = GH : GK$.

Auflösung II. Für den Halbmesser $GK = r$ ist $KH = \tan G$. Daher $r : \tan G = GK : KH$.

Zusatz. Nennt man $GH = h$, $HK = a$, $GK = b$, und Winkel $HGK = A$: so ist 1) $r : \sin A = h : a$; 2) $r : \cos A = h : b$, und 3) $r : \mathrm{tg}\,A = b : a$. Daher a) $a = \frac{h \cdot \sin A}{r} = \frac{b \cdot \mathrm{tg}\,A}{r}$; b) $b = \frac{h \cdot \cos A}{r} = \frac{a \cdot r}{\mathrm{tg}\,A}$; c) $\sin A = \frac{a \cdot r}{h}$; d) $\cos A = \frac{r \cdot b}{h}$; e) $h = \frac{a \cdot r}{\sin A} = \frac{r \cdot b}{\cos A}$; f) $\mathrm{tg}\,A = \frac{a \cdot r}{b}$.

Anmerkung 1. Mittelst dieser sechs Formeln ist man im Stande, alle rechtwinkliche Triangel aufzulösen.

Z. B. 1) Die Länge einer flachen Schnur h ist $=$ 3 Lr., 5 Achtel, 6 Zoll, und der Neigungswinkel derselben $A = 15\frac{1}{4}$ Grad. Wie viel beträgt die Sohle b und Seigerteife a?

Hier muß erst die Länge der flachen Schnur oder $h = 3\frac{5}{8}$ Lr., 6 Zoll auf Zoll reducirt werden; daher $h = 296$ Zoll. Nach §. 244. Zus. Formel a) ist daher $a = \frac{h \cdot \sin A}{r} = \frac{296'' \cdot \sin 15°, 15'}{r}$. Das giebt $\log a = \log 296 + \log \sin 15°, 15' - \log r$. Und, nach §. 249. Zus. Formel b), $b = \frac{h \cdot \cos A}{r} = \frac{296'' \cdot \cos 15°, 15'}{r}$. Also $\log b = \log 296 + \log \cos 15°, 15' - \log r$ (§. 63. Zus. IV.).

log 296 =	2,47129	log 269 =	2,47129
log sin 15°, 15' =	9,42001	log cos 15°, 15' =	9,98443
	11,89130		12,45572
log r =	10,00000	log r =	10,00000
log a =	1,89130	log b =	2,45572
das ist,		das ist,	
log 77'', 8 =	0°, 7', 7'', 8'''.	log 285'', 6 =	3°, 4', 5'' 6'''.

2) Auf einem Grubenriß findet man die Sohle b eines Schachtes $= 4\frac{5}{8}$ Lachter, und die Seigerteife $a =$ $15\frac{7}{8}$ Lr.,

$15\frac{7}{8}$ Lr., 8 Zoll. Wie groß ist die Tonnenlage A dieses Schachtes, oder das Fallen des Ganges, worauf der Schacht abgesunken ist?

Hier ist $a = 1278'''$, und $b = 370'''$. Daher, nach f), $\tang A = \frac{a \cdot r}{b} = \frac{1278 \cdot r}{370}$. Also $\log \tang A$ $\log 1278 + \log r - \log 370$.

$$\begin{aligned} \log 1278 &= 3{,}10653 \\ \log r &= 10{,}00000 \\ \hline & \ 13{,}10653 \\ \log 370 &= 2{,}56820 \\ \hline \log \tang A &= 10{,}53833 = \log tg\, 73°{,}51'. \end{aligned}$$

Die Tonnenlage des Schachtes oder das Fallen des Ganges beträgt also 73°, 51'.

3) Auf einer Strecke hat man einen 60 Grad fallenden Gang überfahren. Wenn nun auf der Ebene dieses Ganges zwey Puncte $12\frac{7}{8}$ Lachter seiger unter einander lägen, wie groß würde die söhlige Entfernung dieser beyden Puncte seyn?

Nach b) ist $b = \frac{a \cdot r}{tg\,A} = \frac{1030'' \cdot r}{tg\,60°}$. Also $\log b$ $= \log 1030'' + \log r - \log \tang 60°$.

$$\begin{aligned} \log 1300'' &= 3{,}01284 \\ \log r &= 10{,}00000 \\ \hline &= 13{,}01284 \\ \log tg\,60° &= 10{,}23856 \\ \hline \log b &= 2{,}77428 = 594'' = 7°, 3', 4''. \end{aligned}$$

Anmerkung 2. Man sieht hieraus, wie man die §. 215. u. 216. gegebnen Aufgaben auch trigonometrisch auflösen kann.

Anmerkung 3. Wenn $\log r = 10{,}00000$ zu einem andern Logarithmen zu addiren oder davon zu subtrahiren ist, so darf man nur die Kennziffer des andern Logarithmen um 10 vermehren oder vermindern.

§. 250.

Aufgabe. Einen gleichschenklichen Triangel ACB [T. I. F. 5.] aufzulösen.

Auflösung. Von C ziehe man auf AB die Normallinie CD: so ist $ACD = \frac{ACB}{2}$, AD = BD

$BD = \frac{AB}{2}$ (§. 131. Zus.), und nach dem vorigen §.

1) $r : \sin\frac{C}{2} = AC : \frac{AB}{2}$, und $r : \cos\frac{C}{2} = AC : CD$.

2) $r : \tang A = \frac{AB}{2} : CD$.

§. 251.

Aufgabe. Aus der gegebnen Sehne [T. III. F. 67.] EF = 12 Zoll, der Höhe DB = 4 Zoll, eines Bogens EBF, die Länge dieses Bogens zu finden.

Auflösung. Nach §. 172. bestimme man aus der Sehne EF und Höhe DB den Durchmesser AB, welcher hier = 13 Zoll, folglich der Halbmesser CE = 6,5 Zoll, beträgt. Aus dem Halbmesser CE = 6,5 Zoll, und der halben Sehne $\frac{EF}{2}$ = 6 Zoll findet man, nach vorigem §. aus 1), den halben Centriwinkel $\frac{ECF}{2}$, nämlich $CE : \frac{EF}{2} = r : \sin\frac{ECF}{2}$, das ist, $6{,}5 : 6 = r : \sin\frac{ECF}{2}$. Hat man den halben Winkel gefunden, so weiß man auch den ganzen Winkel ECF, für welchen man nun nach §. 231. den zugehörigen Bogen EBF finden kann. Es ist also

$$\sin\frac{ECF}{2} = \frac{6 \cdot r}{6{,}5} = \log 6 + \log r - \log 6{,}5.$$

$$\log 6 + \log r = 10{,}77815 \text{ (§. 249. Anm. 3.)}$$
$$\log 6{,}5 = 0{,}81291$$
$$\overline{}$$
$$9{,}96524 = \log\sin 67^\circ, 23';$$

folg-

folglich der Winkel ECF $= 2 \cdot 67^\circ, 23' = 134^\circ, 46'$. Demnach nach §. 231. der Bogen EBF $= \frac{6,5 \cdot 3,141 \cdot 134^\circ,36'}{180^\circ} = 15,27$ Zoll.

Zusatz. Hiernach läßt sich nach §. 232. der Ausschnitt ECFB, und Abschnitt EDFB berechnen.

Zweytes Kapitel.

Schiefwinkliche Triangel.

§. 252.

Lehrsatz. In jedem Triangel ADB [T. V. F. 99.] verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüber liegenden Winkel.

Beweis. Man beschreibe durch die Scheitel A, D, B einen Kreis (§. 132.): so sind die Seiten des Triangels ADB Sehnen der Bogen, auf denen die gegenüber liegenden Winkel stehen, ihre Hälften also die Sinus der halben Bogen (§. 243.); folglich die Sinus der gegenüber liegenden Winkel (§. 138.).

Demnach ist für den Halbmesser des Kreises.

$$\sin A : \sin B = \frac{DB}{2} : \frac{DA}{2} = DB : DA$$

$$\sin B : \sin D = \frac{DA}{2} : \frac{AB}{2} = DA : AB$$

$$\overline{\sin A : \sin D \qquad = \qquad DB : AB.}$$

§. 253.

Aufgabe. In einem Triangel ADB [F. 99.] sind zwey Winkel und eine Seite gegeben, man soll die übrigen Seiten berechnen.

Auflö-

Auflösung. Da der dritte Winkel zugleich durch die beyden andern gegeben ist (§. 114.): so ist es einerley, welche Seite gegeben sey.

Z. B. Es sey AB eine Strecke, so auf einem St. 10. streichenden Gange getrieben sey. In A hat man einen St. 5,2, so wie in 60 Lachtern in B einen St. 1,4 streichenden Gang überfahren; wie viel Lachter sind von A bis an das Kreuz beyder Gänge in D aufzufahren?

Hier müssen zuerst die Winkel bey A und B in Graden und Minuten (§. 142. Zus. III.) bestimmt werden, wobey man also verfährt. Man denke sich nämlich durch A die Mittagslinie, so macht die Linie AB mit der Mittagslinie, wenn man von 12 über 1, 2 rc. rechnet, einen Winkel von $10 \cdot 15° = 150°$, und die Linie AD mit der Mittagslinie einen Winkel von $5 \cdot 15° + \frac{2 \cdot 15°}{8} = 75° + 3°, 45' = 78°, 45'$. Daher, weil beyde Linien AB, AD auf einer Seite der Mittagslinie liegen, der Winkel $A = 150° - 78°, 45' = 71°, 15'$.

Denkt man sich durch B ebenfalls eine Mittagslinie, welche mit der durch A parallel geht (§. 142. Zus. IV.); so fällt diese hier zwischen den Schenkeln BD und BA, und es macht BA mit der Mittagslinie einen Winkel von $(12 - 10) \cdot 15° = 2 \cdot 15° = 30°$, und BD mit der Mittagslinie einen Winkel von $1 \cdot 15° + \frac{4 \cdot 15°}{8} = 15° + 7°, 30' = 22°, 30'$; daher, weil beyde Schenkel BA, BD auf verschiednen Seiten der Mittagslinie liegen, der Winkel $B = 30° + 22°,$

$22°, 30' = 52°, 30'$. Also der Winkel $D = 180° - (71°, 15' + 52°, 30') = 180° - 123°, 45' = 56°, 15'$.

Nach §. 252. ist nun $\sin D : \sin B = AB : AD$, das ist, $\sin 56°, 15' : \sin 52°, 30' = 60$ Lr. $: AD = 4800'' : AD$.

Daher $AD = \frac{4800'' \cdot \sin 52°,30'}{\sin 56°,15'} = \log 4800'' + \log \sin 52°,30' - \log \sin 56°,15'$.

$$\begin{array}{rl} \log 4800'' = & 3{,}68124 \\ \log\sin 52°,30' = & 9{,}89947 \\ \hline & 13{,}58071 \\ \log\sin 56°,15' = & 9{,}91985 \\ \hline \log AD = & 3{,}66086 = \log 4580'' = 57°,2'. \end{array}$$

Auf ähnliche Art findet man auch BD.

Anmerkung. Die Beyspiele 1) und 2) des §. 218. lassen sich auch trigonometrisch auf ähnliche Weise auflösen.

Zusatz. Bezeichnet man die innern Winkel eines Triangels ABC [F. 102. 103.] mit großen, und ihre gegenüberstehenden Seiten mit denselben kleinen Buchstaben, so daß dem Winkel A die Seite $a = BC$, dem Winkel B die Seite $b = AC$, und dem Winkel C die Seite $c = AB$ gegenüber liegt: so gelten folgende allgemeine und sehr bequeme Gleichungen:

$a : b = \sin A : \sin B$; folglich $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{b \cdot \sin C}{c}$, und $b = \frac{\sin B \cdot a}{\sin A} = \frac{\sin B \cdot c}{\sin C}$.

§. 254.

Aufgabe. In einem Triangel ABC [F. 99. 101.] sind zwey Seiten und der einer derselben gegenüber liegende Winkel gegeben: man soll einen zweyten Winkel und die dritte Seite berechnen.

Auflö-

— Auflösung. Nimmt man A, AB, BD als gegeben an: so ist aus §. 252. BD : AB = sin A : sin D; wobey zwey Fälle zu unterscheiden sind:

I. Wenn BD > AB, so ist D nothwendig spitz (§. 106.), also keine Zweydeutigkeit zu besorgen.

Z. B. AB = 57,32; BC = 63,54; A = 65°, 30'; so ist $\sin D = \frac{\sin 65°,30' \cdot 57,32}{63,54} =$ log sin 65°, 30' + log 57,32 — log 63,54.

$$\begin{array}{rl} \log\sin 65°,30' = & 9,95902 \\ \log 57,32 = & 1,75831 \\ \hline & 11,71733 \\ \log 63,54 = & 1,80305 \\ \hline & 9,91428 = \log\sin 55°,10'. \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich der dritte Winkel B, und nach §. 253. die dritte Seite AD.

II. Wenn BD < AB: so lassen sich aus den gegebnen Dingen zweyerley Triangel machen, daß D spitz oder stumpf seyn kann. Denn beschreibt man aus B mit BD einen Kreisbogen EDd, verlängert AD bis d, und ziehet Bd: so ist △BDd gleichschenklich, folglich, weil BDd = d (§. 95.), ADB + BDd = ADB + d = 180°, und sin ADB = sin d (§. 243.), da dann der dritte Winkel entweder ABD oder ABd, folglich die dritte Seite entweder AD oder Ad seyn kann.

Z. B. AB = 45,37, BD = 31,56, A = 32°, 36'; so ist $\sin D = \frac{\sin 32°,36' \cdot 45,37}{31,56} =$ log sin 32°,36' + log 45,37 — log 31,56.

$$\begin{array}{rl} \log\sin 32°,36' = & 9,73140 \\ \log 45,37 = & 1,65677 \\ \hline & 11,38817 \end{array}$$

log

$$\begin{array}{rl} & 11{,}38817 \\ \log 31{,}56 = & 1{,}49914 \\ \hline & 9{,}88903 = \sin d = \sin 50^\circ{,}46'; \end{array}$$

folglich $D = 180^\circ - 50^\circ{,}46' = 129^\circ{,}14'$.

§. 255.

Lehrsatz. In jedem Triangel ACB [F. 100.] verhält sich die Summe zweyer Seiten (AB + AC) zu ihrer Differenz (AB — AC), wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der dritten Seite (ACB + ABC) zu der Tangente ihrer halben Differenz (ACB — ABC).

Beweis. Man verlängere die größere Seite BA nach D, mache AD und AE der AC gleich, ziehe DCF, und mit CE die BF parallel.

1) Für den gegebnen Δ ACB, und den gleichschenklichen Δ ACE ist der äußere Winkel DAC $= ACB + ABC$ (§. 114.) $= 2ACE = 2AEC$ (§. 95.); folglich $ACE = AEC = \frac{ACB + ABC}{2}$.

Da nun $ACB = ACE + ECB$: so ist $ECB = ACB - ACE$ (§. 17.) $= ACB - AEC = ACB - \frac{ACB + ABC}{2} = ACB - \frac{ACB}{2} - \frac{ABC}{2}$ (§. 29. Anm.) $= \frac{ACB}{2} - \frac{ABC}{2} = \frac{ACB - ABC}{2}$ (§. 25. Anm. 3.).

2) Da ferner (wegen den Parallelen CE, BF) $AEC = DBF$, und $ECB = CBF$ (§. 113.): so ist $DBF = \frac{ACB + ABC}{2}$, und $CBF = \frac{ACB - ABC}{2}$.

3) Da auch $AD = AC = AE$: so läßt sich um DCE ein Halbkreis beschreiben, daß also DCE

=

$=$ DFB ein rechter Winkel ist (§. 139. 113.). Nimmt man daher BF für den Halbmesser: so ist FD $=$ tang DBF $=$ tang $\left(\frac{ACB + ABC}{2}\right)$, und FC $=$ tang CBF $=$ tang $\left(\frac{ACB - ABC}{2}\right)$ (§. 246.).

4) Da endlich CE mit BF parallel: so ist DB : EB $=$ DF : CF (§. 157.), d. i. AB $+$ AC : AB$-$AC $=$ tang $\left(\frac{ACB+ABC}{2}\right)$: tang $\left(\frac{ACB-ABC}{2}\right)$.

§. 256.

Aufgabe. In einem Triangel ABC sind zwey Seiten AB, AC, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A gegeben: man soll die übrigen Winkel und die dritte Seite berechnen.

Auflösung I. Es sey z. B. ein Stollnflügel von B aus in Mitternacht auf einem St. 12. streichenden Gange bis A 190 Lachter, sodann von A in Mitternacht-Morgen auf einem St. 7,4. streichenden Gange bis an einen Tageschacht 80 Lachter getrieben; wenn nun von B nach C ein Queerschlag getrieben werden sollte, 1) in welcher Stunde, und 2) wie viel Lachter würde selbiger zu treiben seyn.

Hier ist also AB $= 190^\circ$, AC $= 80^\circ$, und der Winkel BAC $= 180^\circ -$ DAC $=$ $180^\circ - \left(7 \cdot 15^\circ + \frac{4 \cdot 15^\circ}{8}\right) = 67^\circ, 30'$, so wie AB$+$AC $= 270^\circ$, und AB$-$AC $= 110^\circ$ gegeben; auch ist ACB $+$ ABC $= 180^\circ -$ BAC $= 112^\circ, 30'$: folglich $\frac{ACB+ABC}{2} = 56^\circ, 15'$,

und

und man hat aus §. 255. $(AB + AC) : (AB - AC) = \text{tang}\left(\frac{ACB + ABC}{2}\right) : \text{tang}\left(\frac{ACB - ABC}{2}\right)$, d. i. $270 : 110 = \text{tang}\ 56^\circ,15' : \text{tang}\left(\frac{ACB - ABC}{2}\right)$; also $\text{tang}\left(\frac{ACB - ABC}{2}\right) = \frac{110 \cdot \text{tang}\ 56^\circ,15'}{270} =$ $\log 110 + \log \text{tang}\ 56^\circ,15' - \log 270$.

$$\begin{array}{rl}
\log \text{tang}\ 56^\circ,15' = & 10,17511 \\
\log 110 = & 2,04139 \\
\hline
& 12,21650 \\
\log 270 = & 2,43136 \\
\hline
\end{array}$$

$\log \text{tang}\left(\frac{C-B}{2}\right) = 9,78514$, giebt $\frac{ACB-ABC}{2} = 31^\circ,22'$.

Demnach ist vermöge §. 46.

$$\frac{ACB+ABC}{2} + \frac{ACB-ABC}{2} = ACB = 56^\circ,15' + 31^\circ,22' = 87^\circ,37'.$$

$$\frac{ACB+ABC}{2} - \frac{ACB-ABC}{2} = ABC = 56^\circ,15' - 31^\circ,22' = 24^\circ,53'.$$

Es wäre demnach der Queerschlag von A nach C nach Mitternacht-Morgen in der Stunde 1,4¾p zu treiben.

Auflösung II. Aus den gefundenen Winkeln ergiebt sich BC vermöge §. 252. oder 253. nämlich $\sin C : \sin A = AB : BC$, d. i. $\sin 87^\circ,37' : \sin 67^\circ,30' = 190^\circ : BC$; folglich $BC = \frac{\sin 67^\circ,30' \cdot 190^\circ}{\sin 87^\circ,37'} = \log \sin 67^\circ,30' + \log 190^\circ - \log \sin 87^\circ,37'$.

$$\begin{array}{rl}
\log 190^\circ = & 2,27875 \\
\log \sin 67^\circ,30' = & 9,96562 \\
\hline
& 12,24437 \\
\end{array}$$

log

$$12,24437$$
$$\log \sin 87^\circ,37' = 9,99959$$

$$\log BC = 2,24478 = 175,7 = 175^\circ 5',6''$$
(§. 212. Anm.), als die Länge des Queerschlags.

Dasselbe findet man aus $\sin B : \sin A = AC : BC$, wenn man obige Werthe substituirt.

Zusatz. Zieht man im $\triangle BCA$ [F. 102.] von C nach BA die Normallinie CD, wodurch die beyden rechtwinklichen Triangel BDC, ADC entstehen; so ist $CB^2 = CD^2 + BD^2$ (§. 125.). Aber $CB = a$ (§. 253. Zus.), $CD = \frac{b \cdot \sin A}{r}$ (§. 249.), $CD^2 = \frac{b^2 \cdot \sin A^2}{r^2}$, und $BD = c - \frac{b \cdot \cos A}{r}$, $BD^2 = c^2 - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + \frac{b^2 \cdot \cos A^2}{r^2}$: so ist a^2

$$= \frac{b^2 \cdot \sin A^2}{r^2} + c^2 - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + \frac{b^2 \cdot \cos A^2}{r^2}$$
$$= \frac{b^2(\sin A^2 + \cos A^2)}{r^2} - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + c^2.$$

Nun ist aber, nach §. 244. 1), $\sin A^2 + \cos A^2 = r^2$. Folglich $a^2 = b^2 - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + c^2$. Daher

$$1)\quad a = \sqrt{b^2 - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + c^2}.$$

Diese Formel dient aus zwey Seiten nebst dem eingeschloßnen Winkel sogleich die dritte Seite zu finden.

Nach vorigem Beyspiel ist $c = 190^\circ$, $b = 80^\circ$, $A = 67^\circ,30'$; daher $a = \sqrt{\left(80^2 - \frac{2 \cdot 190 \cdot 80 \cdot \cos 67^\circ,30'}{r} + 190^2\right)} = \sqrt{\left(6400 - \frac{30400 \cdot \cos 67^\circ,30'}{r} + 36100\right)} = \sqrt{(6400 - 11633 + 36100)} = \sqrt{30967} = 175,9 = 175^\circ,7',2''$.

Für einem stumpfen Winkel BAC [F. 103.] $= A$ ist $BD = c + \frac{b \cdot \cos A}{r}$, $BD^2 = c^2 + 2bc \cdot \cos A + \frac{b^2 \cdot \cos A^2}{r^2}$.

Daher für einen stumpfwinklichen $\triangle BAC$.

$$2)\quad a = \sqrt{b^2 + \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + c^2}.$$

Anmer-

Anmerkung. Eine andere Auflösung der Aufgabe in §. 256. ist, wenn man von C auf AB die Normallinie CD fället [F. 102.], da dann r : sin A = AC : CD, und r : cos A = AC : AD, woraus man CD und AD, also auch AB — AD = DB findet, folglich in dem △CDB aus CD und DB den Winkel B bestimmt (§. 249.).

§. 257.

Aufgabe. In einem Triangel ABC [F. 104.] sind alle drey Seiten gegeben; man soll die Winkel finden.

Auflösung. Aus C beschreibe man mit der kleinsten Seite CB einen Kreis, der durch B, E, F gehet. Verlängert man nun AC bis sie den Kreis in G schneidet; so ist AG = AC + CB, und AF = AC — CB. Nun ist vermöge §. 171. AB : AG = AF : AE, d. i. AB : (AC + CB) = (AC — CB) : AE, woraus man AE, folglich AB — AE = BE findet. Da nun BE die Normallinie CD halbiret (§. 131.): so hat man auch AD und DB, und kann aus diesen und den gegebnen AC, BC die Winkel A und B finden (§. 249.).

Z. B. Es sey gegeben AB = 73, AC = 62, BC = 43; folglich AG = AC + CB = 105, und AF = AC — CB = 19, da dann AE = $\frac{(AC + CB) \cdot (AC - CB)}{AB} = \frac{105 \cdot 19}{73} = 27,3$; folglich AB — AE = BE = 73 — 27,3 = 45,7;

$$\text{folglich } \frac{BE}{2} = 22,85 \text{ und}$$
$$AE = 27,3$$
$$AD = 50,15$$

Nun hat man 1) AC : AD = r : cos A, d. i.
62 : 50,15 = r : cos A

log

$$\log 50{,}15 + \log r = 11{,}70027$$
$$\log 62 = 1{,}79239$$
$$\log \cos A = 9{,}90788 = A = 36°{,}1'.$$

2) $CB : BD = r : \cos B$, d. i.

$$43 : 22{,}85 = r : \cos B$$

$$\log 22{,}85 + \log r = 11{,}35889$$
$$\log 43 = 1{,}63347$$
$$\log \cos B = 9{,}72542 = B = 57°{,}6'$$
$$A = 36°{,}1'$$
$$A + B = 93°{,}7'$$
$$C = 86°{,}53'.$$

Zusatz. Aus der in §. 256. Zus. gefundenen Formel $a^2 = b^2 - \frac{2bc \cdot \cos A}{r} + c^2$ folgt, $a^2 + \frac{2bc \cdot \cos A}{r} = b^2 + c^2$, und $\frac{2bc \cdot \cos A}{r} = b^2 + c^2 - a^2$ (§. 44. Zus. II.); folglich $\cos A = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)r}{2bc}$, welches dient, aus den drey Seiten des Triangels den von den Seiten b, c eingeschloßnen Winkel zu finden. Die übrigen beyden Winkel lassen sich dann nach §. 252. finden.

Nach vorigem Beyspiel ist $AB = c = 73$, $AC = b = 62$, $BC = a = 43$; folglich $\cos A =$

$$\frac{(62^2 + 73^2 - 40^2)r}{2 \cdot 62 \cdot 73} = \frac{(3844 + 5329 - 1849)r}{9052} = \frac{7324 \cdot r}{9052}$$

$$\log 7324 + \log 1 = 13{,}86481$$
$$\log 9052 = 3{,}95674$$
$$\log \cos A = 9{,}90807 = 35°{,}59'.$$

Anmerkung. Ist $b^2 + c^2 > a^2$, so ist A ein stumpfer Winkel, und daher statt des gefundenen spitzen Winkels seine Ergänzung zu 180° zu nehmen.

§. 258.

Aufgabe. Es sind in einem Triangel ADB [F. 99.] alle drey Seiten gegeben: man soll

soll den Halbmesser eines Kreises bestimmen, welcher sich um diesen Triangel beschreiben läßt.

Auflösung. Man bestimme nach §. 257. oder dessen Zusatz aus den drey Seiten die Winkel A, D, B. Sey nun C der Mittelpunct des um $\triangle ADB$ beschriebenen Kreises: so ist, wenn man die Halbmesser CD, CA, und auf AD die Normallinie CG zieht, der Winkel $B = \frac{ACD}{2}$ (§. 138.), und $AG = DG = \frac{AD}{2}$ (§. 131.), und es läßt sich daher aus $\frac{ACD}{2}$, $\frac{AD}{2}$ der Halbmesser CD $=$ CA nach §. 250. finden, nämlich $\sin\frac{ACD}{2} : r = \frac{AD}{2} : CD$, d. i. $\sin B : r = \frac{AD}{2} : CD$.

Z. B. Es sey $AB = 18$, $BD = 21$, $AD = 15$; so ist $\cos B = \frac{(AB^2 + BD^2 - AD^2)r}{2 \cdot AB \cdot BD} = \frac{(18^2 + 21^2 - 15^2)r}{2 \cdot 18 \cdot 21} = \frac{540 \cdot r}{756} = \cos 44^\circ, 25'$. Also $CD = \frac{AD \cdot r}{2 \cdot \sin B} = \frac{15 \cdot r}{2 \cdot \sin 44^\circ, 25'} = 10{,}7$.

§. 259.

Aufgabe. In einem Triangel ABC [T. V. F. 102.] sind alle drey Seiten gegeben; man soll den Inhalt desselben finden.

Auflösung. Es sey in dem Triangel ABC die Seite $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Man ziehe aus C die Normallinie CD als Höhe des Triangels, so ist der Inhalt des $\triangle ABC = \frac{AB \cdot CD}{2}$ =

$= \frac{c \cdot CD}{2}$ (§. 221.); weil aber CD noch unbekannt ist, so sey $CD = z$. Ferner sey $BD = x$, so ist $DA = c - x$. Nun ist nach §. 125. Zus. I. $CD^2 = BC^2 - BD^2$, d. i. $z^2 = a^2 - x^2$, und $CD^2 = CA^2 - DA^2$, d. i. $z^2 = b^2 - (c - x)^2 = b^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$. Demnach $z^2 =$

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2 \text{ (§. 15.)}$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 2cx \text{ (§. 44. Zus. I. u. II.)}$$

folglich $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = x = BD$.

d. i. $\frac{e^2 - b^2}{2c} = x$, wenn man der bequemern Auflösung wegen $a^2 + c^2 = e^2$ setzt. Da aber $e^2 - b^2 = (e + b) \cdot (e - b)$; so ist $x = \frac{(e+b) \cdot (e-b)}{2c}$, und $x^2 = \frac{(e+b)^2 \cdot (e-b)^2}{4c^2}$. Daher

$CD^2 = z^2 = a^2 - x^2$, d. i.

$z^2 = a^2 - \frac{(e+b)^2 \cdot (e-b)^2}{4c^2}$. Folglich

$$\begin{aligned}
z^2 \cdot 4c^2 &= 4c^2 a^2 - [(e+b)^2 \cdot (e-b)^2] \\
&= 4c^2 a^2 - [(e+b) \cdot (e+b) \cdot (e-b) \cdot (e-b)] \\
&= 4c^2 a^2 - [(e+b) \cdot (e-b) \cdot (e+b) \cdot (e-b)] \\
&= 4c^2 a^2 - [(e^2 - b^2) \cdot (e^2 - b^2)] \\
&= (2ca - e^2 + b^2) \cdot (2ca + e^2 - b^2) \\
&= (2ca - a^2 - c^2 + b^2) \cdot (ca + a^2 + c^2 - b^2) \\
&= (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + b + c) \cdot (a + c - b),
\end{aligned}$$

folgl. $z^2 = \frac{(a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+b+c) \cdot (a+c-b)}{4c^2}$,

daher $z = \frac{\sqrt{[(a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+b+c) \cdot (a+c-b)]}}{2c}$

$= CD$.

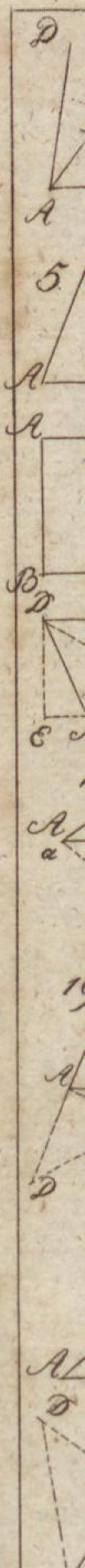
Demnach

Demnach der Inhalt des $\Delta ABC = \frac{c \cdot CD}{2} = \frac{\sqrt{[(a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+b+c)\cdot(a+c-b)]}}{4}$.

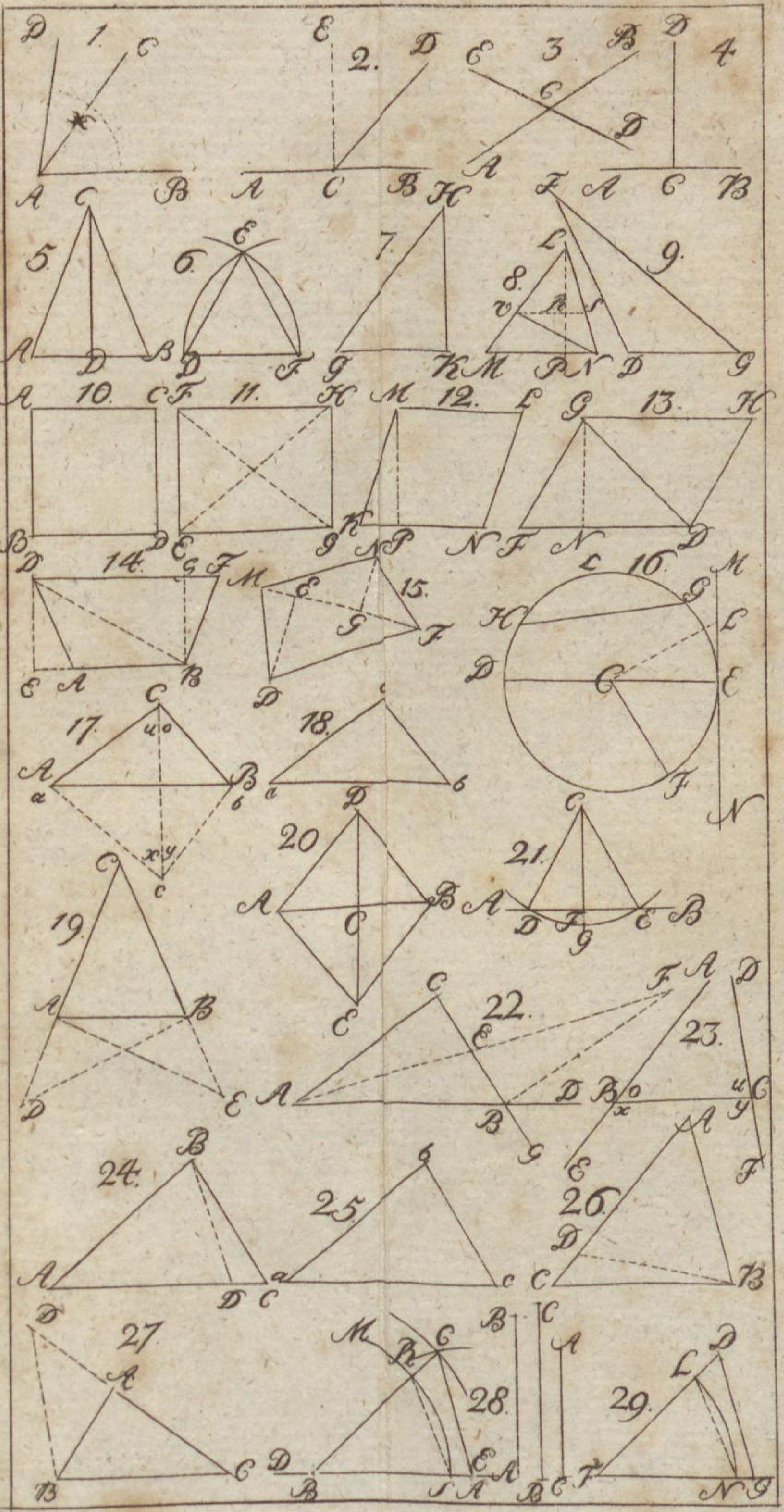
Es sey z. B. $AB = c = 36^\circ$, $BC = a = 29^\circ$, $AC = b = 15^\circ$: so ist der Inhalt des $\Delta ABC =$

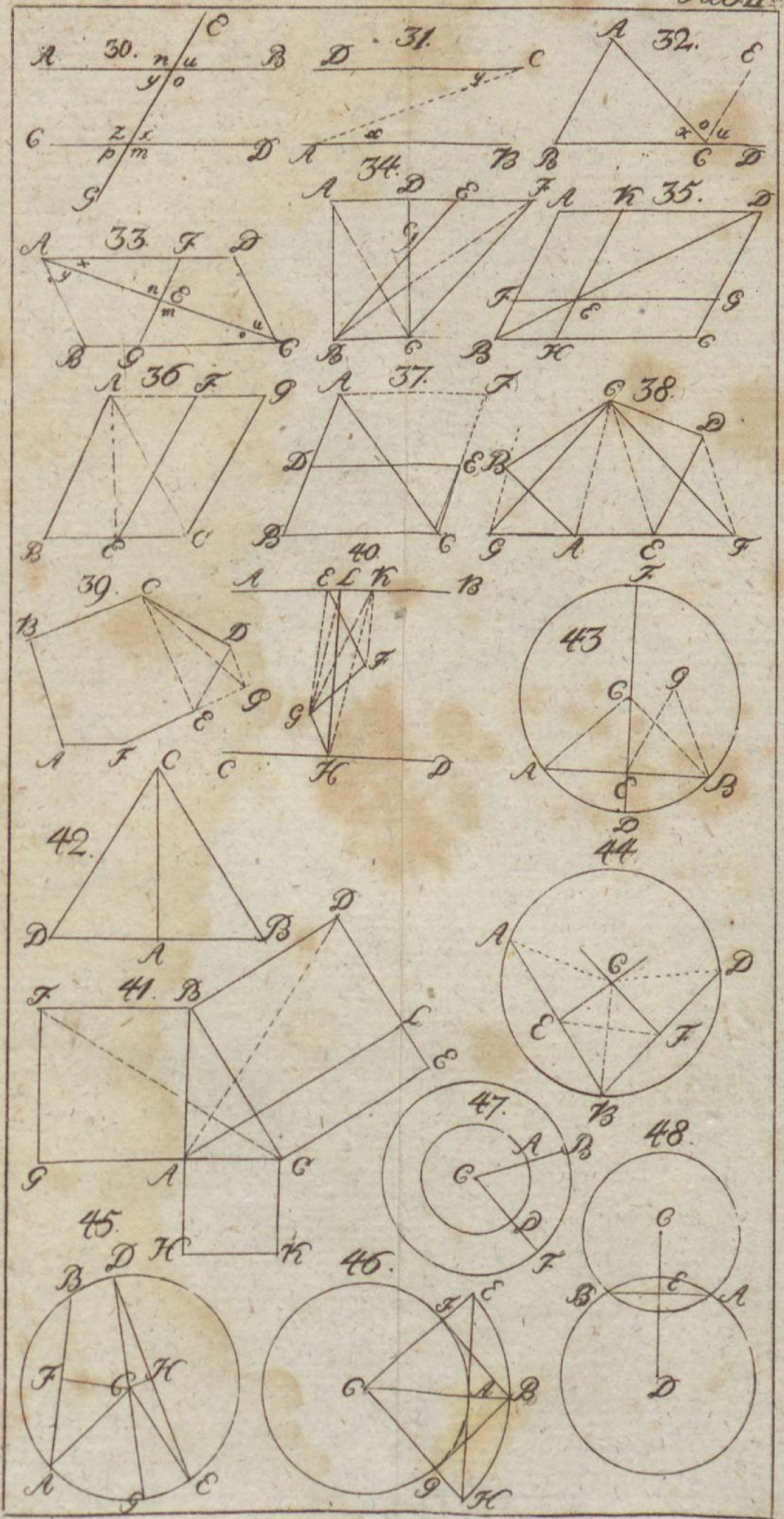
$$\frac{\sqrt{[(29+15-36)\cdot(15+36-29)\cdot(29+15+36)\cdot(29+36-15)]}}{4}$$

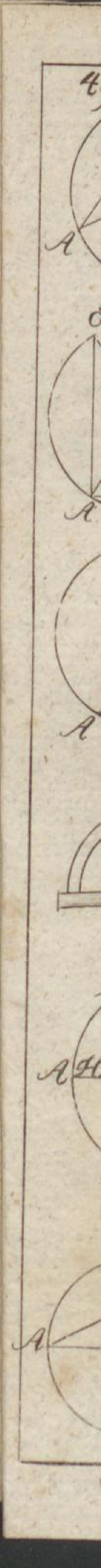
$$= \frac{\sqrt{(8 \cdot 22 \cdot 80 \cdot 50)}}{4} = \frac{\sqrt{704000}}{4} = 209^{\square\circ}{,}76^{\square\prime}.$$



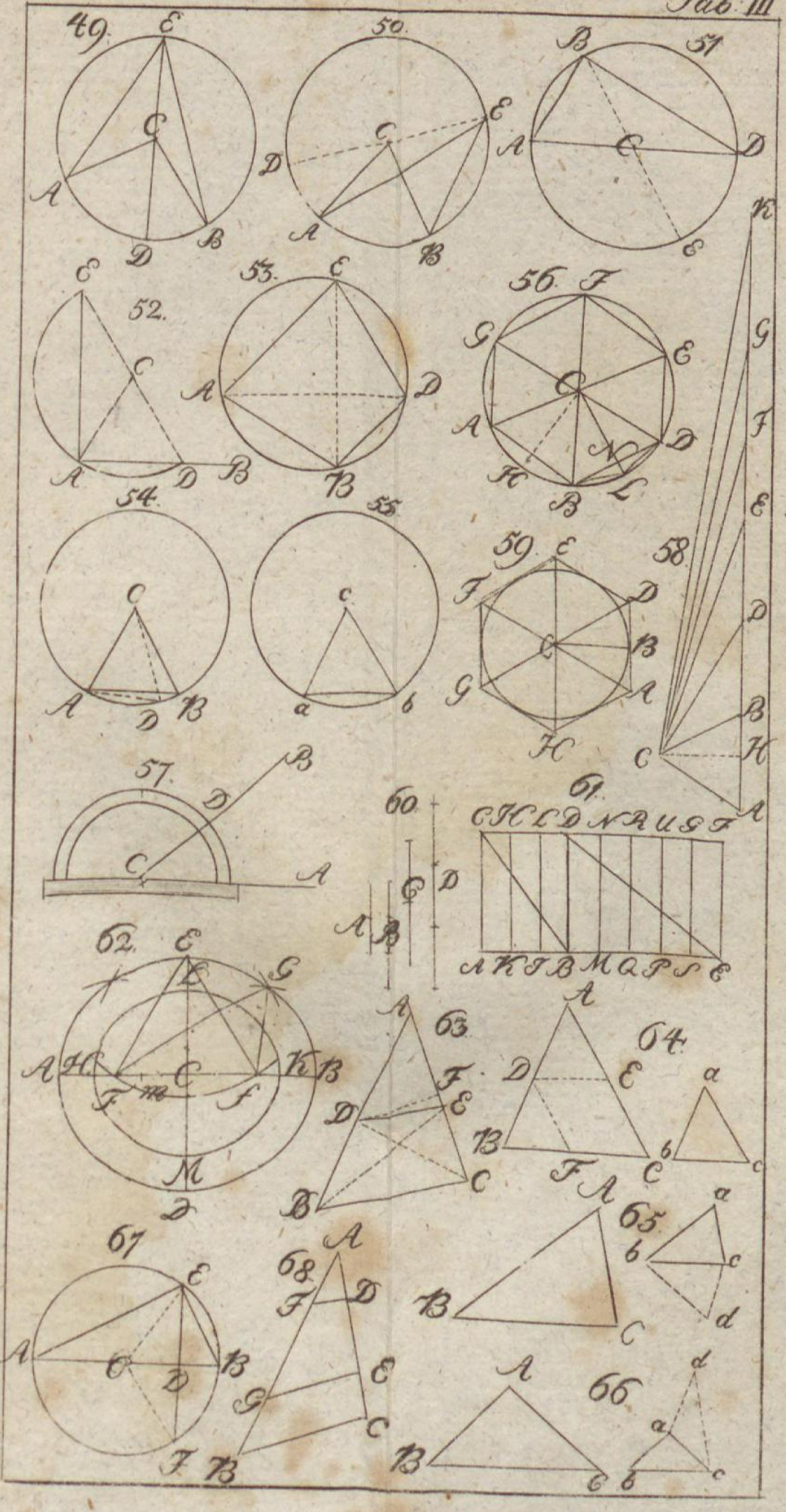
Tab: I

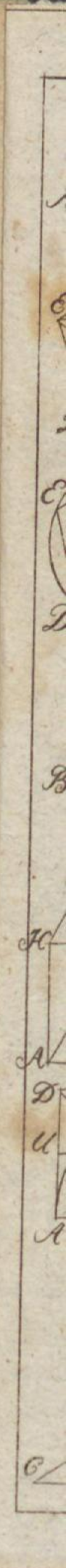



30.
31.
32.
33.
34.
35.
36
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43
44
45.
46.
47.
48.

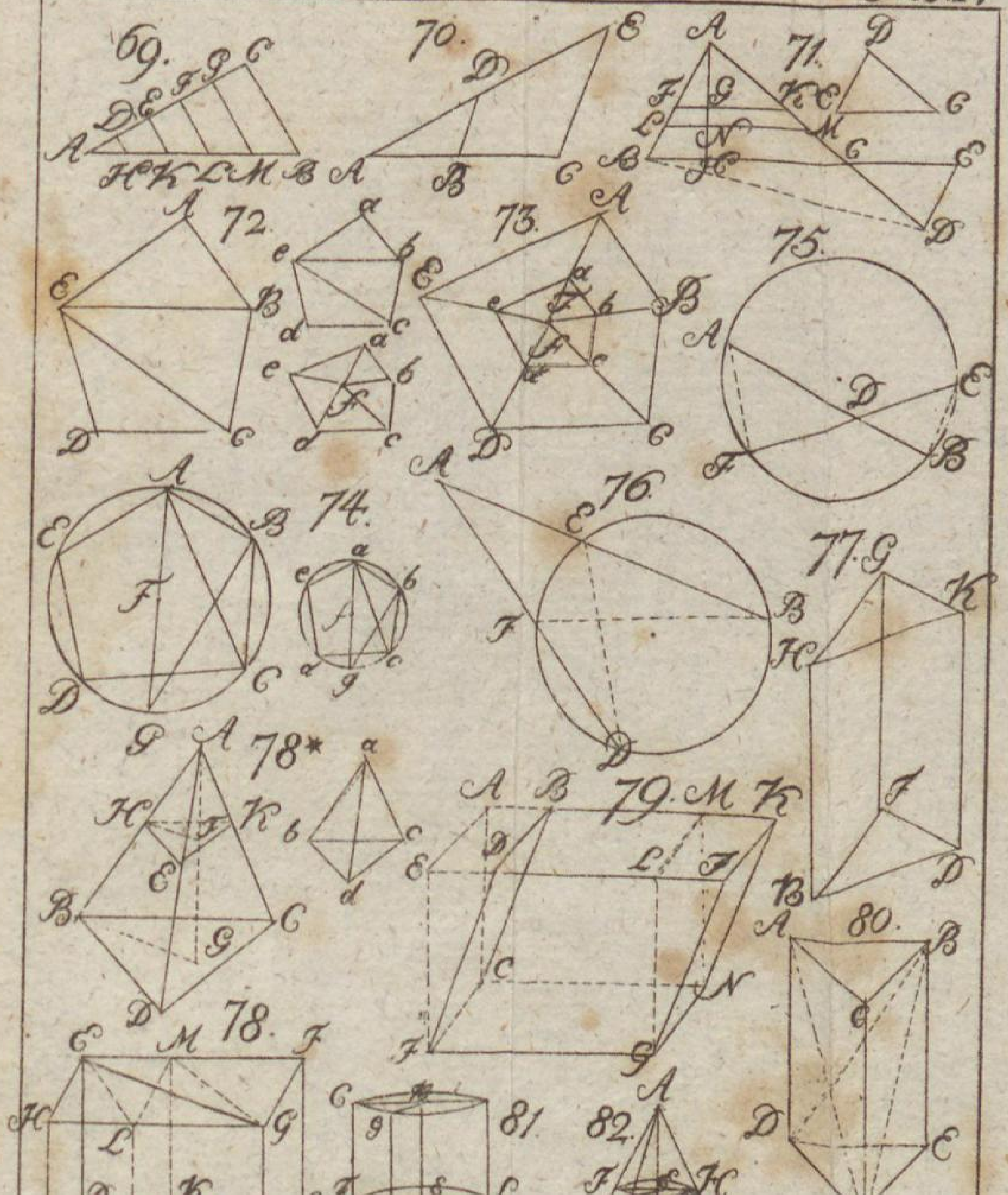


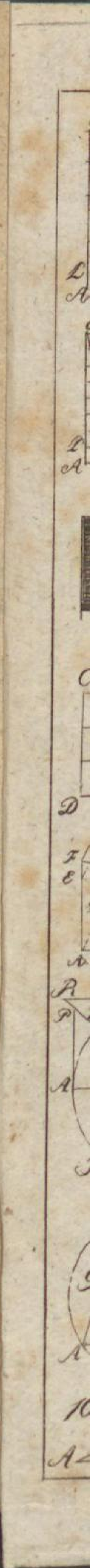
Tab. III



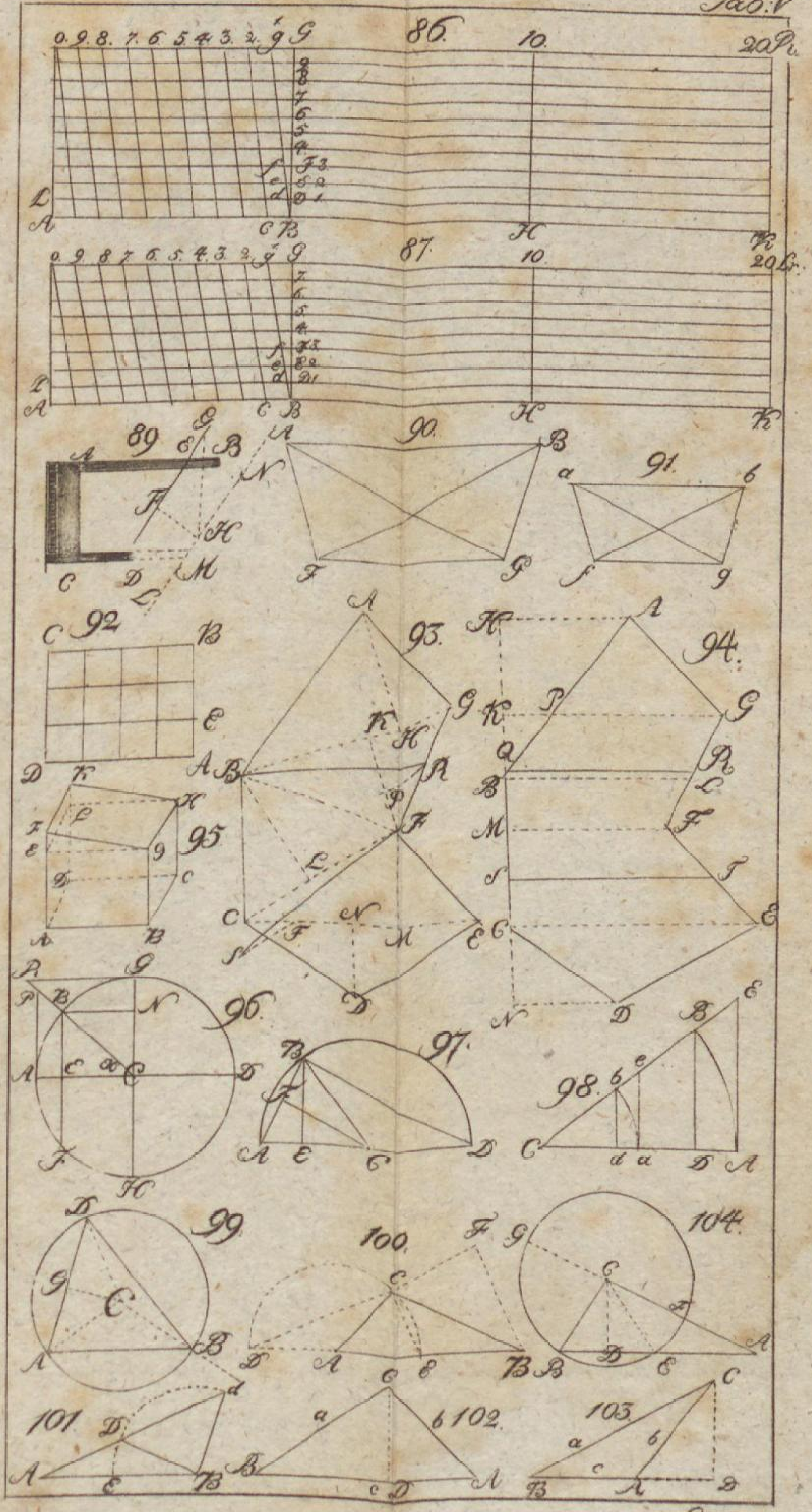


Tab: IV





Tab. V



Garbe sc.