Aufbereitung IV

Theorie der Aufbereitung

[illegible] begonnen 1879 10/12

zu der Mitte der 33. Vorlesung.

beendet 8/1 80.

begonnen 1880 7/12, mit der 38. Vorlesung

beendet 1881 9/1 mit der 49. Vorlesung

1882 1/2 – 17/2

begonnen 1883 7 Febr – 21 [illegible]

1884 1 Febr. [illegible]

1886 10 Febr – 26 Febr. 10 Vorlesungen

1887 2 März – 17 März 3. 9

1888 16 Febr – 9. März 11 [illegible]

1889 13 Febr. 27 Febr. 9 [illegible]

1890 12 Febr –

1891 16 [illegible]

Erzaufbereitung.

Bemerkungen über den freien Fall der Mineralkörper im Wasser mit Rücksicht auf Rundt's Stromsetzmaschine v. Jordan. Preuß. Z. 14. p. 197.

Für Wassergeschwindigkeit, Klärapparate, aus welchen Folgendes erwähnt sei:

Ist σ = Dichtigk. des Körpers, V sein Volumen, σV = Gewicht
γ = " " des flüss. Mediums.

So ist die Schwere im Medium $(\sigma-\gamma)V$

und der Widerstand des Med. (Weisb. I. § 465)

$$\frac{\zeta v^2 F\gamma}{2g}$$

Also treibt d. Körper mit einer Kraft

$$P = (\sigma-\gamma)V - \frac{\zeta v^2 F\gamma}{2g}$$

also $p : g = \left[(\sigma-\gamma)V - \frac{\zeta v^2 F\gamma}{2g}\right] : \sigma V$

$$p = \frac{\sigma-\gamma}{\sigma}g - \frac{\zeta v^2 F\gamma}{2\sigma V}$$

$p = 0$ für

$$\frac{\sigma-\gamma}{\sigma}g - \frac{\zeta v^2 F\gamma}{2\sigma V}$$

woraus $v = \sqrt{\frac{2g(\sigma-\gamma)V}{\zeta\gamma F}}$ dieser Werth

stellt sich bald bei den aufzubereitenden Massen ein.

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{\sigma-\gamma}{\sigma} g - \frac{\rho v^2 F \gamma}{2\sigma V}$$

$$\frac{\sigma-\gamma}{\sigma} g = \alpha^2 \quad ; \quad \frac{\rho F \gamma}{2\sigma V} = \beta^2 \quad \text{giebt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha^2 - \beta^2 v^2$$

$$t = \int \frac{dv}{\alpha^2 - \beta^2 v^2} + C = \frac{1}{2\alpha\beta} \log n. \frac{\alpha + \beta v}{\alpha - \beta v}$$

$$\therefore v = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{e^{2\alpha\beta t} - 1}{e^{2\alpha\beta t} + 1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{2g(\sigma-\gamma)V}{\rho\gamma F}}$$ d. i. die sogenannte bestimmte constante Geschwindigkeit.

Der Bruch $\frac{e^{2\alpha\beta t} - 1}{e^{2\alpha\beta t} + 1}$ nähert sich aber bei den Größen u. Zeiten, die bei diesen Fällen in Betracht kommen, sehr bald der Einheit

z. B. $\rho = 0,6$
$F = \frac{\pi d^2}{4}$
$V = \frac{\pi}{6} d^3$ } bei d. Kugel
$\frac{F}{V} = \frac{3}{2} d$ ∴ $t = 1, \frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{3}$ Sek
$d = \frac{1}{12}$ Fuß

ist der Bruch $= 0,999$
$0,976$
$0,900$ also schon in $\frac{1}{3}$ Sek. ziemlich constant

für kleinere, runde Körner ergeben Platten ist das Verhältniss verhältnissmäßiger

d. $G = s\gamma$ (s = sp. G.)

so ist die constante Fallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{2g(s-1)V}{\zeta F}}$$

Hieraus leitet der Verfasser Folgerungen für die Setzarb. ab.

Hundt's Bemerkung ist besser Bergw. Hütt. Z. 24. p. 289.

Sparre'sche Untersuchungen u. eigene Ausführungen. aus Rittinger'scher Stoß.

Bergwerksfreund. 21. Band p. 370.

I. Vom Fall fester Körper im ruhenden Wasser.

ε_0 = sp. G. eines im Wasser fallenden Körpers

V = sein Volumen.

γ = Dichte des Wassers

Die abwärts treibende Kraft ist

$$P_1 = (\varepsilon_0 - 1) V\gamma$$

Der Reibungswiderstand

$$P_2 = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$$

Die beschleunigende Kraft $P_3 = P_1 - P_2 = (\varepsilon - 1)V\gamma - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$

Die Masse des Luftschiffkörpers ist

$$M = \frac{V\varepsilon\gamma}{g} \quad \text{also die Acceleration}$$

$$p = \frac{P}{M} = \frac{(\varepsilon_0 - 1)V\gamma - \zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma}{V\varepsilon_0\gamma}\,g$$

$$= \frac{(\varepsilon_0-1)V\gamma}{V\varepsilon_0\gamma}\,g - \frac{\zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma}{V\varepsilon\gamma}\,g$$

Für $p = 0$ ist v constant.

wenn $\frac{(\varepsilon-1)V\gamma}{V\varepsilon\gamma}\,g = \frac{\zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma}{V\varepsilon\gamma}\,g$

$$= \frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\,g - \frac{\zeta F}{2V\varepsilon_0}\,v^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\,g \cdot \frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_0-1)g}\left[\frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\,g - \frac{\zeta F v^2}{2V\varepsilon_0}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0-1}{\varepsilon_0}\,g\left[1 - \frac{\zeta F}{2g(\varepsilon_0-1)V}\,v^2\right]$$

$$p = A\left[1 - Bv^2\right]$$

$$\frac{dv}{dt} = p \qquad dv = p\,dt\,, \quad dt = \frac{dv}{p}$$

$$t = \int\frac{dv}{A\left[1 - Bv^2\right]} = \frac{1}{A}\int\frac{dv}{1 - Bv^2}$$

$$Bv^2 = x^2\,, \quad \sqrt{B}\,v = x$$

$$\sqrt{B}\,dv = dx \quad \text{Jetzt}$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{B}}$$

$$t = \frac{1}{A\sqrt{B}} \int \frac{dx}{1-x^2} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

$$t = \frac{1}{A\sqrt{B}} \left[\tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} \right]$$

$$= \frac{1}{A\sqrt{B}} \left[\tfrac{1}{2} \ln(1+x) - \tfrac{1}{2} \ln(1-x) \right] + C$$

$$= \frac{1}{A\sqrt{B}}\, \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1+x}\right) + C.$$

$$= \frac{1}{2A\sqrt{B}}\, \cancel{\tfrac{1}{2}} \ln \frac{1+v\sqrt{B}}{1-v\sqrt{B}} + C$$

für $v=0$ ist $t=0$
folglich $C=0$.

$$2A\sqrt{B} = \mu \quad \frac{1}{\sqrt{B}} = \beta$$

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1+\frac{v}{\beta}}{1+\frac{v}{\beta}} \qquad e^{\mu t} = \frac{1+\frac{v}{\beta}}{1-\frac{v}{\beta}}$$

$$e^{\mu t} - e^{\mu t}\frac{v}{\beta} = 1 + \frac{v}{\beta}$$

$$e^{\mu t} - 1 = e^{\mu t}\frac{v}{\beta} + \frac{v}{\beta}$$

$$\frac{F}{V} = \frac{3}{2d}$$

$$\frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\,\beta = v \text{ wo } \mu = \sqrt{\frac{2g\varsigma(\varepsilon_0-1)F}{\varepsilon_0^2 V}} \qquad \mu = \sqrt{\frac{3g\varsigma(\varepsilon_0-1)}{\varepsilon^2 d}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0-1)Vg}{\varsigma F}}$$

Hieraus ermittelt sich der Weg:

$$ds = v\,dt$$

$$s = \int v\,dt = \int \frac{e^{\mu_1 t} - 1}{e^{\mu_1 t} + 1}\,\beta\,dt$$

Dividirt man: $e^{\mu_1 t} + 1 \,/\, e^{\mu_1 t} - 1 \,/\, 1$, so

$$\frac{e^{\mu_1 t} + 1}{-2}$$

erhält man $1 + - \dfrac{2}{e^{\mu_1 t} + 1}$ also

$$s = \int \beta\,dt - 2\beta \int \frac{1}{e^{\mu_1 t} + 1}\,dt$$

$$e^{\mu_1 t} + 1 = z$$

$$e^{\mu_1 t} = z - 1 \qquad \mu_1 t = \ln(z-1)$$

$$t = \frac{1}{\mu_1} \ln(z-1)$$

$$dt = \frac{1}{\mu_1}\,\frac{dz}{z-1}$$

$$s = \frac{\beta}{\mu_1} \int \frac{dz}{z-1} - \frac{2\beta}{\mu_1} \int \frac{dz}{z(z-1)}$$

Der Ausdruck $\dfrac{1}{z(z-1)}$ löst sich nach der Methode der unbestimmten Coeff. auf, wie folgt:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$; multipl. mit $z(z-1)$

giebt $1 = A(z-1) + Bz$

$$1 = Az + Bz - A$$

$1 = -A$ od. $A = -1$ u. $A + B = 0$

$$-1 + B = 0$$

$$B = +1$$

also $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)}$, also

$$s = -\frac{\beta}{\mu_1}\int\frac{dz}{z-1} + \frac{2\beta}{\mu_1}\int\frac{dz}{z} - \frac{2\beta}{\mu_1}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$s = \frac{\beta}{\mu_1}\ln(z-1) + \frac{2\beta}{\mu_1}\ln z - \frac{2\beta}{\mu_1}\ln(z-1) + C$$

$$s = \frac{\beta}{\mu_1}\ln z^2 - \frac{\beta}{\mu_1}\ln(z-1) + C$$

$$s = \frac{\beta}{\mu_1}\ln\frac{z^2}{z-1} + C.$$

Nun war $z = e^{\mu_1 t} + 1$

$z - 1 = e^{\mu_1 t}$ also

$$s = \frac{\beta}{\mu_1}\ln.\frac{(e^{\mu_1 t} + 1)^2}{e^{\mu_1 t}} + C.$$

Ist nun im Anfange der Zeit t noch kein Raum durchfallungszeit für $t=0$ auch $s=0$ also

$$s = \frac{\beta}{\mu} l\left(\frac{e^{0}+1}{e^{0}}\right)^{2} + C$$

$$= \frac{\beta}{\mu} \ln 4 + C \quad \text{also} \quad C = -\frac{\beta}{\mu}\ln 4$$

also

$$s = \frac{\beta}{\mu} \ln \frac{\left(e^{\mu t}+1\right)^{2}}{e^{\mu t}} - \frac{\beta}{\mu}\ln 4$$

$$\boxed{s = \frac{\beta}{\mu} \ln \frac{\left(e^{\mu t}+1\right)^{2}}{4e^{\mu t}}}$$

darin $\beta = \sqrt{\dfrac{2(\varepsilon_0 - 1)Vg}{\varsigma \cdot F}}$

" $\mu = \sqrt{\dfrac{2g\varsigma(\varepsilon_0-1)F}{\varepsilon_0^{2}V}}$ $\Big\}$ ~~liefert $\frac{\beta}{\mu} =$~~

dies $\dfrac{\beta}{\mu} = \sqrt{\dfrac{\cancel{2}\cancel{(\varepsilon_0-1)}Vg}{\varsigma F} \cdot \dfrac{\varepsilon_0^{2}V}{\cancel{2g}\varsigma\cancel{(\varepsilon_0-1)}F}}$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0^{2}V^{2}}{\varsigma^{2}F^{2}}} = \frac{\varepsilon_0 V}{\varsigma F} \quad \text{u. daher}$$

$$s = \frac{\varepsilon_0 V}{\varsigma F} \cdot \ln \left\{ \frac{\left[e^{t \cdot \sqrt{\frac{2g\varsigma(\varepsilon_0-1)F}{\varepsilon_0^{2}V}}} + 1 \right]^{2}}{4e^{t \cdot \sqrt{\frac{2g\varsigma(\varepsilon_0-1)F}{\varepsilon_0^{2}V}}}} \right\}$$

Discussion I, der Formel für v

Die Geschwindigkeit $v = \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\beta$

ist ein Maximum für $\beta = \frac{dv}{dt} = 0$

Nun war aber $p = A[1 - Bv^2]$; also

$$A[1-Bv^2] = 0 \quad \text{giebt}$$

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{B}} = \beta = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0-1)Vg}{\zeta F}}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0-1)Vg}{\zeta F}}$$

Setzt man diesen Werth in

$$t = \frac{1}{\mu}\ln\frac{1+\frac{v}{\beta}}{1-\frac{v}{\beta}}$$ so erhält man

wegen $v_m = v = \beta$

$F = \frac{\pi d^2}{4}$, $V = \frac{\pi d^3}{6}$

$$t = \frac{1}{\mu}\ln\frac{1+1}{1-1} = \frac{1}{\mu}\ln\frac{2}{0} = \infty$$

d.h. die Zeit innerhalb welcher die Geschwindigkeit maximum erreicht wird, ist ∞ groß, indessen ist die Abnahme der Acceleration so groß, daß schon bald ein der gleichen beinahe ganz naher Werth erreicht wird.

Andere Betrachtung: Diese Geschwindigkeit wird ein Maximum

1) für $t = \infty$
2) für $\mu = \infty$

In beiden Fällen verschwindet ± 1 gegen den großen Werth von $e^{\mu t}$ und wird $\frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1} = 1$ also $v = \beta$

Unbegrenzt wird $\mu = \infty$ für $d = 0$, denn wie früher [illegible] $\mu = \sqrt{\frac{2g\zeta(\varepsilon_0-1)F}{\varepsilon_0^2 V}}$ ersichtlich ist, wenn man die Kugel gestaltige Körper [illegible] berücksichtigt $\frac{F}{V} = \frac{3}{2d}$ also

$$\mu = \sqrt{\frac{3g\zeta(\varepsilon_0-1)}{\varepsilon_0^2 d}}$$

und dies giebt für $d = 0$

$$\mu = \sqrt{\frac{\cdots}{0}} = \infty$$

für Körper von kleinem Durchmesser wird also der Geschwindigkeitsmaximum schon in der kürzesten Zeit [illegible], d.h. schon im Anfange vorhanden.

Für eine kugelförmiges Korn ist

$$V = \frac{\pi d^3}{6} \text{ u. } F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ also}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0 - 1)\frac{\pi d^3}{6}}{\zeta \cdot \frac{\pi d^2}{4}}\, g} = \sqrt{\frac{4(\varepsilon_0 - 1) d g}{3\zeta}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(\varepsilon_0 - 1) d g}{3\zeta}}$$

$$= 4{,}676 \sqrt{d(\varepsilon_0 - 1)} \; ^{*)}$$

(nach Rittinger $v_m = 5{,}11 \sqrt{d(\varepsilon_0 - 1)}$ pag 182 für die Meter!)

Für 1 Bleiglanzkugel von 2 Millimeter Durchmesser

$\varepsilon = \cancel{4}7{,}5$, $\zeta = 0{,}6$ u. $g = 9{,}81^m$ ist daher die

Maximalgeschw. im Wasser

$$v_m = 2\sqrt{\frac{(7{,}5 - 1)\, 2 \cdot 9810}{3 \cdot 0{,}6}} = 532 \text{ Millim.}$$

Für die drei Zeiten $t_1\ t_2\ t_3 = 0{,}1;\ 0{,}2\ 0{,}3$ Sek.

entsprech. Geschwindigkeit u. Wege hat man

die Formeln

$$v = \frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\,\beta$$

$$\text{u. } s = \frac{\varepsilon_0 V}{\zeta F} \ln \frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}$$

$$v = \alpha \sqrt{d(\varepsilon - 1)}$$

$$s = \frac{\beta}{\mu} \ln \frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}$$

*) im Meter für $\zeta = 0{,}6$, aber (kann) gegen bei Rittinger $v_m = 5{,}11\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ mit diesem $\zeta = 0{,}5$ (Rittinger) nimmt.

Für d i. preuß. Fuß ($g = 31{,}25'$) u. $\zeta = 0{,}6$ ist

$v = 8{,}333\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ Fuß pr.

Ebenso für d in preuß. Linien ist $v = 8{,}333\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ Zoll pr.

od. noch genauer $v = 8{,}3332\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ Zoll pr.

[illegible]

Dezore hat ein Beispiel berechnet für 1 Bleiglanzkorn in Kugelform, bei dem $d = 2$ Linien gr.

$\varepsilon_0 = 7{,}5$, $\varepsilon = 0{,}6$ u. $g = 31{,}25'$ $\gamma = 66$ ~~[illegible]~~ u.

erhält

t	v	s	$s_n - s_{n-1}$
0,1 Sek.	19,34172	1,22557	
0,2 "	21,15259	3,28954	2,06397
0,3 "	21,24152	5,41121	2,12168
0,4 "	21,24570	7,53567	2,12446
∞	21,24592	∞	∞

} Kr. Zahlen.

Man ersieht hieraus, daß die Maximalgeschwindigkeit schon in den ersten Zehnteln der ersten Sek. erreicht wird. Dieselbe tritt noch schneller ein, wenn die Kugel schon mit einer gewissen Geschwindigkeit c an der Wasseroberfläche ankommt, man hat dann in die Gleichung

$$t = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln . \frac{1 + v\sqrt{B}}{1 - v\sqrt{B}} + C$$

für $t = 0$ $v = c$ zu setzen, und erhält

$$0 = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln . \frac{1 + c\sqrt{B}}{1 - c\sqrt{B}} + C$$

Diese Zeilen ist nicht zu [illegible]!

$$t = \frac{1}{2A\sqrt{B}}\left[\ln.\frac{1+v\sqrt{B}}{1-v\sqrt{B}} - \ln\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}\right]$$

Hieraus entw. sich v:

$$e^{2A\sqrt{B}t} = \frac{\left(\frac{1+v\sqrt{B}}{1-v\sqrt{B}}\right)}{\left(\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}\right)}$$

$$\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}\cdot e^{2A\sqrt{B}t} = \frac{1+v\sqrt{B}}{1-v\sqrt{B}}$$

Setzen wir

$$2A\sqrt{B} = \mu$$

$$\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}} = \gamma \quad \text{u} \quad \frac{1}{\sqrt{B}} = \beta$$

$$\gamma e^{\mu t} = \frac{(1+\frac{v}{\beta})}{(1-\frac{v}{\beta})}$$

$$\gamma e^{\mu t} - \frac{v}{\beta}\gamma e^{\mu t} = 1 + \frac{v}{\beta}$$

$$\gamma e^{\mu t} - 1 = \frac{v}{\beta}\gamma e^{\mu t} + \frac{v}{\beta}$$

$$= v\,\frac{\gamma e^{\mu t}+1}{\beta} \quad \text{also}$$

$$v = \frac{\gamma e^{\mu t} - 1}{\gamma e^{\mu t}+1}\beta$$ also bloß durch

den Coëff. γ an der vorigen Formel für v unterschied der Werth $\frac{\sqrt{e^{ut}}-1}{\sqrt{e^{ut}}+1}$ nähert sich um so mehr

der Einheit, je größer t wird, ist für $t=\infty$ $=1$

also dann $v_m = \beta = \frac{1}{\sqrt{B}} = \sqrt{\cancel{\frac{2g\zeta(\varepsilon_0-1)\delta}{\varepsilon_0^2 \vartheta}}\,\vartheta}$ $\sqrt{\frac{2g(\varepsilon_0-1)\vartheta}{\zeta F}}$

wie im ersten Falle, so daß also der fallende Körper im Wasser derselben Maximalgeschw. entgegen eilt, möge er mit einer Anfangsgeschwindigkeit in dasselbe eintreten, oder nicht.

Setzen wir in der Formel

$$v = \frac{\sqrt{e^{ut}}-1}{\sqrt{e^{ut}}+1}\beta$$ den Werth für $\sqrt{\ }$, so erhalten wir

$$v = \frac{\left(\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}\right)e^{ut}-1}{\left(\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}\right)e^{ut}+1}\beta$$

und setzen $t=0$, gibt $e^{ut}=1$, also

$$v = \frac{\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}-1}{\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}+1}\beta$$

$$v = \frac{\cancel{1}+c\sqrt{B}-\cancel{1}+c\sqrt{B}}{1+\cancel{c\sqrt{B}}+1-\cancel{c\sqrt{B}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{B}}$$

$$v = \frac{2c\sqrt{B}}{2\sqrt{B}} = c$$ die voraus gesetzte Anfangsgeschwindigkeit.

Setzen wir hingegen in unserer [illegible] Formel $1 = c\sqrt{B}$

so $c = \frac{1}{\sqrt{B}} = \beta$

so ist die Anfangsgeschwindigkeit [illegible] gleich der Maximalgeschw. [illegible] $\frac{1}{2g}$ die Höhe aus welcher der Körper herabfallen [illegible], um diese Geschw. zu erreichen.

Da nun die Terminalgeschwindigkeit sehr rasch eintritt, können wir sie ohne merklichen Fehler als vom Anfang vorhanden ansehen u. daher schreiben

$$s = vt = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_0-1)Vg}{\varsigma F}}\,.\,t$$

u. speziell für Kugeln:

$$s = 2\sqrt{g\frac{(\varepsilon_0-1)d}{3\varsigma}}\,.\,t = vt$$

und für eine Kugel mit anderem $s, \varepsilon\ d$ u. t

$$s_1 = 2\sqrt{g\frac{(\varepsilon_1-1)}{3\varsigma}d_1}\ t_1 = v_1 t_1$$

daher wir hierin $= \propto \sqrt{(\varepsilon-1)\,\partial}\ t$

1, Gleiche Stoffe

1, $t=t_1$ u. $\varepsilon=\varepsilon_1$

1, $t=t_1$ u. $\varepsilon_0=\varepsilon_1$, so erhalten wir

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d_1}} = \frac{v}{v_1}$$

d. h. bei Kugeln von gleichem Stoff verhalten sich die bei gleichen Zeiten die Wege u. die Geschwindigkeit wie die Quadratwurzeln aus den Durchmessern.

2, Gleiche Größe

$t=t_1$ u. $\partial=\partial_1$

2, $t=t_1$ u. $\partial=\partial_1$

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0-1}}{\sqrt{\varepsilon_1-1}} = \frac{v}{v_1}$$

d. h. bei Kugeln von gleicher Größe verhalten sich

ε

[illegible]

d in Millim.	Gold. $\varepsilon = 19$	Bleiglanz $\varepsilon = 7{,}5$	Blende $\varepsilon = 4{,}0$	Quarz $\varepsilon = 2{,}6$	Steinkohle $\varepsilon = 1{,}3$
16	2,524	1,513	1,034	0,752	0,329
8	1,786	1,072	0,752	0,531	0,235
4	1,269	0,752	0,517	0,376	0,165
2	0,893	0,536	0,367	0,268	0,115
1	0,630	0,376	0,259	0,188	0,080
0,5	0,447	0,268	0,188	0,131	0,056
0,25	0,315	0,188	0,127	0,094	0,040
0,125	0,223	0,132	0,089	0,066	0,028

Meter Maximalgeschw.

Berechnet nach der Formel $v = 4{,}7\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$

Hauptresultate

$$v = \frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1} \beta$$

$$s = \frac{\beta}{\mu} \cdot \ln \frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{3 g \zeta (\varepsilon - 1)}{\varepsilon^2 d}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{4 g (\varepsilon - 1)}{3 \zeta} \cdot d}$$

$$\frac{\beta}{\mu} = \frac{3 \varepsilon}{2 \zeta} \cdot d$$

$v_m = 5.11 \cdot \sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ nach Rittinger
für $\zeta = 0,5$

$v_m = 4,67 \cdot \sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ nach Sparre
für $\zeta = 0,6$

in gleichen Zeiten

Die Steig- u. Geschwindigkeiten wie die Quadrat, umgekehrt den um die Einheit verminderten spez. Gewichten.

3) $s = s_1$, $v = v_1$ u. $t = t_1$

$$\sqrt{(\varepsilon_0 - 1)d} = \sqrt{(\varepsilon_1 - 1)d_1}$$

$$\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d_1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_0 - 1}} \qquad \frac{d}{d_1} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_0 - 1}$$

3) Gleichfällige Körp.–

$t = t_1$ u. $\left\{\begin{array}{l} v = v_1 \\ s = s_1 \end{array}\right.$

d.h. bei gleichfallenden Kugeln von verschiedenen Stoffe verhalten sich bei gleichen Steig-Geschwindigkeiten u. Zeiten, das ist, bei gleichfälligen Kugeln verhalten sich die Durchmesser umgekehrt wie die um die Einheit verminderten sp. Gewichte.

Hiernach hat [illegible] folgende Tabelle berechnet:

d in Linien	Gold $\varepsilon = 19$	Bleiglanz $\varepsilon = 7,5$	Blende $\varepsilon = 4$	Quarz $\varepsilon = 2,6$	Steinkohle $\varepsilon = 1,3$
8	100,000	60,093	40,825	29,874	12,910
5,657	84,090	50,532	34,329	25,075	10,856
4	70,711	42,492	28,868	21,082	9,129
2,828	59,460	35,731	24,275	17,728	7,676
2	50,000	30,046	20,412	14,907	6,355
1,414	42,045	25,266	17,165	12,535	5,428
1	35,355	21,246	14,434	10,541	4,564
0,707	29,730	17,866	12,137	8,864	3,838
0,5	25,000	15,023	10,206	7,454	3,227
0,357	21,022	12,633	8,582	6,268	2,714
0,25	17,678	10,623	7,217	5,270	2,282
0,177	14,865	8,933	6,069	4,432	1,919
0,125	12,500	7,512	5,103	3,727	1,614

NB berechnet nach der Formel $v = 8,3332\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ Zoll, wenn d in Linien eingesetzt wird.

Durchfallener Raum in einer Sekunde in Zollen.

= verticale Geschwindigkeit

Hierauf gründet sich die nass. Aufbereitung.

Mit Hülfe der Formel $\frac{D_1}{D_2} = \frac{S_2 - 1}{S_1 - 1}$

läßt sich das Verhältniß der Durchmesser gleichfälliger Kugeln verschiedener Substanzen berechnen.

Nehmen wir die vorigen Stoffe mit den angegebenen spec. Gewichten, so bekommen wir der Reihe nach

Gold 19.
Bleiglz 7,5
Zinkbl. 4
Quarz 2,5
Kohle 1,3

I

$\frac{D_{7,5}}{D_{19}} = 2,77$

$\frac{D_4}{D_{19}} = 6,00$

$\frac{D_{2,6}}{D_{19}} = 11,25$

$\frac{D_{1,3}}{D_{19}} = 60,0$

II

$\frac{D_{19}}{D_{7,5}} = 0,36$

$\frac{D_4}{D_{7,5}} = 2,17$

$\frac{D_{2,6}}{D_{7,5}} = 4,0$

$\frac{D_{1,3}}{D_{7,5}} = 22,0$

III

$\frac{D_{19}}{D_4} = 0,167$

$\frac{D_{2,6}}{D_4} = 1,875$

$\frac{D_{7,5}}{D_4} = 0,462$

$\frac{D_{1,3}}{D_4} = 10,0$

IV.

$\frac{d_{19}}{d_{2,6}} = 0,0888..$

$\frac{d_{7,5}}{d_{2,6}} = 0,246$

$\frac{d_{4,0}}{d_{2,6}} = 0,533..$

$\frac{d_{1,3}}{d_{2,6}} = 5,33..$

V.

$\frac{d_{19}}{d_{1,3}} = 0,01667$

$\frac{d_{7,5}}{d_{1,3}} = 0,0465$

$\frac{d_{4}}{d_{1,3}} = 0,5$

$\frac{d_{2,6}}{d_{1,3}} = 0,1875$

<u>Aus I, ergiebt sich:</u>

Es ist gleichfällig einer Kugel von Gold

<u>Gold</u>		<u>Pb</u>	<u>Zn</u>	<u>Ṡi</u>	<u>C</u>	
von 1 mm	mit	2,8	6	11,3	60	Millim
2	- - - -	5,5	12	22,5	120	"
3	- - - -	8,3	18	33,8	180	"
4	- - - -	11,1	24	45,0	240	"
5	- - - -	13,9	30	56,3	300	"
6	- - - -	16,6	36	67,5	360	"
7	- - - -	19,4	42	78,8	420	"
8	- - - -	22,2	48	90,0	480	"

Setzen wir ein Haufwerk von 1-8 mm voraus, so fällt Gold von 8-3 mm allein
Gold von unter 3 mm (genau 2,88) fällt gleichz. mit dem Pb von 8 mm

etc

3

II.

Bleiglanz

	Au	Zn	Si	E
von 1 mm ist gleichheit	0,36	2,2	4	22 mm
" 2 "	0,7	4,4	8	44 "
" 3 "	1,1	6,5	12	66 "
" 4 "	1,4	8,7	16	88 "
" 5 "	1,8	10,9	20	110 "
" 6 "	2,2	13,0	24	132 "
" 7 "	2,5	15,2	28	154 "
" 8 "	2,9	17,4	32	176 "

III.

Zinkblende

	Au	Pb	Si	E
von 1 mm	0,17	0,46	1,9	10 mm
" 2	0,33	0,92	3,8	20 "
" 3	0,50	1,4	5,6	30 "
" 4	0,67	1,8	7,5	40 "
" 5	0,84	2,3	9,4	50 "
" 6	1,0	2,8	11,3	60 "
" 7	1,17	3,2	13,1	70 "
" 8	1,34	3,7	15,0	80 "

IV.

Quarz

	Au	Pb	Zn	C	
von 1 mm ist gleich einem	0,09	0,25	0,53	5,3	mm.
„ 2 „	0,18	0,49	1,1	10,7	„
„ 3 „	0,27	0,74	1,6	16,0	„
„ 4	0,36	0,98	2,1	21,3	„
„ 5	0,44	1,23	2,7	26,7	„
„ 6	0,53	1,5	3,2	32,0	„
„ 7	0,62	1,7	3,7	37,3	„
„ 8	0,71	2,0	4,3	42,6	„

V.

Kohle

	Au	Pb	Zn	Si	
von 1 mm ist gleich einem	0,017	0,046	0,10	0,19	„
„ 2 „	0,033	0,092	0,2	0,38	„
„ 3 „	0,050	0,14	0,3	0,56	„
„ 4 „	0,067	0,18	0,4	0,75	„
„ 5 „	0,083	0,23	0,5	0,94	„
„ 6	0,10	0,28	0,6	1,1	„
„ 7	0,12	0,32	0,7	1,3	„
„ 8	0,13	0,37	0,8	1,5	„

Es fällt also

1) Gold von 8–3mm vorzugsweise bis an 2,88mm herein allein.

2) Gold von 2,88–2,0 mit Bleiglanz von 8–5,5mm

3) Gold von 2–1mm mit Bleigl. von 5,5–2,8mm
und Zinkbl. von 8–6mm.

Die ersten Körner der Zinkbl. erscheinen am Ende gleichzeitig mit Gold von 1,34
und Bleigl. " 3,7 mm

Da jetzt alles Gold ausgeschieden ist, fällt ferner nun noch

4) ___Bleiglanz___ von 2,8–2mm gleichzeitig mit
Zinkbl. von 6–4,4mm und den ersten größten Quarzkörnern (8mm)

Mit Bleigl. von 2,8–2,1 ist schon nur Zinkbl. gleichfällig.

5) mit ~~Zinkbl~~ ___Bleiglanz___ von 2mm–1mm (also
feinstes Korn) ist gleichfällig der größte Quarz von 8–4mm
und Zinkbl. von 4,4–2,2mm

6) Weiter an fällt bloß noch
Zinkbl. von 2,2–1mm mit Quarz von 4–1,9m

Siebklasse von 8÷4mm angenommen.
vorangestellt

Au.	Pb	Zn	Si	C	
8	–	–			1. Sorte
7		–	–	–	
6	–	–	–	–	
5	–	–	–	–	
4	–	–	–	–	
3	–	–	–	–	Pause
2,89	~~8~~	–	–	–	
2,88	8	–	–	–	2. Sorte
	7	–	–	–	
	6	–	–	–	
	5	–	–	–	
	4	–	–	–	
	3,9	–	–	–	Pause
	3,8	–	–	–	
	3,7	8	–	–	3. Sorte
		7	–	–	
		6	–	–	
		5	–	–	
		4,4	8	–	4. Sorte Zwischengut ~~...gt Sorte~~
		4	7,5	–	
			6	–	5. Sorte
			5	–	
			4	–	
			3		Pause
			2		
			1,5	8	6. Sorte
				7	
				6	
				5	
				4.	

bei einer Siebklasse 8÷5 oder gar 8÷6 würde jede der Klasse für sich fallen.

Wie verhält sich's bei einer Siebklasse 6÷2?

Gold 19 } 2,77
Blei 7,5 }
Zinkbl. 4 } 2,17
Quarz 2,6 } 1,88
Kohle 1,5 } 5,8.

Nach dieser Tabelle fällt dann nach gleichheit an Gold mit P ... Z ... S ... C

	Gold	P	Z	S	C	
Körner	8mm	—	—	—	—	1. Sorte
	7 "	—	—	—	—	
	6 "	—	—	—	—	
	5 "	—	—	—	—	
	4 "	—	—	—	—	
	3 "	—	—	—	—	
	2,88 "	8mm	—	—	—	2. Sorte
	2 "	5,5 "	—	—	—	
	1,34	3,7 "	8 "	—	—	3. Sorte
	1,0	2,8	6 "	—	—	
	—	2	4,4	8	—	4. Sorte
	—	1,0	2,2	4	—	
	—	—	2,0	3,8	—	5. Sorte
	—	—	1,0	1,9	—	
	—	—	—	1,5	8	6. Sorte
	—	—	—	1,0	5,3	
	—	—	—	—	4,	7. Sorte.
	—	—	—	—	3	
	—	—	—	—	2	
	—	—	—	—	1	

Verhältniss der Siebweiten $\frac{8}{1} = 8$.

Noch auffälliger wird die Sache, wenn wir eine

bei Korngrössen von 8 – 3 mm (Gleichf. coeff. 2,77
fällt aber Gold allein. (Sorten-coeff. 2,66)

---

bei 8 – 4 mm
fällt auch aber Bleierz allein ohne Zwitter.
8 : 4 = 2 = Sorten coeff.
Gleichf. coeff. 2,17.

Gewöhnliche Sorten sind aber
zwischen Zinkblende u. Quarz. Zwischen beiden
ist der ~~Gleichf.~~ coeff. 1,88
nehmen wir daher von 8 : 5 so ist der Sortencoeff.
1,6
so muss man auch die letzte Sorte rein werden!

$$s = \beta \int \frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\, dt \qquad \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}$$

$$s = \beta \int \frac{\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} - \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}}{\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} + \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}}\, dt$$

$$\partial\left[\cancel{\tfrac{\mu}{2}} e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right] = \left[\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} + \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}\right] dt$$

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \int \frac{\partial\left[e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right]}{\left[e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right]} = \frac{2\beta}{\mu} \ln\left[e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{\frac{\mu t}{2}}\right] + C$$

$$0 = \frac{2\beta}{\mu} \ln 2 + C$$

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}$$

nen werden.

Als Arbeitskraft ist Dampfkraft zu verwenden und soll die Förderanlage, welche zugleich zur Mannschaftsförderung bestimmt ist, speciell berechnet und durch passende Dispositionszeichnungen erläutert werden.

Bei Berechnungen ist der Gang derselben anzugeben und sind die benützten Formeln, sowie die Coëfficienten und Erfahrungswerthe mit anzuführen; auch ist die Arbeit zu paginiren und mit einem In-

Setzt man in der vorigen Formel für v seinen Werth, so erhält man

$$v = \frac{\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}e^{\mu t}-1}{\frac{1+c\sqrt{B}}{1-c\sqrt{B}}e^{\mu t}+1}\beta = \frac{(1+c\sqrt{B})e^{\mu t}-(1-c\sqrt{B})}{(1+c\sqrt{B})e^{\mu t}+(1-c\sqrt{B})}\beta$$

$c = \frac{1}{\sqrt{B}}$, so erhält man

$$v = \frac{(1+1)e^{\mu t}-(1-1)}{(1+1)e^{\mu t}+(1-1)}\beta \quad \text{d. i.}$$

$v = \beta$ gleich vom Anfang an die Maximalgeschwindigkeit.

Dies tritt ein, wenn das Gas von der Höhe $\frac{v_m^2}{2g} = h$ herab fällt.

$$h = \frac{v_m^2}{2g} = \frac{2g(\varepsilon-1)}{2g\cdot\varsigma}\cdot\frac{V}{F} = \frac{\varepsilon-1}{\varsigma}\cdot\frac{V}{F}.$$

$$h = \frac{\varepsilon-1}{\varsigma}\cdot\frac{V}{F} = \frac{2(\varepsilon-1)d}{3\varsigma}$$

Hierauf folgt

7, anfangs nur ~~Zinkblende, und~~ Quarz
und zwar von 1,9 – 1,5 mm.

Von 1,5 – 1 mm Quarz erscheint die Kohle von 8 – 5,3 mm

Endlich fällt

8, ganz allein auch Kohle von 5,3 – 1 mm.

Ueberhaupt zeigt die Siebklasse von 8 – 4 mm

Es fällt

1, sämtliches Gold allein
nach einer kleinen Pause

2, sämtlicher Bleiglanz allein
nach einer kürzeren Pause

3, Zinkbl. von 8 – 4,8 mm allein, u. unmittelbar
darauf die kleinen Quarz.

4, Zinkblende von 4,4 – 4 mm mit Quarz von 8 – 7,5
Hierauf eben Zwischenzeit
5, alles Quarz von 7,5 – 4 mm allein
und viel später erst

6, sämtliche Kohle allein.

Die einzige gemischte Sorte ist daher No 5.

Allgemein: die Siebklasse muß geringer sein, als das Verhältniß der Durchmesser der gleichfälligen Substanzen.
Für Quarz u. Blende z. B.
$\frac{D_1}{D_2} = \frac{3}{1,6} = 2$, also ein Verhältniß $\frac{8}{5} < 2$
Für Gold u. Quarz haben
$\frac{18}{1,6} = 11,25$ d. h. es läßt sich Gold u. Quarz eine Siebklasse anstreben, wo der Durchmesser der größten Körner zu dem der kleinsten Körner etwa wie 1 : 11 sich verhält.

Wirksamen daß eine Siebklasse zwischen engeren Grenzen, z. B. zwischen 8 u. 5 mm fällt jedes Sieb für sich, denn eine Zinkblende von 5 mm ist einem Quarz von 9,5 mm gleichfällig, dieser aber gehört einer höheren Siebklasse an.

Weitere Folgerungen aus der Gleichfälligkeit. (Rittinger pag 182)

Aus $\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1}$ ergiebt sich

$$\frac{D_1^3}{D_2^3} = \frac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{(\varepsilon_1 - 1)^3}$$, wir haben

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{D_1^3}{D_2^3}$$

also auch

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{(\varepsilon_1 - 1)^3}$$ d. h.

Bleiglanz u. Quarz $\frac{(7,5-1)^3}{(2,6-1)^3} = 67$

z. B. für Bleiglanz u. Zinkblende
7,5 4.
$\frac{(7,5-1)^3}{(4-1)^3} = \frac{6,5^3}{3^3} = \frac{274,6}{27} = 10$, d. h.
Zinkblendekörner sind 10 mal größer als gleichfällige Bleiglanzkörner.

verschiedene Größe

Die Volumina zweier gleichfälliger Körper sind stets ungleich; sie verhalten sich umgekehrt wie die 3ten Potenzen der um die Einheit verminderten spec. Gewichte.

Ferner: die Gewichte zweier gleichfälliger Körper sind

$$G_1 = V_1 \gamma \varepsilon_1 \qquad \text{also} \qquad \frac{G_1}{G_2} = \frac{V_1 \varepsilon_1}{V_2 \varepsilon_2}$$
$$G_2 = V_2 \gamma \varepsilon_2$$

aber nach d. Vorigen: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{(\varepsilon_1 - 1)^3}$

und daher $\dfrac{G_1}{G_2} = \dfrac{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - 1)^3}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 - 1)^3}$

oder $\dfrac{G_1}{G_2} = \dfrac{\dfrac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{\varepsilon_2}}{\dfrac{(\varepsilon_1 - 1)^3}{\varepsilon_1}} = \dfrac{\left(\varepsilon_2^{2/3} - \dfrac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}\right)^3}{\left(\varepsilon_1^{2/3} - \dfrac{1}{\varepsilon_1^{1/3}}\right)^3}$

Setzen wir nun voraus, daß

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, so ist auch $\varepsilon_2^{2/3} > \varepsilon_1^{2/3}$

ferner: $\dfrac{1}{\varepsilon_1} > \dfrac{1}{\varepsilon_2}$ und $\dfrac{1}{\varepsilon_1^{1/3}} > \dfrac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}$

so

Addirt: $\varepsilon_2^{2/3} + \dfrac{1}{\varepsilon_1^{1/3}} > \varepsilon_1^{2/3} + \dfrac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}$

oder $\varepsilon_2^{2/3} - \dfrac{1}{\varepsilon_2^{1/3}} > \varepsilon_1^{2/3} - \dfrac{1}{\varepsilon_1^{1/3}}$ od. nach Obigem:

$\dfrac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{\varepsilon_2} > \dfrac{(\varepsilon_1 - 1)^3}{\varepsilon_1}$ u. daher auch $G_1 > G_2$

Hieraus kann man folgende Sätze ableiten:

1, Gleichfällige Kugeln verschiedener Subst. haben nicht gleiches absolutes Gewicht.

2, Von 2 gleichfälligen Kugeln verschiedener Subst. hat die dichtere nicht nur das kleinere Volumen, sondern auch das kleinere absolute Gewicht.

Beisp. Bleiglanz u. Zinkblende.

7,5 4,0

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{4,0\,(7,5-1)^3}{7,5\,(4,0-1)^3} = \frac{4 \cdot 274,375}{7,5 \cdot 27} = \frac{1098,3}{202,5} = 5,37$$

d. h. die größeren Zinkblendekugeln sind 5,37 mal schwerer als die gleichfälligen Bleiglanzkugeln.

Bei Bleigl. u. Quarz (7,5 : 2,6) ist das Verhältniß

$$\frac{6,5^3 \cdot 2,6}{7,5 \cdot 1,6^3} = 23,7$$

Daher 3, der Unterschied im absoluten Gewicht gleichfälliger Kugeln versch. Subst. ist um so bedeutender, je mehr die Subst. im spec. Gewicht abstehen.

$$\frac{G}{G_1} = \frac{(S_1 - 1)^3}{(S - 1)^3} \cdot \frac{S}{S_1} \quad \text{Gold} = 19 = S_1$$

$$\text{Quarz } 2{,}6 = S$$

$$\frac{G}{G_1} = \frac{18^3 \cdot 2{,}6}{1{,}6^3 \cdot 19} = 200 \text{ (rund)}$$

Ein Goldkorn von 5 Gramm
ist also gleichfällig mit einem Quarzkorn
von 1000 Gr. = 1 Kgr = 2 Zollvereinspf.

n anzugeben und sind die
n Formulare, worin die Prüf-
ung Untersuchungswerthe mit
hnen; auch ist die schriftliche
zu bezeugen und mit ei-
ehr zu versehen.

$G_1 = V_1 \varepsilon_1 \gamma$ $\qquad \frac{G_1}{G_2} = \frac{V_1 \varepsilon_1}{V_2 \varepsilon_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

$G_2 \; V_2 \varepsilon_2 \gamma$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{(\varepsilon_1 - 1)^3} \qquad \frac{G_1}{G_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{(\varepsilon_1 - 1)^3} = \frac{\frac{(\varepsilon_2 - 1)^3}{\varepsilon_2}}{\frac{(\varepsilon_1 - 1)^3}{\varepsilon_1}}$$

$$= \frac{\left(\varepsilon_2^{2/3} - \frac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}\right)^3}{\left(\varepsilon_1^{2/3} - \frac{1}{\varepsilon_1^{1/3}}\right)^3}$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2^{2/3} > \varepsilon_1^{2/3}$

$\frac{1}{\varepsilon_1} > \frac{1}{\varepsilon_2} \qquad \frac{1}{\varepsilon_1^{1/3}} > \frac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}$

$$\varepsilon_2^{2/3} + \frac{1}{\varepsilon_1^{1/3}} > \varepsilon_1^{2/3} + \frac{1}{\varepsilon_2^{1/3}}$$

$$\varepsilon_2^{2/3} - \frac{1}{\varepsilon_2^{1/3}} > \varepsilon_1^{2/3} - \frac{1}{\varepsilon_1^{1/3}}$$

$\underline{G_1} > G_2$

Der Unterzeichnete erhielt aus der **bergakademischen Bibliothek**

VIII No. 1119 a.b, Reuleaux

Theoretische Kinematik, erster Theil

Freiberg, den 8/1 1891

Unterschrift Treptow

NB. Die Rückgabe hat nach 4 Wochen zu erfolgen.

Die vorstehenden entwickelten Formeln gelten ohne Abänderung für jede andere Flüssigkeit als Wasser, wenn nur die sp. Gew. ε auf diese Flüssigkeit bezogen werden.

Ist aber ε das sp. G. eines festen Körpers gegen Wasser u. ν dasjenige einer andern Flüssigkeit gegen Wasser, so ist das sp. G. des festen Körpers gegen diese Flüssigkeit

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{\nu}$$

man hat daher unter dieser Voraussetzung in vorigen Formeln überall anstatt ε zu setzen $\frac{\varepsilon}{\nu}$.

Hiernach hat man z. B.

$$v_m = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\varepsilon}{\nu}-1\right)Vg}{\zeta F}}$$ od. für Kugeln

$$v_m = \sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\nu}-1\right)d}{3\zeta}g} = 5{,}17\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\nu}-1\right)d} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\nu}-1\right)d}$$

für dieselbe Kugel sind die Geschwindigkeiten in 2 verschiedenen Flüssigkeiten vom sp. G. ν_1 u ν_2

$$v_{m_1} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\nu_1}-1\right)d}$$
u $$v_{m_2} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\nu_2}-1\right)d}$$ also $$\frac{v_{m_1}}{v_{m_2}} = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon}{\nu_1}-1}{\frac{\varepsilon}{\nu_2}-1}}$$

Setzt man nun die eine Flüssigkeit Wasser also d. h. $\gamma_2 = 1$ so ist

$$\frac{v_{m_1}}{v_{m_2}} = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon}{\gamma_1} - 1}{\varepsilon - 1}} \quad \text{u. daher}$$

$$v_{m_1} = v_{m_2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\gamma_1} - 1\right)}{(\varepsilon - 1)}}$$

Ist ~~also~~ ferner die andere Flüssigkeit Luft, also $\gamma_1 = 0{,}00125$, so haben wir

$$v_{m_1} = v_{m_2}\sqrt{\frac{\left(\frac{\varepsilon}{0{,}00125} - 1\right)}{\varepsilon - 1}}$$

und dies giebt,

1, für Bleiglanz v. spec. G. = 7,5 = ε

$$v_{m_1} = 30{,}4 \cdot v_{m_2}$$

2, für Schwefelkies v. spec. G. = 5 = ε

$$v_{m_1} = 31{,}6\, v_{m_2}$$

3, für Quarz v. spec. G. 2,6 = ε

$$v_{m_1} = 36{,}0 \cdot v_{m_2}$$

d. h. diese Stoffe fallen in Luft 30–36 mal schneller als in Wasser

Für eine Salzlösung vom sp. G. $\gamma = 1{,}5$
erhält man für Bleigl. $v_{m_1} = 0{,}78\, v_{m_2}$
„ Schwefelkies $v_{m_1} = 0{,}75\, v_{m_2}$
„ Quarz — $v_{m_1} = 0{,}67\, v_{m_2}$ etc.

Zwei gleichfällige Kugeln von dem sp. G. ε_1 u. ε_2 in einer Fl. vom sp. G. γ haben die Geschw.

$$v_{m_1} = v_{m_2} = \alpha \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma} - 1\right) d_1} = \alpha \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma} - 1\right) d_2}$$

also $\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma} - 1\right) d_1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma} - 1\right) d_2$

$$(\varepsilon_1 - \gamma)\, d_1 = (\varepsilon_2 - \gamma)\, d_2$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_1 - \gamma}$$

Für Luft ist $\gamma = 0{,}00125$ u. sind ε_1 u. ε_2 sp. Gewicht von Erzen, so verschwindet γ dagegen u. man kann schreiben $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

d. h. die Durchmesser zweier in Luft gleichfälliger Körper verhalten sich (fast) umgekehrt wie ihre sp. G.

3. Er gleichfällig in Wasser sind Bleiglanz u. Quarz, wenn

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{6,5}{1,6} = 4,06$$

und gleichfällig in Luft sind dieselben, wenn

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{7,5}{2,6} = 2,88$$

Für die gleichfälligen Salzlösung vom spec. G. = 1,5, wenn

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{7,5-1,5}{2,6-1,5} = \frac{6}{1,1} = 5,45$$

Fallen daher im Wasser gleichfällige Körper Körner

1, in Luft, so eilt der spec. leichtere voraus weil er relativ schwerer ist, als zur Gleichfälligkeit in Luft erfordert wird; in unserem Beispiele also der Quarz, weil sein Durchmesser 4,06 mal größer ist, als der des Bleiglanzes, während er für Luft nur 2,88 mal größer zu sein braucht.

2, in Salzlösung, so eilt umgekehrt der spec. schwerere voraus weil der andere nicht groß genug ist, um ihm zu folgen

Der feine Durchmesser ist in unserem Beispiel nur 4,06 mal, während er zur Gleichfälligkeit bei 5,45 mal größer sein sollte.

Und ist also der große Abstand im Durchmesser zu separirenden Substanzen von besonderer Wichtigkeit. Da hierdurch die Arbeit wesentlich erleichtert wird u. vereinfacht wird, scheint Wasser mehr als Luft zur Sep. geeignet.

Ueberhaupt kann die Siebklasse an Breite gewonnen werden, je näher das spez. Gew. der leichteren Subst. dem des separirenden Mediums steht z. B.

bei Quarz u. Kohle ist das Durchmesserverhältniß für Wasser $\frac{d_1}{d_2} = \frac{2,6-1}{1,3-1} = \frac{1,6}{0,3} = 5,3$

aber für Salzlösung vom spec. Gew. 1,2

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2,6-1,2}{1,3-1,2} = \frac{1,4}{0,1} = 14$$

Die Korngrößen der betr. Siebklassen können also im ersteren Falle nur um das 5,3 fache, im 2ten Falle aber um das 14fache verschieden sein, was bei letzterem günstiger ist.

Anderes Beispiel:

Steinkohle (1,3) u. Schiefer (2,3)

in Wasser: $\frac{2,3-1}{1,3-1} = \frac{1,3}{0,3} = 4\frac{1}{3}$.

in Salzlösungen: $\frac{2,3-1,2}{1,3-1,2} = \frac{1,1}{0,1} = 11$

Alle bisher angestellten Untersuchungen setzen eine constante Geschwindigkeit voraus, und lassen die anfängliche Beschleunigung, welche nach der Formel $v = \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\beta$ eintritt und, außer Acht.

Sparre hat nach dieser Formel eine Tabelle berechnet (2t. p. 200) aus welcher der Einfluß deutlich ersichtlich.

Nur ein Bruchstück dieser Tabelle ist im Folgenden mitgetheilt:

Für Bleiglanz von 2''' ü. Körnern vom sp. G. 7,5 (anstatt ungefähr 7,6) ist die Fallgeschwindigkeit bei 4 1/3''' Durchmesser vorhanden

Zeit	Geschwindigkeit d. Bleischr. v. 1 Lin.	Geschwindigkeit d. Quarz v. $4\frac{1}{3}'''$	Die dazugehörigen Wege für Bleisch. $1'''$		Die dazugehörigen Wege für Quarz $4\frac{1}{3}'''$	
1/320 Sek.	1,01485"	0,70287"	0,00159 Zoll		0,00110 Zoll	
1/160	2,02509	1,40420	0,00633	0,00474	0,00439	0,00329
1/80	4,01370	2,79659	0,02524	0,01891	0,01753	0,01314
1/40	7,75078	5,49715	0,09918	0,07394	0,06957	0,05198
1/20	13,68081	10,30446	0,37190	0,27272	0,26905	0,19950
0,1 Sek.	19,34172	16,68424	1,22557	0,85367	0,96185	0,69284
0,2	21,15259	20,64008	3,28954	2,06397	2,88742	1,92557
0,3	21,24152	21,17213	5,41121	2,12168	4,98671	2,09929
0,4	21,24570	21,23702	7,53567	2,12446	7,10821	2,12150
0,5	21,24590	21,24484	9,66025	2,12458	9,23243	2,12422
0,6	21,24592	21,24580	11,78484	2,12459	11,35698	2,12455
0,7	"	21,24589	13,90943	2,12459	13,48157	2,12459
0,8	"	21,24592	16,03403	2,12460	15,60616	2,12459
0,9	"	"	18,15862	2,12459	17,73075	2,12459
1,0	"	"	20,28321	2,12459	19,85534	2,12459

also nach 0,8 Sek. gleichfällig.

Das Bleiglanzkorn von 1''' Durchm. hat also seine Maximalgeschw. angenommen nach 0,6 Sek., das Quarzkorn v. $4\frac{1}{3}'''$ erst nach 0,8 Sek. erreicht, beide fallen jetzt in constantem Abstand (16,03403 − 15,60616) = 0,42787 Zoll weiter, sie können also nicht, wie früher angenommen wurde, ganz gleichzeitig unten an-

Anders sind die Fallverhältnisse von einem
Bleiglanzkorn v. 1''' u. Quarz v. 8⅔''

Zeit in Sekunden:	Weg nach	Abstand:	
7/320	0,00159	+0,00049	0,00110 Zoll
7/160	0,00633	+0,00194	0,00439 "
7/80	0,02524	+0,00769	0,01755 "
7/40	0,09918	+0,02927	0,06991 "
7/20	0,37190	+0,09699	0,27491 "
0,1	1,22557	+0,19226	1,03331 "
0,2	3,28954	−0,13440	3,42394 "
0,3	5,41121	−0,86616	6,27737 "
0,4	7,53567	−1,71171	9,24738 "
0,5	9,66025	−2,58398	12,24423 "
0,6	11,78484	−3,46227	15,24711 "
0,7	13,90943	−4,34191	18,25134 "
0,8	16,03403	−5,22186	20,25589 "
0,9	18,15862	−6,10187	24,26049 "
1,0	20,28321	−6,98191	27,26512 "

Das Bleiglanzkorn eilt sehr anfangs voraus, wird aber zwischen 0,1 u. 0,2 Sek. vom Quarz nicht nur eingeholt*), sondern es eilt dieser nun in immer wachsenden Abständen, wie die rothen Zahlen zeigen, voraus.

*) NB Es giebt also auch außer der allg. Gleichfälligkeit eine beschränkte, nur für gewisse Fallhöhen gültige.

Besondere Beachtung verdient noch

1) die Fallzeit für ununterbroch. Fallen

2) " " " unterbrochenes "

Sparrenstellung unter folgend betrachtet an:

ad 1. haben wir mit Sparren eine Wassersäule von 360 Zoll u. betrachten zunächst das Verhalt von Bleigl. v. 1''' u. Quarz von $4/3'''$, welche als gleichfällig ~~…~~ angenommen worden sind.

Das Bleiglanzkorn hat am Ende der 1. Sek. 20,28321 Zoll zurückgelegt, hat also noch 339,71679 Zoll zu durchfallen, was mit der constanten Geschwindigkeit von 21,24592 Zoll geschieht, also in $\frac{339,71679}{21,24592} = 15,9897$ Sek. erfolgt, so dass die ganze Fallzeit $1 + 15,9897 = 16,9897$ beträgt.

Das Quarzkorn legt in der 1. Sek. 19,85534 Zoll zurück, hat also noch zu durchfallen 340,14466 Zoll, was noch $\frac{340,14466}{21,24592} = 16,0098$ Sek. geschieht, so dass hier die ganze Fallzeit ~~…~~ $1 + 16,0098 = 17,0098$ Sek also $(17,0098 - 16,9897) = 0,0201$ Sek mehr beträgt.

ad 2. Die unterbrochene Fallzeit.

Wird der Weg von 360 Zoll in einzelnen Absätzen zurückgelegt, so daß jedesmal Ruhe eintritt, bekommen jedes Mal die anfängl. accelerirte Bewegung im Betracht, und es müssen die Zeiten und gegenseitigen Abstände ganz anders ausfallen. Nehmen wir zunächst eine Fallzeit von 7/10 Sek. Dieser entspricht für Bleiglanz von 1''' der Weg von 1,22557 Zoll, so daß also zum Durchfallen von 360'' $\frac{360}{1,22557} = 293,74$ Wiederholungen nöthig sind.

Für gleichfälligen Quarz haben wir den Weg nach der 7/10 Sek. zu 0,96185 Zoll gefunden, es sind also hier $\frac{360}{0,96185} = 374,27$ Wiederholungen, also deren 80,53 mehr nöthig als beim gleichfälligen Bleiglanz.

Wenn also der Bleiglanz den Boden erreicht hat befindet sich der Quarz 77,46 Zoll über dem Boden

[illegible] 27

4,06 Wasser

2,88 [illegible]

5,45 Salzlösung

---

s mines de
conde partie,
Essai de théo-
l'art d'exploiter
res de char-
les différentes
ce fossile
res, atteliers
es.

1776.

4. Gr. Fol.

Der aufsteigende Wasserstrom.

1, Das Schweben fester Körper im aufsteigenden Wasserstrome (nach Rittinger)

$G = V\gamma\varepsilon$ = Gewicht des Körpers

$V\gamma$ = Wassergewicht (Auftrieb)

~~Auftrieb~~ $V\gamma(\varepsilon-1)$ Gewicht im Wasser.

Dagegen wirkt der Druck des aufsteigenden Wassers $\zeta \frac{v^2}{2g} \cdot F\gamma$ und soll Schweben eintreten, dann müssen beide Drücke einander gleich sein, also

$$\zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma = V\gamma(\varepsilon-1)$$

u. für Kugeln

$$\zeta \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \gamma = \frac{\pi d^3}{6} \cdot \gamma(\varepsilon-1)$$

woraus sich ergiebt

$$v = 2\sqrt{\frac{g}{3\zeta} d \cdot (\varepsilon-1)} = \alpha\sqrt{d(\varepsilon-1)}$$

also die wesentliche Formel, wie für die erste Fallgeschw. der Kugeln im stillstehenden Wasser.

$\alpha = 4,676$ Meter für $\zeta = 0,6$

u. $\alpha = 5,11$ Meter für $\zeta = 0,56$ Rittinger

In der Zeit kann ein Körper nur dann fortdauernd in der Schwebe gehalten werden, wenn er die größte Geschwindigk. erlangt hat. Diese Wassergeschwindigkeiten sind daher gleich den früher entwickelten constanten Fallgeschwindigkeiten.

Für 2 Körper hat man

$$c_1 = \alpha \sqrt{d_1(\varepsilon_1 - 1)}$$

u. $$c_2 = \alpha \sqrt{d_2(\varepsilon_2 - 1)}$$

also $$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{d_1(\varepsilon_1 - 1)}{d_2(\varepsilon_2 - 1)}}$$

Für gleichfällige Körper findet man ferner

$$d_1(\varepsilon_1 - 1) = d_2(\varepsilon_2 - 1)$$ für diese ist also

auch $c_1 = c_2$ d. h. sie schweben bei derselben Wassergeschwindigkeit.

Sind die Durchmesser gleich, so hat man

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}}$$

der spec. schwerere Körper wird also auch die größere Wassergeschw. zum Schweben brauchen.

ganz ähnlich ist es bei gleichdichten Körpern:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d_2}}$$

Hier braucht der grössere (Durchmesser) die grössere Stromgeschwindigkeit.

Für unrunde Körper gelten die ähnlichen Beziehungen, da die Formel für diese nur ein Coeff. anders beschaffen ist.

Nach Rittingers Versuchen kann man folgende Tabelle zusammenstellen:

Benennung	ε	Korndurchmesser in Millim. für Kugeln / Dicke in Millim. für unregelm. Körper							
		10	8	6	4	3	2	1	1/2
		Geschwindigkeit in Metern pr. Sek.							
Gediegen Silber	15	1,93	1,72	1,50	1,22	1,06	0,86	0,61	0,32
		0,90	0,80	0,70	0,57	0,50	0,40	0,29	0,20
Bleiglanz	7,5	1,31	1,17	1,02	0,83	0,72	0,59	0,41	0,29
		0,62	0,55	0,48	0,39	0,34	0,28	0,20	0,14
Schwefelkies	5	1,03	0,92	0,79	0,65	0,56	0,46	0,32	0,23
		0,49	0,43	0,38	0,30	0,26	0,22	0,15	0,10
Quarz	2,6	0,63	0,56	0,49	0,40	0,35	0,24	0,20	0,14
		0,30	0,27	0,24	0,19	0,17	0,14	0,10	0,07
Kohle	1,3	0,28	0,25	0,22	0,17	0,15	0,12	0,08	0,06
		0,13	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,04	0,03

$v = 5{,}11 \sqrt{d(\varepsilon - 1)}$

$v = 2{,}44 \sqrt{D(\varepsilon - 1)}$ d.h. mittlere Geschw. bei rundlichen Körpern circa 12 % mehr, bei platten 20 % u. eckigen 3 % weniger.

Rittinger giebt $\frac{2{,}44}{5{,}11} = 48\,\%$

Schwarz: für Kugeln

Roth: für unregelmässige Körper.

Bewegung fester Körper im aufsteigenden Wasserstrome.

Wir nehmen an, daß das Wasser sich in einem verticalen Rohre gleichförmig aufwärts bewege u. dabei eine größere Geschwindigkeit C habe, als zur Erzeugung des Schwebens eines eingetauchten Körpers (Kugel) nöthig ist, so daß der Körper zum Aufsteigen gezwungen wird. Er habe nach der Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt u. es sei seine Acceleration $= p$, sowie die aufwärtswirkende Kraft $= P$, so ist die Acc. der Schwere g den entsprechenden Beziehung:

$$\frac{p}{P} = \frac{g}{G} \qquad p = \frac{g}{G} \cdot P$$

nun $p = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{g}{G} P$

Der Wasserdruck auf den Körper ist

$$Q = \zeta \frac{(c-v)^2}{2g} F\gamma$$

dagegen wirkt das Gewicht des Körpers im Wasser

$$[V_{\gamma\varepsilon} - V_\gamma] = V_\gamma(\varepsilon - 1)$$

Es ist also die bewegende Kraft

$$P = \zeta\frac{(c-v)^2}{2g}F_\gamma - V_\gamma(\varepsilon - 1)$$ u. also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{G}P = \frac{g}{G}\left[\zeta\frac{(c-v)^2}{2g}F_\gamma - V_\gamma(\varepsilon-1)\right]$$

$$G = V_{\gamma\varepsilon}$$

$$\frac{dv}{dt} = \zeta\frac{(c-v)^2\cancel{g}}{2\cancel{g}}\frac{F\cancel{\gamma}}{V\cancel{\gamma}\varepsilon} - \frac{\cancel{V\gamma}(\varepsilon-1)g}{\cancel{V\gamma}\varepsilon}$$

$$\frac{dv}{dt} = \zeta\frac{(c-v)^2}{2\varepsilon}\cdot\frac{F}{V} - \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}g$$

Für Kugeln ist nun

$$\frac{F}{V} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\frac{\pi d^3}{6}} = \frac{3}{2d}$$ u. also

$$\frac{dv}{dt} = \zeta\frac{3(c-v)^2}{4\varepsilon d} - \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)g$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)g\cdot\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)g}\left[\zeta\frac{3(c-v)^2}{4\varepsilon d} - \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right)g\right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}g\left[\zeta\frac{3(c-v)^2}{4\cancel{\varepsilon}d}\cdot\frac{\cancel{\varepsilon}}{(\varepsilon-1)g} - 1\right]$$

$$= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}g\left[\zeta\frac{3}{4d(\varepsilon-1)g}(c-v)^2 - 1\right]$$

Setzen wir ferner

$$\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\right) g = A$$

$$c \cdot \frac{3\cancel{H}}{4d(\varepsilon-1)g} = B$$ so haben wir

$$\frac{dv}{dt} = A\left[B(c-v)^2 - 1\right]$$ und

$$dt = \frac{dv}{A\left[B(c-v)^2 - 1\right]}$$

$$\sqrt{B}\,(c-v) = x \qquad B(c-v)^2 = x^2$$

$$-\sqrt{B}\,dv = dx$$

$$dv = -\frac{dx}{\sqrt{B}}$$ also

$$dt = -\frac{dx}{A\sqrt{B}\left[x^2 - 1\right]} = \frac{dx}{A\sqrt{B}\left[1 - x^2\right]}$$

Mir bleibt zu diesem Integral [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

$$t = \frac{1}{A\sqrt{B}} \int \frac{dx}{1 - x^2} \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}$$

$$t = \frac{1}{A\sqrt{B}}\left[\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x}\right]$$

$$t = \frac{1}{A\sqrt{B}}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln \frac{1+\sqrt{B}(c-v)}{1-\sqrt{B}(c-v)} + C$$

Für $t=0$ ist auch $v=0$, also

$$0 = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln . \frac{1+\sqrt{B}.c}{1-\sqrt{B}.c} + C$$

resp.

$$t = \frac{1}{2A\sqrt{B}}\left[\ln . \frac{1+\sqrt{B}(c-v)}{1-\sqrt{B}(c-v)} - \ln \frac{1+\sqrt{B}.c}{1-\sqrt{B}.c}\right]$$

$$t = \frac{1}{2A\sqrt{B}} \ln \left[\frac{1+\sqrt{B}(c-v)}{1-\sqrt{B}(c-v)} . \frac{1-\sqrt{B}.c}{1+\sqrt{B}.c}\right]$$

weglassen

$$e^{2A\sqrt{B}.t} = \frac{1+\sqrt{B}.(c-v)}{1-\sqrt{B}(c-v)} . \frac{1-\sqrt{B}.c}{1+\sqrt{B}.c} \qquad 2A\sqrt{B} = \mu$$

$$e^{\mu t}(1-\sqrt{B}(c-v))(1+\sqrt{B}.c) = (1+\sqrt{B}(c-v))(1-\sqrt{B}.c)$$

$$e^{\mu t}(1-\sqrt{B}.c+\sqrt{B}.v)(1+\sqrt{B}.c) = (1+\sqrt{B}.c-\sqrt{B}.v)(1-\sqrt{B}.c)$$

$$e^{\mu t}(1-\sqrt{B}.c)(1+\sqrt{B}.c) + e^{\mu t}.\sqrt{B}.v(1+\sqrt{B}.c) = (1+\sqrt{B}.c)(1-\sqrt{B}.c) - (1-\sqrt{B}.c)\sqrt{B}.v$$

$$e^{\mu t}(1-Bc^2) + e^{\mu t}.\sqrt{B}(1+\sqrt{B}.c)v = (1-Bc^2) - \sqrt{B}(1-\sqrt{B}.c)v$$

$$\left[e^{\mu t}\sqrt{B}(1+\sqrt{B}.c) + \sqrt{B}(1-\sqrt{B}.c)\right]v = (1-Bc^2) - e^{\mu t}(1-Bc^2)$$

$$\left[e^{\mu t} + e^{\mu t}\sqrt{B}\cdot c + 1 - \sqrt{B}\cdot c\right]\sqrt{B}\cdot v = (1-e^{\mu t})(1-Bc^2)$$

$$\left[e^{\mu t} + 1 + e^{\mu t}\sqrt{B}\cdot c - \sqrt{B}\cdot c\right]\sqrt{B}\cdot v = (e^{\mu t}-1)(Bc^2-1)$$

$$\left[(e^{\mu t}+1) + (e^{\mu t}-1)\sqrt{B}\cdot c\right]\sqrt{B}\cdot v = (e^{\mu t}-1)(Bc^2-1)$$

Dividirt mit $(e^{\mu t}-1)$

$$\left[\frac{e^{\mu t}+1}{e^{\mu t}-1} + \sqrt{B}\cdot c\right]\sqrt{B}\cdot v = Bc^2-1$$

also

$$v = \frac{Bc^2-1}{\left[\frac{(e^{\mu t}+1)}{(e^{\mu t}-1)} + \sqrt{B}\cdot c\right]\sqrt{B}}$$

Setzt man $B = \frac{1}{v_m^2}$, $\frac{e^{\mu t}+1}{e^{\mu t}-1} = \alpha$

so $\sqrt{B} = \frac{1}{v_m}$

erhält man

$$v = \frac{\frac{c^2}{v_m^2} - 1}{\left(\alpha + \frac{c}{v_m}\right)\frac{1}{v_m}}$$

$$= \frac{c^2 - v_m^2}{\left(\alpha + \frac{c}{v_m}\right)v_m}$$

$$= \frac{c^2 - v_m^2}{\alpha v_m + c}$$. Die Maximalgeschw. in ruhendem Wasser ist für $\alpha = 1$ vorhanden, das ist

$$v_1 = \frac{(c+v_m)(c-v_m)}{(v_m+c)} = c - v_m$$

Es ist hierin $A = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} g$

$$B = \rho\frac{3}{4d(\varepsilon-1)g}$$

so

$$\mu = 2A\sqrt{B} = 2g\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\sqrt{\rho\frac{3}{4d(\varepsilon-1)g}}$$

$$\mu = \sqrt{\rho\frac{3g(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}}$$ d.i. derselbe Werth wie früher für V. beim Fallen im ruhenden Wasser

$$ds = \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}\left[\frac{e^{\mu t}+1}{e^{\mu t}-1} + c\sqrt{B}\right]} \cdot dt$$

$$= \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1+c\sqrt{B}e^{\mu t}-c\sqrt{B}}\, dt$$

$$= \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}(c\sqrt{B}+1)-(c\sqrt{B}-1)}\, dt$$

$$= \frac{(c\sqrt{B}+1)(c\sqrt{B}-1)}{\sqrt{B}} \cdot \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}(c\sqrt{B}+1)-(c\sqrt{B}-1)} \cdot \frac{\frac{1}{c\sqrt{B}+1}}{\frac{1}{c\sqrt{B}+1}}\, dt$$

$$ds = \underbrace{\frac{c\sqrt{B}-1}{\sqrt{B}}}_{=\mathcal{E}} \cdot \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}-\underbrace{\frac{c\sqrt{B}-1}{c\sqrt{B}+1}}_{=\mathcal{D}}} \cdot dt$$

$$ds = \mathcal{E} \cdot \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}-\mathcal{D}}\, dt = \mathcal{E} \cdot \frac{1-e^{\mu t}}{\mathcal{D}-e^{\mu t}}\, dt$$

$$\mathcal{D}-e^{\mu t} \,/\, 1-e^{\mu t} \,/\, \frac{1}{\mathcal{D}}$$

$$1-\frac{e^{\mu t}}{\mathcal{D}}$$

$$\frac{e^{\mu t}}{\mathcal{D}} - e^{\mu t}$$

$$ds = \mathcal{E}\left[\frac{1}{\mathcal{D}}\, dt + \left(\frac{1}{\mathcal{D}}-1\right)\frac{e^{\mu t}}{\mathcal{D}-e^{\mu t}}\, dt\right] \qquad d(\mathcal{D}-e^{\mu t}) = -\mu e^{\mu t}\, dt$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}\left[dt + (1-\mathcal{D})\frac{e^{\mu t}}{\mathcal{D}-e^{\mu t}} \cdot dt\right] \qquad e^{\mu t}\, dt = -\frac{1}{\mu}\, d(\mathcal{D}-e^{\mu t})$$

$$ds = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}\left[dt - \frac{1-\mathcal{D}}{\mu} \cdot \frac{d(\cancel{e^{\mu t}}\,\mathcal{D}-e^{\mu t})}{\mathcal{D}-e^{\mu t}}\right]$$

$$s = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}\left[t - \frac{1-\mathcal{D}}{\mu}\ln(\mathcal{D}-e^{\mu t})\right] + \mathcal{C}$$

1, Ist in dieser Gleichung

$$Bc^2 > 1$$ v bleibt positiv

so steigt der Körper. Es ist dann

$$c > \frac{1}{\sqrt{B}}$$

$$c > 2\sqrt{\frac{d(\varepsilon-1)g}{3\zeta}} = 2\sqrt{\frac{g}{3\zeta}d(\varepsilon-1)} = \alpha\sqrt{d(\varepsilon-1)}$$

Es ist aber $v_s = 2\sqrt{\frac{g}{3\zeta}d(\varepsilon-1)} < c$

$\alpha = 4{,}676^m$ für $\zeta = 0{,}6$

$\alpha = 5{,}11^m$ für $\zeta = 0{,}5$ bei Rittinger

die Geschwindigkeit des Wassers für die Aufgabe.

2, Ist $Bc^2 = 1$, also $v = 0$

so $c = \frac{1}{\sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{g}{3\zeta}d(\varepsilon-1)} = v_s$

so tritt die Schwebe ein.

3, $Bc^2 < 1$ so fällt der Körper, da v wird negativ.

Es ist dann $\mu = \sqrt{\frac{3\zeta g(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}}$

diese Größe wächst mit dem Abnehmen von d u. es wird daher $e^{\mu t}$ umso größer je kleiner d, je größer t wird.

Für $d=0$ ist $\mu = \sqrt{\frac{\cdots}{0}} = \infty$

u. also $e^{\mu t}$ schon in der kürzesten

endlichen Zeit $= \infty$ also dann

$$\frac{e^{\mu t}+1}{e^{\mu t}-1} = 1 \text{ u. somit}$$

die Maximalgeschw.

$$v_m = \frac{B c^2 - 1}{[1+\sqrt{B}\cdot c]\sqrt{B}}$$

$$= \frac{\cancel{(\sqrt{B}\sqrt{c}+1)}(\sqrt{B}\sqrt{c}-1)}{\cancel{(1+\sqrt{B}c)}\cdot\sqrt{B}}$$

$$= \frac{\sqrt{B}\cdot c - 1}{\sqrt{B}} = c - \frac{1}{\sqrt{B}}$$

also

$$v_m = c - 2\sqrt{\frac{g}{3\varsigma}(\varepsilon-1)d}$$

$v_f = 2\sqrt{\frac{g}{3\varsigma}(\varepsilon-1)d}$ Geschw. f. d. Schweben, also

$$v_m = c - v_f$$

die Geschwindigkeit des aufsteigenden Körpers

ist daher noch zeitlich länger zu erfahren
Da übrigens die Wassergeschw. für die Schichten eines Körpers = der Maximal Fallgeschw. eines Körpers im stillen Wasser, so ist auch die Geschw. mit welcher ein Körper aufsteigt = der Differenz zwischen Wassergeschwindigkeit u. Maxim. Fallgeschwindigkeit.

Bestimmung des Weges s

$$ds = v\,dt = \frac{Bc^2 - 1}{\left[\frac{e^{ut}+1}{e^{ut}-1} + \sqrt{B}.c\right]\sqrt{B}}\,dt \qquad = \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{dt}{\frac{e^{ut}+1}{e^{ut}-1} + c\sqrt{B}}$$

$$ds = \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{(e^{ut}-1)\,dt}{e^{ut}+1+\sqrt{B}.c.e^{ut} - \sqrt{B}.c}$$

$$\cancel{\frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}} = E}$$

$$ds = E \cdot \frac{(e^{ut}-1)\,dt}{(\sqrt{B}.c.e^{ut} + e^{ut}) - (\sqrt{B}.c - 1)} \cdot \frac{B.c^2-1}{\sqrt{B}}$$

$$= E \cdot \frac{(e^{ut}-1)\,dt}{(\sqrt{B}.c+1)e^{ut} - (\sqrt{B}.c-1)} \cdot \frac{Bc^2-1}{\sqrt{B}}$$

$$\frac{(B.c^2-E)}{\sqrt{B}\,(\sqrt{B}.c+1)} \cdot \frac{(e^{ut}-1)\,dt}{e^{ut} - \frac{(\sqrt{B}.c-1)}{(\sqrt{B}.c+1)}} = \frac{\sqrt{B}c-1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{e^{ut}\,dt}{}$$

$$\frac{\sqrt{B}c-1}{\sqrt{B}} = E$$

Setzt man hierin $\left(\frac{\sqrt{B}.c-1}{\sqrt{B}.c+1}\right) = D$, so erhält man

$$ds = E\cdot\frac{(c^{ut}-1)\,dt}{c^{ut}-D}$$

$$= E\,\frac{(1-c^{ut})}{(D-c^{ut})}\,dt$$

Dividirt man zuerst durch Nenner, so erhält man

$$D-c^{ut}\,/\,1-c^{ut}\,/\,\frac{1}{D}$$

$$\frac{1\cancel{D}-\frac{c^{ut}}{D}}{\frac{c^{ut}}{D}-c^{ut}}$$

also

$$\frac{c^{ut}-1}{c^{ut}-D} = \frac{1}{D} + \left(\frac{1}{D}-1\right)\frac{c^{ut}}{D-c^{ut}}$$

$$= \frac{1}{D}\left[1+(1-D)\frac{c^{ut}}{D-c^{ut}}\right]$$

$$= \frac{1}{D}\left[1-(D-1)\frac{c^{ut}}{D-c^{ut}}\right]$$ also

$$ds = \frac{E}{D}\left[dt-(D-1)\frac{c^{ut}.\,dt}{D-c^{ut}}\right]$$

Nun ist $\partial(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t}) = -{}_{,}\mu\, e^{{}_{,}\mu t}\, \partial t$

also $e^{{}_{,}\mu t}\, \partial t = -\dfrac{\partial(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t})}{{}_{,}\mu}$ und haben

$$\partial s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[\partial t + \left(\frac{\mathcal{D}-1}{{}_{,}\mu}\right)\frac{\partial(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t})}{(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t})}\right]$$

$$s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[\int \partial t - \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\int \frac{\partial(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t})}{\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t}}\right]$$

$$s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[t - \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\ln(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t})\right] + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ ist auch $s = 0$ also

$$0 = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[\;-\frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\ln(\mathcal{D} - 1)\right] + \text{Const}$$

$$s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[t - \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\cdot\ln(\mathcal{D} - e^{{}_{,}\mu t}) + \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\ln(\mathcal{D} - 1)\right]$$

$$s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[t + \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\ln(e^{{}_{,}\mu t} - \mathcal{D}) - \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\ln(1 - \mathcal{D})\right]$$

$$s = \frac{\varepsilon}{\mathcal{D}}\left[t + \frac{1-\mathcal{D}}{{}_{,}\mu}\cdot\ln\left(\frac{e^{{}_{,}\mu t} - \mathcal{D}}{1 - \mathcal{D}}\right)\right]$$

Rechnen nun die Werthe für

1) $$\frac{E}{D} = \frac{\sqrt{B}.c - 1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{(\sqrt{B}.c+1)}{(\sqrt{B}.c-1)} = \frac{(\sqrt{B}.c+1)}{\sqrt{B}}$$

2) $$\frac{1-D}{\mu} = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{B}.c-1}{\sqrt{B}.c+1}\right)}{2A\sqrt{B}}$$

$$= \frac{\sqrt{B}.c+1 - \sqrt{B}c+1}{2A\sqrt{B}(\sqrt{B}.c+1)} = \frac{1}{A\sqrt{B}(\sqrt{B}.c+1)}$$

3) $$\frac{D - e^{\mu t}}{D-1} = \frac{\frac{\sqrt{B}.c-1}{\sqrt{B}.c+1} - e^{2A\sqrt{B}.t}}{\frac{\sqrt{B}.c-1}{\sqrt{B}.c+1} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{B}.c-1) - (\sqrt{B}.c+1)e^{2A\sqrt{B}.t}}{\sqrt{B}.c-1 - \sqrt{B}.c - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{B}c+1)e^{2A\sqrt{B}.t} - (\sqrt{B}.c-1)}{2}$$

also

$$s = \frac{\sqrt{B}.c+1}{\sqrt{B}}\left[t - \frac{1}{A\sqrt{B}(\sqrt{B}.c+1)} \ln \frac{(\sqrt{B}.c+1)e^{2A\sqrt{B}t} - (\sqrt{B}.c-1)}{2}\right]$$

Für $c = \frac{1}{\sqrt{B}}$ d.i. die Maximalgeschwindigkeit im stillstehenden Wasser, wird

$s = 0$.

$$\boxed{s = \frac{(\sqrt{B}.c+1)}{\sqrt{B}}.t - \frac{1}{A.B}\ln\left(\frac{(\sqrt{B}.c+1)e^{\mu t}-(\sqrt{B}.c-1)}{2}\right)}$$

Setzen wir hierin $c=0$, so erhält man

$$s = \frac{t}{\sqrt{B}} - \frac{1}{AB}\ln.\left(\frac{e^{\mu t}+1}{2}\right)$$

$$= \frac{2A\sqrt{B}t}{2AB} - \frac{2}{2AB}\ln\left(\frac{e^{\mu t}+1}{2}\right) = \frac{1}{2AB}\left[2A\sqrt{B}.t - 2\ln\left(\frac{e^{\mu t}+1}{2}\right)\right]$$

$2A\sqrt{B}=\mu$

$$= \frac{1}{2AB}\left[\ln e^{\mu t} - 2\ln\left(\frac{e^{\mu t}+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2AB}\left[\mu t - 2.\ln\left(\frac{e^{\mu t}+1}{2}\right)\right]$$

$\mu t = \ln e^{\mu t}$

$$= \frac{1}{2AB}\left[\ln e^{\mu t} - \ln\left(\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2AB}\left[\ln\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4} - \ln e^{\mu t}\right]$$

$$= -\frac{1}{2AB}\ln\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}$$

$$-\frac{1}{2AB} = -\frac{\varepsilon}{2.(\delta-1)g}\cdot\frac{4d(\delta-1)g}{3\zeta} = -\frac{2\varepsilon d}{3\zeta}$$

also

$$s = -\frac{2\varepsilon d}{3\zeta}\left[\ln\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}\right]$$ bis auf das

$$s = -\frac{\varepsilon}{\mu^2}\cdot\ln\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}$$

Ergänzungsglied übereinstimmend mit dem Wege im [illegible] [illegible]

Setzen wir in der Gleichung

$$s = \frac{(\sqrt{B}\,c+1)}{\sqrt{B}}\,t - \frac{1}{AB}\ln\left(\frac{(\sqrt{B}\,c+1)\,e^{\mu t}-(\sqrt{B}\,c-1)}{2}\right)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{B}}$$ der Bedingungsgleichung

für die Spitze, so erhält man:

$$s = \frac{2}{\sqrt{B}}\,t - \frac{1}{AB}\ln\left(\frac{2\,e^{\mu t}}{2}\right)$$

$$s = \frac{2}{\sqrt{B}}\,t - \frac{1}{AB}\,\mu t \qquad \mu = 2A\sqrt{B}$$

$$s = \frac{2}{\sqrt{B}}\,t - \frac{1}{AB}\cdot 2A\sqrt{B}\,t = \frac{2}{\sqrt{B}}\,t - \frac{2}{\sqrt{B}}\,t = 0$$

der Körper legt dann gar keinen Weg zurück.

Nimmt man aber c = der doppelten Grenzgeschwindigkeit, also

$$c = \frac{2}{\sqrt{B}}$$, so erhält man

$$s = \frac{3}{\sqrt{B}}\left[t - \frac{1}{3A\sqrt{B}}\cdot\ln\frac{3e^{2A\sqrt{B}\,t}-1}{2}\right]$$

Nach der Formel

$$s = \frac{\sqrt{B}.c+1}{\sqrt{B}}.t - \frac{1}{AB} \ln \frac{(\sqrt{B}.c+1)e^{\mu t} - (\sqrt{B}.c-1)}{2}$$

berechnet anfänglich Fallräume im aufsteigenden Strome

für Quarz (2,6) von 4 mm

Bleiglanz (7,5) " 4 mm

u. " " " 0,95 mm

für t = 0,01, 0,02 0,03 0,05 0,1. 0,15

0,2 0,25 0,30 0,5 u. 1 Sec.

bei den Wassergeschw. c = 0,25 m

u. c = 1,00 m

(nach Rittinger, 1. Nachtrag p33)

d	ε	Fallzeiten in …				
		0,01	0,02	0,03	0,05	0,10
mm.		Wege in …				
		$c = 0,$… s neg…				
4	2,6	0,0001	0,0006	0,0013	0,0032	0,0096
4	7,5	0,0003	0,0012	0,0032	0,0082	0,0282
0,95	7,5	0,0002	0,0007	0,0018	0,0039	0,0111
		$c = 1,0$… s positi…				
4	2,6	0,0013	0,0043	0,0081	0,0176	0,0452
4	7,5	0,0002	0,0008	0,0017	0,0037	0,0106
0,95	7,5	0,0018	0,0052	0,0100	0,0204	0,0496

$\ell = 0{,}25^m$

Vach.	Quarz $\varepsilon = 2{,}6$ $d = 4$	Bleiglanz $\varepsilon = 7{,}5$ $d = 0{,}95$	
0,01	0,0001	0,0002	Meter.
0,02	6	7	
0,03	13	18	
0,05	32	39	
0,10	96	111	
0,15	171	187	
0,20	248	262	
0,25	326	338	
0,30	402	412	
0,50	712	715	
1,00	1484	1473	

…en in Secunden.

0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,50	1,00

…ge in Metern

…= $0,25^m$

…s negativ

0,0096	0,0175	0,0248	0,0326	0,0402	0,0712	0,1484
0,0282	0,0534	0,0812	0,1092	0,1378	0,2524	0,5395
0,0115	0,0187	0,0262	0,0338	0,0412	0,0715	0,1473

…= $1,00^m$

…positiv

0,0452	0,0745	0,1045	0,1338	0,1637	0,2827	0,5808
,0106	0,0189	0,0273	0,0365	0,0449	0,0805	0,1685
,0496	0,0793	0,1092	0,1392	0,1692	0,2889	0,5883

$\zeta F \gamma \frac{v^2}{2g}$, $\zeta F \gamma \frac{(c-v)^2}{2g} = P$

$$\frac{p}{g} = \frac{P}{G} \quad p = \frac{g}{G}\cdot P = \frac{g}{V s \gamma}\cdot P = \frac{g}{V s \gamma}\cdot\left[\zeta F \gamma \frac{(c-v)^2}{2g}\right]$$

$$p = \frac{\zeta}{2}\cdot\frac{F}{V}\cdot\frac{1}{s}(c-v)^2 = \frac{3\zeta}{4 d s}(c-v)^2$$

$$\frac{3\zeta}{4sd} = \varepsilon \quad p = \varepsilon(c-v)^2 = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{dv}{\varepsilon(c-v)^2} \quad t = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{dv}{(c-v)^2}$$

$(c-v) = z$

$dv = -dz$ $\quad t = -\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\int z^{-2}\,dz = \frac{1}{\varepsilon}z^{-1} + C$

$$t = \frac{1}{\varepsilon(c-v)} + C$$

$$0 = \frac{1}{\varepsilon c} + C$$

$$t = \frac{1}{\varepsilon(c-v)} - \frac{1}{\varepsilon c} \quad \varepsilon t = \frac{1}{c-v} - \frac{1}{c}$$

$$c(c-v)\varepsilon t = c - (c-v)$$

$$c(c-v)\varepsilon t = c - c + v$$

$\cancel{c^2 - cv}$

$$c^2\varepsilon t - cv\varepsilon t = v$$

$$c^2\varepsilon t = v(1 + c\varepsilon t)$$

$$v = \frac{c^2\varepsilon t}{1 + c\varepsilon t}$$

$$ds = \int\frac{c^2\varepsilon t}{c\varepsilon t + 1}\,dt$$

$$ds = c\int\frac{c\varepsilon t}{c\varepsilon t + 1}\,dt$$

$c\varepsilon t + 1 = z \quad c\varepsilon\,dt = dz$

$c\varepsilon t = z - 1$

WOOLLEN WELL MAIN COLLIERY,

CRIGGLESTONE, NEAR WAKEFIELD,

April 8th, 1885.

GENTLEMEN,

For your information we beg to inform you that the last WINDING ROPES we have used at this Colliery were your Mr. LANG'S PATENT, one-inch diameter. They were put on July, 1880, and were taken off October 31st, 1884, apparently quite good, the change only being made on account of the time the Ropes had run, and for safety in winding men and lads. The old class of Ropes—the same size—used to be changed at least every nine months, and were sometimes taken off in a very bad condition.

These facts speak for themselves.

Yours faithfully,

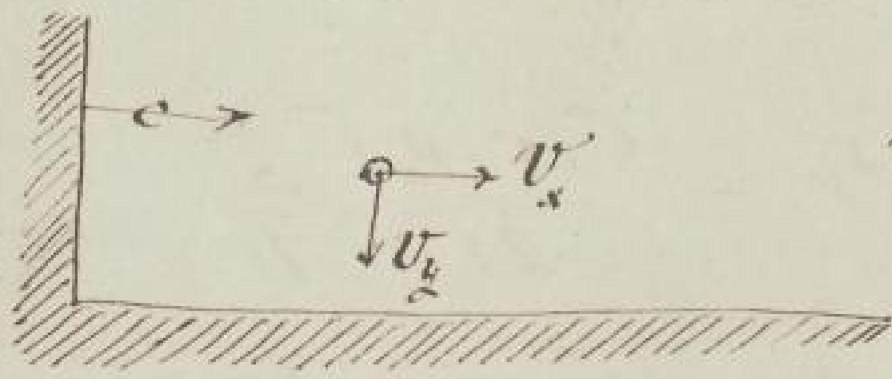
SCHOLEFIELD & SON.

Messrs. G. CRADOCK & Co.,

WAKEFIELD.

Bewegungsverhältnisse

Fall fester Körper im horizontal bewegten Strome



Die Geschwindigkeit des Körpers zerfällt hier in eine horizontale u. vertikale Componente. Es sei die horizontale, in der Richtung des Stromes liegende $= v_x$ u. die vertikal abwärts gehende v_y.

Die Abwärtsbewegung kann nicht anders, als früher in ruhendem Wasser gedacht werden, wodurch man auch hier die Gleichung erhält

$$y = \frac{\beta}{\mu} \ln\left[\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}\right] \quad x = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} \quad v_y = \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1} \cdot \beta$$

$$v_{y_m} = \beta = \alpha \sqrt{d(\varepsilon-1)}$$

Für eine constante Geschwindigkeit setzen wir

$$y = t \cdot \beta = t \cdot \sqrt{\frac{2(\varepsilon-1)V\gamma}{\zeta F}} = \alpha t \cdot \sqrt{(\varepsilon-1)d}$$

In horizontaler Richtung wirkt nur der Wasserdruck der folgenden Wassergeschwindigkeit c. Ist die Bewegung des Körpers in horiz. Richtung v_x, so drückt das Wasser gegen den Körper mit der Kraft $P = \zeta \frac{(c-v_x)^2}{2g} \cdot F\gamma$

Außerdem hat man

$$\frac{p}{g} = \frac{P}{G} \therefore p = \frac{g}{G}\cdot P = \frac{g}{V\gamma\varepsilon}\cdot P \text{ also}$$

$$p = \frac{\zeta g}{V\gamma\varepsilon}\cdot\frac{(c-v_x)^2}{2g} F\gamma = \frac{\zeta(c-v_x)^2}{2\varepsilon}\cdot\frac{F}{V}$$

$$\therefore \frac{F}{V} = \frac{3}{2d} \text{ gibt } p = \frac{3\zeta(c-v_x)^2}{4\varepsilon d}$$

Setzt man nun $\frac{3\zeta}{4\varepsilon d} = \varphi$ so ist

$$p = \varphi(c-v_x)^2 = \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$\partial t = \frac{\partial v_x}{\varphi(c-v_x)^2} \therefore t = \frac{1}{\varphi}\int\frac{\partial v_x}{(c-v_x)^2}$$

$$c - v_x = z$$

$$\partial v_x = -\partial z \text{ also}$$

$$t = -\frac{1}{\varphi}\int\frac{\partial z}{z^2} = -\frac{1}{\varphi}\int z^{-2}\partial z = \frac{1}{\varphi}z^{-1} + \text{Const}$$

$$t = \frac{1}{\varphi(c-v_x)} + \text{Const}$$

für $t = 0$ ist auch $v_x = 0$, also

$$0 = \frac{1}{\varphi c} + \text{Const} \text{ u. daher}$$

$$t = \frac{1}{\varphi(c-v_x)} - \frac{1}{\varphi c}$$

Es ist hierin ct der Weg bei constanter Geschw. u. $\frac{4gd}{3\zeta}\ln\left[\frac{3\zeta}{4gd}ct+r\right]$ die Verminderung derselben wegen der geringeren Geschwindigkeit am Anfange.

Wäre es möglich, aus den beiden Gleichungen

$$y = \frac{\beta}{\mu}\ln\frac{(e^{\mu t}+r)^2}{4e^{\mu t}} \text{ u.}$$

$$x = ct - \frac{1}{\zeta}\ln(\zeta ct + r) \text{ das}$$

t zu eliminiren, so könnte man eine genaue Gleichung der Curve erzeugen.

Da dies aber nicht gut thunlich, so muß man sich mit Annäherungswerthen helfen.

Setzt man nämlich annähernd

$x = ct$ also $t = \frac{x}{c}$, so geht obige Gleichung für y über in

$$y = \frac{\beta}{\mu}\ln\frac{(e^{\frac{\mu x}{c}}+r)^2}{4e^{\frac{\mu x}{c}}}$$

Nimmt man aber auch für y den Ausdruck, nach

$$y = \alpha t\sqrt{(\varepsilon-1)d}$$, so erhält man

$$y = \frac{\alpha x}{c}\sqrt{(\varepsilon-1)d}$$ also die Gleichung einer geraden Linie, wie auch nicht anders erwartet werden konnte, da in beiden Gleichungen ($x = ct$ u. $y = \alpha t\sqrt{(\varepsilon-1)d}$) die constanten Anfangsgeschwindigkeiten berücksichtigt worden waren.

Die Neigung dieser Linie ist dann

$$tg\,\beta = \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{c}\sqrt{(\varepsilon-1)d}$$

Aus $y = \frac{\alpha x}{c}\sqrt{(\varepsilon-1)d}$ ergiebt sich umgekehrt

$$x = \frac{cy}{\alpha\sqrt{(\varepsilon-1)d}}$$

Für 2 verschiedene Körper hat man dann bei gleichem y die gleichen Ausdrücke

$$x_1 = \frac{cy}{\alpha\sqrt{(\varepsilon_1-1)d_1}}$$

u. $$x_2 = \frac{cy}{\alpha\sqrt{(\varepsilon_2-1)d_2}}$$

$$\varphi t = \frac{1}{c - v_x} - \frac{1}{c}$$

$- c + v_x$

$$c(c - v_x)\varphi t = c - (c - v_x)$$
$$= v_x$$

$$c^2\varphi t - v_x c \varphi t = v_x$$

$$c^2\varphi t = v_x c\varphi t + v_x = v_x(c\varphi t + 1)$$

$$\therefore v_x = \frac{c^2\varphi t}{c\varphi t + 1} = \frac{\frac{3\zeta}{4\varepsilon d} c^2 t}{\frac{3\zeta}{4\varepsilon d} ct + 1} = \frac{3\zeta c^2 t}{3\zeta ct + 4\varepsilon d}$$

Bei großem c u. kleinem d kann man das Glied $4\varepsilon d$ vernachlässigen u. erhält

$$v_x = \frac{3\zeta c^2 t}{3\zeta ct} = c$$

u. daher für diesen Fall $x = v_x t = ct$

Genauer wird der horizontale Weg x auf folgende Weise bestimmt:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi c^2 t}{\varphi ct + 1} \text{ also}$$

$$x = \int \frac{\varphi c^2 t}{\varphi ct + 1} dt = c \int \frac{\varphi ct \, dt}{\varphi ct + 1}$$

Setzt man hierin

$$\varrho c t + r = z$$

$$\varrho c t = z - r$$

$\varrho c\, dt = dz$; $dt = \frac{1}{\varrho c} \cdot dz$, so erhält

man $x = c \cdot \frac{1}{\varrho c} \int \frac{z-r}{z} dz = \frac{1}{\varrho} \int \left(1 - \frac{1}{z}\right) dz$

$$x = \frac{1}{\varrho}\left[\int dz - \int \frac{dz}{z}\right] = \frac{1}{\varrho}\left[z - \ln z\right] + \text{Const}$$

$$x = \frac{1}{\varrho}\left[(\varrho c t + r) - \ln(\varrho c t + r)\right] + \text{Const}$$

$$0 = \frac{r}{\varrho} + \text{Const}$$

$$x = \frac{1}{\varrho}\left[\varrho c t + r - \ln(\varrho c t + r)\right] - \frac{1}{\varrho}$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left[\varrho c t + r - \ln(\varrho c t + r) - r\right]$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left[\varrho c t - \ln(\varrho c t + r)\right]$$

$$= c t - \frac{1}{\varrho} \ln(\varrho c t + r)$$

$$x = c t - \frac{42d}{3\zeta} \ln\left[\frac{3\zeta}{42d} c t + r\right]$$

und daher $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sqrt{(\varepsilon_2-1)\,d_2}}{\sqrt{(\varepsilon_1-1)\,d_1}}$$

Waren nun die entscheidenden Körper gleichfällig so gilt $d_1(\varepsilon_1-1) = d_2(\varepsilon_2-1)$; es ist dann

$$\frac{x_1}{x_2} = 1 \quad \text{d. i.} \quad x_1 = x_2$$

Vorher schon gleichfällig sortirte Körper werden daher im horizontalen Wasserstrom nicht mehr getrennt u. ausgeschieden: auf gleichentfernten Punkten des Gerinnes niederfallende Körner sind als gleichfällig zu betrachten

(Nach Rittinger)

Gleitende u. rollende Bewegung
auf den beiden horizontalen u.
geneigten Gerinnen.

(Nachtrag.)

<u>pag. 231 wird die Bewegung fester Körper im horizontalen Gerinne untersucht.</u>

Vorausgesetzt ist angenommen, daß der feste Körper stets am Boden des Gerinnes liege und hier einen Druck ausübe, welcher $= G_1 = V\gamma(\varepsilon - 1)$ diesem entspricht eine Reibung, welche proportional diesem Gewichte ist u. = dem Widerstand Q gegen das strömende Wasser gesetzt werden kann.

Man hat daher $Q = \mu G_1 = \mu V \gamma (\varepsilon - 1)$

u. für runde Kugeln $= \frac{\mu \gamma (\varepsilon - 1) \pi d^3}{6}$

Die auf den Körper wirkende Kraft des strömenden Wassers kann = gesetzt werden dem Widerstande des ruhenden Wassers gegen einen frei fallenden Körper, d. h. treiben wie früher, daher kann:

$$P = \zeta F \frac{c^2}{2g} \gamma \qquad c = \text{Wassergeschw.}$$

oder für Kugeln

$$P = \zeta \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot \gamma \frac{\pi d^2}{4}$$

Soll der Körper liegen bleiben, so hat man

$$Q = P \quad \text{also für Kugel}$$

$$\frac{\mu \gamma (\varepsilon - 1) \pi d^3}{6} = \zeta \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot \gamma \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\zeta \frac{c^2}{4g} = \frac{m}{3}(\varepsilon-1)d \quad \text{, also}$$

$$c = 2\sqrt{\frac{m}{3\zeta} g d(\varepsilon-1)} \quad \text{od.}$$

also bei derselben Neigung $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{d_1(\varepsilon_1-1)}}{\sqrt{d_2(\varepsilon_2-1)}}$

$$d = \frac{3\zeta c^2}{4 m g(\varepsilon-1)}$$

Für 2 versch., bei der Geschwindigkeit c liegen bleibende Körner hat man also

$$d_1 = \frac{3\zeta c^2}{4 m g(\varepsilon_1-1)}$$

$$d_2 = \frac{3\zeta c^2}{4 m g(\varepsilon_2-1)}$$

also $\frac{d_1}{d_2} = \frac{(\varepsilon_2-1)}{(\varepsilon_1-1)}$

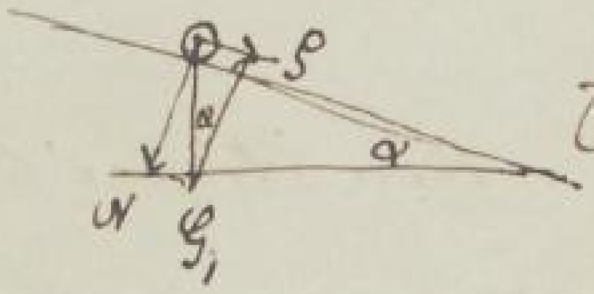
d. h.: Es verhalten sich die Durchmesser der bei gleichen Geschwindigkeiten auf einer horizontalen Fläche liegen bleibenden Körper umgekehrt wie die um die Einheit verminderten spec. Gewichte derselben.)

Dieß sind also die früher betrachteten gleichfälligen Körper.

Annähernd also gleichfällig sortirte Kugeln

Weiten also auch bei gleicher Stromgeschwindigkeit im horizontalen Strome liegen.

Setzt man eine schiefe, unter α geneigte Ebene voraus, so sind folgende Abänderungen nöthig:



Es zerfallen hier G_1 in

$$N = G_1 \cos\alpha$$

$$\text{u. } S = G_1 \sin\alpha$$

N erzeugt die Reibung $R = mN = m G_1 \cos\alpha$

und es ist der Widerstand

$$Q = R - S = m G_1 \cos\alpha - G_1 \sin\alpha$$
$$= G_1 (m \cos\alpha - \sin\alpha)$$

Der Wasserstoß ist ein wahrer

$$P = \zeta F \frac{c^2}{2g}\gamma \text{ u. für den Stoßgrößen}$$

Ist $\zeta F \frac{c^2}{2g}\gamma = G_1 (m\cos\alpha - \sin\alpha)$

und für Kugeln

$$\zeta \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{c^2}{2g}\cancel{\gamma} = \frac{\pi d^3}{6}\cancel{\gamma}(\varepsilon - 1)(m\cos\alpha - \sin\alpha)$$

woraus $$c = 2\sqrt{\frac{d}{3}\cancel{\gamma}(\varepsilon-1)(m\cos\alpha - \sin\alpha)\frac{g}{\zeta}}$$

und $$d = \frac{3c^2\zeta}{4\cancel{\gamma}(\varepsilon-1)(m\cos\alpha - \sin\alpha)g}$$

für 2 verschiedene Körper, welche bei gleicher Stromgeschwindigkeit liegen bleiben, hat man also ebenfalls $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_1 - 1}$

also ganz dieselben Verhältnisse wie im horizontalen Strome.

Bei der Mehlführung sortirte Körper brauchen nicht weiter getrennt werden, wenn man sie ~~in~~ einem gleichen Strom auf schiefer Ebene übergiebt; höchstens kann die Sortirung noch weiter fortgesetzt werden.

Herde

Wenn daher die auf der Mehlführung sortirten Schlämme auf Heerden verwaschbar sind, so müssen andere Verhältnisse auf der Herdfläche vorwalten, wie im Strome auf schiefer Ebene. Diese andere Verhältnisse werden bedingt durch die Tiefe des Stromes. Während in der Mehlführung ein verhältnissmäßig tiefer Strom vorhanden ist, darf derselbe auf der Herdfläche nur dünn sein.

Während die Tiefe des Stromes in der Mehlfg

führung von dem Korndurchmesser unabhängig
ist, ist sie auch hierbei eine Function desselben.
Von dieser Voraussetzung geht Cavernaish aus.
Er sucht die Ursache zunächst in falschen Annahmen
bei Aufstellung voriger Formeln.
Während die gleitende Reibung hier angenommen
wird, führt er jetzt die wälzende Reibung ein
u. verfährt dabei auf folgende Weise: (Rg 733)
Nach Versuchen von Coulomb u. Morin an Wagenrädern soll die wälzende Reibung gleichmäßig mit dem Druck und umgekehrt mit der Dicke des sich wälzenden Körpers wachsen. Coulomb & Morin.

Horizontal!

Ist D der Druck, d der Durchmesser u. C ein Coeff. so ist die Kraft zur Überwindung der wälz. Reibung $R = C\frac{D}{d}$ für Kugeln, da $G = V_{Kug} = \frac{\pi d^3}{6}\gamma(\varepsilon-1)$

$$= \cancel{\frac{\varrho d^2 \gamma(\varepsilon-1)\pi}{6}} = \frac{C\pi d^3\gamma(\varepsilon-1)}{6d} = \frac{C\pi\gamma(\varepsilon-1)}{6}d^2$$

Die Stoßkraft im horiz. Wasserstrom ist nach dem Früheren $P = \zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma$; $F = \frac{\pi d^2}{4}$

$$P = \zeta\frac{\pi}{4}\cdot\frac{c^2}{2g}\gamma d^2$$

bleibt der Körper liegen, so sind beide Größen gleich und man hat:

$$\zeta \cdot \frac{\pi}{4} \frac{c^2}{2g} \gamma d^2 = \ell \frac{\pi}{6} \gamma (\varepsilon - 1) d^3$$

u. $c = 2\sqrt{\frac{\ell g (\varepsilon - 1)}{3\zeta}}$

Bei Körpern vom sp. G. ε_1 u. ε_2 hätte man also

$$c_1 = 2\sqrt{\frac{\ell g (\varepsilon_1 - 1)}{3\zeta}}$$

$$c_2 = 2\sqrt{\frac{\ell g (\varepsilon_2 - 1)}{3\zeta}} \quad \text{u.} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}} \quad \text{d. h.}$$

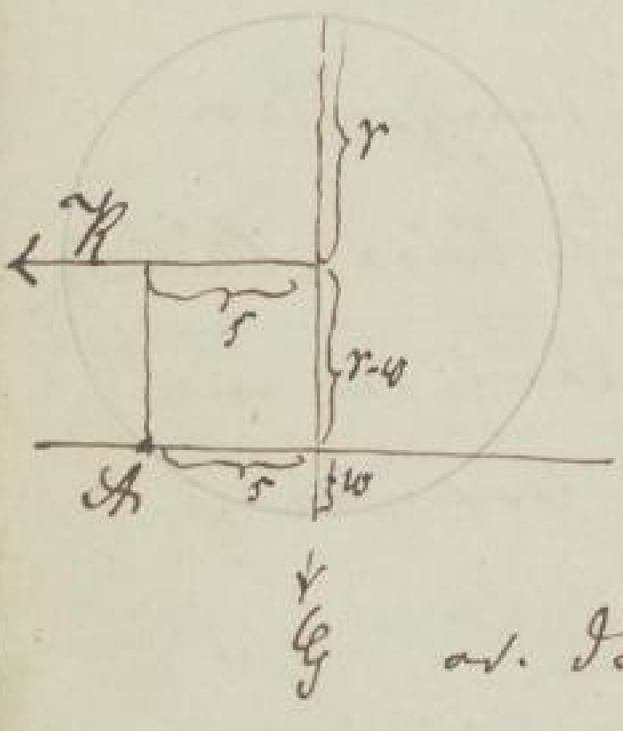
Die Geschwindigkeiten, bei welchen Körper von verschiedenem sp. G. im horiz. Wasserstrom fortgeführt werden, verhalten sich wie die $\sqrt{\ }$ aus dem um die Einheit verminderten sp. Gew. zu erhalten.

Dies ist offenbar gegen die Erfahrung.
In der Formel fehlt der d Durchmesser, der sicher von Einfluß ist, also ist das Gesetz zu beweisen hier nicht anwendbar.

Wahrscheinlicher ist das Gesetz von Dupuit:

$$R_1 = C \cdot \frac{D\,G}{\sqrt{d_1}}$$

was sich aus durch folgende Betrachtung ergiebt:



Heißt R die um A kippende Kugel, so hat man Gleichgewicht

für $R(r-w) = G s$

d.i. $R = \frac{s}{r-w} \cdot G$

od. da w sehr klein angenommen wird: $R = \frac{s}{r} G$

Nun ist aber $w : s = s : 2r - w$

$$s^2 = (2r-w)w$$

$$s = \sqrt{2rw - w^2}$$ $w^2 = 0$ wegen der Kleinheit.

$$s = \sqrt{2w} \cdot \sqrt{r}$$ also

$$R_1 = \frac{\sqrt{2w} \cdot \sqrt{r}}{r} \cdot G = \sqrt{2w}\,\frac{G}{\sqrt{r}} = C\,\frac{G}{\sqrt{r}} = C_1\,\frac{G}{\sqrt{d_1}}$$

also für Kugeln im Wasser

$$R = C\,\frac{\pi}{6} \cdot \gamma(\varepsilon - 1)\,\frac{D^3}{\sqrt{d}}$$ u. wie früher

$$P = \zeta \cdot F\,\frac{c^2}{2g}\,\gamma$$ also $$C\,\frac{\pi}{6}\,\gamma(\varepsilon-1)\,\frac{d^3}{\sqrt{d}} = \zeta F\,\frac{c^2}{2g}\,\gamma$$

$d_1 = \frac{a_1}{(\varepsilon_1-1)^2}$

$d_2 = \frac{a_1}{(\varepsilon_2-1)^2}$

$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_1-1}\right)^2$

Für die gleichen specif. Gewichte also unserem früheren Beisp.

$\frac{d_{2,6}}{d_{7,5}} = \frac{7,5-1}{2,6-1} = \frac{6,5}{1,6} = 4$

hier aber

$\frac{d_{2,6}}{d_{7,5}} = \left(\frac{7,5-1}{2,6-1}\right)^2 = 16$

woraus $c = 2\sqrt{\frac{\varepsilon g(\varepsilon-1)\sqrt{d}}{3\zeta}} = \mu\sqrt{(\varepsilon-1)\sqrt{d}}$

u.

woraus $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1-1}}{\sqrt{\varepsilon_2-1}}$

$$d = \left(\frac{3\zeta c^2}{4\varepsilon g}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{a_1}{(\varepsilon-1)^2}$$

Hieraus verhalten sich die Durchmesser der auf einer horizontalen Fläche liegen bleibenden Körper umgekehrt wie die Quadr. der um die Einheit verminderten sp. Gewichte.

~~bei gleichem sp. G. hat man~~

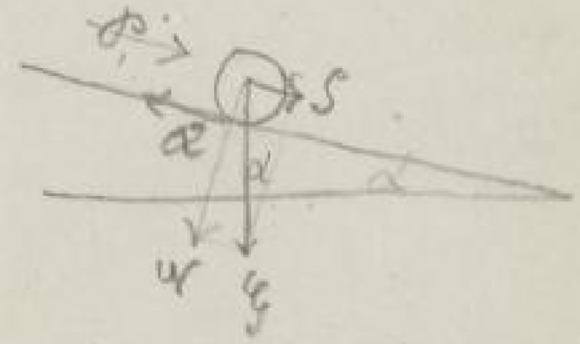
~~$\frac{c_1^4}{c_2^4} = \frac{d_1}{d_2}$~~ Nicht passend!

~~d.h. die Durchmesser verhalten sich direct wie die 4ten Potenzen der Wasser Geschwindigkeiten.~~

In der Praxis kann man nun aber beobachten daß von einer Trennung größere Körner noch fortgesetzt werden, während kleinere derselben Substanz auf dem Boden liegen bleiben. Es kommt diese Erscheinung daher, daß die Geschwindigkeit des Wassers auf den Boden zu abreisst. Kleine Körner liegen daher natürlich ganz in einer Zone mit geringerer Geschwindigkeit, während größere weiter hinauf ragen und in ihrem oberen Theile von einer stärkeren Geschwindigkeit erfasst werden. Dies ist von besonderer Wichtigkeit für das Verwaschen auf Heerden.

Für Ueberschläge können wir obige Formeln recht gut gebrauchen.

Bewegungsgesetze für die schiefe Ebene mit Berücksichtigung der wälzenden Reibung.



Hier wirkt außer dem Wasserstoße

$$P_1 = \zeta_1 F \frac{c^2}{2g}\gamma$$ auf die in der Richtung

der schiefen Ebene liegende Componente des Korngewichtes $G.\sin\alpha$ hinzu, so daß der ganze Stoß

$$P_1 + S = \zeta F \frac{c^2}{2g}\gamma + G.\sin\alpha$$

u. für Kugeln

$$P_1 + S = \zeta_1 \frac{\pi}{4}\frac{c^2}{2g}\gamma d^2 + \frac{\pi}{6}\gamma(\varepsilon-1)\sin\alpha\, d^3$$

Für die Fortbewegung hat man d. accelerirende Kraft

$P = P_1 + S - Q$

woraus sich ergiebt d. Accel.

$p = \frac{g}{G}.P = \frac{dv}{dt}$

ferner

$ds = v\,dt.$

Für die Kugelbahn hat man

$P_1 + S - Q = 0$

od. $P_1 + S = Q$

Der Normaldruck ist jetzt

$$G_1 \cos\alpha$$

und daher der Widerstand der reibenden Reibung

$$Q = \varphi \cdot \frac{G_1 \cos\alpha}{\sqrt{d_1}}$$

$$= \varphi \cdot \frac{\pi}{6} \gamma (\varepsilon - 1) \cos\alpha \frac{d^3}{\sqrt{d}}$$

Soll der Körper liegen bleiben, so folgen

$$\zeta \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{c^2}{2g} \gamma d^2 + \frac{\pi}{6} \gamma (\varepsilon - 1) \sin\alpha\, d^3$$

$$= \varphi \frac{\pi}{6} \gamma (\varepsilon - 1) \cos\alpha \frac{d^3}{\sqrt{d_1}}$$

$$\zeta \frac{c^2}{4g} + \tfrac{1}{3} (\varepsilon - 1) \sin\alpha\, d = \tfrac{1}{3} \varphi (\varepsilon - 1) \cos\alpha \sqrt{d_1}$$

und hieraus entwickelt sich

$$c = 2 \sqrt{\frac{g(\varepsilon - 1)}{3\,\zeta} \left[\varphi \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha \right]}$$

u.

$$d = \frac{b^2(\varepsilon - 1) - 2aq - b\sqrt{\varepsilon - 1}\sqrt{b^2(\varepsilon - 1) - 4aq}}{2q^2(\varepsilon - 1)}$$

wenn $a = \zeta \frac{c^2}{4g}$

$\frac{\varphi}{3} \cos\alpha = b$

u. $\tfrac{1}{3} \sin\alpha = q$

die größten Wassergeschwindigkeiten, wobei Körner von gleicher Größe auf dem Heerde liegen bleiben, verhalten sich also, wie die Quadratwurzeln aus dem um die Einheit verminderten spec. Gewichte der Körner.

Die Durchmesser der bei gleicher Geschw. liegen bleibenden Körner werden hingegen durch eine sehr complicirte Funktion ausgedrückt.

Setzt man in die Gleichung

$$c = 2\sqrt{\frac{g(\varepsilon-1)}{3\zeta}\left[\zeta \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha\right]}$$

für d, α u. ζ bestimmte Werthe ein

so erhält man einen gewissen Werth X

für $\left[\zeta \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha\right] = X$

Verfährt man ebenso mit g, ε u. ζ, so erhält man die Geschwindigkeit, welche den Körnern vom Durchmesser d u. dem sp. G. ε zukommt.

Löst man die Gleichung $\left[\zeta \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha\right] = X$

nach d auf, so erhält man nach u. nach:

$$\sin\alpha \cdot d - \rho\cos\alpha\sqrt{d} = -x$$

$$d - \rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{d} = -\frac{x}{\sin\alpha}$$

Setzt man $d = y^2$ u. $\sqrt{d} = y$, so geht die Gleichung über in

$$y^2 - \rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, y = -\frac{x}{\sin\alpha}$$

$$y^2 - \rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, y + \left(\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}$$

also

$$y = \frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}$$

$$y^2 = d$$

$$d = \left[\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}\right]^2$$

Es existiren also 2 Werthe von d für welche die Geschwindigkeit dieselbe ist, nämlich

$$d_1 = \left[\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}\right]^2$$

$$d_2 = \left[\frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin \alpha}}\right]^2$$

von denen der eine mit dem ursprünglich angenommenen, zur Berechnung von x dienenden gleich sein wird.

Es werden übrigens solange reelle Werthe resultiren, solange die Bedingung erfüllt ist, dass

$$\left(\frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2}\right)^2 > \frac{x}{\sin \alpha}$$

Die beiden reellen Werthe sind verschieden, d_1 wird jedesmal grösser sein als d_2. Mit welchem der beiden Werthe der anfänglich angenommene übereinstimmt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung

$$\sqrt{d_1} = \frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin \alpha}}$$

$$\sqrt{d_2} = \frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{e \operatorname{ctg} \alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin \alpha}}$$

$$\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} = e \operatorname{ctg} \alpha$$

ist nun $2\sqrt{d_0} > \varrho \operatorname{ctg}\alpha$

od. $\sqrt{d_0} > \left(\frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^2$

so entspricht es dem grösseren u. umgekehrt dem kleinern Werthe, im ersten Falle ist also $d_0 = d_1$, im 2ten Falle $d_0 = d_2$

<u>Beispiel.</u>

Es sei der Durchmesser $d_0 = 1/5^{mm} = 0{,}2^{mm} = 0{,}0002^{m}$

$\varrho = 0{,}008165$ (nach Sparre)

$\alpha = 10^{\circ}$

$\varepsilon = 7{,}5$ (Bleiglanz)

$g = 9{,}809^{m}$

$C = 0{,}6$

$\log d_0 = 0{,}3010300 - 4$

$\log \varrho = 0{,}9119562 - 3$

$\log \sin\alpha = 9{,}2396702 - 10$

$\log \cos\alpha = 9{,}9933514 - 10$

$\log \operatorname{ctg}\alpha = 0{,}7536812$

$\log(\varepsilon - 1) = \log 6{,}5 = 0{,}8129134$

$\log g = \log 9{,}809 = 0{,}9916247$

$\log C = 0{,}6 = 0{,}7781513 - 1$

Hierauf zunächst wurde

$$x = \cancel{\sin \alpha}\ \varepsilon \cos\alpha \sqrt{d} - \sin\alpha\, \partial$$

bestimmt:

$$\lg \varepsilon = 0{,}9119562 - 3$$
$$\lg \cos\alpha = 9{,}9933514 - 10$$
$$\lg \sqrt{d} = 0{,}1505150 - 2$$
$$N.\lg\ 0{,}0558226 - 4 = \underline{0{,}00011372} = \varepsilon \cos\alpha \sqrt{d}$$

$$\lg \sin\alpha = 9{,}2396702 - 10$$
$$\lg \partial = 0{,}3010300 - 4$$
$$N.\lg\ 0{,}5407002 - 5 = \underline{0{,}00003473} = \sin\alpha\, \partial$$
$$0{,}00007899 = \varepsilon \cos\alpha \sqrt{d} - \sin\alpha\, \partial = x$$

Hieraus berechnet sich zunächst

$$c = 2 \sqrt{\frac{g(\varepsilon - 1)}{3\zeta} x}$$

$$\lg x = 0{,}8975721 - 5$$
$$\lg g = 0{,}9916247$$
$$\lg(\varepsilon - 1) = 0{,}8129134$$
$$0{,}7021102 - 3$$
$$\lg 3\zeta = 0{,}2552726$$
$$\tfrac{1}{2} \big/\ 0{,}4468376 - 3$$
$$0{,}7234188 - 2$$
$$\lg 2 = 0{,}3010300$$
$$N \lg\ 0{,}0244488 - 1 = 0{,}10579^{m} = c$$

Wir gehen nun zur Berechnung der Werthe von d_1 u. d_2 aus der Formel

$$d = \left[\frac{e\,ctg\,\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e\,ctg\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}\right]^2$$ über

$\lg e = 0{,}9119562-3$

$\lg ctg\,\alpha = 0{,}7536812$

$0{,}6656374-2$

$\lg 2 = 0{,}3010300$

$N\lg 0{,}3646074-2 = 0{,}023153 = \frac{e\,ctg\,\alpha}{2}$

Ist nun $\sqrt{d_0} = \sqrt{0{,}0002} = 0{,}01414$

also $\sqrt{d_0} < \frac{e\,ctg\,\alpha}{2}$

wir werden daher noch einen größeren, als den schon angenommenen Werth für den Durchmesser finden, es ist also $d_0 = d_2$, ferner

$N.\lg\left(\frac{e\,ctg\,\alpha}{2}\right)^2 = N\lg 0{,}7292148-4 = 0{,}00053606$

$\lg x = 0{,}8975721-5$

$\lg \sin\alpha = 0{,}2396702-1$

$N.\lg 0{,}6579019-4 = 0{,}00045489 = \frac{x}{\sin\alpha}$

$$\left(\frac{\cot g\,\alpha}{2}\right)^2 = 0{,}00053606$$

$$-\frac{x}{\sin\alpha} = 0{,}00045489$$

$$\lg 0{,}00008117 = 0{,}9093955-5$$

$$\tfrac{1}{2}\lg \text{ - - - - - - } = 0{,}9546977-3$$

$$N\lg 0{,}9546977-3 = 0{,}0090094 = \sqrt{\left(\frac{\cot g\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{\cot g\,\alpha}{2} = 0{,}0231530$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\cot g\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}} = 0{,}0090094$$

$$0{,}0321624 = \left[\frac{\cot g\,\alpha}{2} + \sqrt{\quad}\right]$$

$$0{,}0141436 = \left[\frac{\cot g\,\alpha}{2} - \sqrt{\quad}\right]$$

$$\lg 0{,}0321624 = 0{,}5073430-2$$

$$54$$

$$0{,}5073484-2$$

$$2$$

$$N\lg 0{,}0146968-3 = 0{,}00103442^{m} = d_1$$

$$\lg 0{,}0141436 = 0{,}1505415-2$$

$$184$$

$$0{,}1505599-2$$

$$2$$

$$N\lg 0{,}3011198-4 = 0{,}000200\cancel{04} = d_2$$

wie anfangs angenommen wurde.

Wir haben also 2 reelle positive Werthe für δ gefunden. Sind dieselben richtig, so müssen sie gleiche Werthe für x liefern.

Für $\delta = 0{,}0002$ hatten wir

$$[\varepsilon \cos\alpha \sqrt{\delta} - \delta \sin\alpha] = 0{,}00007899$$

Setzen wir für $\delta = 0{,}00103442$, so haben wir:

$$\log \varepsilon = 0{,}9119562 - 3$$
$$\log \cos\alpha = 9{,}9933514 - 10$$
$$\log \sqrt{\delta} = \underline{0{,}5073484 - 2}$$
$$N\log\ 0{,}4126560 - 4 = 0{,}000258616$$

$$\log \sin\alpha = 9{,}2396702 - 10$$
$$\log \delta = \underline{0{,}0146968 - 3}$$
$$N\log\ 0{,}2543670 - 4 = \underline{0{,}000179625}$$
$$0{,}00007899 = x$$

also beide Durchmesser ergeben gleiche Werthe für x u. daher auch gleiche Geschwindigkeiten.

$$d = \left[\frac{p\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}\,\right]^2$$

Für $d_1 = 0{,}00103442$ Meter

$d_2 = 0{,}0002$ "

$0{,}00123442$ "

also $0{,}00061721^m = d_3$ als mittl. Durchm.

Berechnen wir für diese d_3 x, so erhalten

wir $x = 0{,}000092589$ gegen $x = 0{,}00007899$ aus den ersten Versuch

also einen größeren Werth, als vorhin, welchem entspricht d_3 auch eine größere Geschwindigkeit.

Berechnen wir auf bekannte Weise den 2ten dazu gehörigen Durchmesser, so erhalten

wir $d_1 = 0{,}0006172^m$ wie oben

$d_2 = 0{,}0004606$ also beide

innerhalb der ersten Grenzen, u. weniger weit von einander abstehend.

Dies führt zu der Vermuthung, daß auch ein Durchmesser vorhanden sein muß, für welchen ebenso 2te bei gleicher Geschwindigkeit giebt. Dies findet statt für

$$\left(\frac{e\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\right)^2 = \frac{x}{\sin\alpha} \quad \text{od.} \quad x = \frac{e^2\cos\alpha^2}{4\sin\alpha}$$

und es ist dann $d = \left[\frac{\rho^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right]^2 = 0{,}00053606$

Für diesen Werth von d haben wir ~~dann~~ $x = 0{,}000093084$

und ist also c dafür ein Maximum, nämlich $c = \underline{0{,}12495}$ Meter.

Daß für obigen Werth c ein Maximum wird, ergiebt sich auch unmittelbar durch Differenziren:

$$\partial c = 2\sqrt{\frac{g(\varepsilon-1)}{3\zeta}} \cdot \partial . \sqrt{\rho \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha}$$

$$= \mu \frac{\frac{\rho \cos\alpha}{2\sqrt{d}} - \sin\alpha}{2\sqrt{\rho \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha}} \, \partial . d$$

$$\frac{\partial . c}{\partial . d} = \mu \frac{\frac{\rho \cos\alpha}{2\sqrt{d}} - \sin\alpha}{2\sqrt{\rho \cos\alpha \sqrt{d} - d \sin\alpha}}$$

Setzt man den 2ten Ausdr. = 0, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{-A-B}{C} \quad \text{worin } A, B \text{ u. } C$$

lauter positive Größen sind, also kein reeller Werth für c resultiren.

Es ist also für:

$$\mu \cdot \frac{\frac{e \cos\alpha}{2\sqrt{\alpha}} - \sin\alpha}{2\sqrt{e \cos\alpha \sqrt{\alpha} - \alpha \sin\alpha}} = 0$$

od.

$$\frac{e \cos\alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \sin\alpha$$

$$\left[\frac{e \cot\alpha}{2}\right]^2 = \alpha$$

ein Maximum.

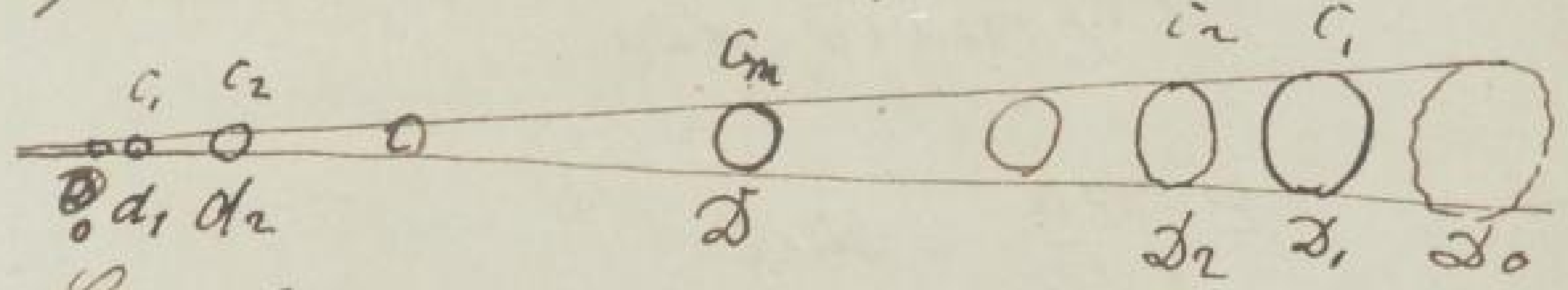
Setzt man den Werth für α in die Gleichung für c ein, so erhält man für das Maximum den Ausdruck

$$c_m = 2\sqrt{\frac{g(\varepsilon-1)}{3\varepsilon}} \cdot \sqrt{e\cos\alpha \, e\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{e^2\cos\alpha^2}{4\sin\alpha}}$$

$$c_m = 2\sqrt{g\frac{\varepsilon-1}{3\varepsilon}} \cdot \frac{e\cos\alpha}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha}}$$

$$c_m = e\cos\alpha \sqrt{\frac{g(\varepsilon-1)}{3\varepsilon\sin\alpha}}$$

Verhältnissen und die jetzt beobachteten Erscheinungen folgendermaßen vorzustellen:



Hier bestimmte Neigung des Gerinnes voraus gesetzt, giebt es für eine bestimmte Geschwindigkeit c_1 2 Korndurchmesser zwischen deren Gränzen bei welcher die betreffenden Kugeln gerade noch liegen bleiben. Auf beiden Seiten darüber hinaus werden Körner von Durchmesser d_0 u. D_0 mit fortgeführt. Läßt man jetzt die Geschwindigkeit etwas wachsen, in c_2 übergehen, so findet man 2 Durchmesser d_2 u. D_2, welche Kugeln angehören, die bei dieser Geschwindigkeit gerade noch liegen bleiben, die darauf bei der kleineren Geschw. c_1 zurück bleiben. Geht man noch weiter, zu Geschwindigkeit c_3 c_4 etc über, so werden die betreffenden Durchmesser in immer engere Grenze geschlossen, immer weniger verschiedene Korngrößen bleiben im Gerinne liegen, bis man endlich zur Maximalgeschwindigkeit kommt, bei welcher bloß Körner vom Durchmesser D liegen bleiben, während alle größeren u. kleineren aus fortgeschafft werden.

Merkwürdig aber dies [illegible], [illegible] die Geschw. der [illegible] gehörige Durchmesser so groß sein können, daß [illegible] durch Q [illegible] werden.

Obige Folgerungen sind nur zwischen engen Grenzen richtig.

Aus dem Ausdruck $d = \left[\frac{c \, ctg\,\alpha}{2}\right]^2$

für die Maximalgeschw. u. folgt noch, daß das [illegible] nur die Neigung, [illegible] α maßgebend ist.

Man kann den Ausdruck auch schreiben

$$tg\,\alpha = \frac{c}{2\sqrt{d}} = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{d}}$$

Da $\frac{c}{\sqrt{d}}$ den Reibungswerth für den bestimmten Durchmesser d bezeichnet, so ist D dadurch bestimmt daß seine Tangente den halben Werth der Tangente des Reibungswinkels hat.

Setzt man in der Gleichung

$$c_m = \xi \cos\alpha \sqrt{\frac{g(\varepsilon - r)}{3\xi \sin\alpha}}$$ für ε verschiedene

Werthe, so erhält man

$$\frac{c_{m_1}}{c_{m_2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - r}}{\sqrt{\varepsilon_2 - r}}$$

mit dem spez. G. wachsen also auch die maxim. Geschwindigkeiten, die Durchmesser der Körner aber sind bei const. Neigung gleich.

Setzt man ferner in

$$\partial = \left[\frac{\xi \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right]^2$$

verschiedene Neigungen, so erhält man

$$\frac{\partial_1}{\partial_2} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_1^2}{\operatorname{ctg}\alpha_2^2}$$

mit der stärkeren Neigung werden also

Für den Maximalgeschw. entspr. Durchmesser kennen, die Maximalgeschw. würde aber auch bei größerer Neigung einen geringeren Werth an.

Der Zusammenhang zwischen den Durchmessern der kleinsten u. größten Geschwindigkeit ergiebt sich aus Folgendem: für d. kleinste Geschw. sind 2 Durchmesser:

$$\sqrt{d_1} = \frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}$$

$$\sqrt{d_2} = \frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^2 - \frac{x}{\sin\alpha}}$$

$$\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} = \varrho \operatorname{ctg}\alpha$$

nun ist aber $d_m = \left[\frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right]^2$ = der Durchmesser für d. größte zulässig Geschwindigkeit

also $\sqrt{d_m} = \frac{\varrho \operatorname{ctg}\alpha}{2}$

od. $2\sqrt{d_m} = \varrho \operatorname{ctg}\alpha$

u. also $\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2} = 2\sqrt{d_m}$

Hat man also die Grenzdurchmesser (d_1 u. d_2) (letztere das Sieb ablesen bestimmt) so findet man zunächst $d_m = \left[\frac{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}}{2}\right]^2$

ferner die Neigung des Gerinnes nach

$$tg\,\alpha = \frac{2}{2\sqrt{d_0}}$$

u. nur die größte u. kleinste Geschwindigkeit.

Aus diesen Betrachtungen leitet Sparre folgende Sätze ab:

1, Auf jedem Stoßherd (Gries. Mehl. Herd) kann man auf geneigter Fläche (Gerinne) einen Theil der spez. schweren Massen ganz rein darstellen.

2. Unter den einer bestimmten Geschwindigkeit c_{II} entsprech. Grenzwerthe d_1 u. d_2 hinaus bleiben keine Körner mehr ~~gegeben~~ Massen fr. J. liegen, sondern alle von größeren u. geringeren Durchmessern werden fortgewaschen.

Die Resultate desselben scheinen mit der größten Genauigkeit der Wirklichkeit zu entsprechen

Dies beruht auf der Bedeutung des Herdes als Classirapparat.

3, Dies gilt nur von der spez. schwersten Substanz, alle leichteren werden abgeführt.

4) Nehmen die Gänge weniger ab, u. d. z. weit über 300, 4
wachsen die Verluste ungemein, ja nehmen
bis die fattische Geschwindigkeit u. der Neigung eine
gesetzm. Co. wächst.

5) Je weniger rein aufbereitet wird, desto geringer sind die Verluste.

6) Sind aus bestimmte Korngrößen bei der verschied. Setzs. vorhanden, so erfolgt die Sep. am schärfsten, je größer die Unterschiede. C. z. B. Blei- u. größere Blendekörner.

dadurch auf gleichfällig versetzbar

7. Je gröber das Korn desto zu gedämmter Setzs., desto geringer die Neigung der Stöße, u. umgekehrt.
Sowohl 6 als 7 scheint das genannte Gesetz anzuzeigen.

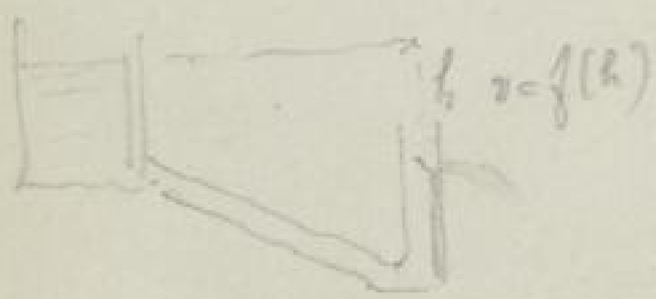
8. Je gröber das Korn desto größer die Geschwindigkeit, um es auf einer Fläche von geringer Neigung fortzuschieben. 8

Bei Wäschen in offenen Gerinnen od. auf Herden ist nun aber die Geschwindigkeit eine Function der Neigung der Herde, also eine Combination von Gefäll u. Neigung, wie sie nach 7 u. 8 nöthig ist, nicht herstellbar, aus dem Grunde auch diese Verfahren den obigen Ableitungen widersprechend.

Es ist vortheilhaft, ein Gemenge zu haben
in welchem Erzkörner von kleineren Durchmesser
gehören vorkommen mit Bergkörnern von
größeren Durchmesser, dies ist bei gleichfälligen
Sorten stets der Fall u. daher dieser
Sog. eine passende Vorarbeit für das
Verwaschen auf Herden.

9. Da die einer bestimmten Geschw. entspr.
Durchmesser eine Function der Neigung
des Herdes sind u. die Empfindlichkeit dieser
Function bei kleiner Neigung sehr groß
ist, so ist erklärlich, daß eine zufällige Änderung
in der Herdneigung eine wesentliche Störung
verursacht. Dies geschieht bei Stellherden
durch das ungleiche Aufsetzen der Schlicker.

Die sub 7 u 8 angegebenen Forderungen, welche
beim Stoßherde unerfüllt bleiben, sind
an den Herden construirt.



Continuirlicher Herd erfüllen (Bergwerksfreund
25 p. 775)

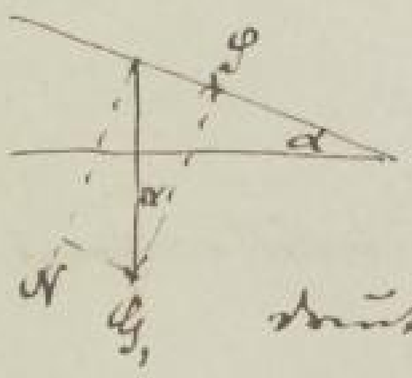
pag 775 – 782. Berechnung der Wirkung der Stoßheerde unter der Voraussetzung einer stetig wirkenden, abziehenden Kraft, anstatt der Ver-
[illegible] ..

Gleitende u. rollende Bewegung auf dem Boden horizontaler u. geneigter Gerinne.
(Gleitende u. wälzende Scherbe) nach Rittinger.

Die anfängliche Entwicklung ist mit der vorigen übereinstimmend.

Gewicht im Wasser $G_1 = V\gamma(\varepsilon-1)$

daher die Componente in der Richtung der schiefen Ebene



$$S = V\gamma(\varepsilon-1)\sin\alpha$$

Nach derselben Richtung wirkt der Druck des bewegten Wassers

$$P = \zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma$$

Die bewegende Kraft ist daher

$$V\gamma(\varepsilon-1)\sin\alpha + \zeta\frac{v^2}{2g}\cdot F\gamma$$

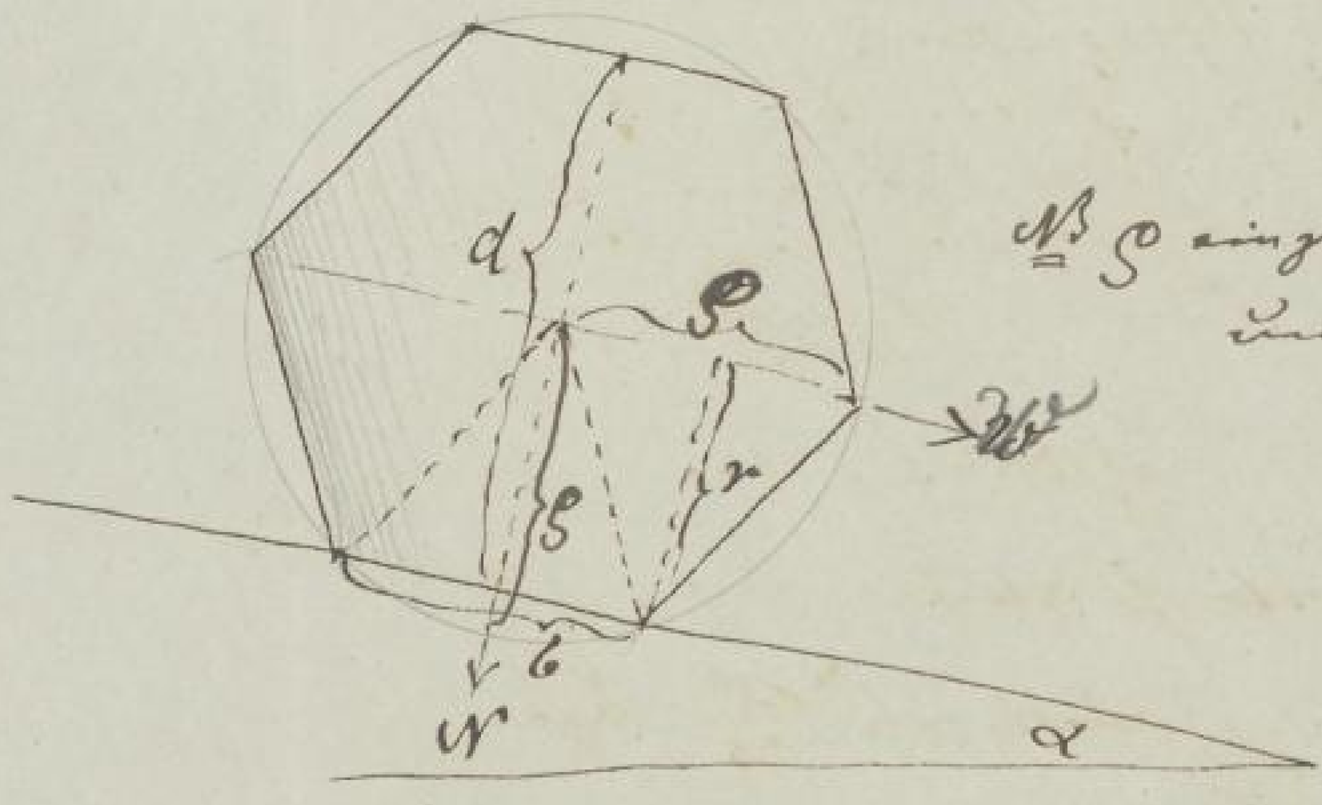
Dagegen wirkt die Reibung φN od. ϱN, je nachdem gleitende od. wälzende Bewegung vorhanden ist.

Für gleitende Reibung ist φ ein bestimmter Theil von N, also

$$R = \varphi V\gamma(\varepsilon-1)\cos\alpha$$

Das Weitere genau wie bei der vorigen.

Bei Beurtheilung der wälzenden Reibung nimmt Rittinger keinen allg. Standpunkt ein (sein Versuch zu ergeben) daher auch seine Formeln nicht allgemeinen Gehalt.
Er geht von einem Prisma aus dessen Längsaxe senkrecht gegen die Fallrichtung auf der schiefen Ebene liegt und durch den Wasserstoß um eine Kante gekippt werden soll



NB ς eingeschrieben ist entsprechend unnöthig!

Ist W die durch die Cyl. gehende Stoßkraft u. N die Normalkraft, so ist labiles Gleichgewicht

für $N \cdot \frac{1}{2}b = W \cdot r$

$N \cdot b = 2rW = dW$

also $W = \frac{b}{d} \cdot N$

die gleitende Reibung aus

$R = \varphi N$, es wird nun bei einem

solchen Fuhrwerk die gleitende od. rollende Reibung

eintreten, je nachdem R od. W ~~größer~~ kleiner ist, also

$R \gtrless W$

oder $\varphi N \gtrless \frac{b}{d} N$ d. h. $\varphi \gtrless \frac{b}{d}$

den Coeff. der gleitenden Reibung setzt

Rittinger nun $= 1/3$ so daß wir für gleitende

Reibung haben $1/3 < \frac{b}{d}$ od. $d < 3b$

Hieraus leitet Rittinger ab, daß das Eintreten

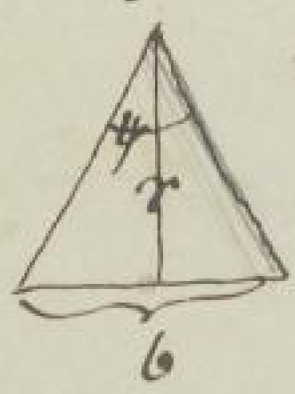
der einen od. andern Bewegungsart von der Zahl

der Scheibenseiten abhängt u. berechnet dieses

Verhältniß für verschiedene Scheiben, wobei, um

mit der Figur in Einklang zu bleiben, immer

eine gerade Seitenzahl vorausgesetzt wird.



Ist b die Länge einer Scheibenseite u. ψ der Centriwinkel

u. r der innere Radius, so hat

man die Beziehung

$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi = \frac{\frac{1}{2}b}{r} = \frac{b}{2r} = \frac{b}{d}$

Es wird also dieses Verhältniß durch die Tangente des

halben Centriwinkels ausgedrückt.

Und $tg\,\tfrac{1}{2}\psi = \frac{b}{d}$ ergiebt sich nun

ferner $d = ctg\,\tfrac{1}{2}\psi \cdot b$

Als Grenze ersetzten wir $d = 3b$

So lange also $ctg\,\tfrac{1}{2}\psi < 3$, solange werden die Scheiben gleitend fortschreiten.

Es ist nun

für das 4 seitige Sch. $\psi = 90°$ also $\frac{\psi}{2} = 45°$

6 " " " $= 60°$ " " $= 30°$

8 " " " $= 45°$ " " $= 22\tfrac{1}{2}°$

10 " " " $= 36°$ " " $= 18°$

aber $ctg\,45° = 1,00$

$ctg\,30° = 1,73$

$ctg\,22\tfrac{1}{2}° = 2,41$

$ctg\,18° = 3,08$

Die Grenze ist also beim 10 seitigen Scheiben zu suchen.

Alle Scheiben mit weniger als 10 Seiten gleiten, alle mit mehr Seiten rollen.

Rittinger betrachtet nun die beiden Bewegungsarten einzeln u. zwar für den Gleichgewichtszustand zwischen den entgegengesetzt wirk. Kräften, den er Scheibungsmoment.

63

1. Gleitende Schichten.

Bedingungsgleichung

$$V\gamma(\varepsilon-1)\sin\alpha + \zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma = \varphi V\gamma(\varepsilon-1)\cos\alpha$$

$$\zeta\frac{v^2}{2g}F\gamma = V\gamma(\varepsilon-1)(\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)$$ u. für Kugeln

$$\zeta\frac{v^2}{2g}\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^3}{6}(\varepsilon-1)(\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)$$

woraus sich die [illegible] ergiebt

$$v = 2\sqrt{\frac{d}{3}(\varepsilon-1)(\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{g}{\zeta}}$$

u. $$d = \frac{3v^2\zeta}{4(\varepsilon-1)(\varphi\cos\alpha-\sin\alpha)g}$$

Für $\varphi\cos\alpha=\sin\alpha$

oder $\varphi = \operatorname{tg}\alpha$ wird $v=0$, d.h. die Körper

rutschen bei dieser Neigung im ~~stillstehenden~~ Wasser, so wie nur die geringste Bewegung desselben eintritt.

$\varphi = 1/3$ giebt $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$

$\alpha = 18\tfrac{1}{2}^\circ$

Grössere Neigungswinkel können unter den gegebenen Bedingungen keine Schichten mehr erzeugen, da nicht C negativ wird, d.h. der Wasserstrom aufwärts geht.

Für $\alpha = 0$ tritt Stillstand ein, wenn

$$v = 2\sqrt{\frac{\alpha(\varepsilon-1)\varepsilon\cdot g}{3C}}$$ ist.

[illegible]

[illegible]

[illegible] α.

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln. \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}.$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$e^{x} - e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{2x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$e^{\frac{\mu t}{2}} - e^{-\frac{\mu t}{2}} = 2 + \frac{\mu^2 t^2}{4} + \cancel{\frac{16\mu^4 t^4}{1.2.3.4}} + \dots$$

$$= 2 + \frac{\mu^2 t^2}{4}$$

$$\frac{e^{\frac{\mu t}{2}} - e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} = 1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}$$

$$\lg n \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} - e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} = \lg n \left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}\right) = \lg n \left(\frac{\mu^2 t^2}{8} + 1\right)$$

$$\ln (x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln \left(\frac{\mu^2 t^2}{8} + 1\right) = \frac{\mu^2 t^2}{8} - \cancel{\frac{\mu^4 t^4}{128}} + \dots$$

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln \left[\frac{e^{\frac{\mu t}{2}} - e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}\right] = \frac{2\beta}{\mu} \ln. \left[\frac{\mu^2 t^2}{8} + 1\right] = \frac{2\beta}{\mu} \cdot \frac{\mu^2 t^2}{8} = \frac{\beta \mu t^2}{4}$$

$s = \frac{\beta \mu t^2}{4}$ worin $\beta\mu = \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \cdot g$

$$s = \frac{2(\varepsilon - 1)}{4\varepsilon} \cdot g t^2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{g t^2}{2}$$

d. $s = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) g \cdot \frac{t^2}{2}$

worin $p = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) g$.

Digby Collieries,

Near NOTTINGHAM,

April 18*th*, 1883.

Messrs. CRADOCK & CO.,

WAKEFIELD.

Gentlemen,

In reply to your enquiry, the LANG'S PATENT BEST IRON WIRE, 300 yards long, 1¼ in. diameter, was in use Twenty-six months, and has done fully twice as much work as we have got out of any Rope of the Old Construction.

Yours truly,

For The Company,

W. P.

Weg eines Körpers im stillstehenden Wasser.

Mittelst Integration der Formel

$$ds = \beta \int \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\, dt$$

wir multipliciren Zähler u. Nenner mit

$\frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}$ u. erhalten

$$ds = \beta \int \frac{\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} - \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}}{\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} + \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}}\, dt$$

nun ist

$$d\left(e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right) = \left(\frac{\mu}{2} e^{\frac{\mu t}{2}} - \frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu t}{2}}\right) dt$$

daher

$$ds = \frac{2\beta}{\mu} \int \frac{d\left(e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right)}{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}} \quad \text{also}$$

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln\left(e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}\right) + C \quad \text{u. für } t = 0$$

$$0 = \frac{2\beta}{\mu} \ln 2 \qquad + C$$

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}$$

Für diese einbezogenen Ausdrücke erhalten sich folgende Reihenentwicklungen:

Es ist $e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \ldots$

$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot2} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \ldots$

$$e^{x} + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{2x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \ldots$$

also

$$e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}} = 2 + \frac{\mu^2 t^2}{4} + \frac{2\cdot\mu^4 t^4}{16\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

Für sehr kleine Werte von t kann t^4 gegen t^2 vernachlässigt werden, so erhält man, folglich

$$e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}} = 2 + \frac{\mu^2 t^2}{4}$$ od.

$$\frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} = 1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}$$ u.

$$\ln\left(\frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\mu^2 t^2}{8}\right) = \ln\left(\frac{\mu^2 t^2}{8} + 1\right)$$

Nun haben wir ferner

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$$

für x gesetzt: $\frac{\mu^2 t^2}{8}$ giebt

$$\log n.\left[\frac{\mu^2 t^2}{8}+1\right] = \frac{\mu^2 t^2}{8} - \frac{\mu^4 t^4}{16\;128} \dots\dots$$

wo aber selbst t^4 gegen t^2 vernachlässigt werden

kann, so daß wir haben

$$\log n\left(\frac{\mu^2 t^2}{8}+1\right) = \frac{\mu^2 t^2}{8}$$

also

$$s = \frac{2\beta}{\mu_1}\cdot \ln\left(\frac{e^{\frac{\mu t}{2}}+e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}\right) = \frac{2\beta}{\mu_1}\ln\left(\frac{\mu^2 t^2}{8}+1\right) = \frac{\mu^2 t^2}{8}\cdot\frac{2\beta}{\mu_1} = \frac{\beta\mu_1 t^2}{4}$$

$$s = \frac{\beta\mu_1 t^2}{4}.$$

hier ist $\beta = 2\sqrt{\frac{(\varepsilon-1)dg}{3\zeta}}$ u. $\mu_1 = \sqrt{\frac{3g\cdot\zeta(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}}$

also $\beta_1\mu = \frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\cdot g$ u. also

$$s = \frac{2(\varepsilon-1)g t^2}{4\varepsilon} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{g t^2}{2} \text{ od.}$$

$$s = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{g t^2}{2}$$

die Acceleration ist hier

$$p = \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)g$$

Für diese annähernde Formel setzt [illegible] hervorgeht, daß bei den anfänglichen Fallräumen für sehr kleine t die Größe des Widerstandes gleichgültig ist. Setzt man in der Form

$$s = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{g t^2}{2}$$

für Bleiglanz $\varepsilon = 7{,}4$ $g = 9{,}81$ u. $t = 0{,}001$

erhält man $s = 0{,}0000042415\cancel{792}^{m}$

gegenüber

$$s = \frac{\beta}{\omega} \ln \frac{(e^{\omega x} + 1)^2}{4 e^{\omega x}} \quad \text{für } D = 0{,}00025^{m}$$

$$s = 0{,}00000\,\overset{4237}{\cancel{1840174}}^{\,m}$$

stimmt also ~~genau~~ !

Ebenso für Quarz

$\varepsilon = 2{,}6$ $g = 9{,}81$ $t = 0{,}001$

Giebt nach d. strengen Formel $s = 0{,}000003014540$

u. nach der abgekürzten $s = 0{,}00000\,301657$

Da $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{g}{2}$ für ein Mineral constant ist so erhält man auch

für Bleiglanz u. $\varepsilon = 7{,}4$: $s = 4{,}24158\, t^2$

u. $\varepsilon = 7{,}5$ $s = 4{,}25067\, t^2$

ebenso für Quarz u. $\varepsilon = 2{,}6$ $s = 3{,}01657\, t^2$

Vergl. Rittinger Aufbereitung I pag 24.

Der italienische Ingen. Ferraris stellt, in dem er von der Arbeitsgleichung der verschiedenen in Frage kommenden Kräfte ausgeht, eine Beziehung zwischen Geschwindigkeit u. Weg in folgender Weise auf:

Ist G das Gewicht des Körpers, w die Geschw. nach Beendigung des Weges s im Wasser, wird für die Oberfl. der Flüssigkeit $= 0$ gesetzt, so ist die lebendige Kraft des fallenden

Körpers $= G.\frac{w^2}{2g}$

Dieselbe ist das Resultat von

1) der Arbeit der Schwerkraft $= Gs$

2) der Arbeit des Auftriebes $= \frac{G}{\varepsilon} s$

u. 3) " " " Wasserwiderst. $\zeta F w^2 s$

wovon letztere beide von ersterer abgezogen gesetzt werden. Es ergibt sich daraus die Grundgleichung:

$$G\frac{w^2}{2g} = Gs - \frac{G}{\varepsilon}s - \zeta F w^2 s$$

Hieraus ergiebt sich:

$$w^2\left(\frac{G}{2g} + \zeta F s\right) = G s - \frac{G s}{\varepsilon} = G s\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{w^2}{\cancel{Gs}}\left(\frac{1}{2gs} + \zeta\frac{F}{G}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$w = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}{\frac{1}{2gs} + \zeta\frac{F}{G}}}$$

Ferner ist gesetzt $F = \psi a^2$

$G = \alpha a^3 \varepsilon$ (a = Radius)

also $\frac{F}{G} = \frac{\psi}{\alpha \varepsilon a}$ u. erhält

$$w = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}{\frac{1}{2gs} + \frac{\zeta\psi}{a\varepsilon\alpha}}} = \sqrt{\frac{a(\varepsilon - 1)}{\frac{a\varepsilon}{2gs} + \frac{\zeta\psi}{\alpha}}}$$

Diese Geschw. wird ein Maximum für $s = \infty$, dies giebt

$$w = \sqrt{\frac{a(\varepsilon - 1)}{\left(\frac{\zeta\psi}{\alpha}\right)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta\psi}}\cdot\sqrt{a(\varepsilon - 1)}$$

wie bei Sparre u. Rittinger.

Wichtiger als dieses Endresultat, das leicht auch aus der ersten Navier'schen Formel ohne höhere Analysis dadurch erhalten wird, daß man die Accel. $p = 0$ setzt, ist die vollkommene Formel in welcher v als eine Funktion des Weges s auftritt, während ~~die~~ die Geschw. bei den Navier'schen Formeln eine Funktion der Zeit ist.

Im folgenden seien die Navier'schen Formeln nach unserer Schreibweise entwickelt:

$$\frac{Gv^2}{2g} = Gs - \frac{Gs}{\varepsilon} - \zeta \frac{v^2}{2g} F \gamma s$$

$$\left(\frac{G}{2g} + \zeta\gamma \frac{F}{2g} s\right) v^2 = Gs\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{Gs}} \cdot \left[\frac{1}{2gs} + \frac{\zeta\gamma}{2g} \cdot \frac{F}{G}\right] v^2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}}{\frac{1}{2gs} + \frac{\zeta\gamma}{2g} \cdot \frac{F}{G}}}$$

wenn gesetzt

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \quad G = V\gamma\varepsilon = \frac{\pi d^3}{6} \cdot \gamma\varepsilon$$

also $\frac{F}{G} = \frac{3}{2\varepsilon\gamma d}$

$$v = \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)}{\dfrac{1}{2gs} + \dfrac{\zeta\gamma}{2g}\cdot\dfrac{3}{2\cdot\varepsilon\gamma d}}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{d(\varepsilon - 1)}{\dfrac{\varepsilon d}{2gs} + \dfrac{3\zeta}{4g}}}$$

und hieraus ergiebt sich s:

$$v^2\left[\frac{d\varepsilon}{2gs} + \frac{3\zeta}{4g}\right] = d(\varepsilon - 1)$$

$$\frac{v^2 \varepsilon d}{2gs} = d(\varepsilon - 1) - \frac{3\zeta}{4g}v^2$$

also

$$s = \frac{\varepsilon d v^2}{2g\left[d(\varepsilon - 1) - \dfrac{3\zeta}{4g}v^2\right]}$$

Für $d(\varepsilon - 1) = \dfrac{3\zeta}{4g}v^2$ ist der Weg $s = \infty$

d. i. für $v = \sqrt{\dfrac{4g}{3\zeta}}\cdot\sqrt{d(\varepsilon - 1)}$ ein beständiges

Diese theoretische Entwickelung giebt zwar bezüglich
des Maximaleffectes von d. günstigsten Gestalt
d. aber auch schon nun richtig, da die Arbeit
des Wasserwiderstandes $\int F v^2$ gleichzeitig
ist, als ob es von Anfang an gleich gewesen wäre,
so ergibt sich dann

1.

72

Freiberg, 14. Dec. 1879.

Hochgeehrter Herr College!

Behufs Entwickelung des Ausdruckes

$$s = \frac{2\beta}{\mu}\, l\, \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} \qquad (I)$$

in eine Potenzreihe werde zunächst

$$l\, \frac{e^{u} + e^{-u}}{2} = Au^2 + Bu^4 + Cu^6 \qquad (II)$$

gesetzt. Diese Form der Entwickelung rechtfertigt sich dadurch,

daß die linke Seite nicht unendlich wird, außer für $u = \infty$; es kann daher u nicht im Nenner ($\frac{K}{u}$, $\frac{K}{u^2}$ oder dergl.) vorkommen;

ferner nimmt die linke Seite für $+u$ u. $-u$ denselben Werth an, weshalb wohl nur die 2., 4., ... Potenz von u, nicht aber die 1., 3., ... vorkommen dürfen.

Durch Differentiation von (II) ergiebt sich nun

$$\frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}} = 2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5$$

Da aber $e^{\pm u} = 1 \pm \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} \pm \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} \pm \frac{u^5}{5!} + \frac{u^6}{6!}$, $(n! = 1.2.3\ldots n)$

so kann man die vorige Gleichung in der Gestalt schreiben

$$\frac{\frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots}{1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \ldots} = 2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5;$$

folglich ist

$$\frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots = (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5)\left(1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} \ldots\right)$$

$$= 2Au + \left(2A.\frac{1}{2!} + 4B\right)u^3 + \left(2A.\frac{1}{4!} + 4B.\frac{1}{2!} + 6C\right)u^5 + \ldots$$

und mithin

$\frac{1}{1!} = 2A$, d. h. $\underline{A = \frac{1}{2}}$,

ferner $\frac{1}{3!} = 2A.\frac{1}{2!} + 4B$, d. h. $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} + 4B$, Hieraus $4B = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$, also $\underline{B = -\frac{1}{12}}$;

sodann $\frac{1}{5!} = 2A.\frac{1}{4!} + 4B.\frac{1}{2!} + 6C$, d. i. $\frac{1}{120} = \frac{1}{24} - \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + 6C$, also $6C = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}$

$= \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

u. $\underline{C = \frac{2}{15.6} = \frac{1}{45}}$

3a

Abgekürzte Funktionsentwicklung:

$$l\,\frac{e^u+e^{-u}}{2} = Au^2 + Bu^4$$

Durch Differentiation:

$$\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}} = 2Au + 4Bu^3$$

$$e^{\pm u} = 1 \pm \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2!} \pm \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!}$$

$$\frac{\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3!}}{1+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}} = 2Au + 4Bu^3$$

$$\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3!} = (2Au+4Bu^3)\left(1+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}\right) = 2Au + \left(2A\cdot\frac{1}{2!}+4B\right)u^3$$

$$2A = 1,\quad A = \tfrac{1}{2},$$

$$2A\cdot\frac{1}{2!} + 4B = \frac{1}{3!},\quad \text{d. h. } \frac{1}{2}+4B = \frac{1}{6},\quad 4B = -\frac{1}{3},\quad B = -\frac{1}{12}$$

$$l\,\frac{e^u+e^{-u}}{2} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{12}u^4.$$

Also

$$s = \frac{2\beta}{\mu}\,l\,\frac{e^{\frac{\mu t}{2}}+e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2} = \frac{\mu\beta t^2}{4}\left(1-\frac{\mu^2t^2}{96}\right).$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe

$$A = \tfrac{1}{2};\quad B = -\tfrac{1}{12},\quad C = \tfrac{1}{45}$$

geht (II) über in

$$l\,\frac{e^{u}+e^{-u}}{2} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{12}u^4 + \frac{1}{45}\cdot u^6 \qquad (III)$$

wobei die höheren Potenzen von u vernachlässigt sind. Demzufolge ist nun

$$s = \frac{2\beta}{\mu}\,l\,\frac{e^{\frac{\mu}{2}t}+e^{-\frac{\mu}{2}t}}{2} = \frac{2\beta}{\mu}\left\{\frac{1}{2}\frac{\mu^2t^2}{4} - \frac{1}{12}\frac{\mu^4t^4}{16} + \frac{1}{45}\cdot\frac{\mu^6t^6}{64}\right\},$$

d. i.

$$s = \frac{\mu\beta t^2}{4}\left\{1 - \frac{\mu^2t^2}{96} + \frac{\mu^4t^4}{1440}\right\} \qquad (IV)$$

Wird

$$\mu\beta = \frac{2(\varepsilon-1)g}{\varepsilon},\quad \mu^2 = \frac{3g\rho(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}$$

eingesetzt, so ergiebt sich

$$s = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{gt^2}{2}\left\{1 - \frac{g\rho(\varepsilon-1)}{32\,\varepsilon^2 d}t^2 + \frac{g^2\rho^2(\varepsilon-1)^2}{160\,\varepsilon^4 d^2}t^4\right\}.$$

Es wird nicht nöthig sein, drei Glieder beizubehalten, vielmehr genügt wohl

$$s = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)g t^2\left\{1 - \frac{1}{32}\cdot\frac{g\rho(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}\cdot t^2\right\}.$$

Aus dieser Formel erkennt man den Grad der Genauigkeit, den man erhält, wenn man

$$s = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)g t^2$$

setzt. Es ist nämlich diese ~~Formel~~ Formel zulässig nur, insofern man

$$1/32\;\frac{g\rho(\varepsilon-1)}{\varepsilon^2 d}\cdot t^2$$

gegen die Einheit vernachlässigen darf. Es giebt dies ein Maß für die relativen Größen von t u. d, für welche die abgekürzte Bezeichnung zulässig ist.

Mit besten Grüßen

Ihr

Heinrich Gretschel

Die Formel für den Weg

$$s = \frac{\beta}{\mu} \ln \frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}$$

läßt sich in folgender Weise in die Form

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}$$ überführen.

Zunächst ist

$$\frac{\beta}{\mu} \ln \frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}} = \frac{\beta}{\mu} \ln \frac{(e^{\mu t}+1)^2}{(2e^{\frac{\mu t}{2}})^2}$$

$$= \frac{\beta}{\mu} \ln \left[\frac{e^{\mu t}+1}{2e^{\frac{\mu t}{2}}}\right]^2 = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\mu t}+1}{2e^{\frac{\mu t}{2}}}$$

multipliziert man den ln. mit $\frac{e^{-\frac{\mu t}{2}}}{e^{-\frac{\mu t}{2}}}$, so

erhält man:

$$s = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{(e^{\mu t}+1)e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2e^{\frac{\mu t}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu t}{2}}} = \frac{2\beta}{\mu} \ln \frac{e^{\frac{\mu t}{2}} + e^{-\frac{\mu t}{2}}}{2}$$

Fol. ....

Ausländisches Papiergeld — Königl. Preuss. ausgenommen — kann ich Ihnen nur zum Tages-Cours gutschreiben.

ABRECH

der

Haupt-Collection vo

mit Herrn ....

DEBET. über .... te Classe ....

An Saldo .... *Classe*	*Rthlr.*				*Per*
„ .... *Loose à* .... *Rthlr.*	„				„
„ .... *Kauf-Loose à* .... *Rthlr.*	„				„
„ *Gewinnabzug* $12\frac{1}{2}\%$ *v. Rthlr.*	„				
„ *do.* .... *v. Rthlr.*	„				*Prov*
	Rthlr.				*gehen*
	Rthlr.				*komm*

Zwickau, *den* *187*

CHNUNG

der

n von C. E. Zaeuner

e .... ter Landes-Lotterie CREDIT.

Per Ueberschuss .... *Classe*	*Rthlr.*		
„ .... *Gewinn*	*„*		
„ Casse			
Provision v. Rthl.	*„*		
	Rthlr.		
gehen ab wie neben stehet			
kommen	*Rthlr.*		

Die Gewinnloose sind sämmtlich und zwar Classenweise franco einzuliefern.

Gegeben: $d_1 = 0{,}00025^m \quad \varepsilon_1 = 7{,}4 \quad g = 9{,}81^m \quad t = 0{,}001\ \text{Sec.}$

$d_2 = 0{,}001^m \quad \varepsilon_2 = 2{,}6 \quad \xi = 0{,}5$

$$v_1 = \frac{e^{\mu_1 t} - 1}{e^{\mu_1 t} + 1} \cdot \beta \quad \Bigg| \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{3g\xi(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_1^2 d_1}}\ ;\ \beta = 5{,}11\sqrt{d_1(\varepsilon_1 - 1)}$$

Berechnung von μ_1 und μ_2

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 6{,}4}{54{,}76 \cdot 0{,}00025}} = \sqrt{\frac{94{,}176}{0{,}01369}} \quad \Bigg| \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}6}{6{,}76 \cdot 0{,}001}} = \sqrt{\frac{23{,}544}{0{,}00676}}$$

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$\mu_1 = 82{,}9408$ | $\mu_2 = 59{,}0156$

Also $\mu_1 t = 0{,}0829408$ | $\mu_2 t = 0{,}0590156$

$e^{\mu_1 t} = e^{0{,}0829408} = 2{,}7182818^{0{,}0829408}$ | $e^{\mu_2 t} = e^{0{,}0590156} = 2{,}7182818^{0{,}0590156}$

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$e^{\mu_1 t} = 1{,}086477$ | $e^{\mu_2 t} = 1{,}060792$

$$\beta = 5{,}11\sqrt{d_1(\varepsilon_1 - 1)} = 5{,}11\sqrt{0{,}00025 \cdot 6{,}4} = 0{,}2044$$

$v_1 = \dfrac{0{,}086477}{2{,}086477} \times 0{,}2044$ | $v_2 = \dfrac{0{,}060792}{2{,}060792} \times 0{,}2044$

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$\underline{\underline{v_1 = 0{,}008471648}}$ | $\underline{\underline{v_2 = 0{,}006029665}}$

$$s_1 = \frac{\beta}{\mu_1} \log \frac{\left(e^{\mu_1 t}+1\right)^2}{4e^{\mu_1 t}} \qquad s_2 = \frac{\beta}{\mu_2} \log \frac{\left(e^{\mu_2 t}+1\right)^2}{4e^{\mu_2 t}}$$

$$= \frac{0{,}2044}{82{,}9408} \log \frac{(2{,}086477)^2}{4{,}345908} \qquad = \frac{0{,}2044}{59{,}0156} \log \frac{(2{,}060792)^2}{4{,}243168}$$

Die logarithmische Berechnung ergibt:

$$\cancel{s_1 = 0{,}000001840174^{m}} \qquad \cancel{s_2 = 0{,}0000013092}$$

Nachtrag und Verbesserung. Diese Resultate sind falsch, weil ich nicht beachtet hatte, daß der Log. in der Formel für s der natürliche Log. ist. Also:

$$s_1 = \frac{0{,}2044}{82{,}9408} \operatorname{lognat.} \frac{(2{,}086477)^2}{4{,}345908}$$

$$= \frac{0{,}2044}{82{,}9408} \cdot \frac{\operatorname{log\,vulg.} \frac{(2{,}086477)^2}{4{,}345908}}{\operatorname{log\,vulg.} 2{,}7182818}$$

$$= \frac{0{,}2044}{82{,}9408} \cdot \frac{0{,}0007467}{0{,}4342945}$$

$$= 0{,}000004237157\ m$$

$$s_2 = \frac{0{,}2044}{59{,}0156} \operatorname{lognat.} \frac{(2{,}060792)^2}{4{,}243168}$$

$$= \frac{0{,}2044}{59{,}0156} \cdot \frac{\operatorname{log\,vulg.} \frac{(2{,}060792)^2}{4{,}243168}}{\operatorname{log\,vulg.} 2{,}7182818}$$

$$= \frac{0{,}2044}{59{,}0156} \cdot \frac{0{,}0003780}{0{,}4342945}$$

$$= 0{,}0000030145\,43\ m$$

Aus den beiden jetzt gefundenen Gleichungen

$$v = \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\beta \text{ u. } s = \frac{\beta}{\mu}\cdot \ln\left[\frac{(e^{\mu t}+1)^2}{4e^{\mu t}}\right]$$

läßt sich eine Beziehung zwischen v u. s herstellen, wenn man den Ausdruck $e^{\mu t}$ eliminirt.

Aus $v = \frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu t}+1}\beta$ folgt $e^{\mu t} = \frac{\beta+v}{\beta-v}$

und setzt man dies in die Formel für s ein, so erhält man

$$s = \frac{\beta}{\mu}\cdot\ln\left[\frac{\left(\frac{\beta+v}{\beta-v}+1\right)^2}{4\left(\frac{\beta+v}{\beta-v}\right)}\right] = \frac{\beta}{\mu}\ln\left[\frac{\frac{(\beta+\cancel{v}+\beta-\cancel{v})^2}{(\beta-v)^2}}{4\cdot\frac{\beta+v}{\beta-v}}\right]$$

$$= \frac{\beta}{\mu}\ln\left[\frac{\cancel{4}\beta^2}{\cancel{4}\cdot\frac{\cancel{(\beta-v)}(\beta-v)(\beta+v)}{\cancel{(\beta-v)}}}\right] = \frac{\beta}{\mu}\cdot\ln\frac{\beta^2}{\beta^2-v^2} = s$$

hieraus folgt $\frac{\beta^2}{\beta^2-v^2} = e^{\frac{\mu s}{\beta}}$ und

$$v^2 = \frac{\beta^2\left(e^{\frac{\mu s}{\beta}}-1\right)}{e^{\frac{\mu s}{\beta}}}$$

$$v = \beta\cdot\sqrt{1-\frac{1}{e^{\frac{\mu}{\beta}s}}}$$ u. für $s=\infty$ ist $v=\beta$.