[redacted]

MATHEMATISCHE BEHANDLUNG GESTEUERTER ABKÜHL- UND ANWÄRMVORGÄNGE

Von der Bergakademie Freiberg genehmigte
Dissertation zur Erlangung der Würde eines
Doktor rer. nat.

Eingereicht am 26. 3. 1956
von

Dipl.-Math. Hans J ä c k e l

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Alfred K n e s c h k e
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter R ü d i g e r

Tag der mündlichen Prüfung: 9. 5. 1956

In vorliegender Form
zur Veröffentlichung genehmigt

Kneschke Rüdiger

Das vorliegende Thema wurde mir von meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. A. K n e s c h k e , zur Bearbeitung überlassen. Ihm gebührt deshalb mein allerherzlichster Dank, besonders auch für die außerordentlich großzügige Hilfe und allseitige Unterstützung, die er mir während der Fertigstellung der Arbeit gewährt hat.

Desgleichen bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. D. R ü d i g e r für wertvolle Hinweise und für das Interesse, welches er meiner Arbeit entgegengebracht hat, zu Dank verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis

E i n l e i t u n g

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der mathematischen Behandlung von Abkühl- und Anwärmvorgängen fester Körper, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Temperatur der den Körper umgebenden Grenzschicht eine gegebene Funktion der Zeit und des Ortes ist. Derartige gesteuerte Wärmeleitprobleme haben eine besondere technische Bedeutung. Auf ihre allgemeine analytische Behandlung wurde erstmals von J. M. C. D u h a m e l hingewiesen [3].
Ohne die D u h a m e l schen Gedankengänge weiter zu entwikkeln, sind in neuerer Zeit eine ganze Reihe spezieller technischer Anwendungsaufgaben untersucht worden, so zum Beispiel von H. G r ö b e r [6], A. K n e s c h k e [8], G. P. T o l s t o w [13] und C. W a g n e r [14]. Daneben hat A. K n e s c h k e ein vereinfachtes derartiges Problem mittels einer Einflußfunktion allgemein gelöst und die Anwendungsmöglichkeiten seines Theorems aufgezeigt [9].

Das Ziel unserer Betrachtungen soll sein, aufbauend auf den Gedankengängen von A. K n e s c h k e eine Theorie der allgemeinsten gesteuerten Wärmeleitprobleme zu entwickeln, ihre Lösung in geschlossener, für die analytische Behandlung geeigneter Form darzustellen und anhand von technisch wichtigen Beispielen zu erproben.

Im ersten Teil der Arbeit wird nach einer kurzen Erläuterung des mathematischen Sachverhaltes zunächst gezeigt, daß sich sowohl die gesteuerten als auch die ungesteuerten Wärmeleitprobleme mit innerer Wärmeentwicklung auf gesteuerte ohne innere Wärmeentwicklung zurückführen lassen. Dadurch erfährt der Kreis der Anwendungsmöglichkeiten unserer Theorie eine wesentliche Erweiterung.
Anschließend wird die Eindeutigkeit der Lösung des den Wärmeleitprozeß charakterisierenden Randwertproblems bewiesen und die Randwertaufgabe des allgemeinsten gesteuerten Wärmeleitvorgangs mit Hilfe der Einflußfunktion von A. K n e s c h k e gelöst. Dabei ergibt sich, daß unsere Lösung zwar dem D u h a -

m e l schen Integraltheorem äquivalent ist, aber eine für die analytische Behandlung spezieller Aufgaben wesentlich brauchbarere Form hat.
Im weiteren Verlauf der Untersuchungen gelingt es sogar, eine geschlossene Lösung für den Fall anzugeben, daß beliebigen Teilflächen des Körpers ganz verschiedene Temperaturfunktionen des umgebenden Mediums zugeordnet sind. Aus dieser werden dann eine Anzahl spezieller Ergebnisse abgeleitet.
Am Ende der theoretischen Erörterungen wird auf eine von A. K n e s c h k e angegebene Methode zur angenäherten Bestimmung der Temperaturverteilung in komplizierten Körpern hingewiesen [9] .

Im zweiten Teil wird die Brauchbarkeit der allgemeinen Theorie an technischen Beispielen erläutert, die auf folgende gesteuerte Wärmeleitvorgänge führen:

Wärmeleitung in der ebenen Platte,
im Hohlzylinder,
in der Hohlkugel,
im Vollzylinder,
im Quader.

Soweit die Literatur über gesteuerte Wärmeleitprobleme bekannt geworden ist, sind außer dem Plattenbeispiel die übrigen noch nicht behandelt worden.

I.

T h e o r e t i s c h e r   T e i l

1. Das allgemeine gesteuerte Wärmeleitproblem

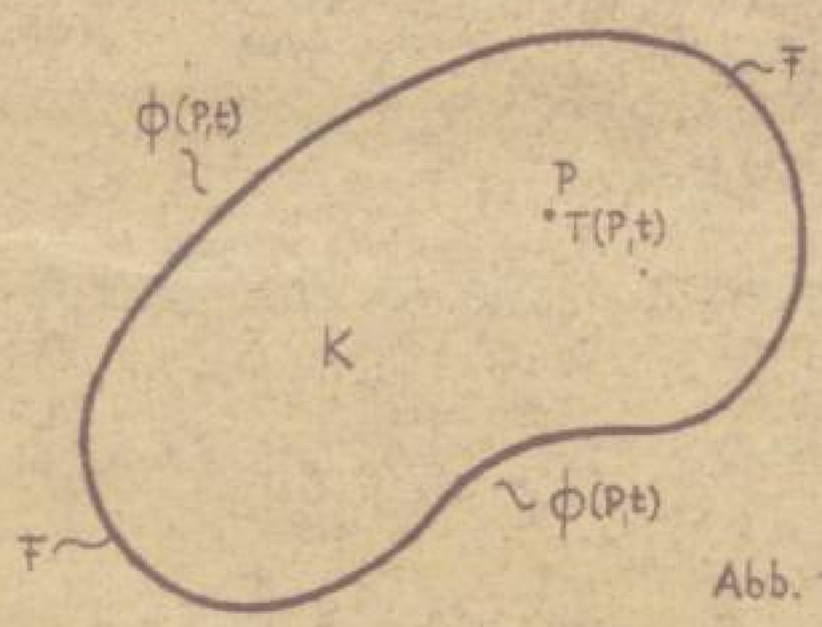


Abb. 1

Wir betrachten einen beliebigen homogenen und isotropen Körper K, dessen Oberfläche F sei. Seine Temperatur, zur Zeit $t = 0$, bezeichnen wir mit $f(P)$. Dabei ist unter P irgendein Punkt von K zu verstehen. Die Temperatur ϕ der den Körper umgebenden Grenzschicht ändere sich mit der Zeit t und dem Ort P, also $\phi = \phi(P,t)$. Aus naheliegenden Gründen wird $\phi(P,t)$ Steuerfunktion genannt. Gesucht ist die Temperatur $T(P,t)$ der Punkte P des Körpers zur Zeit t (Abb. 1).

Setzen wir mit F o u r i e r voraus, daß der Wärmefluß in Richtung des Temperaturgefälles erfolgt und proportional der Stärke desselben ist, so werden wir bekanntlich auf die F o u r i e r sche Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\varrho}\Delta T(P,t) = 0 \qquad (1)$$

geführt, der $T(P,t)$ im Inneren des Körpers genügen muß [12]. Dabei bezeichnet Δ den auf die Ortskoordinaten anzuwendenden L a p l a c e schen Operator, λ ist die Wärmeleitzahl, c die spezifische Wärme und ϱ die Massendichte. Im folgenden setzen wir

$$\frac{\lambda}{c\varrho} = a^2 ,$$

da er [illegible] positiven Konstanten [illegible]

Die [illegible] verschiedener Art sein, je nachdem, was auf Grund der [illegible] für die [illegible] auf der Begrenzung F des Körpers [illegible] werden kann. [illegible] die Temperatur [illegible] werden, [illegible] auf die einfache Randbedingung

$$(\ldots) = \varphi(P) \qquad (1)$$

[illegible] durch die Oberfläche F [illegible], dann gilt die Randbedingung

$$\left(\lambda \frac{\partial \ldots}{\partial n}\right) = \psi(P) \qquad (2)$$

Hier und im folgenden [illegible] immer die [illegible]

[illegible] hat man in (2) $\psi(P) = 0$ zu setzen.

[illegible] allgemeine Randbedingung [illegible]

$$\left(\lambda \frac{\partial \ldots}{\partial n} + \ldots\right) = \chi(P) \qquad (3)$$

Von (2) und (3) [illegible] die [illegible] der [illegible] in [illegible] und [illegible] in diesem [illegible] als [illegible] (4) als [illegible] der [illegible] [illegible] Fläche [illegible] [illegible] (1) [illegible] [illegible] in (3) mit [illegible] (4) [illegible]

[illegible]

da es sich offensichtlich aus physikalischen Gründen um eine positive Konstante handelt.

Die Randbedingungen können verschiedener Art sein, je nachdem, was auf Grund der Problemstellung für die Temperatur T(P,t) auf der Begrenzung F des Körpers gefordert werden muß. Sollen etwa alle Randpunkte von K direkt auf der Temperatur $\phi(P,t)$ gehalten werden, so führt dies auf die einfache Randbedingung

$$\left(T(P,t) \right)_F = \phi(P,t) \quad (2)$$

Ist dagegen der Wärmefluß durch die Oberfläche F vorgeschrieben, dann gilt die Randbedingung

$$\left(\lambda \frac{\partial T(P,t)}{\partial n} \right)_F = \phi(P,t) \quad (3)$$

Hier und im folgenden bedeutet n immer die nach außen gerichtete Normale.
Wenn der Körper adiatherman abgeschlossen ist, hat man in (3) $\phi(P,t) \equiv 0$ zu setzen.
Eine verhältnismäßig allgemeine Randbedingung stellt die lineare Kombination

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T(P,t)}{\partial n} + T(P,t) \right)_F = \phi(P,t) \quad (4)$$

von (2) und (3) dar. Sie berücksichtigt die Wirkung der Konvektion, der Ausstrahlung in das umgebende Medium und einer daneben meist zu vernachlässigenden Wärmeübertragung durch Leitung in diesem Medium. Die Konstante α ist die sogenannte Wärmeübergangszahl. Ohne Beweis führen wir an, daß sich (4) als Näherung aus der streng physikalischen Form des Ausstrahlungsgesetzes von S t e f a n - B o l t z m a n n ergibt. Dieses besagt bekanntlich: Die Wärmestrahlung pro Zeit- und Flächeneinheit eines Körpers von der absoluten Temperatur T ist proportional T^4 [12] .
Bemerkt sei noch, daß (4) für $\alpha \to \infty$ in (2) und für $\alpha \to 0$ in (3) mit $\phi(P,t) \equiv 0$ übergeht. Wir legen deshalb den folgenden mathematischen Untersuchungen die allgemeine Randbedingung (4) zugrunde.

Die Anfangstemperaturverteilung ist durch f(P) gegeben. Sie

wird die vorgeschriebenen Randbedingungen im allgemeinen nicht erfüllen. Stellen wir uns nun vor, daß ein Körper mit dieser Temperaturverteilung zur Zeit t = 0 in ein Medium gebracht wird, so sieht man unmittelbar ein, daß im selben Moment ein Angleichen der Temperaturfunktion auf der Begrenzung F des Körpers an die für jede Zeit t > 0 gültigen Randbedingungen stattfinden muß. Dieser Vorgang, der sich zur Zeit t = 0 vollzieht, kann, wie später gezeigt wird, durch die Lösung unserer Aufgabe nicht mit erfaßt werden. Deshalb ist es nur sinnvoll zu sagen, daß der Körper zur Zeit t = 0 im Inneren die Temperaturverteilung f(P) hat. Im selben Moment findet ein nicht näher zu beschreibendes Angleichen der Temperatur der Randpunkte des Körpers an die für jede Zeit t > 0 gültigen Randbedingungen statt, vorausgesetzt natürlich, daß wir uns den Prozeß in der eben geschilderten Weise eingeleitet denken. Daher werden wir auch immer hinter den Randbedingungen die Anmerkung t > 0 machen.
Der Fall, daß die Anfangstemperaturverteilung den Randbedingungen genügt, ist in dem eben betrachteten mit enthalten. Wir brauchen ihn also hier nicht weiter zu diskutieren.

Nunmehr kann die gesuchte Temperaturfunktion T(P,t) aus folgendem Randwertproblem bestimmt werden

$$\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} - a^2 \Delta T(P,t) = D\{T(P,t)\} = 0 \; ; \qquad T(P,0) = f(P)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T(P,t)}{\partial n} + T(P,t)\right)_F = L\{T(P,t)\}_F = \phi(P,t) \; ; \quad t > 0 \; . \tag{5}$$

Wir haben bisher angenommen, daß im Inneren des Körpers keine Wärme erzeugt wird. Diese Voraussetzung lassen wir jetzt fallen und bezeichnen mit W(P,t) die vom Körper pro Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge, mit $\vartheta(P,t)$ seine Temperatur, mit $\overline{\phi}(P,t)$ die Steuerfunktion und mit $\overline{f}(P)$ die Anfangstemperaturverteilung. Die Aufgabe lautet dann bekanntlich [5]

$$[illegible] \qquad (13)$$

Das Residuum (8) kann auf (7) [illegible] werden, wenn man ein [illegible] Integral [illegible] der inhomogenen Differentialgleichung [illegible] In diesem Falle [illegible]

$$[illegible] \qquad (14)$$

Mit diesem gehen wir in die [illegible] ein und erhalten

$$[illegible]$$

Der [illegible] der linken Seite [illegible] unserer Voraussetzung [illegible] ist, ergibt sich

$$[illegible]$$

Zur Zeit $t = 0$ gilt [illegible], so daß

$$[illegible]$$

wird.

Schließlich folgt aus der Anfangsbedingung

$$[illegible]$$

dann

$$[illegible]$$

Setzen wir noch

$$D\{\vartheta(P,t)\} = \frac{W(P,t)}{c\varrho} \; ; \qquad \vartheta(P,0) = \bar{f}(P)$$

$$L\{\vartheta(P,t)\}_F = \bar{\Phi}(P,t) \; ; \quad t > 0 \; . \tag{6}$$

Das Problem (6) kann auf (5) zurückgeführt werden, wenn nur ein partikuläres Integral $\Omega(P,t)$ der inhomogenen Differentialgleichung bekannt ist. Zu diesem Zweck machen wir den Ansatz

$$\vartheta(P,t) = T(P,t) + \Omega(P,t) \; . \tag{7}$$

Mit diesem gehen wir in die Differentialgleichung hinein und erhalten

$$D\{T(P,t)\} + D\{\Omega(P,t)\} = \frac{W(P,t)}{c\varrho} \; .$$

Da der zweite Summand der linken Seite auf Grund unserer Voraussetzung gleich $\frac{W(P,t)}{c\varrho}$ ist, ergibt sich

$$D\{T(P,t)\} = 0 \; .$$

Zur Zeit t = 0 gilt $\vartheta(P,0) = \bar{f}(P)$, so daß

$$T(P,0) = \bar{f}(P) - \Omega(P,0)$$

wird.

Schließlich folgt aus der Randbedingung

$$L\{\vartheta(P,t)\}_F = L\{T(P,t)\}_F + L\{\Omega(P,t)\}_F = \bar{\Phi}(P,t)$$

oder

$$L\{T(P,t)\}_F = \bar{\Phi}(P,t) - L\{\Omega(P,t)\}_F \; .$$

Setzen wir noch

$$\bar{f}(P) - \Omega(P,0) = f(P)\,,$$

$$\bar{\phi}(P,t) - L\{\Omega(P,t)\}_F = \phi(P,t)\,, \tag{8}$$

so ergibt sich

$$D\{T(P,t)\} = 0 \;; \qquad T(P,0) = f(P)$$

$$L\{T(P,t)\}_F = \phi(P,t) \;; \quad t>0 \quad .$$

Das ist aber gerade unser Problem (5).
Wir können daher den wichtigen Satz formulieren:

> Liegt ein inhomogenes Problem entsprechend (6) vor, so kann dieses durch die Transformation (7) auf das halbhomogene (5) zurückgeführt werden, wenn nur ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung bekannt ist.
> Gilt insbesondere $\bar{\phi}(P,t) \equiv 0$ in (6), so wird diesem nunmehr ungesteuerten Problem durch die Transformation (7) ein gesteuertes zugeordnet, wie aus (8) ohne weiteres ersichtlich ist.

Diese Feststellungen sind deshalb sehr wichtig, weil damit gezeigt ist, daß die Randwertaufgabe (5) für weit mehr Wärmeleitprobleme charakteristisch ist, als es zunächst scheinen mag. Im folgenden können wir uns daher auf die Lösung von (5) beschränken.

Wir beweisen als erstes, daß sich das Problem (5) immer eindeutig lösen läßt. Diese Tatsache leuchtet zwar physikalisch unmittelbar ein, bedarf jedoch der mathematischen Bestätigung. Sind $\bar{T}(P,t)$ und $\bar{\bar{T}}(P,t)$ zwei Lösungen von (5), dann ist

$$\bar{T}(P,t) - \bar{\bar{T}}(P,t) = T^*(P,t)$$

die Lösung der Aufgabe

[illegible] (11)

so ergibt sich

[illegible]

Das ist aber gerade unser Problem (5).
Wir können daher den vollständigen Satz formulieren:

Liegt ein inhomogenes Problem entsprechend (1) vor, so kann dieses durch die Transformation (7) auf das Problem (5) zurückgeführt werden, wenn nur ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung bekannt ist.
Gilt insbesondere $f(r,t) = 0$ in (4), so wird das [illegible] Problem durch die Transformation (7) [illegible] gewonnen, wie aus (5) ohne weiteres ersichtlich ist.

Diese Entwicklungen sind deshalb sehr wichtig, weil damit gezeigt ist, daß die Randbedingungen (5) für viele sehr allgemeine [illegible] ist, die [illegible]. Im Folgenden können wir uns daher auf die Lösung von (5) beschränken.

Wir beweisen als erstes, daß das Problem (5) [illegible] eindeutig lösbar ist. Dieser Nachweis bedeutet zwar physikalisch [illegible], bedarf jedoch der mathematischen Bestätigung.
Sind $T(r,t)$ und $\bar{T}(r,t)$ zwei Lösungen von (5), dann ist

$$T(r) - \bar{T}(r) = T^*(r)$$

die Lösung der Aufgabe

$$D\{T^*(P,t)\} = 0 \; ; \qquad T^*(P,0) = 0$$

$$L\{T^*(P,t)\}_F = 0 \, .$$

Wir müssen nun zeigen, daß überall in K die Beziehung $T^*(P,t) \equiv 0$ gilt. Zu diesem Zweck betrachten wir das Integral

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int_K T^{*2}(P,t)\, dv \geqq 0 \, .$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = \int_K T^* \frac{\partial T^*}{\partial t}\, dv = a^2 \int_K T^* \Delta T^* dv \, .$$

Unter Verwendung der G r e e n schen Formel

$$\int_F T^* \frac{\partial T^*}{\partial n}\, do = \int_K T^* \Delta T^* dv + \int_K \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

ergibt sich

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = \int_F T^* \frac{\partial T^*}{\partial n}\, do - \int_K \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial z}\right)^2\right] dv$$

oder

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = \int_F \frac{\partial T^*}{\partial n}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial n} + T^*\right) do - \frac{\lambda}{\alpha}\int_F \left(\frac{\partial T^*}{\partial n}\right)^2 do - \int_K \left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^*}{\partial z}\right)^2\right] dv \, .$$

Nun verschwindet aber

$$\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial n} + T^*$$

auf der Oberfläche F und damit das entsprechende Integral in der letzten Gleichung. Also gilt

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} \leqq 0 \, .$$

Daraus schließen wir, weil J nicht wachsen kann und für t = 0 auch J = 0 ist,

$$J \leqq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq 0 .$$

Das ist aber ein Widerspruch zu unserer obigen Feststellung

$$J \geqq 0 .$$

Beide Beziehungen können nur bestehen, wenn

$$J \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad T^* \equiv 0$$

gilt, womit die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Nunmehr wollen wir die Randwertaufgabe (5) lösen. Zunächst sei festgestellt, daß sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen linear sind. Daher kann (5) in Teilprobleme zerlegt werden. Wir machen den Ansatz

$$T(P,t) = T_0(P,t) + T_1(P,t) \tag{9}$$

mit

$$D\{T_0(P,t)\} = 0 \; ; \quad T_0(P,0) = f(P) \qquad D\{T_1(P,t)\} = 0 \; ; \quad T_1(P,0) = 0$$
$$L\{T_0(P,t)\}_F = 0 \; ; \quad t > 0 \qquad L\{T_1(P,t)\}_F = \phi(P,t) \; ; \quad t > 0 .$$

Um das vollhomogene Wärmeleitproblem

$$\boxed{\begin{array}{c} D\{T_0(P,t)\} = 0 \; ; \quad T_0(P,0) = f(P) \\ L\{T_0(P,t)\}_F = 0 \; ; \quad t > 0 \end{array}} \tag{A}$$

zu integrieren, setzen wir

$$T_0(P,t) = u(P)\, e^{-a^2\delta^2 t} .$$

sind dann mit

$$\Delta u^{(\nu)} + \lambda_\nu u^{(\nu)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u^{(\nu)}}{\partial n} + \sigma u^{(\nu)} \right)_S = 0$$

Die Lösung dieses [illegible] ist bekanntlich in ge- [illegible] möglich [illegible] Eigenwerte λ_ν, die sich im Endlichen [illegible] Die zugehörigen Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ [illegible] Funktionensystem [illegible] und weil- [illegible] jede den Rand- bedingungen genügende Funktion, deren erste und zweite Ableitun- gen [illegible] im abgeschlossenen Bereich [illegible] stetig [illegible] nach den Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ entwickeln. [illegible] jede Funktion mit stetigen [illegible] Ordnung [illegible] Funktion nach den Eigenfunktionen $u_\nu(P)$ entwickelt werden, weil sich alle [illegible] stetig differenzierbaren Funktionen, die die Rand- bedingungen nicht erfüllen, durch solche ersetzen lassen, die die Randbedingungen erfüllen und im Innern von [illegible] der ursprüng- lichen übereinstimmen. [illegible]

Wir setzen [illegible] voraus, daß [illegible] im folgenden betrachteten [illegible] Funktionen in Bezug auf die Ortskoordinaten stetige erste und zweite Ab- leitungen besitzen, während wir bezüglich der Zeit [illegible] nur die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung verlangen.

[illegible] noch, daß [illegible] Randbedingungen (4), (5) [illegible].

[illegible] wir $F_\nu(T, t)$ in der Form

$$[illegible] \qquad (8)$$

1) [illegible]

2) [illegible]

Dies führt auf

$$\Delta u(P) + \delta^2 u(P) = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial u(P)}{\partial n} + u(P)\right)_F = 0 \, .$$

Die Lösung dieses homogenen Randwertproblems ist bekannt. Es besitzt abzählbar unendlich viele, reelle Eigenwerte δ_μ^2, die sich im Endlichen nirgends häufen. Die zugehörigen Eigenfunktionen $u_\mu(P)$ bilden im entsprechenden Definitionsbereich K ein vollständiges Orthogonalsystem. Deshalb läßt sich jede den Randbedingungen genügende Funktion, deren erste und zweite Ableitungen stetig sind, in dem abgeschlossenen Bereich K in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $u_\mu(P)$ entwickeln. Darüber hinaus kann jede beliebige mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktion nach den Eigenfunktionen $u_\mu(P)$ entwickelt werden, weil sich alle in K zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die die Randbedingungen nicht erfüllen, durch solche ersetzen lassen, die die Randbedingungen erfüllen und im Inneren von K mit den ursprünglichen übereinstimmen. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig und stellt im Inneren von K die Funktion dar, wogegen sie auf dem Rand der vorgegebenen Bedingung genügt [2].

Wir setzen deshalb schon hier voraus, daß alle in unseren folgenden Betrachtungen vorkommenden willkürlichen Funktionen in bezug auf die Ortskoordinaten stetige erste und zweite Ableitungen besitzen sollen, während wir bezüglich der Zeit t nur die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung verlangen.

Erwähnt sei noch, daß die angeführten Sätze auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn wir die speziellen Randbedingungen (2), (3) verwenden.

Nunmehr können wir $T_0(P,t)$ in der Form

$$T_0(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} \qquad (10)$$

mit beliebigen A_μ darstellen.
Die A_μ werden so festgelegt, daß

$$T_0(P,0) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) = f(P)$$

im Inneren von K gilt, was auf Grund unseres eben formulierten Entwicklungssatzes möglich ist. Es ergibt sich daher, wenn wir die $u_\mu(P)$ gleich als normiert voraussetzen,

$$A_\mu = \int_K f(P) u_\mu(P) dv \,, \tag{11}$$

womit das vollhomogene Problem (A) in aller Vollständigkeit gelöst ist.

Um $T_1(P,t)$ aus

$$\begin{aligned} D\{T_1(P,t)\} = 0 \,; \quad & T_1(P,0) = 0 \\ L\{T_1(P,t)\}_F = \phi(P,t) \,; \quad & t > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

zu bestimmen, wird vorerst angenommen, es sei diejenige Funktion G^* bekannt, die für jeden beliebigen Punkt P des Körpers die Temperatur wiedergibt, die unter dem Einfluß der Außentemperatur $\phi(P,\tau)$ im Laufe der Zeit $t-\tau > 0$ entstanden ist. G^* ist die Einflußfunktion von A. K n e s c h k e . Sie hängt vom Ort, von dem früheren Zeitpunkt τ und der Zeitdifferenz $t-\tau$ ab, also

$$G^* = G^*(P,\tau,t-\tau) \,.$$

Setzen wir voraus, daß von G^* die ersten und zweiten Ableitungen nach den Ortskoordinaten sowie die erste Ableitung nach τ und t für alle in Betracht kommenden Werte der unabhängigen Veränderlichen existieren, endlich und stetig sind, dann kann zunächst ein Ansatz für $T_1(P,t)$ angegeben und aus diesem in Verbindung mit der Differentialgleichung und den Randbedingungen G^* bestimmt werden. $T_1(P,t)$ setzt sich nämlich zusammen aus der Temperatur $G^*(P,0,t)$, die von $\phi(P,0)$ herrührt, und der Summe aller Temperaturänderungen

$$\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau \,,$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] von $\bar{x}$ gibt, [illegible] Grenzbedingungen oder formulierten Randbedingungen möglich ist. [illegible], wenn die $u(\bar{x})$ gleich ein [illegible] voraussetzen,

$$[illegible] \qquad (11)$$

womit die vollständige Theorie (A) in [illegible] Voraussetzung I der [illegible].

Ist $T_1(P,t)$ nun

$$[illegible] \qquad (12)$$

[illegible] bestimmt, wird vorerst angenommen, so [illegible] Funktion ϑ bekannt, die für jeden beliebigen Punkt P [illegible] die Temperatur wiedergibt, die unter dem Einfluss der [illegible] [illegible] im Laufe der Zeit [illegible] entstanden ist. [illegible] ist die [illegible] von [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] von dem [illegible] Zeitpunkt t von den Zeitintervallen [illegible] ab, also

$$[illegible]$$

[illegible] werden, [illegible] und [illegible] [illegible] nach [illegible] Ableitung nach t für [illegible] in Betracht kommenden Zeitintervall [illegible] existieren, endlich und stetig sind, [illegible] ebenfalls die Werte für $T_1(P,t)$ [illegible] und [illegible] in Verbindung mit der Differentialgleichung und den Randbedingungen [illegible] bestimmt werden. $T_1(P,t)$ setzt sich [illegible] aus der Temperatur $\vartheta(P,0,t)$ die von [illegible] herrührt, und der Summe aller [illegible]

$$[illegible]$$

die durch $\phi(P,\tau)$ während der Zeit $\tau = 0$ bis $\tau = t$ hervorgerufen wurden. In den angeführten zwei Termen ist jedoch bereits die Temperatur mit enthalten, die zur Zeit $\tau = t$, verursacht durch $\phi(P,t)$, erst wirksam wird. Demzufolge muß noch $G^*(P,t,0)$ subtrahiert werden. Also ergibt sich schließlich

$$T_1(P,t) = G^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - G^*(P,t,0). \qquad (13)$$

Da $T_1(P,t)$ Lösung von (12) sein soll, bietet sich uns nunmehr eine Möglichkeit, G^* zu bestimmen.
Wir bilden zuerst mit dem Ansatz (13)

$$D\{T_1(P,t)\} = D\{G^*(P,0,t)\} + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} D\{G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\}\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau + \left(\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau}\right)_{\tau=t}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} G^*(P,t,0) + a^2 \Delta G^*(P,t,0) = 0 .$$

Beachtet man, daß

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau}\right)_{\tau=t} = \frac{\partial}{\partial t} G^*(P,t,0)$$

ist und aus $D\{G^*(P,\tau,t)\} = 0$ für $0 \leqq \tau \leqq t$ auch $D\{G^*(P,0,t)\} = 0$ und $D\{G^*(P,\tau,t-\tau)\} = 0$ folgt, so ist die Differentialgleichung offensichtlich erfüllt, wenn gilt

$$\Delta G^*(P,t,0) = 0$$

$$D\{G^*(P,\tau,t)\} = 0 .$$

Weiter ergibt sich aus der Randbedingung

$$L\{T_1(P,t)\}_F = L\{G^*(P,0,t)\}_F + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} L\{G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\}_F\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - L\{G^*(P,t,0)\}_F = \phi(P,t).$$

Diese wird befriedigt durch die Forderung

$$L\{G^*(P,t,0)\}_F = -\phi(P,t)$$

$$L\{G^*(P,\tau,t)\}_F = 0 ; \quad t > 0 .$$

Schließlich ersieht man unmittelbar aus (13), daß die Anfangsbedingung $T_1(P,0) = 0$ in K erfüllt ist.

Damit ist $G^*(P,\tau,t)$ und folglich auch $G^*(P,\tau,t-\tau)$ eindeutig bestimmt. Es kann aus nachstehenden zwei Aufgaben, deren Lösungsmethoden bekannt sind, berechnet werden.
Zuerst ermitteln wir aus

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta H(P,t) = 0 \\ &L\{H(P,t)\}_F = -\phi(P,t) \end{aligned}} \qquad (B)$$

eine Funktion $H(P,t)$.
Danach setzen wir

$$G^*(P,\tau,0) = H(P,\tau)$$

und erhalten durch

$$\boxed{\begin{aligned} &D\{G^*(P,\tau,t)\} = 0\,; \quad G^*(P,\tau,0) = H(P,\tau) \\ &L\{G^*(P,\tau,t)\}_F = 0\,; \quad t > 0 \end{aligned}} \qquad (C)$$

die gesuchte Funktion $G^*(P,\tau,t)$.
Die Aufgabe (B) kann als ein von einem Parameter t abhängiges s t a t i o n ä r e s P r o b l e m gedeutet werden, während (C) ein von dem Parameter τ abhängiges v o l l h o m o g e n e s W ä r m e l e i t p r o b l e m darstellt.

In der Randwertaufgabe (C) ist, um $G^*(P,\tau,t)$ zu erhalten, $H(P,\tau)$ nach den Eigenfunktionen von (C) zu entwickeln. Diese Entwicklung stellt nur im Inneren von K die Funktion $H(P,\tau)$ dar und genügt den Randbedingungen von (C), nicht aber den in (B) geforderten. Die so gewonnene Lösung $G^*(P,\tau,t)$ erfüllt alle Voraussetzungen. Lediglich für $t = 0$ stimmt sie auf der Körperoberfläche F nicht mit $H(P,\tau)$ überein. Wir müssen daher noch nachprüfen, wie sich die Ersetzung von $H(P,\tau)$ durch die Entwicklung nach den Eigenfunktionen von (C) auf unseren Ansatz (13) auswirkt. Der erste Summand dieses Ausdrucks, also $G^*(P,0,t)$, wird dadurch nur auf der Begrenzung F

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] (2)

eine Funktion $H(\xi,t)$.
Nennen wir [illegible]

[illegible]

und [illegible] durch

[illegible] (4)

Die [illegible] Funktion [illegible]

[illegible]

In der Randwertaufgabe (2) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $H(\zeta,t)$ [illegible] ist.

Jetzt erhält man für $H(\zeta,t)$ endgültig:

$$[illegible] = H(\zeta,t) \qquad (10)$$

Entsprechend (10) und (11) findet man

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Damit ist die [illegible] (2) und [illegible] gelöst:

das vollbesetzte Problem (5),
das [illegible] Problem (8),
das [illegible] Problem (6),
die [illegible] Lösungsgruppe (7),

und [illegible] hat die Form

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

des Körpers für $t = 0$ abgeändert. Das ist bedeutungslos, weil wir diesen Zeitpunkt bezüglich der Oberfläche F ausschließen werden, wie eingangs schon erwähnt wurde. Der Wert des zweiten Summanden bleibt erhalten; denn der Integrand erfährt lediglich im Endpunkt des Integrationsintervalls auf F eine Änderung. Schließlich müssen wir den dritten Summanden, d. h. $G^*(P,t,0)$, durch $H(P,t)$ ersetzen, damit $T_1(P,t)$ die vorgeschriebene Randbedingung erfüllt. Wir weisen in diesem Zusammenhang noch einmal ausdrücklich darauf hin, daß künftig unter $G^*(P,t,0)$ die Entwicklung von $H(P,t)$ nach den Eigenfunktionen von (C) zu verstehen ist, die auf der Oberfläche F des Körpers nicht mit $H(P,t)$ identisch ist.

Jetzt ergibt sich für $T_1(P,t)$ endgültig

$$\boxed{T_1(P,t) = G^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - H(P,t)} \qquad \text{(D)}$$

Entsprechend (10) und (11) finden wir nun

$$G^*(P,\tau,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau)\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$B_\mu(\tau) = \int_K H(P,\tau)\, u_\mu(P)\, dv .$$

Damit ist die L ö s u n g d e s a l l g e m e i n e n g e s t e u e r t e n W ä r m e l e i t p r o b l e m s (5) auf folgende Teilaufgaben zurückgeführt:

Das vollhomogene Problem (A),
das stationäre Problem (B),
das vollhomogene Problem (C),
die einfache Integration (D),

und $T(P,t)$ hat die Form

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(0) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu'(\tau) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau - H(P,t) \qquad \text{(14a)}$$

mit

$$B_\mu'(\tau) = \frac{d}{d\tau} B_\mu(\tau) .$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen sind die $B_\mu(\tau)$ und $B'_\mu(\tau)$ für $0 \leqq \tau \leqq t$ endlich und stetig. Alle in (D) vorkommenden Reihen konvergieren in K gleichmäßig bezüglich sämtlicher Veränderlichen. Daher ist die gliedweise Integration gestattet. Außerdem gilt im Inneren von K

$$H(P,\tau) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) .$$

Beachtet man diese letzte Bemerkung, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß $T(P,t)$ in der Tat die Lösung des eingangs genau formulierten und erläuterten Problems darstellt. Insbesondere liegt zur Zeit $t = 0$ folgender Sachverhalt vor:
Erfüllt $f(P)$ die Randbedingung nicht, so gilt $T(P,0) = f(P)$ in K und auf F $L\{T(P,t)\}_F = \phi(P,t)$ für $t \geqq 0$, d. h. $T(P,0)$ stellt die Funktion dar, in die $f(P)$ unmittelbar bei Einleitung des Prozesses übergeht. Der Vorgang des Angleichens von $f(P)$ an die Randbedingung ist nicht mit erfaßt worden. Eine Aussage über die Temperatur auf F zur Zeit $t = 0$ ist daher unmöglich, so daß dieser Zeitpunkt ausgeschlossen werden muß. Für jede Zeit $t > 0$ erfüllt $T(P,t)$, wie wir sehen, die geforderte Randbedingung $L\{T(P,t)\}_F = \phi(P,t)$; $t > 0$. Die eben geschilderte Tatsache haben wir anfangs schon besonders hervorgehoben.
Wesentlich einfacher liegen die Dinge, wenn $f(P)$ die Randbedingungen erfüllt, dann ist nämlich $T(P,0) = f(P)$ in K und $L\{T(P,0)\}_F = L\{f(P)\}_F = \phi(P,0)$, wie es sein muß.

Durch partielle Integration kann die Lösung (14a) auf eine bisweilen vorteilhaftere Form gebracht werden. Es ist

$$\int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B'_\mu(\tau) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau = \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}\right]_0^t - \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) a^2\delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(t) u_\mu(P) - \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(0) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) a^2\delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau ,$$

also wird

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2 \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(t) u_\mu(P) - H(P,t) . \qquad (14b)$$

[illegible]

[illegible]

Benutzt man diese letzte Erklärung, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß $T(P,t)$ in der Tat die Lösung des eingangs [illegible] und [illegible] Problems darstellt. [illegible] der Zeit $t = 0$ [illegible]

Erfüllt $T(P)$ die Randbedingung nicht, so gilt $T(P,0) = A(P)$ in K und [illegible]

[illegible]

Durch partielle Integration kann die Lösung [illegible] in einer [illegible] Form gebracht werden. Es ist

[illegible]

hieraus

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Wir wollen [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Dann ist [illegible]

[illegible]

Zum Beweis der [illegible]

[illegible]

Im folgenden [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Da sich die letzten zwei Summanden für alle inneren Punkte von K wegheben, ist (14b) besonders gut zur Bestimmung des Temperaturverlaufs dieser Punkte geeignet.

Wir wollen nun noch zeigen, daß unsere Lösung dem D u h a m e l schen Integraltheorem äquivalent ist. Dieses lautet für $T_1(P,t)$ folgendermaßen [1] :
Ist $F(P,\lambda,t)$ die Lösung des von dem Parameter λ abhängigen ungesteuerten Randwertproblems

$$D\{F(P,\lambda,t)\}=0\,; \quad F(P,\lambda,0)=0$$
$$L\{F(P,\lambda,t)\}_F=\phi(P,\lambda)\,, \qquad (15)$$

dann ist $T_1(P,t)$ gegeben durch

$$T_1(P,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(P,\lambda,t-\lambda)\,d\lambda\,. \qquad (16)$$

Zum Beweis der Äquivalenz des Theorems mit unserem Ergebnis (D) setzen wir zunächst den Parameter $\lambda = \tau$ und spalten die Aufgabe (15) durch den Ansatz

$$F(P,\tau,t) = G^*(P,\tau,t) - H(P,\tau)$$

in folgende zwei Teilprobleme auf:

$$\Delta H(P,\tau) = 0$$
$$L\{H(P,\tau)\}_F = -\phi(P,\tau) \qquad (a)$$

$$D\{G^*(P,\tau,t)\}=0\,; \quad G^*(P,\tau,0)=H(P,\tau)$$
$$L\{G^*(P,\tau,t)\}_F=0\,; \quad t>0\,. \qquad (b)$$

Gehen wir nunmehr mit dem Ansatz in (16) hinein, dann wird

$$T_1(P,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[G^*(P,\tau,t-\tau) - H(P,\tau)\right]d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G^*(P,\tau,t-\tau)\,d\tau \ . \qquad (c)$$

Zur weiteren Umformung bilden wir

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} G^*(P,\tau,t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau \ .$$

Bedenkt man, daß

$$\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau = -\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G^*(P,\tau,t-\tau)\,d\tau$$

ist, so ergibt sich

$$T_1(P,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G^*(P,\tau,t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} G^*(P,\tau,t-\tau)\,d\tau .$$

Die Integration bei dem zweiten Summanden der rechten Seite führen wir aus und erhalten

$$T_1(P,t) = G^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} G^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - G^*(P,t,0) \ . \qquad (d)$$

Der Ausdruck (d) ist aber gerade unser Ansatz (13), während (a) und (b) den Aufgaben (B) bzw. (C) entsprechen. Damit ist bewiesen, daß beide Lösungsmethoden äquivalent sind. Bemerkt sei nur noch, daß in (B) $H(P,t)$ steht, während wir in (a) $H(P,\tau)$ geschrieben haben. Dieser Unterschied ist belanglos, weil ja in (B) bzw. (a) t und τ lediglich als Parameter aufzufassen sind.

Man könnte nun zunächst der Meinung sein, daß es vorteilhafter ist, zur Berechnung von $T_1(P,t)$ den weitaus kürzeren Ausdruck (16) bzw. (c) an Stelle von (13) zu verwenden. Dieser Gedanke muß jedoch verworfen werden. Betrachten wir nämlich die Randwertaufgabe (b), so ist ersichtlich, daß $H(P,\tau)$ nach den Eigenfunktionen dieses Problems entwickelt werden muß, um die Anfangsbedingung $G^*(P,\tau,0) = H(P,\tau)$ erfüllen zu können. Auf Grund unseres eingangs erwähnten Entwicklungssatzes wissen wir nun, daß die so gewonnene Reihe im Inneren von K zwar $H(P,\tau)$ darstellt, auf der Oberfläche F aber, und darin liegt die Schwierigkeit, der Randbedingung $L\left\{G^*(P,\tau,t)\right\}_F = 0$ für $t \geq 0$ genügt, während in (a) $L\left\{H(P,\tau)\right\}_F = -\phi(P,\tau)$ gefordert ist.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Die Integration bei dem zweiten Summanden der rechten Seite [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Der ursprünglich für $t \to 0$ von Null auf $-\phi(P,\tau)$ springende Randausdruck $L\{G^*(P,\tau,t)\}_{\tau}$ ist jetzt stetig in t. Bestimmen wir also $F(P,\lambda,t)$ auf die angegebene Art, und dazu sind wir bei der rechnerischen Auswertung gezwungen, dann wird $T_1(P,t)$ durch (c) nicht richtig wiedergegeben: Wir müssen vielmehr den Ausdruck (d), der unserem physikalisch sehr naheliegenden Ansatz (13) äquivalent ist, für die Berechnung von $T_1(P,t)$ verwenden. Dieselben Überlegungen wie auf Seite 13/14 führen uns dann zu dem endgültigen Resultat entsprechend (D). Danach ist noch in (d) $G^*(P,t,0)$ durch $H(P,t)$ zu ersetzen.

An Lösung (14b) wird dieser Sachverhalt besonders klar. Wir finden sofort

$$T_1(P,t) = -a^2\int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau + \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(t) u_\mu(P) - H(P,t)$$

oder

$$T_1(P,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau + \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(t) u_\mu(P) - H(P,t). \quad (e)$$

Das Integral

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu(\tau) u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau$$

entspricht (c) und stellt im Inneren von K $T_1(P,t)$ dar. Auf dem Rande wird es durch die letzten zwei Summanden von (e) derart korrigiert, daß $T_1(P,t)$ tatsächlich alle geforderten Bedingungen erfüllt.

2. Eine Erweiterung des allgemeinen Problems

Denken wir uns die Oberfläche F des in Abb. 1 dargestellten Körpers K aufgeteilt in q Teilflächen F_1, F_2, ... F_q und zu jeder eine entsprechende Steuerfunktion $\phi_1(P,t)$, $\phi_2(P,t)$, ... $\phi_q(P,t)$ gehörig (Abb. 2), so ergibt sich folgende Randwertaufgabe:

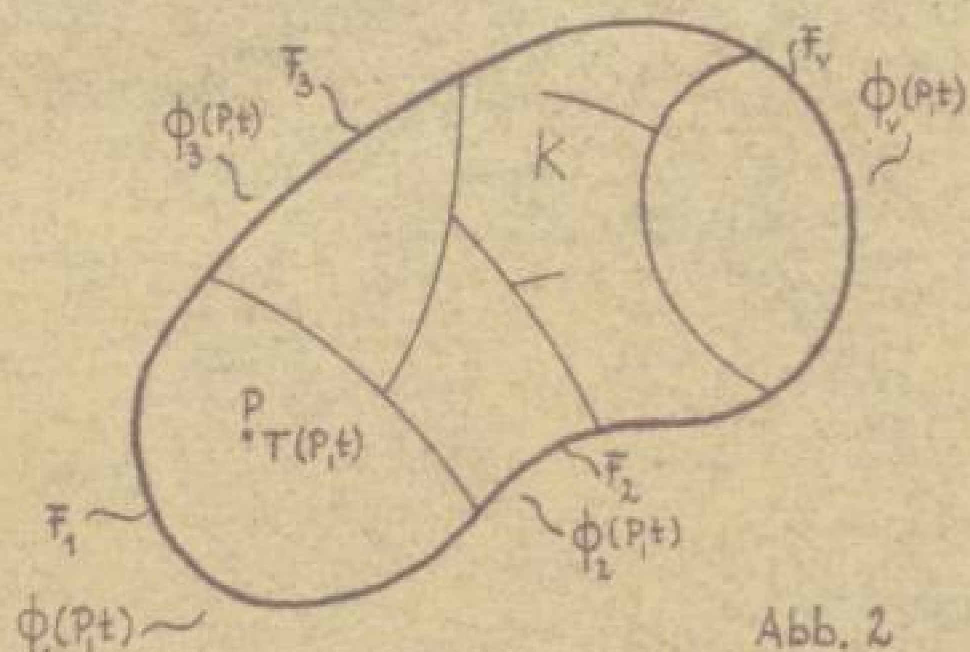


Abb. 2

$$
\begin{aligned}
&D\{T(P,t)\} = 0\,; \quad T(P,0) = f(P) \\
&L\{T(P,t)\}_{F_1} = \phi_1(P,t)\,; \quad t > 0 \\
&L\{T(P,t)\}_{F_2} = \phi_2(P,t)\,, \quad t > 0 \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&L\{T(P,t)\}_{F_q} = \phi_q(P,t)\,; \quad t > 0\,.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Natürlich hätten wir dieses etwas allgemeinere Problem von vornherein behandeln können. Darauf wurde jedoch zugunsten der Übersichtlichkeit des Rechnungsganges verzichtet.

Unseren bisherigen Betrachtungen zufolge spalten wir (17) zunächst auf in

$$
\begin{aligned}
&D\{T_0(P,t)\} = 0\,; \quad T_0(P,0) = f(P) \\
&L\{T_0(P,t)\}_F = 0\,; \quad t > 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\{T_1(P,t)\} = 0\,; \quad T_1(P,0) = 0 \\
&L\{T_1(P,t)\}_{F_\nu} = \phi_\nu(P,t)\,; \quad t > 0 \qquad \nu = 1,2,\dots q\,.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Die Lösung von (18) ist durch (10) gegeben.

Um $T_1(P,t)$ zu bestimmen, setzen wir vorerst $\phi_\nu(P,t) \neq 0$ $(1 \leq \nu \leq q)$ und alle übrigen $\phi_i(P,t) = 0$. Die zu diesem Teilproblem gehörige Temperatur bezeichnen wir mit $T_{1\nu}(P,t)$. Dann ergibt sich nach (D)

3. [illegible]

[illegible] wir nun als Oberfläche F [illegible] zusammengesetzten Körpers K [illegible] Randflächen [illegible] der dazu entsprechende [illegible] geeignete Abbildung, so ergibt sich folgendes Randwertproblem:

[illegible]

[illegible] (17)

[illegible]

Natürlich können wir die so [illegible] Funktion vom [illegible] bereits behandeln können. [illegible] jedoch [illegible] die Eindeutigkeit des Randwertproblems [illegible]

[illegible] (17) [illegible] nicht auf [illegible]

[illegible]

[illegible] (18)

Die Lösung von (18) ist durch (19) gegeben.

[illegible]

$$T_{1\nu}(P,t) = G_\nu^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} G_\nu^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - H_\nu(P,t). \qquad (20)$$

Aus (B) und (C) folgt für $G_\nu^*(P,\tau,t)$

$$\Delta H_\nu(P,t) = 0$$

$$L\{H_\nu(P,t)\}_{F_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq \nu \\ -\phi_\nu(P,t) & \text{für } i = \nu \end{cases} \quad i=1,2\dots q \qquad (21)$$

$$D\{G_\nu^*(P,\tau,t)\} = 0\,; \quad G_\nu^*(P,\tau,0) = H_\nu(P,\tau)$$

$$L\{G_\nu^*(P,\tau,t)\}_F = 0\,; \quad t>0. \qquad (22)$$

Summieren wir nun diese Temperaturfunktionen, die sich für $\nu = 1, 2, \dots q$ ergeben, so erhält man, wie unmittelbar ersichtlich, gerade $T_1(P,t)$. Es ist daher

$$T_1(P,t) = \sum_{\nu=1}^{q} T_{1\nu}(P,t) = \sum_{\nu=1}^{q} G_\nu^*(P,0,t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} \sum_{\nu=1}^{q} G_\nu^*(P,\tilde{\tau},t-\tau)\right]_{\tilde{\tau}=\tau} d\tau - \sum_{\nu=1}^{q} H_\nu(P,t). \quad (23)$$

Schreiben wir für die Lösung von (22)

$$G_\nu^*(P,\tau,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu(\tau)\, u_\mu(P)\, e^{-a^2\delta_\mu^2 t},$$

dann wird schließlich

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu(0)\, u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$
$$+ \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^{\nu\prime}(\tau)\, u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau - \sum_{\nu=1}^{q} H_\nu(P,t) \qquad (24a)$$

oder

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2 \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu(\tau)\, u_\mu(P)\, \delta_\mu^2\, e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu(t)\, u_\mu(P) - \sum_{\nu=1}^{q} H_\nu(P,t)\,, \qquad (24b)$$

wobei

$$\frac{d}{d\tau} B_\mu^\nu(\tau) = B_\mu^{\nu\prime}(\tau)$$

gesetzt wurde.

Ist insbesondere für die Gesamtoberfläche F die Steuerfunktion gleich $\phi(P,t)$, so ergibt sich selbstverständlich wieder unsere Lösung (14a,b).

Nunmehr kann man durch geeignete Wahl der $\phi_\nu(P,t)$ aus (24a,b) eine ganze Reihe spezieller Probleme ableiten. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

[illegible]

$\overline{M}_o$ 6,60 = 0,07

[illegible] wurde.

Zur Kontrolle wurde für die Oxo... koeffizient F das Nachstrom-[illegible] gleich [illegible], so ergab eine Meßungenauigkeit [illegible] gute Übereinstimmung [illegible].

[illegible] kann man durch geeignete Wahl der [illegible] eine ganze Reihe [illegible] der Probleme [illegible] [illegible] Ausschnitt [illegible].

[illegible]

[illegible]

In diesem Fall setzen wir

[illegible]

Dann ergibt sich aus (25)

[illegible] (26)

und [illegible] ist bestimmt durch

$$\Delta\, [illegible] = 0$$

[illegible] (27)

[illegible]

Die Aufgaben (26) und (27) unterscheiden sich von (20), (21) dadurch, daß jetzt die Randbedingungen nicht mehr homogen sind.

Aus (26) und (27)

[illegible]

erhält man (26a)

[illegible] (26b)

[illegible]

und damit (26b)

3. Spezielle gesteuerte Probleme

a) Die Steuerfunktion habe die Form $\chi_\nu(P)\varphi_\nu(t)$ für die Teilflächen F_ν.

In diesem Fall setzen wir

$$G^*_\nu(P,\tau,t-\tau) = \varphi_\nu(\tau)\,G_\nu(P,t-\tau)$$

Damit ergibt sich aus (20)

$$T_{1\nu}(P,t) = \varphi_\nu(0)\,G_\nu(P,t) + \int_0^t \varphi'_\nu(\tau)\,G_\nu(P,t-\tau)\,d\tau - \varphi_\nu(t)\,H_\nu(P) \qquad (25)$$

und $G_\nu(P,t)$ ist bestimmt durch

$$\Delta H_\nu(P) = 0$$
$$L\{H_\nu(P)\}_{F_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq \nu \\ -\chi_\nu(P) & \text{für } i = \nu \end{cases} \quad i = 1,2,\dots q \qquad (26)$$

$$D\{G_\nu(P,t)\} = 0\,; \quad G_\nu(P,0) = H_\nu(P)$$
$$L\{G_\nu(P,t)\}_F = 0\,; \quad t > 0\,. \qquad (27)$$

Die Aufgaben (26) und (27) unterscheiden sich von (21), (22) dadurch, daß jetzt die Randwertprobleme nicht mehr parameterabhängig sind.
Nun folgt aus (23)

$$T_1(P,t) = \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(0)\,G_\nu(P,t) + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q} \varphi'_\nu(\tau)\,G_\nu(P,t-\tau)\,d\tau - \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(t)\,H_\nu(P)\,. \qquad (28)$$

Also wird nach (24a)

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(0) \sum_{\mu=1}^{\infty} B^\nu_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$
$$+ \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q} \varphi'_\nu(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B^\nu_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)}\,d\tau - \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(t)\,H_\nu(P) \qquad (29a)$$

oder nach (24b)

$$T(P,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2 \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu u_\mu(P) \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau + \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu u_\mu(P) - H_\nu(P)\right]. \quad (29b)$$

b) Die Steuerfunktion sei $\chi(P)\varphi(t)$ für die Gesamtoberfläche F.

Unter dieser Vorausetzung folgt aus a) oder unmittelbar aus Abschnitt 1

$$T_1(P,t) = \varphi(0)G(P,t) + \int_0^t \varphi'(\tau)G(P,t-\tau)d\tau - \varphi(t)H(P) \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta H(P) &= 0 \\ L\{H(P)\}_F &= -\chi(P) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} D\{G(P,t)\} = 0\,; &\quad G(P,0) = H(P) \\ L\{G(P,t)\}_F = 0\,; &\quad t > 0\,. \end{aligned} \quad (32)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T(P,t) = &\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \varphi(0)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} \\ &+ \int_0^t \varphi'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau - \varphi(t)H(P) \end{aligned} \quad (33a)$$

oder

$$\begin{aligned} T(P,t) = &\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2\int_0^t \varphi(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P)\delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau \\ &+ \varphi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) - H(P)\right]. \end{aligned} \quad (33b)$$

c) Es sei in a) $\varphi_\nu(t) \equiv 1$ $(\nu = 1, 2, \dots q)$.

In diesem Fall liegt kein gesteuertes Problem im eigentlichen Sinn vor, da ja die Temperatur der Grenzschicht zeitunab-

hängig ist. Trotzdem soll diese Aufgabe behandelt werden, weil sie technische Bedeutung hat.

Aus (25) ergibt sich sofort, wenn man beachtet, daß $\varphi_\nu'(\tau) \equiv 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots q)$ ist

$$T_1(P,t) = \sum_{\nu=1}^{q} G_\nu(P,t) - \sum_{\nu=1}^{q} H_\nu(P) \tag{34}$$

mit

$$\begin{gathered} \Delta H_\nu(P) = 0 \\ L\{H_\nu(P)\}_{F_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq \nu \\ -\chi_\nu(P) & \text{für } i = \nu \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots q \end{gathered} \tag{35}$$

und

$$\begin{gathered} D\{G_\nu(P,t)\} = 0 \,; \quad G_\nu(P,0) = H_\nu(P) \\ L\{G_\nu(P,t)\}_F = 0 \,; \quad t > 0 \,; \end{gathered} \tag{36}$$

also ist

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^\nu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - \sum_{\nu=1}^{q} H_\nu(P) \,. \tag{37}$$

d) Es sei in c) die Temperatur der gesamten Grenzschicht $\chi(P)$.

Wir erhalten zunächst aus b) bzw. c)

$$T_1(P,t) = G(P,t) - H(P)$$

mit

$$\begin{gathered} \Delta H(P) = 0 \\ L\{H(P)\}_F = -\chi(P) \end{gathered} \tag{38}$$

und

$$\begin{aligned} D\{G(P,t)\} &= 0\,; \quad G(P,0) = H(P) \\ L\{G(P,t)\}_F &= 0\,; \quad t>0\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Setzt man noch

$$T_0(P,t) + G(P,t) = T^*(P,t)\,,$$

dann wird

$$T(P,t) = T^*(P,t) - H(P)\,, \tag{40}$$

wobei $T^*(P,t)$ aus

$$\begin{aligned} D\{T^*(P,t)\} &= 0\,; \quad T^*(P,0) = f(P) + H(P) \\ L\{T^*(P,t)\}_F &= 0\,; \quad t>0 \end{aligned} \tag{41}$$

zu bestimmen ist, während H(P) durch (38) festgelegt ist. In (38), (40), (41) liegt die bekannte Lösung des Problems vor, bei welchem die Temperatur der Grenzschicht nur vom Ort abhängt [1].

c) E s s e i i n a) $\chi_\nu(P) \equiv 1$ ($\nu = 1, 2, \dots q$).

In diesem Fall ergibt sich aus a)

$$T_1(P,t) = \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(0)\, G_\nu(P,t) + \int_0^t \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu'(\tau)\, G_\nu(P,t-\tau)\, d\tau - \sum_{\nu=1}^{q} \varphi_\nu(t)\, H_\nu(P) \tag{42}$$

mit

$$\begin{aligned} &\Delta H_\nu(P) = 0 \\ &L\{H_\nu(P)\}_{F_i} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq \nu \\ -1 & \text{für } i = \nu \end{cases} \quad i = 1,2,\dots q \end{aligned} \tag{43}$$

und

$$D\{G_\nu(P,t)\}=0\ ;\quad G_\nu(P,0)=H_\nu(P)$$
$$L\{G_\nu(P,t)\}_F=0\ ;\quad t>0\ . \tag{44}$$

Es wird

$$T(P,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu u_\mu(P)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}+\sum_{\nu=1}^{q}\varphi_\nu(0)\sum_{\mu=1}^{\infty}B_\mu^\nu u_\mu(P)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$
$$+\int_0^t\sum_{\nu=1}^{q}\varphi_\nu'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty}B_\mu^\nu u_\mu(P)e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}d\tau-\sum_{\nu=1}^{q}\varphi_\nu(t)H_\nu(P) \tag{45a}$$

oder

$$T(P,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu u_\mu(P)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}-a^2\int_0^t\sum_{\nu=1}^{q}\varphi_\nu(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty}B_\mu^\nu u_\mu(P)\delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}d\tau$$
$$+\sum_{\nu=1}^{q}\varphi_\nu(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}B_\mu^\nu u_\mu(P)-H_\nu(P)\right]. \tag{45 b}$$

f) Die Steuerfunktion sei $\varphi(t)$ für die Gesamtfläche F.

Jetzt folgt aus b) für $\chi(P)\equiv 1$ oder aus e) für $\varphi_\nu(t)=\varphi(t)$

$$T_1(P,t)=\varphi(0)G(P,t)+\int_0^t\varphi'(\tau)G(P,t-\tau)d\tau-\varphi(t)H(P) \tag{46}$$

mit

$$\Delta H(P)=0$$
$$L\{H(P)\}_F=-1 \tag{47}$$

und

$$D\{G(P,t)\}=0\ ;\quad G(P,0)=H(P)$$
$$L\{G(P,t)\}_F=0\ ;\quad t>0\ . \tag{48}$$

Das stationäre Problem (46) hat die einfache Lösung H(P) = -1. Daher ergibt sich

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \varphi(0) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$
$$+ \int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau + \varphi(t) \tag{49a}$$

oder

$$T(P,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} - a^2 \int_0^t \varphi(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau$$
$$+ \varphi(t) \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) + 1 \right] . \tag{49b}$$

g) F ü r d i e S t e u e r f u n k t i o n $\varphi(t)$ g e l t e
$\varphi(0) = T_a =$ const., u n d e s s e i
$T(P,0) = f(P) = \varphi(0) = T_a$.

In diesem Fall herrscht also zu Beginn des Prozesses völliger Wärmeausgleich zwischen allen Punkten des Körpers K und dem umgebenden Medium.

Durch Vergleich von

$$D\{T_0(P,t)\} = 0; \quad T_0(P,0) = T_a$$
$$L\{T_0(P,t)\}_F = 0; \quad t > 0$$

und

$$D\{G(P,t)\} = 0; \quad G(P,0) = -1$$
$$L\{G(P,t)\}_F = 0; \quad t > 0$$

findet man sofort für $T_a \neq 0$

$$G(P,t) = -\frac{T_0(P,t)}{T_a} .$$

Damit ergibt sich schließlich

$$T_2(t) = [illegible] \qquad (50a)$$

Aus (50a) folgt für $T_2 = 0$ der ganz entsprechende Ausdruck

$$T(t) = [illegible] \qquad (50b)$$

was bei [illegible] die von A. T i c h o n o w angegebene [illegible] liegende Ergebnis [illegible]

Im Hinblick unserer [illegible] vorliegenden Untersuchungen wollen wir noch einige Bemerkungen über eine Methode der näherungsweisen Bestimmung der Temperaturverteilung $T(\xi,t)$ machen.

Es ist klar, daß man für die zahlreichen Körperformen die Lösungen der Aufgaben (A), (B), (C) explizit angeben [illegible] den Gebieten interessieren, namentlich in der [illegible], durch Temperaturverteilungen von kompliziertem Gestaltungen. A. T i c h o n o w hat deshalb für den Fall der völligen [illegible] zu Beginn des Übertragungsprozesses und einer nur zeitabhängigen Wärmeübergangszahl – diese entspricht unserer speziellen Funktion β – einen Weg angegeben, wie man für einen festen Punkt ξ_0 den zeitlichen Temperaturverlauf $T(\xi_0,t)$ berechnen kann, wenn $q(\xi_0,t)$ experimentell näherungsweise bestimmt werden kann [29].

Im allgemeinen Fall dürfte die approximative Bestimmung der $T(\xi,t)$ allerdings kaum möglich sein. [illegible] steht dem gegenüber jedoch die Tatsache, daß bei kompliziertem [illegible] der Körper selbst meist einfacher Natur [illegible], während bei wenigen einfachen Körperformen die Annahme der völligen [illegible] zu Beginn des Prozesses und eine nur zeitabhängige Wärmeübergangszahl ganz gerechtfertigt ist. Deshalb wollen wir uns hier [illegible] mit den angeführten Fragen auseinandersetzen.

Damit ergibt sich schließlich

$$T(P,t) = \varphi(t) - \frac{1}{T_a}\int_0^t \varphi'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau . \quad (50a)$$

Aus (49a) folgt für $T_a = 0$ der ganz entsprechende Ausdruck

$$T(P,t) = \varphi(t) + \int_0^t \varphi'(\tau)\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(P) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau . \quad (50b)$$

Das ist aber das von A. K n e s c h k e angegebene grundlegende Ergebnis [9].

Zum Schluß unserer theoretischen Untersuchungen wollen wir noch einige Bemerkungen über eine Methode der näherungsweisen Bestimmung der Temperaturverteilung T(P,t) machen.

Es ist klar, daß nur für die einfachsten Körperformen die Lösungen der Aufgaben (A), (B), (C) explizit angegeben werden können. Dagegen interessieren, namentlich in der Gießereitechnik, auch Temperaturverteilungen von komplizierteren Gußstücken. A. K n e s c h k e hat deshalb für den Fall des völligen Wärmeausgleichs zu Beginn des Steuerprozesses und einer nur zeitabhängigen Steuerfunktion - dies entspricht unserem speziellen Problem g) - einen Weg angegeben, wie man für einen festen Punkt P_0 des Körpers den Temperaturverlauf $T(P_0,t)$ gewinnen kann, wenn $G(P_0,t)$ experimentell näherungsweise bestimmt worden ist [9].

Im allgemeinen Fall dürfte die experimentelle Bestimmung der $G_\nu^*(P,\tau,t)$ allerdings kaum möglich sein. Zum Glück steht demgegenüber jedoch die Tatsache, daß bei komplizierten Steuervorgängen die Körper selbst meist einfacher Natur sind, während bei weniger einfachen Körperformen die Annahme des völligen Wärmeausgleichs zu Beginn des Prozesses und eine nur zeitabhängige Steuerfunktion fast immer gerechtfertigt ist. Deshalb wollen wir uns hier nicht weiter mit dem angeführten Problem auseinandersetzen.

Damit haben wir eine Fülle von technisch anwendbaren, gesteuerten Wärmeleitproblemen erfaßt und einer analytischen Behandlung zugänglich gemacht. Die Lösungen gelten sowohl für Anwärm- als auch für Abkühlvorgänge, da $\phi(P,t)$ diesbezüglich in keiner Weise eingeschränkt werden mußte. Die Bedingungen, die wir an die einzelnen Funktionen gestellt haben, hätten zum Teil noch abgeschwächt werden können. Dies wurde unterlassen, um den allgemeinen Gang der Überlegungen durch Nebenbetrachtungen nicht stören zu müssen.

Im zweiten Teil wollen wir einige Beispiele rechnen, die die Brauchbarkeit der vorgetragenen Methode zeigen werden.

Dann haben wir eine Hälfte [illegible] zwischen [illegible]
gesetzte Verwaltungsfunktionen erfüllt und einer analytischen Be-
handlung zugänglich gemacht. [illegible] Schwierigkeiten [illegible] Wir
[illegible] sie aber für diese Analyse, wie [illegible] Arbeitsbereiche
in solcher Weise eingegrenzt werden musste. Die Bedingungen,
die wir an die einzelnen Positionen gestellt haben, hatten sich
weit [illegible] erfüllen können. Wir glauben aber festlegen,
und die allgemeinen Sinn der Überlegungen durch [illegible]
[illegible] durchführen zu können.

Im praktischen Teil wollen wir einige [illegible] Analyse [illegible] die
Zweckmässigkeit der [illegible] Methode gezeigt werden.

B e i s p i e l e

1. Allgemeine Bemerkungen

Die Beispiele sollen den [illegible] die im Teil I [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] in die [illegible] der [illegible] gehen. Natürlich kann dabei [illegible] Beispiel [illegible] werden, [illegible] die Vielzahl der Anwendungsmöglichkeiten [illegible] auf [illegible] Einzel- [illegible], die bei den jeweiligen Aufgaben gestellt werden kön- nen.

Zunächst wollen wir einige Probleme der [illegible], bei [illegible] [illegible] auftreten.

Zum Beispiel ist man beim [illegible] (Resonanz- [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [8]. Von Inter- esse ist [illegible], wie die [illegible] [illegible] [illegible] ist, bei einer [illegible] [illegible] [illegible] auch die [illegible] Frage, wie sich [illegible] [illegible] ändert, wenn [illegible] [illegible] gebracht wird, [illegible] hung [10].

[illegible] Kugeln, [illegible] [illegible] weg.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

II.

Beispiele

1. Allgemeine Bemerkungen

Die Beispiele verfolgen den Zweck, die in Teil I ausgeführten theoretischen Erörterungen noch besser verständlich zu machen und einen ersten Einblick in das weite Gebiet der Anwendungen zu geben. Natürlich kann dabei in keiner Hinsicht Vollständigkeit angestrebt werden, weder in bezug auf die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten noch auf alle technischen Einzelfragen, die bei den jeweiligen Aufgaben gestellt werden können.

Zunächst wollen wir einige Probleme der Praxis nennen, bei denen gesteuerte Wärmeleitvorgänge auftreten.
Zum Beispiel ist man beim Abkühlen großer Gußstücke (Maschinenteile, Glaskörper usw.) gezwungen, die Temperatur der den Körper umgebenden Luft nur langsam herunterzusteuern, um Wärmespannungen im Körper möglichst zu vermeiden [8] . Von Interesse ist nun, wie die Temperaturverteilung im Gußstück, dessen Anfangstemperatur bekannt ist, bei einer vorgegebenen Temperaturfunktion der Luft verläuft. Auch die umgekehrte Frage, wie sich die Temperatur in einem Maschinenteil ändert, wenn die Umgebung nach einem bekannten Gesetz erwärmt wird, ist von Bedeutung [10] .
In beiden Fällen liegen, wie unmittelbar ersichtlich, gesteuerte Wärmeleitprobleme vor.
Im Bauwesen treten ganz ähnliche Fragen auf. So muß man die Temperaturverteilungen in den Wandungen von Kühltürmen, Schornsteinen und Fundamenten von Tiefkühlhäusern kennen, die unter dem Einfluß gegebener Temperaturfunktionen des angrenzenden Mediums entstehen. Weiter interessiert die Erwärmung von großen Beton-

körpern während des chemischen Abbindeprozesses [7], [11]. Bekanntlich werden bei diesem Vorgang große Wärmemengen frei, was zur Folge hat, daß der Beton ungleichmäßig erhärtet. Dadurch können aber erhebliche Rißbildungen auftreten. Um derartigen Schäden vorzubeugen, kühlt man den Beton während des Abbindeprozesses entsprechend.
An all diesen Problemen der Bautechnik erkennen wir ebenfalls, daß es sich bei ihnen im wesentlichen um gesteuerte Wärmeleitprozesse handelt.

Obwohl es in der Praxis noch eine ganze Reihe Vorgänge gibt, die sich durch gesteuerte Wärmeleitprobleme charakterisieren lassen, wollen wir uns hier mit den bisher aufgeführten begnügen und den Beispielen zuwenden. Wir teilen die Aufgaben wie üblich in ein-, zwei- und dreidimensionale ein, je nachdem, ob die Temperaturverteilung von einer, zwei oder drei Ortskoordinaten abhängt. Zunächst behandeln wir einige eindimensionale Probleme.

Nummern während des gesamten Beladungsprozesses [illegible] Be-
merklich werden bei diesem Vorgang große Wärmemengen frei, was
zur Folge hat, daß der Hafen sich [illegible] erwärmt. Dadurch
können [illegible] unerwünschte [illegible] [illegible] entstehen. Um [illegible]
[illegible] [illegible] kühlt man den Hafen während des Belade-
prozesses [illegible].

Zu 2.) Diesen [illegible] der [illegible] erkennen wir ebenfalls,
daß [illegible] in der Lösung [illegible] wesentlichen [illegible] [illegible] Kristall-
prozesse [illegible].

Obwohl es in der Praxis noch eine ganze Reihe [illegible] gibt,
die sich durch gesteigerte [illegible] [illegible] kennzeichnen
[illegible], wollen wir uns hier [illegible] nicht näher [illegible] [illegible]
und den Beispielen zuwenden. Wir [illegible] die [illegible]
[illegible] in [illegible], sowie [illegible], so [illegible], daß
die [illegible] [illegible], wenn [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
Verfahren.

2. Eindimensionale Probleme

a) Die ebene Platte der Dicke l

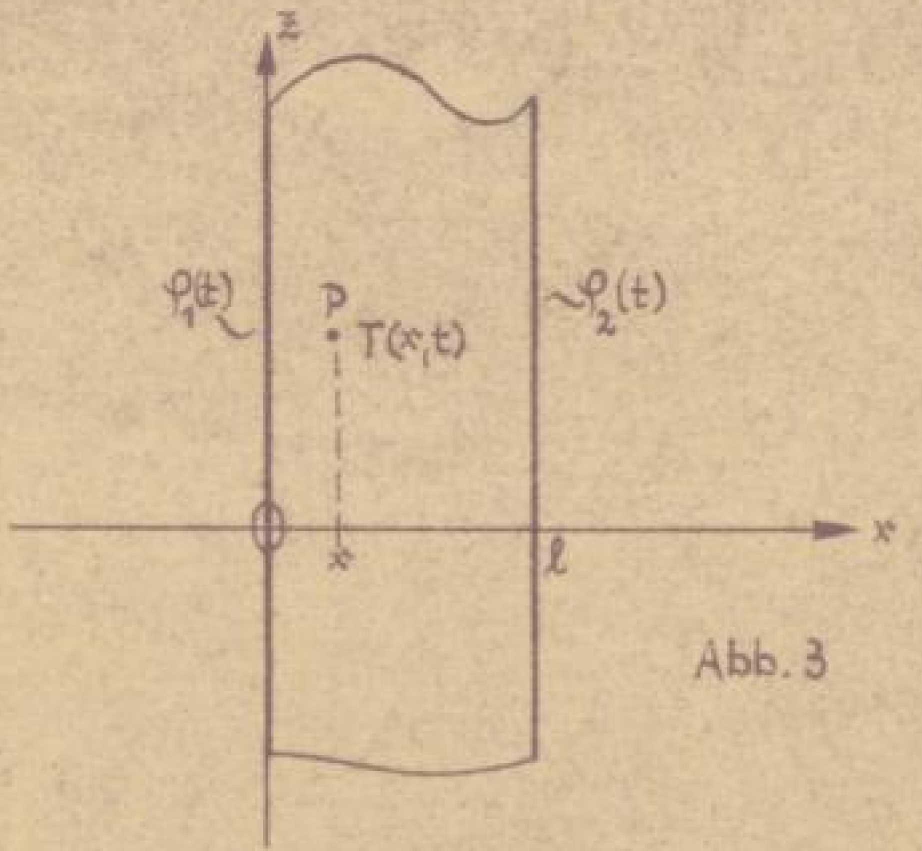


Abb. 3

Wir betrachten eine Platte der Dicke l, die durch die Ebenen x = 0 und x = l begrenzt wird. Die Temperatur des umgebenden Mediums sei für $x < 0$ gleich $\varphi_1(t)$ und für $x > l$ gleich $\varphi_2(t)$ (Abb. 3) Gesucht ist die Temperatur $T(x,t)$ der Platte, wenn die Anfangstemperaturverteilung $T(x,0) = f(x)$ ist.

Diese Aufgabe wurde bereits von F o u r i e r [4] und danach von D u h a m e l [3] gelöst. Wir behandeln sie als erstes, gewissermaßen klassisches Beispiel.

Das Randwertproblem für $T(x,t)$ lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \,, \quad T(x,0) = f(x)$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} + T\right)_{x=0} = \varphi_1(t) \qquad t>0 \qquad (51)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} + T\right)_{x=l} = \varphi_2(t) \,.$$

Wir erkennen sofort, daß die Aufgabe vom speziellen Typ I.3e ist. Daher lautet die allgemeine Lösung nach (45a)

$$T(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(x) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1(0)B_\mu^1 + \varphi_2(0)B_\mu^2\right] u_\mu(x) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$
$$+ \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1'(\tau)B_\mu^1 + \varphi_2'(\tau)B_\mu^2\right] u_\mu(x) e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)} d\tau - \left[\varphi_1(t)H_1(x) + \varphi_2(t)H_2(x)\right] .$$

Nun müssen wir die drei Aufgaben (A), (B), (C) lösen, womit dann die noch unbekannten Eigenfunktionen $u_\mu(x)$, die Eigenwerte δ_μ^2, die Koeffizienten A_μ, B_μ^1, B_μ^2 und die $H_1(x)$, $H_2(x)$ bestimmt sind.

Entsprechend (A) erhalten wir

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} = 0 \; ; \quad T_0(x,0) = f(x)$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T_0}{\partial x} + T_0\right)_{x=0} = 0 \qquad t>0 \qquad (52)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T_0}{\partial x} + T_0\right)_{x=l} = 0 \quad .$$

Der Ansatz

$$T_0(x,t) = u(x)e^{-a^2\delta^2 t}$$

führt auf

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \delta^2 u = 0$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du}{dx} + u\right)_{x=0} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du}{dx} + u\right)_{x=l} = 0 \quad .$$

Die Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$u(x) = C_1\cos\delta x + C_2\sin\delta x \quad .$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit den Randbedingungen die Eigenwertgleichung

$$\mathrm{tg}\,\delta l = \frac{2\frac{\lambda}{\alpha}\delta}{\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta\right)^2 - 1} \quad . \qquad (53)$$

Die Quadrate der Wurzeln dieser Gleichung sind die Eigenwerte δ_μ^2. Die zugehörigen orthogonalen Eigenfunktionen lauten

$$u_\mu(x) = \frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x \qquad \mu = 1,2,\dots \; .$$

Also ergibt sich für $T_0(x,t)$ nach (10), (11)

$$T_0(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$A_\mu = \frac{\int_0^l f(x)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)dx}{\int_0^l \left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)^2 dx} = \frac{2\int_0^l f(x)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)dx}{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2+1\right]l + 2\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Damit sind die Eigenfunktionen, Eigenwerte und die A_μ bereits bestimmt.

Jetzt berechnen wir nach (B) bzw. (43) $H_1(x)$ und $H_2(x)$ aus

$$\frac{d^2H_1}{dx^2} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2H_2}{dx^2} = 0$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_1}{dx} + H_1\right)_{x=0} = -1 \qquad\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_2}{dx} + H_2\right)_{x=0} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_1}{dx} + H_1\right)_{x=l} = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_2}{dx} + H_2\right)_{x=l} = -1 .$$

Man findet

$$H_1(x) = \frac{x - \left(\frac{\lambda}{\alpha} + l\right)}{2\frac{\lambda}{\alpha} + l} \quad ; \qquad H_2(x) = \frac{-\left(x + \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{2\frac{\lambda}{\alpha} + l} .$$

Entsprechend (C) bzw. (44) muß nun $G_1(x,t)$ und $G_2(x,t)$ bestimmt werden. Dies liefert uns gleichzeitig die noch fehlenden Größen B_μ^1 und B_μ^2.
Es ist

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 G_\nu}{\partial x^2} = 0 \; ; \quad G_\nu(x,0) = H_\nu(x)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_\nu}{\partial x} + G_\nu\right)_{x=0} &= 0\\ \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_\nu}{\partial x} + G_\nu\right)_{x=l} &= 0\end{aligned}\right. \quad t > 0 \; ; \quad \nu = 1,2 .$$

Durch Vergleich mit der Aufgabe (52) finden wir sofort

$$G_1(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^1 \left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$B_\mu^1 = \frac{2\int\limits_0^l \left[x - \left(\frac{\lambda}{\alpha} + l\right)\right]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)dx}{\left[2\frac{\lambda}{\alpha} + l\right]\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]l + 2\frac{\lambda}{\alpha}\right\}}$$

$$= \frac{-2}{\delta_\mu\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]l + 2\frac{\lambda}{\alpha}\right\}}$$

und

$$G_2(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^2\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$B_\mu^2 = \frac{-2\int\limits_0^l \left[x + \frac{\lambda}{\alpha}\right]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)dx}{\left[2\frac{\lambda}{\alpha} + l\right]\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]l + 2\frac{\lambda}{\alpha}\right\}}$$

$$= \frac{-2\cos\delta_\mu l\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]}{\delta_\mu\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 - 1\right]\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]l + 2\frac{\lambda}{\alpha}\right\}} .$$

Zur Vereinfachung von B_μ^1 und B_μ^2 wurde die Eigenwertgleichung (53) verwendet.

Nunmehr erhalten wir für T(x,t)

$$T(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1(0)B_\mu^1 + \varphi_2(0)B_\mu^2\right]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1'(\tau)B_\mu^1 + \varphi_2'(\tau)B_\mu^2\right]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x\right)e^{-a^2\delta_\mu^2(t-\tau)}d\tau$$

$$+ \varphi_1(t)\frac{\frac{\lambda}{\alpha} + l - x}{2\frac{\lambda}{\alpha} + l} + \varphi_2(t)\frac{\frac{\lambda}{\alpha} + x}{2\frac{\lambda}{\alpha} + l} ,$$

wobei die A_μ, B_μ^1 und B_μ^2 die eben berechneten Koeffizienten sind. Für x = 0 bzw. x = l ergibt sich aus dieser Lösung die Temperatur auf den Plattenoberflächen.

Für alle inneren Punkte finden wir noch aus (45b), unter Beachtung unserer Bemerkungen am Ende des Abschnitts I.1,

[illegible]

Zur Vereinfachung von E_1 und E_2 wurde die Eigenwertgleichung (25) verwendet.

Ebenso erhält man für [illegible]

[illegible]

wobei die A_ν, E_ν und E'_ν die schon berechneten Koeffizienten sind. Für $x = 0$ bzw. $x = 1$ ergibt sich aus dieser Lösung die Temperatur auf den Plattenoberflächen.
Für alle unsere Zahlen können wir [illegible] (25b), [illegible] unserer Bemerkungen am Ende des Abschnittes [illegible].

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\Delta\Phi = [illegible]$$

mit den Eigenwerten

[illegible]

und den Eigenfunktionen

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$T(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left(\frac{\lambda}{\alpha} \delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x \right) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$-a^2 \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\varphi_1(\tau) B_\mu^1 + \varphi_2(\tau) B_\mu^2 \right] \left(\frac{\lambda}{\alpha} \delta_\mu \cos\delta_\mu x + \sin\delta_\mu x \right) \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau.$$

Das ist zum Beispiel für die Berechnung der Temperatur der Plattenmitte ($x = \frac{l}{2}$) ein sehr handlicher Ausdruck.

Wesentlich einfacher liegen die Dinge, wenn wir die Plattenoberflächen direkt auf der Temperatur $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ halten. Es gilt dann die Randbedingung (2).
Wir leiten die entsprechende Lösung aus unserer für endliches α gefundenen durch Grenzübergang $\alpha \to \infty$ ab. Es ergibt sich so die Eigenwertgleichung

$$\sin \delta l = 0$$

mit den Eigenwerten

$$\delta_\mu^2 = \left(\frac{\mu\pi}{l} \right)^2 \qquad \mu = 1, 2, \dots$$

und den Eigenfunktionen

$$u_\mu(x) = \sin \frac{\mu\pi x}{l} .$$

Weiter erhalten wir

$$A_\mu = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\mu\pi x}{l} dx$$

$$H_1(x) = \frac{x - l}{l} \quad ; \quad H_2(x) = -\frac{x}{l}$$

$$B_\mu^1 = -\frac{2}{\mu\pi} \quad ; \quad B_\mu^2 = (-1)^\mu \frac{2}{\mu\pi} .$$

Damit geht $T(x,t)$ für $\alpha \to \infty$ über in

$$T(x,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}-\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1(0)-(-1)^\mu\varphi_2(0)\right]\frac{\sin\frac{\mu\pi x}{l}}{\mu}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^t\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1'(\tau)-(-1)^\mu\varphi_2'(\tau)\right]\frac{\sin\frac{\mu\pi x}{l}}{\mu}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau+\varphi_1(t)\frac{l-x}{l}+\varphi_2(t)\frac{x}{l}\,. \tag{54}$$

Wir erkennen hieran sofort, daß

$$T(0,t)=\varphi_1(t)\;;\quad T(l,t)=\varphi_2(t)$$

ist, wie es sein muß, während sich für alle inneren Punkte nach (45b) der einfache Ausdruck

$$T(x,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}+\frac{2\pi a^2}{l^2}\int_0^t\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1(\tau)-(-1)^\mu\varphi_2(\tau)\right]\mu\sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

ergibt.

Schließlich läßt sich aus den letzten Ergebnissen sehr leicht der Fall $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\varphi(t)$ ableiten.
Es ist dann

$$T(x,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}-\frac{4}{\pi}\varphi(0)\sum_{\mu=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu\pi x}{l}}{\mu}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^t\varphi'(\tau)\sum_{\mu=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu\pi x}{l}}{\mu}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau+\varphi(t)\,.$$

Für alle inneren Punkte gilt

$$T(x,t)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2 t}+\frac{4\pi a^2}{l^2}\int_0^t\varphi(\tau)\sum_{\mu=1,3,5\ldots}^{\infty}\mu\sin\frac{\mu\pi x}{l}\,e^{-a^2\left(\frac{\mu\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

und auf der Plattenoberfläche selbstverständlich

$$T(0,t)=T(l,t)=\varphi(t).$$

Für endliches α findet man ganz entsprechende Ausdrücke.

Bemerkt sei noch, daß diese Lösungen nach I.3f auch direkt hergeleitet werden können, was wir uns jedoch ersparen wollen.

[illegible]

erhält.

[illegible]

Für alle andern Punkte gilt

[illegible]

Bei der Bestimmung der Temperaturverteilung $T(x,t)$ eines Stabes, dessen Enden die Temperatur $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ haben, wird man ebenfalls auf das Randwertproblem (51) geführt, vorausgesetzt, daß der Stabmantel adiatherman abgeschlossen und die Anfangstemperatur $f(x)$ ist.
Wir können deshalb sofort die Lösung der einfachen Aufgabe angeben, wenn die Stabenden auf der konstanten Temperatur Θ_1 , Θ_2 gehalten werden und $T(x,0) = f(x)$ ist, die sich in dem Buch von P. G. T o l s t o w , "Fourierreihen" [13] findet.

Es ist nach (54) bzw. I.3c mit $\varphi_1(t) = \Theta_1$, $\varphi_2(t) = \Theta_2$

$$T(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{l}\, e^{-a^2(\frac{\mu\pi}{l})^2 t} - \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\Theta_1 - (-1)^\mu \Theta_2\right]\frac{\sin\frac{\mu\pi x}{l}}{\mu}\, e^{-a^2(\frac{\mu\pi}{l})^2 t}$$

$$+ \Theta_1 \frac{l-x}{l} + \Theta_2 \frac{x}{l} .$$

T o l s t o w macht für diese Aufgabe den Ansatz

$$T(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} T_\mu(t) \sin\frac{\mu\pi x}{l} .$$

Daran erkennt man schon, daß die Randbedingungen nie zu erfüllen sind, wie auch die $T_\mu(t)$ gewählt werden mögen, weil $\sin\frac{\mu\pi x}{l}$ für $x = 0$ und $x = l$ verschwindet. Ohne auf die in dem Buch ausgeführte Bestimmung der $T_\mu(t)$ einzugehen, sei erwähnt, daß die von T o l s t o w gefundene Lösung nur für alle inneren Punkte des Stabes gilt, was auf Grund des falschen Ansatzes gar nicht so ohne weiteres zu erwarten ist.
Bei der Behandlung der Aufgabe mit den allgemeineren Randbedingungen $T(0,t) = \varphi_1(t)$; $T(l,t) = \varphi_2(t)$, die (54) äquivalent ist, begeht T o l s t o w denselben Fehler.

b) Der unendlich lange Hohlzylinder

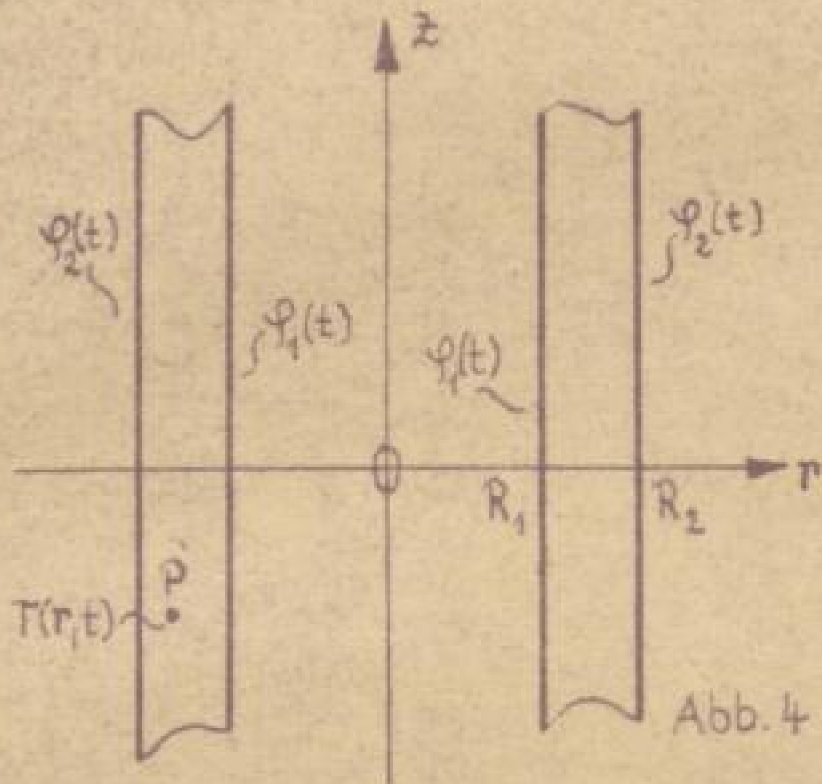


Abb. 4

Es ist die Temperaturverteilung $T(r,t)$ in einem unendlich langen Hohlzylinder mit dem inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2 zu bestimmen. Die Anfangstemperaturverteilung $T(r,0)$ sei $f(r)$ und die Temperatur des umgebenden Mediums gleich $\varphi_1(t)$ im Innenraum und $\varphi_2(t)$ im Außenraum (Abb. 4).

Die Aufgabe ist, soweit übersehen werden kann, in der Literatur noch nicht zu finden. Ihre Behandlung bietet jedoch auf Grund unserer allgemeinen Theorie keinerlei Schwierigkeiten.

Das Problem lautet in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0\,; \qquad T(r,0) = f(r)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r} + T\right)_{r=R_1} &= \varphi_1(t) \\ \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r} + T\right)_{r=R_2} &= \varphi_2(t)\,. \end{aligned}\right\} \quad t > 0$$

Man sieht, daß die Aufgabe ebenfalls vom speziellen Typ I.3e ist. Ihre allgemeine Lösung lautet daher nach (45a)

$$\begin{aligned} T(r,t) = {} & \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(r) e^{-a^2 s_\mu^2 t} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1(0)B_\mu^1 + \varphi_2(0)B_\mu^2\right] u_\mu(r) e^{-a^2 s_\mu^2 t} \\ & + \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\varphi_1'(\tau)B_\mu^1 + \varphi_2'(\tau)B_\mu^2\right] u_\mu(r) e^{-a^2 s_\mu^2 (t-\tau)}\,d\tau - \left[\varphi_1(t)H_1(r) + \varphi_2(t)H_2(r)\right]. \end{aligned}$$

Entsprechend (A) erhalten wir $T_0(r,t)$ aus

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_0}{\partial r}\right) = 0\,, \qquad T_0(r,0) = f(r)$$

[illegible]

Der Ansatz

[illegible]

liefert [illegible]

[illegible]

und die Randbedingungen

[illegible]

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet bekanntlich [18]

$$u(r) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 N_0(\alpha r)$$

Man bemerkt, daß die Singularität von $N_0(\alpha r)$ für $r = 0$ nicht stört, da $R_1 \leq r \leq R_2$ ist.
Die Lösung liefert in Verbindung mit den Randbedingungen die Eigenwertgleichung

[illegible] (59)

[illegible]

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0\right)_{r=R_1} = 0$$
$$t>0$$
$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0\right)_{r=R_2} = 0 \quad .$$

Der Ansatz

$$T_0(r,t) = u(r)\, e^{-a^2\delta^2 t}$$

liefert die B e s s e l sche Differentialgleichung nullter Ordnung

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \delta^2 u = 0$$

und die Randbedingungen

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du}{dr} + u\right)_{r=R_1} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du}{dr} + u\right)_{r=R_2} = 0 \quad .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet bekanntlich [15]

$$u(r) = C_1 J_0(\delta r) + C_2 N_0(\delta r) .$$

Man beachte, daß die Singularität von $N_0(\delta r)$ für $r = 0$ nicht stört, da $R_1 \leqq r \leqq R_2$ ist.
Die Lösung liefert in Verbindung mit den Randbedingungen die Eigenwertgleichung

$$\left[\frac{\lambda}{\alpha}\delta J_0'(\delta R_2) + J_0(\delta R_2)\right]\left[\frac{\lambda}{\alpha}\delta N_0'(\delta R_1) - N_0(\delta R_1)\right]$$
$$-\left[\frac{\lambda}{\alpha}\delta J_0'(\delta R_1) - J_0(\delta R_1)\right]\left[\frac{\lambda}{\alpha}\delta N_0'(\delta R_2) + N_0(\delta R_2)\right] = 0 \quad , \qquad (55)$$

wobei die Striche Ableitungen nach dem gesamten Argument δr bedeuten. Diese letzte Bemerkung ist auch künftig besonders zu beachten. Zum Unterschied dazu werden wir für die Ableitungen der B e s s e l funktionen $Z_\nu(\delta r)$ nach r immer $\frac{d}{dr} Z_\nu(\delta r)$ schreiben. Hierbei ist unter $Z_\nu(\delta r)$ irgendeine Lösung der B e s s e l - schen Differentialgleichung ν-ter Ordnung zu verstehen.

Die Eigenwerte bezeichnen wir wieder mit δ_μ^2. Sie sind die Quadrate der Wurzeln der Eigenwertgleichung.
Die zugehörigen Eigenfunktionen ergeben sich zu

$$u_\mu(r) = J_0(\delta_\mu r) - \frac{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu J_0'(\delta_\mu R_2) + J_0(\delta_\mu R_2)}{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu N_0'(\delta_\mu R_2) + N_0(\delta_\mu R_2)} N_0(\delta_\mu r) \quad .$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu J_0'(\delta_\mu R_2) + J_0(\delta_\mu R_2)}{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu N_0'(\delta_\mu R_2) + N_0(\delta_\mu R_2)} = \psi_\mu$$

und erhalten

$$u_\mu(r) = J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r).$$

Angemerkt sei noch die Relation

$$\psi_\mu = \frac{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu J_0'(\delta_\mu R_2) + J_0(\delta_\mu R_2)}{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu N_0'(\delta_\mu R_2) + N_0(\delta_\mu R_2)} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu J_0'(\delta_\mu R_1) - J_0(\delta_\mu R_1)}{\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu N_0'(\delta_\mu R_1) - N_0(\delta_\mu R_1)} \quad ,$$

die aus der Eigenwertgleichung folgt.
Nunmehr ergibt sich für $T_0(r,t)$

$$T_0(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$A_\mu = \frac{\int\limits_{R_1}^{R_2} f(r)\, r \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] dr}{\int\limits_{R_1}^{R_2} r \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 dr} \quad . \tag{56}$$

Das Integral im Nenner berechnen wir nach der Formel [15]

$$\int^r r Z_\nu^2(\delta_\mu r)\,dr = \frac{r^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{\nu^2}{\delta_\mu^2 r^2}\right] Z_\nu^2(\delta_\mu r) + Z_\nu'^2(\delta_\mu r)\right\}$$

und erhalten, da $Z_0'(\delta_\mu r) = -Z_1(\delta_\mu r)$ ist,

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 dr = \left[\frac{r^2}{2}\left\{\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 + \left[J_1(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu r)\right]^2\right\}\right]_{R_1}^{R_2} .$$

Diesen Ausdruck vereinfachen wir mit Hilfe der Beziehungen

$$\left[J_0(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu R_1)\right]^2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2$$

$$\left[J_0(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu R_2)\right]^2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2,$$

die auf Grund der Eigenwertgleichung (55) bestehen. Wir kommen so zu dem Resultat

$$\int_{R_1}^{R_2} r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 dr = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]\left\{R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2 - R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2\right\}.$$

Daher wird schließlich

$$A_\mu = \frac{-2\int_{R_1}^{R_2} f(r)\, r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]dr}{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]\left\{R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2 - R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2\right\}}.$$

Nun bestimmen wir nach (B) bzw. (43) $H_1(r)$ und $H_2(r)$ aus

$$\frac{d^2H_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_1}{dr} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2H_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_2}{dr} = 0$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_1}{dr} + H_1\right)_{r=R_1} = -1 \qquad\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_2}{dr} + H_2\right)_{r=R_1} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_1}{dr} + H_1\right)_{r=R_2} = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dH_2}{dr} + H_2\right)_{r=R_2} = -1.$$

Man findet

$$H_1(r) = \frac{-\left(\ln\frac{R_2}{r} + \frac{\lambda}{\alpha R_2}\right)}{\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$R_1 \leqq r \leqq R_2$$

und

$$H_2(r) = \frac{-\left(\ln\frac{r}{R_1} + \frac{\lambda}{\alpha R_1}\right)}{\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Als letztes berechnen wir nach (C) bzw. (44) die $G_\nu(r,t)$

$$\frac{\partial G_v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 G_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_v}{\partial r}\right) = 0; \quad G_v(r,0) = H_v(r)$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_v}{\partial r} + G_v\right)_{r=R_1} = 0$$

$$t > 0; \qquad v = 1,2$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_v}{\partial r} + G_v\right)_{r=R_2} = 0 \quad .$$

Ganz entsprechend wie für $T_o(r,t)$ ergibt sich unmittelbar nach (56)

$$G_1(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^1 \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

mit

$$B_\mu^1 = \frac{-\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\ln\frac{R_2}{r} + \frac{\lambda}{\alpha R_2}\right) r \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] dr}{\left[\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 dr}$$

und

$$G_2(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^2 \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

mit

$$B_\mu^2 = \frac{-\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\ln\frac{r}{R_1} + \frac{\lambda}{\alpha R_1}\right) r \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] dr}{\left[\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]^2 dr} \quad .$$

Zur Bestimmung der B_μ^1, B_μ^2 sind folgende Integrale zu berechnen

$$M_\mu = \int\limits_{R_1}^{R_2} r\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] dr$$

$$\overline{M}_\mu = \int\limits_{R_1}^{R_2} r \ln r \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] dr \quad .$$

Für diese ergibt sich unter Beachtung der bekannten Relationen für beliebige Zylinderfunktionen $Z_o(\delta_\mu r)$, $Z_1(\delta_\mu r)$ nullter und erster Ordnung [15]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible] haben dann die Form

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

durch Anwendung … mit Hilfe der Beziehungen

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible] (23), unter Be-
[illegible]
[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible]

$$\int^r r Z_0(\delta_\mu r)\,dr = \frac{r}{\delta_\mu} Z_1(\delta_\mu r) \;; \qquad \int^r Z_1(\delta_\mu r)\,dr = -\frac{1}{\delta_\mu} Z_0(\delta_\mu r)$$

$$M_\mu = \left[\frac{r}{\delta_\mu}\left[J_1(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu r)\right]\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\overline{M}_\mu = \frac{1}{\delta_\mu^2}\left[r\delta_\mu \ln r\left[J_1(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu r)\right] + \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right]\right]_{R_1}^{R_2} .$$

Die B_μ^1, B_μ^2 haben dann die Form

$$B_\mu^1 = \frac{2\left[M_\mu\left(\frac{\lambda}{\alpha R_2} + \ln R_2\right) - \overline{M}_\mu\right]}{\left[\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2+1\right]\left\{R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2 - R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2\right\}}$$

$$B_\mu^2 = \frac{2\left[M_\mu\left(\frac{\lambda}{\alpha R_1} - \ln R_1\right) + \overline{M}_\mu\right]}{\left[\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \ln\frac{R_2}{R_1}\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2+1\right]\left\{R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2 - R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2\right\}} .$$

Diese Ausdrücke vereinfachen wir mit Hilfe der Beziehungen

$$J_0(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu R_1) = -\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]$$

$$J_0(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu R_2) = \frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right] .$$

Letztere gewinnt man aus der Eigenwertgleichung (55) unter Berücksichtigung von $Z_0'(\delta_\mu r) = -Z_1(\delta_\mu r)$.
Damit ergibt sich schließlich

$$B_\mu^1 = \frac{-2R_1\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]}{\delta_\mu\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2+1\right]\left\{R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2 - R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2\right\}}$$

$$B_\mu^2 = \frac{2R_2\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]}{\delta_\mu\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2+1\right]\left\{R_1^2\left[J_1(\delta_\mu R_1)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right]^2 - R_2^2\left[J_1(\delta_\mu R_2)-\psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]^2\right\}} .$$

Nunmehr sind alle Größen bestimmt, und für $T(r,t)$ folgt

$$T(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\varphi_1(0) B_\mu^1 + \varphi_2(0) B_\mu^2\right]\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+ \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\varphi_1'(\tau) B_\mu^1 + \varphi_2'(\tau) B_\mu^2\right]\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau$$

$$+ \varphi_1(t) \frac{\ln \frac{R_2}{r} + \frac{\lambda}{\alpha R_2}}{\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln \frac{R_2}{R_1}} + \varphi_2(t) \frac{\ln \frac{r}{R_1} + \frac{\lambda}{\alpha R_1}}{\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \ln \frac{R_2}{R_1}} .$$

Für den Temperaturverlauf aller inneren Punkte erhalten wir nach (45b) den einfachen Ausdruck

$$T(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$- a^2 \int_0^t \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\varphi_1(\tau) B_\mu^1 + \varphi_2(\tau) B_\mu^2\right]\left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r)\right] \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau .$$

Damit ist die vorgelegte Aufgabe ganz allgemein gelöst. Wir könnten wieder wie im Beispiel a) den Grenzübergang $\alpha \to \infty$ ausführen. Weil dies jedoch keinerlei Schwierigkeiten macht, wollen wir uns lediglich darauf beschränken, das Ergebnis für den Fall $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ und endliches α herzuleiten. Wir haben dann gleichzeitig eine gewisse Kontrolle darüber, ob uns bei der etwas komplizierten Berechnung der B_μ^1 und B_μ^2 ein Fehler unterlaufen ist. Die B_μ lassen sich nämlich einmal sehr leicht nach I.3f direkt bestimmen, da in diesem Falle $H(r) = -1$ ist, während zum anderen die Beziehung

$$B_\mu = B_\mu^1 + B_\mu^2$$

erfüllt sein muß.

Wir finden

$$B_\mu = B_\mu^1 + B_\mu^2 = \frac{-2}{\delta_\mu \left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}\delta_\mu\right)^2 + 1\right]\left\{R_1\left[J_1(\delta_\mu R_1) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_1)\right] + R_2\left[J_1(\delta_\mu R_2) - \psi_\mu N_1(\delta_\mu R_2)\right]\right\}}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

und berücksichtigen die Rückläufigkeit des [illegible], indem wir [illegible] nach [illegible] [illegible] und [illegible] [illegible] [illegible] für die [illegible] [illegible] B_n erhalten.
Ist also [illegible], so ergibt sich [illegible]

[illegible]

[illegible]

Für [illegible] zwischen außerhalb des [illegible] gilt

[illegible]

[illegible]

b) Die [illegible]

Abb.5

Als letztes [illegible] Problem [illegible] wir uns die [illegible] mit dem inneren Radius r_1 und dem äußeren Radius r_2 [illegible], dass [illegible] im [illegible] die [illegible] [illegible] und dem [illegible] als Temperatur [illegible].

Ist die [illegible] [illegible], dann [illegible] die [illegible] in [illegible]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \qquad [illegible]$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \gamma T\right)_{r_1} = \varphi(t)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \gamma T\right)_{r_2} = [illegible]$$

und bestätigen die Richtigkeit des Resultates, indem wir $H(r) = -1$ nach den Eigenfunktionen unseres Problems entwickeln und denselben Ausdruck für die Entwicklungskoeffizienten B_μ erhalten.

Ist also $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$, so ergibt sich für $T(r,t)$

$$T(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r) \right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \varphi(0) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r) \right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+ \int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r) \right] e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau + \varphi(t) .$$

Für alle körperinneren Punkte des Hohlzylinders gilt

$$T(r,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r) \right] e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$- a^2 \int_0^t \varphi(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu \left[J_0(\delta_\mu r) - \psi_\mu N_0(\delta_\mu r) \right] \delta_\mu^2 e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau .$$

c) Die Hohlkugel

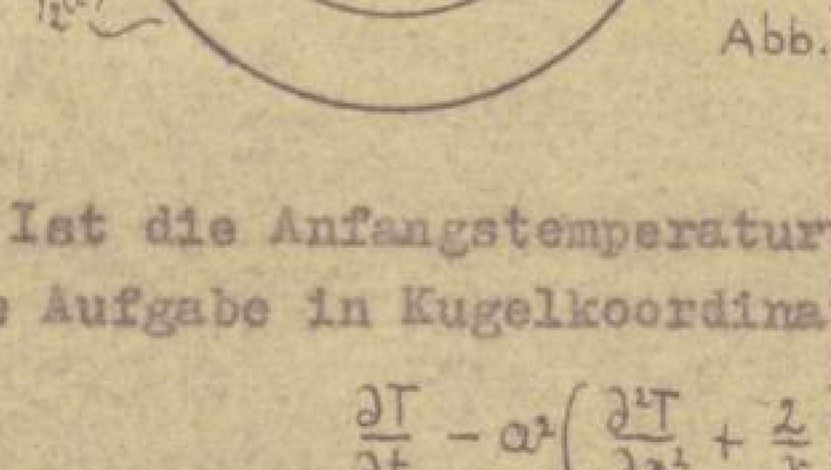


Abb. 5

Als letztes eindimensionales Problem wollen wir die Hohlkugel mit dem inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2 behandeln. Das Medium im Kugelhohlraum habe die Temperatur $\varphi_1(t)$ und das im Außenraum die Temperatur $\varphi_2(t)$ (Abb. 5).

Ist die Anfangstemperaturverteilung $T(r,0) = f(r)$, dann lautet die Aufgabe in Kugelkoordinaten

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \; ; \quad T(r,0) = f(r)$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} + T \right)_{r=R_1} = \varphi_1(t)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial r} + T \right)_{r=R_2} = \varphi_2(t) \qquad t > 0 \; ; \quad R_1 \leqq r \leqq R_2$$

Wir setzen

$$T^*(r,t) = r\,T(r,t)$$

und erhalten

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} = 0\ ; \qquad T^*(r,0) = r f(r)$$

$$\left(-\frac{\lambda R_1}{\alpha R_1+\lambda}\frac{\partial T^*}{\partial r} + T^*\right)_{r=R_1} = \frac{\alpha R_1^2}{\alpha R_1+\lambda}\varphi_1(t)$$

$$\left(\frac{\lambda R_2}{\alpha R_2-\lambda}\frac{\partial T^*}{\partial r} + T^*\right)_{r=R_2} = \frac{\alpha R_2^2}{\alpha R_2-\lambda}\varphi_2(t) \qquad t>0 .$$

Damit ist die Aufgabe auf das Beispiel a) zurückgeführt. Zu beachten ist lediglich, daß in den Randbedingungen die Koeffizienten von $\left.\frac{\partial T^*}{\partial r}\right|_{r=R_1}$ und $\left.\frac{\partial T^*}{\partial r}\right|_{r=R_2}$ verschieden sind. Dies beeinflußt jedoch den allgemeinen Gang der Rechnung nur unwesentlich, so daß wir uns die weitere Behandlung ersparen können.

Wir setzen

$$[illegible]$$

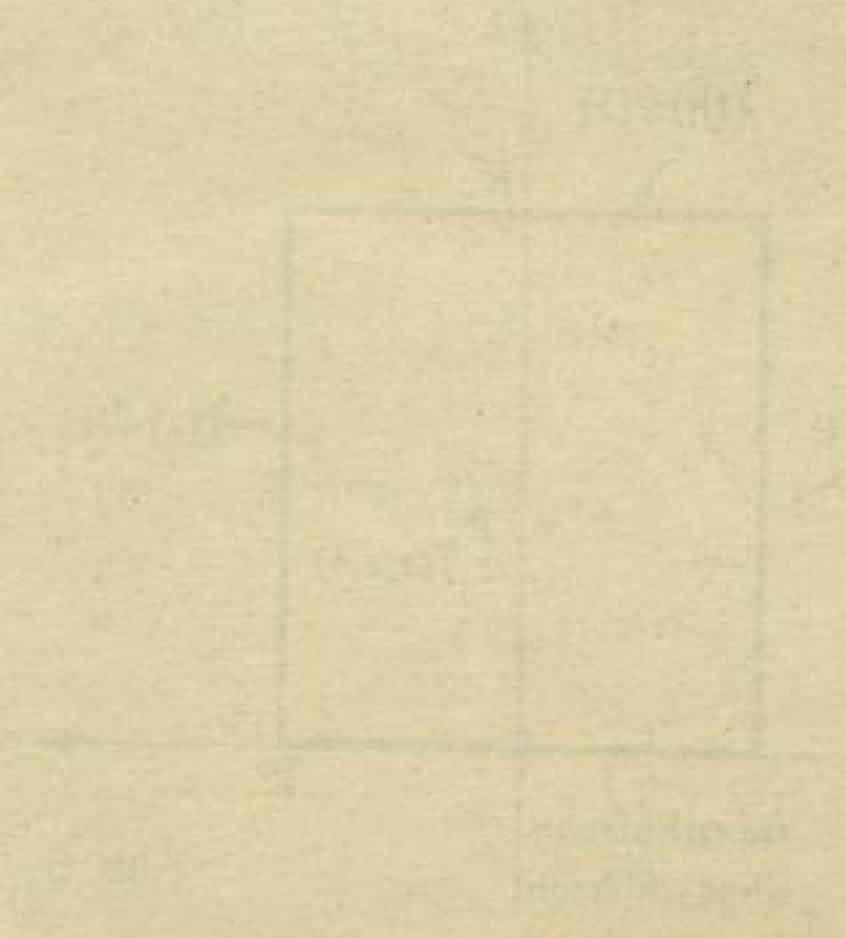
und erhalten

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Damit ist die Aufgabe auf das Beispiel a) zurückgeführt. Es bedeutet [illegible] lediglich, daß in den Randbedingungen die Koeffizienten von [illegible] und [illegible] zu vertauschen sind. Eine Beschränkung [illegible] jedoch den allgemeinen Bruch der [illegible] zu [illegible], so [illegible] wir uns [illegible] die [illegible] Behandlung [illegible].



3. Zwei- und dreidimensionale Probleme

a) Abkühlung eines Vollzylinders

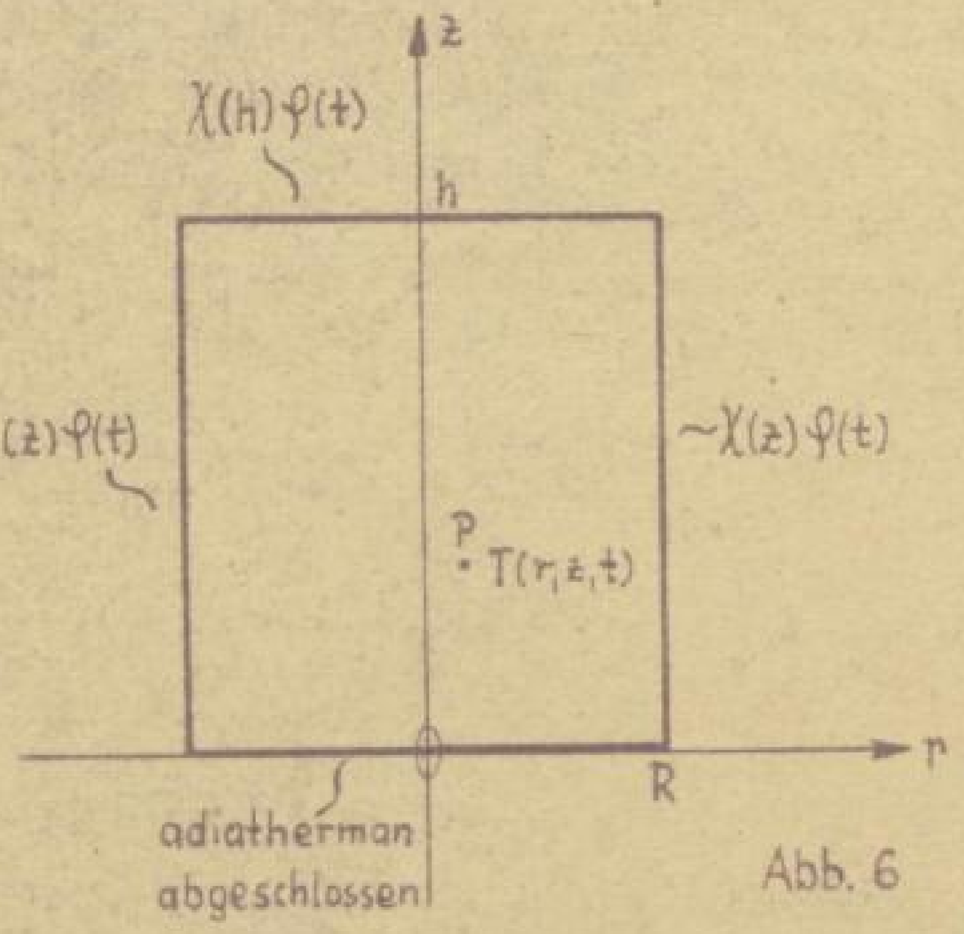


Abb. 6

Es ist die Temperaturverteilung in einem kreiszylindrischen Körper mit dem Radius R und der Höhe h zu bestimmen, welcher in einem obergeheizten Ofenraum mit der Temperaturverteilung $\chi(z)\cdot\varphi(t)$ gesteuert abgekühlt werden soll. Die Grundfläche des Zylinders sei adiatherman abgeschlossen und seine Anfangstemperatur gleich T_a = const. (Abb. 6).

Wir wollen zunächst annehmen, daß der Zylinder verhältnismäßig hoch ist und daher die Abhängigkeit der Steuerfunktion von der Höhe z im Ofenraum mit in Rechnung stellen. Aus dem gewonnenen Ergebnis werden wir dann den für mäßige Zylinderhöhen annähernd erfüllten Fall einer nur zeitabhängigen Steuerfunktion $\varphi(t)$ herleiten.

Das vorgelegte Problem ist zweidimensional und lautet in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0; \quad T(r,z,0) = T_a$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial r} + T\right)_{r=R} = \chi(z)\varphi(t)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial z} + T\right)_{z=h} = \chi(h)\varphi(t) \qquad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

An der Aufgabe erkennen wir, daß sie vom speziellen Typ I.3a ist. Ihre allgemeine Lösung hat nach (29a) mit $\chi_1(P) = \chi(z)$; $\chi_2(P) = \chi(h)$ = const.; $\chi_3(P) = 0$; $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ und $\varphi_3(t) = 0$ die Form

$$T(r,z,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(r,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \varphi(0) \sum_{\mu=1}^{\infty} (B_\mu^1 + B_\mu^2) u_\mu(r,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$+ \int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{\mu=1}^{\infty} (B_\mu^1 + B_\mu^2) u_\mu(r,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau - \varphi(t) \left[H_1(r,z) + H_2(r,z) \right]$$

Wir bestimmen nun zunächst $T_0(r,z,t)$ nach (A) aus

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} \right) = 0 \; ; \quad T_0(r,z,0) = T_a$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial r} + T_0 \right)_{r=R} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial z} + T_0 \right)_{z=h} = 0 \qquad t > 0 \qquad (57)$$

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad .$$

Der Ansatz

$$T_0(r,z,t) = u_1(r)\, u_2(z)\, e^{-a^2\delta^2 t}$$

führt auf

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + k^2 u_1 = 0 \qquad\qquad \frac{d^2 u_2}{dz^2} + \bar{k}^2 u_2 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{du_1}{dr} + u_1 \right)_{r=R} = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{du_2}{dz} + u_2 \right)_{z=h} = 0$$

$$\left. \frac{du_2}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

mit

$$k^2 + \bar{k}^2 = \delta^2 .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $u_1(r)$ lautet

$$u_1(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr) .$$

Da q (r) endlich bleiben muss, folgt sofort $C_2 = 0$. Auf Grund der Randbedingung ergeben wir dann die Eigenwertgleichung

$$\frac{\lambda}{\alpha R} + \beta = \frac{J_0(\kappa R)}{J_1(\kappa R)} \qquad (58)$$

und den Eigenwerten κ_i.
Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$u_i(r) = J_0(\kappa_i r)$$

Für u (z) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

Aus den Randbedingungen folgt die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} kh = \frac{\alpha h}{\lambda} \cdot \frac{1}{kh} \qquad (59)$$

Bezeichnen wir die Eigenwerte mit $k_j h$, dann lauten die Eigenfunktionen

$$u_j(z) = \cos k_j z$$

Damit ergibt sich $T = T(r,z,t)$

$$T(r,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} J_0(\kappa_i r) \cos k_j z \, e^{-a(\kappa_i^2 + k_j^2)t}$$

$$A_{ij} = \frac{\int_0^R \int_0^h r J_0(\kappa_i r) \cos k_j z \, dr \, dz}{\int_0^R \int_0^h r J_0^2(\kappa_i r) \cos^2 k_j z \, dr \, dz}$$

$$= \frac{4 T_0 \sin k_j h}{[illegible]}$$

[illegible]
(59) [illegible]

[illegible]

Da $u_1(0)$ endlich sein muß, folgt sofort $C_2 = 0$. Auf Grund der Randbedingung erhalten wir dann die Eigenwertgleichung

$$\frac{\lambda}{\alpha R} \cdot kR = \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} \tag{58}$$

mit den Eigenwerten k_m^2.
Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$u_{1m}(r) = J_0(k_m r) .$$

Für $u_2(z)$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u_2(z) = C_1 \cos \bar{k} z + C_2 \sin \bar{k} z .$$

Aus den Randbedingungen folgt die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} \bar{k} h = \frac{\alpha h}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{k} h} . \tag{59}$$

Bezeichnen wir die Eigenwerte mit $\bar{k}_n^2$, dann lauten die Eigenfunktionen

$$u_{2n}(z) = \cos \bar{k}_n z .$$

Nunmehr ergibt sich für $T_0(r,z,t)$

$$T_0(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(k_m r) \cos \bar{k}_n z \, e^{-a^2(k_m^2 + \bar{k}_n^2)t}$$

$$A_{m,n} = \frac{T_a \int_0^R \int_0^h r J_0(k_m r) \cos \bar{k}_n z \, dr\, dz}{\int_0^R \int_0^h r J_0^2(k_m r) \cos^2 \bar{k}_n z \, dr\, dz}$$

$$= \frac{4 T_a \sin \bar{k}_n h}{R k_m \bar{k}_n \left[\left(\frac{\lambda}{\alpha} k_m \right)^2 + 1 \right] J_1(k_m R) \left[h + \frac{\lambda}{\alpha} \sin^2 \bar{k}_n h \right]} .$$

Der Ausdruck für $A_{m,n}$ wurde mittels der Eigenwertgleichungen (58), (59) vereinfacht.

Jetzt müssen wir nach (B) bzw. (26) die $H_\nu(r,z)$ bestimmen.

Es ist

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial r} + H_1\right)_{r=R} = -\chi(z) \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial r} + H_2\right)_{r=R} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial z} + H_1\right)_{z=h} = 0 \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial z} + H_2\right)_{z=h} = -\chi(h)$$

$$\left.\frac{\partial H_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \quad .$$

Für $H_3(r,z)$ erübrigt es sich, die Randwertaufgabe aufzuschreiben, da dieses stationäre Problem nur die Lösung $H_3(r,z) \equiv 0$ haben kann, weil die rechten Seiten der Randbedingungen alle identisch Null sind. Das war übrigens von vornherein zu erwarten; denn in der eingangs aufgeschriebenen allgemeinen Lösung für $T(r,z,t)$ kommt ja $H_3(r,z)$ gar nicht mit vor.

Für $H_1(r,z)$ machen wir den Ansatz

$$H_1(r,z) = v_1(r)\,u_2(z)$$

und erhalten

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr} - \bar{k}^2 v_1 = 0 \qquad \frac{d^2 u_2}{dz^2} + \bar{k}^2 u_2 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dv_1}{dr} + v_1\right)_{r=R} = -\chi(z) \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_2}{dz} + u_2\right)_{z=h} = 0$$

$$\left.\frac{du_2}{dz}\right|_{z=0} = 0 \quad .$$

$u_2(z)$ haben wir bereits bei der Berechnung von $T_0(r,z,t)$ bestimmt. Es war

$$u_{2n}(z) = \cos \bar{k}_n z \,,$$

wobei die $\bar{k}_n$ die Wurzeln der Eigenwertgleichung (59) sind. Nunmehr entwickeln wir $\chi(z)$ nach diesen Eigenfunktionen

Hierbei

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial r} + H_1\right)_{r=R} = \gamma(z) \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial r} + H_2\right)_{r=R} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial z} + H_1\right)_{z=h} = 0 \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial z} + H_2\right)_{z=h} = 0$$

$$\left.\frac{\partial H_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

Für $H_2(r,z)$ erübrigt es sich, die Randbedingungen aufzuschreiben, da dieses stationäre Problem nur die Lösung $H_2(r,z) = 0$ haben kann, weil die rechten Seiten der Randbedingungen alle identisch Null sind. Das war übrigens von vornherein zu erwarten, denn in der eingangs aufgeschriebenen allgemeinen Lösung für $H(r,z,t)$ kommt ja $T_2(r,z)$ gar nicht mit vor.

Für $H_1(r,z)$ machen wir den Ansatz

$$H_1(r,z) = v_1(r)\,u_1(z)$$

und erhalten

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_1}{dr} - \kappa^2 v_1 = 0 \qquad \frac{d^2 u_1}{dz^2} + \kappa^2 u_1 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{dv_1}{dr} + v_1\right)_{r=R} = \gamma(z) \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_1}{dz} + u_1\right)_{z=h} = 0$$

$$\left.\frac{du_1}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

$u_1(z)$ haben wir bereits bei der Berechnung von $T_2(r,z,t)$ gefunden. Es war

$$u_{1n}(z) = \cos \mu_n z ,$$

wobei die μ_n die Wurzeln der Eigenwertgleichung (77) sind. Nunmehr entwickeln wir $\gamma(z)$ nach diesen Eigenfunktionen.

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \bar{k}_n z \quad ,$$

$$D_n = \frac{\int_0^h \chi(z) \cos \bar{k}_n z \, dz}{\int_0^h \cos^2 \bar{k}_n z \, dz} = \frac{2 \int_0^h \chi(z) \cos \bar{k}_n z \, dz}{h + \frac{\lambda}{\alpha} \sin^2 \bar{k}_n h}$$

und lösen das Randwertproblem für $v_1(r)$ unter der Voraussetzung $\chi(z) \equiv 1$.

Bezeichnen wir diese Lösung mit $\bar{v}_1(r)$, so ergibt sich

$$\bar{v}_1(r) = \frac{J_0(i\bar{k}r)}{\frac{\lambda}{\alpha} i\bar{k} J_1(i\bar{k}R) - J_0(i\bar{k}R)} \quad ; \quad i = \sqrt{-1} .$$

Damit ist $H_1(r,z)$ durch

$$H_1(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(i\bar{k}_n r)}{\frac{\lambda}{\alpha} i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) - J_0(i\bar{k}_n R)} \cdot D_n \cos \bar{k}_n z$$

bestimmt.

Die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe ist, wie man zeigen kann, gesichert.

Ganz entsprechend berechnen wir $H_2(r,z)$. Der Ansatz

$$H_2(r,z) = u_1(r) v_2(z)$$

führt auf

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + k^2 u_1 = 0 \qquad \frac{d^2 v_2}{dz^2} - k^2 v_2 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{du_1}{dr} + u_1 \right)_{r=R} = 0 \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{dv_2}{dz} + v_2 \right)_{z=h} = -\chi(h)$$

$$\left. \frac{dv_2}{dz} \right|_{z=0} = 0 .$$

Für $u_1(r)$ hatten wir bei der Bestimmung von $T_0(r,z,t)$ gefunden

$$u_{1m}(r) = J_0(k_m r) .$$

Die k_m sind die Wurzeln der Eigenwertgleichung (58).
Nun bilden wir

$$\chi(h) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{D}_m J_0(k_m r)$$

$$\bar{D}_m = \frac{\chi(h)\int_0^R r J_0(k_m r)\,dr}{\int_0^R r J_0^2(k_m r)\,dr} = \frac{2\chi(h)}{R k_m\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2 + 1\right] J_1(k_m R)}$$

und lösen die Randwertaufgabe für $v_2(z)$ mit $\chi(h) \equiv 1$.
Diese Lösung $\bar{v}_2(z)$ lautet

$$\bar{v}_2(z) = \frac{-\operatorname{Cof} kz}{\frac{\lambda}{\alpha}k \operatorname{Sin} kh + \operatorname{Cof} kh} .$$

Damit wird

$$H_2(r,z) = -2\chi(h)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(k_m r)}{R k_m\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right] J_1(k_m R)} \cdot \frac{\operatorname{Cof} k_m z}{\frac{\lambda}{\alpha}k_m \operatorname{Sin} k_m h + \operatorname{Cof} k_m h} .$$

Jetzt können wir schließlich nach (C) bzw. (27) die $G_v(r,z,t)$ berechnen. Es ist

$$\frac{\partial G_v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 G_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_v}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_v}{\partial z^2}\right) = 0 \;, \qquad G_v(r,z,0) = H_v(r,z)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_v}{\partial r} + G_v\right)_{r=R} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial G_v}{\partial z} + G_v\right)_{z=h} = 0 \qquad t > 0\;, \qquad v = 1,2$$

$$\left.\frac{\partial G_v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 .$$

Ein Vergleich mit der Aufgabe (37) [illegible] ergibt sofort

$$[illegible]$$

mit

$$[illegible]$$

Hier müssen man den Integral

$$[illegible]$$

auswerten.
Dazu verwenden wir die bekannte Relation [illegible]

$$[illegible]$$

die für zwei zylindrische Zylinderfunktionen [illegible] und [illegible] gilt. Für [illegible] ergibt sich dann

$$[illegible]$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt man übrigens sehr leicht durch Differentiation unter Berücksichtigung von

$$[illegible]$$

Also wird schließlich

$$[illegible]$$

Ein Vergleich mit der Aufgabe (57) für $T_0(r,z,t)$ ergibt sofort

$$G_1(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B^1_{m,n} J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\, e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)t}$$

mit

$$B^1_{m,n} = \frac{\int_0^R\int_0^h \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(i\bar{k}_n r)}{\frac{\lambda}{\alpha} i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) - J_0(i\bar{k}_n R)} D_n \cos\bar{k}_n z\right\} r J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\, dr\, dz}{\int_0^R\int_0^h r J_0^2(k_m r)\cos^2\bar{k}_n z\, dr\, dz}$$

$$= \frac{1}{\frac{\lambda}{\alpha} i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) - J_0(i\bar{k}_n R)} \cdot \frac{\int_0^R r J_0(i\bar{k}_n r) J_0(k_m r)\, dr}{\int_0^R r J_0^2(k_m r)\, dr} \cdot D_n \, .$$

Wir müssen nun das Integral

$$\int_0^R r J_0(i\bar{k}_n r) J_0(k_m r)\, dr$$

auswerten.

Dazu verwenden wir die bekannte Relation [15]

$$\int^r r Z_\nu(\beta r)\tilde{Z}_\nu(\tilde{\beta} r)\, dr = \frac{r\left\{\beta Z_{\nu+1}(\beta r)\tilde{Z}_\nu(\tilde{\beta} r) - \tilde{\beta} Z_\nu(\beta r)\tilde{Z}_{\nu+1}(\tilde{\beta} r)\right\}}{\beta^2 - \tilde{\beta}^2} ,$$

die für zwei beliebige Zylinderfunktionen $Z_\nu(\beta r)$ und $\tilde{Z}_\nu(\tilde{\beta} r)$ gilt.

Für $\nu = 0$, $\beta = i\bar{k}_n$, $\tilde{\beta} = k_m$ ergibt sich dann

$$\int^r r J_0(i\bar{k}_n r) J_0(k_m r)\, dr = \frac{-r\left\{i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n r) J_0(k_m r) - k_m J_0(i\bar{k}_n r) J_1(k_m r)\right\}}{k_m^2 + \bar{k}_n^2} .$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt man übrigens sehr leicht durch Differentiation unter Beachtung von

$$-\frac{\nu+1}{\beta r} Z_{\nu+1}(\beta r) + Z_\nu(\beta r) = Z'_{\nu+1}(\beta r) .$$

Also wird schließlich

$$B^1_{m,n} = \frac{D_n}{\frac{\lambda}{\alpha} i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) - J_0(i\bar{k}_n R)} \cdot \frac{-2\left[i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) J_0(k_m R) - k_m J_0(i\bar{k}_n R) J_1(k_m R)\right]}{R\left[k_m^2 + \bar{k}_n^2\right]\left[J_0^2(k_m R) + J_1^2(k_m R)\right]} .$$

Hierin ersetzen wir noch $\dot{J}_0(k_m R)$ durch $J_1(k_m R)$ mittels der Eigenwertgleichung (58) und erhalten

$$B^1_{m,n} = \frac{-2\,k_m D_n}{R\left[k_m^2 + \bar{k}_n^2\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2 + 1\right] J_1(k_m R)} \;.$$

Für $G_2(r,z,t)$ findet man ganz analog

$$G_2(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B^2_{m,n}\, J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\; e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)t}$$

mit

$$B^2_{m,n} = \frac{-2\chi(h)\displaystyle\int_0^R\int_0^h\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(k_m r)}{R k_m\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right]J_1(k_m R)}\cdot\frac{\operatorname{Cof} k_m z}{\frac{\lambda}{\alpha}k_m \operatorname{Sin} k_m h + \operatorname{Cof} k_m h}\right\} r\, J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\, dr\, dz}{\displaystyle\int_0^R\int_0^h r\, J_0^2(k_m r)\cos^2\bar{k}_n z\, dr\, dz}$$

$$= \frac{-2\chi(h)}{R k_m\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right]J_1(k_m R)}\cdot\frac{1}{\frac{\lambda}{\alpha}k_m \operatorname{Sin} k_m h + \operatorname{Cof} k_m h}\cdot\frac{\int_0^h \operatorname{Cof} k_m z\cos\bar{k}_n z\, dz}{\int_0^h \cos^2\bar{k}_n z\, dz} \;.$$

Werten wir die Integrale aus und vereinfachen das Ganze, indem wir $\cos(\bar{k}_n z)$ mit Hilfe der Eigenwertgleichung (59) beseitigen, so folgt

$$B^2_{m,n} = \frac{-4\chi(h)\,\bar{k}_n \sin\bar{k}_n h}{R k_m\left[k_m^2+\bar{k}_n^2\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right]J_1(k_m R)\left[h+\frac{\lambda}{\alpha}\sin^2\bar{k}_n h\right]} \;.$$

Nunmehr sind alle erforderlichen Größen bestimmt, und für $T(r,z,t)$ ergibt sich

$$T(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\, J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\; e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)t}$$

$$+\ \varphi(0)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^1_{m,n}+B^2_{m,n}\right)J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\; e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)t}$$

$$+\int_0^t \varphi'(\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^1_{m,n}+B^2_{m,n}\right)J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\; e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)(t-\tau)}\,d\tau$$

$$-\ \varphi(t)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n J_0(i\bar{k}_n r)\cos\bar{k}_n z}{\frac{\lambda}{\alpha}i\bar{k}_n J_1(i\bar{k}_n R) - J_0(i\bar{k}_n R)} - 2\chi(h)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(k_m r)\operatorname{Cof} k_m z}{R k_m\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right]J_1(k_m R)\left[\frac{\lambda}{\alpha}k_m \operatorname{Sin} k_m h + \operatorname{Cof} k_m h\right]}\right]$$

Hierin ersetzen wir dann [illegible] durch [illegible] und erhalten das
Eigenwertgleichung (30) und erhalten:

$$[illegible]$$

Für [illegible] findet man ganz analog

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Setzen wir die [illegible] ein, [illegible] des [illegible], indem wir [illegible] die [illegible] der [illegible], so folgt

$$[illegible]$$

Nunmehr sind die [illegible] bestimmt, und für [illegible] ergibt sich

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Dann wird die [illegible] und [illegible] die vorher berechneten Größen.
Diese Lösung beschreibt den Einschwingvorgang vollständig. Insbesondere erhält man für den Temperaturverlauf im Inneren des Körpers nach (7.1) den eingeengten Ausdruck

[illegible]

Wir erkennen an diesem Beispiel, welcher Lösungsweg ganz allgemein eingeschlagen werden muß, wenn die Randbedingungen die Form [illegible] haben. Ohne große Schwierigkeiten könnten [illegible] ähnliche Aufgaben [illegible] gelöst werden, [illegible] die Temperaturverteilung in der [illegible] eines [illegible], [illegible] die Form [illegible] [illegible] (7.1) [illegible] der jeweiligen Bedingung.
Natürlich muß man [illegible], daß die [illegible] besondere [illegible] haben. [illegible] in [illegible] Fällen [illegible] [illegible] [illegible].

Wir [illegible] das [illegible] Beispiel den Fall [illegible] [illegible].

[illegible] man die Koeffizienten [illegible], so [illegible] [illegible]

[illegible]

Dabei sind die $A_{m,n}$, $B^1_{m,n}$, $B^2_{m,n}$ und D_n die vorher berechneten Größen.
Diese Lösung beschreibt den Kühlvorgang vollständig. Insbesondere erhält man für den Temperaturverlauf im Inneren des Körpers nach (29b) den einfacheren Ausdruck

$$T(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\, e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)t}$$

$$-a^2\int_0^t \varphi(\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^1_{m,n}+B^2_{m,n}\right)J_0(k_m r)\cos\bar{k}_n z\,(k_m^2+\bar{k}_n^2)\,e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)(t-\tau)}\,d\tau .$$

Wir erkennen an diesem Beispiel, welcher Lösungsweg ganz allgemein eingeschlagen werden muß, wenn die Steuerfunktionen die Form $\chi_\nu(P)\cdot\varphi_\nu(t)$ haben. Ohne große Schwierigkeiten können jetzt ähnlich geartete Aufgaben gerechnet werden; etwa die Temperaturverteilung in der Wandung eines Schornsteins, der die Form eines Hohlzylinders hat, bei bekannter Temperatur $\chi(z)\cdot\varphi(t)$ des Mediums im Hohlraum und konstanter Temperatur der äußeren Umgebung.
Natürlich darf man nicht erwarten, daß die Ergebnisse immer eine besonders einfache Gestalt haben. Jedoch wird es in vielen Fällen genügen, wenn man nur wenige Glieder in den Reihen berücksichtigt, wodurch die Resultate zum Teil wesentlich handlicher werden.

Wir wollen nun aus unserem Ergebnis den Fall $\chi(z) = 1$; $\varphi(0) = T_a$ ableiten.

Bezeichnet man die Koeffizienten $B^1_{m,n}$, $B^2_{m,n}$ für $\chi(z) = 1$ mit $\bar{B}^1_{m,n}$, $\bar{B}^2_{m,n}$, so ergibt sich unmittelbar

$$\bar{B}^1_{m,n} = \frac{-4k_m \sin\bar{k}_n h}{R\bar{k}_n\left[k_m^2+\bar{k}_n^2\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha}k_m\right)^2+1\right]J_1(k_m R)\left[h+\frac{\lambda}{\alpha}\sin^2\bar{k}_n h\right]}$$

$$\bar{B}^2_{m,n} = \frac{-4\bar{k}_n \sin \bar{k}_n h}{R k_m \left[k_m^2 + \bar{k}_n^2\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha} k_m\right)^2 + 1\right] J_1(k_m R)\left[h + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 \bar{k}_n h\right]}$$

$$B_{m,n} = \bar{B}^1_{m,n} + \bar{B}^2_{m,n} = \frac{-4\sin \bar{k}_n h}{R k_m \bar{k}_n \left[\left(\frac{\lambda}{\alpha} k_m\right)^2 + 1\right] J_1(k_m R)\left[h + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 \bar{k}_n h\right]} \; .$$

Ein Vergleich mit den $A_{m,n}$, die sich nicht ändern, wenn wir $\chi(z) \equiv 1$ setzen, liefert sofort

$$B_{m,n} = -\frac{A_{m,n}}{T_a} \; .$$

Daher erhalten wir unmittelbar

$$G(r,z,t) = -\frac{T_0(r,z,t)}{T_a} \; .$$

Hieraus schließen wir, daß

$$H(r,z) = -1$$

ist, weil im Inneren des Zylinders

$$G(r,z,0) = -1$$

gilt.

Diese letzte Feststellung kann man durch die direkte Bestimmung von $H(r,z)$ bestätigen. In der Tat hat das Randwertproblem für $H(r,z)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial r} + H\right)_{r=R} = -1$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial z} + H\right)_{z=h} = -1$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

[illegible]

[illegible]

Zum Vergleich mit den A_{ik}, die wir früher gewonnen haben, wenn wir $f(z) = 1$ setzen, liefert sofort

$$\Delta_{ik} = \frac{A_{ik}}{I_k}$$

Daher erhalten wir unmittelbar

[illegible]

Hieraus schließen wir, daß

$$H(a) = -1$$

ist, weil im Innern des Zylinders

[illegible] $= -1$

gilt.

Diese letzte Feststellung kann man durch die direkte Bestimmung von $H(r,z)$ bestätigen. In der Tat muß [illegible] $H(r,z)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(\lambda\frac{\partial H}{\partial r} + H\right)_{r=a} = -1$$

$$\left(\lambda\frac{\partial H}{\partial z} + H\right)_{z=l} = -1$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

die Lösung $N(r,t) = -T_0$.

Damit ergibt sich als [illegible] $u(r,t) = T_0$ [illegible] mit (30a) [illegible]

$$u(r,t) = T_0 - \dots \text{[illegible]}$$

Aus der Lösungsformel [illegible] Vollständigkeit [illegible] Eindeutigkeit. Die Gültigkeit dieser Lösung [illegible] durch direktes Nachrechnen [illegible].

Bemerkt sei noch, daß A. T i c h o n o w [illegible] eine entsprechende [illegible] für das einseitig [illegible] Koordinaten [illegible] [8].

10.3. T e m p e r a t u r v e r t e i l u n g i n [illegible]

Es soll die Temperaturverteilung in einem Gebirgsmassiv [illegible] mit den Koordinaten x, y, z während des [illegible] bestimmt werden, wenn die [illegible] durch die Temperatur [illegible] gegeben ist (Abb. 7).

Zur Beschreibung der [illegible] die Temperatur des [illegible] beträgt. Für die [illegible] Wärme- und Leitfähigkeit [illegible] gilt [illegible] [7]

$$q = \lambda \, \mathrm{grad}\, t$$

[illegible], welche nur von der Zeit abhängig ist. [illegible] (5) [illegible].

die Lösung $H(r,z) = -1$.

Damit ergibt sich im Falle $\chi(z) \equiv 1$, $\varphi(0) = T_a$ in Übereinstimmung mit (50a) das einfache Resultat

$$T(r,z,t) = \varphi(t) - 4\int_0^t \varphi'(\tau) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \bar{k}_n h \, J_0(k_m r) \cos \bar{k}_n z}{R k_m \bar{k}_n \left[\left(\frac{\lambda}{\alpha} k_m\right)^2 + 1\right] J_1(k_m R)\left[h + \frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 \bar{k}_n h\right]} e^{-a^2(k_m^2+\bar{k}_n^2)(t-\tau)} d\tau,$$

was den Abkühlvorgang in aller Vollständigkeit beschreibt. Die Richtigkeit dieser Lösung bestätigt man durch direkte Herleitung aus I.3g.

Bemerkt sei noch, daß A. Kneschke ein ganz entsprechendes Ergebnis für die allseitig gesteuert gekühlte ebene Kreisplatte erhält [8].

b) Die Temperaturverteilung in einem Betonquader während des chemischen Abbindeprozesses

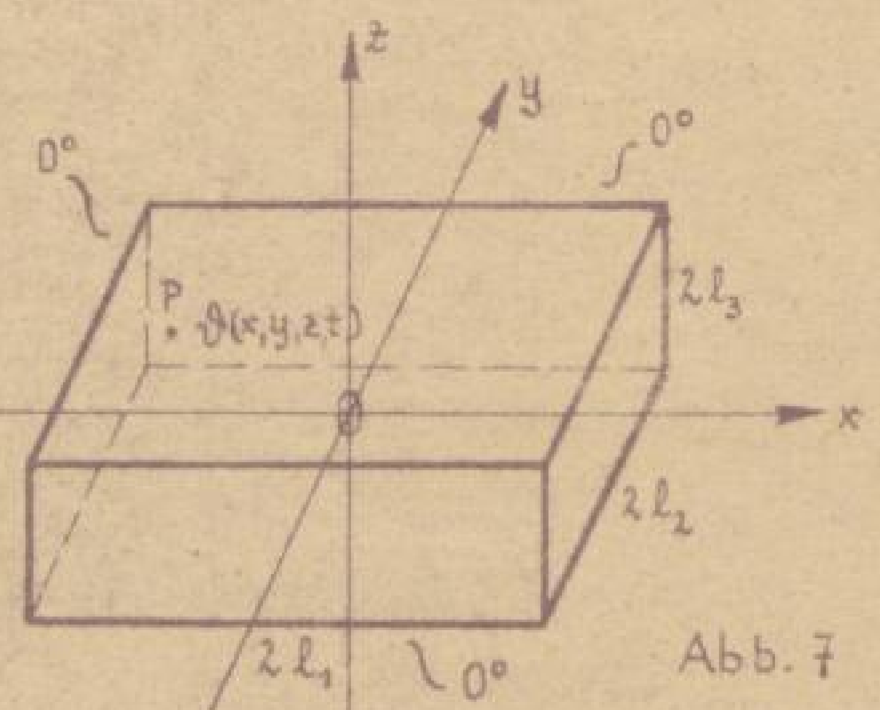


Abb. 7

Es soll die Temperaturverteilung in einem Betonquader mit den Kantenlängen $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$ während des chemischen Abbindeprozesses bestimmt werden, wenn die Anfangstemperatur T_a des Betons sowie die Temperatur des umgebenden Mediums konstant ist (Abb. 7).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Temperatur des umgebenden Mediums 0° beträgt. Für die je Volumen- und Zeiteinheit frei werdende Wärmemenge des Betons $W(x,y,z,t)$ wird die von K. Hirschfeld angegebene Näherungsfunktion [7]

$$W = W_{max} e^{-\frac{t}{t_0}}$$

verwendet, welche nur von der Zeit abhängig ist. W_{max} und t_0 sind hier nicht weiter interessierende Materialkonstanten. Es ist somit nach (6) folgende Aufgabe zu lösen:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)=\frac{W_{max}}{c\varrho}e^{-\frac{t}{t_0}}\ ;\qquad \vartheta(x,y,z,0)=T_a$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\vartheta\right)_{x=l_1}=0\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\vartheta\right)_{x=-l_1}=0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\vartheta\right)_{y=l_2}=0\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\vartheta\right)_{y=-l_2}=0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\vartheta\right)_{z=l_3}=0\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\vartheta\right)_{z=-l_3}=0\ .$$

Wir erkennen sofort, daß

$$\Omega(t)=-\frac{W_{max}}{c\varrho}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}$$

ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung ist. Entsprechend (7) liefert der Ansatz

$$\vartheta(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)-\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}$$

mit

$$\bar{W}=\frac{W_{max}}{c\varrho}$$

das gesteuerte Wärmeleitproblem

$$\frac{\partial T}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=0\ ;\qquad T(x,y,z,0)=T_a+\bar{W}t_0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}+T\right)_{x=l_1}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}+T\right)_{x=-l_1}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial y}+T\right)_{y=l_2}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial y}+T\right)_{y=-l_2}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial z}+T\right)_{z=l_3}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}\qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial z}+T\right)_{z=-l_3}=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}\ .$$

Die Aufgabe ist vom Typ I.3f. Ihre allgemeine Lösung lautet daher nach (49a) mit $\varphi(t)=\bar{W}t_0e^{-\frac{t}{t_0}}$

$$T(x,y,z,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu u_\mu(x,y,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 t} + \bar{W} t_0 \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(x,y,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 t}$$

$$- \bar{W} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{t_0}} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu u_\mu(x,y,z) e^{-a^2\delta_\mu^2 (t-\tau)} d\tau + \bar{W} t_0 e^{-\frac{t}{t_0}} .$$

Für $T_0(x,y,z,t)$ machen wir den Ansatz

$$T_0(x,y,z,t) = u_1(x) u_2(y) u_3(z) e^{-a^2\delta^2 t}$$

und erhalten

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + k^2 u_1 = 0 \qquad \frac{d^2u_2}{dy^2} + \bar{k}^2 u_2 = 0 \qquad \frac{d^2u_3}{dz^2} + \bar{\bar{k}}^2 u_3 = 0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_1}{dx} + u_1\right)_{x=\ell_1} = 0 \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_2}{dy} + u_2\right)_{y=\ell_2} = 0 \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_3}{dz} + u_3\right)_{z=\ell_3} = 0$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_1}{dx} + u_1\right)_{x=-\ell_1} = 0 \qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_2}{dy} + u_2\right)_{y=-\ell_2} = 0 \qquad \left(-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{du_3}{dz} + u_3\right)_{z=-\ell_3} = 0$$

$$\delta^2 = k^2 + \bar{k}^2 + \bar{\bar{k}}^2 .$$

Bemerkt sei, daß wir bei diesem Beispiel den Ursprung des Koordinatensystems aus Zweckmäßigkeitsgründen in den Quadermittelpunkt gelegt haben. Für $T_0(x,y,z,t)$ und $G(x,y,z,t)$ ergeben sich dann nämlich aus Symmetriegründen reine cos-Reihen.

Beachten wir diese letzte Bemerkung, so folgt ohne weiteres

$$u_{1i}(x) = \cos k_i x$$

$$u_{2m}(y) = \cos \bar{k}_m y$$

$$u_{3n}(z) = \cos \bar{\bar{k}}_n z .$$

Dabei sind die k_i, $\bar{k}_m$, $\bar{\bar{k}}_n$ die Wurzeln der Eigenwertgleichungen

$$\operatorname{tg} k\ell_1 = \frac{\alpha \ell_1}{\lambda} \cdot \frac{1}{k\ell_1}$$

$$\operatorname{tg}\bar{k}l_2 = \frac{\alpha l_2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\bar{k}l_2}$$

$$\operatorname{tg}\bar{\bar{k}}l_3 = \frac{\alpha l_3}{\lambda}\cdot\frac{1}{\bar{\bar{k}}l_3} .$$

Nunmehr ergibt sich

$$T_o(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n}\cos k_i x \cos\bar{k}_m y \cos\bar{\bar{k}}_n z\, e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t}$$

mit

$$A_{i,m,n} = \frac{(T_a+\bar{W}t_o)\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_3}^{l_3}\cos k_i x\cos\bar{k}_m y\cos\bar{\bar{k}}_n z\,dx\,dy\,dz}{\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_3}^{l_3}\cos^2 k_i x\cos^2\bar{k}_m y\cos^2\bar{\bar{k}}_n z\,dx\,dy\,dz}$$

$$= \frac{8(T_a+\bar{W}t_o)\sin k_i l_1\sin\bar{k}_m l_2\sin\bar{\bar{k}}_n l_3}{k_i\bar{k}_m\bar{\bar{k}}_n\left(l_1+\frac{\lambda}{\alpha}\sin^2 k_i l_1\right)\left(l_2+\frac{\lambda}{\alpha}\sin^2\bar{k}_m l_2\right)\left(l_3+\frac{\lambda}{\alpha}\sin^2\bar{\bar{k}}_n l_3\right)} .$$

Da nach I.3f

$$H(x,y,z) = -1$$

ist, erhalten wir sofort entsprechend (B) bzw. (48)

$$G(x,y,z,t) = \frac{-1}{T_a+\bar{W}t_o}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n}\cos k_i x\cos\bar{k}_m y\cos\bar{\bar{k}}_n z\, e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t} .$$

Für T(x,y,z,t) ergibt sich dann, wenn wir die einfache Integration gleich ausführen

$$T(x,y,z,t) = \left(1-\frac{\bar{W}t_o}{T_a+\bar{W}t_o}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n}\cos k_i x\cos\bar{k}_m y\cos\bar{\bar{k}}_n z\, e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t}$$

$$+\frac{\bar{W}t_o}{T_a+\bar{W}t_o}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n}\cos k_i x\cos\bar{k}_m y\cos\bar{\bar{k}}_n z\cdot\frac{e^{-\frac{t}{t_o}}-e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t}}{a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t_o-1}+\bar{W}t_o e^{-\frac{t}{t_o}} .$$

Damit wird schließlich

$$\vartheta(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n} \cos k_i x \cos \bar{k}_m y \cos \bar{\bar{k}}_n z \, e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t}$$

$$+ \frac{\bar{W} t_0}{T_a + \bar{W} t_0} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{i,m,n} \cos k_i x \cos \bar{k}_m y \cos \bar{\bar{k}}_n z \cdot \frac{e^{-\frac{t}{t_0}} - t_0 a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2) e^{-a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2)t}}{t_0 a^2(k_i^2+\bar{k}_m^2+\bar{\bar{k}}_n^2) - 1} .$$

Das ist aber, wie man leicht nachprüft, die gesuchte Lösung unseres Problems. Aus ihr läßt sich ohne Schwierigkeiten die Temperaturverteilung $\vartheta(x,t)$ für die durch die Ebenen $x = \pm l_1$ begrenzte Platte ableiten. Wir finden

$$\vartheta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i x \, e^{-a^2 k_i^2 t}$$

$$+ \frac{\bar{W} t_0}{T_a + \bar{W} t_0} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i x \, \frac{e^{-\frac{t}{t_0}} - t_0 a^2 k_i^2 e^{-a^2 k_i^2 t}}{a^2 k_i^2 t_0 - 1}$$

mit

$$A_i = \frac{2(T_a + \bar{W} t_0) \sin k_i l_1}{k_i \left(l_1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sin^2 k_i l_1\right)} .$$

Das eben behandelte Beispiel zeigt, daß sich das dreidimensionale Problem mit Hilfe unserer allgemeinen Theorie genau so einfach lösen läßt wie das eindimensionale. Es liefert für den Praktiker handliche und numerisch gut auswertbare Ergebnisse. Darin liegt der große Vorteil gegenüber dem von K. Hirschfeld angegebenen Lösungsansatz [7]. Hirschfeld beschränkt sich deshalb auch nur auf den eindimensionalen Fall, weil, wie er sagt, die Integration des dreidimensionalen Problems einen praktisch nicht zu bewältigenden Aufwand an Rechnung erfordere.

Erwähnt sei noch die Dissertation von W. Schwaderer [11], in der das gleiche Problem für die Vollkugel und den Würfel nach einer von F. Tölke vorgeschlagenen Methode gelöst wird. Ohne näher auf die Arbeit einzugehen, bemerken wir, daß die dort zur Lösung verwendeten Integrale, deren Integranden die Thetafunktionen enthalten, zum Teil nur näherungsweise berechnet werden können. Das ist natürlich ein Nachteil, abgesehen davon, daß dem Praktiker die Thetafunktionen weniger geläufig sein dürften als die trigonometrischen. Darüber hinaus können mittels unserer Theorie viel allgemeinere, technisch wichtige Aufgaben behandelt werden, wie etwa die eben gelöste, unter Berücksichtigung einer zeitlich und örtlich veränderlichen Temperatur des umgebenden Mediums. Eine solche Verallgemeinerung des Lösungsweges von F. T ö l k e wird kaum möglich sein.

Literaturverzeichnis

[1] Carslaw, H. S., Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, Macmillan and Co., London 1921

[2] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Interscience Publishers, New York 1953, Chap. V

[3] Duhamel, J.M.C., Sur la Méthode générale relative au Mouvement de la chaleur dans les Corps solides plongés dans des milieux dont la température varie avec le temps, J. éc. polytech., Cah. 22, Paris 1833

[4] Fourier, J. B., Theorie analytique de la chaleur, Paris 1822

[5] Gröber, Erk, Grigull, Wärmeübertragung, Springer-Verlag 1955

[6] Gröber, H., Temperaturverlauf und Wärmeströmungen in periodisch erwärmten Körpern, VDI-Forschungsheft 300, 1928

[7] Hirschfeld, K., Die Temperaturverteilung im Beton, Springer-Verlag 1948

[8] Kneschke, A., Die zeitlich veränderliche Abkühlung von ebenen Kreisplatten, Jenaer Jahrbuch 1951

[9] Kneschke, A., Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern, Ing.-Arch. Bd. XXIV 1956

[10] S c h a c k , A., Der industrielle Wärmeübergang, Verlag Stahleisen M.B.H. Düsseldorf 1953

[11] S c h w a d e r e r , W., Aufheizungs- und Abkühlvorgänge in Betonkörpern, Diss. Techn. Hochschule Stuttgart 1955

[12] S o m m e r f e l d , A., Partielle Differentialgleichungen der Physik, Akadem. Verlagsgesellschaft Leipzig 1948

[13] T o l s t o w , G. P., Fourierreihen Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1955

[14] W a g n e r , C., Wärmeleitungsprobleme für Systeme mit beheizten Rohren und Hohlkugeln in einer unendlich ausgedehnten Umgebung, Ing.-Arch. Bd. XIV 1944

[15] W a t s o n , G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press 1952