II

Von den quadratischen und kubischen Gleichungen, von den Kegelschnitten, und von den ersten Gründen der Differential- und Integral-Rechnung.

Verfasset
von
Daniel Friedrich Hecht.

Leipzig,
bey Karl Heinrich Reclam.
1824.

Dem

Herrn

Professor D. Petri

Direktor des Martineums,

und

Herrn

D. Friedemann

Direktor des Catharineums

in Braunschweig

widmet

dieses kleine Werk,

als einen öffentlichen Beweis seiner innigsten Hochachtung und Verehrung,

der Verfasser.

Vorwort.

Da ich bey meinen Vorlesungen über die reine Elementar-Mathematik und über die ersten Gründe der mechanischen Wissenschaften die ersteren mit den quadratischen und kubischen Gleichungen, so wie mit der Lehre von den Kegelschnitten beende; dagegen die Vorlesungen über die ersten Gründe der mechanischen Wissenschaften mit den ersten Gründen der Differential- und Integral-Rechnung eröffne: so sind diese wenigen Bogen hier ein Leitfaden zu diesen Zusätzen bey jenen Vorlesungen. Ich hoffe jedoch hierdurch auch denen zu nützen, welche eben nicht meine Zuhörer sind, aber gerade nur soviel aus der höhern Analysis zu wissen wünschen, als eben hier aufgestellt ist. Diejenigen, welche freylich weiter in die höhere Analysis eingehen wollen, müssen hierüber entweder in den bereits erschienenen Werken von Euler, Fischer, Kästner, Pasquich, Schmidt, Vega u. m. a. oder die nun nächstens erscheinenden Handbücher über höhere Analysis von von Busse und Eytelwein, von dessen Handbuch bereits der erste Band erschienen ist, nachlesen.

Wenn ich mich hier auf Geom. und Mech. beziehe; so sind hierunter folgende von mir herausgegebene Werkchen, die Leitfäden bey meinen Vorlesungen, zu verstehen, nehmlich:

Lehrbuch der Arithmetik und Geometrie. Zweyter Kursus. Freyberg, bey Craz und Gerlach, 1814.

Erste Gründe der mechanischen Wissenschaften, mit Hinsicht auf Maschinenlehre bearbeitet. Freyberg, bey Craz und Gerlach, 1819.

Freyberg, im Monat November 1824.

D. Fr. Hecht.

Inhalts-Anzeige.

I.

Von den quadratischen und kubischen Gleichungen.

§. 1.

Erklärung. Gleichungen, worinnen die unbekannte Größe x (Geom. §. 42.) in einer höhern Potenz als in der ersten vorkommt, werden höhere Gleichungen genannt. Sie erhalten ihre besondern Benennungen von der höchsten Potenz, worauf x erhoben ist, und man hat daher außer den einfachen Gleichungen, oder außer den Gleichungen vom ersten Grade noch Gleichungen vom zweyten, dritten, vierten u. s. w. Grade, oder quadratische, kubische, biquadratische u. s. w. Gleichungen, je nachdem der größte Exponent von x die Zahl 2, 3, 4 u. s. w. ist.

§. 2.

Erklärung. Man nennt eine höhere Gleichung geordnet und vollständig, wenn alle Exponenten von x in ihrer natürlichen Ordnung bis auf 0 herab auf einander folgen und keiner derselben fehlt.

Die Gleichung heißt annullirt oder annullisirt, wenn alle Glieder auf einer Seite gebracht sind, und sich also auf der andern Seite der Gleichung 0 befindet. Es läßt sich daher jede geordnete, vollstän-

dige und annullisirte Gleichung allgemein so darstellen:
$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + px + q = 0$.

Ein jeder Werth von x, der so beschaffen ist, daß er an die Stelle von x gesetzt, der Gleichung Gnüge leistet, wird eine Wurzel der Gleichung genannt. Solcher Wurzelwerthe giebt es in jeder Gleichung so viele, als der Exponent n Einheiten enthält.

Zusatz 1. Gleichungen von der Form

$x^n = q$, oder $x^n - q = 0$,

nennt man reine Gleichungen, und hier ist

$$x = \sqrt[n]{q}.$$

So sind z. B. $x^2 = q$ und $x^3 = q$ reine quadratische und reine kubische Gleichungen, und daher bey ersterer $x = \sqrt{q}$, und bey der zweyten $x = \sqrt[3]{q}$.

Zusatz 2. Gleichungen von den Formen

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px = q$ oder
$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px - q = 0$

nennt man auch unreine oder gemischte Gleichungen (§. 2.)

So ist z. B.

$x^2 + ax = q$, oder
$x^2 + ax - q = 0$ } eine unreine oder gemischte quadratische Gleichung.

Und

$x^3 + ax^2 + bx = q$, oder
$x^3 + ax^2 + bx - q = 0$ } eine unreine oder gemischte kubische Gleichung,

von welchen beyden Gleichungen und deren Auflösung (Geom. §. 45.) hier vorzüglich die Rede ist.

Zusatz 3. Fehlt in einer unreinen kubischen Gleichung eines der mittlern Glieder, etwa ax^2 oder bx, so nennt man die Gleichung unvollständig.

So sind z. B. $x^3 + bx = q$, oder $x^3 + ax^2 = q$, unvollständige kubische Gleichungen.

Dasselbe gilt auch von andern höhern Gleichungen.

A. Von den unreinen oder gemischten quadratischen Gleichungen.

§. 3.

Aufgabe. Eine unreine oder gemischte quadratische Gleichung aufzulösen, oder die Wurzeln einer solchen Gleichungen zu finden. (§. 2.)

Auflößung. Da die allgemeine Form einer unreinen oder gemischten quadratischen Gleichung (§. 2. Zus. 2.) ein Theil des Quadrats eines Binomiums (Geom. §. 38.) ist, nehmlich $x^2 + ax = q$; so erhält man, wenn man auf beyden Seiten der Gleichung $= \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ hinzusetzt, auf der linken Seite der neuen Gleichung ein vollständiges Binomium, nehmlich

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = q + \frac{a^2}{4}$$

d. i. $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = q + \frac{a^2}{4}$, dessen

Wurzel $= x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(q + \frac{a^2}{4}\right)}$ ist (Geom. §. 30.)

Ist daher allgemein

$$x^2 + ax = q; \text{ so ist}$$

I) $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{a^2}{4}\right)}$

Oder da auch

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{a^2}{4}\right)} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4q + a^2}{4}\right)}$$

$$= -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{(4q + a^2)}}{2} \text{ ist; so ist}$$

II) $x = \frac{-a \pm \sqrt{(4q + a^2)}}{2}$

1) Es sey $x^2 + 4x - 21 = 0$, oder

$x^2 + 4x = 21$; so ist nach I.

$$x = -2 \pm \sqrt{(21 + 4)} = -2 \pm \sqrt{25}$$

d. i. $x = -2 \pm 5$. Also:

x entweder $= -2 + 5 = +3$,

oder $= -2 - 5 = -7$. (§. 2.)

Setzt man $x = +3$, also $x - 3 = 0$,

und $x = -7$, „ $x + 7 = 0$;

so ist $(x - 3).(x + 7) = x^2 + 4x - 21 = 0$.

Oder es sey

2) $x^2 - 9x + 14 = 0$, oder

$x^2 - 9x = -14$; so ist nach II.

$$x = \frac{+9 \pm \sqrt{(4.-14 + 81)}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{(-56 + 81)}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm 5.}{2} \text{ Demnach}$$

$$x \text{ entweder } = \frac{9+5}{2} = +7$$

$$\text{oder } = \frac{9-5}{2} = +2.$$

Und $(x-7).(x-2) = x^2 - 9x + 14 = 0.$

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^2 - 10x + 24 = 0.$
2) $x^2 + 4x - 32 = 0.$
3) $x^2 - 5x + 6 = 0.$
4) $x^2 + x - 12 = 0.$
5) $x^2 - 10x + 16 = 0.$
6) $x^2 + 11x + 30 = 0.$
7) $x^2 + 4x - 45 = 0.$
8) $x^2 - 7x + 12 = 0.$

Zusatz 1. Da in einer unreinen oder gemischten quadratischen Gleichung die Wurzel x zwey Werthe hat (§. 2.); so sey der eine Werth $= m$, der andere Werth $= n$, also

$x = m$ oder $x - m = 0$, und
$x = n$ „ $x - n = 0.$

Da nun

$$(x-m).(x-n) = x^2 - (m+n)\,x + m.n = 0.$$

Aber auch $x^2 + ax - q = 0$;

so ist demnach in jeder annullisirten unreinen oder gemischten quadratischen Gleichung der Coefficient $a = -(m+n)$, und das bekannte Glied $q = -m.n$,

d. h. nimmt man die Wurzeln einer unreinen oder gemischten quadratischen Gleichung entgegengesetzt, so ist die Summe derselben gleich dem Coefficienten a, und das Produkt derselben gleich dem bekannten Gliede q.

Beyspiel. In der Gleichung $x^2 + 4x - 45 = 0$ läßt sich die Zahl 45 in die beyden Faktoren 5 und 9 zerlegen. Nimmt man nun $x = +9$ und $x = -5$; so ist $+9 + (-5) = +4$, und $+9 \cdot -5 = -45$. Demnach die Wurzeln der Gleichung, nemlich

$$x \text{ entweder } = +9$$

$$\text{oder } = +5, \text{ und}$$

$$(x+9) \cdot (x-5) = x^2 + 4x - 45 = 0.$$

Zusatz 2. Die Größe x^2 muß in jeder quadratischen Gleichung allemal positiv seyn, das Produkt ax kann aber $\pm ax$, so wie das bekannte Glied q auch $\pm q$ seyn.

Wechseln nun in einer annullisirten unreinen oder gemischten quadratischen Gleichung die Vorzeichen; so sind beyde Wurzeln positiv, und bey einerley Zeichen sind alle Wurzeln negativ; dagegen eine Wechselung der Zeichen eine positive, und eine Folge der Zeichen eine negative Wurzel anzeigt.

So sind in der Gleichung:

1) $x^2 - 7x + 6 = 0$ die Wurzelwerthe $+1$ und $+6$.
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$ „ „ „ -2 „ -4.
3) $x^2 + 2x - 15 = 0$ „ „ „ -5 „ $+3$.
4) $x^2 - 6x - 27 = 0$ „ „ „ $+9$ „ -3.

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^2 - 16x + 48 = 0$.

2) $x^2 + 8x - 48 = 0$.
3) $x^2 + 18x + 77 = 0$.
4) $x^2 - 3x - 108 = 0$.
5) $x^2 - x - 56 + 0$.
6) $x^2 + x - 72 = 0$.
7) $x^2 + 14x + 45 = 0$.
8) $x^2 - 14x + 45 = 0$.

Zusatz 3. Hat das erste Glied einer unreinen quadratischen Gleichung einen Coefficienten, so muß dieser allemal weggeschafft werden, indem die Gleichung unter der Form $x^2 + ax = q$ oder unter der Form $x^2 + ax - q = 0$ erscheinen muß, wenn sie aufgelößt werden soll. Z. B. Aus der Gleich. $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} = 50$ erhält man daher diese: $x^2 + 3x = 180$, indem man alle Glieder mit 6 multiplicirt. Oder aus der Gleichung $2x^2 + 16x = 96$ erhält man, indem man alle Glieder mit 2 dividirt, diese: $x^2 + 8x = 48$.

Anmerkung. In §. 2. wurde gesagt, daß in jeder höhern Gleichung so viele Wurzelwerthe enthalten sind, als der höchste Exponent von x anzeigt. In einer reinen quadratischen Gleichung hat daher x zwey Werthe, weil, wenn z. B. $x^2 = 16$ ist, $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ seyn kann.

In einer reinen kubischen Gleichung hat x drey Werthe. Ist z. B. $x^3 = 8$; so ist der erste Werth $x = \sqrt[3]{8} = +2$ und daher $x - 2 = 0$.

Nun ist $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 = 0$; also

$$x = -1 \pm \sqrt{-4 + 1} = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Es ist daher der

erste Werth von $x = +2$.

zweyte " " $x = -1 + \sqrt{-3}$.

dritte " " $x = -1 - \sqrt{-3}$, und

es giebt auch

$$(x-2).(x+1-\sqrt{-3}).(x+1+\sqrt{-3}) = x^3 - 8 = 0.$$

B. Von den unreinen oder gemischten kubischen Gleichungen.

§. 4.

Erklärung. Da in jeder annullisirten kubischen Gleichung für x drey Werthe vorkommen; so mögen diese drey Werthe m, n, p, und daher $x - m = 0$, $x - n = 0$ und $x - p = 0$ seyn.

Da nun $(x-m).(x-n).(x-p) =$

$$x^3 - (m+n+p)x^2 + (mn+mp+np)x - mnp = 0.$$

Aber auch $x^3 + \quad ax^2 + \quad bx - \quad q = 0$;

so ergiebt sich für die bekannten Werthe a, b und q etwas ähnliches wie §. 3. Zusatz 1. nehmlich, daß die Summe der drey Wurzeln dem ersten Coefficienten a, die Summe aller Produkte je zweyer derselben dem zweyten Coefficienten b, und das Produkt der drey Wurzeln dem bekannten Gliede q gleich ist, wenn man bey a und q die drey Wurzeln entgegengesetzt annimmt.

Zusatz. Auch bey der annullisirten vollständigen kubischen Gleichung findet die Regel wegen der Vorzeichen wie §. 3. Zusatz 2. statt, nur so: daß nemlich die Gleichung **nicht mehr positive Wurzeln** hat, als **Wechselungen der Zeichen**, und **nicht mehr ne-**

gative Wurzeln hat, als Folgen von Zeichen in selbiger vorkommen. Das Vorzeichen des ersten Gliedes x^3 muß stets das Zeichen des Positiven seyn.

In jeder höhern Gleichung können überhaupt nicht mehr positive Wurzeln oder nicht mehr negative Wurzeln vorkommen, als Wechselungen oder Folgen der Zeichen Statt finden, und das erste Glied muß stets positiv seyn.

§. 5.

Aufgabe. Aus einer gegebenen unvollständigen kubischen Gleichung (§. 2. Zusatz 3.) eine andere, aber vollständige kubische Gleichung, abzuleiten.

Auflößung. Man setze in der gegebenen annullisirten unvollständigen Gleichung, deren Wurzel x ist, statt $x = y \pm n$; so entsteht eine vollständige kubische Gleichung, deren Wurzel y ist.

Für n kann man zwar jede ganze Zahl setzen. Erfordern es jedoch nicht besondere Umstände, so setze man statt $x = y \pm 1$, in welchem Falle die neue Gleichung immer am einfachsten erscheint.

Beyspiel 1. Es sey $x^3 - 7x^2 - 64 = 0$.

Man setze $x = y + 1$; so ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & (y+1)^3 = & y^3 + 3y^2 + 3y + 1\,^{*} \\ -7x^2 = & -7(y+1)^2 = & -7y^2 - 14y - 7\,^{**} \\ -64 & = & -64 \\ \hline x^3 - 7x^2 - 64 & = & y^3 - 4y^2 - 11y - 70 = 0. \end{array}$$

* (Geom. §. 40.)
** (Geom. §. 38.)

Weiß man nun die Wurzel y; so ist dann $x = y + 1$.

Oder setzt man in voriger Gleichung $x^3 - 7x^2 - 64 = 0$ statt $x = y - 1$; so erhält man statt

$$x^3 - 7x^2 - 64 = y^3 - 10y^2 + 17y - 72 = 0.$$

Beyspiel 2. Es sey $x^3 + 8x - 24 - 0$.

Setzt man statt $x = y + 1$; so erhält man statt

$$x^3 + 8x - 24 = y^3 + 3y^2 + 11y - 15 = 0.$$

Oder setzt man statt $x = y - 1$; so erhält man statt

$$x^3 + 8x - 24 = y^3 - 3y^2 + 11y - 33 = 0.$$

§. 6.

Aufgabe. Aus einer gegebenen vollständigen kubischen Gleichung eine andere kubische Gleichung abzuleiten, in welcher das zweyte Glied fehlt.

Auflößung. Man setze in der gegebenen vollständigen kubischen Gleichung, deren Wurzel x und Coefficient des zweyten Gliedes a ist, statt $x = y - \frac{a}{3}$; so erhält man eine zweyte kubische Gleichung, deren Wurzel y ist, in welcher aber das zweyte Glied fehlt. Denn setzt man in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + q = 0$

statt $x = y - \frac{a}{3}$; so erhält man statt

$$x^3 = \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 = y^3 - ay^2 + \ldots.$$

$$ax^2 = a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \quad + ay^2 - \ldots..$$

wo also das zweyte Glied in der zweyten Gleichung stets fehlen muß.

Beyspiel 1. Es sey $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$.

Setzt man statt $x = y - \frac{a}{3}$; so ist hier $a = -12$;

folglich $x = y + \frac{12}{3} = y + 4$, und daher

$$\begin{aligned}
x^3 &= (y+4)^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64\\
-12x^2 &= -12(y+4)^2 = \quad -12y^2 - 96y - 192\\
+57x &= +57(y+4) = \quad +57y + 228\\
&\quad -94 = \quad -94
\end{aligned}$$

Also $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = y^3 * + 9y + 6 = 0$.

Beyspiel 2. Es sey $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = 0$.

Setzt man hier statt $x = y - \frac{a}{3}$; so ist $x = y - \frac{8}{3}$

$$\begin{aligned}
\text{Daher } x^3 &= \left(y - \frac{8}{3}\right)^3 = y^3 - 8y^2 + \frac{192}{9}.y - \frac{512}{27}\\
+ 8x^2 &= + 8\left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \quad + 8y^2 - \frac{128}{3}.y + \frac{512}{9}\\
+ 19x &= + 19\left(y - \frac{8}{3}\right) = \quad + 19y + \frac{152}{3}\\
&+ \quad 12 = \quad + 12
\end{aligned}$$

Also $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = y^3 * - \frac{7}{3}.y - \frac{20}{27} = 0$

§. 7.

Aufgabe. Eine unreine oder gemischte kubische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Erste Methode. Mittelst Aufsuchung ihrer rationalen Werthe.

Man suche nach §. 4. in der gegebenen annullisirten kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx - q = 0$ das bekannte Glied q in drey rationale Faktoren zu zerlegen, deren Summe den Coefficienten a giebt. Läßt sich dies nicht thun, so nehme man willkührliche ganze Zahlen, positive und negative, worunter selbst die Zahl ± 1 seyn kann, und sehe ob die angenommene Zahl für x in die Gleichung gesetzt, der annullisirten Gleichung Genüge leistet (§. 2.). Ist dies der Fall, so dividire man mit dem annullisirten Werth der gefundenen Wurzel in die gegebene annullisirte kubische Gleichung; so erhält man eine annullisirte unreine quadratische Gleichung, deren Wurzel man nach §. 3. aufsucht, und dadurch zugleich die übrigen beyden Wurzeln der unreinen kubischen Gleichung auffindet.

Beyspiel 1. In der Gleichung

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ sind nach §. 4. Zus. alle Wurzeln positiv, und weil

$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$; aber auch

$9 = 2 + 3 + 4$: so kann seyn

$x = 2$, $x = 3$ und $x = 4$.

Für $x = 2$ erhält man

$$2^3 - 9 . 2^2 + 26 . 2 - 24 = 0$$

d. i. $8 - 36 + 52 - 24 = 0$, also $+2$ eine Wurzel der Gleichung.

Weil nun $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{x - 2} = x^2 - 7x + 12 = 0$;

so ist daher $x^2 - 7x = -12$ und

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{-48 + 49}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2},$$

und daher die zweyte Wurzel $= \dfrac{7 + 1}{2} = 4$,

so wie die dritte Wurzel $= \dfrac{7 - 1}{2} = 3$.

Auch giebt

$(x-2).(x-3).(x-4)=x^3-9x^2+26x-24=0.$

Beyspiel 2. In der Gleichung

$$x^3+10x^2-477x-486=0$$

lassen sich die drey Faktoren der Zahl 486 nicht sogleich einsehen, deren algebraische Summe 10 ist.

Man wähle demnach zuerst

$x=+1$; so erhält man $1+10-477-486=-952$.

Man wähle also zweytens

$x=-1$; so erh. man $-1+10+477-486=0$, also $x=-1$ eine Wurzel der Gleichung (§. 2.); und daher

$$\frac{x^3+10^2-477x-486}{x+1}=x^2+9x-486=0.$$

Aus der Gleichung $x^2+9x=486$ erhält man

$x=\frac{-9\pm 45}{2}$, und die drey Wurzelwerthe sind demnach $x=-1$; $x=+18$; $x=-27$.

Beyspiel 3. In der Gleichung

$x^3-5x^2+9x-5=0$ ist ein Werth der Wurzel $x=+1$, und von den andern beyden Werthen der eine oder der zweyte Werth von $x=2+\sqrt{-1}$, der dritte Werth von $x=2-\sqrt{-1}$.

Auch giebt

$(x-1).(x-2-\sqrt{-1}).(x-2+\sqrt{-1})=x^3-5x^2+9x-5=0.$

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^3-19x^2+83x-65=0.$

2) $x^3-8x^2+5x+14=0.$

3) $x^3 - 18x^2 + 87x - 110 = 0.$
4) $x^3 - 14x^2 - 5x + 70 = 0.$
5) $x^3 - 13x^2 + 49x - 45 = 0.$
6) $x^3 - 13x^2 + 38x + 16 = 0.$
7) $x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0.$
8) $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = 0.$
9) $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0.$
10) $x^3 - 13x^2 + 53x - 65 = 0.$

Zweyte Methode. Mittelst der Cardanischen Regel.

Eine jede Gleichung, welche durch die Cardanische Regel aufgelößt werden soll, muß zuvor nach §. 6. auf die Form $y^3 = P.y + Q$ gebracht werden, wenn sie nicht schon diese Form hat, und dann ist

$$y = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}$$

Denn nennt man $y = a + b$; so ist

$$y^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$
$$= a^3 + 3ab.y + b^3 = P.y + Q$$

wenn man $3ab = P$, und $a^3 + b^3 = Q$ setzt.

Aus der Gleichung $P = 3ab$ ergiebt sich

$$P^3 = 27a^3b^3,$$

und aus der Gleichung $a^3 + b^3 = Q$ erhält man $b^3 = Q - a^3$. Setzt man diesen Werth für b^3 in die Gleichung $P^3 = 27a^3b^3$; so erhält man

$$P^3 = 27a^3(Q - a^3) = 27a^3Q - 27a^6 \text{ oder}$$
$$\frac{P^3}{27} = a^3Q - a^6, \text{ oder } a^6 - Qa^3 = -\frac{P^3}{27}, \text{ oder}$$

$(a^3)^2 - Q \cdot a^3 = -\frac{P^3}{27}$, und nach §. 3.

$$a^3 = \frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}\text{; folglich}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}$$

Da nun ferner $Q = a^3 + b^3$, so findet man, wenn man den für a^3 gefundenen Werth in die Gleichung für Q substituirt,

$$Q = \frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2} + b^3\text{; folglich}$$

$$b^3 = Q - \frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}$$

$$= \frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}\text{, und}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{Q \pm \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}.$$

Nun setzt man

$$\text{für } a = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}\text{, und}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}\text{, u. weil } y = a + b\text{;}$$

so ist daher, wenn

$$y^3 = P.y + Q \text{ ist}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{\left(Q^2 - \frac{4P^3}{27}\right)}}{2}}$$

Diese allgemeine Regel hat schon vor einigen hundert Jahren der berühmte Cardan oder vielmehr Scipio Ferrei gegeben. Die Cardanische Regel ist aber nicht immer brauchbar, indem sie den Werth, welchen sie angiebt, oft in einer irrationalen, oft auch in einer unmöglichen Form darstellt, wenn gleich dieser Werth zuweilen eine rationale Zahl ist.

Beyspiel 1. Es sey

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$$

Setzt man nach §. 6. statt $x = y + 4$; so erhält man die Gleichung

$$y^3 + 9y + 6 = 0, \text{ oder}$$

$$y^3 = -9y - 6.$$

Nach der Cardanischen Regel ist nun hier

$P = -9$, und $Q = -6$; daher

$$y = \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{\left(56 + \frac{4 \cdot 729}{27}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{\left(36 + \frac{4 \cdot 729}{27}\right)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-6 + \sqrt{144}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6 - \sqrt{144}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-6 + 12}{2}} +$$

$$\sqrt[3]{\frac{-6 - 12}{2}} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-9} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}. \text{ Daher}$$

$$x = y + 4 = 4 + y = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$$

$$= 4 + 1{,}4422 - 2{,}0800 = 5{,}4422 - 2{,}0800 = 3{,}3622.$$

Beyspiel 2. Es sey

$$x^3 - 3x^2 - 22x + 24 = 0;$$

so ist hier, wenn man statt $x = y + 1$ setzt,

$$y^3 - 25y = 0. \text{ Oder}$$

$$y^3 = 25y$$

$$y^2 = 25$$

$$y = \pm 5$$

Daher $x = y + 1$ entweder $= +6$ oder $= -4$, und nach §. 4. der dritte Werth von $x = +1$. In welchem Falle man hier der Cardanischen Regel gar nicht bedurfte.

Zusatz 1. Hat man unvollständige kubische Gleichungen, in welchen das dritte Glied fehlt, so kann man solche Gleichungen entweder nach §. 7. erster Methode auflösen, oder man muß sie erst nach §. 5. umändern.

Dasselbe Verfahren kann man aber auch bey solchen unvollständigen kubischen Gleichungen anwenden, in welchen das zweyte Glied fehlt.

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^3 - 7x^2 - 64 = 0;$	10) $x^3 + 8x - 24 = 0.$
2) $x^3 - 8x^2 + 72 = 0;$	11) $x^3 + 9x^2 - 108 = 0.$
3) $x^3 - 13x - 1572 = 0;$	12) $x^3 + 12x^2 - 527 = 0.$
4) $x^3 + 13x - 1884 = 0;$	13) $x^3 - 11x^2 + 100 = 0.$
5) $x^3 - 7x - 456 = 0;$	14) $x^3 + 9x - 170 = 0.$
6) $x^3 - 7x^2 + 176 = 0;$	15) $x^3 + 9x^2 - 54 = 0.$
7) $x^3 + 12x + 32 = 0;$	16) $x^3 - 17x - 24 = 0.$
8) $x^3 + 18x - 44 = 0;$	17) $x^3 - 23x + 42 = 0.$
9) $x^3 - 19x + 30 = 0;$	18) $x^3 - 13x - 12 = 0.$

Zusatz 2. Für Gleichungen von der Form

$$y^3 + Py + Q = 0$$

findet man die Wurzeln der Gleichung, vorausgesetzt, daß der Coefficient P eine negative Größe sey, auch auf diese Weise. Man setze nemlich

$$\cos. 3\varphi = \frac{3Q}{P. \sqrt{-\frac{4}{3}. P}},$$

in welchem Falle also stets $3Q < P. \sqrt{-\frac{4}{3}. P}$ seyn muß; so ist der Gleichung $y^3 + Py + Q = 0$

erste Wurzel $y = \cos \varphi. \sqrt{-\frac{4}{3}. P}$

zweyte = = $y = \cos (120° - \varphi). \sqrt{-\frac{4}{3} P}$

dritte = = $y = \cos (120° + \varphi). \sqrt{-\frac{4}{3}. P}$.

Diese Methode gründet sich auf die Drittheilung eines Winkels.

Beyspiel 1. Es sey $y^3 - 13y - 12 = 0$; so ist hier $P = -13$ und $Q = -12$. Daher

$$\cos 3\varphi = \frac{-3. 12}{-13. \sqrt{\frac{4. 13}{3}}} = + \frac{36}{13 \sqrt{\frac{4. 13}{3}}} =$$

$\cos 48°, 18', 22''$, und $\varphi = 16°, 6', 7''$.

Die drey Wurzeln der Gleichung sind demnach

$$y = \cos 16°, 6', 7''. \sqrt{\frac{4. 13}{3}} = + 4.$$

$$y = \cos 103°, 53', 53''. \sqrt{\frac{4. 13}{3}} = - 1.$$

$$y = \cos 136°, 6', 7''. \sqrt{\frac{4. 13}{3}} = - 3.$$

Beyspiel 2. Es sey $y^3 - 39x + 70 = 0$. Hier ist $P = -39$, $Q = +70$; also

$$\cos 3\varphi = \frac{3.70}{-39.\sqrt{52}} = -\frac{210}{39.\sqrt{52}} = \cos 138^\circ,$$

$18', 30''$, und $\varphi = 46^\circ, 6', 10''$. Demnach

$y = \cos 46^\circ, 6', 10''. \sqrt{52} = +5.$

$y = \cos 73^\circ, 53', 50''. \sqrt{52} = +2.$

$y = \cos 166^\circ, 6', 10''. \sqrt{52} = -7.$

Beyspiele zur Uebung.

1) $y^3 - 19y + 30 = 0.$
2) $y^3 - 217y + 1224 = 0.$
3) $y^3 - 49y - 120 = 0.$
4) $y^3 - 7y + 6 = 0.$
5) $y^3 - 91y + 330 = 0.$
6) $y^3 - 37y - 84 = 0.$
7) $y^3 - 19y - 30 = 0.$
8) $y^3 - \frac{7}{16}y + \frac{3}{32} = 0.$
9) $y^3 - 49y + 120 = 0.$
10) $y^3 - 37y + 84 = 0.$

Zusatz 3. Sind die Coefficienten der Glieder einer kubischen Gleichung Brüche, welche man aus der Gleichung wegschaffen will; so setze man, wenn die Wurzel der gegebenen Gleichung x ist, statt $x = \frac{y}{m}$ in die gegebene Gleichung, und man erhält eine andere kubische Gleichung von der Wurzel y. In dieser zweyten Gleichung ist m das Produkt aller Nenner oder der Generalnenner der Brüche.

Ist in der allgemeinen Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + p = 0,$$

$$x = \frac{y}{m};$$ so erhält man

$$\frac{y^3}{m^3} + a.\frac{y^2}{m^2} + b.\frac{y}{m} + p = 0.$$

Multiplicirt man alle Glieder mit m^3; so ist

$$y^3 + m.ay^2 + m^3.by + m^2.p = 0,$$

in welcher Gleichung $y = mx$, u. daher $x = \frac{y}{m}$ ist.

Beyspiel. Es sey $x^3 + \frac{x^2}{6} - \frac{5x}{6} - \frac{1}{3} = 0$;

so erhält man, wenn man statt $x = \frac{y}{6}$ hier setzt, die Gleichung $y^3 + 6.\frac{1}{6}.y^2 - 6^2.\frac{5}{6}.y - 6^3.\frac{1}{3} = 0$,

d. i. $y^3 + y^2 - 30\,y - 72 = 0.$

In dieser Gleichung ist:

$y = -3$; oder $= -4$; oder $= +6$; daher

$x = -\frac{3}{6}$; oder $= -\frac{4}{6}$; oder $= +\frac{6}{6}$; das ist

$x = -\frac{1}{2}$; oder $= -\frac{2}{3}$; oder $= +1$.

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^3 - \frac{13x^2}{12} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{24} = 0.$

2) $x^3 + \frac{8x^2}{5} + \frac{9x}{100} - \frac{9}{100} = 0.$

3) $x^3 - \frac{14x^2}{3} + 7x - \frac{10}{3} = 0.$

4) $x^3 - \frac{59x^2}{28} + \frac{51x}{56} - \frac{5}{56} = 0.$

5) $x^3 - \frac{139x^2}{24} + \frac{529x}{48} + 3\frac{7}{16} = 0.$

6) $x^3 - 5\frac{7}{15}x^2 - 34\frac{3}{5}x - 25\frac{1}{5} = 0.$

§. 8.

Erklärung. Grenzen einer Wurzel heißen die Zahlen, zwischen welche eine Wurzel der Gleichung fällt. Grenzen der Wurzeln heißen die Zahlen, zwischen welchen alle Wurzeln der Gleichung fallen.

§. 9.

Aufgabe. Die Grenzen der Wurzel einer Gleichung zu finden.

Auflösung. Man bringe die gegebene Gleichung, deren Wurzel x ist, auf Null, und setze nach und nach verschiedene Zahlen anstatt x in die gegebene Gleichung, bis die eine etwas Verneintes, und die andere etwas Bejahtes giebt, weil o zwischen Negativ und Positiv liegt. Jene für x angenommenen Zahlen müssen aber nicht viel von einander verschieden seyn. Am besten ist es, wenn der Unterschied dieser angenommnen Zahlen nur = 1 ist; weil dann die Wurzel eine von den beyden Zahlen mit einem Bruche ist. Es sey

1) $x^3 - 50x - 120 = 0.$

Setzt man $x = +8$; so ist

$512 - 400 - 120 = -8.$

Setzt man $x = +9$; so ist

$729 - 450 - 120 = +159.$

Eine Wurzel der Gleichung fällt demnach zwischen $+8$ und $+9$ und zwar näher an $+8$ als an $+9$; ist also $+8$ mit einem Bruche.

2) $x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 5x - 100 = 0$

Für $x = +4$ erhält man

$256 + 128 - 160 + 20 - 100 = + 144.$

Für $x = +3$ erhält man

$81 + 54 - 90 + 15 - 100 = - 40.$

Eine Wurzel der Gleichung ist demnach $+3$ mit einem Bruche.

§. 10.

Aufgabe. Die Wurzeln der höhern unreinen oder gemischten Gleichungen durch Näherung so genau zu finden, als es in der Ausübung verlangt wird.

Auflösung. Die allgemeine Form der höhern Gleichungen ist (§. 2.)

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0.$$

Man suche nun nach voriger Aufgabe die Grenzen einer Wurzel, welche Grenzen aber nur um 1 verschieden seyn dürfen: so weiß man, daß die wahre Wurzel die eine jener Grenzzahlen und noch ein angehängter Bruch ist. Jene Grenzzahl heiße $= y$, und der angehängte Bruch $= m$; so ist offenbar $x = y + m$.

Man setze also in die allgemeine Gleichung $y+m$ statt x; so erhält man nach dem binomischen Lehrsatz *) für

$$x^n = (y+m)^n = y^n + n.my^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}.m^2.y^{n-2} + \ldots.$$

$$ax^{n-1} = a(y+m)^{n-1} = ay^{n-1} + a(n-1).m.y^{n-2} + \ldots.$$

---

*) Den binomischen Lehrsatz kann man auf folgende Weise ableiten, daß man nemlich alle Potenzen des Binomiums $(a+b)$ nach der Ordnung formirt, indem

$$(a+b)^1 = a+b \ldots\ldots\ldots = a^1 + \frac{1}{1}.b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \ldots\ldots = a^2 + \frac{2}{1}.ab + \frac{2.1}{1.2}.b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ldots\ldots = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3.2}{1.2}a\,b^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}.b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \ldots = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4.3}{1.2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}.ab^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}.b^4,$$

allgemein also

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}.b + \frac{n.(n-1)}{1.2}.a^{n-2}.b^2 + \frac{n(n-1.).(n-2)}{1.2.3}.a^{n-3}.b^3 + \ldots$$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}.a^{n-1}.b + \frac{n.(n-1)}{1.2}.a^{n-2}.b^2 - \frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3}.a^{n-3}.b^3 + \ldots \text{ ist.}$$

Weil aber m ein ächter Bruch ist, und daher die Potenzen von m als sehr kleine Brüche erscheinen müssen, so läßt man alle Glieder, in welchen m^2, m^3 u. s. w. vorkommt, weg. Man behält daher nur

$$
\begin{aligned}
(y+m)^n &= y^n + n\,.\,my^{n-1} \\
a(y+m)^{n-1} &= + ay^{n-1} + a(n-1)my^{n-2} \\
b(y+m)^{n-2} &= \phantom{y^n + ay^{n-1}} + b\,.\,y^{n-2} + b(n-2)my^{n-3} \\
&\vdots \\
q &= q \\
\hline
\text{Also } 0 &= y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + q + m[ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots]
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich

$$-m\,.\,[ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots] = y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + q$$

und nun

$$m = -\frac{y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + q}{ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots}$$

Nun ist $x = y + m$; folglich

$$x = y - \frac{y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + q}{ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots}, \text{ oder}$$

$$= \frac{ny^n + a(n-1)y^{n-1} + b(n-2)y^{n-2} + \ldots - y^n - ay^{n-1} - by^{n-2} - \ldots - q}{ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots}$$

Das ist

$$\text{I)}\ x = \frac{(n-1)y^n + a(n-2)y^{n-1} + b(n-3)y^{n-2} + \ldots - q}{ny^{n-1} + a(n-1)y^{n-2} + b(n-2)y^{n-3} + \ldots}$$

Für eine vollständige kubische Gleichung oder für eine Gleichung vom dritten Grade, wie

$$x^3 + ax^2 + bx + q = 0,$$

ist daher allgemein.

$$\text{II)}\ x = \frac{2y^3 + ay^2 - q}{3y^2 + 2ay + b},$$ wo y nach §. 9. bestimmt wird.

Für eine vollständige Gleichung vom vierten Grade, wie

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + q = 0,$$ ist

$$\text{III)}\ x = \frac{3y^4 + 2ay^3 + by^2 - q}{4y^3 + 3ay^2 + by + c},$$

wo y ebenfalls nach §. 9. erst bestimmt wird.

Für eine vollständige Gleichung vom fünften Grade, wie

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + q = 0,$$ ist,

$$\text{IV)}\ x = \frac{4y^5 + 3ay^4 + 2by^3 + cy^2 - q}{5y^4 + 4ay^3 + 3by^2 + 2cy + d},$$

u. s. f. für jede folgende höhere Gleichung.

Beyspiel 1. In der Gleichung $x^3 - 50x - 120 = 0$ ist nach §. 9. der Grenzwerth $y = +8$; daher, weil hier $a = 0$, $b = -50$ und $q = -120$, die Wurzel nach §. 10. II. =

$$x = \frac{2.8^3 + 120}{3.8^2 + 50} = \frac{1024 + 120}{192 - 50} = \frac{1144}{142} = 8{,}056.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung; so erhält man:
$8,056^3 - 50 . 8,056 - 120 = 522,9 - 402,8 - 120 = 522,9 - 522,8 = + 0,1.$

Beyspiel 2. In der Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 5x - 100 = 0$$

ist nach §. 9. der Grenzwerth $y = +3$; daher nach §. 10. III.

$$x = \frac{3.3^4 + 2.2.3^3 - 10.3^2 + 100}{4.3^3 + 3.2.3^2 - 2.10.3 + 5} =$$

$$= \frac{243 + 108 - 90 + 100}{108 + 54 - 60 + 5} = \frac{361}{107} = 3,374.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung, so erhält man:
$3,374^4 + 2.3,374^3 - 10.3,374^2 + 5.3,374 - 100 = 129,57 + 76,81 - 113,83 + 16,87 - 100 = + 9,42.$

Man substituire daher wieder statt $y = +3$ den Grenzwerth $y = +3,374$ in die Gleichung III. des §. 10. so erhält man:

$$x = \frac{3.3,374^4 + 4.3,374^3 - 10.3,374^2 + 100}{4.3,374^3 + 6.3,374^2 - 20.3,374 + 5}$$

$$= \frac{388,768 + 153,636 - 113,839 + 100}{153,636 + 68,303 - 67,48 + 5}$$

$$= \frac{528,565}{159,459} = 3,31474..$$

Substituirt man diesen Werth für x in die gegebene Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 5x - 100 = 0,$$

so erhält man
$121{,}003 + 72{,}841 - 109{,}875 + 16{,}574 - 100 = 210{,}418$
$- 209{,}875 = + 0{,}543.$

Beyspiele zur Uebung.

1) $x^3 + 4x^2 - 7x - 17{,}227 = 0.$
2) $x^3 - 6x^2 + 10x - 100 = 0.$
3) $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0.$
4) $x^3 - 20x^2 + 8x + 76{,}625 = 0.$
5) $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0.$
6) $x^3 - 15x^2 + 38x + 17 = 0.$
7) $x^3 + * + 12x - 1856{,}75 = 0.$
8) $x^3 + 2x^2 + 3x - 52 = 0.$
9) $x^3 \quad * - 24x - 351{,}875 = 0.$
10) $x^3 \quad * - 12x - 152 = 0.$
11) $x^4 - 4x^3 \quad * + 18 = 0.$
12) $x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0.$

II.

Von den Kegelschnitten.

§. 11.

Erklärung. Wenn ein gerader Kegel (Geom. §. 201.) mittelst einer Ebene geschnitten wird, so giebt es gewisse Lagen der schneidenden Ebene, in welchen die Durchschnitte von krummen Linien begrenzt werden, welche begrenzte Ebenen vorzugsweise Kegelschnitte heißen. Es giebt vier verschiedene Arten solcher Schnitte, nehmlich den Kreis, die Parabel, die Ellipse und Hyperbel, von welchen letztre drey die Apollonischen Kegelschnitte heißen, nnd von welchen hier die Rede ist, indem erstern Schnitt die gemeine Geometrie betrachtet (Geom. §. 202.)

§. 12.

Erklärung. Um die Natur einer Linie durch eine Gleichung auszudrücken, denkt man sich eine gerade Linie von andern geraden und unter sich parallelen Linien durchschnitten, durch deren Endpunkten die zu bestimmende Linie hindurch geht. Die erstere Linie heißt die Abscissenlinie, auch die Axe der Linie unter gewissen Umständen, und jeder Theil der Abscissenlinie von einem bestimmten Punkt an bis zu dem Punkt, in welchem eine der parallelen Linien sie trifft, eine Abscisse. Die parallelen Linien nennt man die Ordinaten. Eine Abscisse und die ihr zugehörige Ordinate heißen zusammen Coordinaten, und der Winkel, unter dem sie sich schneiden, der Coordinatenwinkel, welcher gewöhnlich ein rechter Winkel ist. In diesem Falle nennt man die Coordinaten dann rechtwinklige Coordinaten. Von dem Verhältniß der Coordinaten hängt die Beschaffenheit oder die Natur der zu bestimmenden Linie ab; indem also dieses Verhältniß durch eine Gleichung auf eine allgemeine Art ausgedrückt wird, wird die Beschaffenheit oder die Natur der Linie selbst dadurch bezeichnet.

Zusatz 1. Man unterscheidet aber die Linien in Linien von der ersten, zweyten, dritten u.s.w.

Ordnung, nehmlich nach dem Grade der Gleichung (§. 1.), durch welche die Linie ausgedrückt wird. So ist z. B. die gerade Linie eine Linie der ersten, die Kreislinie eine Linie der zweyten Ordnung (Geom. §. 171. Zusatz.).

Zusatz 2. In der Gleichung für eine Linie werden die Ordinaten gewöhnlich durch y, und die Abscissen mit x bezeichnet. Diese Buchstaben drücken hier also nicht sowohl unbekannte, als vielmehr veränderliche Größen aus, so wie die andern mit ihnen verbundenen Buchstaben a, b, u. s. w. die beständigen Größen bezeichnen.

Nennt man den Durchmesser eines Halbkreises $= a$, ein Segment desselben oder eine Abscisse $= x$, die zu x gehörige rechtwinklige Ordinate $= y$; so ist das zweyte Segment des Durchmessers $= a - x$, und daher

$x : y = y : a - x$ (Geom. §. 171. Zus.),

oder I.) $y^2 = x(a - x) = ax - x^2$

die Kreisgleichung in Hinsicht des Anfangspunkt des Kreisdurchmessers. Denn nennt man einen beliebigen Theil eines Kreishalbmessers $\frac{a}{2}$ vom Mittelpunkte aus $= x$, eine Abscisse, und die zu x gehörige Ordinate $= y$; so ist nach Geom. §. 125.

$$\text{II.)} \quad y^2 = \frac{a^2}{4} - x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

die Kreisgleichung aus dem Mittelpunkte.

§. 13.

Aufgabe. Die Gleichungen für die Apollonischen Kegelschnitte (§. 11.) zu finden.

Auflösung. Man denke sich einen geraden Kegel, und unter DCK (Tab. I. Fig. 1. 2. und 3.) einen durch die Axe des Kegels gehenden Schnitt (Geom. §. 201. Zus.); so steht dieser Schnitt DCK normal auf der Grundfläche DHKh des Kegels. Man denke sich ferner durch AG einen zweyten Schnitt, welcher wieder normal auf dem ersten Schnitt DCK steht; so wird der in der Oberfläche des Kegels entstehende Schnitt HAh bey G mit dem Durchmesser DK der Grundfläche des Kegels rechte Winkel machen, d. h. die geraden Linien Hh und DK werden sich in G rechtwinklig schneiden. Wenn demnach AG als eine Abscisse der krummen Linie HAh angenommen wird; so werden die beyden Normalen GH und Gh die zu dieser Abscisse gehörigen Ordinaten, oder AG und GH, so wie AG und Gh zusammengehörige und rechtwinklige Coordinaten der krummen Linie HAh seyn, welche durch vorige Schneidung in der Oberfläche des Kegels erzeugt wird.

Man kann nun aus den allgemeinen Umständen eines solchen Schnittes diejenigen Beziehungen bestimmen, welche zwischen jeder Abscisse AG und ihrer Ordinate GH allemal statt finden, und dadurch eine Gleichung für die so auf der Oberfläche des Kegels entstehende krumme Linie erhalten, welche eine Parabel ist (§. 11.), wenn die im Axentriangel DCK entstehende Schneidungslinie AB mit einer Seitenlinie

CK des Kegels parallel läuft, wie in Fig. 1; eine **Ellipse**, wenn die AB die Axe des Kegels oder beyde Seitenlinien CD und CK des Kegels unter einem schiefen Winkel schneidet, wie in Fig. 2; und eine **Hyperbel**, wenn die Schneidungslinie AB der Axe des Kegels parallel ist oder auf der Grundfläche des Kegels normal steht, wie in Fig. 3, und sich auf der entgegengesetzten Seite des Kegels oberhalb der Spitze C mit einer der verlängerten Seite KC schneidet.

In allen drey Figuren ist, weil GH normal auf dem Durchmesser DK steht, und die Grundfläche des Kegels oder jeder mit ihr parallele Schnitt ein Kreis ist (Geom. §. 202.), nun $DG : GH = GH : GK$ (Geom. §. 171. Zus.), folglich $GH^2 = GK \,.\, DG$, oder (§. 12. Zus. 2.)

$$\text{I.)} \quad y^2 = GK \,.\, DG.$$

Nun kommt es darauf an, für die Linien GK und DG gewisse Werthe aufzufinden, welche in allen drey Schnitten allgemein sind.

In allen drey Schnitten ist nun, wenn man die AE mit DK parallel zieht, wieder allgemein $AB : AE = BG : GK$, indem man sich in Fig. 1. die Linien AB und EK verlängert und in der Unendlichkeit sich schneidend denkt. Daher

$$GK = \frac{AE \,.\, BG}{AB}.$$

Ferner ist, wenn man BL mit DK auch parallel zieht, eben so allgemein: $AB : BL = AG : DG$, also

$$DG = \frac{AG \,.\, BL}{AB} = x \,.\, \frac{BL}{AB}.$$

Diese Werthe für GK und DG in die Gleichung I. substituirt, geben nun

$$y^2 = \frac{AE.BG}{AB}.x.\frac{BL}{AB} = \frac{AE.BL}{AB}.\frac{BG}{AB}.x, \text{ oder}$$

$$\text{II.)}\quad y^2 = p.\frac{BG}{AB}.x,$$

indem man die für einerley Schnitt beständige Linie $\frac{AE.BL}{AB} = p$ setzt, welche beständige Linie man bey den Kegelschnitten den Parameter nennt (Geom. §. 165.).

Bey der Parabel (Fig. 1.) ist statt

$$AB : BL = AE : p \text{ auch}$$
$$AB : BL = CE : AE, \text{ folglich}$$
$$\overline{CE : AE = AE : p,}$$

und daher bey der Parabel die beständige Linie oder der Parameter für einerley Schnitt $= p = \frac{AE^2}{CE}$ (Geom. §. 165.).

Diese für alle drey Kegelschnitte allgemeine Gleichung II. nehmlich $y^2 = p.\frac{BG}{AB}.x$, wird nun

1) für die Parabel (Fig. 1.) zu folgender, nehmlich

$$y^2 = px,$$

weil $\frac{BG}{AB} = \frac{\infty}{\infty} = 1$ ist.

Das Zeichen ∞ ist das Zeichen des Unendlich-Großen.

2) In der Ellipse (Fig. 2.) wird die Linie AB diejenige begrenzte Linie, welche man die große Axe zu

nennen und mit a zu bezeichnen pflegt. Daher für die Ellipse, weil $BG = AB - AG = a - x$ ist, nun

$$y^2 = p \cdot \frac{a - x}{a} \cdot x = px - \frac{px^2}{a}.$$

5) In der Hyperbel (Fig. 3.) ist die AB ebenfalls eine beständige Linie, welche man auch die große Axe nennt und mit a bezeichnet. Und weil hier $BG = AB + AG = a + x$ ist; so erhält man

$$y^2 = p \cdot \frac{a + x}{a} \cdot x = px + \frac{px^2}{a}.$$

Zusatz. Die Benennungen Parabel, Ellipse, Hyperbel sind griechischen Ursprungs. Weil nehmlich bey den Kegelschnitten das Quadrat der Ordinate entweder eben so groß als das Rectangel des Parameters und der zugehörigen Abscisse, oder kleiner oder größer als dieses Rectangel ist, welches die Griechen durch παραβαλλειν, congruere; ελλειπειν, deficere; ὑπερβαλλειν, excedere, ausdrückten; so wurden daraus die Namen Parabel, Ellipse und Hyperbel formirt.

Diese Schnitte heißen ferner deshalb die Apollonischen Kegelschnitte, weil Apollonius von Prega zuerst gründlich über die Kegelschnitte geschrieben hat. Man sehe P. J. Bruns allgemeine Literärgeschichte. Helmstädt bey Fleckeisen, 1804. 8. S. 108.

§. 14.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche die parallelen Sehnen einer krummen Linie entweder unter einem schiefen, oder unter einen rechten Winkel halbirt, heißt im ersten Falle ein Durchmesser, im zweyten die Axe der krummen Linie oder Curve. Der Punkt der Axe, in dem sie von der krummen Linie geschnitten wird, heißt der Scheitel, vertex, der krummen Linie, wo es keine Ordinate giebt, oder wo die Ordinate $= 0$ ist.

In einem Kegelschnitt heißt derjenige Punkt der Axe, in welchem die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt, focus; und eine gerade Linie aus dem Brennpunkt nach einem beliebigen Punkt der krummen Linie heißt eine Zuglinie, radius vector.

A. Von der Parabel.

§. 15.

Erklärung. Die Linie, für welche die Gleichung oder Function $y^2 = px$ gegeben ist, ist eine Parabel, deren Parameter die beständige Linie p ist (§. 13).

Zusatz 1. Aus der Gleichung $y^2 = px$ folgt: $x:y = y:p$ d. i. die Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen Abscisse und Parameter; oder der Parameter ist die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Ordinate, und dient als beständige Linie, die Coordinaten der krummen Linie oder Curve mit einander zu vergleichen und zu messen.

Zusatz 2. Ist $x = 0$; so ist auch $y = 0$, d. h. die Parabel schneidet die Axe im Anfangspunkt A (Fig. 4.) der Abscissenlinie AB, welcher Punkt A daher der Scheitel der Parabel ist. (§. 14.)

Zusatz 3. Aus der Gleichung $y^2 = px$ folgt $y = \pm\sqrt{px}$, d.h. zu jeder Abscisse, wie AG (Fig. 1.), gehören zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten GH, Gh, auch wird die Parabel von der Axe AB (§. 14.) halbirt.

Zusatz 4. Setzt man in einerley Parabel für zwey verschiedne Abscissen x, x', die zugehörigen Ordinaten y, $'y$; so ist, weil $y^2 = px$, auch $'y^2 = px'$, nun: $y^2 : {}'y^2 = px : px' = x : x'$, oder es ist $x : x' = y^2 : {}'y^2$ d. h. in einer Parabel verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten.

Die Schenkel der Parabel sind demnach keine geraden Linien. Denn wären sie dieß, so wäre $x : x' = y : {}'y$. Nun ist $x : x' = y^2 : {}'y^2$. Folglich wäre $y : {}'y = y^2 : {}'y^2$, welches unmöglich ist.

Zusatz 5. Hätte man die Gleichung $z^2 = \pi . u$: so wäre diese auch die Gleichung für eine Parabel, deren Parameter π, Abscisse u, und Ordinate z wären.

§. 16.

Lehrsatz. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel ist dem vierten Theil des Parameters gleich.

Beweis. Ist AB (Fig. 4.) die Axe, und in selbiger F der Brennpunkt (§. 14.); so ist die Ordinate $FE = \frac{1}{2}p$, und $FE^2 = \frac{1}{4}p^2$. Weil aber nach §. 15. auch $FE^2 = p . AF$; so ist $p . AF = \frac{1}{4}p^2$, und daher $AF = \frac{1}{4}p$.

§. 17.

Lehrsatz. Die Zuglinie (§. 14.) ist so groß als die Summe der zugehörigen Abscisse und der vierte Theil des Parameters.

Beweis. Für die Zuglinie FH (Fig. 4.) ziehe man die Ordinate HG; so ist $FH^2 = FG^2 + HG^2$. Nun ist $HG^2 = p \cdot AG$, d. i. $y^2 = px$, und $FG = AG - AF = x - \frac{1}{4}p$, also $FG^2 = x^2 - \frac{px}{2} + \frac{1}{16}p^2$. Demnach $FH^2 = x^2 - \frac{px}{2} + \frac{1}{16}p^2 + px = x^2 + \frac{px}{2} + \frac{1}{16}p^2 = (x + \frac{1}{4}p)^2$. Daher $FH = x + \frac{1}{4}p$.

Zusatz. Weil $AG = x$, $AF = \frac{1}{4}p$; so ist daher, wenn man AB rückwärts durch A verlängert, und $AD = AF$ macht, $FH = AG + AF = AG + AD = DG$.

Eben so ist $FH' = DG'$.

§. 18.

Erklärung. Diejenige Normallinie, welche auf die durch den Scheitel rückwärts verlängerte Axe der Parabel und vom Scheitel eben so weit absteht, als der Brennpunkt vom Scheitel, heißt die Richtlinie, directrix, der Parabel.

§. 19.

Lehrsatz. Jeder Punkt der Parabel hat gleichen Abstand vom Brennpunkte und von der Richtlinie.

Beweis. Man ziehe von einem beliebigen Punkt H (Fig. 4.) auf die Richtlinie DL die Normale HK, so wie die Ordinate HG; so ist $HK = GD$ (Geom.

§. 115.). Ist nun F der Brennpunkt; so ist nach §. 17. Zus. FH = GD. Demnach FH = HK.

§. 20.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Scheitel der Parabel die Axe derselben zu finden.

Auflösung und Beweis. Aus dem gegebenen Scheitel A (Fig. 5.) schneide man zu beyden Seiten gleiche Stücke AH = Ah ab, ziehe Hh, halbire sie in G, und ziehe durch A und G die gerade Linie AB: so ist AB nach §. 15. Zus. 3. die Axe der Parabel.

§. 21.

Aufgabe. Aus der gegebenen Axe der Parabel den Parameter und den Brennpunkt der Parabel zu finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe aus dem Scheitel (§. 14.) A (Fig. 5.) eine beliebige Sehne AH, errichte in H auf die AH eine Normale, welche die Axe AB in D schneidet; ferner ziehe man aus H die Ordinate HG: so ist

I) die GD der Parameter der Parabel.

Denn nach Geom. §. 162. ist AG : GH = GH : GD. Weil nun AG = x, GH = y, und nach §. 15. Zus. 1. x : y = y : p ist; so ist daher GD = p der Parameter.

Theilt man die GD in vier gleiche Theile, und trägt $\frac{1}{4}$ GD = $\frac{1}{4}$ p aus A in F; so ist

II) der Punkt F der Brennpunkt der Parabel (§. 16.).

§. 22.

Aufgabe. Der Parameter einer Parabel, oder ihr Brennpunkt, ist gegeben: man soll die Parabel verzeichnen.

Erste Auflösung und Beweis. Wenn der Parameter gegeben ist.

Man verlängere den Parameter EA (Fig. 6.) nach B hin, errichte in A eine Normale AD; beschreibe über EB mehrere Halbkreise, deren Durchmesser EG, EG′, EG″ u. s. w. größer als $EA = p$ sind. In den Endpunkten G, G′, G″ u. s. w. dieser Durchmesser ziehe man Kreis-Tangenten (Geom. §. 134. Zus. I.), und ziehe aus den Durchschnittspunkten L, L′, L″ u. s. f. bis an die Tangenten mit der AB die Parallelen LH, L′H′, L″H″, u. s. f. so liegen die Punkte A, H, H′, H″ u. s. f. in der Hälfte der Parabel oberhalb der Axe AB.

Denn da $AE = p$, $AG = LH = x$, $AL = GH = y$, und nach Geom. §. 171. Zus. $AL^2 = GH^2 = AE \cdot AG$ d. i. $y^2 = px$ ist, und es eben so bey den übrigen Linien ist; so ist die krumme Linie AH′H″, eine Parabel (§. 15.).

Die zweyte Hälfte der Parabel unterhalb der Axe AB kann nun leicht durch Verlängerung und Gleichheit der Ordinaten HG, H′G′ u. s. f. verzeichnet werden.

Zweyte Auflösung und Beweis. Wenn der Brennpunkt gegeben ist.

Man verlängere die Axe AB (Fig. 4.) rückwärts über A hinaus, so weit, daß, wenn F der gegebne Brennpunkt ist, die $AD = AF$ wird. In beliebigen

Punkten F, G, G', u. s. w. der Axe AB errichte man Normalen, und schneide sie aus F mit den Halbmessern DF, DG, DG' u. s. f.: so erhält man die Punkte E, H, H', durch welche die obere Hälfte der Parabel nach §. 17. geht, und sich aus freyer Hand verzeichnen läßt.

Die untere Hälfte läßt sich eben so, oder wie in voriger ersten Methode verzeichnen, nehmlich durch Verlängerung der Ordinaten, EF, HG, u. s. w.

§. 23.

Aufgabe. Ein Paar rechtwinklige Coordinaten einer Parabel sind gegeben: die Parabel zu verzeichnen.

Auflösung. Man trage die beyden Coordinaten auf die Schenkel eines rechten Winkels; diese beyden auf die Schenkel eines rechten Winkels aufgetragnen Coordinaten mögen nun AG und GH (Fig. 5.), und zwar AG die Abscisse, so wie GH die Ordinate seyn; so verlängere man die Abscisse AG nach G hin, ziehe die Hypothenuse AH, und errichte in H auf AH eine Normale, welche sich in D mit der verlängerten AG schneidet, und es ist nach §. 21. die DG der Parameter, mittelst welchem sich nun nach §. 22. die Parabel verzeichnen läßt.

§. 24.

Aufgabe. Auf der Seitenfläche eines geraden Kegels ist ein Punkt A gegeben: die Parabel zu verzeichnen, welche diesem Punkt zugehört.

Auflösung. Man denke sich durch den Punkt A und der Axe des geraden Kegels eine Ebene gelegt, so erhält man den gleichschenkligen Triangel DCK (Fig. 7.) (Geom. §. 201. Zus.). Ueber der Grundlinie DK beschreibe man einen Halbkreis; ziehe durch A mit dem Schenkel CK die Parallele AG, und aus G bis an Halbkreis die Normale GH: so ist AG eine Abscisse und GH die dazu gehörige Ordinate der Parabel, welche durch den Punkt A geht (§. 13.), und welche Parabel nach §. 23. verzeichnet werden kann.

§. 25.

Erklärung. Jede gerade Linie, welche eine krumme Linie oder Curve nur in einem einzigen Punkt berührt, man mag sie nach ihren beyden Endpunkten hin verlängern, so weit man will: heißt eine Tangente der Curve und dieses Berührungspunktes.

Ist A (Fig. 8.) der Scheitel einer Curve AHK, die Linie AB ihre Axe, und die Linie DL die Tangente des Punktes H; so nennt man, wenn man aus H die Ordinate HG zieht, und die Axe AB nach A hin verlängert, die von der Tangente LD begrenzte Linie GD die Subtangente des Punktes H. Errichtet man in H auf der Tangente DH eine Normale, welche die verlängerte Axe in E schneidet; so nennt man die HE die Normale und die GE die Subnormale des Punktes H.

§. 26.

Aufgabe. An einem gegebenen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Der gegebene Punkt der Parabel sey M (Tab. II. Fig. 9.). Man ziehe aus dem Brennpunkt F die Zuglinie FM, aus M auf die Richtlinie DG (§. 18.) die Normale ME, halbire den hierdurch entstehenden Winkel FME: so ist die Halbirungslinie CMN die Tangente des Punktes M.

Denn ziehet man die Linie FE; so ist, weil MF = ME (§. 19.), FMH = EMH, und HM = HM, so ist auch HF = HE, und FHM = EHM = 90°; folglich steht HN auf der EF winkelrecht oder normal. Wäre nun CM keine Tangente, so müßte die CM die Parabel in irgend einem Punkt N noch einmal berühren oder schneiden. Für diesem Fall ziehe man die Linien FN und EN, und auf die Richtlinie DG die Normale NG. Nun ist, weil HF = HE, FHN = EHN, und HN = HN, auch NF = NE. Wäre aber N ein Punkt der Parabel; so müßte NF = NG (§. 19.), folglich auch NE = NG seyn, welches nicht seyn kann, indem NE > NG ist (Geom. §. 106.) Demnach kann die verlängerte Linie CM die Parabel nicht in einem zweyten Punkt schneiden oder berühren, und ist demnach die Tangente des Punktes M (§. 25.) in der Parabel.

Zusatz 1. Verlängert man EM (Fig. 9.) nach O hin, so ist, weil ME normal auf DG ist, die EO parallel mit CB. Und weil nun FMC = EMC, EMC = NMO; so ist auch FMC = NMO, d. h. jede Linie, wie MO, welche aus einem Punkt M der Parabel mit der Axe AB parallel gezogen wird, macht mit der Tangente durch diesen

Punkt denselben Winkel, wie die Zuglinie nach diesem Punkte mit dem Tangente.

Errichtet man daher in M auf der Tangente NC die Normale MB; so ist, weil NMO = CMF, auch OMB = FMB = $\frac{1}{2}$OMF. Halbirt man daher umgekehrt den Winkel OMF, errichtet in M auf der Halbirungslinie MB, die Normale MH, verlängert sie nach ihren beyden Enden hin; so ist CMN eine Tangente des Punktes M in der Parabel.

Macht man MO = MF; so ist die Tangente CMN mit der Grundlinie FO des gleichschenklichen Triangels FMO parallel. Denn da EMF = MFO + MOF (Geom. §. 114.) = 2 MFO; (Geom. §. 95.) so ist $\frac{EMF}{2}$ = MFO, d. i. CMF = FMO, und die Linie CMN parallel FO (Geom. §. 111. 3.). Soll daher an dem Punkt M eine Tangente gezogen werden, so ziehe man die Zuglinie FM, und durch den Punkt M mit der Axe AB die Parallele MO. Nun mache man MO = MF, und ziehe durch den Punkt M mit der Grundlinie FO des gleichschenklichen Triangels FMO eine Parallele CMN; so ist diese Parallele die Tangente dieses Punktes.

Zusatz 2. Zieht man aus M (Fig. 9.) die Ordinate MQ und die Normale MB; (§. 25.) so ist, weil nach voriger Construction die FE die Tangente CN winkelrecht in H schneidet, die EF parallel mit MB, und weil auch EM parallel FB; so ist FEMB ein Parallelogramm, und EM = FB, (Geom. §. 115.) Nun ist aber auch im Rectangel DEMQ die EM = DQ;

folglich FB = DQ, und daher BQ = FD = 2AF (§. 18.) $= 2 \cdot \frac{p}{4}$ (§. 16.) oder

I) $BQ = \frac{p}{2}$, d. h. in der Parabel ist die Subnormale (§. 25.) eines Punktes dem halben Parameter gleich, und daher eine beständige Linie (§. 12. Zus. 2.).

Weil ferner im rechtwinkligen Δ MQB die $MB = \sqrt{(MQ^2 + QB^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(px + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4px + p^2}{4}\right)}$; so ist daher die Normale der Parabel

II) $MB = \frac{\sqrt{4px + p^2}}{2} = \frac{\sqrt{p(4x + p)}}{2}$.

Im rechtwinkligen Δ CMB ist CQ : QM = QM : QB, also $CQ = \frac{QM^2}{QB} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p}$; daher

III) $CQ = 2x$, d. h. in der Parabel ist die Subtangente eines Punktes stets der doppelten Abscisse dieses Punktes gleich.

Endlich ist im rechtwinkligen Δ CQM, die $CM = \sqrt{(MQ^2 + QC^2)} = \sqrt{(y^2 + 4x^2)}$, d. i. die Tangente

IV) $CM = \sqrt{(px + 4x^2)} = \sqrt{x(p + 4x)}$.

Zusatz 3. Der Ausdruck III. des vorigen Zusatzes giebt eine vierte (§. 26. u. Zus. 1.), und wohl die leichteste und sicherste Methode an die Hand, an einem gegebenen Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen, wenn der Scheitel und die Axe der Parabel zugleich mit gegeben sind.

§. 27.

Erklärung. Jede gerade Linie MK (Fig. 10.) welche von einem Punkt M der Parabel innerhalb und parallel mit der Axe AB gezogen wird, heißt ein Durchmesser der Parabel. Zieht man an den Punkt M eine Tangente (§. 26. Zus. 1. und 3.) HM, mit dieser durch einen beliebigen Punkt C des Durchmessers eine Parallele DE: so heißt M der Scheitel, CE oder CD eine Ordinate, und MC die zu dieser Ordinate gehörige Abscisse in Hinsicht des Durchmessers MK (§. 14.).

Die Linien MC und CE, oder MC und CD, heißen hier auch Coordinaten.

Anmerkung. Der Kürze halber mögen in der Folge die Coordinaten AG und GM (Fig. 10.) Axen-Coordinaten (Axenabscisse und Axenordinate), und die Coordinaten MC u. CE, oder MC u. CD Durchmesser-Coordinaten (Durchmesserabscisse u. Durchmesserordinate) oder Coordinaten des Durchmessers heißen.

§. 28.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Coordinaten des Durchmessers der Parabel zu finden.

Auflösung. Es sey HM (Fig. 10.) die Tangente, MK der Durchmesser für den Punkt M; ferner sey durch einen beliebigen Punkt C des Durchmessers die DE parallel mit HM, und nun $AG = x$, $GM = y$, $MC = u$, und CE oder $CD = z$.

Man ziehe EB normal auf die Axe AB, so wird der Durchmesser MK von der EB in K rechtwinklig geschnitten. Da nun vermöge der Construction der Δ HGM $\backsim$ Δ CKE; so ist

$$HM : MG = CE : EK \text{ also } EK = \frac{MG \, . \, CE}{HM} = \frac{y \, . \, z}{HM}.$$

Ferner ist

$$HM : HG = CE : CK \text{ also } CK = \frac{HG \, . \, CE}{HM} = \frac{2\,AG \, . \, CE}{HM} \text{ (§. 26. Zusatz 2. III.)} = \frac{2\,x \, . \, z}{HM}$$

Da nun

$$BE = BK + KE = GM + KE = y + \frac{y \, . \, z}{HM}; \text{ so ist}$$

$$BE^2 = \left(y + \frac{y \, . \, z}{HM}\right)^2 = y^2 + \frac{2\,y^2 z}{HM} + \frac{y^2 z^2}{HM^2}$$

Ferner ist

$$AB = AG + GB = AG + MC + CK = x + u + \frac{2\,x\,z}{HM},$$

und weil

$BE^2 = p \, . \, AB$ (§. 15.); so ist

$$y^2 + \frac{2\,y^2 z}{HM} + \frac{y^2 z^2}{HM^2} = p\left(x + u + \frac{2\,x\,z}{HM}\right), \text{ oder}$$

$$y^2 + \frac{2\,y^2 z}{HM} + \frac{y^2 z^2}{HM^2} = px + pu + \frac{2\,p\,x\,z}{HM}, \text{ oder}$$

$$px + \frac{2\,p\,x\,z}{HM} + \frac{p\,x\,z^2}{HM^2} = px + pu + \frac{2\,p\,x\,z}{HM}, \text{ d. i.}$$

$\frac{p\,x\,z^2}{HM^2} = pu$, oder $xz^2 = u \,.\, HM^2 = ux\,(p + 4x)$ (§. 26. Zus. 2. IV.). Daher

$$z^2 = u\,(p + 4x) = u \,.\, 4\left(\frac{p}{4} + x\right),\ \text{oder}$$

$$\text{I)}\ z^2 = 4\varrho \,.\, u \ \text{für}\ \varrho = \frac{p}{4} + x.$$

Oder da nach §. 17. die $\frac{p}{4} + x = FM$ ist; so ist $FM = \varrho$, und $4\varrho = \pi$ die vierfache Zuglinie des Punktes M. Daher auch

II) $z^2 = \pi \,.\, u$ (§. 15. Zusatz 5.), d. h. in Hinsicht auf den Durchmesser der Parabel ist das Quadrat der Ordinate eben so groß, als das Rectangel aus der vierfachen Zuglinie und der zugehörigen Abscisse (§. 13. Zus.), so daß also für einerley Durchmesser die Zuglinie als eine beständige Linie anzusehen ist.

Zusatz 1. Aus der Gleichung $z^2 = \pi \,.\, u$ folgen ähnliche Sätze, wie §. 15. Zus. 1. u. 2. so wie ferner

I) $z = \pm\sqrt{\pi u}$. d. h. zu jeder Abscisse des Durchmessers gehören zwey gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten, und es ist daher CE = CD, (Fig. 10.) (vergl. §. 15. Zusatz 3.).

Eben so folgt

II) $\pi = \frac{z^2}{u}$, so daß demnach π die dritte Proportionallinie (Geom. §. 165.) zu u und z ist; und die Zuglinie für den Scheitel des Durchmessers (§. 27.) ist

III) $\varrho = \frac{\pi}{4}$.

Zusatz 2. Ist A der Scheitel (Fig. 11.), AB die Axe einer Parabel, und man zieht für einen beliebigen Punkt T den Durchmesser TK, die Tangente RN, so wie mit der Tangente RN beliebige parallele Ordinaten, CM, C'M' ꝛc. und ergänzt die Parallelogramme TCMN, TC'M'N' ꝛc. so ist nach §. 28. II.

$$CM^2 = TN^2 = \pi . TC = \pi . NM;$$
$$C'M'^2 = TN'^2 = \pi . TC' = \pi . N'M', \text{ꝛc.}$$
$$\text{Daher } TN^2 : TN'^2 = NM : N'M'$$
$$\text{oder } NM : N'M' = TN^2 : TN'^2,$$

eine Proportion, welche für die Dynamik, und zwar in derselben für die Lehre von der Bahn der geworfnen Körper, von großer Wichtigkeit ist (Mech. §. 102.).

§. 29.

Aufgabe. Aus den gegebenen Richtungen einer Tangente und eines Durchmessers, so wie aus den gegebenen Coordinaten (§. 27.) des Durchmessers, den Brennpunkt und Scheitel der Parabel in Hinsicht der Axe der Parabel zu finden.

Auflösung und Beweis. Die Richtungen der Tangente und des Durchmessers mögen TN' und TK (Fig. 11.), so wie die gegebene Abscisse die TC und die gegebene Ordinate die CM seyn. Man verlängere die Tangente TN' durch den Punkt T nach TR hin, und mache den Winkel FTN' = KTR; so liegt in dem Schenkel TF der Brennpunkt der Parabel (§. 26. Zus. 1.); sucht man ferner zu den Coordinaten TC und CM die dritte Proportionallinie = π (§. 28. Zus. 1.

II. und §. 23.), und trägt $\frac{\pi}{4} = \varrho$ aus T nach F: so ist F der Brennpunkt der Parabel (§. 28. Zusatz 1. III.).

Durch F ziehe man nun mit dem Durchmesser TK eine Parallele, welche die Tangente TN′ in E schneidet; ziehe ferner aus T auf die FE die Normallinie TH; so liegt in der Mitte der HE; d. i. in A, der Scheitel der Parabel in Hinsicht der Axe, welche AB ist (§. 26. Zus. 2. III.).

§. 30.

Aufgabe. Es sind die Richtungen einer Tangente und eines Durchmessers, so wie die Coordinaten des (§. 27. Anm.) letztern gegeben: man soll die Parabel verzeichnen.

Erste Auflösung und Beweis. Die Richtungen der Tangente und des Durchmessers sind TN und TK (Fig. 11.) so wie die Coordinaten TC und CM, zu welchen letztern man, wie in voriger Aufgabe, die dritte Proportionallinie π sucht. Man nehme nun auf dem Durchmesser TK beliebige Abscissen TC′ ꝛc. an; suche zwischen π und jeder Abscisse TC′ ꝛc. die mittlere Proportionallinie z, (§. 28. Zus. 1.) ꝛc. Zieht man nun in den Punkten C′ ꝛc. mit der Tangente TN oder mit der Ordinate CM Parallelen, und trägt aus C′ u. s. f. die den Abscissen TC′ ꝛc. zugehörigen Ordinaten aus C′ in M′ ꝛc.; so liegen die Punkte T, M, M′ ꝛc. in einer Parabel, welche man aus freier Hand um so leichter verzeichnen kann, je mehr man dergleichen Punkte gefunden hat.

Zweyte Auflösung und Beweis. Man suche nach voriger Aufgabe §. 29. den Brennpunkt F (Fig. 11.), die Axe AB und in selbiger den Scheitel A der Parabel; so läßt sich nun die Parabel nach §. 22. verzeichnen.

§. 51.

Aufgabe. Für einen Punkt T der Parabel ist die Richtung der Tangente und für diesem Punkt die doppelte Axen-Ordinate der Parabel (§. 27. Anmerk.) gegeben: die Parabel zu verzeichnen.

Auflösung und Beweis. Für den Punkt T (Fig. 11.) sey die gegebene Tangente die TN und die Hälfte der doppelten Axen-Ordinate die TH, also H der Mittelpunct der doppelten Axen-Ordinate. In diesem Mittelpunkt H errichte man eine Normallinie HE, welche in E die verlängerte Tangente TN schneidet. Halbirt man die HE in A; so ist A der Scheitel der Parabel (§. 26. Zus. 2. III.) die AH die zur Axen-Ordinate TH gehörige Axen-Absciſſe, und es läßt sich nach §. 25. die Parabel verzeichnen.

Anmerkung. In der Dynamik ist die doppelte Axen-Ordinate die horizontale Wurfweite (Mech. §. 102. Zusatz I.) und die Richtung der Tangente TN die Richtung des geworfenen Körpers gegen den Horizont: aus welchen Daten sich die Parabel verzeichnen läßt.

§. 52.

Aufgabe. Für einem Punkt der Parabel sind die Richtungen der Tangente und der Axen-Ordinate, so wie die Länge der Axen-Abscisse (§. 27. Anm.) gegeben: die Parabel zu verzeichnen.

Auflösung und Beweis. Es mögen TX (Fig. 12.) und TK die Richtungen der Tangente und Axenordinate für einem Punkt T der Parabel seyn; so errichte man in einem beliebigen Punkt K der TK eine Normallinie KG doppelt so groß, als die Länge der gegebenen Axen-Abscisse beträgt. Aus dem Punkt G ziehe man mit der TK eine Parallele, welche die Tangente TX in E schneidet. Zieht man nun durch E mit der Normale GK die Parallele EH, halbirt EH in A: so ist A der Scheitel, und die Linien AH und HT sind Axen-Coordinaten, aus welchen sich nun nach §. 23. die Parabel verzeichnen läßt.

Anmerkung. In der Dynamik ist diese Aufgabe folgende: es ist die Richtung TX eines geworfenen Körpers gegen den Horizont TK gegeben und die größte Höhe, welche der Körper erreichen soll: die Bahn des geworfenen Körpers zn verzeichnen, wenn man den Widerstand der Luft so wol hier, als in §. 31. Anm. bei Seite setzt.

§. 33.

Aufgabe. Den Flächeninhalt, welcher zwischen den rechtwinkligen Axen-Coordinaten einer Parabel eingeschlossen wird, oder eines parabolischen Triangels Flächeninhalt zu finden.

Auflösung und Beweis. Es seyn A (Fig.

13.) der Scheitel, AB und BC die beyden rechtwinkligen Axen-Coordinaten der Parabelfläche oder des parabolischen Triangels ABC; so ergänze man nun aus den beyden Coordinaten AB und BC das Rectangel ABCD, und ziehe für dem Punkt C die Tangente CH (§. 26. Zus. 5.), welche die verlängerte Axe BA in H schneidet. Nun nehme man einen Theil dieser Tangente, nehmlich CG, so klein an, daß der sehr kleine Parabelbogen CG und das Tangentensegment CG einander gleich gesetzt werden können, und ziehe durch G mit den gegenüberstehenden Seiten des Rectangels ABCD die Parallelen NL und KE; so ist der

Δ HBC $\backsim$ Δ GLC, und daher

$$CL : GL = CB : BH \text{ oder}$$

$$CL : EB = CB : 2\,AB \text{ (§. 26. Zus. 2. III.).}$$

Folglich ist $EB \,.\, CB = 2\,AB \,.\, CL = 2\,CD \,.\, CL$ d. i. Rectangel $EBCK = 2 \,.\, CDNL$, oder weil man vermöge der Annahme die unendlich kleinen Triangel GLC und GKC einander gleich setzen kann; so kann man auch die Fläche $EBCG = 2 \,.\, CDNG$ setzen.

Denkt man sich nun den Parabelbogen CA aus unendlich kleinen Bogen bestehend, zieht durch jedem Endpunkt jedes unendlich kleinen Bogens mit den gegenüberstehenden Seiten des Rectangels Parallelen; so läßt sich allemal eben so erweisen, daß die kleine Fläche innerhalb des parabolischen Triangels doppelt so groß als die zugehörige kleine Fläche außerhalb demselben, und daß also durch Summirung der parabolische Triangel ABC doppelt so groß als die Fläche CDA ist. Da sich nun in diesem Falle verhält die Fläche ABC:

Fläche CDA $= 2:1$; so ist demnach $ABC + CDA : ABC = 3:2$ (Geom. §. 58. Zus. I.) d. i. Rectangel $ABCD : ABC = 3:2$, und der parabolische Triangel $ABC = \frac{2}{3}. ABCD = \frac{2}{3}. AB . BC.$

§. 34.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebnen geraden Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung und Beweis. Man betrachte die beyden gegebnen Linien als die Parameter zweyer Parabeln; construire einen rechten Winkel CAB (Fig. 14.) beschreibe mittelst der ersten der gegebnen Linien $= a$ über der Axe AC und aus dem Scheitel A nach §. 22. die Parabel AGK, so wie mittelst der zweyten der gegebnen Linien $= b$ über der Axe AB aus dem Scheitel A die Parabel AGH; so werden sich die Parabeln in den Punkt G schneiden. Aus dem Punkt G ziehe man auf die AC und AB die Normalen GE und GD; so sind diese Linien die zwey mittleren Proportionallinien, und es muß sich verhalten:

$$a : EG = EG : GD = GD : b.$$

Denn in der Parabel AGK ist

$$EG^2 = a . AE = a . GD; \text{ daher}$$
$$a : EG = EG : GD.$$

In der Parabel AGH ist

$$GD^2 = b . AD = b . EG, \text{ daher}$$
$$b : GD = GD : EG \text{ oder}$$
$$EG : GD = GD : b$$

Demnach

$$a : EG = EG : GD = GD : b.$$

Zusatz. Nimmt man $b = 2a$; so wäre, weil

$$a : EG = EG : GD$$

$$\text{also } EG^2 = a \cdot GD.$$

$$\text{und } EG^4 = a^2 \cdot GD^2$$

weil ferner

$$EG : GD = GD : 2a$$

$$\text{so ist } GD^2 = EG \cdot 2a$$

Setzt man diesen Werth für GD^2 in die Gleichung $EG^4 = a^2 \cdot GD^2$; so erhält man

$$EG^4 = 2a^3 \cdot EG, \text{ oder}$$

$$EG^3 = 2a^3.$$

Ist nun a die Seite eines gegebnen Würfels; so ist EG die Seite eines doppelt so großen Würfels als der gegebene.

Diese Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, gehört unter die wichtigsten Aufgaben der Mathematik, und ist unter dem Namen der aus dem Alterthume berühmten Delischen Aufgabe bekannt.

Anmerkung. Dieser erste Kegelschnitt, die Parabel, ist hier um deswillen etwas ausführlich betrachtet worden, indem diese Curve, wie schon erwähnt, für die Dynamik (§. 28. Zus. 2.), aber aber auch für die Hydraulik (Mech. §. 132.) so wie überhaupt für die Maschinenlehre (Mech. §. 162. Zus. II.) wichtig wird, was bey den folgenden beyden Kegelschnitten nicht so der Fall ist.

B. Von der Ellipse.

§. 35.

Erklärung. Die Linie, für welche die Funktion $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ gegeben ist, ist eine **Ellipse**, deren **Parameter** und **große Axe** die beständigen Linien p und a sind (§. 13.).

Zusatz 1. Für $y = 0$ ist entweder $x = 0$, oder $x = a$. Ist also A (Fig. 15.) der Anfang der Abscissen und $AB = a$: so sind A und B in der Axe und Ellipse zugleich, folglich ihre **Scheitel** (§. 14.).

Zusatz 2. Aus der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ folgt, $y = \pm\sqrt{\left(px - \frac{px^2}{a}\right)}$, d. h. zu jeder Abscisse, wie AG (Tab. I. Fig. 2.) gehören zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten GH, Gh. Die Ellipse ist daher eine in sich selbst zurücklaufende Linie und wird von der Axe halbirt.

Zusatz 3. Aus der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ folgt auch $ay^2 = pax - px^2 = p(ax - x^2) = px(a - x)$; folglich $y^2 : x(a - x) = p : a$, d. i. (Tab. II. Fig. 15.) $GH^2 : AG \cdot GB = p : a$ oder das Quadrat jeder Ordinate verhält sich zu dem unter den Abschnitten der großen Axe enthaltnen Rectangel, wie der Parameter zur großen Axe.

Zusatz 4. Für zwey beliebige Abscissen x, x' setze man die zugehörigen Ordinaten y, y': so ist, weil auch $ay'^2 = px'(a - x')$ oder $y'^2 : x'(a - x') = p : a$ ist, nun $y^2 : y'^2 = x(a - x) : x'(a - x')$.

Zusatz 5. Ist x gegen a sehr klein, so kann man in dem Ausdruck $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ den Quotienten $\frac{px^2}{a} = o$ setzen, und dann wird $y^2 = px$. Man kann daher in der Nähe des Scheitels der Ellipse statt des kleinen Ellipsenbogens auch einen kleinen Parabelbogen annehmen.

§. 36.

Erklärung. Die Mitte C der großen Axe AB (Fig. 15.) heißt der Mittelpunkt der Ellipse, und eine rechtwinklige Ordinate CD aus diesem Punkt bis an die Peripherie der Ellipse heißt die halbe kleine Axe, welche man mit $\frac{b}{2}$ zu bezeichnen pflegt.

Zusatz. Für $x = \frac{a}{2}$ ist $y = \frac{b}{2}$; folglich

$$y^2 = \frac{b^2}{4} = p \cdot \frac{a}{2} - p \cdot \frac{a^2}{4a} (\S. 35.) = p \cdot \frac{a}{2} -$$

$$p \cdot \frac{a}{4} = \frac{pa}{4}. \text{ Folglich}$$

I) $\frac{1}{2} b = \pm \sqrt{\frac{pa}{2}}$, und

II) $p = \frac{b^2}{a}$, also der Parameter die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe.

§. 37.

Aufgabe. Eine Funktion oder Gleichung für die Ellipse durch die große und kleine Axe anzugeben.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (§. 35.) für $p = \frac{b^2}{a}$ (§. 36. Zus. II.); so erhält man $y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{x^2}{a} = \frac{b^2 ax - b^2 x^2}{a^2}$, d. i. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (ax - x^2)$.

Zusatz 1. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (ax - x^2)$ folgt $a^2 y^2 = b^2 (ax - x^2) = b^2 \cdot x (a - x)$; folglich $y^2 : x (a - x) = b^2 : a^2$ (vergleiche §. 35. Zusatz 3.) d. i. (Fig. 15.) $GH^2 : AG \cdot GB = b^2 : a^2$, oder das Quadrat jeder Ordinate verhält sich zu dem unter den Abschnitten der großen Axe enthaltnen Rectangel, wie des Quadrat der kleinen Axe zu dem Quadrat der großen Axe.

Zusatz 2. Mittelst vorigen Satzes findet man die Ordinate GH durch geometrische Construction, wenn man $AG \cdot GB = z^2$ sucht (Geom. §. 221. Zus. II.); da dann $a^2 : b^2 = z^2 : PM^2$ und $a : b = z : PM$ ist.

Zusatz 3. Es sey (Fig. 17.) AG ein Kreisbogen aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ um die Ellipse AHB beschrieben, und für die Abscisse $AD = x$, die Kreisordinate $DG = z$; so ist $DG^2 = AD \cdot DB$ oder $z^2 = x (a - x) = ax - x^2$ (§. 12. Zus. 2.). Folglich nach vorigen Zusatz 1. $y^2 : z^2 = b^2 : a^2$ und $y : z = b : a$. Demnach sind die zusammengehörigen Ordinaten DE und DG in dem beständigen Verhältniß der Axen b und a, und daher $DE = \frac{b}{a} \cdot DG$ d. h. die Ellipsen-Ordinate ist die vierte Proportionallinie zur großen Axe, kleinen Axe und Kreis-Ordinate (Geom. §. 165.).

Zusatz 4. Wird $b = a$; so ist nach §. 37. $y^2 = ax - x^2$ die Gleichung für dem Kreis, dessen Durchmesser die große Axe a ist (§. 12. Zus. 2.).

Zusatz 5. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$ folgt $ax - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$, oder $x^2 - ax = - \frac{a^2 . y^2}{b^2}$.

Daher nach §. 5. I. die Abscisse $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 . y^2}{b^2}\right)}$

$= \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2b} . \sqrt{(b^2 - 4y^2)}$.

§. 38.

Aufgabe. Eine Function für die Ellipse aus dem Mittelpunkte zu finden.

Auflösung. Setzt man die Abscisse aus dem Mittelpunkte C (§. 36.) d. i. CG (Fig. 15.) $= u$; $AB = a$, $AG = x$, und die Ordinate $GH = y$; so ist $AG = AC - CG = \frac{a}{2} - u = x$, und $x^2 = \left(\frac{a}{2} - u\right)^2 = \frac{a^2}{4} - au + u^2$.

Setzt man nun diese Werthe für x, x^2 in die Gleichung §. 35. so erhält man

I) $y^2 = \frac{p}{a}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right)$

Und setzt man die Werthe für x, x^2 in die Gleichung §. 37. so erhält man

$$\text{II)}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} \cdot u^2.$$

Zusatz 1. Aus voriger Gleichung I. folgt

$$y^2 : \frac{a^2}{4} - u^2 = y^2 : \left(\frac{a}{2} - u\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + u\right) = p : a.$$

Und aus der Gleichung II. folgt

$y^2 : \left(\frac{a}{2} - u\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + u\right) = b^2 : a^2.$ Vergl. §. 35. Zus. 3. und §. 37. Zus. 1.

Zusatz 2. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\frac{a^2}{4} - u^2\right)$ folgt $y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right)}$; so daß also gleiche Abscissen u zu beiden Seiten des Mittelpunktes C gleiche Ordinaten y geben. Folglich wird die Ellipse von der kleinen, so wie von der großen Axe, halbirt; folglich von beyden Axen in vier congruente Ausschnitte getheilt.

Zusatz 3. Nach der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} \cdot u^2$ ist für $u = 0$ die $y = \frac{b}{2}$; für $u = \frac{a}{2}$ die $y = 0$.

§. 39.

Aufgabe. Der Abstand des Brennpunktes (§. 14.) F (Fig. 15.) vom Mittelpunkte C, oder die Excentricität der Ellipse d. i. $CF = e$ zu finden.

Auflösung. Für den Brennpunkt F ist nach §. 14. die Ordinate aus selbigem $= y = \frac{p}{2}$, also

$y^2 = \frac{p^2}{4} = \frac{b^4}{4a^2}$ (§. 36. Zus. II.). Nun ist aber auch nach §. 38. II. $y^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} . CF^2$. Folglich $\frac{b^4}{4a^2} = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{a^2} . CF^2$, oder $\frac{b^2 . CF^2}{a^2} = \frac{b^2}{4} - \frac{b^4}{4a^2}$, oder $CF^2 = \frac{a^2 b^2}{4 b^2} - \frac{b^4 . a^2}{4a^2 . b^2} = \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4}$.

Daher die Excentricität $CF = e = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{2}$

Zusatz. Die Ellipse hat also zwey Brennpunkte F und f. (Fig. 15.) in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte C, oder es ist CF = Cf. Zieht man aus dem Mittelpunkte C die Normale CD bis an die Ellipsenperipherie, so ist CD die halbe kleine Axe (§. 38. Zus. 5.) $= \frac{b}{2}$, und FD = fD. Weil nun $FD^2 = CF^2 + CD^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4}$; so ist daher $FD = fD = \frac{a}{2}$ oder FD + fD = a = AB. Dies giebt Anleitung, die Brennpunkte F und f in der großen Axe AB anzugeben, indem man nur aus dem Endpunkt D der halben kleinen Axe CD, die große Axe AB mit einem Halbmesser $\frac{1}{2}$ AB = CA = CB zweymal durchschneiden darf; so geben diese beyden Durchschnittspunkte F und f die Brennpunkte der Ellipse.

Wären die große Axe AB und die Brennpunkte F, f gegeben; so läßt sich die halbe kleine Axe finden, wenn man die aus dem Mittelpunkte C auf der großen Axe AB errichtete Normale CD mit der halben großen Axe AC von F oder f aus in D schneidet.

§. 40.

Lehrsatz. Die Summe der geraden Linien von einem beliebigen Punkt der Ellipsenperipherie nach den Brennpunkten der Ellipse gezogen, ist der großen Axe gleich.

Beweis. Zieht man aus einen beliebigen Punkt H (Fig. 15.) nach den Brennpunkten F und f die Linien HF und Hf; so ist $HF + Hf = AB = a$.

Denn man ziehe aus H die rechtwinklige Ordinate HG; so wird $GF = CF - CG = e - u$, und daher $HF^2 = GF^2 + HG^2 = (e - u)^2 + y^2 = e^2 - 2eu + u^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2}$ (§. 38, II.) $= \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ (§. 39.) $- u \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)} + u^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 u^2}{a^2} = \frac{a^2}{4} - u \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)} + \frac{u^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \left[\frac{a}{2} - \frac{u}{a} \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}\right]^2$.

Demnach

$$HF = \frac{a}{2} - \frac{u}{a} \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Eben so findet man, wenn man $Gf = Cf + CG = e + u$ setzt, für

$$Hf = \frac{a}{2} + \frac{u}{a} \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Daher $HF + Hf = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = AB$.

§. 41.

Aufgabe. Aus den beyden gegebenen Axen die Ellipse geometrisch zu beschreiben.

Erste Auflösung und Beweis. Ueber der großen Axe AB (Fig. 17.) beschreibe man einen Halbkreis und errichte mehrere Ordinaten DG, D′G′, D″G″, 2c. suche jedesmal zu $\frac{AB}{2} = AC = \frac{a}{2}$, $CH = \frac{b}{2}$ und der DG nach §. 37. Zus. 3., die vierte Proportionallinie DE; so erhält man Punkte E, E′, E″ 2c. der Ellipse, durch welche man sie aus freyer Hand ziehen kann.

Zweyte Auflösung und Beweis. Man bestimme nach §. 39. Zusatz aus den beyden gegebenen Axen oder halben Axen $\frac{AB}{2} = CA$ (Fig. 15.) und CD die Brennpunkte F und f. Außer diesen Punkten nehme man nun in der großen Axe AB mehrere Punkte G, G′ 2c. und beschreibe aus F und f mit AG und BG Kreisbogen, die sich in H′ schneiden; desgleichen mit AG′ und BG′, die sich in H schneiden 2c. so sind die Punkte H′, H 2c. Punkte in der Ellipse. (§. 40.).

Anmerkung. Mittelst eines der großen Axe gleichen Fadens, dessen Endpunkte in den Brennpunkten befestigt sind, läßt sich bey immer gleichangespannten Faden die Ellipse in einem Zuge beschreiben (§. 40.).

Wie die eine Hälfte der Ellipse oberhalb der Axe construirt wird; so ist auch die Construction unterhalb derselben.

§. 42.

Aufgabe. Eine Tangente an einem gegebnen Punkte der Ellipsenperipherie zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Der gegebne Punkt in der Ellipsenperipherie sey M (Fig. 16.); so ziehe man aus den entferntesten Brennpunkt f durch M die Zuglinie (§. 14.) fM, verlängere selbige so weit, daß die Verlängerung MH = MF = der andern Zuglinie, wird; ziehe ferner die Linie HF, halbire selbige in G, und ziehe durch G und M die gerade Linie GK; so ist GK die Tangente für den Punkt M.

Denn weil der Δ HMF gleichschenklich, so steht GM oder GK auf HF winkelrecht (Geom. §. 131. Zus. IV.). Zieht man daher aus irgend einem Punkt der GK z. B. aus L die Linien LH und LF; so ist LH = LF. Gesetzt nun GK wäre keine Tangente, sondern die Linie GK schnitte die Ellipse in M, und auch in L; so ziehe man Lf. Alsdann müßte seyn Lf + LF = AB (§. 40.) = Lf + LH. Aber auch Mf + MF = AB = Mf + MH = Hf; also müßte seyn Lf + LH = Hf, welches nach Geom. §. 107. nicht seyn kann.

Da also M ein Punkt der Ellipsenperipherie ist; so kann nicht auch L eiu Punkt der Ellipsenperipherie seyn, und die GK berührt daher die Ellipsenperipherie nur in den gegebnen Punkt M; ist also die Tangente an diesem Punkte.

Zusatz 1. Die Tangente GK (Fig. 16.) halbirt den Winkel HMF, so daß also HMG = FMG ist. Nun ist aber auch HMG = fMK. Daher auch FMG = fMK, d. h. die Winkel, welche die Zuglinien eines Punktes mit der Tangente an diesem Punkte machen, sind gleich groß.

Zusatz 2. Eine Normallinie MD (Fig. 16.) in

M auf der Tangente GK errichtet, halbirt den Winkel FMf. Halbirt man also umgekehrt den Winkel FMf, errichtet in M auf der Halbirungslinie MD eine Normale MG, und verlängert selbige durch M: so ist die GK eine Tangente an den Punkt M.

Der Winkel FMf wird aber am geschwindesten halbirt, wenn man die Verlängerung der fM d. i. MH = MF macht, und nun mit der HF durch den Punkt M die MD parallel zieht (Geom. §. 95. und §. 113.).

Auch findet man an den Punkt M die Tangente, wenn man für den Punkt M die Zuglinien MF, Mf zieht; hier MN = MF macht, und nun durch M mit der Grundlinie FN des gleichschenklichen Triangels FMN die Parallele DK zieht: so ist diese Parallele die Tangente an den Punkt M. Der Beweis ist hier wie §. 26. Zusatz 1.

§. 43.

Aufgabe. Den Flächeninhalt einer Ellipse zu finden.

Auflösung. Man beschreibe über der großen Axe AB (Fig. 17.) einen Halbkreis; so ist nach §. 37. Zusatz 5. DE : DG = b : a.

Denkt man sich nun die große Axe AB in eine unendlich große Anzahl gleicher, also unendlich kleiner Theile getheilt, und aus jedem Theilpunkte Ordinaten D'E'G', D''E''G'' 2c. so wird dadurch die Ellipsen und Kreisfläche in eine unendlich große Anzahl kleiner Flächen, welche man als Rectangel ansehen kann, getheilt. Da sich nun z. B. $DEE'D' : DGG'D' = DE : DG$ (Geom. §. 156.) $= b : a$ verhalten; so ist daher

$DE' : DG' = b : a$, und weil auch

$D'E'' : D'G'' = b : a$ so ist

$DE' : DG' = D'E'' : D'G''$, oder

$DE' : D'E'' = DG' : D'G''$. Daher

$DE' + D'E'' : DE' = DG' + D'G'' : DG'$, oder

$DE' + D'E'' : DG' + D'G'' = DE' : DG'$. Weil aber $DE' : DG' = b : a$

so ist $DE' + D'E'' : DG' + D'G'' = b : a$

d. i. $DEE''D'' : DGG''D'' = b : a$.

Schließt man auf diese Weise fort, so erhält man den Satz: **die halbe Ellipsenfläche verhält sich zur halben Kreisfläche wie b:a, also auch die ganze Ellipsenfläche zur ganzen Kreisfläche wie b : a.**

Nennt man daher den Inhalt der ganzen Ellipsenfläche $= E$, und den der Kreisfläche $= A$; so ist

$$E : A = b : a.$$

Nun ist aber für dem Durchmesser $= a$ der Inhalt des Kreises, d. i.

$$A = \frac{a^2 \pi}{4} \text{ (Geom. §. 229.)}.$$

$$\text{Daher } E : \frac{a^2 \pi}{4} = b : a, \text{ oder}$$

$$E : \frac{a \pi}{4} = b : 1. \text{ (Geom. §. 56.)}.$$

Demnach der Flächeninhalt der ganzen Ellipse $= E = \frac{ab\pi}{4}$.

Zusatz. Der Flächeninhalt

I) des Ellipsenabschnittes EHN $=$ (Fig. 17.) ist $= \frac{a}{b} \times$ des zugehörigen Kreisabschnittes, dessen Durchmesser die kleine Axe $= b$ ist.

II) des doppelten Ellipsenabschnittes EAD ist $= \frac{b}{a} \times$ des zugehörigen doppelten Kreisabschnittes GAD, dessen Durchmesser die große Axe AB $= a$ ist.

Anmerkung. Zu den Berechnungen der Kreisabschnitte kann man sich der Tafel III. bedienen, welche in den Beyspielen und Aufgaben aus der allgem. Arithm. und gem. Geom. von D. Fr. Hecht, Freyberg, 1824. bey Craz und Gerlach, Seite 84. sich befindet.

§. 44.

Aufgabe. Auf der Seitenfläche eines geraden Kegels ist ein Punkt A gegeben, so wie der Neigungswinkel einer Ellipsenfläche dieses Kegels gegen der Grundfläche desselben: die Ellipse zu verzeichnen, welche jenen beyden Bedingungen zugehört.

Auflösung. Durch den Punkt A und durch die Axe des geraden Kegels denke man sich eine Ebene gelegt; so erhält man den gleichschenklichen Triangel FCH (Tab. III. Fig. 18.) dessen Grundlinie FH, der Durchmesser der Grundfläche des Kegels ist. An dem Endpunkt der Grundlinie FH, welcher dem gegebenen Punkt A entgegen steht, d. i. in H trage man den gegebnen Neigungswinkel IHK, welchen die Ellipsenfläche mit der Grundfläche des Kegels (Geom. §. 176.)

machen soll, und ziehe, im Fall der Schenkel HK nicht durch den Punkt A geht, durch A mit der KH in der Ebene FCH eine Parallele AB, welche beide Seiten CF und CH des gleichschenklichen Triangels FCH oder des Kegels schneidet: so ist die AB die große Axe der gesuchten Ellipse (§. 13.). Halbirt man diese Axe AB in G, und denkt sich durch G mit der Grundfläche des Kegels einen parallelen Schnitt, welcher ein Kreis ist; so ist die mit der FH parallele Linie DE der Durchmesser dieses Kreises. Beschreibt man nun um DE einen Kreis, und zieht durch G die Kreissehne ML, welche den Durchmesser DE winkelrecht schneidet; so ist die ML die kleine Axe der gesuchten Ellipse oder die Durchschnittslinie der Ellipsenfläche mit der durch G gehenden Kreisfläche.

Aus den beyden Linien AB und ML läßt sich nun nach §. 41. die Ellipse beschreiben.

§. 45.

Lehrsatz. Denkt man sich durch die Axe eines geraden Cylinders eine Ebene, zwischen den Grundflächen des Cylinders einen Schnitt, welcher jene Ebene winkelrecht schneidet und mit den Grundflächen des Cylinders nicht parallel geht: so ist dieser Schnitt des Cylinders eine Ellipse, deren große Axe die Durchschnittslinie der durch die Axe gehenden Ebene und des Schnittes, und deren kleine Axe der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders ist.

Beweis. Es sey AB = b (Fig. 19.) der Durchmesser der obern Grundfläche des Cylinders, ABEF die durch die Axe KL des geraden Cylinders gehende Ebene; CHBN der auf der Ebene AE winkelrecht stehende Schnitt; ferner sey die CB die Durchschnittslinie zwischen der Ebene AE und dem Schnitte CHBN und die begrenzte $CB = a$. Denkt man sich nun durch die Axe KL eine zweyte Axenebene, welche die erste Axenebene AE auch winkelrecht schneidet, und legt nun durch einen beliebigen Punkt D des Durchmessers AB eine Ebene HM, welche mit der zweyten Axenebene parallel geht, also die Linien AB und CB von den Durchschnittslinien GM und HN rechtwinkligt geschnitten werden, so sind nicht nur $GM = HN$, sondern auch $GD = HE$ (Geom. §. 115.). Nennt man nun $AD = z$, die rechtwinklige Ordinate $DG = EH = y$, und die $CE = x$, so ist im Halbkreise AGB die $DG^2 = EH^2 = AD\,(AB - AD)$, d. i. $y^2 = z\,(b - z)$. Da nun im Δ ABC die DE parallel AC; so ist $AB : CB = AD : CE$ (Geom. §. 157.) d. i. $b : a = z : x$, also $z = \frac{b}{a}\,x$. Substituirt man diesen Werth für z in die Gleichung für $EH^2 = y^2 = z\,(b - z)$; so erhält man $y^2 = \frac{b}{a}\,.\,x\left(b - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = \frac{b^2\,a}{a^2}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(ax - x^2)$, also die Gleichung des §. 37.

Zusatz. Nennt man den Winkel $ABC = \alpha$; so ist nach Geom. §. 249. Zusatz, e die große Axe $a = \frac{b}{\cos\alpha}$,

Oder nennt man $AC = m$; so ist $a = \surd(b^2 + m^2)$

C. Von der Hyperbel.

§. 46.

Erklärung. Die Linie, für welche die Funktion $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ gegeben ist, ist eine Hyperbel, deren Parameter und große Axe die beständigen Linien p und a sind.

Zusatz 1. Setzt man in der Funktion für die Ellipse (§. 35.) die große Axe a verneint; so erhält man die Funktion der Hyperbel. In dieser Hinsicht sieht man die Hyperbel als eine Ellipse mit verneinter Axe an; so daß fast alle Eigenschaften der Ellipse auch der Hyperbel zukommen, wenn man nur die Vorzeichen gehörig verändert.

Zusatz 2. Für $y = 0$ ist entweder $x = 0$, oder $x = -a$. Ist also A (Fig. 20.) der Anfangspunkt der Abscissen, und $AB = -a$; so sind A und B in der Axe und Hyperbel zugleich, folglich ihre Scheitel (§. 14.).

Zusatz 3. Die Gleichung $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ heißt auch $y^2 = \frac{px}{a} \cdot (a + x)$, woraus folgt:

I) Für ein bejahtes x ist y möglich und wächst mit x.

II) Für ein verneintes $x < a$ ist der erste Faktor verneint, der zweyte bejaht; folglich das Produkt verneint, und y unmöglich, d. h. zwischen A und B können keine Ordinaten vorkommen.

III) Für ein verneintes $x > a$ sind beyde Faktoren verneint; folglich das Produkt bejaht, und y wieder möglich, d. h. zwischen A und B ist Nichts von der Hyperbel, aber über A und B hinaus (Fig. 20.) giebt es zu beiden Seiten des Mittelpunktes C zwey einander congruente Hyperbeln, die entgegengesetzte heißen; die aber, weil keine ohne die andere seyn kann, eigentlich nur eine Hyperbel ausmachen, welche nicht in sich selbst zurückgeht, sondern zu beyden Seiten mit auseinander gehenden Schenkeln ohne Ende fortläuft.

Zusatz 4. Aus der Gleichung $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ folgt $y = \pm\left(px + \frac{px^2}{a}\right)$. Daher gehören zu jeder Abscisse zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten, und die Hyperbel wird daher von der verlängerten Axe halbirt.

Zusatz 5. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{px}{a}(a + x)$ (Zusatz 3.) folgt $y^2 : (a + x)\,x = p : a$ (Vergl. §. 35. Zusatz 3.)

§. 47.

Erklärung. Die Mitte C (Fig. 20.) der großen Axe AB heißt der Mittelpunkt der Hyperbel und eine Normallinie auf die Axe AB im Mittelpunkt C wie Hh, so daß $Hh = \sqrt{ap}$ (§. 36. Zus. u. §. 46. Zus. 1.) $= b$ ist, heiße, nach Aehnlichkeit der Ellipse, die kleine Axe.

Zusatz. Aus $\sqrt{ab} = b$ folgt $ap = b^2$ und $p = \frac{b^2}{a}$.

§. 48.

Aufgabe. Eine Funktion der Hyperbel durch die große und kleine Axe zu finden.

Auflösung. Aus dem Zusatz des vorigen §. hat man für den Parameter p den Werth $\frac{b^2}{a}$. Setzt man diesen Werth für p in die Funktion des §. 46, so erhält man für $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ die Funktion $y^2 = \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2ax + b^2x^2}{a^2}$, d. i.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2) \text{ (vergl. §. 37.)}$$

Zusatz. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2ax + b^2x^2}{a^2}$ folgt $a^2y^2 = b^2(ax + x^2)$; folglich

$y^2 : (ax + x^2) = b^2 : a^2$, oder

$y^2 : x(a + x) = b^2 : a^2$. (vergl. §. 37. Zusatz 1. und §. 46. Zus. 5.)

§. 49.

Aufgabe. Eine Funktion der Hyperbel aus dem Mittelpunkt zu finden.

Auflösung. Es sey die Abscisse aus dem Mittelpunkte (Fig. 20.) $CE = u$; so ist $AE = CE - CA = u - \frac{a}{2} = x$, also $x^2 = u^2 - au + \frac{a^2}{4}$. Setzt man diese Werthe für x und x^2 in §. 48. so erhält man für $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$ nun

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(au - \frac{a^2}{2} + u^2 - au + \frac{a^2}{4}\right), \text{ d. i.}$$

I) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right)$ oder

II) $y^2 = \frac{b^2 u^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$ (vergl. §. 58.)

Zusatz. Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right)$ erhält man $y^2 : u^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 : a^2$, oder $y^2 : \left(u - \frac{a}{2}\right)\cdot\left(u + \frac{a}{2}\right) = b^2 : a^2$ (vergl. §. 38. Zus. 1. und §. 48. Zus.)

§. 50.

Aufgabe. Den Abstand des Brennpunktes (§. 14.) F (Fig. 20.) vom Mittelpunkte C, oder die Excentricität der Hyperbel, d. i. $CF = e$ zu finden.

Auflösung. Für den Brennpunkt F ist nach §. 14. die Ordinate aus selbigen $= y = \frac{p}{2}$, also $y^2 = \frac{p^2}{4} = \frac{b^4}{4a^2}$ (§. 47. Zus.). Nun ist aber auch nach §. 49. II., $y^2 = \frac{b^2 . CF^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$; folglich $CF^2 . \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4a^2}$, od. $CF^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot\left(\frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2}{4}\right)$ $= \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$, und die Excentricität

$$CF = e = \pm\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}.$$

Zusatz. Die Hyperbel hat also auch zwey Brenn=

punkte (vergl. §. 39. Zus. und §. 46. Zus. 1.) F und f (Fig. 20.) in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte C, oder es ist $CF = Cf$.

Errichtet man in C die Normale CH, und macht $CH = \frac{b}{2}$ (§. 47.); so ist, weil $CA = \frac{a}{2}$, im rechtwinkligen Triangel ACH das Quadrat der Hypothenuse, d. i. $AH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, und die Hypothenuse $AH = CF = Cf$ die Excentricität; so daß man auch hier mittelst der großen und kleinen Axe die Brennpunkte F und f finden kann, wenn man mit der AH auf der verlängerten AB aus C in F und f Durchschnittspunkte macht (vergl. §. 39. Zus.).

Sind umgekehrt die halbe große Axe AC und die Excentricität CF gegeben; so findet man die kleine Axe CH, wenn man die in C errichtete Normale CH mit $AH = CF$ vom Scheitel A aus durchschneidet (vergl. §. 39. Zus.).

§. 51.

Lehrsatz. Die Differenz der geraden Linien von einem beliebigen Punkt der Hyperbel nach den Brennpunkten derselben gezogen, ist der großen Axe gleich.

Beweis. Zieht man aus einem beliebigen Punkt G (Fig. 20.) nach den Brennpunkten F und f die Linien GF und Gf; so ist hier $fG - FG = AB = a$.

Denn man ziehe aus G die Ordinate GE; so ist $FE = CE - CF = u - e$ u. $fE = CE + Cf = u + e$;

also $fG^2 = fE^2 + EG^2 = (u + e)^2 + y^2 = u^2 + 2ue + e^2 + y^2 =$

$u^2 + 2ue + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2 u^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}$ (§. 50. u. §. 49 II.)

$= \frac{a^2 u^2 + b^2 u^2 + 2au^2 e}{a^2} + \frac{a^2}{4} = (a^2 + b^2) \frac{u^2}{a^2}$

$+ \frac{2aue}{a} + \frac{a^2}{4} = 4e^2 . \frac{u^2}{a^2} + \frac{2aue}{a} + \frac{a^2}{4} =$

$\left(2e . \frac{u}{a} + \frac{a}{2}\right)^2$. Daher $fG = \frac{2eu}{a} + \frac{a}{2}$.

Eben so findet man

$FG = \frac{2eu}{a} - \frac{a}{2}$, und demnach

$fG - FG = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = AB$ (vergl. §. 40. u. §. 46. Zus. 1.).

§. 52.

Aufgabe. Aus den beyden gegebnen Axen die Hyperbel geometrisch zu verzeichnen.

Auflösung. Man suche nach §. 50. Zusatz die beyden Brennpunkte F, f (Fig. 20.); nehme eine beliebige Länge $CZ > AC$, oder $z > \frac{a}{2}$, und setze $fG = BZ = CZ + CB = z + \frac{a}{2}$, $FG = AZ = CZ - AC = z - \frac{a}{2}$; so kommt $fG - FG = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = AB$, wodurch sich Punkte der Hyperbel finden lassen.

§. 53.

Erklärung. Eine gerade Linie, die sich einer krummen Linie beständig nähert, ohne sie zu erreichen, oder welche nicht eher als im Unendlichen mit ihr zusammentrifft, nennt man eine Asymptote.

§. 54.

Lehrsatz. Errichtet man im Scheitel A, (Fig. 21.) auf der Axe AB eine Normallinie AM, welche so groß, als die halbe kleine Axe ist, und zieht durch den Mittelpunkt C der großen Axe oder den Mittelpunkt der Hyperbel und den Endpunkt M der Normale AM eine gerade Linie CK: so ist die CK eine Asymptote der Hyperbel (§. 53.).

Beweis. Man ziehe aus einem beliebigen Punkt K der CK auf die verlängerte Axe BA eine Normallinie KE; so ist $CA : AM = CE : EK$,

d. i. $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = u : EK$. Folglich $EK = \frac{b}{a} \cdot u$, u. $EK^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot u^2 = \frac{pu^2}{a}$, für $b^2 = ap$ (§. 47. Zus.). Es ist aber $EG^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot u^2 - \frac{b^2}{4}$ (§. 49. II.) $= \frac{pu^2}{a} - \frac{ap}{4}$. Also ist $EK^2 > EG^2$, oder $EK > EG$, u. jeder Punkt der Linie CK liegt demnach außerhalb der Hyperbel. Ferner ist $EK^2 - EG^2 = \frac{pu^2}{a} - \left(\frac{pu^2}{a} - \frac{ap}{4}\right)$, d. i. $(EK + EG) \cdot (EK - EG) = \frac{ap}{4}$, und $EK - EG = \frac{\frac{1}{4} ap}{EK + EG} = KG$.

Nun ist aber $\frac{1}{4}ap$ eine beständige Größe; beym stetigen Wachsen der EC wachsen aber auch EK und EG immer mehr und mehr, folglich wird der Bruch $\frac{\frac{1}{4}ap}{EK+EG} = KG$, d. i. der Abstand der Linie CK von der Hyperbel immer kleiner, je größer $CE = u$ wird, und wenn $CE = \infty$ (unendlich groß) wird, so wird auch $EK + EG = \infty$ (§. 46. Zus. 3. III.) folglich $EK - EG = KG = \frac{1}{\infty}$ (unendlich klein). Demnach ist CK eine Asymptote der Hyperbel (§. 53).

Zusatz 1. Verlängert man CK, (Fig. 21.) rückwärts durch den Mittelpunkt C der Hyperbel nach k hin, so ist Ck die Asymptote der entgegengesetzten Hyperbel (§. 46. Zus. 3. III.) und verlängert man MA, und macht $AN = AM$, zieht durch C und N eine gerade Linie lL: so ist die lL die zweyte Asymptote der beyden entgegengesetzten Hyperbeln. Im letztern Fall ist $EL = EK$, weil $EK^2 = \frac{pu^2}{a}$, also $EK = \pm\sqrt{\frac{pu^2}{a}}$ ist, (§. 46. Zus. 4.). Nun war nach dem Lehrsatze $(EK + EG).(EK - EG) = \frac{ap}{4}$; also auch $(EL + EG).(EK - EG) = \frac{ap}{4}$, d. i. $GL.GK = \frac{ap}{4}$, ein beständiges oder unveränderliches Produkt.

Zusatz 2. Der Asymptotenwinkel KCL (Fig. 21.) wird durch die große Axe halbirt.

Zusatz 3. Zieht man aus A (Fig. 21.) mit der

Asymptote CL die AQ parallel; so ist $CAQ = ACL = ACK = \frac{KCL}{2}$, (Zus. 2.); folglich $QC = QA$.

Ferner ist, weil $AQ \parallel CL$, der Winkel $QAM = CNM = CMN$, indem $\Delta\ CAN \cong \Delta\ CAM$ ist. Daher ist auch $QA = QM = QC = \frac{CM}{2}$.

Zusatz 4. Weil $CM^2 = CA^2 + MA^2$ (Fig. 21.) d. i. $h^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$: so ist daher $\left(\frac{CM}{2}\right)^2 = \frac{CM^2}{4} = \frac{h^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{16} = AQ^2$.

Weil ferner $AQ = CQ$; so ist auch $AQ \cdot CQ = \frac{h^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{16}$.

§. 55.

Erklärung. Das Quadrat der Linie AQ (Fig. 21.) oder der Ausdruck $h^2 = \frac{a^2 + b^2}{16}$ wird die Potenz der Hyperbel genannt.

§. 56.

Erklärung. Zieht man durch einen beliebigen Punkt G (Fig. 21.) der Hyperbel mit der Asymptote CL die GR parallel bis an die andere Asymptote CK; so nennt man CR die Abscisse und RG die ihr zugehörige Ordinate, oder beyde zusammen Coordinaten in Hinsicht der Asymptoten.

§. 57.

Lehrsatz. Das Produkt der Coordinaten CR und RG (Fig. 21.) ist der Potenz der Hyperbel (§. 55.) gleich.

Beweis. Wegen der Aehnlichkeit der Triangel KRG und MCN ist KG : RG = MN : CN = b : h (§. 54.). folglich RG $= \frac{h}{b}$. KG. Ferner ist CR : LG = KR : KG = MC : MN = h : b, u. daher CR $= \frac{h}{b}$. LG. Folglich CR. RG $= \frac{h^2}{b^2}$. LG. KG $= \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{ap}{4}$ (§. 54. Zus. 1.) $= \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{ab^2}{4a}$ (§. 47. Zus.) $= \frac{h^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{16}$ (§. 54. Zus. 4. und §. 55.).

Zusatz. Nach §. 54. Zus. 4. ist auch CQ . AQ (Fig. 21.) $= \frac{a^2 + b^2}{16}$, und weil auch CR . RG $= \frac{a^2 + b^2}{16}$; so ist demnach CQ . AQ = CR . RG.

Aus der Gleichheit dieser Produkte folgt CR : CQ = AQ : RG, welche Proportion Anleitung zu einer zweyten Constructionsmethode der Hyperbel, als §. 52. gezeigt worden, giebt, indem man auch die Hyperbel aus dem gegebnen Asymptotenwinkel KCL und dem Scheitel A oder ihrer halben großen Axe CA beschreiben kann. Man ziehe nemlich mit der Asymptote CL durch den Scheitel A die Parallele AQ bis an die zweyte Asymptote CK, wodurch man die beyden Linien CQ und AQ erhält. Nimmt man nun in der Asymptote CK beliebige Punkte R rc. an, sucht, weil CQ = AQ (§. 54. Zus. 3.) zu CR und CQ die dritte Proportionallinie RG, zieht durch R mit der Asymptote CL eine Parallele RG, und trägt auf selbige aus R in G die gefundne dritte Proportionallinie; so ist G ein Punkt der Hyperbel, deren man auf diese Weise mehrere finden kann.

§. 58.

Lehrsatz. Durchschneidet man die Hyperbel nebst ihren Asymptoten irgendwo mit einer geraden Linie K'L' (Fig. 21.): so sind die Theile dieser Linie, welche zwischen den Asymptoten CK und CL fallen, einander gleich, d. i. K'G = L'S.

Beweis. Man ziehe aus den Durchschnittspunkten S und G die Linien SV und RG mit der Asymptote CL, so wie die Linien ST und GU mit der zweyten Asymptote CK parallel: so ist SV = TC, GU = RC. Da nun ferner CT und TS die Coordinaten des Punktes S (§. 56.), so wie CR und RG die Coordinaten des Punktes G sind: so ist nach §. 57. CT . TS = CR . RG, oder VS . TS = UG . RG, folglich VS : RG = UG : TS. Es ist aber auch VS : RG = K'S : K'G; folglich UG : TS = K'S : K'G.

Ferner ist UG : TS = L'G : L'S; also auch
K'S : K'G = L'G : L'S und daher
K'S — K'G : K'G = L'G — L'S : L'S,
oder K'S — K'G : L'G — L'S = K'G : L'S,
d. i. SG : SG = K'G : L'S. Folglich K'G = L'S.

Zusatz. Man denke sich, die Linie K'L' (Fig. 21.) rücke, immer in paralleler Lage bleibend, nach dem Scheitel A hin; so rücken die Durchschnittspunkte G und S immer einander näher, und immer bleibt K'G = L'S.

Fallen endlich die Punkte G und S in einem Punkt zusammen, so berührt die $K'L'$ die Hyperbel nur in einem Punkt, wird also eine Tangente der Hyperbel, und dann ist $K'G = L'S = \frac{1}{2} L'K'$.

§. 59.

Aufgabe. An einem gegebnen Punkt der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Erste Auflösung und Beweis. Wenn der Asymptotenwinkel lCK (Fig. 21.) und der Punkt g der Hyperbel gegeben sind.

Man ziehe aus dem gegebnen Punkt g mit der gegenüberstehenden Asymptote lC die Parallele gu, welche die andre Asymptote Ck in u schneidet; mache nun $uw = uC$, und ziehe durch w und g die gerade Linie wl; so ist diese Linie die gesuchte Tangente.

Denn zieht man aus g mit der Asymptote Ck die gr parallel; so ist $gr = uc = uw$, und $\Delta\, glr \backsim \Delta\, wgu$. Daher $gr : gl = uw : wg$, oder $gr : uw = gl : wg$. Nun ist $gr = uw$, daher auch $gl = wg = \frac{1}{2} lw$, und demnach lw die Tangente an den Punkt g der Hyperbel (§. 58. Zus.).

Zweyte Auflösung und Beweis. Wenn ausser dem gegebnen Punkt G (Tab. IV. Fig. 22.) die Axe AB, so wie die Brennpunkte f und F gegeben sind.

Man ziehe für den gegebnen Punkt G die Zuglinie Gf und GF; halbire den Winkel fGF: so ist die Theilungslinie LGK die gesuchte Tangente.

Denn man mache $GD = GF$, so ist, weil G ein Punkt der Hyperbel ist, $fG - FG = fG - GD = fD$

$=$ AB (§. 51.). Ist nun LGK keine Tangente, sondern eine Linie, welche die Hyperbel noch in einem Punkt schneide; so ziehe man die Linien Ef, EF, ED, und DF; so muß, weil G und E in der geraden Linie LK liegen, der Δ fDE entstehen, und in diesem ist nach Geom. §. 107. $fE < fD + ED$. Weil aber im gleichschenklichen Δ FGD die LK die Grundlinie DF vermöge der Construction rechtwinklig schneidet und halbirt; so ist leicht einzusehen, daß der Δ FED ebenfalls ein gleichschenklicher Triangel, und in selbigem $EF = ED$ seyn muß. Daher ist, weil $fE < fD + ED$, auch $fE < fD + EF$, und daher $fE - FE < fD$, d. i. $fE - FE < AB$. Ist aber E ein Punkt der Hyperbel; so muß ja $fE - FE = AB$ (§. 51.) seyn. Daher ist E kein Punkt der Hyperbel, und demnach LGK eine Tangente des Punktes G in der Hyperbel.

Zusatz. Verlängert man die Zuglinie fG (Fig. 25.) und macht die Verlängerung $GH = GF$; so ist die Grundlinie FH des gleichschenklichen Δ FGH mit der Tangente LGK parallel. Denn weil $fGF = F + H$ $= 2F$, oder $\frac{fGF}{2} = F$, d. i. $LGF = F$ ist, so sind LGK und FH parallel.

Ist also ein Punkt G in der Hyperbel gegeben; so findet man die Tangente an diesem Punkt auf dieselbe Weise, wie §. 42. Zus. 2. oder wie §. 26. Zus. 1.).

§. 60.

Erklärung. Wenn in einer Hyperbel die große Axe der kleinen Axe gleich ist, so heißt die Hyperbel eine **gleichseitige**.

Zusatz 1. Es ist daher in einer gleichseitigen Hyperbel

I) der Parameter jeder der beyden gleichen Axen gleich (§. 47. Zus.). Setzt man daher in der Gleichung §. 46. für $p = a$; oder in der Gleichung §. 48. die $b = a$; so erhält man

II) die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, nemlich: $y^2 = ax + x^2 = (a + x) x$, oder

III) $a + x : y = y : x$.

Wenn man also zu einer gegebnen großen Axe a und einer beliebigen Abscisse x nach III. die mittlere Proportionallinie y sucht (Geom. §. 166.), so ist diese die zur Absciffe x gehörige Ordinate. Es ist demnach aus der gegebnen Axe der gleichseitigen Hyperbel diese sehr leicht zu beschreiben.

Weil in der gleichseitigen Hyperbel

IV) $AC = AM$ (Tab. III. Fig. 21.) seyn muß; so ist daher der rechtwinklige Δ CAM sowol, als der rechtwinklige Triangel CAN ein gleichschenkliger, und jeder der spitzen Winkel in selbigen die Hälfte eines rechten Winkels. In der gleichseitigen Hyperbel ist demnach der Asymptotenwinkel ein rechter Winkel.

Zusatz 2. Den Flächeninhalt zwischen den Coordinaten einer Hyperbel kann man nur mittelst der höhern Analysis finden. Ist nemlich BC (Fig. 20.) $= \frac{a}{2}$, $BK = x$, und $KH \; \underline{\underline{||}} \; CD = y$, so ist der Flächenraum $CBHD = N = \frac{ay}{2} + \frac{y^3}{2.3a} + \frac{1y^5}{2.4.5a^3}$,

$+ \frac{1.3y^7}{2.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5y^9}{2.4.6.8.9a^7} + \frac{1.3.5.7y^{11}}{2.4.6.8.10.11a^9}$
$+ \frac{1.3.5.7.9y^{13}}{2.4.6.8.10.12.13a^{11}} + \ldots$ und demnach der Flächenraum zwischen den rechtwinkligen Coordinaten BK und KH′, d. i. der Flächenraum BKH′ =

$$\left(\frac{a}{2} + x\right) \cdot y - N.$$

Zusatz 3. Nach §. 13. ist in Tab. I. Fig. 3. die AB = a die große Axe der Hyperbel für den Punkt A auf der Seitenfläche eines geraden Kegels, dessen Axentriangel DCK ist. Da nun nach §. 13. AB : BL = AE : p, oder weil hier BL = AE, auch AB : BL = BL : p so ist hier $p = \frac{BL^2}{AB} = \frac{BL^2}{a} = \frac{(2\,NC)^2}{a}$, wenn NC parallel mit BL, und also auch normal auf AB steht; so daß daher im gleichschenkligen Δ ACB die AB von der Normale CN in N halbirt wird. Nach §. 47. Zus. ist aber auch $p = \frac{b^2}{a}$; daher $2\,NC = b$, oder $NC = \frac{1}{2} b$ die Hälfte der kleinen Axe der Hyperbel für den Punkt A.

Weil ferner $CA^2 = AN^2 + NC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$; so giebt demnach die CA den Abstand des Brennpunktes dieser Hyperbel vom Mittelpunkt N der großen Axe AB (§. 50.).

Ist demnach auf der Seitenfläche eines geraden Kegels ein Punkt A gegeben, so läßt sich nun sehr leicht die Hyperbel verzeichnen, welche diesem Punkt zugehört (vergl. §. 24. und §. 44.).

III.

Erste Gründe der Differential- u. Integral-Rechnung.

§. 61.

Erklärung. Eine veränderliche Größe nennt man diejenige, welche nach dem Gesetze der Stetigkeit entweder immer zunimmt, oder immer abnimmt; dagegen Größen, welche weder zu- noch abnehmen, sondern ihren einmal erhaltnen Werth unter allen Umständen stets behalten, beständige Größen heißen.

§. 62.

Erklärung. Die Differenz zwischen irgend einem Werthe der veränderlichen Größe und ihrem nächsten Werthe nennt man das Differential der veränderlichen Größe, oder auch das Element der veränderlichen Größe.

Das Differential einer veränderlichen Größe oder einer Funktion finden, heißt die veränderliche Größe oder die Function differentiiren.

Zusatz. Aus den Erklärungen der §. 61. u. §. 62. ergiebt sich demnach, daß das Differential einer veränderlichen Größe oder einer Function eine unendlich kleine Größe oder eine verschwindende Größe seyn müsse, welche $= 0$ gesetzt werden kann.

§. 63.

Grundsatz. Bezeichnet man eine veränderliche Größe mit $= x$, ihren nächst größeren Werth mit $= x'$, und die Differenz zwischen diesen beyden nächsten Werthen x' und x, oder das Differential der veränderlichen Größe x (§.62.) mit $= dx$; so muß seyn

I) $x' - x = dx$, also

II) $x' = x + dx$, d. h. der nächste Zustand einer veränderlichen Größe ist die Summe der veränderlichen Größe und ihres Differentials.

Zusatz. Bezeichnet man andere veränderliche Größen mit y, z; so sind ihre nächsten Zustände, $y' = y + dy$; $z' = z + dz$.

§. 64.

Grundsatz. Nur veränderliche Größen haben Differentiale oder können differentiirt werden. Das Differential einer beständigen Größe ist daher $= 0$; indem unveränderliche oder beständige Größen keiner Veränderung fähig sind (§.61.).

Zusatz. Bezeichnet man also beständige Größen mit a, b rc. so ist daher allemal nicht nur $da = 0$, und $db = 0$, rc., sondern auch das Differential jeder aus beständigen Größen bestehenden Gleichung ist $= 0$.

§. 65.

Aufgabe. Das Differential der Funktion $X = x^n$ zu finden.

Auflösung. Nach §. 63. II. und nach dem binomischen Lehrsatz (§. 10. *) ist

$$X' = X + dX = (x + dx)^n = x^n + n\,x^{n-1}.dx + \frac{n\,(n-1)}{1.\,2.}\,x^{n-2}\,dx^2 + \ldots$$
$$\text{Aber } -X \qquad = -x^n$$

$$\text{Folglich } dX = nx^{n-1}\,dx + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\,x^{n-2}\,dx^2 + \ldots$$

Da nun nach §. 62. Zus. schon das Differential dx eine verschwindende Größe oder eine sich der Null nähernde Größe ist; so kann man um so mehr die Potenzen dx^2, dx^3 rc. $= 0$. setzen. Es ist demnach, wenn $X = x^n$ ist, das Differential dieser Potenz, d. i.

$$dX = nx^{n-1}.\,dx.$$

Zusatz. Ist $X = \sqrt[n]{x}$; so setze man $X = x^{\frac{1}{n}}$ (Geometr. §. 48.), dann ist $dX = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}.dx = \frac{1}{n}.\,x^{\frac{1-n}{n}}\,dx = \frac{1}{n}.\,dx\,\sqrt[n]{x^{1-n}}$.

§. 66.

Aufgabe. Das Differential der Funktion $X = x.\,y$ zu finden.

Auflösung. Es ist

$$X + dX = (x + dx).(y + dy) = xy + x.dy + y.dx + dx\;dy. \text{ Aber}$$
$$X \qquad = xy$$

folglich $dX = x.\,dy + y.\,dx + dx.\,dy$. Weil aber nach §. 62. Zus. das Produkt $dx.\,dy = 0$ gesetzt werden kann; so ist daher,

wenn $X = x.\,y$ ist,

das Differential dieses Produkts, d. i.

$$dX = x.\,dy + y.\,dx.$$

Zusatz 1. Ist daher $X = xyz$; so ist

$$dX = (xy) . dz + z . d(x . y)$$

d. i. $dX = xy . dz + xz . dy + yz . dx$

Zusatz 2. Ist $X = ax^n$; so ist nach §. 66.

$$dX = a . d (x^n) + x^n . da$$

d. i. $dX = nax^{n-1} dx$ (§. 65 und 64. Zus.)

Zusatz 3. Ist $X = ax^n + by^m$, so ist

$$dX = d(ax^n + by^m) = d . ax^n + d . by^m$$

d. i. $dX = nax^{n-1} . dx + mby^{m-1} . dy$
nach vorigem Zusatz 2.

§. 67.

Aufgabe. Das Differential der Funktion $X = \frac{x}{y}$ zu finden.

Auflösung. Aus $X = \frac{x}{y}$ folgt $Xy = x$, und daher $d(X . y) = d(x^1)$, d. i. nach §. 66 und §. 65.
$X . dy + y . dX = 1 . x^{1-1} dx = x^0 . dx = dx$ (Geom. §. 26.)

Folglich $y . dX = dx - X . dy = dx - \frac{x}{y} . dy$

$$= \frac{y . dx - x . dy}{y}, \text{ und daher}$$

$$dX = \frac{y . dx - x . dy}{y^2}$$

Zusatz. Um nur sogleich eine Anwendung der Differential-Rechnung zu zeigen; so diene als Beyspiel die Aufgabe: die Subtangente DG (Tab. IV. Fig. 24.) der Parabel AH' für den Punkt H zu finden (§. 25. und 26. Zus. 2. III.).

Auflösung. Es seyn $AG = x$ und $GH = y$ die rechtwinkligen Coordinaten in Hinsicht der Axe der Parabel, und DH die Tangente derselben für den Punkt H, also DG die dazugehörige Subtangente. Man denke sich $AG = x$ um sein Differential $GG' = dx$ wachsend, und ziehe durch G' und H mit der Ordinate GH und Axe AG' Parallelen; so ist $H'L = dy$, des Differential von y, wo man sich nun freylich die Linien $GG' = HL$ u. $H'L$ unendlich klein denken muß (§. 62. Zus.). Weil nun der $\triangle DGH \backsim \triangle HLH'$;

so ist $DG : GH = HL : LH'$

d. i. $s : y = dx : dy$

Daher $s = y \cdot \frac{dx}{dy}$ ein allgemeiner Ausdruck für die Subtangente jeder krummen Linie.

Die Funktion der Parabel ist aber $y^2 = px$; also die Differentialgleichung der Parabel, d. i.

$$2y \cdot dy = p \cdot dx, \text{ und}$$

$$\frac{2y}{p} = \frac{dx}{dy}.$$

Diesen Werth für $\frac{dx}{dy}$ in dem Ausdruck für s gesetzt, giebt

$$s = y \cdot \frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{2y}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} \text{ (§. 15.)}$$

d. i. $s = 2x$, d. h. in der Parabel ist die Subtangente eines Punktes stets der doppelten Abscisse dieses Punktes gleich. (§. 26. Zus. 3. III.)

Einige Beyspiele zur Uebung.

1) $d(ax + by^3 + 7z^5) = a.dx + 3by^2.dy + 35z^4.dz.$

2) $d.a(x^m.y^n) = a(nx^m.y^{n-1}dy + my^n x^{m-1}.dx)$

3) $d.\sqrt[n]{ax^m} = \frac{1}{n}.amx^{m-1}\,dx.\sqrt[n]{(ax^m)^{1-n}}.$

4) $d(ax^2 + by^3 - cz)^4 = 4(ax^2 + by^3 - cz)^3.(2ax.dx + 3by^2.dy - c.dz)$

5) $d.\frac{ay^3}{x^2} = \frac{3axy^2.dy - 2ay^3.dx}{x^3},$

6) $d.\frac{a^2b}{xy} = \frac{-a^2b.(x.dy + y.dx)}{x^2.y^2}$

7) $d.\frac{x+y}{z} = \frac{z.(dx+dy) - (x+y)dz}{z^2}$

8) $d.\frac{a^2+bx}{a-x} = \frac{(a^2+ab).dx}{(a-x)^2}$

§. 68.

Erklärung. Wenn der Werth der Funktion oder Gleichung X bey der stetigen Zunahme der Wurzel x (§. 62.) größer oder kleiner wird, dann aber beym stetigen Fortwachsen derselben Wurzel x nun der Werth der Funktion X kleiner oder größer wird: so heißt im ersten Falle dieser Werth der Funktion X ein Größtes (Maximum), im zweyten Falle aber heißt dieser Werth der Funktion X ein Kleinstes (Minimum) unter denjenigen Werthen und Zuständen, welche ihr vor und nach ihrem Größerwerden oder Kleinerwerden zukommen.

Den Werth von x finden, bey welchem die Funktion X ein Größtes oder Kleinstes wird, nennt man die Lehre vom Größten und Kleinsten.

Zusatz. Da das Größte und Kleinste einer Funktion oder einer veränderlichen Größe der Wendepunkt ist, in welchem zwey entgegengesetzte Zustände der Funktion, nehmlich ihr Größerwerden und Kleinerwerden, oder ihr Kleinerwerden und Größerwerden, einander berühren; so ist daher das Größte und Kleinste einer Funktion etwas Unveränderliches oder Beständiges. Die unzähligen kleinern oder größern Werthe der Funktion dagegen vor und nach dem Eintritt in den größten oder kleinsten Werth, sind veränderliche oder unbeständige Werthe.

§. 69.

Aufgabe. Den Werth oder Zustand einer veränderlichen Größe oder Wurzel x anzugeben, bey welchem die von ihr abhängige Funktion X einen größten oder kleinsten Werth erhalten, oder ein Größtes oder Kleinstes werden muß.

Auflösung. Da das Größte oder Kleinste der veränderlichen Funktion X ein einziger und bestimmter Zustand ist (§. 68. Zus.), und für diesem Zustand dann die Größe oder Wurzel x nur bis zu nem einzigen und bestimmten Werth wachsen kann; so findet man daher diesen einzigen Werth der Wurzel x, bey welchem ihre Funktion X ein Größtes oder Kleinstes wird, wenn man diejenige Seite der Funktion oder Gleichung, in welcher die Wurzel x vorkommt, differentiirt; dieses Differential $= 0$ setzt, und nun aus der erhaltenen annullisirten Gleichung den Werth der Wurzel x aufsucht, indem ja für beständige Größen oder für solche, welche man als unveränoerliche annimmt, das Differential derselben $= 0$ ist (§. 64. Zusatz.).

§. 70.

Aufgabe. Im Halbkreise denjenigen Werth der Abscisse anzugeben, bey welchem eine rechtwinklige Ordinate eine größte ist.

Auflösung. Für den Durchmesser des Kreises $= a$ ist die Kreisfunktion von einem der Endpunkte des Durchmessers aus $= y^2 = ax - x^2$, wo nun hier $X = y^2$, also $X = ax - x^2$ ist.

Setzt man nun nach §. 69.

$$dX = d(ax - x^2) = a \, . \, dx - 2x \, . \, dx = 0$$

so erhält man $a \, . \, dx = 2x \, . \, dx$

oder $a = 2x$

oder $\frac{a}{2} = x$, d. h. diejenige rechtwinklige Kreisordinate ist eine größte, deren Abscisse dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

§. 71.

Aufgabe. Eine Zahl n in zwey Theile so zu theilen, daß das Produkt dieser Theile ein Größtes ist.

Auflösung. Es sey der eine Theil von $n = x$; so ist der zweyte $= n - x$ und daher

$$X = x(n - x) = nx - x^2.$$

Da nun diese Funktion X der in §. 70. völlig gleich ist; so muß man daher die gegebne Zahl halbiren, um das größte Produkt zu erhalten. Z. B. die Zahl 8 läßt sich zerlegen in

$1 + 7$; $2 + 6$; $3 + 5$; $4 + 4$; $5 + 3$; $6 + 2$; $7 + 1$;

Die Produkte sind

7; 12; 15; 16; 15; 12; 7;

wo das Produkt aus $\frac{1}{2} . 8 \times \frac{1}{2} . 8$ d. i. 4×4 das größte ist.

§. 72.

Aufgabe. Eine gegebne Zahl n in zwey Theile so zu theilen, daß die Summe der Quadrate dieser Theile ein Kleinstes ist.

Auflösung. Nennt man wieder den einen Theil der gegebnen Zahl $= x$; so ist der andere Theil $= n - x$ und daher

$$X = x^2 + (n - x)^2 = x^2 + (n^2 - 2nx + x^2)$$
$$= 2x^2 + n^2 - 2nx.$$ Setzt man nun
$$dX = 4x \cdot dx - 2n \cdot dx = 0;$$ so ist
$$4x = 2n,$$ oder
$$x = \frac{n}{2}$$ d. h. man muß die gegebne Zahl ebenfalls halbiren, wenn die Summe der Quadrate ihrer Theile ein Kleinstes werden soll.

Für voriges Beyspiel erhält man daher:

	1+49;	4+36;	9+25;	16+16;	25+9;	36+4;	49+1
d. i.	50;	40;	34;	32.;	34;	40;	50.

Zusatz. Aus den eben aufgestellten Aufgaben läßt sich zwar bald einsehen, daß in selbigen ein größter oder kleinster Werth vorkommen könne, und wie man diesen dann leicht finden kann, ist §. 69. gezeigt. Nicht immer läßt sich aber in einer vorgelegten Funktion sogleich einsehen, ob in selbiger entweder ein Größtes oder ein Kleinstes vorkommen kann. Um nun zu erforschen, ob der nach §. 69. gefundne Werth von x, welcher $= a$ heißen mag, ein Größtes oder ein Kleinstes in der vorgelegten Funktion gebe; so verfahre man so:

Man setze den nach §. 69. gefundenen Werth von $x = a$ in die vorgelegte Funktion, und bestimme nun darnach den Werth der Funktion, welcher Werth $= M$ heiße. Nun setze man sowol $x < a$, als auch $x > a$

in die gegebne Funktion, und bestimme wieder die Werthe der Funktionen, welche für $x < a = A$, und für $x > a = B$ heißen mögen. Findet man nun $M \gtrless A$, oder $M \gtrless B$; so giebt im ersten Falle der Werth a ein Größtes, im zweyten Falle aber ein Kleinstes für die Funktion.

Beyspiel 1. Es sey $X = x^2 - 10x + 60$: man sucht den Werth von x, bey welchem die Funktion X ein Größtes oder Kleinstes ist.

Durch differentiiren erhält man:

$2x \,.\, dx - 10 \,.\, dx = 0$ oder $2x = 10$, also

$$x = 5 = a$$

Für diesen Werth von x erhält man

$$X = 25 - 50 + 60 = 35 = M$$

Für $x = 4 < a$ erhält man

$$X = 16 - 40 + 60 = 36 = A.$$

Für $x = 6 > a$ erhält man

$$X = 36 - 60 + 60 = 36 = B.$$

Weil also $M < A$ und $M < B$; so findet daher in der vorgelegten Funktion nur ein kleinster Werth statt, und zwar der für $x = 5$.

Beyspiel 2. Es sey $X = 12x - x^2 + 30$; man sucht das Größte oder Kleinste der Funktion.

Das gesuchte Differential ist:

$12 \,.\, dx - 2x \,.\, dx = 0$, oder $2x = 12$; also

$$x = 6 = a$$

Für diesem Werth ist

$$X = 72 - 36 + 30 = 66 = M$$

Für $x = 5 < a$ ist

$$X = 60 - 25 + 50 = 65 = A$$

Für $x = 7 > a$ ist

$$X = 84 - 49 + 30 = 65 = B$$

Da nun hier $M > A$ und $M > B$; so findet daher in der gegebnen Funktion ein Größtes statt, und zwar für $x = 6$.

Anmerkung. Um zu wissen, ob es in einer gegebnen Funktion ein Größtes oder ein Kleinstes gebe, und bey welchem Werth es vorkomme; dafür stellt die Differentialrechnung noch andere Regeln auf. Hier gnüge das gegebne Wenige über diese wichtige Lehre.

§. 73.

Aufgabe. Ein gleichschenkliges Trapez AEFB (Tab. IV. Fig. 25.) zu finden, welches bey einem gegebnen Inhalte $= A$ und Neigungswinkel $BFG = \alpha$ den kleinsten Umfang $2AE + EF$ hat.

Auflösung. Man nenne die größere Parallele $AB = z$, die untere und kleinere $EF = x$, die Seite $AE = BF = y$; so soll $EF + 2AE$, d. i. $x + 2y$ ein Kleinstes werden, und es muß daher nach §. 69. seyn: $dx + 2dy = 0$, oder

$$dx = -2dy$$

Der Inhalt des Trapezes ist $A = \frac{z + x}{2} . y . \sin \alpha$, oder weil $z = x + 2y . \cos \alpha$; so ist

$$A = \frac{2x + 2y . \cos\alpha}{2} . y . \sin\alpha, \text{ oder}$$

$$A = (x + y . \cos\alpha) . y . \sin\alpha \text{ und daher}$$

$$dA = d[(x + y . \cos\alpha)\, y . \sin\alpha] =$$
$$= (x + y . \cos\alpha) . \sin\alpha . dy + y . \sin\alpha\, (dx + \cos\alpha . dy) \text{ (§. 66.)}$$
$$= x . \sin\alpha . dy + \cos\alpha . \sin\alpha . y . dy - 2 \sin\alpha . y . dy + \sin\alpha . \cos\alpha . y . dy$$

für $dx = -2dy$. Weil nun nach §. 69. $dA = 0$ seyn muß; so muß daher seyn

$$x . \sin\alpha . dy = -2 . \sin\alpha . \cos\alpha . y . dy + 2 \sin\alpha . y . dy, \text{ oder}$$
$$: \sin\alpha\, dy$$
$$x = 2y - 2y . \cos\alpha.$$

Für die vorgelegte Frage ist daher

$$x = 2y\,(1 - \cos\alpha) = 2y . \sin . \text{vers} . \alpha$$

Man muß also $EF = 2AE. \sin. \text{vers}. \alpha$ machen, wenn $2AE + EF$ bey dem gegebnen Inhalte $= A$ ein Kleinstes worden soll.

Zusatz. Ist $\alpha = 90^\circ$; so wird, weil dann $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, oder $\sin. \text{vers}\,\alpha = 1$ ist, das Trapez AEFB zum Rectangel A'EFB' (Fig. 25.), und es muß daher für dem Fall, um ein Rectangel von dem Inhalte $A'EFB' = A$ und kleinsten Umfange $= 2A'E + EF$ anzugeben, bey selbigen die Grundlinie $EF = 2EA'$, nemlich der doppelten Höhe $= 2\,CD$ seyn.

Diese beyden Fälle finden vorzüglich ihre Anwendung in der Hydraulik (Mech. §. 140. Zus. III.) bey der Angabe der Querschnitte von Gräben und rechtwinkligen Gerinnen.

§. 74.

Erklärung. Aus einer gegebnen Differentialgleichung diejenige Gleichung wieder finden, aus welcher das gegebne Differential entstanden ist, nennt man die **Differentialgleichung integriren.**

Die gefundne Funktion nennt man nun das **Integral**, und wenn für eine gegebne Differentialgleichung das Integral gefunden werden soll; so wird dies gewöhnlich durch den Buchstaben $\int$ angezeigt, indem das Differential einer Funktion gleichsam als **ein Element derselben** (§. 62.), das Integral aber als die **Summe dieser Elemente** angesehen werden kann, welche die Funktion ausmachen.

Zusatz 1. Ob man gleich Regeln hat, alle Funktionen zu differentiiren, so hat man es bis jetzt noch nicht so weit gebracht, alle vorgelegte Differentialgleichungen integriren zu können. Da jedoch die mehrresten Differentialgleichungen unter der Form $x^n . dx$ vorkommen; so sey es hier schon genug, zu wissen, wie man den Werth $\int x^n . dx$ anzugeben habe.

Zusatz 2. Wenn man weiß, daß von

$X = x^2$ die Differentialgleichung $dX = 2x . dx$
$X = x^3$ „ „ „ „ $dX = 3x^2 . dx$
$X = x^4$ „ „ „ „ $dX = 4x^3 . dx$ ꝛc.
$X = x^n$ „ „ „ „ $dX = nx^{n-1} . dx$

ist; so wird man leicht, wenn jene Differentialgleichungen vorgelegt werden, anzugeben wissen, daß nur in diesem Falle **das Integral** von

$$\int 2x\,.\,dx = x^2 = \frac{2x^{1+1}\,.\,dx}{(1+1)\,.\,dx} = X;$$

$$\int 3x^2.\,dx = x^3 = \frac{3x^{2+1}\,.\,dx}{(2+1)\,.\,dx} = X;$$

$$\int 4x^3\,.\,dx = x^4 = \frac{4x^{3+1}\,.\,dx}{(3+1)\,.\,dx} = X \text{ ꝛc.}$$

$$\int nx^{n-1}\,.\,dx = x^n = \frac{nx^{(n-1)+1}\,.\,dx}{[(n-1)+1]\,.\,dx} = X$$

seyn könne, und man wird in diesen Fällen das Integral gefunden haben. Es ergiebt sich daher für die Auffindung des Integrals von der Form

I) $\int x^n\,.\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

folgende Regel:

man vermehre den Exponenten n der veränderlichen Größe x um die Einheit, und dividire hernach diese um einem Grad erhöhte Potenz nebst dem angehängten Differential der veränderlichen Größe mit dem Produkt aus dem neuen Exponenten und dem Differential der veränderlichen Größe.

Bis auf eine, weiter unten, zu erwähnende Ausnahme ist daher allgemein:

II) $\int ax^n\,.\,dx = a\,.\int x^n\,.\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$

So ist also z. B.

1) $\int 5x^4\,.\,dx = \frac{5x^5}{5} = x^5$, weil $d\,.\,x^5 = 5x^4\,.\,dx$

2) $\int a\,.\,dx = a\int x^0\,.\,dx = ax$, weil $d\,.\,ax = a\,.\,dx$

$$3)\ \int \frac{1}{m}\cdot\sqrt[m]{x^{1-m}}\,.\,dx = \frac{1}{m}\int x^{\frac{1-m}{m}}\,.\,dx = \frac{1}{m}\int x^{\frac{1}{m}-1}\,.\,dx$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{x^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x},\ \text{weil}$$

$$d\,.\sqrt[m]{x} = d\,.\,x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\,.\,x^{\frac{1}{m}-1}\,.\,dx = \frac{1}{m}\,x^{\frac{1-m}{m}}\,.\,dx$$

$$= \frac{1}{m}\,.\sqrt[m]{x^{1-m}}\,.\,dx\ \text{ist.}$$

$$4)\ \int \frac{a}{2\sqrt{x}}\,.\,dx = \int \frac{a}{2\,x^{\frac{1}{2}}}\,.\,dx = \frac{a}{2}\,.\int x^{-\frac{1}{2}}\,.\,dx = .\,\tfrac{1}{2}\,.\,a\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= ax^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{x},\ \text{weil}$$

$$d\,.(a\,.\sqrt{x}) = d(ax^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}\,.\,dx = \frac{\frac{1}{2}a}{x^{\frac{1}{2}}}\,.\,dx$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{x}}\,.\,dx = \frac{a\,.\,dx}{2\sqrt{x}}\ \text{ist.}$$

Zusatz 3. Es ist $\int dx$ sowol $= x$, als auch $= a + x$, weil sowol von $X = x$, als von $X = a + x$ die Differentialgleichung $dX = dx$ ist. Da also bey einem nach vorhergehender Regel gefundnen Integrale noch beständige Größen seyn können, welche bey der Bestimmung seines Differentials verschwanden, so bemerke man folgende zweyte Hauptregel: man setze in dem gefundnen Integral die veränderliche Größe $= 0$, oder für die veränderliche Größe einen Werth, bey welchem man einsieht oder weiß, daß das gefundne Integral $= 0$ werden, oder sonst einen bestimmten Werth erhalten muß; so erhält man entweder eine annullisirte oder Zahlen=

gleichung, aus welcher die beständigen Größen sich leicht bestimmen lassen, und durch Hinzusetzung derselben das schon gefundne Integral vollständig gemacht werden kann.

Man integrire daher im allgemeinen so: wenn $dX = ax^n . dx$; so ist

$$X = \int ax^n . dx = a\int x^n . dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C,$$

wo C die zuzusetzende Constante oder beständige Größe bedeutet.

Weiß man nun, daß

I) für $x = o$ auch $X = o$ wird; so ist $o = o + C$, also $C = o$, und das vollständige Integral daher

$$X = \frac{1}{n+1} . ax^{n+1} = \frac{a}{n+1} . x^{n+1}.$$

Weiß man aber, daß

II) Die Funktion $X = o$ wird, wenn x den Werth $= b$ hat; so ist

$$o = \frac{ab^{n+1}}{n+1} + C \text{ und daher}$$

$$C = -\frac{1}{n+1} . ab^{n+1} = -\frac{a}{n+1} . b^{n+1}$$

Demnach das vollständig Integral

$$X = \frac{a}{n+1} . \left(x^{n+1} - b^{n+1}\right).$$

Oder weiß man endlich, daß

III) für $x = f$ die Funktion $X = g$ wird: so ist

$$\frac{af^{n+1}}{n+1} + C = g, \text{ mithin}$$

$$C = g - \frac{af^{n+1}}{n+1}, \text{ und}$$

das vollständige Integral daher

$$X = \frac{a}{n+1}(x^{n+1} - f^{n+1}) + g.$$

Die Probe für die Richtigkeit eines aufgefundenen Integrals ist, daß man dasselbe differentiirt, und hierdurch das vorgelegte Differential wieder erhalten muß.

Zusatz 4. Die gewöhnlichsten und einfachsten Integralformeln sind:

I) $\int ax^n \, . \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

II) $\int (x \, . \, dy + y \, . \, dx) = x \, . \, y + C$

III) $\int \frac{y \, . \, dx - x \, . \, dy}{y^2} = \frac{x}{y} + C$

So ist also z. B.

1) $\int (14x \, . \, dx + 9y^2 \, . \, dy - 16z^3 \, . \, dz)$
$= 7x^2 + 3y^3 - 4y^4 + C$ (§. 66. Zus. 3.)

2) $\int (3x^2 \, . \, y^2 \, . \, dy + 2xy^3 \, . \, dx) = x^2 \, . \, y^3 + C$

3) $\int \frac{3x^2y \, . \, dx - 2x^3 \, . \, dy}{y^3} =$

$$\int \frac{3x^2y^2 \, . \, dx - 2x^3y \, . \, dy}{(y^2)^2} = \frac{x^3}{y^2} + C.$$

Zusatz 5. Wenn der Fall vorkommt, daß in dem Integralausdruck $a\int x^n . dx$ der Exponent $n = -1$ seyn soll; so wäre denn

$$a\int x^n . dx = a\int x^{-1} . dx = a\int \frac{dx}{x}.$$

Für diesem Fall $a\int \frac{dx}{x}$ kann nicht nach den bisherigen Regeln integrirt werden; sondern es ist dann nach weitern Lehren der Differential- und Integralrechnung

$$a\int \frac{dx}{x} = a . \log: nat: x \text{ (§. 74. Zus. 2.)}.$$

Anmerkung. Einige Beyspiele aus der Epipedometrie, Stereometrie und Mechanik mögen diesen wenigen hier von §. 61. an aufgestellten Sätzen zur Erläuterung und Anwendung dienen.

§. 75.

Aufgabe. Den Inhalt eines geradlinigten Triangels ACB (Fig. 26.) aus seiner Grundlinie und Höhe zu finden.

Auflösung. Die Grundlinie sey $AB = a$ und die Höhe $CD = b$. Man nehme in letztrer einen beliebigen Theil $DE = x$ an; ziehe durch E mit der Grundlinie AB die Parallele GH, und nenne das hierdurch entstandne Trapez $AGHB = X$, weil selbiges eine Funktion von x ist. Läßt man die beliebige oder veränderliche Linie $DE = x$ um ihr Differential (§.62. Zus.) $EF = dx$ wachsen, und zieht durch F mit der AB die Parallele KL; so ist, indem die EF unendlich klein und daher die Parallelen GH und KL einander unendlich nahe liegen, das unendlich kleine Trapez GKLH als ein Rectangel und zugleich als das Differential oder Element der Fläche AGHB $=$ X anzusehen, und es ist daher GKLH $=$ dX $=$ GH . dx. Da aber

$$CD : CE = AB : GH,$$

d. i. $b : (b - x) = a : GH$; so ist

$$GH = \frac{a}{b} . (b - x), \text{ und daher}$$

$$dX = \frac{a}{b} . (b - x)\, dx = a . dx - \frac{a}{b} . x . dx.$$

Da nun GKLH $=$ dX als ein Element der Fläche AGHB $=$ X anzusehen ist; so ist daher AGHB $=$ X eine Summe solcher Elemente (§. 74.) und daher

$$X = \int dX = \int (a . dx - \frac{a}{b} . x . dx) = a \int dx - \frac{a}{b} . \int x . dx$$

d. i. $X = ax - \frac{a}{b} . \frac{x^2}{2} + C.$

Für $x = DE = o$ wird auch $X = AGHB = o$; Daher $o = o - o + C$, also $C = o$, und das vollständige Integral $X = ax - \frac{ax^2}{2b}$, (§. 74. Zus. 3. I.).

Für $x = b = CD$ wird das Trapez AGHB zum Triangel ACB, und es ist daher der Flächeninhalt des Triangels $ACB = ab - \frac{ab^2}{2b} = ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$.

§. 76.

Aufgabe. Den Flächeninhalt des parabolischen

Triangels ABD (Fig. 27.) aus seinen rechtwinkligen Coordinaten AB und BD zu finden (§. 53.).

Auflösung. Man nenne einen beliebigen Theil der Abscisse AB, nemlich $AE = x$, die dazu gehörige rechtwinklige Ordinate $EC = y$, und das dadurch begrenzte Flächenstück $AEC = X$.

Nun wachse $AE = x$ um ihr Differential $EG = dx$; so ist, die GH parallel mit der EC oder BD gezogen, die Fläche ECHG ein Flächenelement $dX = EC \cdot EG = y \cdot dx$. Weil aber $y^2 = px$, also $y = \sqrt{px} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{x} = p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$; so ist $dX = p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$ und daher $AEC = X = p^{\frac{1}{2}} \cdot \int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x = \frac{2}{3} \cdot y \cdot x + C$, wo hier $C = 0$.

Läßt man nun $AE = x$ fortwachsen bis zu AB, so wird aus y die BD, und aus der Fläche AEC der parabolische Triangel ABD, dessen Inhalt $= \frac{2}{3} \cdot AB \cdot BD$ ist (§. 53.).

§. 77.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Trapezes ABCD (Fig. 28.) aus seinen beyden parallelen Seiten AB, CD und der Höhe DR zu finden.

Auflösung. Es heiße $AB = a$, $CD = b$ und $DR = h$; ferner sey ein beliebiger Theil der Höhe DR, nemlich $RF = x$, und das Differential von x sey $FM = dx$. Zieht man nun durch F und M mit der

AB die Parallelen GH und KS; so ist die Fläche AGHB $= X$, und GHSK $= dX = GH \cdot FM = y \cdot dx$. Zieht man ferner aus D und H mit der CA die Parallelen DQ und HE, so wie mit DR parallel die HN; so ist, weil $\Delta\, QDB \backsim \Delta\, EHB$, u. $\Delta\, DRB \backsim \Delta\, HNB$,

$$EB : QB = HN : DR, \text{ d. i.}$$

$$a - y : a - b = x : h$$

und $(a - b)\, x = (a - y)\, h = ah - yh$

Also $(a - b) \cdot dx = - h \cdot dy$, oder

$$dx = - \frac{h}{a - b} \cdot dy \quad \text{Daher}$$

$$GHSK = dX = y \cdot dx = - \frac{h}{a - b} \cdot y \cdot dy, \text{ und}$$

$$X = - \frac{h}{a - b} \cdot \int y \cdot dy = - \frac{h}{a - b} \cdot \frac{y^2}{2} + C$$

Für $y = a$ wird aber $X = o$; daher nach §. 74. Zas. 3. II,

$$o = - \frac{h}{a - b} \cdot \frac{a^2}{2} + C, \text{ oder}$$

$$C = \frac{h}{a - b} \cdot \frac{a^2}{2}$$

Demnach das vollständige Integral

$$X = \frac{h}{a - b} \cdot \left(\frac{a^2 - y^2}{2}\right)$$

Wird $y = b$; so wird aus X oder AGHB das Trapez ACDB, dessen Inhalt daher

$$= \frac{h}{a - b} \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) = \frac{h \cdot (a + b) \cdot (a - b)}{2 (a - b)}$$

$$= \frac{h (a + b)}{2}.$$

§. 78.

Aufgabe. Den Inhalt eines geraden Kegels aus dem Halbmesser seiner Grundfläche und Höhe zu finden,

Auflösung. Es sey der Grundfläche Halbmesser DA (Fig, 29.) = DB = r, und die Höhe des Kegels die CD = h; ferner sey ein beliebiger Theil der Höhe die CF = x, und das Differential hiervon die FM = dx. Legt man nun durch die Punkte F und M mit der Grundfläche des Kegels parallele Ebenen; so ist der Kegel ECG = X eine Funktion von x, und der unendlich dünne abgestumpfte Kegel HG = dX einem Cylinder gleich, dessen Inhalt $= FE^2 . dx . \pi$ ist.

Denkt man sich durch die Axe CD des geraden Kegels eine Ebene, welche die Grundfläche des Kegels und die mit ihr parallelen Schnitte schneidet; so ist, weil Δ ADC $\backsim$ Δ EFC, die

$$CD : AD = CF : FE, \text{ d. i.}$$

$$h : r = x : FE$$

$$\text{also } FE = \frac{r}{h} . x, \text{ und } FE^2 = \frac{r^2}{h^2} . x^2.$$

$$\text{Daher } dX = FE^2 . dx . \pi = \frac{r^2 \pi}{h^2} . x^2 . dx, \text{ und}$$

$$X = \frac{r^2 \pi}{h^2} . \int x^2 . dx = \frac{r^2 \pi}{h^2} . \frac{x^3}{3} + C.$$

Da aber für x = o auch X = o, also auch C = o; so ist das vollständige Integral

$$X = \frac{r^2 \pi}{h^2} . \frac{x^3}{3} .$$

Wird $x = h$, so wächst X zum Kegel ACB an, dessen Inhalt daher $= \frac{r^2 \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{h}{3} \cdot r^2 \pi$ ist.

§. 79.

Aufgabe. Den Inhalt eines abgestumpften Kegels aus den Halbmessern seiner parallelen Grundflächen und seiner Höhe zu finden.

Auflösung. Es sey des Kegels untrer und größrer Halbmesser CA (Fig. 30.) $= CB = R$, der obere und kleinere $DE = DF = r$, und des Kegels Höhe $CD = h$. Ferner sey ein beliebiger Theil der Höhe, wie $CG = x$, so wie das Differential von x die $GL = dx$. Legt man nun durch die Punkte G und L mit den parallelen Grundflächen wieder Ebenen parallel, und durch die Axe CD auch eine Ebene; so sind die Halbmesser CB, GK, LN, DF sämmtlich parallel; und wenn man nun noch die Normalen FQ und KS in letztrer Ebene auf die AB zieht: so sind die rechtwinkligen Δ FQB u. KSB ähnlich. Weil nun $CG = x$ und $GL = dx$; so ist der kleine abgestumpfte Kegel AK, dessen Halbmesser der obren Grundfläche $GK = y$ ist, eine Funktion von x, nehmlich $= X$, und der unendlich dünne abgestumpfte Kegel $HN = dX = \pi . GK^2 . dx = \pi . y^2 . dx$. Nun verhält sich aber in den vorhin erwähnten Triangeln die

$$SB : QB = KS : FQ,$$ d. i.

$$R - y : R - r = x : h.$$ und daher

$$(R - r)\,x = (R - y)\,h = Rh - hy,$$ und

$$(R - r)\,dx = - h\,.\,dy,\ \text{oder}\ dx = - \frac{h}{R - r}\,.\,dy.$$

Diesen Werth von dx in obige Gleichung dX gesetzt; so erhält man

$$dX = - \pi y^2 \,.\, \frac{h}{R - r}\,.\,dy = - \frac{\pi h}{R - r}\,.\,y^2\,.\,dy,$$ und

$$X = - \frac{\pi h}{R - r}\,.\int y^2 . dy = - \frac{h\pi}{R - r}\,.\,\frac{y^3}{3} + C$$

Da nun für $y = R$, die $X = o$ wird, so ist daher

$$o = - \frac{h\pi}{R - r}\,.\,\frac{R^3}{3} + C\ \text{oder}\ C = \frac{h\pi}{R - r}\,.\,\frac{R^3}{3},$$

und das vollständige Integral

$$X = \frac{h\pi}{3(R - r)}\,(R^3 - y^3).$$

Wird $y = r$; so wächst X zum abgestumpften Kegel AF an, dessen Inhalt also ist

$$= \frac{h\pi}{3(R - r)}\,.\,(R^3 - r^3) = \frac{h}{3}\,.\,(R^2 + Rr + r^2)\,\pi.$$

Zur Lehre vom Schwerpunkte gehörig, womit Mechanik §. 21. Anmerk. I. 2. zu vergleichen ist.

§. 80.

Aufgabe. Die Entfernung des Schwerpunktes eines Trapezes von einer seiner parallelen Seiten zu finden.

Auflösung. Es heiße die größere parallele Seite AB = B (Fig. 31.), die kleinere parallele Seite CD = b, und die Höhe des Trapezes, d. i. die DE = RV = h. Bestimmt man nun die normale Entfernung des Schwerpunktes des Trapezes von der AB aus; so nehme man in der Höhe ED ein beliebiges Stück EH = x, und ziehe durch H mit der AB die Parallele FG = y. Ist nun ferner HK = dx; so ist, wenn man durch K mit der AB die Parallele LM zieht, die Fläche FM = y . dx ein Flächenelement, dessen statisches Moment in Hinsicht der Drehaxe AB = x . y . dx ist. Da nun nach Mechanik §. 21. und dessen Zusatz I. die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehaxe allgemein =

$$\frac{\text{der Summe der statischen Momente}}{\text{die Summe der Gewichte}}$$ ist; hier aber für das beliebige Trapez AG die Summe der statischen Momente $= \int x . y . dx$, die Summe der Gewichte $= \int y . dx$ ist: so ist daher die Entfernung des Schwerpunktes des beliebigen Trapezes AG

von der AB $= \frac{\int x \, . \, y \, . \, dx}{\int y \, . \, dx}$, wo nun y als eine Funktion von x auszudrücken ist. Man ziehe deshalb aus G und D mit der AC die Parallelen GN und DQ, so wie mit DE die Parallele Gs; so verhält sich

$$BQ : BN = DE : Gs, \text{ d. i.}$$

$$B - b : B - y = h : x$$

Daher $\frac{(B-b)x}{h} = B - y$ und

$$y = B - \frac{B-b}{h} . x = \frac{Bh - (B-b)x}{h}, \text{ und}$$

$$\frac{\int y \, . \, x \, . \, dx}{\int y \, . \, dx} = \frac{\int Bh \, . \, x \, . \, dx - \int (B-b) x^2 \, . \, dx}{\int Bh \, . \, dx \; - \; \int (B-b) x \, . \, dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} Bhx^2 - \frac{1}{3}(B-b)x^3}{Bhx - \frac{1}{2}(B-b)x^2} \text{ ohne Constante.}$$

Für $x = h$ erhält man die Entfernung des Schwerpunktes des Trapezes ACDB von der Axe AB

$$= \frac{\frac{1}{2} . Bh^3 - \frac{1}{3}(B-b)h^3}{Bh^2 - \frac{1}{2}(B-b)h^2} = h . \frac{\frac{1}{2}B - \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}b}{B - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b}$$

$$= h . \frac{\frac{1}{6}B + \frac{2}{6}b}{\frac{3}{6}B + \frac{3}{6}b} = h . \frac{B + 2b}{3B + 3b}, \text{ oder}$$

$$\text{I) } e' = \frac{h}{3} . \frac{B + 2b}{B + b}.$$

Bestimmt man die Entfernung des Schwerpunktes von der kleinern Parallele CD, so findet man auf ähnliche Weise

$$\text{II) } e' = \frac{h}{3} . \frac{b + 2B}{B + b}.$$

Halbirt man die beyden Parallelen AB und CD in U und R; so ist die Linie UR ein Durchmesser der Schwere der Fläche, d. h. in der Linie RU liegt der Schwerpunkt des Trapezes AD. Nennt man die UR = a; so ist nach Gründen der Geometrie die Entfernung des Schwerpunktes des Trapezes AD in der UR und von AB

$$\text{III)}\ e = \frac{a}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}, \text{ und}$$

von der CD ist

$$\text{IV)}\ e = \frac{a}{3} \cdot \frac{b + 2B}{B + b}.$$

Zusatz. Wird CD = b = o; so wird das Trapez zum Triangel. Haben daher die Linien h u. a im Triangel gleiche Bedeutungen wie im Trapez; so ist im Triangel die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundlinie entweder $= \frac{h}{3}$ oder $\frac{a}{3}$, und von der Spitze entweder $= \frac{2}{3} \cdot h$ oder $\frac{2}{3} \cdot a$.

§. 81.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Parabelfläche zu finden.

Auflösung. Ist der Schwerpunkt der ganzen Parabelfläche HAG (Fig. 32.) deren Scheitel A, und Axe AK ist, zu finden; so ist die Axe AK ein Durchmesser der Schwere. Um nun die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche HAG, von A in der Axe AK zu finden; so sey AB = x, dessen rechtwinklige Ordinate BE = BD = y, und es ist ein Flächenelement $= ED \,.\, dx = 2y \,.\, dx$, dessen statisches Moment in Hinsicht des Punktes $A = x \,.\, 2y \,.\, dx$ ist. Die Entfernung des Schwerpunktes des beliebigen Parabelsegments EAD von A ist daher $= \frac{\int yx \,.\, dx}{\int 2y \,.\, dx}$ (§. 80.) $= \frac{\int yx \,.\, dx}{\int y \,.\, dx}$. Weil nun $y = p^{\frac{1}{2}} \,.\, x^{\frac{1}{2}}$ (§. 76.) so ist daher $\frac{\int yx \,.\, dx}{\int y \,.\, dx} = \frac{\int x^{\frac{1}{2}} \,.\, x \,.\, dx}{\int x^{\frac{1}{2}} \,.\, dx} = \frac{\int x^{\frac{3}{2}} \,.\, dx}{\int x^{\frac{1}{2}} \,.\, dx}$

$$= \frac{\frac{3}{2} \,.\, x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \,.\, x^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{3}{5} x^{\frac{2}{2}} = \tfrac{3}{5} x.$$

Für $x = AK$ ist daher die Entfernung des Schwerpunktes der Parabelfläche HAG von A und in der Axe AK, d. i.

1) $c = \frac{3}{5} \,.\, AK$.

Den Schwerpunkt der halben Parabelfläche ABH (Fig. 35.) von der Axe AU findet man auf vorige ähnliche Weise. Es sey $AH = x$, und $HB = y$; so ist ein Flächenelement $HD = HB \,.\, HE = y\, dx$, und dessen statisches Moment von der Axe $AU = \frac{1}{2} y \,.\, y \,.\, dx$ (Mech. §. 21. Anm. I. 1.). Die Entfernung des Schwerpunktes der Fläche ABH daher von der Axe $AU = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 \,.\, dx}{\int y \,.\, dx} = \frac{\int y^2 \,.\, dx}{2 \int y \,.\, dx}$. Weil nun $y^2 = px$, und $2y \,.\, dy = p \,.\, dx$, also $dx = \frac{2y \,.\, dy}{p}$; so ist $\frac{\int y^2 \,.\, dx}{2\int y \,.\, dx} = \frac{\int 2y^3 \,.\, dy}{2 \int 2y^2 \,.\, dy} = \frac{3y^4}{8y^3} = \frac{3}{8} y$ ohne Constante.

Der Schwerpunkt der halben Parabelfläche ABH liegt daher von der Axe AU um =

II) $e' = \frac{3}{8} . HB$ entfernt.

§. 82.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes von seinem Mittelpunkt aus zu finden.

Auflösung. Es sey ACB (Tab. V. Fig. 34.) der Kreisausschnitt und C sein Mittelpunkt. Theilt man den Bogen ADB des Ausschnittes in D in zwey gleiche Theile, so ist der Halbmesser CD ein Durchmesser der Schwere, und in der Linie CD liegt also der Schwerpunkt des Kreisausschnittes ACB. Man ziehe die Sehne AB, und mit selbiger parallel durch C die Linie A′B′; theile den Bogen ADB oder eine Hälfte, wie DB, in eine unendlich große Anzahl gleicher Theile; so ist, wenn EF ein solcher unendlich kleiner Theil oder ein unendlich kleiner Bogen ist, der unendlich kleine Ausschnitt ECF als ein Triangel anzusehen, in welchem, wenn H der Mittelpunkt des Bogens EF und der Halbmesser CH daher ein Durchmesser der Schwere des Triangels ECF ist, die Entfernung seines Schwerpunktes s von $C = Cs = \frac{2}{3} . CH$ (§. 80. Zus.) ist. Weil nun, wenn man aus E, H, F und s auf A′B′ die Normalen EG, HK, FL und ss′, so wie aus F mit der AB die Parallele FN bis an die EG zieht, der $\Delta\ HCK \backsim \Delta\ sCs' \backsim \Delta\ FEN$ ist; so ist auch $ss' = \frac{2}{3} . HK$. Nun ist ss′ die Entfernung des Schwerpunktes des Triangels ECF oder des unendlich kleinen Kreisausschnittes ECF von der Arc $A'B'$; daher das statische Moment dieses unendlich kleinen Ausschnittes oder eines Elements des Kreisausschnittes ACB in Hinsicht der Dreharc $A'B' = ss'$. Ausschn. $ECF = \frac{2}{3} . HK . \frac{EF . CH}{2}$ $= \frac{2}{3} . HK . \frac{EF . CE}{2} = \frac{1}{3} . HK . EF . r$.

Weil aber Δ HCK $\backsim$ Δ FEN; so ist

$$CH : HK = EF : FN, \text{ und}$$

$$\overline{HK . EF = CH . FN = r . GL.}$$

Das statische Moment des unendlich kleinen Ausschnittes ECF ist also

$$= \frac{1}{3} . r^2 . GL.$$

Weil nun dies von sämmtlichen unendlich kleinen Ausschnitten in dem ganzen Ausschnitt ACB gilt; so ist daher, wenn man aus A und B mit dem Halbmesser CD die Parallelen AA' und BB' zieht, das statische Moment des Kreisausschnittes $ACB = \frac{1}{3} . r^2 . A'B' = \frac{1}{3} r^2 . AB = \frac{1}{3} . r^2 . s$, für $AB = s$.

Nennt man den Bogen $ADB = b = \frac{r . \beta . \pi}{180}$ für dem Winkel $ACB = \beta$; so ist der Inhalt des Ausschnittes $= \frac{b . r}{2} = \frac{r^2 . \beta . \pi}{360}$.

Wenn daher die Entfernung des Schwerpunktes S des Kreisausschnittes ACB d. i. die $CS = e$ ist; so ist nach Mechanik §. 21. und dessen Zusatz I. die Entfernung des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C, d. i.

$$e = \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot s}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot r} \text{ oder}$$

$$\text{I)}\ e = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{s}{b} \cdot r.$$

Oder es ist $e = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot s}{\frac{1}{360} \cdot r^2 \cdot \beta \cdot \pi}$, d. i.

$$\text{II)}\ e = \frac{120}{\beta \cdot \pi} \cdot s.$$

Oder weil $s = 2r \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\beta$; so ist auch

$$\text{III)}\ e = \frac{240 \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\beta}{\beta \cdot \pi} \cdot r.$$

Zusatz. Wird $s = 2r$ d. h. wird der Ausschnitt zum Halbkreis; so ist dann $b = r\pi$ und $\beta = 180°$. Daher die Entfernung des Schwerpunktes des Halbkreises vom Mittelpunkte oder vom Durchmesser, d. i.

$e = \tfrac{4}{3} \cdot \dfrac{r}{\pi}$, welches sehr nahe

$e = \dfrac{14}{33} \cdot r$ giebt.

§. 83.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisabschnittes vom Mittelpunkt des zugehörigen Kreises zu finden.

Auflösung. Des Kreisabschnittes ADB (Fig. 35.) Bogen ADB sey in D halbirt und C der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises: so ist der die Sehne AB normal schneidende Halbmesser CD ein Durchmesser der Schwere, in welchem der Schwerpunkt vom Abschnitte ADB in S, vom Triangel ACB in s' und vom Ausschnitte ACB in s liege.

Nun muß für den Gleichgewichtszustand seyn, die Summe der statischen Momente vom Abschnitt und von dem Triangel eben so groß, wie das statische Moment des Ausschnittes allein, d. i. wenn man den Flächeninhalt des Ausschnittes $= A$, den des Triangels $= \frac{1}{2} . AB . CE = \frac{1}{2} s . CE$, und den Inhalt des Ausschnittes $= \frac{1}{2} . (\text{Bog.})\, ADB . CD . = \frac{1}{2} . b . r$ setzt,

$$CS . A + Cs' . \tfrac{1}{2} s . CE = Cs . \tfrac{1}{2} b . r.$$

Weil aber $Cs' = \frac{2}{3} . CE$, also $Cs' . CE = \frac{2}{3} . CE^2 = \frac{2}{3}(CA^2 - AE^2) = \frac{2}{3}\left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right)$, u. $Cs = \frac{2}{3} \frac{s}{b} . r$ (§. 82. I.) ist; so ist daher

$$CS . A + Cs' . \tfrac{1}{2} s . CE = Cs . \tfrac{1}{2} . b . r$$

d. i. $$e . A + \tfrac{1}{3}\left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) s = \tfrac{1}{3} . s . r^2,$$ oder

$$e . A + \tfrac{1}{3} . s . r^2 - \tfrac{1}{12} . s^3 = \tfrac{1}{3} . s . r^2.$$

Daher die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreisabschnittes vom Mittelpunkt seines zugehörigen Kreises, d. i.

$$e = \frac{s^3}{12 . A}.$$

§. 84.

Aufgabe. Den Abstand des Schwerpunktes einer Pyramide oder eines Kegels von der Spitze dieser Körper zu finden.

Auflösung. Der Schwerpunkt eines solchen Körpers muß in der Axe dieser Körper, d. i. in der geraden Linie von der Spitze nach den Schwerpunkt der Grundfläche gezogen, liegen, und es ist daher die Axe der pyramidalen Körper ein Durchmesser der Schwere. Ist der Körper ein gerader, so ist die begrenzte Axe CD (Fig. 36.) zugleich die Höhe des pyramidalen Körpers. Es sey der Körper CD also eine gerade Pyramide, und es heiße $CD = a$; ein beliebiger Theil der CD nehmlich $Cd = x$; ein durch den Punkt d mit der Grundfläche $AB = G$ geführter paralleler Schnitt $ab = g$, und es ist $G : g = a^2 : x^2$, oder $g = \frac{x^2}{a^2} . G$. Ein Körperelement aber ist $= g . dx = \frac{G}{a^2} . x^2 . dx$, und dessen statisches Moment in Hinsicht des Drehpunktes $C = Cd . g . dx = \frac{G}{a^2} . x^3 . dx$; daher der Abstand des Schwerpunktes des beliebigen Pyramidenstücks Cab von $C = \frac{\int x^3 . dx}{\int x^2 . dx} = \frac{5 x^4}{4 x^3} = \frac{3}{4} x$ ohne Constante.

Für $x = a$ erhält man den Abstand des Schwerpunktes einer Pyramide oder eines Kegels von der Spitze d. i.

I) $e = \frac{3}{4} . a$, und von der Grundfläche ist daher der Abstand des Schwerpunktes

II) $e' = \frac{1}{4} . a$.

§. 85.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Halbkugel zu finden.

Auflösung. Es sey der Halbkugel DAE (Fig. 37.) Halbmesser CA = r auf dem größten Kugelschnitt DE normal; so ist CA ein Durchmesser der Schwere der Halbkugel. Ferner sey AF = x ein beliebiger Theil des Halbmessers AC, und es sey durch F mit dem Kreis DE ein zweyter GH parallel; so ist, FG = FH = y gesetzt, ein Körperelement $= y^2 . \pi . dx$, und dessen statisches Moment in Hinsicht des Drehpunktes $A = x . y^2 . \pi . dx$. Da nun $y^2 = 2rx - x^2$ ist; so ist die Entfernung des Schwerpunktes des beliebigen Kugelstücks GAH von A =

$$\frac{\int xy^2 . dx}{\int y^2 . dx} = \frac{\int 2rx^2 . dx - \int x^3 . dx}{\int 2rx . dx - \int x^2 . dx} = \frac{\frac{2}{3} rx^3 - \frac{1}{4} x^4}{\frac{2}{2} . rx^2 - \frac{1}{3} x^3}$$

$$\frac{8rx^3 - 3x^4}{12rx^2 - 4x^3} = \frac{8r - 3x}{12r - 4x} . x \text{ ohne Constante.}$$

Für x = r erhält man die Entfernung des Schwerpunktes der Halbkugel von ihrem Scheitel A, d. i.

I) $e = \frac{5}{8} . r$, und der Abstand des Schwerpunktes der Halbkugel von ihrem Mittelpunkt ist

II) $e' = \frac{3}{8} . r$.

§. 86.

Lehrsatz. Für einem jeden Körper, welcher durch Umdrehung einer ebenen Fläche ABD (Fig. 38.) um einer ihrer geraden Seiten, wie AB, entstehet, kann man mit Hülfe des Schwerpunktes der Fläche den Inhalt des Körpers finden, wenn man den Weg des Schwerpunktes mit dem Inhalte der erzeugenden Fläche multiplicirt. (Mech. §. 21. Anm. IV.).

Beweis. Es sey in der erzeugenden oder umdrehenden Fläche die Abscisse $AB = x$, die rechtwinklige Ordinate $BD = y$, und $ES = e$ der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Drehaxe AB; so ist $2e\pi$ der Weg, welchen der Schwerpunkt S bey einer ganzen Umdrehung um die Axe AB durchläuft, und wodurch die Fläche $ABD = F$ einen Körper vom Inhalte $= Q$ erzeugt. Nun ist nach dem Vorhergehenden für die Drehaxe AB die Entfernung des Schwerpunktes S von der AB, nehmlich die

$$ES = e = \frac{\int y . dx . \frac{1}{2} y}{\int y . dx} = \frac{\int \frac{1}{2} y . dF}{F},$$ weil $y . dx = dF$ ein Flächenelement, und daher $\int y . dx = \int dF = F$ ist.

Aus $e = \frac{\int \frac{1}{2} y . dF}{F} = \frac{\int y . dF}{2F}$ folgt $2e . F = \int y . dF$.

Ein Körperelement ist $= y^2 . \pi . dx = dQ$, also $\int dQ = \int y^2 \pi . dx$ d. i. $Q = \pi \int y^2 . dx = \pi \int y . y . dx = \pi \int y . dF = \pi 2e . F$ oder $Q = 2e\pi . F$.

Beyspiel. In einer Parabelfläche, deren rechtwinklige Coordinaten x und y sind, ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe nach §. 81. d. i. $e = \frac{3}{8} . y$, und $F = \frac{2}{3} . x . y$ (§. 76.). Daher der Inhalt eines parabolischen Conoids, welches durch Umdrehung einer Parabelfläche um ihre Abscisse oder Axe entsteht, d. i. $Q = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot y \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot xy^2 \pi$.

Zur Lehre vom Trägheitsmomente gehörig, womit Mechanik §. 116. Zusatz III. zu vergleichen ist.

§. 87.

Aufgabe. Das Trägheits- oder Schwingungsmoment eines Rectangels ABDE (Fig. 39.) vom Mittelpunkt F einer seiner Seiten AB zu finden.

Auflösung. Es heiße $AB = g$, $BD = h$ und der Inhalt des Rectangels $ABDE = g.h = f$; ferner sey aus dem Mittelpunkt F mit der BD die FH parallel, und ein beliebiger Theil der FH, nehmlich $FG = x$; so ist, durch G eine Parallele KL mit AB gezogen, ein Flächenelement $= g.dx$, dessen Trägheitsmoment in Hinsicht der Drehaxe $AB = x^2.g.dx$, und das Trägheitsmoment des beliebigen Flächenstücks $BK = \int g.x^2.dx = g.\frac{x^3}{5}$ ohne Constante. Für $x = h$ erhält man daher das Trägheitsmoment des Rectangels $ABDE = g.\frac{h^3}{5} = g.h.\frac{h^2}{5} = f.\frac{h^2}{3}$.

Der Schwingungspunkt des Rectangels ABDE liegt daher von der Seite oder Drehaxe AB um $= \frac{h}{\sqrt{3}}$ entfernt.

Zusatz. Verlängert man des Rectangels ABDE Halbirungslinie HF bis C in einerley Ebene, und setzt CF = e; so ist die Entfernung des Schwingungspunktes des Rectangels ABDE von C = a = $e + \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Die Entfernung des Schwerpunktes des Rectangels ABDE von C ist = $e + \frac{h}{2}$.

§. 88.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu finden, welches in einer gegebnen Entfernung um eine Drehaxe schwingt.

Auflösung. Bey dieser Aufgabe wird angenommen, daß in der Ebene, in welcher die Axe des Parallelepipeds herumschwingt, nicht nur der Schwingungspunkt desjenigen Rectangels liege, welches man erhält, wenn eine durch die Drehaxe gelegte Ebene die Axe des Parallelepipeds rechtwinkligt schneidet; sondern auch die Schwingungspunkte der Rectangel oder Durchschnitte des Parallelepipeds liegen, welche mit vorigen erstern Rectangel oder Durchschnitt eine parallele Lage haben.

Erster Fall. Wenn das rechtwinklige Parallelepiped an einer seiner Grundflächen ergriffen wird, und um eine Drehaxe C (Fig. 40.) herumschwingt.

Hier sey D der Schwingungspunkt der Grundfläche f, CD = a die Entfernung dieses Schwingungspunktes von der Drehaxe C (§. 87. Zusatz); ferner sey DA $= l$ die Länge des Parallelepipeds und DF $= x$ ein beliebiger Theil derselben: so ist ein Körperelement $= f.dx$, und das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht der Drehaxe durch C $= CF^2.f.dx =$

$$f.(CD^2 + DF^2)\,dx = f(a^2+x^2).dx.$$

Das Trägheitsmoment des Körperstücks DF daher $=$

$$f.\int(a^2+x^2).dx = f\left(a^2x+\frac{x^3}{3}\right) = fx\left(a^2+\frac{x^2}{3}\right)$$

ohne Constante.

Für $x = l$ erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipeds $=$

$$z^2M = f.l\left(a^2+\frac{l^2}{3}\right) = M\left(a^2+\frac{l^2}{3}\right) =$$

$$\frac{M}{3}\left(3a^2+l^2\right).$$

Zweyter Fall. Wenn das rechtwinklige Parallelepiped zwischen seinen Grundflächen ergriffen wird.

Es sey D (Fig. 41.) der Schwingungspunkt des vorausgesetzten Durchschnitts-Rectangels, seine Entfernung von der Drehaxe C $=$ CD $= a$; die Grundfläche des Parallelepipeds sey auch $= f$, die Länge des Körpers AE $= l$, die Länge AD aber $= l'$, und AF $= x$; so ist das Trägheitsmoment eines Körperelements $= CF^2.fdx = f(CD^2+DF^2).dx =$

$f.[a^2+(l'-x)^2].dx = f(a^2+l'^2-2l'.x+x^2).dx$, und das Trägheitsmoment des Körperstücks AF $=$

$$f.\int(a^2l'^2-2l'x+x^2).dx = f\left(a^2x+l'^2x-l'x^2+\frac{x^3}{3}\right)$$

$= fx\left(a^2+l'^2-l'x+\frac{x^2}{3}\right)$, ohne Constante.

Für x = l erhält man das Trägheitsmomen des ganzen Körpers

$$z^2 M = f.l\left(a^2 + l'^2 - l'l + \frac{l^2}{3}\right) =$$

$$= M\left(a^2 + l'^2 - l'l + \frac{l^2}{3}\right)$$

$$= \frac{M}{3}\left(3a^2 + 3l'^2 - 3l'l + l^2\right).$$

§. 89.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines Parallelepipeds zu finden, dessen Axe gegen die Drehaxe geneigt ist, beyde Axen aber in einer Ebene liegen.

Auflösung. Es sey des Körpers Länge AC = l (Fig. 42.), der Neigungswinkel der Axe des Parallelepipeds AC gegen die Drehaxe XZ = ACZ = α; ferner sey CE = x, und ein Körperelement auch = f.dx; so ist das Trägheitsmoment dieses Körperelements in Hinsicht der Drehaxe XZ = $DE^2.f.dx$
$= f.(CE.\sin\alpha)^2.dx = f.\sin\alpha^2.x^2.dx$, und das Trägheitsmoment des Körperstücks CE

$$= f.\sin\alpha^2.\int x^2.dx = f.\sin\alpha.\frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{fx}{3}.x^2.\sin\alpha^2 = \frac{fx}{3}.(x.\sin\alpha)^2,$$ ohne Constante.

Für x = l erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipeds AC =

$$z^2 M = \frac{fl}{3}.(l.\sin\alpha)^2 = \frac{M}{3}.a^2.$$

§. 90.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders zu finden, welcher sich um seine Axe dreht.

Auflösung. Es sey die Länge des Cylinders $= l$, seiner Grundfläche Halbmesser $CA = R$ (Fig. 43.), ein beliebiger Theil desselben $= CB = x$; so ist der Inhalt eines Cylinders von der Länge l und Halbmesser $x = l.\pi.x^2$; ein Körperelement daher $= l.\pi.2x.dx$, und dessen Trägheitsmoment in Hinsicht der Axe $C = x^2.l\pi.2x.dx = 2l\pi.x^3.dx$, so wie das Trägheitsmoment des veränderlichen Cylinders um seine Axe als Drehaxe $= 2l\pi.\int x^3.dx = 2l\pi.\frac{x^4}{4} = l\pi x^2.\frac{x^2}{2}$ ohne Constante.

Für $x = R$ erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders $=$

$$z^2 M = l\pi R^2.\frac{R^2}{2} = M.\frac{R^2}{2} = \frac{M}{2}.R^2.$$

§. 91.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu finden, welches sich um seine Axe dreht. (Fig. 44.)

Auflösung. Es sey die Länge des geraden Parallelepipeds $= l$, seine Breite $= AB = a$ und seine Dicke $AE = b$. Man ziehe aus dem diagonalischen Mittelpunkt C der Grundfläche ABDE mit den gegenüberstehenden Seiten des Rectangels die Parallelen MN und LF, und nehme auf selbigen von C aus beliebige Theile $CG = x$ und $CK = y$; so ist ein Körperelement $= l.dx.dy$, und dieses Elements Trägheitsmoment in Hinsicht der Axe XY (s. Mech. Fig. 75.) oder hier des Axenpunktes $C = CH^2.l.dx.dy = l(x^2 + y^2)\,dx.dy$. Das Trägheitsmoment des Körperstücks CH daher

$$= l.\int(x^2+y^2)dx.dy = l(\int x^2.dx.dy + \int y^2.dy.dx)$$

$$= l\left(\frac{x^3}{3}.y + \frac{y^3}{3}.x\right) = \frac{lxy}{3}\left(x^2 + y^2\right)$$ ohne Constante.

Setzt man $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$; so erhält man das Trägheitsmoment des vierten Theils des Parallelepipeds, d. i. $\frac{lab}{12}.\left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right)$; folglich das Trägheitsmoment des ganzen Parallelepipeds =

$$z^2 M = \frac{lab}{12}.\left(a^2 + b^2\right) = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$= M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right).$$

Anmerkung. Eine weitere und nähere Ausführung über das Auffinden der Trägheitsmomente fester Körper findet man in nachstehenden Schriften:

Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen. Von Joh. Pasquich. Leipzig, 1789. 8.

System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Von J. J. A. Ide. Zwey Theile. Berlin, 1802, 8. im zweyten Band.

Lehrbuch der Mechanik fester Körper, von M. Magold. München, 1802. Erster Band.

§. 92.

Aufgabe. Das Frictionsmoment am untern und cylindrischen Zapfen einer stehenden Welle zu finden (Vergl. Mech. §. 40. Beysp. II.).

Auflösung. Der gesammte Druck, welchen die horizontale Grundfläche des cylindrischen Zapfens erleidet, sey $= G$; so erleidet jede concentrische kleinere Kreisfläche, als die Grundfläche des Zapfens ist, einen Druck, welcher dem Inhalte dieser kleinern Kreisfläche proportional ist, vorausgesetzt, daß der Druck G über die ganze horizontale Grundfläche des Zapfens gleichförmig vertheilt ist. Ist daher der Halbmesser der horizontalen kreisförmigen Grundfläche des Zapfens $= CA$ (Fig. 45.) $= r$, ein beliebiger Theil dieses Halbmessers die $CB = x$, und der Druck auf die Kreisfläche vom Halbmesser $x = X$; so ist, weil $G : X = r^2\pi : x^2\pi = r^2 : x^2$ seyn soll, $X = \frac{x^2}{r^2} . G$, und der Druck auf einem ringförmigen Kreiselement daher $= dX = \frac{G}{r^2} . 2x . dx$. Die Friction für voriges Element ist $= \varphi . dX = \varphi . \frac{G}{r^2} . 2x . dx$, und dessen Frictionsmoment $= \varphi . \frac{G}{r^2} . 2x^2 . dx$. Daher das Frictionsmoment im Kreise vom Halbmesser $x = \varphi . \frac{G}{r^2} . \int 2x^2 . dx$ $= \varphi . \frac{G}{r^2} . \frac{2x^3}{3}$ ohne Constante.

Für $x = r$ erhält man das Frictionsmoment am untern Zapfen der stehenden Welle $= \varphi . \frac{2}{3} . r . G$.

§. 93.

Aufgabe. Die Einrichtung einer Radwelle zu machen, für welche die Beschleunigung der Last oder der Kraft am größten wird.

Auflösung. Die Einrichtung einer Radwelle und die Bewegung dieser ganzen Maschine ist unter übrigens gleichen Umständen vortheilhafter, je größer entweder die Beschleunigung der zu hebenden Last Q, oder der angewendeten Kraft P ist (vergl. Mech. §. 118. Auf.). Bleibt an einer Radwelle alles übrige ungeändert, man vergrößert oder verkleinert aber den Halbmesser $= a$ des Rades; so wird dadurch die Beschleunigung der Last $= g''$ verändert, und es läßt sich aus der Gleichung 2. des §. 118. Mech. nemlich aus dem Ausdruck

$$g'' = g.b. \frac{aP - b(Q + F)}{a^2 M + z^2 A + b^2 M'}$$

bald einsehen, daß es für a einen Werth geben muß, bey welchem die Beschleunigung der Last **am größten** wird, vorausgesetzt, daß durch diese Veränderung das Moment der Trägheit der Maschine nicht zu merklich geändert wird. Um daher für diesem Fall einen allgemeinen Werth für a zu finden; so setze man in der vorhin aufgestellten Gleichung statt $a = x$, und nun den **Zähler**

$$xP - b(Q + F) = X,$$

so wie den **Nenner**

$$x^2 M + z^2 A + b^2 M' = Y,$$

Oder weil $z^2 A$ das Trägheitsmoment des Rades und der Welle ist; so zerlege man $z^2 A$ in $(x^2 + b^2) . \frac{\mathfrak{A}}{2} + b^2 . \frac{\mathfrak{A}'}{2}$, wo $\mathfrak{A}$ die Masse des Rades, und $\mathfrak{A}'$ die Masse der Welle bedeutet (Mech. §. 116. Zus. III. 11. und 10.).

Es wird daher

$$Y = x^2 M + x^2 . \frac{\mathfrak{A}}{2} + b^2 . \frac{\mathfrak{A}}{2} + b^2 . \frac{\mathfrak{A}'}{2} + b^2 . M'$$

$$= x^2 \left(M + \frac{\mathfrak{A}}{2}\right) + b^2 \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'}{2} + M'\right),$$

und demnach

$$dX = P . dx, \text{ so wie } dY = 2x\left(M + \frac{\mathfrak{A}}{2}\right) . dx.$$

Nun soll $\frac{X}{Y}$ ein Maximum werden, so muß seyn

$$d . \frac{X}{Y} = \frac{Y . dX - X . dY}{Y^2} = 0,$$

oder $Y . dX - X . dY = 0$ (§. 69.), d. i.

$$\left[x^2 \left(M + \frac{\mathfrak{A}}{2}\right) + b^2 \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'}{2} + M'\right)\right] . P -$$

$$\left[xP - b(Q + F)\right] . 2x \left(M + \frac{\mathfrak{A}}{2}\right) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die gemischte quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{2b(Q + F)}{P} . x = \frac{b^2 \left(M' + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'}{2}\right)}{M + \frac{\mathfrak{A}}{2}},$$

woraus man nach §. 3. für $x = a$ gesetzt, den Werth

$$\text{I)}\ a = \frac{b(Q+F)}{P} \pm \sqrt{\left[\frac{b^2[M' + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}')]}{M+\frac{1}{2}\mathfrak{A}} + \left[\frac{b(Q+F)}{P}\right]^2\right]}$$

erhält.

Will man den Werth für b wissen, bey welchem die Beschleunigung der Kraft am größten wird; so nehme man b als veränderlich an; verfahre wie vorhin, und man erhält

$$\text{II)}\ b = \frac{aP}{Q+F} \pm \sqrt{\left[\frac{a^2(M+\frac{1}{2}\mathfrak{A})}{M'+\frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}')} + \left(\frac{aP}{Q+F}\right)^2\right]}.$$

Setzt man nun den Werth von a in den Ausdruck für

$$g'' = g \,.\, b \,.\, \frac{aP - b(Q+F)}{a^2 M + z^2 A + b^2 M'}$$

des §. 118. Mechanik; so giebt der gefundne Werth für a die größte Beschleunigung der Last, alle größere oder kleinere Werthe von a geben kleinere Last-Beschleunigungen.

Eben so den Werth von b in den Ausdruck für

$$g' = g \,.\, a \,.\, \frac{aP - b(Q+F)}{a^2 M + z^2 A + b^2 M'}$$

des §. 118. Mech. gesetzt, giebt wieder die größte Beschleunigung der Kraft, alle größere oder kleinere Werthe für b geben kleinere Beschleunigungen der Kraft.

Im Beyspiel des §. 118. Mech. ist $P = M = 2$ ℔; $Q = M' = 6$ ℔; das Gewicht des Rades oder $\mathfrak{A} = 2$ ℔; das Gewicht der Welle oder $\mathfrak{A}' = 4$ ℔; $F = 0{,}35$ ℔ und $b = 1$ Zoll; daher

$$a = \frac{1 \,.\, 6{,}35}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{1 \cdot 9}{3} + \left(\frac{1 \cdot 6{,}35}{2}\right)^2\right]}$$

$= 3{,}175 + 3{,}616 = 6{,}791$ Zolle, indem nur das obere Zeichen gelten kann.

Für a = 6,791 Zolle wird $z^2 A = (a^2 + b^2) \cdot \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{b^2 \cdot \mathfrak{A}'}{2} = (6{,}791^2 + 1^2) \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 = 49{,}12$; und $a^2 M = 6{,}791^2 \cdot 2 = 92{,}24$; daher die Beschleunigung der Last =

$$g'' = 17{,}377 \cdot 1 \cdot \frac{6{,}791 \cdot 2 - 1 \cdot 6{,}55}{92{,}24 + 49{,}12 + 6} = 0{,}8528 \text{ Fuß.}$$

Für a = 6 Zolle ist nach Mech. §. 118. die Beschleunigung der Masse M' oder der Last =

$$g'' = 0{,}8391 \text{ Fuß.}$$

Und für a = 7 Zolle ist $z^2 A = (7^2 + 1^2) \cdot 1 + 2 = 52$; $a^2 M = 7^2 \cdot 2 = 98$; daher die Beschleunigung der Last =

$$g'' = 17{,}377 \cdot 1 \cdot \frac{7 \cdot 2 - 1 \cdot 6{,}55}{98 + 52 + 6} = 0{,}8522 \text{ Fuß,}$$

und die Last-Beschleunigung demnach in den beyden letzten Fällen kleiner als bey dem ersten Fall, wo a = 6,791 Zolle ist (§. 72. Zus.).

Zusatz. Ist an einer Radwelle statt dem Rade eine Kurbel angebracht, deren Höhe = a und Masse = $\mathfrak{A}$ ist; so ist die vortheilhafteste Kurbellänge, d. i.

$$\text{I)}\ a = \frac{b(Q+F)}{P} \pm \sqrt{\left[\frac{b^2(M' + \frac{1}{3}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}')}{M + \frac{1}{3}\mathfrak{A}} + \left[\frac{b(Q+F)}{P}\right]^2\right]},$$

und die vortheilhafteste Lastentfernung, d. i.

$$\text{II)}\ b = \frac{a \cdot P}{Q+F} \pm \sqrt{\left[\frac{a^2(M + \frac{1}{3}\mathfrak{A})}{M' + \frac{1}{3}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}'} + \left(\frac{aP}{Q+F}\right)^2\right]},$$

welche Ausdrücke man auf einem ähnlichen Wege, wie in §. 93. gezeigt worden, findet.

Berichtigungen.

Seite 7 Zeile 1 v. u. setze man $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

— 11 Beyspiel 2. Zeile 5 setze man $-\frac{152}{3}$ statt $+\frac{152}{3}$.

— 14 Zeile 9 v. u. setze man a^3 statt a^5.

— 25 Gleichung III. setze man im Nenner 2by statt by.

— 25 unterste Zeile setze man — 50 statt + 50.

— 29 Zeile 6 v. u. — — Anfangspunktes statt Anfangspunkt.

— 33 — 6 v. u. — — Perga statt Prega.

— 42 — 14 v. o. — — MFO st. FMO.

— 43 — 11 v. u. — — $\frac{y^2}{p}$ statt $\frac{2y^2}{p}$.

— 56 — 10 v. u. — — GH^2 st. PM^2; GH st. PM.

— 65 — 14 v. o. — — $\mathfrak{D}$ st. D.

— 65 — 2 v. u. setze man FHK statt JHK.

— 69 — 2 v. u. — — $\sqrt{ap}$ statt $\sqrt{ab}$.

— 73 — 4 v. o. — — $2a^2ue$ st. $2au^2e$.

— 79 — 8 v. o. — — lCk st. lCK.

— 80 — 5 v. o. — — Punkt E.

— 101 — 3 v. o. — — dann statt denn.

— 109 — 4 und 5 v. u. setze man GJ statt Gs.

— 113 — 9 v. o. setze man Abschnitt statt Ausschnitt.

— 121 — 2 v. u. — — $a^2 + l'^2$ statt $a^2 l^2$.

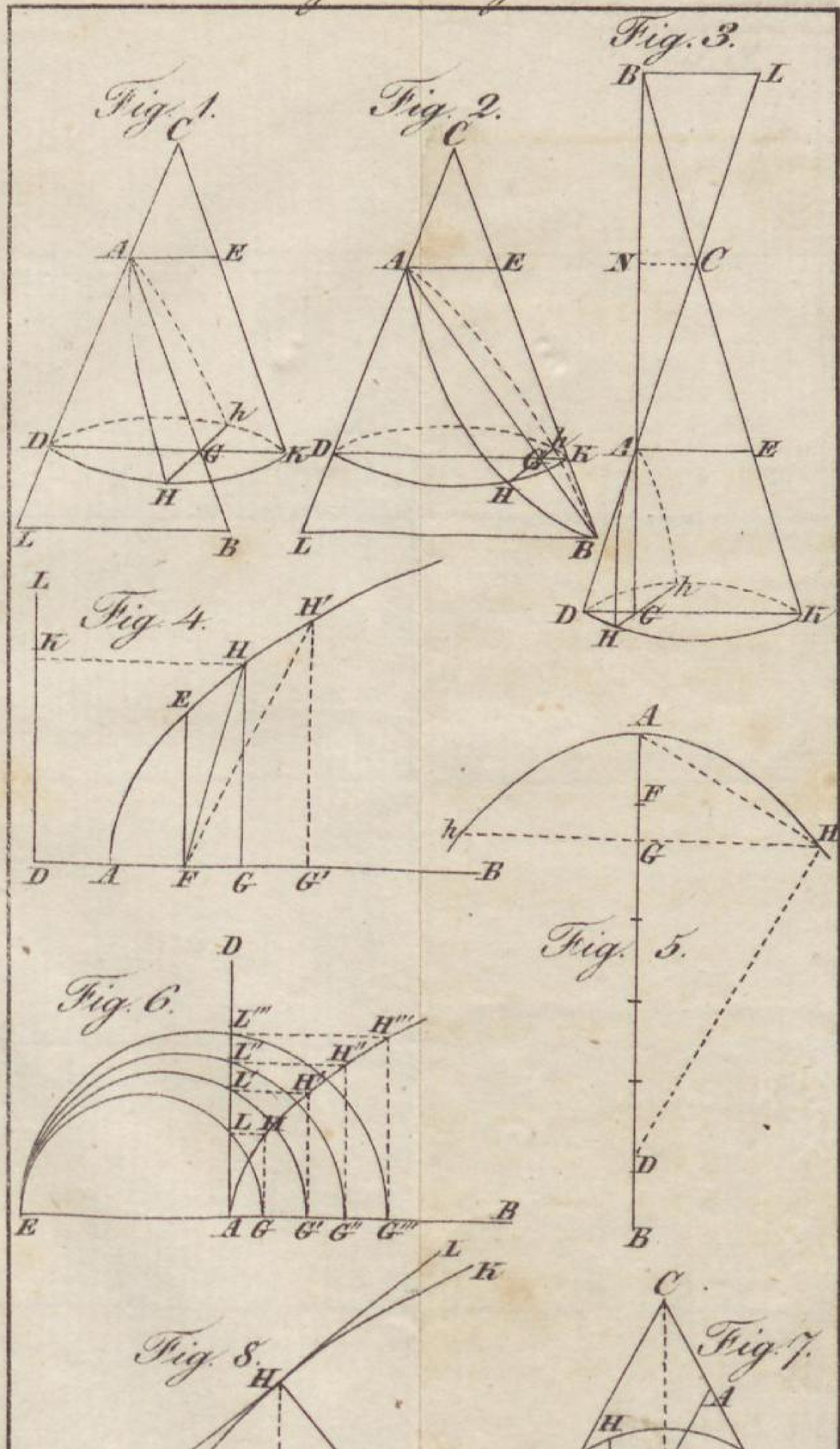


Fig. 1.
C
A E
h
D G K
H
L B
Fig. 2.
C
A E
D G K
H
L B
Fig. 3.
B L
N C
A E
h
D G K
H
Fig. 4.
L
K
H'
H
E
D A F G G' B
A
F
h H
G
Fig. 5.
D
B
Fig. 6.
D
L''' H'''
L'' H''
L' H'
L H
E A G G' G'' G''' B
L
K
Fig. 8.
H
D A G E B
C
Fig. 7.
A
H
K G D

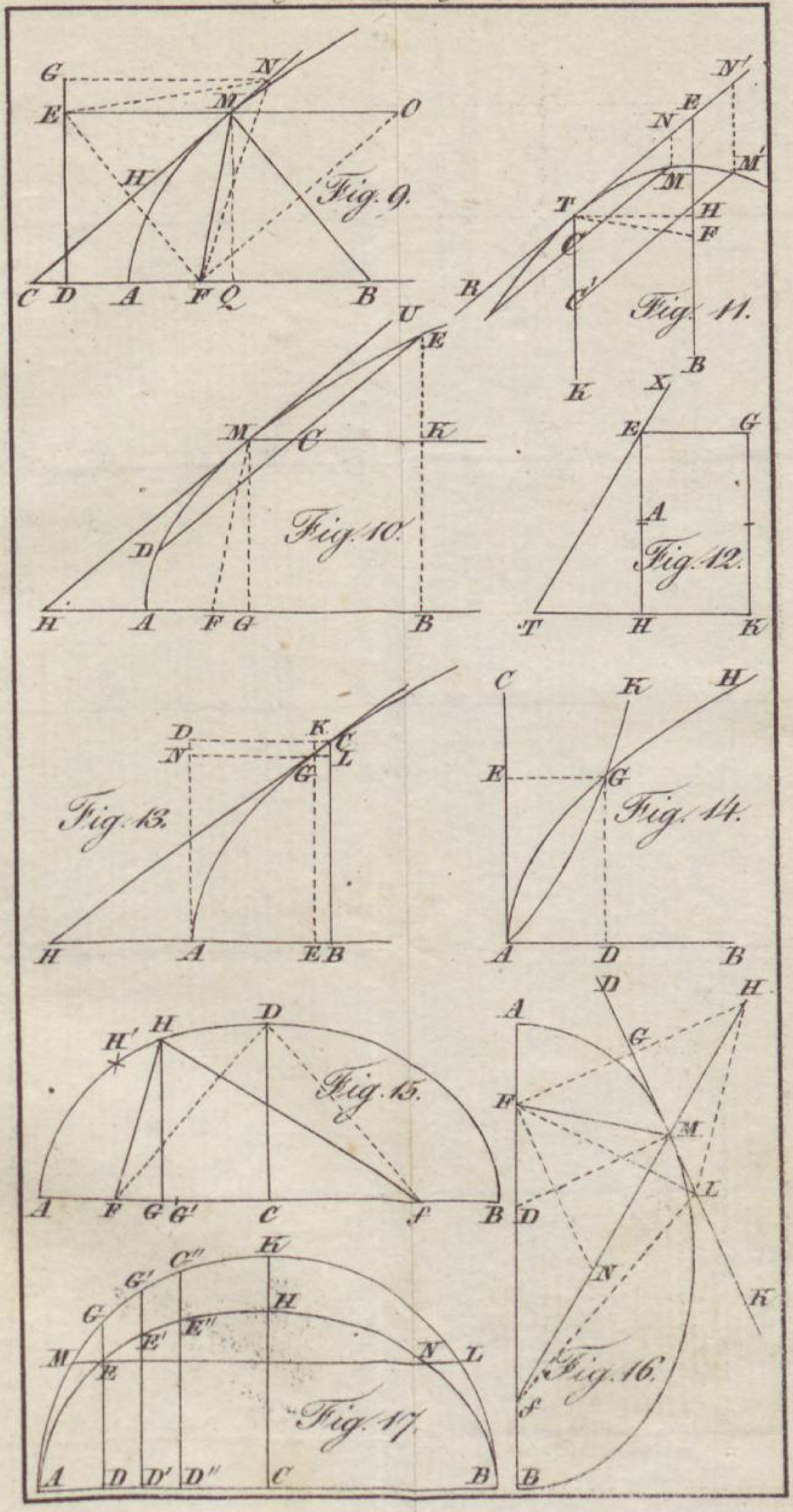
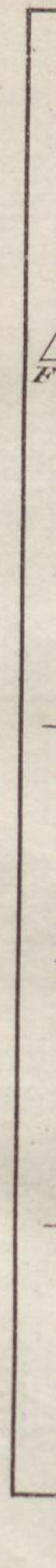


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.



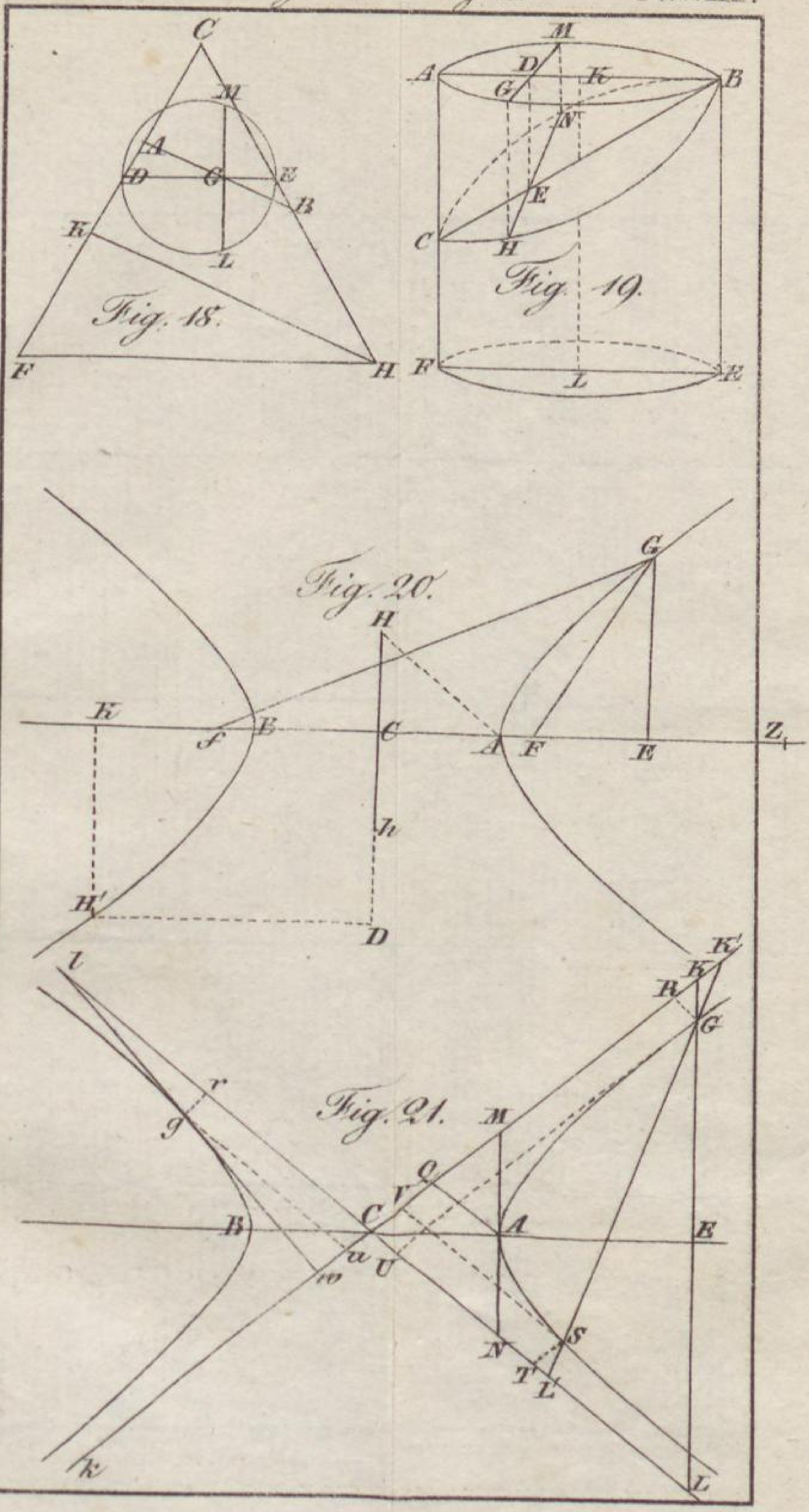


Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

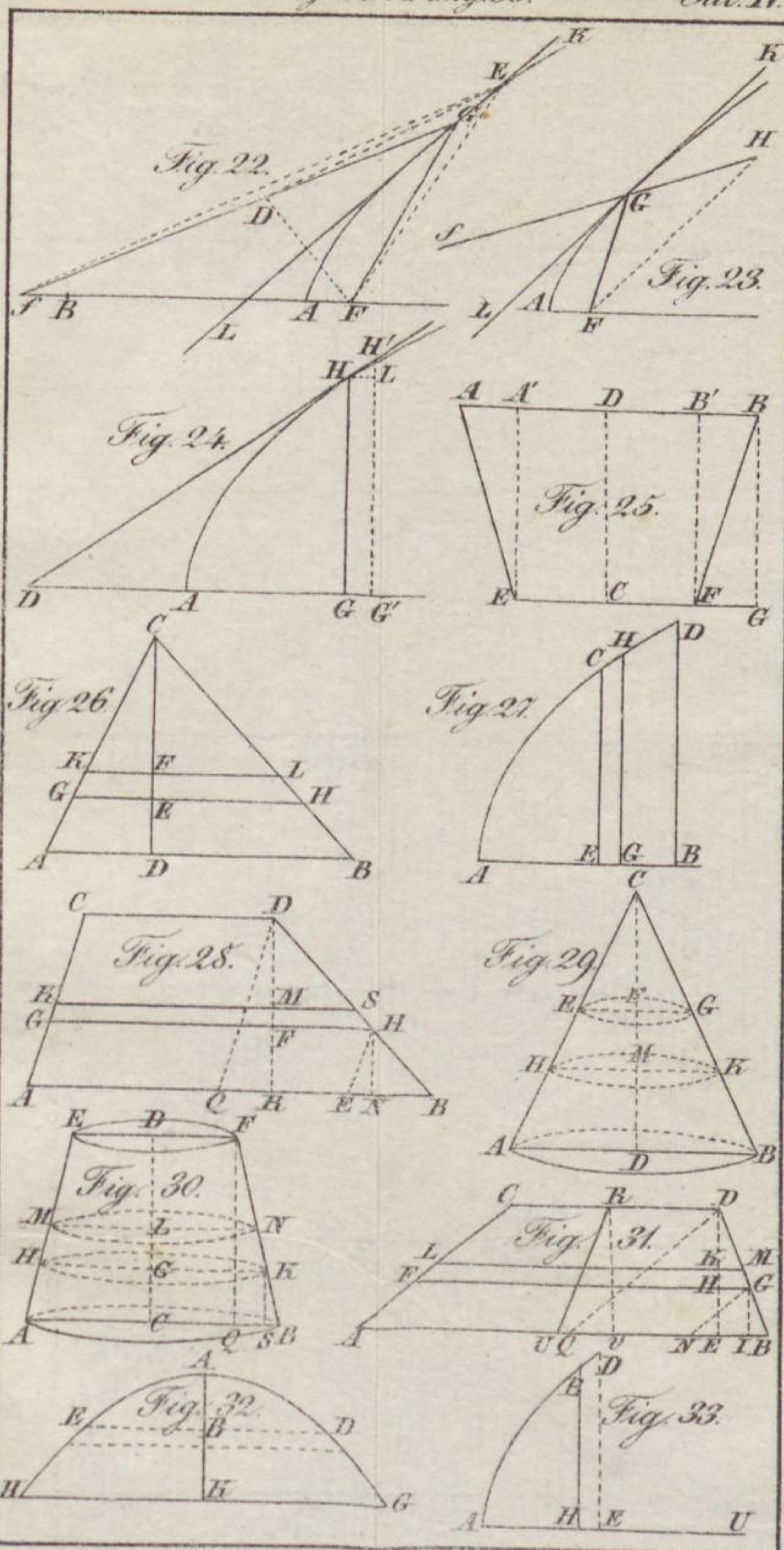
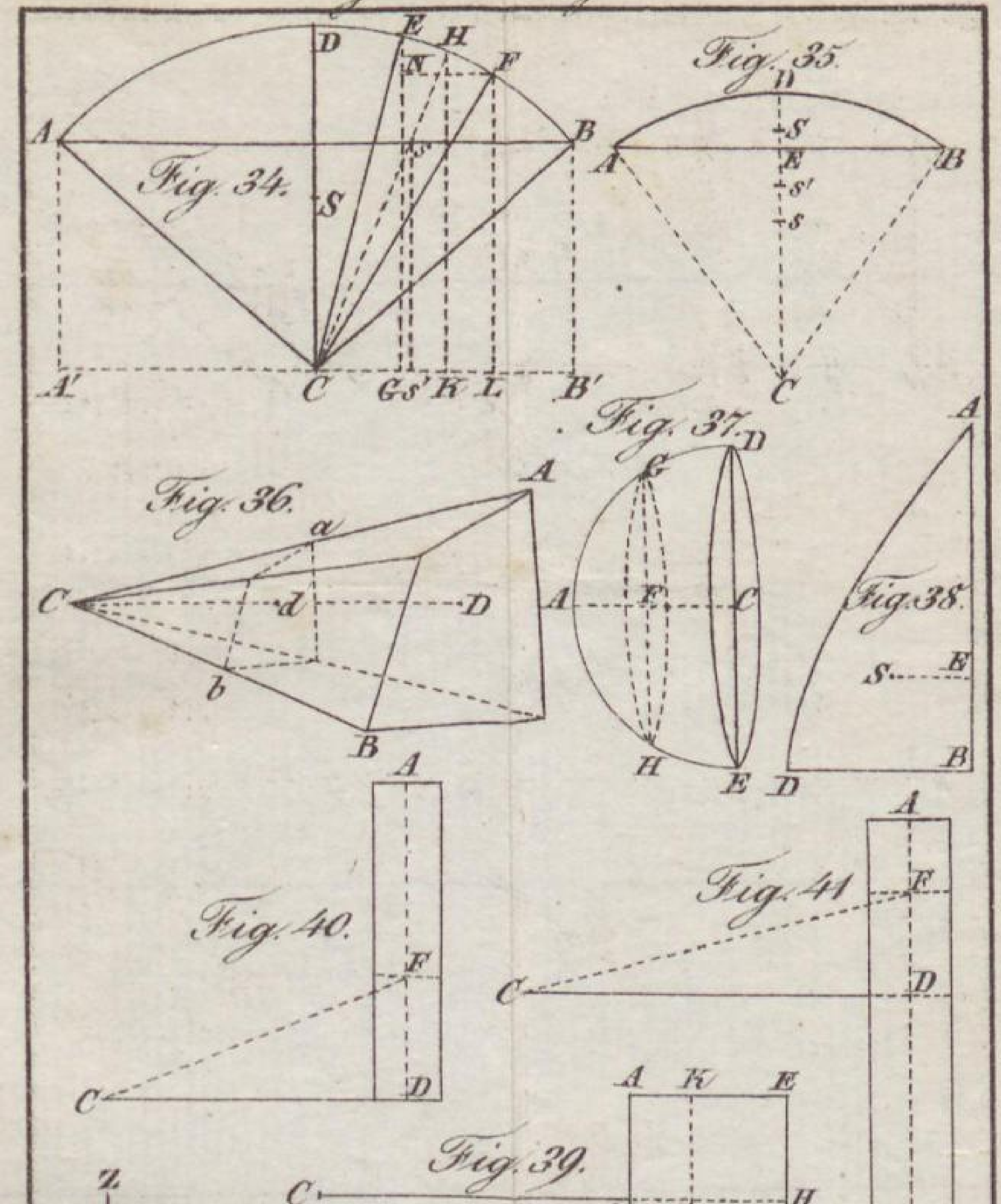


Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.



D. F. Hecht. Steindr. v. Leopold Voss.