No. 571. Phys.

THEORIE DER KRAFT,

welche

in den Haarröhren

und

bei ähnlichen Erscheinungen wirkt,

von

P. S. LA PLACE,

Kanzler des Senats, Großofficier der Ehrenlegion und
Mitglied des National-Instituts.

Frei überfetzt

aus dem Franzöfifchen,

mit einigen

Anmerkungen und Zufätzen,

von

H. W. B R A N D E S,

D., Deichinfpector zu Eckwarden im Oldenburgifchen,

und

L. W. G I L B E R T,

D., Profellor der Phyfik und Chemie auf der Univerfität
zu Halle.

L e i p z i g

bei Johann Ambrofius Barth

1810.

THEORIE DER KRAFT

von

Alexander von Humboldt

mit 12 Kupfern

aus Gilbert's Annalen der Physik, Neue Folge, Band 3.

Einzeln abgedruckt aus Gilbert's Annalen der Physik, Neue Folge, Band 3.

H e r r n

Alexander Freih. von Humboldt

u n d

Herrn Wilhelm Olbers

z u B r e m e n

widmen diese Bogen

als Zeichen ihrer Anhänglichkeit und Verehrung

die

U e b e r f e t z e r.

Alexander Friedrich von Humboldt

Die Kosmos
oder
allgemeine Kosmographie
in drei Theilen
von Alexander Friedrich von Humboldt

Seite 1

Verordnungen
Königliche Akademie
der Wissenschaften
zu Berlin
den 17ten März 1805

I. Nach der hiermit
erlassenen Verordnung
des Königs

II. Nach der hiermit
erlassenen Verordnung
des Königs

III. Nach der hiermit
erlassenen Verordnung
des Königs

IV. Nach der hiermit
erlassenen Verordnung
des Königs

V. Nach der hiermit
erlassenen Verordnung
des Königs

INHALT.

Theorie der Haarröhren-Kraft,
von P. S. La Place;
nach dessen *Théorie à l'action capillaire* frei übersetzt.

Vorreden der Uebersetzer.

Vorbericht von Gilbert. Seite 1

Vorerinnerungen von Brandes. 7

Erster Haupttheil.

Die frühere Theorie des Herrn La Place, und Anwendungen derselben.

I. Ueber die haarröhren-artigen Wirkungen im Allgemeinen. Frei übersetzt von Gilbert. 10

II. Theorie von der Wirkung der Haarröhrchen; übersetzt, mit einigen Anmerkungen von H. W. Brandes.

A. Von der Attraction des Wasser-Meniscus an der Oberfläche, auf die übrige im Haarröhrchen enthaltene Wasserfäule. 38

B. Gestalt der Oberfläche des Flüssigen im Haarröhrchen. 49

C. Bestimmung der Höhen, welche das Flüssige in Haarröhrchen erreicht.

- a) In cylindrischen. Seite 62
b) In prismatischen. 65

D. Anwendung der Theorie auf den Fall, wenn das Flüssige in dem Zwischenraume zwischen concentrischen Cylindern durch die Haarröhren-Kraft gehoben wird. 71

E. Anwendung auf zwei parallele vertikal eingetauchte Ebenen. 72

F. Gleichgewicht eines Tropfens in einem konischen Haarröhrchen. 83

G. Figur und Gleichgewicht eines Tropfens zwischen zwei Ebenen, die sich mit einem ihrer Ränder in einer horizontalen Linie berühren. 86

H. Nähere Betrachtung der Kräfte, welche die Concavität oder Convexität der Oberfläche eines Flüssigen bestimmen. 89

III. Versuche zu den vorstehenden Untersuchungen, und Vergleichung derselben mit der Theorie; frei bearbeitet von Gilbert. 96

Stand von Flüssigkeiten in gläsernen Haarröhren von verschiedener Weite, nach Versuchen der Herren Hauy und Tremery. 97

— zwischen zwei senkrechten parallelen Ebenen. 99

Versuch des Hrn. Hauy mit einem haarröhrenartigen cylindrischen Mantel. 100

Versuche Hawksbee's mit zwei sehr wenig gegen einander geneigten Ebenen. 102

Eine Anwendung auf das Barometer; und Einfluß der Haarröhrchen-Kraft auf den Barometerstand. 112

Neue Untersuchungen

von P. S. La Place

über die Kraft, welche in den Haarröhren und bei ähnlichen Erscheinungen wirkt, nach dessen *Supplément à la Théorie de l'action capillaire*; und populäre Darstellungen dieser Untersuchungen von Biot und La Place, als Einleitungen.

Einleitung

zu den folgenden drei Haupttheilen.

Darstellung der neuern Untersuchungen des Hrn.

La Place über die haarröhren-artigen Wirkungen, von Biot.

Seite 117

Zweiter Haupttheil.

Die Wirkung der Haarröhren-Kraft auf eine neue Art betrachtet.

I. Vergleichung der Kräfte mit der angehobenen Masse des Flüssigen. 141

K. Betrachtung einzelner Fälle. 153

L. Betrachtung des Falles, wenn in einem Haarröhrchen zwei verschiedene Fluida über einander stehen, und Versuche von Hrn. Gay-Lussac. 159

M. Noch einige Theoreme und einzelne Bemerkungen. 169

Einleitung zu den beiden folgenden Hauptstücken, aus zwei Berichten des Hrn. La Place.

1. Ueber das scheinbare Anziehen und Zurückstoßen, welches sich bei kleinen Körpern zeigt, die auf der Oberfläche eines Flüssigen schwimmen. 181

2. Ueber die Adhäsion der Körper an der Oberfläche von Flüssigkeiten. 190

Dritter Haupttheil.

Theorie des Anziehens und Abstoßens schwimmender Körper, der Adhäsion einer Scheibe an einer flüssigen Oberfläche, und der Figur eines grossen Queckfilber-Tropfens; mit prüfenden Versuchen von Gay-Lussac.

N. Von dem scheinbaren Anziehen und Abstoßen schwimmender Körper.

a) Betrachtung des Falles, wenn beide schwimmende Körper gleichartig sind. Seite 201

b) Scheinbares Abstoßen, wenn der eine das Flüssige erhebt, der andere es deprimirt. 207

c) Bestätigende Versuche von Hauy. 216

O. Ueber die Adhäsion einer Scheibe an der Oberfläche eines Flüssigen. 218

Versuche von Gay-Lussac. 224

P. Figur eines grossen Queckfilber-Tropfens, und Depression des Queckfilbers in einer Glasröhre von bedeutendem Durchmesser. 236

Versuche von Gay-Lussac. 245

Vierter Haupttheil.

Allgemeine Betrachtungen über die Haarröhren-Kraft und über die Kräfte der chemischen Verwandtschaft. 248

T h e o r i e
d e r
HAARRÖHREN-KRAFT

von
P. S. L A P L A C E,

nach deffen
Théorie à l'action capillaire
frei überfetzt.

THEORIE DER KRAFT,
*welche in den Haarröhren und bei ähnlichen
Erscheinungen wirkt;*

VON
P. S. L A P L A C E,
Kanzler des Senats,
Groß-Officier der Ehrenlegion und Mitgl. des Nat. Instit.
Frei übersetzt, mit einigen Anmerkungen,
von
Brandes und Gilbert.

Vorbericht von Gilbert.

Herr La Place hat seine Theorie der haarröhren-
artigen Erscheinungen als ein Supplement zu dem
zehnten Buche seiner *Mechanik des Himmels*, (wel-
ches Buch den vierten Band des berühmten Wer-
kes beschließt,) später als diesen Band selbst be-
kannt gemacht. Zuerst erschien einzeln und mit ei-
nem besondern Titelblatt versehen: *Théorie de l'action
capillaire, par Mr. La Place, Paris, 23. Avril 1806, 62 S.
q. 1 Kpftfl.*; und das Jahr darauf: *Supplément à la
Théorie de l'action capillaire, par Mr. La Place, Paris
1807, 78 S. q.* Hr. Freiherr von Humboldt, der

A

damals noch in Berlin lebte, hatte von Hrn. La Place diese Schriften einzeln, so bald sie in das Publikum gekommen waren, zugeschickt erhalten; und er glaubte von diesem Zeichen der Achtung und Freundschaft des grossen Geometers dadurch den besten Gebrauch zu machen, daß er sie, nach eigener Benutzung, mir zur Bearbeitung für die Annalen übergab.

Die *Theorie*, welche ich zuerst von ihm bekam, enthält eine allgemein verständliche Einleitung, die mathematische Darstellung der aus der tiefsten Tiefe der Analysis geschöpften Theorie, und Versuche, welche grössten Theils von Hrn. Haüy, auf Ersuchen des Hrn. La Place, zur Prüfung derselben angestellt sind, und die von diesem letztern in einem besondern Abschnitte auf eine belehrende Art mit den Resultaten der Berechnung zusammen gehalten werden. Das Mathematische der Theorie für die Leser der Annalen zu bearbeiten, wagte ich damals um so weniger, als selbst Herr La Place in dem, was er von ihr im *Journal de Physique*, 1806, p. 120., dem Publikum mitgetheilt hat, (nachdem er sie am 23. Dec. 1805 dem Institute vorgelegt hatte,) sich mit sehr allgemeinen Andeutungen der mathematischen Entwicklung begnügt. Ich stellte die Einleitung, die prüfenden Versuche und manches, was in dem Berichte an das National-Institut zu der Einleitung hinzu gefügt war, in ein Ganzes zusammen, und dieses würde der Leser schon vor ein Paar Jahren in den Annalen gefunden haben, wäre nicht inzwischen der interessante Bericht des Herrn Biot von dieser Theorie, den ich voran schicken zu müssen glaubte (*Annalen* J. 1807, St. 3. B. 25. S. 233.), und bald darauf des Hrn. La Place neue Bearbeitung und Erweiterung seiner Theorie erschienen, welche letztere eine Umarbeitung meines Aufsatzes nöthig machte.

Während andere Arbeiten diese verzögerten, erhielt ich von Hrn. Dr. Brandes zu Eckwarden eine Darstellung des Mathematischen der frühern La Place'schen Theorie für diese Annalen zugeschickt. Hr. Brandes hat sich in mehrern Arbeiten, besonders in seiner deutschen Bearbeitung der Euler'schen hydrodynamischen Untersuchungen, als einen vorzüglichen Mathematiker bekannt gemacht, und der Eifer und die Geschicklichkeit, mit denen er seine mühevollen Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung angestellt, und auf sie eine Theorie gebauet hat, haben ihm einen ehrenvollen Rang unter den Naturforschern erworben. Einer Untersuchung, welche mit der Hydrostatik so nahe verwandt ist, und welche so tief in die Physik eingreift, als die Theorie des Herrn La Place über die haarröhren-artigen Erscheinungen in der Natur, konnte unter uns kaum etwas Glücklicheres begegnen, als einen solchen Bearbeiter zu erhalten; es dünkte mir also Pflicht, Herrn Brandes aufzumuntern, uns diese Arbeit vollständig und auf eine dem Originale würdige Art zu geben.

Es gefellten sich hierzu noch einige andere Uebersetzungen. Herrn La Place's Theorie einzeln in einer deutschen Uebersetzung erscheinen zu sehen, dazu ist bei den jetzigen Zeiten auch nicht die entfernteste Aussicht; wird sie auch in den Annalen der Physik auf keine ihrer Wichtigkeit entsprechende Art dargestellt, so wäre es daher leicht möglich, daß ihr unter uns kein günstigeres Schicksal zu Theil würde, als es die Forschungen Coulomb's mit seinen Windungs-Wagen gehabt haben, welche, weil sie in großen, nur für Wenige zugänglichen, Werken vergraben liegen, und keinen deutschen Bearbeiter gefunden haben, ihres hohen Interesse's ungeachtet unter uns unbenutzt und fast unbekannt geblieben sind. Und doch

sind die Untersuchungen des Herrn La Place über die Kraft, welche in den haarröhren-artigen Erscheinungen wirkt, von so hoher Wichtigkeit für die Physik und selbst für die Chemie, daß in Zukunft schwerlich ein Naturforscher die Resultate derselben wird übergehen und nicht wissen dürfen, und daß es eifrigen Freunden der Naturkunde nicht an Veranlassung fehlen wird, sich eine umständliche Einsicht in den Gang zu wünschen, den Herr La Place genommen hat, um zu solchen Folgerungen zu gelangen. Nach meiner Ueberzeugung reicht dazu ein Ueberschauen der mathematischen Entwicklung im Allgemeinen aus, wobei man diese nicht gerade ganz zu ergründen braucht, sondern manches in ihr als historisches Datum annehmen kann. Ich halte daher eine lichtvolle Darstellung dieser Theorie, *in ihrem ganzen Detail*, nicht für fremdartig für ein Werk, das zwar nach seiner Bestimmung in die Hand von Lesern kommt, von denen der kleinste Theil dem tieffinnigen Mathematiker in seiner Analyse mit deutlicher Einsicht wird folgen können, von denen ich aber annehmen darf, daß sie jeden neuen Aufschluß über die Geheimnisse der Natur mit regem Geiste ergreifen, und also die Mühe nicht scheuen werden, aus dem Ganzen, welches sie hier finden, so viel für sich heraus zu lesen, als ihnen nützt und frommt. Endlich dünkt es mir keine unbillige Anforderung zu seyn, welche die unter uns noch immer zahlreichen Kenner und Freunde des mathematischen Studiums an diese Annalen machen, daß auch ihr Interesse so viel als möglich in diesen Jahrbüchern wahrgenommen werde, und daß die Annalen die eingreifendsten Forschungen aus der mathematischen Physik nicht übergehen, durch welche die Wissenschaft, wenn auch nicht auf eine so glänzende, doch auf eine sicherere und bleibendere Art erweitert wird, als es

auf den leichter zu durchlaufenden Wegen geschieht, die jetzt, wie immer, die betreteneren sind. Alle diese Gründe haben mich über die Bedenklichkeiten beruhigt, welche die vielen Formeln in mir erregen mußten, und der Gedanke an den Eindruck, den sie auf das grössere Publikum machen möchten, in dessen Hände die Annalen als Zeitschrift kommen; und ich wage es getrost, die Theorien des Herrn La Place über die haarröhren-artigen Wirkungen in der Natur meinen Lesern in einer Bearbeitung vorzulegen, welche auch von der mathematischen Seite vollständig ist. Mögen sie sich durch die gehäuften Integrations- und Functionszeichen und durch die vielen Formeln nicht abhalten lassen, aus dieser Untersuchung (auch wenn das Mathematische ihnen unverständlich wäre) das heraus zu suchen, was für sie ist.

Hr. Dr. Brandes entschloß sich auf mein Ersuchen, das, was er mir zugeschickt hatte, nochmahls umzuarbeiten, um die *Theorie* und das *Supplement* völlig in einander zu verschmelzen, und das Ganze, so weit es den Naturforscher interessirt, vollständig darzustellen; und ich darf hinzu setzen, daß die Untersuchung hier lichtvoller und leichter zu überschauen, als in dem Originale selbst erscheint. Das, was ich schon bearbeitet hatte, überging er, daher ich die zur Einleitung dienenden Betrachtungen über die haarröhren-artigen Wirkungen im Allgemeinen, und den Abschnitt, der die prüfenden Versuche enthält, nach meiner freien nochmahls revidirten Uebersetzung hier seiner Arbeit beigefügt habe. In der Einleitung habe ich vieles aus dem eingeschaltet, was Herr La Place im *Journal de Phys.* von seiner Theorie sagt; in der Darstellung der prüfenden Versuche konnte ich manches abkürzen.

Herr Brandes legt in dem Vorberichte, der auf den gegenwärtigen folgt, selbst Rechenschaft von der

Art ab, wie er das Original in seiner Uebersetzung wieder gegeben hat. Aus der Skizze, die er von der Arbeit der Herrn La Place entwirft, wird der Leser ersehen, daß das Ganze aus vier Haupttheilen besteht, die gewisser Massen (in so fern man von einigen Grundformeln abieht) von einander unabhängig sind. Ich habe diese vier Haupttheile in die vier Stücke der Annalen, welche den 33. Band (oder den 3. Band der Neuen Folge) ausmachen werden, so vertheilt, daß jedes Stück einen dieser Haupttheile vollständig enthalten wird. Was Herr La Place von seinen spätern Untersuchungen dem National - Institute mitgetheilt hat, werde ich bei den übrigen Haupttheilen auf eine ähnliche Art benutzen, als es hier bei dem ersten Haupttheile mit dem frühern Berichte geschehen ist, und als Einleitung werde ich diesen Haupttheilen die populäre Darstellung vorsetzen, welche Herr Biot von den neuern Untersuchungen des Herrn La Place für das grössere Publikum entworfen hat. Ich habe sie (in dieser Absicht) bis jetzt für die Annalen noch nicht benutzt, und sie verhält sich zu jenen Haupttheilen fast eben so, als die Einleitung, welche Herr La Place der *Theorie* vorge setzt hat, zu seiner frühern Theorie, die den ersten Haupttheil ausmacht. Der Leser wird auf diese Art, in einem einzigen Bande meiner Annalen der Physik, das Ganze unserer freien Uebersetzung dieser sehr wichtigen Untersuchungen des Hrn. La Place beisammen erhalten; ein Grund, warum ich von meinem anfänglichen Vorsatze, davon einige Exemplare als ein eigenes Werk abdrucken zu lassen, in so weit abgegangen bin, daß von solchen Exemplaren nicht mehr vorhanden seyn werden, als ich zu Geschenken für Freunde bestimme.

Gilbert.

Vorerinnerungen von Brandes.

Obgleich man schon lange das Aufsteigen flüssiger Körper in Haarröhrchen, die an beiden Enden offen und in ein unbegrenztes Fluidum eingetaucht sind, als einen Beweis betrachtet hatte, daß die Röhre anziehend auf das Fluidum wirke: so war es doch niemanden gelungen, die Gesetze dieser Attraction zu bestimmen, und daraus Regeln für diese Erscheinungen herzuleiten. Herrn La Place gelang dieses, und zwar ohne daß es einer andern Hypothese bedurfte, als der schon durch Beobachtungen sehr wahrscheinlich gemachten, daß diese Attraction mit zunehmender Entfernung sehr schnell abnehme, und schon bei den kleinsten für unsere Sinne merklichen Abständen unbemerkbar klein werde.

Wenn man das Wasser in einer gut befeuchteten engen Glasröhre, die in ein weiteres Gefäß eingetaucht ist, beobachtet, so findet man die Oberfläche in der Röhre nicht nur über die Oberfläche im Gefäße erhoben, sondern jene Oberfläche ist auch concav gekrümmt, und wenn die Röhre cylindrisch ist, so liegt der niedrigste Punkt der Oberfläche in der Achse der Röhre. Legt man durch diesen niedrigsten Punkt der Oberfläche eine horizontale Ebene, so schneidet sie einen Meniscus der flüssigen Masse ab; und die Wirkung dieses Meniscus, oder eigentlich seines äußerst nahe um die Achse liegenden Theiles, ist es, welche den Wasserfaden, der sich in der Achse der Röhre oberhalb des Niveau's der umgebenden Flüssigkeit befindet, im Gleichgewichte hält; den Meniscus selbst aber muß man als durch die Röhrenwand gehalten ansehen. Die Untersuchung

fängt daher mit der Wirkung des Meniscus auf die in der Achse der Röhre befindlichen Wassertheilchen an; es ergeben sich dann Mittel, um die Gestalt der concaven Oberfläche, und endlich, um die Höhe zu finden, zu welcher das Flüssige sich in der Röhre erhebt. Diese Untersuchungen (in meiner Bearbeitung §. 1. bis 7.) machen die Grundlage der Theorie aus, und §. 8. bis 11. sind weiteren Anwendungen auf einzelne Fälle gewidmet; §. 12. beschäftigt sich dann, da bisher alles auf jenen Meniscus zurück geführt war, mit denjenigen Kräften, welche diesen Meniscus selbst erhalten und bilden.

So sehr genügend diese Theorie in aller Hinsicht war, so hielt es doch der scharfsinnige Verfasser der Mühe werth, die Untersuchung noch einmahl auf einem ganz andern Wege anzufangen. Diese neue Untersuchung macht hier den *zweiten Haupttheil* (§. 13. bis 18.) aus. Der Verfasser fängt mit Betrachtung aller Kräfte an, welche auf das Wasser in der Röhre und im Gefäße wirken, leitet daraus einige der schon oben gefundenen Resultate mit mehrerer Leichtigkeit ab, und fügt neue sehr interessante Untersuchungen hinzu, deren Inhalt zu mannigfaltig ist, um hier näher angeführt zu werden.

Die Untersuchungen §. 19. bis 25., welche hier den *dritten Haupttheil* ausmachen, betreffen das scheinbare Anziehen und Abstoßen, welches man an schwimmenden Körpern bemerkt; die Adhäsion ebener Flächen an einer flüssigen Oberfläche, und die Gestalt eines grossen, auf einer horizontalen Ebene ruhenden, Quecksilbertropfens.

Endlich enthält der *vierte Haupttheil* Betrachtungen, welche besonders auch für den Chemiker wichtig sind, und tiefe Blicke in das Innere der Körper und in die Natur ihrer Bestandtheile.

Alles dieses zusammen ist der Inhalt der beiden Abhandlungen, die, unter dem Titel: *Théorie de l'action capillaire* und *Supplément à la Théorie de l'action capillaire*, 1806 und 1807 zu Paris erschienen sind. So weit diese Abhandlungen von mir bearbeitet sind, habe ich sie fast ganz, doch in den mathematischen Untersuchungen, wo es auf das Wort des Autors nicht so genau ankommt, frei übersetzt; wenn die Deutlichkeit oder das Bedürfnis ungeübterer Leser es forderte, habe ich Erörterungen eingeschaltet; einige minder wichtige Untersuchungen habe ich abgekürzt, und einige bloß mathematische Erörterungen habe ich ganz weggelassen. Ungeachtet dieser kleinen Abänderungen kann man, wie ich hoffe, alles als genau dem Sinne des Verfassers entsprechend ansehen, und ihn also immer als selbst redend betrachten, da ich alle mir eigentlich eigenen Bemerkungen (wozu ich bloße Erläuterungen der Rechnung, in denen man nicht irren kann, nicht zähle,) als besondere Anmerkungen beigefügt habe. In der Anordnung der Materien habe ich mir die Freiheit genommen, dasjenige aus dem Supplemente, was zu verwandten Sätzen in der ersten Theorie gehörte, da einzuschalten, wo es sich am besten anschloß, z. B. die §§. 5. und 7.; dagegen habe ich aus der *Theorie* die Untersuchung über das Anziehen schwimmender Körper mit demjenigen vereinigt, was im Supplemente ausführlicher darüber vorkommt.

Diese Bemerkungen glaubte ich theils zur Einleitung, theils als Erklärung über die Art meiner Bearbeitung voran schicken zu müssen.

H. W. Brandes.

ERSTER HAUPTTHEIL.
Die frühere Theorie und Anwen-
dungen derselben.

I. Ueber die haarröhren-artigen Wir-
kungen im Allgemeinen.

Frei übersetzt von Gilbert.

Ich habe in dem zehnten Buche der Mechanik des Himmels die Erscheinungen betrachtet, welche auf der Kraft der Körper, das Licht zu brechen, beruhen. Diese Kraft entspringt aus der Anziehung, welche ihre kleinsten Theilchen äußern; das Gesetz dieser Anziehung läßt sich indess aus den Erscheinungen nicht auffinden, da diese nicht mehr bestimmen, als daß die Wirkungen der Kraft in angeblichen Entfernungen nicht mehr wahrzunehmen sind. Alle Gesetze der Anziehung, welche dieser Bedingung entsprechen, genügen gleichmäßig den verschiedenen Phänomenen der Strahlenbrechung, welche uns die Erfahrung giebt, und unter denen das vornehmste das constante Verhältniß ist, welches sich bei dem Durchgehen des Lichts durch durchsichtige Körper zwischen dem Sinus des Brechungswinkels und dem Sinus des Einfallswinkels zeigt.

Es ist uns bisher nur in diesem Falle (dem des Lichtes) geglückt, jene Art der Attraction einer genauen Analyse zu unterwerfen. Ich will hier den Geometern einen zweiten Fall vorlegen, der durch die Mannigfaltigkeit und Sonderbarkeit der Erscheinungen noch merkwürdiger als der erste ist, und dessen Analyse dieselbe Genauigkeit zuläßt; dieses ist der Fall mit der Kraft, welche in den Haarröhren wirkt (*l'action capillaire*). Die Wirkungen der brechenden Kraft gehören in die Dynamik, und zwar in die Theorie der Projectile; die Wirkungen in den Haarröhren gehören dagegen in die Hydrostatik, oder in die Lehre vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten, welche durch sie angehoben oder herab gedrückt werden, nach Gesetzen, die hier zu entwickeln meine Absicht ist.

Clairaut ist der Erste, und bisher der Einzige, der die Erscheinungen in den Haarröhren einer strengen Berechnung unterworfen hat. Er zeigt in seinem Werke über die Gestalt der Erde, wie schwankend und ungenügend die Erklärung ist, welche Jurin von diesen Erscheinungen gegeben hatte, durch Gründe, die sich ebenfalls auf alle übrigen Erklärungen, welche man versucht hat, übertragen lassen, und giebt dann eine genaue Analyse aller Kräfte, die beitragen können, das Wasser in dem Glasröhrchen anzuheben. Seine Theorie, welche er mit aller der Eleganz entwickelt, die diesem vortrefflichen Werke eigen ist, erklärt jedoch die Haupterscheinung nicht vollkommen:

warum nämlich die Höhen, bis zu welchen eine Flüssigkeit in Haarröhren von gleicher Materie steigt, dem Durchmesser der Röhrchen verkehrt proportional sind. Clairaut begnügt sich mit der Bemerkung, die er nicht beweiset, daß es unendlich viele Gesetze der Anziehung geben müsse, aus denen dieses Resultat folgt, wenn man sie in seine Formeln substituirt. Das Gesetz der Anziehung für diesen Fall ist aber gerade der schwierigste und wichtigste Punkt der Theorie, und unentbehrlich, um alle Erscheinungen, welche mit denen in den Haarröhren in *eine* Klasse gehören, mit ihnen unter dieselbe Theorie zu vereinigen, wie Clairaut sich sehr bald überzeugt haben würde, wäre er zu den haarröhren-ähnlichen Räumen zwischen zwei parallelen Ebenen fortgegangen, und hätte er aus seiner Analyse abzuleiten versucht, warum eine Flüssigkeit zwischen zwei solchen Ebenen eben so hoch, als in einer Haarröhre steht, deren Durchmesser noch einmahl so groß als der Abstand der beiden Ebenen von einander ist; wofür noch niemand eine Erklärung versucht hat. Ich bin seit langer Zeit bemüht gewesen, diesem Mangel der Theorie des großen Geometers abzuhelpen; endlich haben mich neue Untersuchungen dahin geführt, nicht bloß zu erkennen, daß ein Gesetz dieser Art wirklich vorhanden ist, sondern auch darzuthun, daß alle Gesetze, welche nur unter der Bedingung gelten, daß die Anziehung in angeblichen Entfernungen merkbar zu seyn aufhört, für die Flüssig-

keit eine Höhe geben, die dem Durchmesser der Haarröhren verkehrt proportional ist; und dieses hat mich zu einer vollständigen Theorie aller Arten dieser Erscheinungen geführt.

Clairaut nimmt an, die Anziehung der Wände der Haarröhre wirke merkbar bis in die Achse des Röhrchens. Hierin weiche ich von seiner Meinung ab, und glaube vielmehr mit Hawksbee und mit vielen andern Physikern, daß die Kraft der Haarröhren, gleich der strahlenbrechenden Kraft und gleich den chemischen Verwandtschaften, *nur in unmerkbaren Entfernungen* merklich ist. Nach Hawksbee's Beobachtungen steigt das Wasser in Haarröhrchen, wenn ihr innerer Durchmesser derselbe ist, stets bis zu einerlei Höhe, sie mögen aus sehr dünnem oder aus sehr dickem Glase bestehen. Folglich können alle cylindrischen Glaschichten, welche eine angebliche Entfernung von der innern Oberfläche des Röhrchens haben, nichts zum Ansteigen des Wassers in der Haarröhre beitragen, wenn *gleich* jede derselben einzeln genommen eine in ihr befindliche Flüssigkeit anheben würde. Eine zweite Erfahrung, welche zum Beweise der Richtigkeit jenes Principis dient, ist, daß, wenn man die innere Oberfläche eines Glasröhrchens noch so dünn mit Fett überzieht, kein Ansteigen des Wassers darin Statt findet. Und doch wirkt in diesem Falle das Röhrchen noch ganz so, wie zuvor, auf das Wasser, das sich in der Achse desselben befindet. Denn daß das da-

zwischen liegende Fett ihre Anziehung nicht hindert, und daß Glas durch Fett, so wie im ersten Falle durch die davor liegenden Glastheilchen, anziehend ungestört hindurch wirkt, dafür sprechen die Erscheinungen der Schwere und die magnetischen, ja selbst die elektrischen, Anziehungen und Zurückstossungen. Ihnen analog muß auch die Anziehung der Haarröhren durch alle Körper hindurch wirken; eine Hypothese, von der Newton, Clairaut und alle Geometer, welche über die Anziehung in den Haarröhren Berechnungen angestellt haben, ausgegangen sind. Da folglich die dünnste Fetthaut macht, daß die Wirkung der Haarröhre auf eine Flüssigkeit nicht mehr wahrzunehmen ist; so muß diese Wirkung in jeder angeblichen Entfernung ganz unmerkbar seyn.

Noch ein dritter Beweis für! dieses Princip. Es läßt sich bekanntlich durch anhaltendes Kochen dahin bringen, daß Quecksilber in einer gläsernen Haarröhre nicht, wie gewöhnlich, niedriger als in einer Quecksilberfläche, in die es getaucht wird, sondern im Niveau derselben steht, und durch noch längeres Kochen läßt es sich selbst bewirken, daß das Quecksilber in dieser Haarröhre über das Niveau angehoben wird. Diese Erscheinung scheint mir darauf zu beruhen, daß die innere Oberfläche der Röhre in ihrem gewöhnlichen Zustande mit einer höchst dünnen Lage von Wasser überzogen ist, welche die gegenseitige Ein-

wirkung des Glases und des Queckfilbers auf einander schwächt; und daß diese Einwirkung beider allmählich thätig wird, wenn man durch anhaltendes Kochen des Queckfilbers in dem Röhrchen, die Dicke dieser Lage immer mehr vermindert. Beiden Versuchen, welche ich mit Lavoisier über die Barometer angestellt habe, haben wir durch langes Kochen des Queckfilbers in der Barometerröhre die Convexität der innern Oberfläche des Queckfilbers ganz verschwinden gemacht, und es endlich dahin gebracht, daß diese Oberfläche hohl wurde; so bald wir aber ein Tröpfchen Wasser in die Röhre hinein ließen, war die convexe Oberfläche sogleich wieder da. Bedenkt man nun, wie außerordentlich dünn die Lage Wasser seyn muß, welche die Röhre in ihrem Innern überzieht, besonders wenn man die Röhre und das Queckfilber zuvor stark ausgetrocknet hat (welches nicht hinreicht, die gewöhnliche Wirkung der Capillarität aufzuheben)*); so wird man unstreitig darin mit mir übereinstimmen, daß die Wirkung des Glases auf das Queckfilber nur in unmerklichen Entfernungen merklich seyn kann.

Dieses ist das Princip, von welchem ich ausgehe. Ich fange damit an, die Einwirkung einer flüssigen Masse, welche sich in einer hohlen oder in einer erhabenen sphärischen Oberfläche endigt, auf eine Säule derselben Flüssigkeit, die im Innern eines unendlich engen Kanals gedacht wird, der

*) Man vergl. *Annal.* XXV. S. 244. Anm. *Gilbert.*

verlängert durch den Mittelpunkt der sphärischen Oberfläche gehen würde, durch Rechnung zu bestimmen, nach Formeln, welche man in meiner Mechanik des Himmels findet. Unter dieser *Einwirkung* verstehe ich den Druck, welchen die in dem Kanal eingeschlossene Flüssigkeit vermöge der Attraction der ganzen Masse auf einen ebenen, senkrecht auf die Wände des Kanals stehenden Querschnitt ausübt, der sich in irgend einer angeblichen Entfernung von der Oberfläche befindet, wobei dieser Querschnitt als Einheit angenommen wird *). Ich zeige, daß diese Einwirkung kleiner oder größer ist, als sie es seyn würde, wenn die Oberfläche eine Ebene wäre; kleiner, wenn die Oberfläche hohl, größer, wenn die Oberfläche erhaben ist.

Der analytische Ausdruck derselben besteht aus zwei Gliedern. Das *erste* Glied, welches sehr viel größer als das zweite ist, drückt die Wirkung der durch eine ebene Oberfläche begrenzten Masse aus; und ich glaube, daß von diesem Gliede das Schwebenbleiben einer Quecksilbersäule von der dop-

*) Vortrefflich entwickelt und erläutert findet man diese Erklärung in der Darstellung des Herrn Biot, *Annal. der Phys.* 1807 St. 3., oder B. XXV. S. 233 f. Alle Theilchen eines Flüssigen ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft an, die nur bis auf unmerkliche Entfernungen reicht; dadurch entsteht in jedem Theilchen im Innern des Flüssigen nach allen Richtungen ein gleicher, also gar kein Druck, in der Oberfläche aber ein Druck, der nach dem Innern des Flüssigen hinein geht. Von diesem Drucke, auf dessen Größe die Gestalt der Oberfläche Einfluss hat, ist hier die Rede.

Gilbert.

doppelten oder dreifachen Höhe des Luftdrucks in einer Barometerröhre, das Brechungsvermögen der durchsichtigen Körper, die Cohäsion, und überhaupt die chemischen Verwandtschaften abhängen. Das *zweite* Glied druckt den Theil der Wirkung aus, welcher von der Sphäricität der Oberfläche herrührt; also die Einwirkung des zwischen dieser Oberfläche und der sie berührenden Horizontal-ebene enthaltenen Meniscus. Dieses Glied ist negativ, wenn die Oberfläche hohl, positiv, wenn sie erhaben ist. In beiden Fällen ist es dem Halbmesser der sphärischen Oberfläche verkehrt proportional; auch wird in der That, je mehr dieser Halbmesser abnimmt, der Meniscus um den Punkt der Berührung desto bedeutender. Auf diesem zweiten Gliede beruhen die Wirkungen der Capillarität, welche auf diese Art von den chemischen Verwandtschaften, die das erste Glied darstellt, abweichen.

Aus diesen Resultaten über Körper, die sich in wahrnehmbaren Abschnitten von Kugelflächen endigen, folgere ich das folgende *allgemeine Theorem*: Wenn die Anziehung in unmerklichen Entfernungen unmerkbar ist, so muß, gleich viel welches übrigens ihr Gesetz sey, die Einwirkung eines Körpers, der sich in eine krumme Oberfläche endigt, auf eine unendlich enge Ader im Innern desselben, die in irgend einem Punkte der krummen Oberfläche senkrecht auf ihr steht, der halben Summe der Einwirkungen zweier Kugeln auf denselben

B

Kanal gleich seyn, welche, die eine mit dem größten, die andere mit dem kleinsten Halbmesser der Krümmung, welche die Oberfläche in jenem Punkte hat, beschrieben würden.

Mittelt dieses Theorems und der bekannten Gesetze des Gleichgewichts der Flüssigkeiten läßt sich die *Gestalt* bestimmen, welche eine flüssige, von der Schwere belebte, Masse in einem Gefäße, dessen Gestalt gegeben ist, annehmen muß. Diese Aufgabe führt auf eine Gleichung mit partiellen Differenzialen von der zweiten Ordnung, deren Integral auf keinem der bekannten Wege zu finden ist. Läßt sich die Gestalt des Gefäßes durch Umdrehung einer ebenen Figur entstanden denken, so verwandelt sich diese Gleichung in eine mit gewöhnlichen Differenzialen, und man kann sie, für den Fall, daß die Oberfläche sehr klein ist, auf eine Art integrieren, die der Wahrheit nahe kommt.

Ich zeige auf diese Art, daß in einer *cylindrischen Röhre* von unbedeutendem Durchmesser, der Durchschnitt einer senkrechten Ebene, die durch die Achse gelegt ist, mit der Oberfläche der Flüssigkeit eine Curve von der Art derer bildet, welche die Mathematiker *elastische Linien* genannt haben, und in die sich ein elastischer Blechstreifen biegt, der mit Gewichten beschwert wird. Der Grund davon liegt darin, daß in dieser Durchschnittslinie, wie in der elastischen Curve, die Kraft, welche von der Krümmung herrührt, dem Halbmesser der Krümmung verkehrt proportional

ist. Wenn die Röhre *sehr enge* ist, so nähert sich die Oberfläche der Flüssigkeit in ihr einem Abschnitte einer Kugelfläche, und das desto mehr, je kleiner ihr Durchmesser ist. Gesetzt, in Röhrchen, welche aus derselben Materie bestehen, wären diese Kugelabschnitte sehr nahe einander ähnlich, so müßten die Halbmesser derselben den Durchmessern dieser Röhrchen sehr nahe proportional seyn.

Dafs aber eine Flüssigkeit in verschiedenen sehr engen Röhren, welche aus derselben Materie bestehen, sich so setzen muß, dafs ihre Oberflächen ähnliche Abschnitte von Kugelflächen bilden, erhellt ohne Schwierigkeit daraus, dafs die Entfernung, in welcher die Anziehung der Röhre aufhört, merkbar zu seyn, unmerklich ist. Denn gesetzt, es gäbe ein so stark vergrößerndes Mikroskop, dafs diese unmerkliche Entfernung, durch dasselbe gesehen, ein Millimeter lang zu seyn schiene, so würde der ganze Durchmesser der Röhre, wenn er auf dieselbe Art vergrößert erschiene, sich wahrscheinlich in einer Länge von mehreren Metern zeigen. Bei einer cylindrischen Wand, die einen Durchmesser von dieser Gröfse hätte, liefsen sich aber senkrechte Streifen, die nur ein Millimeter breit wären, ohne bedeutenden Fehler für Ebenen nehmen. Innerhalb der unmerklichen Entfernung, auf welche die Anziehung der Wand des Röhrchens eingeschränkt ist, wirkt daher die Röhrchenwand sehr nahe wie eine Ebene, und folglich

mufs an ihr die Oberfläche der Flüssigkeit gerade auf dieselbe Weise herab gehen oder ansteigen, wie das bei einer ebenen Wand geschehen würde. Weiter ab ist die Flüssigkeit keinem andern merkbaren Einflüsse unterworfen, als der Schwere, und der Kraft, welche sie auf sich selbst ausübt. Ihre Oberfläche mufs daher sehr nahe die Gestalt eines Abschnitts einer Kugelfläche annehmen, dessen äusserste [berührende] Ebenen mit denen der flüssigen Oberfläche da zusammen fallen, wo die Grenzen der Sphäre der merkbaren Wirkung des Röhrchens sind. Ist dieses aber der Fall, so haben sie in verschiedenen Haarröhren sehr nahe einerlei Neigung gegen die Röhrenwände; und daraus folgt, dafs sie alle sehr nahe ähnliche Abschnitte von Kugelflächen seyn müssen.

Nimmt man diese Resultate zusammen, so zeigt sich die wahre Ursache, warum in Haarröhren aus derselben Materie, aber von verschiedener Weite, Flüssigkeiten sich genau im verkehrten Verhältnisse der Durchmesser der Röhrchen über ihr Niveau erheben, oder sich unter dasselbe erniedrigen. Denkt man sich nämlich in der Achse der Haarröhre einen unendlich engen Kanal, der sich etwas unterhalb des Röhrchens wieder aufwärts biegt, und sich in der horizontalen Ebene der Flüssigkeit endigt, in welche das Röhrchen eingetaucht ist [z. B. *OZRV*, Fig. 4. Taf. I.], so wird die Einwirkung der im Haarröhrchen befindlichen Flüssigkeit auf den Kanal, wenn ihre Oberfläche hohl

ist, kleiner seyn, als die Einwirkung der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit auf den Kanal; die Flüssigkeit wird also im Röhrchen ansteigen, um diese Ungleichheit auszugleichen. Nun aber steht, nach dem Vorhergehenden, diese Ungleichheit im verkehrten Verhältnisse mit dem Durchmesser des Haarröhrchens; demselben Verhältnisse muß also auch der Stand, den eine Flüssigkeit in dem Röhrchen über dem Niveau annimmt, entsprechen.

Quecksilber steht in gewöhnlichen Haarröhrren aus Glas mit convexer Oberfläche. In diesem Falle ist die Einwirkung der flüssigen Oberfläche im Röhrchen auf den unendlich engen Kanal stärker, als die Einwirkung der ebenen Oberfläche im Gefäße. Daher muß das Quecksilber im Röhrchen unter dem Niveau um eine GröÙe stehen, welche dem Unterschiede beider Wirkungen entspricht, und daher wieder dem Durchmesser des Röhrchens verkehrt proportional ist.

Der ganze Antheil, welchen die Attraction des Haarröhrchens an dem Stande einer Flüssigkeit in dem Röhrchen hat, dieser sey über oder unter dem Niveau, ist also darauf eingeschränkt, daß sie die Lage der ersten ebenen Elemente der Oberfläche der Flüssigkeit, welche sich in unmerklicher Entfernung von den Wänden der Röhren befinden, bestimmt; von dieser Lage hängt es ab, ob die Oberfläche hohl oder erhaben, und wie groß ihr Halbmesser wird. Durch das Reiben der Flüssigkeit an den Wänden des Röhrchens kann die

Krümmung der Oberfläche ein wenig vermehrt oder vermindert werden, wovon das Barometer täglich Beweise giebt; dann nehmen aber auch die Wirkungen der Capillarität nach demselben Verhältnisse zu oder ab. Ueberhaupt können sie durch Mitwirkung von Kräften, welche auf der Concavität oder der Convexität der Oberflächen beruhen, sehr merklich erhöht werden.

Dieser Einfluß des Reibens auf die Krümmung der Oberfläche, und diese Einwirkung einer größern oder geringern Convexität der Oberfläche auf den Stand der Flüssigkeit in einem Haarröhrchen, lassen sich durch folgende Versuche recht sichtbar machen *). Man bringe in ein heberförmig gebogenes, aufrecht stehendes, Haarröhrchen ein wenig Queckfilber und neige es nach dem einen Schenkel *A* zu. Das Queckfilber steigt dann in diesem Schenkel und zieht sich aus dem zweiten Schenkel *B* ein wenig zurück. Bringt man nun das Röhrchen langsam wieder in die senkrechte Lage, so bleibt das Queckfilber in jenem Schenkel mit minder convexer Oberfläche und etwas höher stehen, als in diesem. Die Queckfilbertheilchen der Oberfläche in *A*, welche das Glas berüh-

*) Diese Versuche, und die darauf folgenden des Herrn Hauy zur Bestimmung der Gestalt der Oberfläche, mit welcher Flüssigkeiten in Haarröhren stehen, führt Herr La Place in dem letzten Abschnitte der *Theorie* (dort §§. 15. und 16.) an. Ich habe sie hierher in einer etwas abgeänderten Ordnung versetzt, weil sie mir noch besser hierher zu passen schienen.

Gilbert.

ren, reiben sich an dasselbe beim Zurücksinken, und leiden dadurch vom Glase ein kleines Hinderniß, welches die Quecksilbertheile in der Mitte der Oberfläche nicht zu überwinden haben. Dadurch muß die Oberfläche hier etwas minder convex, die im Schenkel *B* dagegen aus demselben Grunde etwas stärker convex werden. Sogleich ist aber auch die Einwirkung des Quecksilbers auf sich selbst an dieser Oberfläche (im Schenkel *B*) stärker als an jener (in *A*), und es muß also in *B* etwas niedriger als in dem Schenkel *A* stehen. Eine ähnliche Wirkung nimmt man bei dem Barometer wahr, wenn es steigt oder fällt.

Der folgende Versuch ist nicht nur geeignet, die Wirkungen der Concavität und der Convexität der Oberflächen zu gleicher Zeit sichtlich zu machen, sondern er giebt auch ein Mittel an die Hand, wie sich der Halbmesser der Krümmung, welche die Oberfläche von Wasser in einem Haarröhrchen aus Glas annimmt, auf eine sehr einfache Weise finden ließe *). Man tauche ein Haarröhrchen, dessen Durchmesser bekannt ist, in Wasser, bis zu einer bekannten Tiefe; verschliesse, ehe man es heraus zieht, die untere Oeffnung mit dem Finger, und wische die äußere Oberfläche leicht ab, nachdem man es heraus gezogen hat. Nimmt man nun den Finger fort, so fließt Wasser heraus, und bildet

*) Das letztere ist ein Zusatz zu dem, was in der *Theorie* von diesem Versuche steht, den ich aus dem *Journ. de Phys.* an der angef. St. entlehne. *Gilbert.*

am untern Ende des Röhrchens einen Wassertropfen; doch bleibt immer in dem Röhrchen eine Wassersäule zurück, die in ihrer Länge die grösste Höhe übertrifft, bis zu welcher Wasser im Röhrchen sich in dem Falle erhebt, wenn das untere Ende desselben in einer grossen Fläche dieser Flüssigkeit eingetaucht ist. Diese grössere Länge rührt von der Einwirkung her, welche der Tropfen vermöge seiner Convexität auf die Wassersäule äussert, und sie ist desto bedeutender, einen je kleinern Durchmesser der Tropfen hat. Denn man übersieht leicht, dass in diesem Versuche die Concavität der obern Oberfläche des Wassers im Innern des Röhrchens, und die Convexität der untern Oberfläche (das ist die des ausserhalb der Haarröhre befindlichen Tröpfchens), beide vereint dahin wirken, das Wasser in dem Röhrchen aufwärts zu treiben. — Da die Länge der flüssigen Säule, welche dazu verwendet wird, dieses Tröpfchen zu bilden, die Masse desselben bestimmt, und da die Oberfläche des Tröpfchens sowohl, als die des Wassers im Röhrchen, sphärisch sind, so würden sich die Halbmesser dieser beiden Oberflächen leicht berechnen lassen, wenn man die Höhe der Flüssigkeit über der Spitze des Tropfens, und den Abstand dieser Spitze von der Ebene der untern Basis des Röhrchens kannte.

Taucht man ein heberförmiges Glasröhrchen mit ungleichen Schenkeln, wie *ABC* Fig 1, senkrecht so tief in Wasser, dass der kürzere Schenkel

AB sich ganz untergetaucht befindet, so steigt das Wasser im längern Schenkel über das Niveau um eine gewisse Höhe *FG* an. Zieht man dann das Röhrchen aus dem Wasser heraus, so bildet sich an der Oeffnung *A* ein Tröpfchen *ANO*, und denkt man sich, wenn das Wasser in dem längern Schenkel einen bleibenden Stand angenommen hat, durch den Gipfel *N* des Tröpfchens die Horizontallinie *NI'* gezogen, so ist nun die Wassersäule *IC'*, welche in dem längern Schenkel über diese Horizontallinie steht, größer als *FG*. Nimmt man das Tröpfchen mit dem Finger fort, und so die folgenden, die sich in *A* bilden, so wird diese Säule immer kleiner; kommt man endlich dahin, daß das Wasser in *A* mit ebener Oberfläche steht, so ist diese Säule genau gleich *FG*; und bringt man dann aufs neue ein Tröpfchen auf *A*, und so mehrere, so daß die Oberfläche hier wieder convex wird, so steigt das Wasser in dem Schenkel *BC* aufs neue höher an, und die vorigen Erscheinungen kommen in umgekehrter Folge wieder. Die Gröfse, um welche bei diesen Versuchen die in dem Schenkel *BC* angehobene Wassersäule die Höhe *FG* übertrifft, scheint der Convexität der Oberfläche *ANO* zu entsprechen: um von einer ganz genauen Correspondenz sich zu überzeugen, müßte man die Breite und den Pfeil dieser Oberfläche messen. Dieses liefs sich indess bei der grofsen Schwierigkeit solcher Messungen nicht thun.

*) Wenn Wasser aus einem Gefäße durch einen Heber abläuft, der aus einem Haarröhrchen oder aus zweien von verschiedener Weite besteht (wie in Fig. 2.), und man zieht den Heber aus dem Gefäße heraus, so wird das Wasser aus dem längern Schenkel nicht ablaufen, im Fall beide Schenkel in ihrer Länge um weniger von einander verschieden sind, als um die Höhe, um welche eine Flüssigkeit in einem Haarröhrchen von der Weite des kürzern Schenkels über ihr Niveau ansteigt. Auch dieses erklärt sich sehr leicht aus der Gestalt der flüssigen Oberflächen in den beiden Schenkeln. Man setze nämlich die eben erwähnte Höhe h ; ferner die Einwirkung der Flüssigkeit bei ebener Oberfläche auf sich selbst K , die Wirkung der Schwere g , den Druck der Atmosphäre P und den kürzern Arm des Hebers q , den längern q' . Da die Flüssigkeit in dem kürzern Arm ein- und aus dem längern ausströmt, so wird sie in dem ersten Augenblicke nach dem Herausziehen des Hebers an der Oeffnung des kürzern mit concaver, an der des längern mit convexer Oberfläche stehen. Folglich wird die Flüssigkeit eines unendlich engen Kanals, den wir uns in der Achse des Haarröhrchens denken wollen, mit folgender Kraft von unten nach oben gedrückt werden: an der Oeffnung des kürzern Schenkels durch $P - gq + K - g.h$; an der Oeffnung des längern Schenkels dagegen, wenn die

*) Nur in diesem Abfatze bin ich, der Kürze halber, von den Worten des Herrn La Place abgewichen. *Gilbert.*

Oberfläche des Wassers dort eben wäre, durch $P - gq' + K$; ist die Oberfläche dort convex, so ist der Druck noch größer. Nun aber ist, wenn $q' - q < h$, schon dieser Druck größer als der erste, und das Wasser kann folglich, wenn diese Bedingung erfüllt ist, nicht aus dem längern Schenkel heraus fließen, wie das in der That die Versuche zeigen.

Die Physiker haben bis jetzt die Concavität und die Convexität der Oberfläche, in welche eine Flüssigkeit in haarröhren-artigen Räumen sich setzt, nur für eine entferntere Wirkung der Haarröhren-Kraft, und nicht für die Haupt-Ursache aller haarröhren-artigen Erscheinungen gehalten. Dieses scheint der Grund zu seyn, warum es ihnen bisher von keiner besondern Wichtigkeit dünkte, die Art und die Grösse der Krümmung dieser Oberflächen zu bestimmen. Für die hier vorgelegene Theorie, die alle haarröhren-artigen Erscheinungen hauptsächlich von der Krümmung der Oberflächen abhängen läßt, hat dieses dagegen ein hohes Interesse. Die Herren Haüy und Tremery haben auf mein Ersuchen sich damit beschäftigt, *die Krümmung der Oberfläche des Wassers in Haarröhren zu messen*. Zu dem Ende haben sie in eine Röhre von 2 Millimeter innerem Durchmesser (AB Fig. 3.) eine Säule Wasser, wie $MmnN$ hinein gebracht, die Röhre an beiden Enden verschlossen, sie senkrecht gehalten, und in dieser Lage die Längen Mm und Ii mit möglichster Sorg-

falt gemessen; letztere Linie ist der Abstand der beiden am wenigsten von einander entfernten Punkte der beiden hohlen Menisken. Der Unterschied $Mm - li$ gab ihnen die Gröſſen der beiden Pfeile $PI + pi$; sie fanden sie gleich $\frac{41}{8} MN$. Wären die beiden Menisken Halbkugeln, so müſten sie sie gleich MN gefunden haben. Da aber die Oberfläche des Wassers, wenn sie eine Halbkugel ist, von den Wänden der Röhre als Tangenten berührt wird, und es nicht möglich ist, die Stelle einer solchen Berührung zu sehen, so würden in diesem Falle die Beobachter für M nicht den wahren Berührungspunkt, sondern einen tiefer liegenden Punkt genommen haben, wo das Wasser schon eine merkbare Entfernung von den Glaswänden hatte. Um $IP + ip = \frac{41}{8} MN$ zu finden, würden sie für M und m nur Punkte zu nehmen gebraucht haben, wo das Wasser sich um 0,0226 Millimeter von den Röhrenwänden entfernt hatte; und daſs dieses in der That geschehen sey, ist nichts weniger als unwahrscheinlich. Daher scheint es mir, dieser Versuch zeige an, daſs die Glaswände Tangenten des Wassermeniskus sind. Die Herren Haüy und Tremery haben einen ähnlichen Versuch mit Orangenöhl angestellt, und dasselbe Resultat erhalten. Es läſst sich daher mit Wahrscheinlichkeit annehmen, daſs Wasser, Öhle und überhaupt alle Flüssigkeiten, welche das Glas nassen, sich in Haarröhrchen mit einer Oberfläche setzen, welche sehr nahe eine Halbkugel ist. Als endlich die Beob-

achter auf dieselbe Art die krumme Oberfläche des Quecksilbers in sehr engen Röhren zu bestimmen suchten, fand sich auch diese Oberfläche ungefähr der einer Halbkugel gleich.

Wenn man einem Röhrchen eine geneigte Lage giebt, so wird die Gestalt der Oberfläche, welche eine Flüssigkeit in demselben annimmt, gegen den Fall, wenn die Röhre senkrecht steht, nicht merklich verändert; sie nähert sich in beiden Fällen sehr der Gestalt eines Kugelabschnittes, dessen Achse in die Achse der Röhre fällt. Dieses beruht darauf, weil in der Formel für die Gestalt der Oberfläche die Schwere nur in Gliedern vorkommt, die bei sehr engen Röhren vernachlässigt werden können. Die senkrechte Höhe einer Flüssigkeit über ihr Niveau, oder die Tiefe unter demselben, muß daher in einem gegen den Horizont geneigten Haarröhrchen dieselbe, als in einem gleich weiten senkrechten Röhrchen seyn; und dieses zeigt in der That die Erfahrung.

Die folgende interessante Bemerkung rührt von Clairaut her. „Wenn die Anziehung, welche die Materie der Röhre auf die Flüssigkeit, und die Anziehung, welche die Flüssigkeit auf sich selbst ausübt, einerlei Gesetz unterworfen sind, und sich also nur in der Intensität unterscheiden *); so

*) Und das dürfte allerdings der Fall seyn, wenn ich mich anders nicht in der Meinung irre, daß bei Anziehungen, die nicht über die Berührung hinaus wirken, und bei denen wir uns nur durch eine mathematische Fiction Entfernungen denken können, von einem Gesetze, nach

findet folgendes Statt: „So lange die Intensität der erstern dieser Anziehungen (das heisst, der, mit welcher die Flüssigkeit auf die Röhre wirkt) nicht kleiner ist, als halb so groß, als die zweite (das heisst, als die der Flüssigkeit auf sich selbst), muss die Flüssigkeit über ihr Niveau ansteigen. Ist jene genau halb so groß, als diese, so bleibt die Flüssigkeit in der Röhre im Niveau, und ihre Oberfläche ist horizontal, welches man leicht übersieht. Sind beide Intensitäten einander gleich, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit hohl, hat die Gestalt der Oberfläche einer Halbkugel, und die Flüssigkeit steigt in dem Haarröhrchen an. Ist endlich die Intensität der Anziehung des Röhrchens null oder unmerklich, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit im Röhrchen convex, ebenfalls halbkugelförmig, und die Flüssigkeit steht unter ihrem Niveau. Zwischen diesen beiden Grenzen wird die Gestalt der Oberfläche ein Abschnitt einer Kugelfläche, und zwar concav oder convex, je nach dem die Anziehung der Röhre an Intensität größer oder kleiner ist, als die Hälfte der Anziehung der Flüssigkeit auf sich selbst.“

Es scheint mir wahrscheinlich, dass, so oft die Anziehung des Röhrchens auf die Flüssigkeit, die

welchem die Anziehung mit der Entfernung sich ändert, eigentlich nicht die Rede seyn kann; und dass, wenn man sich solche Gesetze fingiren wollte, die Resultate unabhängig von denselben seyn und also gleichmässig für alle Gesetze gelten müssten.

Gilbert.

Anziehung, welche die Flüssigkeit auf sich selbst ausübt, an Intensität übertrifft, die Flüssigkeit sich fest an die Röhren anhänge, und eine innere engere Röhre bilde, welche allein die Flüssigkeit ansteigen macht; daher dann ihre Oberfläche hohl, und der einer Halbkugel gleich ist. Ich glaube, daß dieses beim Wasser und bei Oehlen in Haarröhrchen aus Glase der Fall ist.

Alles dieses betraf die Theorie der eigentlichen Haarröhren, oder derjenigen haarröhren-artigen Räume, in welchen die Flüssigkeiten genau, oder wenigstens sehr nahe mit kugelförmiger Oberfläche stehen. Nachdem ich diese Theorie entwickelt hatte, wendete ich mich zu den haarröhren-artigen Räumen, in welchen Flüssigkeiten mit einer *cylindrischen Oberfläche* stehen; ein Fall, der zwischen zwei parallelen Ebenen eintritt, die einander sehr nahe sind, und deren unteres Ende in eine Flüssigkeit eingetaucht ist. Die Differenzialgleichung für die Oberfläche einer Flüssigkeit, welche sich in einem durch Umdrehung erzeugten haarröhren-artigen Raume befindet, führt zu folgendem allgemeinen Resultate, das auch diesen Fall umfaßt: Wenn man in eine *cylindrische Röhre* einen *dünnern Cylinder* hinein setzt, so daß beide einerlei Achse haben, und der Zwischenraum, der übrig bleibt, sehr enge ist; so wird in diesem Zwischenraume die Flüssigkeit gerade so hoch steigen, als in einem Haarröhrchen, dessen Halbmesser dem Abstände beider cylindri-

fcher Flächen von einander gleich ist. Setzt man nun, der Halbmesser der Röhre und des Cylinders seyen beide unendlich, so hat man den Fall einer Flüssigkeit, welche sich *zwischen zwei senkrechten und parallelen Ebenen* befindet, die einander sehr nahe sind. Zwischen ihnen wird also eine Flüssigkeit ebenfalls erhoben oder herab gedrückt werden, um Höhen, welche dem Abstände der beiden Ebenen von einander verkehrt proportional sind, die aber nur halb so groß seyn werden, als in einem cylindrischen Haarröhrchen, dessen Durchmesser diesem Abstände gleich ist.

Als ich zu diesen Resultaten der Analyse gekommen war, ersuchte ich Herrn Haüy, sie durch Versuche zu prüfen. Er stellte seine Versuche (die man in III. findet) mit Röhren und Cylindern von einem sehr kleinen Durchmesser und zwischen Glastafeln, die einander sehr nahe waren, an, und fand, daß sie in beiden Fällen meinem Resultate völlig entsprachen. Als ich seitdem mehreres nachlas, was man über die haarröhrenartigen Wirkungen geschrieben hat, fand ich, daß in Gegenwart der Londner Societät und unter den Augen Newton's schon hierher gehörige Versuche waren angestellt worden, und daß das Resultat derselben ebenfalls dem meiner Analyse vollkommen entspricht. Man kann sich davon aus folgender Stelle von Newton's Optik überzeugen; dieses bewundernswürdigen Werkes, worin der große Mann eine Menge origineller Ansichten hinwirft,

wirft, in denen er seinem Jahrhunderte voraus geeilt ist, und welche die neuere Chemie bestätiget.

In der 31. Frage sagt Newton: „Hier einige Versuche derselben Art. Wenn man zwei ebene und polirte Glasplatten, z. B. zwei gut polirte Spiegelgläser, so mit einander verbindet, daß ihre Oberflächen parallel und nur sehr wenig von einander entfernt sind, und sie mit ihren untern Rändern in ein Gefäß mit Wasser setzt; so steigt das Wasser zwischen beiden in die Höhe, und zwar desto höher, je näher beide Platten bei einander sind. Beträgt ihre Entfernung $\frac{1}{100}$ Zoll, so steigt das Wasser zwischen ihnen ungefähr 1 Zoll hoch; und ist sie kleiner oder größer, so steht die Höhe des Wassers zwischen ihnen zu jener Höhe in einem Verhältnisse, welches ungefähr das Umgekehrte ihrer Entfernungen ist. — — Wenn man in ruhiges Wasser das Ende eines sehr dünnen Glasröhrchens taucht, so steigt das Wasser in das Röhrchen an, bis zu einer Höhe, welche dem Durchmesser der innern Höhlung des Röhrchens verkehrt proportional ist, und erlangt dieselbe Höhe, bis zu welcher es sich zwischen den beiden Glasplatten erhebt, wenn der Halbmesser der innern Höhlung, der Entfernung der beiden Platten von einander ungefähr gleich ist. Uebrigens gelingen alle diese Versuche im luftleeren Raume eben so gut, als in der Luft, wie man sich davon in Gegenwart der königlichen Societät überzeugt hat; sie hängen

C

folglich auf keine Weise vom Gewichte oder von dem Drucke der Atmosphäre ab." Newton führt noch an, daß das Wasser eben so zwischen zwei polirten Marmorplatten ansteige, wenn ihre polirten Flächen einander sehr nahe und parallel sind.

Durch eben so einfache Folgerungen aus meiner Analyse werden die Erscheinungen erklärt, welche ein Tropfen einer Flüssigkeit in einem *konischen Haarröhrchen* oder zwischen zwei Ebenen zeigt, die unter einem sehr kleinen Winkel gegen einander geneigt sind; und diese Erscheinungen sind dadurch eben so viele Bestätigungen meiner Theorie.

Eine kleine Wasserfäule, die sich in einem *konischen Haarröhrchen* befindet, welches an beiden Enden offen ist, begiebt sich, wenn man das Röhrchen horizontal hält, an das engere Ende. Daß dieses geschehen muß, läßt sich aus dem Vorhergehenden leicht übersehen. Die kleine Wasserfäule im Röhrchen endigt sich zwar an beiden Seiten mit concaven Oberflächen; die Krümmung der Oberfläche, welche nach dem engern Ende zu liegt, ist aber von einem kleinern Halbmesser als die Krümmung der entgegen gesetzten Oberfläche. Folglich äußert die Flüssigkeit auf sich selbst eine geringere Einwirkung an der kleinern Oberfläche als an der größern, und daher strebt sie nach der engern Oeffnung hin. Eine Quecksilberfäule begiebt

sich dagegen in einem horizontal gehaltenen konischen Haarröhrchen an die weitere Oeffnung; denn da sie an beiden Seiten convexe Oberflächen hat, so ist ihre Einwirkung auf sich selbst da gröfser, wo die Röhre enger ist, und sie treibt sich also selbst von dort weg.

Diesem Erfolge kann man durch das eigene Gewicht der kleinen flüssigen Säule entgegen wirken, und machen, dafs sie im Gleichgewichte schweben bleibt; man braucht zu dem Ende nur die Achse des Haarröhrchens in eine geneigte Lage zu bringen. Eine sehr einfache Rechnung zeigt, dafs, wenn die Länge der flüssigen Säule unbedeutend ist, für diesen Zustand des Gleichgewichts der Sinus des Neigungswinkels der Achse, nahe verkehrt proportional seyn mufs dem Quadrate des Abstandes, worin die Mitte der flüssigen Säule von der Spitze des Kegels steht.

Dasselbe findet bei einem Tropfen Statt, der sich *zwischen zwei* gegen den Horizont geneigten *Ebenen* befindet, welche sich mit ihren horizontalen Rändern berühren, und einen sehr kleinen Winkel mit einander machen. Dafs alle diese Resultate der Erfahrung völlig entsprechen, sieht man aus dem, was Newton in seiner Optik, Frage 31, darüber anführt. Dieser grofse Geometer hat dort eine Erklärung hinzugefügt; vergleicht man mit ihr die hier gegebene, so wird man die grofsen Vorzüge

einer mathematischen und genauen Theorie nicht verkennen.

Die Rechnung belehrt uns in dem angeführten Falle des Gleichgewichts auch über die Grösse des Winkels, den die Achse des konischen Haarröhrchens mit dem Horizonte macht. Der Sinus dieses Winkels ist einem Bruche ungefähr gleich, dessen Nenner dem Abstände der Mitte des Tropfens von der Spitze des Kegels, und dessen Zähler der Höhe gleich ist, bis zu welcher die Flüssigkeit in einem cylindrischen Haarröhrchen ansteigen würde, das einerlei Weite mit dem konischen Röhrchen in der Mitte des Tropfens hat. Wenn zwei Ebenen, zwischen denen sich ein Tropfen derselben Flüssigkeit befindet, mit einander einen Winkel machen, der eben so groß ist als der Winkel der Seitenwände mit der Achse im konischen Röhrchen; so muß, soll der Tropfen zwischen ihnen im Gleichgewichte schweben, eine Ebene, welche den Winkel, den beide Ebenen mit einander machen, halbirt, dieselbe Neigung gegen den Horizont haben, als hier die Achse des konischen Röhrchens. Hawksbee hat einen Versuch dieser Art mit außerordentlicher Sorgsamkeit gemacht; ich führe denselben unter III. an, und vergleiche ihn mit diesem Theoreme. Die wenige Abweichung zwischen beiden ist ein unwiderprechlicher Beweis von der Richtigkeit dieses Theorems.

Meine Theorie giebt ferner die Erklärung und die Zahlwerthe für ein sonderbares Phänomen, welches uns die Erfahrung zeigt; eine Flüssigkeit mag zwischen zwei senkrechten, parallelen, und einander sehr nahen Ebenen, deren untere Enden in sie getaucht sind, über oder unter ihrem Niveau stehen; immer streben beide Ebenen, sich einander zu nähern*). Auch die Erscheinungen des Anstiegs von Flüssigkeiten zwischen zwei senkrechten Ebenen, die mit einander einen sehr kleinen Winkel machen, lassen sich aus meiner Theorie folgern. Und überhaupt wird man finden, (will man sich die Mühe nehmen, diese Theorie mit den zahlreichen Versuchen zu vergleichen, welche die Physiker über die Haarröhren und über verwandte Erscheinungen angestellt haben,) daß sich aus ihr die Resultate aller dieser Versuche, sind sie nur mit der nöthigen Vorsicht ausgeführt, genügend ableiten lassen; und zwar nicht durch unbestimmte und schwankende Betrachtungen, bei denen man immer sehr ungewiss bleibt, sondern durch eine Kette mathematischer Schlüsse, welche mir gar keinen Zweifel an der Wahrheit der Theorie übrig zu lassen scheinen.

Ich wünsche, daß diese Anwendung der Analysis auf einen der wundervollsten und merkwür-

*) Was Herr La Place weiter von dieser Erscheinung anführt, übergehe ich hier; man wird alles, was dahin gehört, im dritten Hefte dieses Bandes beisammen finden.

Gilbert.

digsten Gegenstände der Physik die Mathematiker interessiren und sie anreitzen möge, ihrer immer mehrere zu versuchen. Diese Anwendungen vereinigen mit einander das Verdienst, der Physik sichere Theorien zu geben, und die Analysis selbst zu vervollkommen, da sie häufig neue Kunstgriffe der Rechnung erfordern.

II. Theorie von der Wirkung der Haarröhrchen,

übersetzt, mit einigen Anmerkungen,
von H. W. Brandes.

A. Von der Attraction des Wasser-Meniscus an der Oberfläche, auf die übrige im Haarröhrchen enthaltene Wassersäule.

1. Es sey $ABCD$ (Fig. 4.) ein mit Wasser bis an AB gefülltes Gefäß, und in dasselbe sey ein an beiden Enden offenes Haarröhrchen $NMEF$ mit seinem untern Ende eingetaucht; so wird sich das Wasser in der Röhre bis an O erheben, und die Oberfläche wird die concave Form NOM annehmen, deren niedrigster Punkt O ist. Man stelle sich durch diesen Punkt O und durch die Achse der Röhre einen Wasserfaden, in einem unendlich engen Kanale $OZRV$ eingeschlossen, vor, und nehme an, daß die hier wirkende Attractionskraft nur in unmerklich kleinen Distanzen merklich sey.

Es läßt sich leicht übersehen, daß dann das unterhalb *IOK* befindliche Wasser auf die Säule *OZ* ebenso wirkt, wie das Wasser im Gefäße auf *VR*. Außerdem aber zieht der Meniscus *MIOKN*, oder eigentlich der unendlich nahe an der Achse liegende Theil desselben, die Säule *OZ* aufwärts, und sucht folglich sie zu heben. Es muß daher im Zustande des Gleichgewichtes das Wasser des Kanals *OZRV* innerhalb der Röhre höher, als im Gefäße stehen, um durch sein Gewicht die Attraction des Meniscus zu compensiren.

Das Gesetz, wodurch diese Höhe, um welche sich das Wasser in Haarröhrchen von verschiedenen Halbmessern erhebt, bestimmt wird, hängt von der Attraction jenes Meniscus, und folglich von der Gestalt der Oberfläche ab, so daß hier, wie bei der Figur der Planeten, Gestalt und gesammte Attraction gegenseitig durch einander bestimmt werden, welches die Untersuchung erschwert. Um indess zu brauchbaren Resultaten zu gelangen, wollen wir die Wirkung untersuchen, welche ein Körper von willkürlicher Gestalt auf eine gegen dessen Oberfläche senkrechte Wasserfäule, die in einem unendlich engen Röhrchen eingeschlossen ist, ausübt, und dabei die Basis dieser Wasserfäule als Einheit annehmen.

Der anziehende Körper sey eine *Kugel*, und das Fluidum in einem außerhalb derselben befindlichen, auf ihre Oberfläche senkrechten, Kanale eingeschlossen. Es sey in Fig. 5. $LZ = r$, der Abstand

des angezogenen Punktes Z vom Mittelpunkte der Kugelschale $NRMOQ$, deren Radius $LQ = u$, und Dicke $= du$ ist. Die Lage irgend eines Punktes Q dieser Kugelschale werde durch den ebenen Winkel $QLZ = \vartheta$, und den Neigungswinkel $NPQ = \omega$ bestimmt, welchen die Ebene QLZ mit irgend einer durch LZ gelegten festen Ebene NLZ macht. Das *Element* dieser sphärischen Schale ist $= u^2 \cdot du \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin. \vartheta$ *), und aus der Trigonometrie ist bekannt, daß im Dreieck LQZ , wenn wir $QZ = f$ setzen, ist $QZ = f = \sqrt{[r^2 - 2ru \cdot \cos. \vartheta + u^2]}$. Stellen wir nun durch $\varphi(f)$ das Gesetz der Attraction in der Entfernung $= f$ dar, so ist, da $PZ = r - u \cdot \cos. \vartheta$, die mit LZ parallele *Wirkung* des Elements Q auf den Punkt Z , $= u^2 du \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin. \vartheta \cdot \frac{r - u \cos. \vartheta}{f} \varphi(f)$ oder $= u^2 du \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin. \vartheta \cdot \left(\frac{df}{dr}\right) \varphi(f)$; und diese Wirkung ist gegen das Centrum der Kugelschale gerichtet, und ist unmerklich, so bald f einen merklichen Werth erhält.

Wir wollen das zwischen den Grenzen $f = 0$ und $f = \infty$ genommene Integral $\int df \cdot \varphi(f)$ mit $c - \Pi(f)$ bezeichnen, und unter c den Werth verstehen, welchen dieses Integral für $f = \infty$ erhält: so muß $\Pi(f)$ eine äußerst schnell abnehmende

*) Denkt man sich nämlich durch Q einen größten Kreis OQR gezogen, unendlich nahe dabei einen zweiten OqR , und S_s als einen Bogen eines unendlich nahe bei NQM befindlichen Parallelkreises, so ist QqS_s die Grundfläche, und du die Dicke dieses Elements. Es ist aber $Qq = PQ$. $QPq = u \cdot \sin. \vartheta \cdot d\omega$, und $QS = LQ$, $QLS = u \cdot d\vartheta$. *Gilb.*

Funktion seyn, die schon gänzlich unbedeutend ist, so bald f nur einen merklichen Werth erhält; und es ist nun $\left(\frac{df}{dr}\right) \varphi(f) = -\left(\frac{d \cdot \Pi(f)}{dr}\right)$; also, wenn man $u^2 \cdot du \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin \vartheta [c - \Pi(f)] = dddA$ setzt, $u^2 \cdot du \cdot d\omega \cdot d\vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot \left(\frac{df}{dr}\right) \varphi(f) = \left(\frac{d \cdot dddA}{dr}\right)$, weil u , ω und ϑ unabhängig von r sind.

Integrirt man in Rücksicht auf ω zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = 2\pi$, so ist die Attraction des ganzen Kugel-Ringes $NQMN$

$$= \left(\frac{d \cdot dddA}{dr}\right) = -2\pi \cdot u^2 du \cdot d\vartheta \cdot \sin \vartheta \left(\frac{d \cdot \Pi(f)}{dr}\right),$$

und weil der Werth von f , wenn man ihn differentiirt, indem man bloß ϑ als variabel ansieht, $d\vartheta \cdot \sin \vartheta = \frac{fdf}{ru}$, giebt:

$$-2\pi u^2 du \cdot d\vartheta \sin \vartheta \cdot \left(\frac{d \cdot \Pi(f)}{dr}\right) = -2\pi \cdot \frac{udu}{r} \cdot fdf \left(\frac{d \cdot \Pi(f)}{dr}\right)$$

Um die Attraction der ganzen Kugelschale vom Halbmesser $= u$ und der Dicke $= du$ auf den bestimmten Punkt Z zu finden, für den $LZ = r$ ist, muß diese Function noch einmahl in Rücksicht auf ϑ , zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ integrirt, und das Integral so genommen werden, daß man u und r als unveränderlich, dabei aber f als zwischen den Grenzen $f = r - u$, und $f = r + u$ variirend annimmt. Weil nun ϑ von r unabhängig ist, so läßt sich

eben jene Formel auch $= -2\pi \cdot \left(\frac{d \cdot \frac{udu}{r} \cdot fdf \cdot \Pi(f)}{dr}\right)$

setzen, und jenes Integral ist

$$= -2\pi \left(\frac{d \cdot \left(\frac{udu}{r} \int fdf \cdot \Pi(f)\right)}{dr}\right).$$

Es sey demnach $\int f df \Pi(f) = c' - \Psi(f)$, und c' der Werth dieses Integrals für $f = \infty$, $\Psi(f)$ aber eine äußerst schnell abnehmende Function, die schon verschwindet, so bald f nicht mehr unmerklich klein ist. Wir haben dann

$$= 2\pi \left(\frac{d \cdot (u^2 du \cdot d\vartheta \sin \vartheta \cdot \Pi(f))}{dr} = \right. \\ \left. = 2\pi \left(\frac{d \cdot \left(\frac{udu}{r} \cdot \Psi(r-u) - \frac{udu}{r} \cdot \Psi(r+u) \right)}{dr} \right) \right)$$

für die Wirkung der erwähnten vollständigen Kugelschale auf den Punkt Z des Fluidums.

Soll nun die Wirkung eben jener Kugelschale auf die ganze in der Richtung ZL liegende Säule des Flüssigen, deren nächster Endpunkt um die Entfernung $= b$ von dem Centro L der Kugelschale entfernt ist, bestimmt werden; so muß man das zuletzt gefundene Differential mit dr multipliciren und integriren, welches dann, wenn man die Constante so bestimmt, daß das Integral mit $r = b$ verschwinde, giebt

$$\frac{2\pi u du}{b} [\Psi(b-u) - \Psi(b+u)] - \frac{2\pi u du}{r} [\Psi(r-u) - \Psi(r+u)].$$

Um diese Formel zu vereinfachen, dürfen wir uns nur erinnern, daß die Function $\Psi(f)$ so beschaffen ist, daß sie schon unmerklich wird, so bald f nur einen irgend merklichen Werth erhält. Denn hieraus folgt, daß $\Psi(b+u)$ verschwindet, weil der Durchmesser der Kugelschichte nicht unendlich klein ist; daß ferner $\Psi(r+u)$ um so mehr verschwindet, da $r > b$, indem die Entfernung $= b$

sich auf den Punkt bezieht, welcher dem Centro L am nächsten ist; und endlich, daß auch $\Psi(r - u)$ als verschwindend anzusehen ist, wenn $r - b$ eine endliche Gröfse hat. Es kann also nur $\Psi(b - u)$ einen merklichen Werth haben, in dem Falle nämlich, da $b - u$ äußerst klein ist. Die Formel

$$\frac{2\pi \cdot u du}{b} \cdot \Psi(b - u)$$

druckt also vollständig die Wirkung der Kugelschale auf eine gegen die Oberfläche derselben senkrechte Wasserfäule aus, deren, dem Centro nächstes Ende um die Entfernung $= b$ von diesem Centro entfernt ist. Diese Wirkung ist einerlei mit dem Drucke, den das Wasser, vermöge der Attraction jener Kugelschale, auf einen an jenem Ende befindlichen, senkrecht auf den Wasserfaden (der die Richtung des Halbmessers der Kugelschale hat) stehenden Querschnitt, ausüben würde, wenn man die Gröfse dieser Grundfläche $= 1$ setzte.

Die Wirkung der vollständigen Kugel vom Halbmesser $= b$ findet man, wenn man in dieser Formel $b - u = z$ setzt, und dann integrirt,

$$= 2\pi \int \frac{b - z}{b} \cdot dz \cdot \Psi(z),$$

wenn dieses Integral zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = b$ genommen wird. Ist also innerhalb dieser Grenzen $K = 2\pi \int dz \Psi(z)$, und

$$H = 2\pi \int z dz \Psi(z), \text{ so ist jene Wirkung}$$

$$= K - \frac{H}{b}.$$

Man darf hier K und H als unabhängig von b betrachten; denn da $\Psi(z)$ sogleich unmerklich

klein wird, so bald z einen irgend erheblichen Werth erhält, so ist der zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = b$ genommene Werth des Integrals gar nicht verschieden, von dem zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \infty$ genommenen Werthe desselben. Auch ist zu merken, daß $\frac{H}{b}$ bedeutend kleiner als K ist, weil das Differential jener GröÙe gleich ist dem Differential dieser, multiplicirt mit $\frac{z}{b}$, und $\frac{z}{b}$ sehr klein ist für die ganze Ausdehnung des Integrals, woraus dann jener Schluss auch für die Integrale folgt.

Die für die Wirkung der ganzen Kugel auf die gegen ihre Oberfläche senkrechte flüssige Säule gefundene Formel, $K - \frac{H}{b}$, gilt auch für ein *sphärisches Segment*, welches durch eine auf jene flüssige Säule senkrechte Ebene begrenzt wird. Denn der jenseits dieser Ebene liegende Theil der Kugel ist von dem angezogenen Fluidum um etwas merkliches entfernt, und wirkt folglich gar nicht auf dasselbe. Daher ist $K - \frac{H}{b}$ die Wirkung eines jeden durch ein solches sphärisches Segment vom Halbmesser $= b$ begrenzten Körpers, auf eine außerhalb befindliche, gegen die sphärische Oberfläche senkrechte, flüssige Säule. In diesem Ausdrucke bedeutet K die Wirkung eines in einer *Ebene* sich endenden Körpers, weil $\frac{H}{b}$ verschwindet für $b = \infty$, und $\frac{H}{b}$ druckt folglich die Wirkung des

Meniscus MIOKN (Fig. 4.) aus, mit welcher dieser die Säule *OZ* zu heben strebt.

2. Die Wirkung, welche eine Kugel auf eine sehr dünne, gegen ihre Oberfläche senkrechte, *innerhalb liegende* Wasserfäule ausübt, läßt sich nun leicht bestimmen. Wenn (Fig. 6.) *MON*, *POQ* zwei sich berührende Kugeln sind, und *IOK* eine durch den Berührungspunkt gehende Tangential-Ebene, *OS* aber die Wasserfäule vorstellt; so giebt es für jeden Punkt *q* im untern Meniscus, dessen Querschnitt *KOPIOQ* ist, einen Punkt *q'* im obern Meniscus, welcher die Wasserfäule *OS* eben so stark zu heben strebt, als jener. Zeichnet man nämlich den gleichschenkligen Triangel *Oqr*, so ist die ganze Kraft, mit welcher *q* die Wasserfäule *Or* zu heben strebt, $= o$, oder sie zerstört sich selbst, und *q* trägt bloß durch seine Einwirkung auf Theilchen unterhalb *r* noch bei, um die ganze Säule *OS* zu heben; zieht man nun *Oq'* mit *rq* parallel, und nimmt $Oq' = rq$, so wirkt *q'* im obern Meniscus eben so auf *O* und die unterhalb liegenden Punkte, wie *q* im untern Meniscus auf *r* und die niedrigeren Punkte, und wegen der Kleinheit der Attractions-sphäre ist also die gesammte Wirkung beider Punkte zur Erhebung der sehr dünnen Wasserfäule einerlei. Ferner läßt sich leicht einsehen, daß eine oberhalb *IOK* befindliche und durch diese Ebene begrenzte Wassermasse auf die ganze Wasserfäule *OS* eben so stark, aber in entgegen gesetzter Richtung, wirkt, als eine unterhalb *IOK* liegende, durch

diese Ebene begrenzte, Wassermasse, die unterwärts als unbegrenzt angenommen wird; denn jeder Punkt r bleibt zwischen beiden Attractionen im Gleichgewichte, wenn beide Massen zugleich da sind. Wir fanden vorhin die Wirkung der durch die Ebene IOK begrenzten Masse $= K$, die Wirkung des untern oder obern Meniscus $= \frac{H}{b}$, also die Wirkung der Kugel NOM auf OS , $= K - \frac{H}{b}$, weil nämlich K , oder die Wirkung der oberhalb IOK befindlichen Masse, aus den nach einerlei Richtung wirkenden Attractionen der Kugel und des Meniscus zusammen gesetzt ist. Dagegen ist die Wirkung der Kugel POQ auf die innerhalb liegende, gegen den Mittelpunkt gerichtete, Säule OS ist $= K + \frac{H}{b}$, weil ihre unterwärts gerichtete Attraction, zusammen genommen mit der aufwärts gerichteten des Meniscus, $= K$ seyn muß. Aus dem Vorigen erhellet noch, daß $K \pm \frac{H}{b}$ die Wirkung eines in ein Kugelsegment endenden Körpers auf eine innerhalb liegende, gegen die Mitte der Oberfläche des Segments senkrechte, Wasserfäule ausdrückt. Es ist also allgemein $K \pm \frac{H}{b}$ die Kraft, mit welcher ein oberwärts in ein Kugelsegment sich endigender Körper, wie (Fig. 4.) $MEFN$, die gegen die Mitte desselben senkrechte Wasserfäule OZ niederwärts zieht, und es gilt hier das Zeichen $+$ für die *convexe*, das Zeichen $-$ für die *concave* Oberfläche.

3. Wenn der anziehende Körper sich nicht in eine Kugelfläche, sondern in *irgend eine andere krumme Fläche* endigt, so kann man die Wirkung auf eine in irgend einem Punkte der Oberfläche senkrechte Wasserfäule mit Hülfe des osculirenden Ellipsoids für diese Oberfläche bestimmen. Die Wirkung ist nämlich eben so, als wenn die ganze Oberfläche mit diesem osculirenden Ellipsoide völlig übereinstimmte, indem, wegen der äußerst beschränkten Wirkungssphäre der hier wirkenden Kräfte, der zwischen dem Ellipsoide und der wahren Oberfläche eingeschlossene Meniscus erst in Entfernungen, die für diese Wirkungssphäre viel zu groß sind, eine merkliche Dicke erhält. Die schon oben gemachte Bemerkung, daß die Grösse $\frac{H}{b}$ gegen K von der Ordnung $\frac{z}{b}$ ist (wo z kleiner als der Halbmesser der Wirkungssphäre, b aber eine endliche, angebliche Grösse ist), läßt leicht den Grund übersehen, warum ferner die Wirkung des zwischen der Oberfläche und dem osculirenden Ellipsoide enthaltenen Meniscus, gegen $\frac{H}{b}$, von der Ordnung $\frac{z}{b}$ ist, und also weggelassen werden kann.

Da die Wasserfäule, auf welche der Körper wirkt, auf den Punkt der Oberfläche, welchen sie trifft, senkrecht ist, so stimmt ihre Richtung mit der Richtung der einen Achse des osculirenden Ellipsoides überein. Diese Achse sey $= 2a$, und die beiden andern $= 2a'$ und $= 2a''$. Legt man nun

durch jene Achse und jede der beiden andern Achsen Ebenen, so ist für den Punkt, wo die Wasserfäule die Oberfläche berührt, der Krümmungshalbmesser der beiden Ellipsen $= \frac{a'^2}{a}$ und $= \frac{a''^2}{a}$.

Ist nun ferner durch die Achse a eine Ebene gelegt, die mit der durch a und a' gelegten den Winkel ϑ macht, so ist der Durchschnitt dieser mit dem Ellipsoide eine Ellipse, deren eine Achse wieder $= 2a$ ist, und die andere $= 2A$, wenn

$$A^2 = \frac{a'^2 \cdot a''^2}{a'^2 \cdot \sin.^2 \vartheta + a''^2 \cdot \cos.^2 \vartheta} \text{ ist.}$$

Der Krümmungshalbmesser dieser Ellipse im Berührungspunkte der Wasserfäule ist $= \frac{A^2}{a}$; setzt man ihn daher

$$= B, \text{ und ferner } \frac{a'^2}{a} = b, \text{ und } \frac{a''^2}{a} = b', \text{ so wird}$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{b'} \cdot \sin.^2 \vartheta + \frac{1}{b} \cos.^2 \vartheta.$$

Die Wirkung des Stückes, welches zwischen jener Ebene und der unter dem Winkel $d\vartheta$ gegen sie geneigten, gleichfalls durch die Achse a gehenden Ebene liegt, auf die Wasserfäule, ist fast genau einerlei mit der Wirkung eines ähnlichen Kugelstückes vom Halbmesser B , also $= \frac{1}{2\pi} d\vartheta \left(K + \frac{H}{B} \right)$

und daher die *Wirkung des ganzen Ellipsoids*

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\vartheta \left(K + \frac{H \sin.^2 \vartheta}{b'} = \frac{H \cos.^2 \vartheta}{b} \right) = K + \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} \right)$$

weil das vollständige Integral sich von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ erstreckt. Nennt man B und B' die Krümmungshalbmesser zweier durch die Achse gehenden, gegen einander senkrechten, Ebenen, so ist

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B'}, \text{ und daher die gesuchte}$$

Wir-

Wirkung $= K + \frac{1}{2}H \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'} \right)$. Es ist also die Wirkung eines Körpers von willkürlicher Gestalt auf ein Fluidum, welches in einen unendlich engen, auf irgend einen Punkt der Oberfläche dieses Körpers senkrechten, Kanal eingeschlossen ist, gleich der halben Summe von der Wirkung zweier Kugeln, deren Halbmesser so groß wären, als an diesem Punkte die Krümmungshalbmesser irgend zweier Durchschnittslinien sind, welche durch zwei auf einander und auf diese Oberfläche senkrechte, durch jenen Punkt gehende, Ebenen mit der Oberfläche des Körpers gebildet werden. Diese Krümmungshalbmesser sind negativ, wenn die Oberfläche an dieser Stelle hohl ist, und es kann der eine positiv, der andere negativ seyn, wenn die Krümmung nach einer Richtung hohl und nach der darauf senkrechten convex ist, wie dieß bei den Schraubengängen der Fall ist.

B. Ueber die Gestalt der Oberfläche des Fluidums im Haarröhrchen.

4. Um die Gestalt der Oberfläche des im Haarröhrchen enthaltenen Flüssigen zu bestimmen, kann man *entweder* von dem Grundsatz ausgehen, daß in einem krummlinigten Kanale, der sich in zwei verschiedenen Punkten der Oberfläche endigt, Gleichgewicht Statt finden muß, *oder* man kann dabei das Princip zum Grunde legen, daß in jedem Punkte der Oberfläche die Summe der Kräfte auf die Oberfläche senkrecht seyn muß.

D

Wir werden zuerst die erste Methode wählen, die sich dadurch empfiehlt, daß man bloß die Kraft $H\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ zu bestimmen und mit der Schwere zu vergleichen braucht. Zwar ist sie in der Oberfläche unvergleichlich viel wirksamer, als die Schwere; aber weil ihre Wirkungssphäre so sehr klein ist, so läßt sich dessen ungeachtet ihre Einwirkung auf eine Säule von angeblicher Länge mit der Wirkung der Schwere auf eine solche Säule vergleichen.

Es sey O (Fig. 7.) der niedrigste Punkt der Oberfläche AOB des in eine Röhre eingeschlossenen Wassers; z bedeute die vertikale Ordinate OM ; und x , y die beiden horizontalen Ordinaten irgend eines Punktes N der Oberfläche. Bezeichnet man nun mit R , R' den größten und den kleinsten Krümmungshalbmesser der Oberfläche in N , und mit b , b' den größten und den kleinsten Krümmungshalbmesser in O , so ist die Gleichung für das Gleichgewicht des in dem unendlich engen Kanale NSO enthaltenen Wassers:

$$K - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + gz = K - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right);$$

wenn g die Kraft der Schwere bedeutet. Es ist nämlich, wie aus dem Vorigen erhellet, $K - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ im Punkte N die Wirkung des Fluidums auf den Kanal, und diese wird durch das Gewicht, $= gz$, einer Wasserfäule von der Höhe z unterstützt, um der in O Statt findenden Wirkung des Wassers auf den Kanal das Gleichgewicht zu halten.

Wollte man diese Gleichung allgemein auflösen, so müßte man R und R' durch die Coordinaten und durch ihre ersten und zweiten Differentiale ausdrücken *), welches auf eine sehr verwickelte Gleichung führt, die sich indess bei Oberflächen, die durch Umdrehung entstanden sind, sehr vereinfacht. Es sey also die Oberfläche durch Umdrehung um die Achse der z entstanden, und es sey $u^2 = x^2 + y^2$, so ist

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\frac{ddz}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dz}{du} \left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^3}},$$

und die obige Gleichung wird demnach

$$\frac{\frac{d^2z}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dz}{du} \left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^3}} - \frac{2gz}{H} = \frac{2}{b},$$

weil nämlich $b = b'$ ist im Punkte o , wenn die Oberfläche durch Umdrehung um die Achse der z entstanden ist. Man kann noch bemerken, daß

$\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^3}}{\frac{d^2z}{du^2}}$ demjenigen Krümmungshalbmesser gleich ist, welcher in einer durch die Umdrehungsachse gehenden Ebene liegt, hingegen ist $\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}}{\frac{1}{u} \cdot \frac{dz}{du}}$ der andere Krümmungshalbmesser,

*) Hierzu findet man Anleitung in Monge *Application de l'analyse à la géométrie*. Tome 2. p. 112. Br.

gleich der bis an die Umdrehungsachse verlängerten Senkrechten auf diese Achse.

Setzt man in der vorigen Gleichung $\frac{g}{H} = \alpha$, so findet man, nachdem sie mit udu multiplicirt worden, ihr Integral

$$\frac{u \cdot \frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} - 2\alpha \int z u du = \frac{u^2}{b} + \text{Const.}$$

wo die $\text{Const.} = 0$ ist, wenn $\int z u du$ mit u zugleich verschwinden soll. Um diese Gleichung durch Näherung zu integriren, sey $u' = u + \frac{2\alpha b}{u} \int z u du$, woraus folgt $dz = \frac{u' \cdot du}{\sqrt{(b^2 - u'^2)}}$. Wäre $\alpha = 0$, so würde $u' = u$ und $z = b - \sqrt{(b^2 - u^2)}$ seyn, und wir können nun diesen Werth als eine erste Annäherung in den Werth des Integrals $\int z u du$ setzen, welches dann giebt:

$$\frac{2\alpha b}{u} \int z u du = \frac{\alpha b}{u} [b u^2 + \frac{2}{3}(b^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}b^3].$$

Das Differential des letzten Theiles dieser Gleichung ist

$$\frac{\alpha b^2 du (3u^2 + 2b^2)}{3u^2} - \frac{2\alpha b \cdot du}{3u^2} \cdot \sqrt{(b^2 - u^2)} \cdot (b^2 + 2u^2),$$

und man kann hier, wenn man Gröſſen von der Ordnung α^2 wegläſt, überall u' statt u setzen. Dann findet man aus der Gleichung $u = u' - \frac{2\alpha b}{u} \int z u du$,

$$du = du' (1 - \alpha b^2) + \frac{2\alpha b}{3u'^2} du' [-b^3 + (b^2 + 2u'^2) \sqrt{(b^2 - u'^2)}]$$

also

$$dz = \frac{u' du' (1 - \alpha b^2)}{\sqrt{(b^2 - u'^2)}} + \frac{2\alpha b \cdot du'}{3u'^2} \left(b^2 + 2u'^2 - \frac{b^3}{\sqrt{(b^2 - u'^2)}} \right).$$

Diese Gleichung wird bequemer, wenn man $u' = b \cdot \sin. \vartheta$ setzt, dann ist

$$\frac{dz}{b} = d\vartheta \cdot \sin. \vartheta (1 - \alpha b^2) + \frac{2\alpha b^2}{3} \cdot d\vartheta \cdot \left(\sin. 2\vartheta - \frac{\sin. \frac{1}{2}\vartheta}{\cos. \frac{1}{2}\vartheta} \right),$$

folglich

$$\frac{z}{b} = (1 - \alpha b^2) \cdot (1 - \cos. \vartheta) + \frac{\alpha b^2}{3} (1 - \cos. 2\vartheta) + \frac{2}{3} \alpha b^2 \log. \cos. \frac{1}{2}\vartheta,$$

wenn die beständige GröÙe so genommen wird, daß z und ϑ zugleich verschwinden *).

Nennt man nun l den Halbmesser der Röhre und erinnert sich, daß dieser Halbmesser äußerst nahe einerlei ist mit dem äußersten Werthe von u , (nämlich nur in so fern davon verschieden, als unmittelbar an der Röhrenwand die Oberfläche durch die Wand afficirt, also nicht mehr genau durch unsere Gleichung ausgedruckt wird,) so findet man den äußersten Werth von u'

$$u' = l + \alpha b^2 l - \frac{2}{3} \alpha \cdot \frac{b^4}{l} + \frac{2}{3} \alpha \cdot \frac{b^4}{l} \cos. 3\vartheta',$$

wo ϑ' der äußerste Werth von ϑ ist, nämlich das Complement des Winkels, welchen der äußerste

*) Herr La Place erklärt sich über die eigentliche Bedeutung von ϑ nicht genau. Meiner Meinung nach ist diese folgende. In Fig. 8. sey O der niedrigste Punkt der Oberfläche, $OP = b$ der Krümmungshalbmesser an dieser Stelle; OQ der mit diesem Halbmesser beschriebene Kreis, OR die Oberfläche des Fluidums, so ist $RS = u$, aber $QT = b \cdot \sin. \vartheta$, wenn man $OPQ = \vartheta$ setzt. Es scheint also, daß wegen der geringen Verschiedenheit von u , u' und QT diese GröÙen verwechselt werden dürfen. Daß ϑ die Bedeutung, welche ich hier angebe, beinahe habe, erhellet aus dem Folgenden, wo der Winkel, den die Oberfläche OR mit RU (welche mit PO garallem ist) macht, $= \vartheta$ ist.

Br.

Theil der Oberfläche mit der Röhrenwand bildet. Derfelbe äußerfte Werth von u' ist auch $= b \cdot \sin. \vartheta'$, wo dann aus Vergleichung beider Werthe von u' folgt:

$$b = \frac{l}{\sin. \vartheta'} + \frac{\alpha b^2 l}{\sin. \vartheta'} - \frac{\frac{2}{3} \alpha b^3 (1 - \cos. \vartheta')}{l \cdot \sin. \vartheta'},$$

oder beinahe

$$b = \frac{l}{\sin. \vartheta'} + \frac{\alpha l^3}{\sin. \vartheta'^3} - \frac{\frac{2}{3} \alpha l^3}{\sin. \vartheta'^5} + \frac{\frac{2}{3} \alpha l^3 \cdot \cos. \vartheta'}{\sin. \vartheta'^5}.$$

Hieraus folgt der äußerfte Werth von z ,

$$z = l \cdot \tan. \frac{1}{2} \vartheta \left(1 - \frac{\frac{2}{3} \alpha l^2 (1 - \cos. \vartheta')}{\sin. \vartheta'^4} \right) + \frac{2 \alpha l^3}{3 \cdot \sin. \vartheta'} + \frac{4 \alpha l^3 \cdot \log. \cos. \frac{1}{2} \vartheta'}{3 \cdot \sin. \vartheta'^3},$$

und endlich

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin. \vartheta'}{l} \left(1 - \frac{\alpha l^2}{\sin. \vartheta'^2} \left(1 - \frac{\frac{2}{3} (1 - \cos. \vartheta')}{\sin. \vartheta'^2} \right) \right),$$

durch Näherung, wo Glieder von der Ordnung α^2 weggelassen werden.

Man kann sich leicht versichern, daß die Werthe von z und $\frac{1}{b}$ noch Statt finden, wenn die Oberfläche des Fluidums *convex* ist, nur mit dem Unterschiede, daß man dann die z vom höchsten Punkte der Oberfläche niederwärts rechnen muß.

5. *) Diese ganze Analyse beruht auf dem Princip des Gleichgewichts in Kanälen, welches in der Aussage besteht, daß eine homogene flüssige Masse, auf welche anziehende Kräfte wirken, im Gleichgewichte ist, wenn das Gleichgewicht in einem jeden Kanale Statt findet, dessen beide Enden

*) Hier eingeschaltet aus dem *Supplément etc.*

in der freien (durch kein Gefäß beschränkten) Oberfläche des Flüssigen liegen. Dieses Princip selbst läßt sich leicht folgender Malsen beweisen.

Wir wollen uns im Innern des Flüssigen einen in sich zurück kehrenden Kanal von überall gleicher, unendlich geringer, Weite vorstellen. Beschreibt man nun um den auf dieses Fluidum wirkenden anziehenden Punkt, mit willkürlichem Halbmesser, eine Kugelfläche, welche den Kanal schneidet, so schneidet sie ihn wenigstens in zwei, oder überhaupt in einer geraden Anzahl von Punkten. Dasselbe findet bei einer zweiten, um denselben Punkt mit einem unendlich wenig verschiedenen Halbmesser beschriebenen, Kugelfläche Statt, und diese beiden Kugelflächen schneiden also wenigstens zwei unendlich kleine Stücke des Kanals ab. Diese abgeschnittenen Stückchen werden durch die anziehende Kraft auf gleiche Weise afficirt, und da ihre, nach der Richtung der Kraft gerechneten, Höhen gleich sind, so halten die Einwirkungen der Attraction, welche auf diese beiden kleinen Stücke Statt finden, einander das Gleichgewicht. Der ganze in sich zurück kehrende Kanal ist also in Rücksicht auf die Attraction eines einzigen Punktes im Gleichgewichte, und man übersieht leicht, daß eben das Statt findet, wenn der anziehenden Punkte mehrere sind. Wir wollen jetzt annehmen, daß ein Theil dieses Kanals sich an der Oberfläche des Flüssigen befinde, und sich längs derselben hin krümme, so wird gleichwol

das Gleichgewicht fort dauern; und wenn man nun annimmt, daß das Gleichgewicht in dem im Innern liegenden Theile des Kanals für sich bestehe, so wird auch in dem längs der Oberfläche befindlichen Theile das Gleichgewicht Statt finden. Das Gleichgewicht in diesem letztern Theile kann nur auf zweierlei Weise bestehen: *entweder* indem in jedem Punkte des Kanals die Summe der wirkenden Kräfte auf die Wände senkrecht ist, *oder* indem der Druck am einen Ende durch einen entgegen gesetzten Druck am andern Ende aufgehoben wird; aber im letztern Falle kann das Gleichgewicht in dem längs der Oberfläche befindlichen Theile des Kanals nicht Statt finden, wenn die beiden Enden dieses Kanals sich in dem Theile des Flüssigen an der Oberfläche befinden, welcher nach einerlei Richtung drückt *). Die Voraussetzung also, daß allgemein in jedem mit beiden Enden an der freien Oberfläche ausgehenden Kanale Gleichgewicht Statt finde, führt zu der nothwendigen Folgerung, daß in einem, theils innerhalb, theils längs der Oberfläche hin, gekrümmten Kana-

*) Diese letztern Worte scheinen mir nicht so klar, als das Vorige. — In einem wirklichen in Wände eingeschlossenen Kanale kann das Gleichgewicht bestehen, wenn an beiden Enden ein entgegen gesetzter Druck Statt findet, da die Wände das seitwärts Ausweichen hindern; da aber das nicht der Fall ist an der freien Oberfläche des Flüssigen, so kann da das Gleichgewicht nur dadurch bestehen, daß in jedem Punkte die Kräfte senkrecht auf die Oberfläche und nach dem Innern des Fluidums zu gerichtet sind.

Br.

le, an jedem Punkte des letztern Theiles, die Summe der Kräfte auf die Richtung des Kanals senkrecht seyn muß. Dieses kann aber nicht bei jeder Richtung des längs der Oberfläche ganz willkürlich angenommenen Kanals Statt finden, wenn nicht die Summe der Kräfte auf die Oberfläche selbst senkrecht ist. Denn wäre dieß nicht, so ließe diese aus allen einzelnen resultirende Kraft sich mit der Richtung der Oberfläche parallel und auf sie senkrecht zerlegen; die erstere aber würde durch die Wand jedes längs der Oberfläche angenommenen Kanals nicht zerstört, und folglich bestände das Gleichgewicht nicht. Das Princip des Gleichgewichts in jedem Kanale, dessen Enden in der Oberfläche liegen, ist also nothwendig mit der Bedingung verbunden, daß die Summe der Kräfte auf die Oberfläche senkrecht sey; und dieses ist das zweite der oben erwähnten Principe. Die Gleichungen, welche man aus beiden folgert, müssen folglich identisch, oder die eine das Differential der andern seyn. Wirklich ist auch die Gleichung, welche aus der letzten Voraussetzung folgt, das Differential der erstern. Denn die aus dem Gleichgewichte in einem an der Oberfläche endenden Kanale gefolgerte Gleichung enthält nur Differentiale der zweiten Ordnung, statt daß die Tangentialkraft an der im Haarröhrchen gebildeten Oberfläche durch Differentiale der dritten Ordnung bestimmt wird, indem sie aus der nach der Richtung der Oberfläche zerlegten Schwer-

kraft und der Attraction des zwischen der Oberfläche und dem osculirenden Ellipsoid liegenden Meniscus entsteht, welche letztere von Differentialen der dritten Ordnung abhängt. So läßt sich also übersehen, daß diese Gleichung das Differential der nach der vorigen Methode gefundenen seyn muß. Es ist indess interessant, dieses auch durch die Analyse bestätigt zu sehen, welches dann zugleich zur Versicherung von der Richtigkeit der Theorie dienen wird.

Wir wollen zu dem Ende einen mit O bezeichneten Punkt der Oberfläche zum Anfangspunkte der Coordinaten annehmen, und als Achse der Ordinaten z die in diesem Punkte auf die Oberfläche senkrechte Linie. Alle Mahl läßt sich der durch die Gleichung für die Oberfläche gegebene Werth von z durch eine Reihe von folgender Form ausdrücken:

$$z = Ax^2 + \lambda xy + By^2 + Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3 + etc.$$

Die drei ersten Glieder dieses Ausdruckes beziehen sich auf das die Oberfläche osculirende Ellipsoid, oder genauer auf das osculirende Paraboloid; und da dieses, für sich allein betrachtet, gegen die Achse der z symmetrisch ist, also die gesammte Attraction derselben auf den Punkt O nach der Achse der z gerichtet ist, so kann die von der ganzen Masse bewirkte Tangentialkraft für den Punkt O nur aus der Attraction des Körpers entstehen, dessen Oberfläche durch die Gleichung $z = Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3 + etc.$ bestimmt

wird, und der also der Unterschied der ganzen Masse und des osculirenden Paraboloids ist.

Um die Tangentialkraft, welche aus der Attraction jenes Differential-Körpers auf O entspringt, zu bestimmen, bezeichne man mit f den Abstand irgend eines Elements dieses Körpers von O , und nenne ϑ den Winkel, welchen diese Abstandslinie mit der Achse der x macht. Weil die Attraction nur in äußerster Nähe merklich ist; so kann man x , y und f als in einer Ebene liegend betrachten, nämlich in derjenigen, welche die Oberfläche in O berührt; und man darf, da x , y , f immer sehr klein bleiben, ihre Potenzen und Produkte, wenn sie die dritte Ordnung übersteigen, weglassen. Das anziehende Theilchen ist nach dieser Bezeichnungsart $= fdf \cdot d\vartheta \cdot [Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3]$, und man erhält, wenn $\varphi(f)$ das Gesetz der Attraction andeutet, die Wirkung dieses Theilchens auf O , zerlegt nach der Richtung der x , $= fdf \cdot \varphi(f) d\vartheta \cdot \cos.\vartheta \cdot [Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3]$, und nach der Richtung der y , $= fdf \cdot \varphi(f) d\vartheta \cdot \sin.\vartheta \cdot [Cx^3 + Dx^2y + Exy^2 + Fy^3]$. Hieraus folgt, da $x = f \cdot \cos.\vartheta$, und $y = f \cdot \sin.\vartheta$, die Attraction der ganzen flüssigen Masse nach der Richtung der x ,

$$= \iint f^4 df \cdot \varphi(f) d\vartheta [C \cdot \cos.^4\vartheta + D \cdot \cos.^3\vartheta \cdot \sin.\vartheta + E \cdot \cos.^2\vartheta \sin.^2\vartheta + F \cdot \cos.\vartheta \sin.^3\vartheta],$$

und nach der Richtung der Ordinate y ,

$$= \iint f^4 df \cdot \varphi(f) d\vartheta [C \cdot \cos.^3\vartheta \cdot \sin.\vartheta + D \cdot \cos.^2\vartheta \sin.^2\vartheta + E \cdot \cos.\vartheta \sin.^3\vartheta + F \cdot \sin.^4\vartheta].$$

Nimmt man hier die Integrale in Beziehung auf ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi =$ dem ganzen Umfange, so findet man

$$\text{das erste Integral} = \frac{1}{4}\pi (3C + E) \int f^4 df \cdot \Phi(f),$$

$$\text{das zweite} = \frac{1}{4}\pi (3F + D) \int f^4 df \cdot \Phi(f).$$

Das in Beziehung auf f genommene Integral kann zwischen den Grenzen $f = 0$ und $f = \infty$ genommen, und als von den Grenzen der anziehenden Masse unabhängig angesehen werden, weil die etwas entfernten Theile hier gar nicht in Betrachtung kommen. Setzen wir hier wieder $\int df \cdot \Phi(f) = c - \Pi(f)$, eben so wie oben, so ist

$$\int f^4 df \cdot \Phi(f) = -f^4 \Pi(f) + 4 \int f^3 df \cdot \Pi(f),$$

wenn das Integral mit $f = 0$ verschwindet. In diesem Ausdrucke ist $-f^4 \Pi(f)$ gleich null, wenn $f = \infty$, wegen der äußersten Schnelligkeit, mit welcher $\Pi(f)$ bei wachsendem f abnimmt. Man kann die Functionen $\Phi(f)$ und $\Pi(f)$ am besten mit den Exponentialgrößen von der Form e^{-if} vergleichen, wo e die Basis des natürlichen Logarithmenystems, und i eine sehr große Zahl ist; hier ist nämlich e^{-if} endlich für $f = 0$, und verschwindet für $f = \infty$; auch nimmt diese Größe so erstaunlich schnell ab, daß $f^n \cdot e^{-if}$ alle Mahl $= 0$ ist für $f = \infty$, der Exponent n mag einen Werth haben, welchen man will.

Wir setzen ferner, wie oben (in Nr. 1.), $\int f df \cdot \Pi(f) = c' - \Psi(f)$, so wird

$$4 \int f^3 df \cdot \Pi(f) = -4f^2 \Psi(f) + 8 \int f df \cdot \Psi(f),$$

und wieder wird für $f = \infty$, das Glied $4f^2 \Psi(f) = 0$. Nimmt man also die Integrale von $f = 0$ bis $f = \infty$, so ist

$$\int f^4 df \Phi(f) = 8 \int f df \cdot \Psi(f),$$

und wenn man, wie in Nr. 1, das Integral $\int f df \Psi(f)$, zwischen den Grenzen $f = 0$ und $f = \infty$ genommen, $= \frac{H}{2\pi}$ setzt, so wird eben jener Ausdruck

$$= \frac{4H}{\pi},$$

und daraus ergeben sich dann die Tangentialkräfte, parallel mit der Achse der x ,

$$= (3C + E) H,$$

und parallel mit der Achse der y

$$= (3F + D) H.$$

Ueberlegt man nun, daß, weil die Achse der z senkrecht auf die Oberfläche in O ist, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ wird, und folglich aus bekannten Gründen

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) x^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx \cdot dy}\right) xy + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \frac{1}{2} y^2 + \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) \cdot \frac{1}{6} x^3 + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 \cdot dy}\right) \cdot \frac{1}{2} x^2 y + \left(\frac{d^3 z}{dx \cdot dy^2}\right) \frac{xy^2}{2} + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) \frac{1}{6} y^3.$$

Es wird also für den Punkt O durch diese Gleichung der Werth von C, D, E, F leicht bestimmt, und wenn man diese Werthe in die Gleichungen für die Tangentialkräfte setzt, so findet man diese

$$= \frac{1}{2}H \left[\left(\frac{d^3 z}{dx^3} \right) + \left(\frac{d^3 z}{dx dy^2} \right) \right]$$

und

$$= \frac{1}{2}H \left[\left(\frac{d^3 z}{dy^3} \right) + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy} \right) \right].$$

Es sey nun g die Kraft der Schwere und $-du$ das Element ihrer Richtung. In dem Falle, da die Summe der Tangentialkräfte null ist, oder das Gleichgewicht besteht, muß die Summe der Produkte aller Kräfte in das Differential ihrer Richtung $= 0$ seyn, also

$$\frac{1}{2}H \left[\left(\frac{d^3 z}{dx^3} \right) dx + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy} \right) dy + \left(\frac{d^3 z}{dx dy^2} \right) dx + \left(\frac{d^3 z}{dy^3} \right) dy \right] - g du = 0.$$

Aus der Theorie der krummen Flächen läßt sich aber zeigen, daß in dem Punkte, wo die Achse der z auf die Fläche senkrecht ist, das in $\frac{1}{2}H$ multiplicirte Glied $= d \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ ist, wenn R, R' den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser an dieser Stelle bedeuten. Jene Gleichung giebt also

$$d \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) - \frac{2g \cdot du}{H} = 0,$$

welches ebenfalls das Differential der oben im Anfange von §. 4. gefundenen Gleichung ist, wenn nämlich das Integral so genommen wird, daß es im niedrigsten Punkte der Oberfläche verschwindet.

C. Bestimmung der Höhe, welche das Fluidum im Haarröhrchen erreicht.

a) In cylindrischen Haarröhrchen.

6. Da die Kraft, mit welcher der Meniscus $MIOKN$ (Fig. 4.) das Fluidum des Kanals OZ zu heben strebt,

$= \frac{H}{b}$ ist (nach 1), so wird $\frac{H}{b} = gq$ seyn, wenn q die Höhe bedeutet, um welche das Fluidum über das Niveau des Gefäßes im Haarröhrchen erhoben wird. Der am Ende von §. 4. für $\frac{1}{b}$ gefundene Werth ergibt für Haarröhrchen, die cylindrisch sind,

$$q = \frac{H \cdot \sin. \vartheta'}{gl} \cdot \left[1 - \frac{\alpha l^2}{\sin.^2 \vartheta'} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{(1 - \cos.^3 \vartheta')}{\sin.^2 \vartheta'} \right) \right].$$

Da $\alpha = \frac{g}{H}$ war, und hier beinahe $q = \frac{H \cdot \sin. \vartheta'}{gl}$ ist, so kann man $\alpha = \frac{\sin. \vartheta'}{ql}$ als einen genäherten Werth in die vorige Gleichung setzen, welches dann giebt

$$q = \frac{H \cdot \sin. \vartheta'}{gl} \left[1 - \frac{l}{q \cdot \sin. \vartheta'} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{(1 - \cos.^3 \vartheta')}{\sin.^2 \vartheta'} \right) \right].$$

Hier sind $\frac{H}{g}$ und ϑ' Gröſſen, die vom Halbmesser der Röhre $= l$ unabhängig sind, und bloß durch die Natur des Fluidums und der Materie der Röhrenwand bestimmt werden, und man hat daher, weil $\frac{l}{q}$ gewöhnlich klein ist, beinahe $q = \frac{H \cdot \sin. \vartheta'}{gl} = \frac{\text{const.}}{2l}$, oder q sehr nahe dem Durchmesser des Haarröhrchens umgekehrt proportional, wie es auch die Erfahrung ergibt.

Um zu bestimmen, wie viel der genaue Werth von q von diesem ersten Gliede des gefundenen Werthes abweiche, wollen wir ϑ' dem Quadranten gleich setzen, wie es bei Wasser in Glasröhren zu seyn scheint. Dann würde unser gefundener Werth

für $q = \frac{H}{gl} \left(1 - \frac{l}{3q} \right)$ oder beinahe $= \frac{H}{gl} - \frac{1}{3}l$. Nimmt man also den Durchmesser der Röhre $= 2$ Millimeter, oder $l = 1$ Millimeter, in welchem Falle die Erfahrung für Wasser in Glasröhren $q = 6,784$ Millim. giebt, so würde der Fehler noch nicht $\frac{1}{20}$ der ganzen Höhe betragen, und dieser Fehler wird bei engeren Röhren noch geringer, da er wie das Quadrat von l abnimmt. Man kann also die einfache Regel, daß die Höhe des Fluidums über dem Niveau dem Halbmesser der Röhre umgekehrt proportional ist, als sehr nahe richtig annehmen.

Wäre die Oberfläche des Flüssigen im Haarröhrchen *convex*, und man stellt sich den längs der Achse derselben hinab gehenden unterhalb der Röhrenwand zur Oberfläche im Gefäße hinauf krümmenden Kanal vor; so ist die Wirkung des in der Röhre enthaltenen Flüssigen auf den Kanal $= K + \frac{H}{b}$; die Wirkung des Flüssigen im Gefäße auf den Kanal $= K$, und diese wird durch das Gewicht der jetzt im Gefäße höher stehenden Säule unterstützt, so daß $K + \frac{H}{b} = K + gq$, und auch hier q eben so bestimmt wird wie im vorigen Falle.

In einem gegen den Horizont geneigten Röhrchen wird die Oberfläche des Fluidums fast genau so seyn, wie in dem vertikalen Röhrchen, weil die Wirkung der Schwere nur Glieder, die mit α multiplicirt sind, und also bei engen Röhren weg-

ge-

gelassen werden dürfen, in die Rechnung einführt. Heißt also hier q die vertikale Höhe über dem Niveau des umgebenden Fluidums, so wird noch $q = \frac{H \cdot \sin. \vartheta}{gl}$ seyn, welches auch mit der Erfahrung überein stimmt.

b) In prismatischen Haarröhrchen *).

7. Die Untersuchung läßt sich noch in größerer Allgemeinheit auf folgende Weise anstellen. Es sey die Röhre, welche in das größere mit Wasser gefüllte Gefäß eingetaucht ist, *prismatisch*; die Oberfläche des innerhalb derselben erhobenen Fluidums sey concav, und man bestimme diese Oberfläche durch horizontale gegen einander senkrechte Coordinaten x, y , und durch eine vertikale Ordinate z , deren Anfangspunkt im niedrigsten Punkte der Oberfläche liegt. Die Höhe dieses niedrigsten Punktes über dem Niveau des umgebenden Fluidums sey $= h$. Wenn man sich nun einen unendlich engen Kanal vorstellt, der von irgend einem Punkte der Oberfläche des Flüssigen in der Röhre ausgehend, sich unter der Röhrenwand hin krümmt, und sich an der Niveaulfläche des Fluidums im Gefäße endigt; so wird die Höhe jenes Punktes der Oberfläche in der Röhre über dem Niveau $= h + z$ seyn. Für ein Fluidum, dessen Dichtigkeit $= D$ ist, hat man also die Gleichung

$$gD(h+z) = \frac{1}{2}H \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

als Bedingung des Gleichgewichts in dem Kanale.

*) Eingeschaltet aus dem *Supplément etc.*

Br.

E

Die Lehre von den allgemeinen Eigenschaften krummer Flächen ergiebt, wenn man $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ setzt, und R, R' als den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser der Fläche in dem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte annimmt, die Gleichung

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{(1+q^2)\left(\frac{dp}{dx}\right) - pq\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\right\} + (1+p^2)\left(\frac{dq}{dy}\right)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus dann für das Gleichgewicht folgt:

$$\frac{(1+q^2)\left(\frac{dp}{dx}\right) - pq\left\{\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\right\} + (1+p^2)\left(\frac{dq}{dy}\right)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2gD}{H} (h+z).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $dx \cdot dy$, integrirt sie in Beziehung auf dx und dy , und bemerkt, daß der erste Theil der Gleichung

$$= \left(\frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}}{dx} \right) + \left(\frac{d \cdot \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}}{dy} \right) \text{ ist,}$$

so wird

$$\iint dx \cdot dy \left[\left(\frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}}{dx} \right) + \left(\frac{d \cdot \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}}{dy} \right) \right] = \frac{2gD}{H} \iint (h+z) dx \cdot dy.$$

Die doppelten Integrale müssen für die ganze Gröſſe des horizontalen Querschnitts des Prisma's genommen werden, und dann ist $gD \iint (h+z) dx \cdot dy$ das Gewicht des durch die Haarröhrchen-Kraft

über das Niveau erhobenen Fluidums. Man kann also dieses Integral $= gD.V$ setzen, wenn V das Volumen dieser flüssigen Masse bezeichnet.

Das doppelte Integral $\iint dx.dy \left(\frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} \right)$

gibt, in Beziehung auf x integrirt,

$$= \int dy \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{(p)}{\sqrt{1+(p)^2+(q)^2}} \right),$$

wenn (p) , (q) die Werthe bezeichnen, die p , q am Anfange des Integrals haben. Eben so ist, in Beziehung auf y integrirt,

$$\iint dx dy \cdot \left(\frac{d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} \right) = \int dx \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{(q)}{\sqrt{1+(p)^2+(q)^2}} \right).$$

Um eine bestimmte Vorstellung von diesen Integralen und ihren Grenzen zu erhalten, müssen wir bemerken, daß der horizontale Querschnitt der Röhre diese Grenzen bestimmt, und daß dieser Querschnitt eine in sich zurückkehrende Curve ist. Man kann den Anfangspunkt der x und y außerhalb dieser Curve so annehmen, daß die ganze Curve in dem Winkel eingeschlossen ist, den die Achsen der x und y bilden. In diesem Falle sind dx , dy positiv in den doppelten Integralen, weil $gD \iint (h+z) dx dy$ das Gewicht des erhobenen Fluidums ausdrückt; und diese Differentiale müssen daher auch in den einfachen Integralen als positiv angesehen werden.

Nimmt man dieses an, so bezieht sich das Element $-\frac{\frac{1}{2}H(q)dx}{\sqrt{(1+(p)^2+(q)^2)}}$ auf den Theil des Querschnitts, welcher convex gegen die Achse der x ist, und das Element $\frac{\frac{1}{2}Hqdx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ auf den gegen diese Achse concaven Theil. Ferner bezieht sich das Element $-\frac{\frac{1}{2}H(p)dy}{\sqrt{(1+(p)^2+(q)^2)}}$ auf den gegen die Achse der x convexen, und endlich $\frac{\frac{1}{2}H \cdot pdy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ auf den gegen eben diese Achse concaven Theil des Querschnittes. Wenn man nun annimmt, daß $-\frac{\frac{1}{2}H(q)dx}{\sqrt{(1+(p)^2+(q)^2)}}$ und $-\frac{\frac{1}{2}H(p)dx}{\sqrt{(1+(p)^2+(q)^2)}}$ sich auf einerlei Punkt der Curve beziehen, so liegt dieser Punkt in demjenigen Theile des Schnitts, der zugleich gegen beide Achsen concav ist, und wo folglich, wenn man dx, dy auf den Umfang der Curve bezieht, die Werthe dieser Differentiale entgegen gesetzte Zeichen haben (wo nämlich mit wachsenden x , abnehmende y zusammen gehören). Setzt man also hier dx als positiv voraus, so ist dy negativ, und die Summe jener beiden Elemente

$$= \frac{1}{2}H \left(\frac{(p)dy - (q)dx}{\sqrt{(1+(p)^2+(q)^2)}} \right),$$

wo dx, dy sich auf den Umfang des Schnitts beziehen. Eben so, wenn die Elemente $\frac{\frac{1}{2}Hqdx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ und $\frac{\frac{1}{2}Hpdy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ sich beide auf einerlei Punkt beziehen sollen, so liegt dieser in dem gegen beide Achsen concaven Theile, wo wieder mit wachsen-

den x abnehmende y zusammen gehören, und die Summe dieser Elemente ist, wenn man dx als positiv annimmt, und dx, dy auf den Umfang des Schnitts bezieht,

$$= - \frac{\frac{1}{2}H \cdot (pdy - qdx)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Gehören im Gegentheile die Elemente

$\frac{\frac{1}{2}H(q)dx}{\sqrt{1 + (p)^2 + (q)^2}}$ und $\frac{\frac{1}{2}Hpdy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ zu einerlei Punkte des Umfangs, so beziehen sie sich auf denjenigen Theil der Curve, der gegen die Achse der x convex, gegen die Achse der y concav ist, und dann haben dx, dy einerlei Zeichen. Endlich, wenn die Elemente $-\frac{\frac{1}{2}H(p)dy}{\sqrt{1 + (p)^2 + (q)^2}}$ und $\frac{\frac{1}{2}Hqdx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ sich auf einerlei Punkt beziehen, so liegt dieser in dem Theile der Curve, welcher gegen die Achse der y convex und gegen die Achse der x concav ist, und dx, dy haben wieder einerlei Zeichen.

Man überfieht also, wenn diese Elemente allgemein durch $\frac{\frac{1}{2}Hpdy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ und $\frac{\frac{1}{2}Hqdx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ausgedruckt werden, sie mögen für den Anfang oder das Ende der Integrale, die in Beziehung auf x und y gesucht sind, genommen werden, so müssen diese Elemente für einerlei Punkte der Curve entgegen gesetzte Zeichen haben, wenn die Differentiale dx, dy sich auf die Curve selbst beziehen. Wenn man also immer dx positiv setzt, so wird ihre Summe seyn

$$= \pm \frac{\frac{1}{2}H(pdy - qdx)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

und hier gilt das Zeichen + für den gegen die Achse der x convexen, das Zeichen — für den gegen diese Achse concaven Theil der Curve.

Nun ergiebt die Theorie der krummen Flächen, daß

$$\pm \frac{(pdy - qdx)}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = ds \cdot \cos. \omega$$

ist, wenn ω den Winkel bedeutet, den die vertikale Röhrenwand mit der Tangential-Ebene macht, welche an die Oberfläche des Flüssigen an der Grenze der Wirkungssphäre der Röhrenwand gelegt ist, und wenn ds das Element der Durchschnitts-linie ist. Dieser Winkel ist beständig, und folglich erhält man, wenn c den ganzen Umfang des Schnittes der Oberfläche mit der Röhrenwand bedeutet,

$$\pm \int \frac{pdy - qdx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = c \cos. \omega,$$

also auch

$$\frac{1}{2} H \iint dx dy \left[\left(\frac{d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}}{dx} + \left(\frac{d \cdot \frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}}{dy} \right) \right] = \frac{1}{2} H c \cdot \cos. \omega,$$

und endlich

$$gDV = \frac{1}{2} H c \cdot \cos. \omega.$$

Das heißt: „das Volumen des durch die Haarröhrchenkraft über das Niveau erhobenen Flüssigen ist proportional dem Umfange des Durchschnittes der Oberfläche mit der innern Fläche der Röhre“ *).

*) Die hier in Nr. 7. mitgetheilten Untersuchungen, welche ich ihrer Wichtigkeit halber nicht übergangen konnte,

D. Anwendung der Theorie auf den Fall, wenn das Fluidum in dem Zwischenraume zwischen zwei concentrischen Cylindern durch die Haarröhrchenkraft gehoben wird.

8. Wir fanden oben in §. 4. die Gleichung

$$\frac{u \cdot \frac{dz}{du}}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{du^2}}} - 2a \int z u du = \frac{u^2}{b} + \text{const.}$$

für die Oberfläche des durch die Haarröhrchenkraft erhobenen Flüssigen in einer durch Umdre-

scheinen mir in Rücksicht der analytischen Schlüsse einiger Erläuterung zu bedürfen. Ich will daher hier einige Bemerkungen mittheilen, wodurch ich mir diese Untersuchung in ein helleres Licht zu setzen gesucht habe.

Nach der, alle Mahl möglichen, Voraussetzung soll in Fig. 9. die Achse der x , AB , und die Achse der y , AC so angenommen werden, daß der ganze horizontale Querschnitt DE der Röhre innerhalb des Winkels BAC liege; wir wollen die wachsenden x und y von A an nach B und C zu rechnen. Stellen wir uns nun über der horizontalen Grundfläche DE einen Körper vor, dessen Oberfläche durch vertikale Ordinaten $(h+z)$ bestimmt wird, so erhalten wir zuerst den Inhalt eines unbestimmten vertikalen Durchschnittes, der durch FG mit AB parallel gelegt ist, wenn wir das Integral $\int dx (h+z)$ so suchen, daß y als beständig angesehen wird, und wenn wir die Grenzen dieses Integrals demjenigen Werthe von x gemäß annehmen, welcher für den Umfang der Curve DE mit irgend einem Werthe von y zusammen gehört; und hieraus wird ferner der Inhalt des ganzen Körpers $= \int dy \cdot \int dx (h+z)$ bestimmt, abermahls die Grenzen des Integrals den Grenzen der Curve DE gemäß genommen. Bei dieser Integration wächst offenbar x von F bis G und auf ähnliche Weise auch y ; und es sind daher dx , dy immer fort positiv.

hung entstandenen cylindrischen Röhre. Diese Formel gilt nicht bloß für den Fall, da die vertikale Achse der durch Umdrehung entstandenen

Auch das Integral $\iint dx \cdot dy \cdot \left(\frac{d}{dx} \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \right)$ und

das ähnliche $\iint dx \cdot dy \cdot \left(\frac{d}{dy} \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \right)$ lassen

sich auf die Cubatur eines Körpers zurück führen. Ich werde nur das erstere betrachten, da sich die Anwendung auf das zweite leicht machen läßt, und $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$

= S setzen. Das Integral $\iint dx \cdot dy \cdot \left(\frac{dS}{dx} \right)$ druckt den Inhalt eines Körpers aus, dessen Oberfläche durch die vertikale Ordinate = $\left(\frac{dS}{dx} \right)$, die zu den horizontalen Ordinaten x, y gehört, bestimmt wird; weil aber x, y sich nicht über die Grenzen der Figur DE erstrecken, so muß das Integral ebenfalls für diese Grenzen gesucht werden. Suchen wir nun zuerst die GröÙe des unbestimmten vertikalen Schnittes, der durch eine mit x parallele Linie FG gelegt ist, so wird diese

$$= \int dx \left(\frac{dS}{dx} \right) = S + \text{const.},$$

oder = S - (S), wenn (S) der Werth ist, welchen S in dem Punkte F hat; und der Werth dieses Integrals wird vollständig gefunden, wenn man für S den Werth setzt, den diese GröÙe in G erhält.

Wie nun weiter $\int dy [S - (S)]$ den Inhalt des beschriebenen Körpers giebt, erhellet von selbst. Alle Punkte also, auf welche sich (S) bezieht, liegen in dem gegen die Achse der y convexen Theile, hingegen alle, auf welche sich S bezieht, in dem entgegen gesetzten Theile der Curve.

Es läßt sich nun leicht übersehen, daß die Integration

$$\iint dy \cdot dx \left(\frac{dT}{dy} \right) = \int dx [T - (T)]$$

Oberfläche durch den niedrigsten Punkt dieser Oberfläche geht, wie dort bei der kreisförmig cylindrischen Röhre, sondern überhaupt für jede

giebt, wenn sich (T) auf den Anfang und T auf das Ende des Integrals beziehen (wo $T = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ist),

und hier gelten alle vorigen Bemerkungen. Gehören (T) und (S) beide für den Punkt F , so hat man den in den fernern Schlüssen erwähnten ersten Fall; dagegen gehören in G , als dem Anfange des Schnittes GI und dem Ende des GF , zusammen S mit (T) ; und so ergeben sich die vier möglichen Fälle für alle verschiedenen Punkte der Curve, und eben damit ergibt sich die allgemeine Richtigkeit des Ausdrucks

$$+ \frac{pdy - qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

so wie er im Fortgange der Untersuchung angenommen wird. Dafs aber dy , dx sich hier auf die Curve DE beziehen, erhellet daraus, weil p , q , (p) , (q) die Werthe sind, welche diese Gröfsen, die sich auf die Oberfläche des Fluidums beziehen, an den Grenzen dieser Figur erhalten.

In Rücklicht der Formel

$$+ \frac{pdy - qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = ds \cdot \cos. \omega$$

würde ich mich auf die Theorie der krummen Flächen, welche nicht hierher gehört, beziehen, wenn ich irgend ein Buch anzugeben wüßte, wo die Ableitung dieser Formel sich erläutern fände. Da es mir hieran aber gänzlich fehlt, so will ich versuchen, den Ursprung der Formel kurz anzugeben. Stellt man sich an irgend einer Stelle des gemeinschaftlichen Durchschnitts der Röhrenwand und der Oberfläche des Flüssigen zwei Tangential-Ebenen vor, deren eine die Röhrenwand, die andere die Oberfläche des Flüssigen in der Röhre berührt, so haben diese Ebenen das Differential der Durchschnittslinie beider Flächen $= ds$ gemeinschaftlich, und sie bilden zusammen den Winkel $= \omega$. Beziehen sich nun die Gröfsen p , q auf die Oberfläche des Flüssigen, dx , dy aber auf die Röhren-

durch Umdrehung entstandene Oberfläche des Flüssigen; also auch für den Fall, da in einer weitem kreisförmig cylindrischen Röhre sich ein concentrischer dichter Cylinder befindet, und das Flüssige sich in dem ringförmigen sehr engen Raume zwischen beiden Cylinderflächen erhebt. Nur dürfen wir hier nicht die beiden Krümmungshalbmesser b, b' für den niedrigsten Punkt der Oberfläche gleich setzen, sondern wir müssen allgemeiner $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{2}{b}$ annehmen, wo also b eine andere Bedeutung als vorhin hat.

wand, so ist erstlich $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels, welchen die Röhrenwand an dieser Stelle mit der Achse der x macht, und zweitens $-\frac{p}{q}$ die Tangente des Winkels, welchen die Durchschnittslinie der an die Oberfläche des Fluidums gelegten Tangential-Ebene mit der Horizontal-Ebene, mit eben der Achse der x bildet. Zieht man auf die zuletzt erwähnte Durchschnittslinie eine in der Horizontal-Ebene liegende Senkrechte, so macht diese mit den x einen Winkel, dessen Tangente $= +\frac{q}{p}$ ist, und wenn man durch sie eine vertikale Ebene setzt, so ist diese gegen die Röhrenwand oder die Berührungs-Ebene derselben geneigt, unter einem Winkel, dessen Tangente $= \frac{pdy - qdx}{pdx + qdy}$, oder dessen Sinus $= \frac{pdy - qdx}{ds \cdot \sqrt{p^2 + q^2}}$ ist. An dem Punkte der beiden Oberflächen, wo die Tangential-Ebenen einander berühren, entsteht ein rechtwinkliges körperliches Dreieck, dessen Seitenflächen diese beiden Tangential-Ebenen und die Vertikal-Ebene sind, die mit x den horizontalen Winkel $= \text{ang. tang. } \frac{q}{p}$ macht. Letztere steht auf der an die Oberfläche des Flüssigen gelegten Berührungs-Ebene senkrecht, und ist die Ebene

Um in jener Gleichung die Constante zu bestimmen, dient uns die Bemerkung, daß da, wo das Flüssige die Oberfläche des innern Cylinders berührt,

$$\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} = - \sin. \vartheta'$$

ist, wo ϑ' die Bedeutung hat, wie am Ende von §. 4., und $\sin. \vartheta$ negativ gesetzt ist, weil in diesem Punkte $\frac{dz}{du}$ negativ ist, indem u von der Achse des

ihres Neigungswinkels gegen den Horizont; dieses Neigungswinkels Cosinus ist $= \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ = dem Sinus der an dieser Ebene liegenden Seitenfläche des körperlichen Dreieckes (nach Monge, *applic. de l'anal. à la géométrie*, T. 2. p. 33.), und man findet daher zwischen den Winkeln und der einen Cathete des rechtwinkligen Dreieckes die Gleichung

$$\cos. \omega = \frac{pdy - qdx}{ds \cdot \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

weil $\frac{pdy - qdx}{ds \cdot \sqrt{(p^2 + q^2)}}$ des dritten Winkels Sinus und $\sqrt{\frac{p^2 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)}}$ der Cosinus der Seite ist, die ω gegenüber steht.

Dieser Ueberlegung gemäß habe ich den Schlusssatz in §. 7. so übersetzt, daß ich *section* für den Durchschnitt der Oberfläche des Flüssigen mit der innern Fläche der Röhre angenommen habe, obgleich man sonst bei Herrn La Place's Worten ein wenig zweifelhaft bleiben könnte, welcher Schnitt eigentlich gemeint sey, wenn es heisst: *le volume de fluide, élevé au-dessus du niveau par l'action capillaire est proportionnel au contour de la section de la surface intérieure du tube.*

Brandes.

Cylinders an gerechnet wird. Setzt man nun den Halbmesser dieses Cylinders $= l$, und läßt das Integral $\int z u du$ da, wo $u = l$ ist, anfangen, so ist

$$\text{const.} = - l \cdot \sin. \vartheta' - \frac{l^2}{b}.$$

Wäre $\alpha = 0$, und man setzt den Halbmesser des hohlen Cylinders $= l'$, so ist $u = l'$ für den Punkt, wo das Flüssige die äußere Wand berührt, wo wieder (weil die innere und äußere Cylinderwand aus einerlei Materie bestehen),

$$\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} = \sin. \vartheta'$$

ist, und also hier

$$l' \cdot \sin. \vartheta' = \frac{l'^2 - l^2}{b} - l \cdot \sin. \vartheta'$$

und

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin. \vartheta'}{l' - l}.$$

Dieses würde, wenn man es in die allgemeine Gleichung setzte, einen integrablen Werth von dz geben. Da aber α nicht $= 0$ ist, so dürfen wir in der zu Anfange dieses §. angeführten Differentialgleichung das zweite Glied nicht übersehen, und erhalten

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin. \vartheta'}{l' - l} - \frac{2\alpha \int z u du}{(l' - l) \cdot (l' + l)},$$

wo das Integral $\int z u du$ von $u = l$ bis $u = l'$ genommen werden muß. Da $\int z u du = \frac{1}{2} u^2 z - \frac{1}{2} \int u^2 dz$, so erhält man, mit Weglassung der in α multiplicirten Größen, oder aus dem durch die Voraus-

setzung $\alpha = 0$ gefundenen Werthe von dz , das Integral

$$\int z u du = \frac{1}{2} u^2 \int \frac{(u^2 - ll') \cdot \sin \vartheta' \cdot du}{\sqrt{[u^2 (l' - l)^2 - (u^2 - ll')^2 \sin^2 \vartheta']}} \\ - \frac{1}{2} \int \frac{(u^2 - ll') u^2 du \cdot \sin \vartheta'}{\sqrt{[u^2 (l' - l)^2 - (u^2 - ll')^2 \sin^2 \vartheta']}},$$

und der Werth von $\frac{1}{b}$ würde aus der Gleichung

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin \vartheta'}{l' - l} - \frac{2\alpha \int z u du}{l'^2 - l^2}$$

bis auf Gröſſen von der Ordnung α^2 vollständig zu finden ſeyn, wenn man die Integrale durch Näherung ſuchte. Aber in engen Röhren iſt, wie wir in §. 6. ſahen, α ſehr klein, und wir können alſo auch hier, wenn $l' - l$ ſehr klein iſt, die in α multiplicirten Glieder weglaſſen, und beinahe ſetzen

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin \vartheta'}{l' - l}.$$

Stellen wir uns nun einen unendlich engen Kanal vor, welcher von der niedrigſten Stelle der Oberfläche des in dem ringförmig cylindriſchen Raume enthaltenen Flüſſigen niederwärts geht, und ſich unterhalb der cylindriſchen Wand wieder bis zum Niveau des Fluidums im Gefäſſe, in welches der doppelte Cylinder eingetaucht iſt, hinauf krümmt, ſo iſt $K = \frac{H}{b}$ die Wirkung des zwiſchen den Cylinderwänden enthaltenen Flüſſigen auf dieſen Kanal, weil nach unſerer Bezeichnung $\frac{2}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}$ iſt, wenn b, b' den gröſten und kleinſten Krümmungshalbmesser im niedrigſten Punkte der Ober-

fläche bedeuten. Man übersieht also leicht (aus §. 6.), daß

$$gq' = \frac{H}{b} = \frac{H \cdot \sin.\vartheta'}{l' - l}$$

ist, wenn q' die senkrechte Höhe des niedrigsten Punktes der Oberfläche über dem Niveau des umgebenden Flüssigen bedeutet; und so wird

$$q' = \frac{H}{g} \cdot \frac{\sin.\vartheta'}{l' - l},$$

Also ist die Erhebung des Flüssigen über das Niveau hier eben so groß, als (nach §. 6.) in einem cylindrischen Haarröhrchen, dessen Halbmesser $= l' - l$, das heist, dem Abstände der beiden Wände des ringförmig cylindrischen Raumes gleich ist.

Wäre die Oberfläche *convex*, so gäbe eben der Ausdruck für q' die Tiefe des Flüssigen im Röhrchen unterhalb dem Niveau des umgebenden Flüssigen.

E. *Anwendung auf zwei parallele vertikal eingetauchte ebene Flächen.*

9. Es sey (Fig. 7.) AOB der Querschnitt der Oberfläche des zwischen zwei parallelen vertikalen Ebenen enthaltenen Fluidums, wenn diese Ebenen in ein größeres Gefäß eingetaucht sind, so ist $z = MO$ eine Function der einzigen GröÙe $MN = y$. Sollen hier wieder b, b' den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser der Oberfläche des Flüssigen im niedrigsten Punkte O bedeuten, so ist b unendlich und b' ist der Krümmungshalbmesser der Curve AOB im Punkte O ; und eben so wird in jedem andern Punkte N der größte Krümmungs-

halbmesser unendlich und der kleinste dem Krümmungshalbmesser der Curve AOB in jenem Punkte gleich; das ist $= \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy \cdot d^2z}$. Die allgemeine Gleichung in §. 4., nämlich $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} - 2\alpha z = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}$, giebt also hier

$$\frac{\frac{d^2z}{dy^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha z = \frac{1}{b'}$$

Mit dz multiplicirt und integrirt, giebt dieses

$$-\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} - \alpha z^2 = \frac{z}{b'} + \text{Const.}$$

Da nun in O , $\frac{dz}{dy} = 0$ ist, und hier das Integral verschwinden soll, so ist $\text{const.} = -1$, und

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} = \frac{b' - z}{b'} - \alpha z^2.$$

Es sey $Z = \frac{b' - z}{b'} - \alpha z^2$, so ist $dy = \frac{Zdz}{\sqrt{(1 - Z^2)}}$.

Diese Gleichung ist die für die *elastische Curve*, und dieses muß so seyn. Denn sowohl hier als bei der elastischen Curve ist die von der Krümmung abhängige Kraft dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional.

In dem Punkte A , welcher der höchste der Curve AN ist, hat man $\frac{dz}{dy} = \text{tang. } \vartheta'$, wenn wieder ϑ' das Complement des Winkels ist, welchen der äußerste Theil der Curve mit der eingetauchten Ebene macht. Für diesen Punkt ist also

$\text{tang. } \vartheta' = \frac{\sqrt{1 - Z^2}}{Z}$ oder $Z = \cos. \vartheta'$, und folglich der äußerste Werth von z durch die Gleichung $\frac{b' - z}{b'} - \alpha z^2 = \cos. \vartheta'$ bestimmt, oder

$$z = -\frac{1}{2\alpha b'} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \sin. \frac{1}{2} \vartheta'}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2 b'^2}\right)}.$$

Für den Fall, da die beiden Ebenen unendlich weit von einander entfernt sind, ist $b' = \infty$, und $z = \frac{2 \cdot \sin. \frac{1}{2} \vartheta'}{\sqrt{2\alpha}}$. Die Höhe, um welche das

Fluidum sich an einer *einzelnen eingetauchten Platte* erheben wird, läßt sich also bestimmen, wenn man weiß, wie hoch es in einem Haarröhrchen von gleicher Materie und gegebenem Halbmesser steigt. Wir fanden, wenn q diese letztere Höhe bei dem Halbmesser $= l$ ist, in §. 6. die GröÙe

$$\frac{g}{H} = \alpha = \frac{\sin. \vartheta'}{l \cdot q}; \text{ also ist hier } z = \sqrt{ql \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} \vartheta'},$$

die Höhe in A . Setzt man $\vartheta' = 90^\circ$, wie es bei Wasser und Glas richtig zu seyn scheint, und und $l = 1$ Millimeter, so ist $q = 6,784$ Millimeter; daraus würde für die Höhe des Wassers an einer vertikal eingetauchten Glasplatte folgen, $z = 2,6036$ Millimeter. Die Erfahrung muß die Höhe etwas geringer geben, weil der Punkt, den wir in der Erfahrung für den Anfang der Curve nehmen, alle Mahl schon etwas von der eingetauchten Ebene entfernt, also niedriger als A liegt; denn A bedeutet den Punkt, der Grade am Ende der Wirkungssphäre der Ebene, also in einer unmerklichen Entfernung von derselben liegt.

In

In dem hier betrachteten Falle, wo die eingetauchten Ebenen unendlich von einander entfernt sind, erhält man für die Oberfläche die Differentialgleichung

$$dy = \frac{(1 - \alpha z^2) dz}{z \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{(2 - \alpha z^2)}}.$$

Stellt in Fig. 10. PQ die Niveaulinie des Flüssigen vor, so ist $PV = z$, und wenn $VN = y'$, so wird $dy' = -dy$, und für die Curve ANQ , welche das Fluidum in der Nähe der Wand bildet, ist

$$dy' = \frac{(\alpha z^2 - 1) dz}{z \sqrt{2\alpha} \cdot \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^2)}},$$

eine Gleichung, die leicht integrabel ist, und y durch algebraische und logarithmische Functionen von z ausdrückt.

In dem Falle, da der Abstand der Ebenen von einander sehr geringe ist, giebt die Gleichung $Z = 1 - \frac{z}{b'} \alpha z^2$, oder $\frac{z}{b'} = 1 - Z - \frac{\alpha b'^2 z^2}{b'^2}$, für $\frac{z}{b'}$ den genäherten Werth

$$\frac{z}{b'} = 1 - Z - \alpha b'^2 (1 - Z)^2,$$

wenn man die Glieder, die α^2 enthalten, schon wegläfst. Hieraus folgt dann

$$dz = -b' dZ [1 - 2\alpha \cdot b'^2 (1 - Z) + etc.],$$

und folglich

$$\frac{dy}{b'} = - \frac{Z dZ [1 - 2\alpha b'^2 (1 - Z)]}{\sqrt{(1 - Z^2)}}.$$

Es sey $Z = \cos.\vartheta$, also

$$\frac{dy}{b'} = d\vartheta \cdot \cos.\vartheta \cdot [1 - 2\alpha b'^2 (1 - \cos.\vartheta)],$$

$$\text{so wird } \frac{y}{b'} = \sin.\vartheta - \alpha b'^2 (2\sin.\vartheta - \vartheta - \frac{1}{2}\sin.2\vartheta).$$

F

Setzt man also den äußersten Werth von $y = l$, und den äußersten Werth von $\vartheta = \vartheta'$, und nimmt aus dem Vorigen $\alpha = \frac{\sin \vartheta'}{ql}$, so ist

$$\frac{1}{b'} = \frac{\sin \vartheta'}{l} \left[1 - \frac{2l}{q \sin \vartheta'} \left(1 - \frac{\vartheta'}{2 \sin \vartheta'} - \frac{1}{2} \cos \vartheta' \right) \right].$$

Für unsern Fall, da l sehr klein gegen q , oder wenn die Ebenen einander sehr nahe sind, ist also $\frac{1}{b'}$ beinahe $= \frac{\sin \vartheta'}{l}$. Wie viel dieser Ausdruck ungefähr von der Wahrheit abweicht, bestimmt man am leichtesten für den Fall, da ϑ' ein rechter Winkel ist; dann wird

$$\frac{2l}{q \sin \vartheta'} \left(1 - \frac{\vartheta'}{2 \sin \vartheta'} - \frac{1}{2} \cos \vartheta' \right) = \frac{2l}{q} \left(1 - \frac{1}{4} \pi \right).$$

Für $l = 1$ Millimeter ist dieser Bruch in Rücksicht auf Wasser und Glasröhren $= \frac{2}{6,784} \left(1 - \frac{1}{4} \pi \right) = \frac{1}{15,81}$, und er kann also in Vergleichung der Einheit weggelassen werden.

Endlich findet man für die Höhe q' , welche das Fluidum zwischen den parallelen vertikalen Ebenen erreicht, wenn sie um $2l$ von einander entfernt sind, $q' = \frac{H}{2gb'}$, weil nämlich hier $\frac{1}{2}H \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} \right) = \frac{H}{2b'}$ ist, also hier

$$q' = \frac{H}{g} \cdot \frac{\sin \vartheta'}{2l} \left[1 - \frac{2l}{q \sin \vartheta'} \left(1 - \frac{\vartheta'}{2 \sin \vartheta'} - \frac{1}{2} \cos \vartheta' \right) \right].$$

Eben diese Formel druckt die Depression des Flüssigen aus, wenn die Oberfläche *convex* ist, und bei sehr kleinen Werthen von l wird

$$q' = \frac{H}{g} \cdot \frac{\sin \vartheta'}{2l}.$$

Sind die parallelen Ebenen *gegen den Horizont geneigt*, so kann man, wenn sie einander sehr nahe sind, annehmen, daß die Oberfläche des zwischen ihnen enthaltenen Flüssigen und ihre Lage gegen die Ebenen beinahe so bleibt, wie bei vertikaler Lage, so wie dieses nach §. 6. bei sehr engen Röhren der Fall ist; daher gilt der eben gefundene Ausdruck für q' , als der vertikalen Höhe über dem Niveau, bei jeder Neigung, wofern nur l sehr klein ist.

F. *Ueber das Gleichgewicht eines Tropfens in einem konischen Haarröhrchen.*

10. Es sey (Fig. 11.) $ABCD$ ein konisches, an beiden Enden offenes, Haarröhrchen, und $MM'N'N$ die darin enthaltene Säule des Flüssigen. Wir wollen zuerst die Achse OE der Röhre, deren Spitze in O fallen würde, wenn man sie in Gedanken vollständig macht, als horizontal annehmen, und die Oberfläche des Flüssigen als concav voraus setzen. Da die Röhre in p enger als in p' ist, so wird der Krümmungshalbmesser der Oberfläche dort kleiner als hier seyn; und wenn jener b , dieser b' heisst, so ist die Wirkung auf einen unendlich engen Kanal pp' in p , $= K - \frac{H}{b}$, und in p' , $= K - \frac{H}{b'}$, also, weil $b' > b$, diese Wirkung in p' gröfser als in p , und das Fluidum wird zu einer Bewegung nach O hin angetrieben. Das Entgegengesetzte würde bei convexen Ober-

flächen Statt finden, weil dann jene Wirkungen $= K + \frac{H}{b}$ und $= K + \frac{H}{b'}$, also der Druck in p am stärksten und der Antrieb zur Bewegung von der Spitze abwärts gerichtet seyn würde.

Um die Krümmungshalbmesser b, b' zu bestimmen, sey für q , als der Mitte der Säule pp' , $Oq = a$, und die Länge pp' des Tropfens $= 2\beta$, ferner sey $\omega =$ dem sehr kleinen Winkel MOp , und $\vartheta =$ dem Complementary der Neigung des äußersten Theils des Bogens pM gegen die Wand OM der Röhre. Es erhellet nun leicht, dafs, wenn $MpN, M'p'N'$ Kreisbogen wären, man hätte $b = \frac{(a - \beta) \operatorname{tang.} \omega}{\sin. \vartheta' + \operatorname{tang.} \omega}$, und $b' = \frac{(a + \beta) \operatorname{tang.} \omega}{\sin. \vartheta' - \operatorname{tang.} \omega}$, also $\frac{H}{b} - \frac{H}{b'} = \frac{H \cdot \sin. \vartheta'}{\operatorname{tang.} \omega} \left(\frac{2\beta}{a^2} + \frac{2\beta^3}{a^4} + \text{etc.} \right) + \frac{2H}{a} \left(1 + \frac{\beta^2}{a^2} + \text{etc.} \right)$.

Erhebt man den Punkt A , so dafs die Achse OE sich unter einem Winkel $= V$ gegen den Horizont neigt, so ist das Gewicht der Säule pp' , so fern es hier in Betrachtung kommt, $= 2g\beta \cdot \sin. V$. Soll also diese flüssige Säule durch die Haarröhrchen-Kraft im Gleichgewichte erhalten werden, so mufs

$$2g\beta \cdot \sin. V = \frac{H}{b} - \frac{H}{b'},$$

$$\text{oder} \quad 2g\beta \cdot \sin. V = \frac{2H \cdot \beta \cdot \sin. \vartheta'}{a^2 \cdot \operatorname{tang.} \omega} + \frac{2H}{a}$$

seyn, wenn man die unbedeutenden Glieder wegläfst.

Wir wollen l für die Höhe annehmen, welche eben dieses Fluidum in einer cylindrischen Röhre vom Halbmesser $= a \cdot \operatorname{tang.} \omega$ erreicht, näm-

lich in einer Röhre von dem Halbmesser, welchen die konische Röhre in q hat, so ist

$$g \cdot l = \frac{H \cdot \sin \vartheta'}{a \cdot \tan \omega},$$

und folglich

$$\sin V = \frac{l}{a} + \frac{l \cdot \tan \omega}{\beta \cdot \sin \vartheta'} \quad \text{oder} \quad = \frac{l}{a} \left(1 + \frac{a \cdot \tan \omega}{\beta \cdot \sin \vartheta'} \right).$$

In dieser Gleichung ist $\frac{a \cdot \tan \omega}{\beta \cdot \sin \vartheta'}$ sehr klein gegen $\frac{l}{a}$, wenn $a \cdot \tan \omega$ sehr klein gegen β , oder die Länge der kleinen Säule bedeutend gröfser, als ihre Dicke im Punkte q ist. Für diesen Fall hat man *beinahe*

$$\sin V = \frac{l}{a},$$

und, weil l sich umgekehrt wie a verhält, so ist $\frac{l}{a}$ im umgekehrten Verhältnisse der Gröfse a^2 ; bei kleinen Werthen von V ist also dieser Winkel selbst sehr nahe dem Quadrate der Entfernung Oq der Mitte des Tropfens von der Spitze des Kegels umgekehrt proportional.

Das Glied $\frac{l \cdot \tan \omega}{\beta \cdot \sin \vartheta'}$ rührt von dem Unterschiede in der Anzahl von Graden her, welche die Bogen MpN , $M'p'N'$ fassen, und dieser Unterschied hat seinen Grund in der entgegen gesetzten Lage beider Bogen, indem einer seine convexe, der andere seine concave Seite nach der Spitze des Kegels kehrt. Dieses Glied kann ohne erheblichen Irrthum übersehen werden, wenn die Länge 2β des Tropfens viel gröfser als seine Dicke in der Mitte ist, und in diesem Falle kann man die beiden Cur-

ven MpN , $M'p'N'$ als einander ähnlich ansehen. Wir betrachteten vorhin diese Curven als kreisförmig, oder die beiden Oberflächen als sphärisch; aber aus §. 4. erhellet, daß wegen der Wirkung der Schwere der Werth von $\frac{1}{b}$ um ein kleines Glied von der Form $\frac{1}{b} \cdot Q \frac{g}{H} \cdot b^2$ vermindert wird, wo Q ein von b unabhängiger Quotient ist. Da $\frac{1}{b'}$ auf ähnliche Weise vermindert wird, so wächst die Differenz $\frac{H}{b} - \frac{H}{b'}$ um $Qg(b' - b)$, oder beinahe um $\frac{2Qg \cdot \beta \cdot \text{tang. } \omega}{\sin. \vartheta'}$; der Werth von $\sin. V$ wird also um $\frac{Q \cdot \text{tang. } \omega}{\sin. \vartheta'}$ vermehrt. Es läßt sich leicht übersehen, daß Q eine kleine Zahl, wahrscheinlich kleiner als 1 ist, (in §. 4. findet sie sich nur $= \frac{1}{3}$, wenn man in dem Ausdrücke für $\frac{1}{b}$, $\vartheta' = \frac{1}{2}\pi$ setzt); der Winkel V wächst daher um einen sehr geringen Winkel, der kleiner als ω ist, und folglich nicht in Betrachtung kommt.

G. Ueber die Figur und das Gleichgewicht eines Tropfens zwischen zwei Ebenen, die sich mit einem ihrer Ränder in einer horizontalen Linie berühren.

11. Befindet sich ein Tropfen eines Flüssigen zwischen zwei einander sehr nahen parallelen und horizontalen Ebenen, so erhellet von selbst, daß seine horizontalen Querschnitte Kreise seyn werden. Die Figur des vertikalen Schnittes läßt sich, wenn

man die Wirkung der Schwere bei Seite setzt und die Dicke des Tropfens als geringe gegen seine Breite annimmt, aus der Differentialformel in §. 4. bestimmen. Diese Untersuchung giebt zum Resultate *)

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} = \frac{\sin \vartheta'}{h} \left(1 - \frac{h}{2b'} \frac{\vartheta'}{\sin^2 \vartheta'} - \frac{h \cdot \cos \vartheta'}{2b' \cdot \sin \vartheta'} \right),$$

und es ist hier b' der Halbmesser der Durchschnitts-
linie, welche eine durch den Schwerpunkt gelegte
Horizontal-Ebene mit der Oberfläche des Trop-
fens bildet; b der Krümmungshalbmesser des ver-
tikalen, durch den Schwerpunkt gehenden, Schnit-
tes, an der Stelle, wo die horizontale, durch den
Schwerpunkt gehende, Ebene sie schneidet; h der
halbe Abstand der Ebenen von einander; und ϑ'
der durch die Natur des Fluidums und der anzie-
henden Flächen bestimmte Winkel, unter welchem
der nächste Theil der krummen Oberfläche des
Tropfens gegen eine auf die festen Ebenen senk-
rechte Linie geneigt ist.

Sind die beiden Ebenen unter einem kleinen
Winkel 2ω gegen einander geneigt, und berühren
einander in einer horizontalen Linie, während sie
mit dem Horizonte die Winkel $V - \omega$ und $V + \omega$
machen, so weicht, wenn die Dicke des Tro-
pfens sehr geringe gegen seine Breite ist, die
Figur desselben nur noch wenig von der Kreis-
form ab, zumahl wenn V ein kleiner Winkel

*) Ich übergehe sie hier, als ganz der Analysis angehö-
rend. Br.

ist *). Stellt man sich einen Schnitt durch den Schwerpunkt des Tropfens, senkrecht auf die horizontale Durchschnittslinie der beiden Ebenen vor, so wird die Figur der Durchschnittslinie dieser Ebene mit des Tropfens Oberfläche, noch fast durch eben die Gleichung, wie im vorigen Falle, bestimmt, jedoch bedeutet hier $2h$ die Entfernung der Ebenen in dem äußersten Punkte des Durchschnitts, und ist demnach für des Tropfens eine Seite anders als für die andere Seite, und wegen der daraus folgenden Ungleichheit der Krümmungshalbmesser für die Mitte des Durchschnitts an beiden Seiten des Tropfens ist die Einwirkung der Haarröhrchenkraft verschieden. Soll nun der Tropfen im Gleichgewichte bleiben, so muß der Winkel V einen gewissen Werth erhalten, und man findet durch Rechnungen, die indess nur näherungsweise geführt werden können, die Gleichung

$$\sin. V = \frac{H. \sin. \vartheta'}{2a^2 \cdot g \tan. \omega},$$

wo H , ϑ' , g die gewöhnliche Bedeutung haben, 2ω der Winkel ist, den die Ebenen mit einander machen, und a der Abstand, um welchen des Tropfens Mittelpunkt von der Durchschnittslinie der Ebenen entfernt ist. Der Winkel V also, dem wir hier nur kleine Werthe beilegen, ist ziemlich nahe der GröÙe $\frac{1}{a^2}$ proportional, so wie es bei einem im Gleichgewichte schwebenden Tropfen in einer konischen Röhre der Fall war.

*) Auch diese ganz algebraische Auseinandersetzung übergehe ich.
Br.

H. Nähere Betrachtung der Kräfte, welche die Concavität oder Convexität der Oberfläche eines Flüssigen bestimmen.

12. Die vorzüglichste Ursache, welche die Concavität oder Convexität des Flüssigen in einer Röhre oder zwischen Ebenen bestimmt, ist die Attraction der Röhre auf das Flüssige, verglichen mit der Attraction der Theilchen des Flüssigen auf einander selbst. Ich will hier voraus setzen, daß beide Anziehungen einerlei Gesetz in Rücksicht auf die Entfernungen befolgen, und nur in Rücksicht der Intensität bei gleichen Distanzen, für die Theilchen der Röhre anders sind, als für die Theilchen des Flüssigen *). Diese Intensität wollen wir mit ρ für die Röhre und ρ' für das Flüssige bezeichnen.

Es sey (Fig. 12.) $ABCD$ eine vertikale Röhre, die in ein bis an MN mit einem Flüssigen gefülltes Gefäß getaucht ist, und wir wollen annehmen, die Oberfläche pq des Flüssigen in der Röhre bleibe eben und in dem Niveau MN . Ein in der Wirkungssphäre der Röhre liegender Punkt O wird nun von dieser und von dem eingeschlossenen Fluidum zugleich angezogen. Die Attraction des unterhalb MN liegenden Theils der Röhre läßt sich in eine vertikale, die wir $= \rho x$ setzen wollen, und eine horizontale, nach p zu gerichtete, zerlegen, die $= \rho y$ seyn mag. Die Attraction des obern Theils der Röhre giebt eine vertikale Kraft $= - \rho x$, und eine horizontale $= \rho y$; die erstere

*) Vergl. oben S. 29. Anm.

Gilbert.

ist nämlich der von dem untern Theile der Röhre herrührenden Kraft ρx entgegen gesetzt, und folglich negativ. Um auch die Einwirkung des Flüssigen auf den Punkt O zu bestimmen, sey $Op' = Op$ genommen; dann wird die Attraction des Theiles $pp'rD$ der flüssigen Masse auf den Punkt O vertikal herabwärts gehen; wir wollen sie mit $\rho'z$ bezeichnen. Die Attraction der Masse $rp'qC$ unterscheidet sich von der Attraction des untern Theils der Röhre nur durch die Intensität und giebt also eine horizontale Kraft $= -\rho'y$ und eine vertikale $= \rho'x$. Auf den Punkt O wirken also

die vertikalen Kräfte $\rho x, -\rho x, \rho'z, \rho'x,$

die horizontalen $\rho y, \rho y, -\rho'y.$

Die Summe der ersten ist also $= \rho'(z + x),$

und die der letzten $= (2\rho - \rho')y.$

Die horizontale Kraft verschwindet, wenn $2\rho = \rho'$ oder die Attractivkraft der Röhre halb so stark als die des Flüssigen ist. In diesem Falle also würde die horizontale Oberfläche diejenige seyn, bei welcher das Gleichgewicht besteht, indem dann die Summe der wirkenden Kräfte senkrecht auf dieselbe ist.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wenn an der vertikal eingetauchten Ebene AB (Fig. 13.) die Oberfläche AR des Flüssigen eine von der Horizontallinie abweichende Richtung hat.

Es sey AD eine in A an die Oberfläche AR des Flüssigen gezogene Tangente, und der Winkel $BAD = \vartheta$. Heißt nun ρk die aus der Attraction des untern Theils der Ebene auf einen dicht an A

liegenden Punkt entstehende, auf AB senkrechte Kraft, und ρK die dieser Ebene parallele Kraft, so übersieht man, daß des obern Theils der Ebene Einwirkung auf diesen Punkt nach einer auf AB senkrechten Richtung $= \rho k$, nach vertikaler Richtung $= - \rho K$ seyn wird. Eben dieses Theilchen ist nun auch der Anziehung des Flüssigen, welches der Raum BAD enthält, unterworfen, und wenn man mit $\rho' K$ die vertikale Attraction des Flüssigen für den Fall bezeichnet, wenn BAD ein rechter Winkel wäre, so wird für $BAD = \vartheta$ eben diese Attraction $= \rho' K \cdot \sin. \vartheta$, und die horizontale Attraction $\rho' K (1 - \cos. \vartheta)$; denn $\rho' K d\vartheta \cos. \vartheta$ und $\rho' K d\vartheta \sin. \vartheta$ sind die elementarischen Attraktionen des kleinen Stückes pAD , wenn pAD den Winkel $d\vartheta$ vorstellt. Endlich wirkt auf das Theilchen A noch das zwischen der Tangente und dem Bogen AR enthaltene Flüssige mit einer Kraft, die wir $= Q$ setzen und deren Richtung wir nach AQ annehmen wollen. Ist also $QAB = \omega$, so giebt die Masse DAR eine vertikale Attraction $= Q \cdot \cos. \omega$ und eine horizontale $= Q \cdot \sin. \omega$.

Die Vereinigung aller dieser Kräfte bringt eine mittlere Kraft $= R$ hervor, welche auf AD senkrecht seyn muß, wenn AD in A die Tangente an der beim Gleichgewichte Statt findenden freien Oberfläche ist, und diese mittlere Kraft giebt also eine vertikale $= R \cdot \sin. \vartheta$, und eine horizontale $= R \cdot \cos. \vartheta$. Da diese Kräfte den Summen der vorhin einzeln gefundenen gleich seyn müssen, so ist

$$R \cdot \sin. \vartheta = \rho k - \rho' k + \rho' K \cdot \sin. \vartheta + Q \cdot \cos. \omega$$

und

$$R \cdot \cos. \vartheta = 2\rho K - \rho' K + \rho' K \cdot \cos. \vartheta - Q \cdot \sin. \omega,$$

woraus folgt

$$Q \cdot \cos. (\omega - \vartheta) = (2\rho - \rho') K \cdot \sin. \vartheta.$$

Da die Gröſſen $Q \cdot \cos. (\omega - \vartheta)$ und $\sin. \vartheta$ positiv ſind, wenn die Curve concav iſt, ſo ſieht man, daſs in dieſem Falle $\rho > \frac{1}{2}\rho'$ ſeyn muſs. Iſt $\rho = \frac{1}{2}\rho'$, ſo iſt, wie wir ſchon geſehen haben, die Oberflä- che eben, folglich $Q = 0$, wie es unfere letzte Gleichung erfordert.

„Wenn man die Röhre mit verſchiedenen flüſ- ſigen Körpern nach einander füllt, ſo fällt die „Curve AR verſchieden aus, wenn das Verhältniſs „ ρ zu ρ' ſich ändert.“ Um dieſes zu beweifen, ſey I ein Punkt, der in allen dieſen Curven gleich ent- fernt von der Röhrenwand innerhalb der Sphäre ihrer merklichen Wirkſamkeit angenommen wird, ſo wird für I die Einwirkung der Röhrenwand alle Mahl gleich und horizontal ſeyn. Wären nun alle dieſe Curven gleich, ſo würde die Einwirkung des Flüſſigen auf dieſen Punkt alle Mahl einerlei Rich- tung haben, aber an Intenſität verſchieden ſeyn. Es würde daher die aus der Einwirkung der Röhre und des Flüſſigen zuſammen geſetzte Kraft bei den verſchiedenen Flüſſigkeiten eine verſchiedene Rich- tung erhalten; da nun dieſe Richtung auf die Ober- fläche ſenkrecht ſeyn muſs, wenn das Gleichge- wicht beſtehen ſoll, ſo kann auch die Lage der Oberfläche nicht in dieſen verſchiedenen Fällen

einerlei feyn. Die Curven AR sind also verschieden, wenn $\frac{e'}{e}$ einen andern Werth erhält; die Oberflächen sind dann zugleich, da, wo sie die Röhrenwand berühren, ungleich gegen diese geneigt, und diese Neigung bestimmt, wie wir oben gesehen haben, die Gröſſe des Kugelfragments, welchem der auſſerhalb der Wirkungsſphäre der Röhrenwand liegende Theil der Oberfläche in engen Röhren ſich nähert, und ſie beſtimmt zugleich die Höhe, bis zu welcher das Fluidum ſich erhebt.

„Wenn der Quotient $\frac{e'}{e}$ wächst, ſo wird die „Curve immer mehr concav, und die ganze Oberfläche des Flüſſigen in der Röhre wird eine Halbkugel, wenn $\rho = \rho'$ iſt.“ Wir wollen uns vorſtellen, die Röhre beſtehe mit dem Fluidum aus einerlei Materie, und die Oberfläche ABC (Fig. 14.) ſey eine Halbkugel. Betrachtet man nun $ABCS$ als die vollſtändige Kugelſfläche, und denkt ſich auch den obern Theil der Röhre $RASC$ mit eben dem Fluidum gefüllt, ſo wirken, wenn man die Schwere bei Seite ſetzt (welches in ſehr engen Röhren geſchehen darf), wegen der Gleichartigkeit der Materie des Flüſſigen und der Röhre, auf jeden Punkt der Oberfläche ABC gleiche, und auf die Oberfläche ſenkrechte Kräfte, und dieſes reicht hin, um das Gleichgewicht zu erhalten. (Dieſe Gleichheit und Perpendicularität der Kräfte in jedem Punkte der Oberfläche rührt nämlich daher, weil die Kugel ganz mit der gleichartigen Materie um-

geben ist, und es hier auf die Dicke der umgebenden Schichte gar nicht ankommt.) Läßt man nun auch den obern Theil *RASC* weg, so kann dieß die wirkenden Kräfte auf *ABC* nur unmerklich ändern, wenn die Attraction nur in unmerklichen Entfernungen wirksam ist, und die Oberfläche ist folglich eine Halbkugel für $\rho = \rho'$.

Wenn die Attraction der Röhre auf das Flüssige stärker ist, als die Attraction der Theilchen des Flüssigen unter einander, so scheint es, daß das Flüssige sich an die Röhre anhängt und ein Röhrchen innerhalb bildet, welches dann eigentlich die Oberfläche des Flüssigen erhebt und sie concav und halbkugelförmig macht. Wahrscheinlich findet dieses bei Wasser und Oehlen in Glasröhren Statt.

Wir wollen jetzt den Fall einer *convexen* Oberfläche betrachten. Es sey (Fig. 15.) *BAC* eine vertikale, in ein Flüssiges der Art eingetauchte Ebene, und *AR* der Durchschnitt der flüssigen Oberfläche mit einer auf jene Ebene senkrechten Ebene; *AD* sey eine Tangente an *AR*, und $BAD = \vartheta$. Die vertikale Attraction des Flüssigen *DAN* niederwärts würde $= -\rho'K.(1 - \sin.\vartheta)$, und die horizontale Attraction $= \rho'K.\cos.\vartheta$, von *A* nach *N*, feyn. Da aber nicht *DAN*, sondern *RAN* die anziehende Masse ist, so muß man für den Zwischenraum *DAR* etwas abziehen. *Q* sey die Attraction dieses Theilchens auf *A* nach der Richtung *AQ*, und $BAQ = \omega$, so ist für *DAR* die vertikale Attraction $= -Q.\cos.\omega$

und die horizontale $= Q \cdot \sin. \omega$. Es ist also für die Masse RAN die vertikale Attraction $= Q \cos. \omega - \rho' K (1 - \sin. \vartheta)$, und die horizontale $= \rho' \cdot K \cos. \vartheta - Q \cdot \sin. \omega$. Die vertikale und horizontale Attraction der Masse NAC ist $= \rho' K$, die vertikale Attraction der Ebene $= 0$, und die horizontale $= -2\rho K$. Ist also AV die Richtung der mittlern Kraft, die wir $= R$ setzen, so ist AV senkrecht auf AD und

$$R \cdot \sin. \vartheta = \rho' K + Q \cdot \cos. \omega - \rho' K (1 - \sin. \vartheta),$$

$$R \cdot \cos. \vartheta = (\rho' - 2\rho) K + \rho' K \cdot \cos. \vartheta - Q \cdot \sin. \omega,$$

folglich

$(\rho' - 2\rho) K \cdot \sin. \vartheta = Q \cdot \cos. (\omega - \vartheta)$,
und hier sind $\sin. \vartheta$, Q und $\cos. (\omega - \vartheta)$ positiv, wenn die Curve AR convex ist. In diesem Falle muß also $\rho < \frac{1}{2}\rho'$ seyn, und „es ist folglich die „Oberfläche convex oder concav, je nachdem $\rho < „oder $> \frac{1}{2}\rho'$ ist.“$

„Im Haarröhrchen nähert sich die Oberfläche „desto mehr einer convexen Halbkugel, je kleiner „ ρ ist, und wenn $\rho = 0$ oder unmerklich wäre, so „würde die Oberfläche wirklich eine Halbkugel bilden.“ ASC (Fig. 14.) sey diese halbkugelförmige Oberfläche, und $ASCB$ die vollständige Kugel. Wäre nun der Theil $ABCNM$ des Flüssigen gar nicht da, und setzt man die Schwere bei Seite, so wirken auf jeden Punkt der Kugeloberfläche gleiche und gegen diese Oberfläche senkrechte Kräfte; dann also wird das Gleichgewicht bestehen. Aber wenn nun auch die Masse $ABCNM$ nicht fehlt, so

sieht man doch leicht, daß die Wirkung von *MAB* auf *A* unbedeutend ist gegen die Wirkung der Kugel auf diesen Punkt, und daher braucht man nicht ein Mahl für *A* und noch weniger für die übrigen Punkte der Oberfläche auf diese Einwirkung Rücksicht zu nehmen. Folglich besteht das Gleichgewicht, wenn das Fluidum eine convexe halbkugelförmige Oberfläche hat. Zwischen den Grenzen $\rho = 0$ und $\rho = \frac{1}{2}\rho'$ nimmt die Convexität der Oberfläche ab; diese wird horizontal für $\rho = \frac{1}{2}\rho'$, und concav für grössere Werthe von ρ , bis sie endlich für $\rho = \rho'$ eine concave Halbkugel wird *).

III. Versuche zu den vorstehenden Untersuchungen, und Vergleichung derselben mit der Theorie;

frei bearbeitet von Gilbert.

Zu §. 6, 7, 8 und 9.

Ich habe (in 6. und 7.) gezeigt, daß aus meiner Theorie der haarröhren-artigen Erscheinungen nothwendig folgt, daß in ungleich weiten Haarröhren, die aus einerlei Materie bestehen, ein Flüssiges über sein Niveau zu Höhen ansteigen oder unter demselben stehen bleiben muß, welche dem Durchmesser der Röhrchen verkehrt proportional sind. Eben so habe ich (in 9.) aus meiner Theorie dargethan, daß zwischen zwei senkrechten

*) Vergl. oben S. 29.

Gilbert.

und parallelen einander sehr nahen Ebenen, die Höhe eines Flüssigen über oder unter dem Niveau im verkehrten Verhältnisse der Entfernung der beiden Ebenen von einander stehen, und genau so hoch oder so tief seyn muß, als der Stand desselben Flüssigen in einer Haarröhre aus gleicher Materie, deren innerer Durchmesser halb so groß ist, als der Abstand der beiden Ebenen von einander. Diese Erscheinungen sind schon vor langer Zeit von den Physikern beobachtet und bewährt worden, wie die oben (S. 33.) angeführte Stelle aus Newton's Optik beweiset.

Die Herren Hauy und Tremery haben auf mein Erfuchen einige Versuche dieser Art aufs neue angestellt. Folgendes sind die Resultate derselben:

*Stand von Flüssigkeiten in gläsernen Haarröhren
von verschiedener Weite.*

In cylindrischen Haarröhrchen aus einerlei Glasart, deren

innerer Durchmesser war: 2 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}$ Millimeter,
hatten folgende Höhen über dem Niveau:

Wasser 6,75; 10; 18,5 Millimeter.

Orangen - Oehl 3,4 ; 5; 9 Millimeter.

Sind die Höhen eines Flüssigen mit dem Durchmesser der Haarröhren verkehrt proportional, so muß für alle Röhrchen das Zahlprodukt aus ihrem innern Durchmesser in die Höhe des Flüssigen in ihnen, ein und dasselbe seyn; und zwar giebt, wenn beide Größen in Millimetern ausgedruckt sind,

G

dieses Produkt die Höhe, welche, dem Versuche entsprechend, die Flüssigkeit in einem Haarröhrchen annehmen müßte, welches 1 Millimeter zum Durchmesser hätte. Diese Produkte sind, zu Folge der vorstehenden Versuche,

für Wasser 13,5; 13,333; 13,875 Millimeter.

für Orangen-Oehl 6,8; 6,667; 6,75 Millimeter.

Die große Uebereinstimmung dieser Resultate unter einander, so wohl bei den Versuchen mit Wasser, als bei denen mit Orangen-Oehl, ist ein Beweis, daß die Höhen, bis zu welchen ein Flüssiges in Röhren von verschiedener Weite ansteigt, im verkehrten Verhältnisse der Weiten der Röhren stehen.

Das Mittel aus diesen Resultaten giebt für ein Haarröhrchen aus Glas von 1 Millimeter Durchmesser eine Erhebung des *Wassers* von 13,569 und des *Orangen-Oehls* von 6,7398 Millimeter.

Um dasselbe Gesetz bei der *Depression des Quecksilbers* zu prüfen, tauchten die Herren Hauy und Tremery die beiden ersten Haarröhrchen, die zu dem vorigen Versuche gedient hatten, in *Quecksilber*, bis zu einer Tiefe, die sie genau gemessen hatten; verschlossen dann die untern Oeffnungen derselben mit einer sehr ebenen Platte, welche das Quecksilber heraus zu fließen verhinderte, hoben die Röhren heraus, und maßen die Länge der Quecksilberfäule, die sich in ihnen befand. Der Unterschied der erstern Tiefe und dieser Länge gab die Größe, um welche das Queck-

filber in den beiden Haarröhren unter dem Niveau der Queckfilberfläche in dem Gefäße stand. So fand sich Folgendes:

Innerer Durchmesser der Haarröhre	2 ; $\frac{2}{3}$ Millim.
Erniedrigung des Queckfilbers unter dem Niveau	3 $\frac{2}{3}$; 5 $\frac{1}{2}$ —
Beträgt für ein 1 Millimeter weites Haarröhrchen	7 $\frac{1}{3}$; 7 $\frac{1}{3}$ —

Auch in diesem Falle entspricht also der Versuch völlig dem Gesetze, daß die Erniedrigung dem Durchmesser der Röhrchen verkehrt proportional ist.

Zwischen zwei senkrechten parallelen Ebenen aus Glas, die 1 Millimeter von einander entfernt waren, fanden diese Physiker Wasser 6,5 Millim. über dem Niveau stehend. Diese Höhe ist sehr wenig von 6,784 Millim. verschieden, der Hälfte der Höhe, welche Wasser in einem Haarröhrchen von 1 Millimeter Durchmesser einnimmt. Auch hierin stimmt also die Theorie mit der Erfahrung überein. Wir haben oben (S. 33.) gesehen, daß Newton die Höhe des Wassers zwischen zwei Glasebenen, die um $\frac{1}{100}$ engl. Zoll von einander entfernt sind, auf 1 engl. Zoll angiebt. Der engl. Zoll ist gleich 25,3618 Millim. Newtons Versuch und dem Gesetze des umgekehrten Verhältnisses der Höhen mit den Durchmessern entsprechend, müßte also zwischen zwei Glasebenen, die 1 Millimeter von einander entfernt sind, Wasser bis zu einer Höhe h steigen, welche folgender Gleichung entspricht:

$$1 \text{ engl. Z.} \times \frac{1}{100} \text{ engl. Z.} = \frac{(25^m, 3918)^2}{100} = h^m \cdot 1^m,$$

G 2

Dieses giebt $h = 6,4474$ Millim., welches sehr wenig von dem Resultate des Versuchs der Herren Haüy und Tremery abweicht.

Versuch des Hrn. Haüy mit einem haarröhren-artigen cylindrischen Mantel.

Wir haben (in 8.) gesehen, daß, wenn man zwei cylindrische Glasröhren, eine weitere und eine engere, so in einander stellt, daß sie dieselbe Achse haben, Wasser über sein Niveau bis zu derselben Höhe in dem cylindrischen Mantel zwischen den beiden Röhren, als in Haarröhrchen ansteigt, wenn deren innerer Durchmesser halb so groß ist, als der Abstand der beiden Cylinderflächen von einander. Sind die Halbmesser der beiden Cylinder unendlich, so geht dieser Fall in den zweier Ebenen über, die sehr nahe bei einander sind, und für diese Grenze haben wir so eben das Resultat durch Versuche bestätigt gesehen. Um ihn auch für den Fall, wenn die beiden Durchmesser der Cylinder sehr klein sind, zu prüfen, machte Herr Haüy den folgenden Versuch.

Er stellte in eine genau calibrierte Glasröhre, deren innerer Durchmesser 5 Millim. betrug, einen Glascylinder von 3 Millimeter Durchmesser, und traf alle nöthigen Vorichts-Maßregeln, um die Achsen beider genau zusammen fallen zu machen. Als er darauf das untere Ende beider in Wasser setzte, stieg dieses in dem cylindrischen Zwischenraume bis zu einer Höhe von sehr nahe, doch nicht

ganz, 7 Millim. über das Niveau. Da die Weite des cylindrischen Mantels 1 Millim. betrug, so hätte, nach der Theorie, das Wasser in demselben so hoch ansteigen müssen, als zwischen zwei Glasebenen, die um 1 Millim. von einander abstehen, folglich, nach dem vorigen Versuche, bis zu einer Höhe von 6,784 Millim. Damit stimmt, wie man sieht, das Resultat des Versuchs sehr gut überein. Das allgemeine Resultat der Theorie für haarröhren-artige cylindrische Mäntel findet sich also in seinen beiden Grenzen — für den Zwischenraum zwischen zwei Ebenen, und für den zwischen einem äußern und einem innern concentrischen Cylinder — bestätigt.

Die Resultate dieser Versuche müssen mit der Temperatur ein wenig variiren; man kann annehmen, daß die vorstehenden bei einer Temperatur von 10° des Centesimal-Thermometers angestellt sind. Ueberhaupt erfordern Versuche dieser Art eine ganz besondere Sorgfalt: die Röhren müssen gut calibriert und ihre Durchmesser genau bestimmt werden; die innern Oberflächen der Röhrchen und der Ebenen dürfen weder ganz trocken noch zu sehr angefeuchtet seyn; die Höhen, bis zu welchen das Flüssige angestiegen ist, muß man, während die Röhrchen noch in der Flüssigkeit eingetaucht sind, messen, weil sonst der Tropfen, der sich an der untern Oeffnung bildet, wenn man das Röhrchen heraus zieht, einen höhern Stand bewirkt; die Höhen müssen endlich von der Hori-

rizontalebene der Flüssigkeit in dem Gefäße an bis zu dem niedrigsten Punkte des hohlen und bis an den höchsten Punkt des erhabenen Meniscus in dem Haarröhrchen gemessen werden *).

Zu §. II.

Eine der interessantesten unter den haarröhren-artigen Erscheinungen, die zur Prüfung der vorstehenden Theorie am mehresten geeignet ist, zeigt ein Tröpfchen einer Flüssigkeit in einem *konischen Haarröhrchen*, oder zwischen zwei *sehr nahe gegen einander geneigten Ebenen*. Ich habe die Analyse dieser Fälle in 10. und in 11. gegeben, hier wollen wir sie mit der Erfahrung vergleichen.

Hawksbee hat einen Versuch mit einem Tropfen *Orangen-Oehl*, den er zwischen zwei Glas-ebenen brachte, mit großer Sorgfalt angestellt. Folgendes ist der [etwas abgekürzte] Bericht, den er davon macht.

„Ich nahm zwei ebene Glasplatten, jede 20 Zoll lang und 4 Zoll breit; die obere Fläche derje-

*) Man wird in den folgenden Haupttheilen finden, daß es hier auf die *mittleren Höhen* ankommt, und was Hr. La Place darunter versteht; daß Alkohol zu allen Versuchen dieser Art dem Wasser, das fast immer Irregularitäten zeigt, vorzuziehen ist, und warum; und daß endlich Hr. Gay-Lussac Methoden erdacht hat, die Versuche über haarröhren-artige Wirkungen mit der Vollkommenheit astronomischer Beobachtungen anzustellen.

Gilbert.

nigen, welche mir zur untersten diene, war horizontal, und im Centrum ihrer Achse *). Nachdem ich die beiden Glasebenen gut gereinigt hatte, rieb ich sie mit einem reinen in Orangen-Oehl getauchten Lappen, tröpfelte dann auf die untere, unweit ihrer Achse, einen oder zwei Tropfen Orangen-Oehl, und liefs die zweite Glasplatte herunter [die dann mit der untern einen sehr kleinen Winkel machte, der sich nach der Seite der Achse zu öffnete, und mittelst einer Schraube sich vergrößern oder verkleinern liefs]. So bald die zweite Glasplatte den Oehltropfen berührte, verbreitete dieser sich zwischen beide Gläser ziemlich weit, wenn ich dann aber die obere Platte an der freien Seite mittelst der Schraube ein wenig hob, so sammelte er sich sehr bald wieder in eine einzige Masse, welche ein Kügelchen bildete, das die beiden Platten berührte, und sich sogleich nach der Seite hin in Bewegung setzte, wo die Glasflächen auf einander lagen. Als dieses Kügelchen bis auf 2 Zoll von der Achse gekommen war, erhob ich die Platten an der Seite der sich berührenden Ränder allmählich um 15', und nun blieb der Tropfen unbeweglich stehen. Dann liefs ich die Platten wieder in ihre anfängliche Lage

*) Die beiden Ebenen berührten sich an dem einen ihrer Ränder, und die Achse [um welche sich beide Ebenen in unveränderter Lage gegen einander aufwärts drehen liefsen] befand sich am entgegen gesetzten Rande der untern Ebene.

La Place.

herab, und der Tropfen schritt aufs neue fort. Als er bis 4 Zoll von der Achse fortgeschritten war, mußte ich beide Platten an den sich berührenden Rändern um 25' erheben, um den Tropfen zum Stehen zu bringen. So setzte ich den Versuch fort, bis sich der Tropfen den sich berührenden Rändern bis auf 2 Zoll genähert hatte. Ich muß hierbei bemerken, daß, wenn der Tropfen auf den Ebenen sich um 17 Zoll von den Achsen entfernt [diesen Rändern also bis auf 3 Zoll genähert] hatte, er oval wurde, und daß seine Gestalt sich immer mehr ins Längliche zog, je weiter er fortschritt. War er nicht äußerst klein, so theilte er sich zuletzt; ein Theil lief dann zurück, der andere fuhr fort anzusteigen. Um diesen bei 18 Zoll Entfernung von den Achsen zum Stillstehen zu bringen, mußten die Ebenen um 22° gehoben werden, und das ist der größte Neigungswinkel, den ich beobachten konnte. Die Ebenen standen an ihrer Achse um ungefähr $\frac{1}{16}$ Zoll von einander ab. Große und kleine Tropfen gaben mir nur sehr kleine Verschiedenheiten bei diesem Versuche. Die Neigungswinkel der untern Ebene habe ich an einem auf Papier gezeichneten Kreisbogen von beinahe 20 Zoll Halbmesser, der in Viertel-Grade getheilt war, gemessen. Folgende Resultate sind ein Mittel aus einer großen Menge solcher Versuche, die nur sehr wenig von einander abweichen, und sind daher sehr genau:"

A. Abstand des Orangen-Oehl-Tropfens von der Achse:

B. Erhebungs-Winkel der Ebenen nach der Sexagesimal-Eintheilung:

A.	B.	A.	B.
2 engl. Zoll.	15'	14 engl. Zoll.	2° 45'
4 —	25	15 —	4 0
6 —	35	16 —	6 0
8 —	45	17 —	10 0
10 —	1° 0	18 —	22 0
12 —	1 45		

Hawksbee sagt zwar nicht ausdrücklich, daß er den Abstand der Tropfen von der Achse von dem Mittelpunkte der Tropfen an gemessen habe; das scheint indess aus dem zu erhellen, was Newton von diesem Versuche in seiner Optik Frage 31. anführt, und was man hier weiter hin finden wird. Ich nehme dieses daher bei meiner Berechnung an; auf jeden Fall entsteht daraus nur ein unbedeutender Irrthum.

Es sey nun V der Neigungswinkel, welchen eine Ebene, die den Winkel der beiden Glasplatten halbirt in den verschiedenen Lagen dieser Platten mit dem Horizonte macht; a der jedesmahlige Abstand des Mittelpunkts des Tropfens von der Durchschnittsline der beiden Ebenen; und endlich h die Höhe, bis zu welcher die Flüssigkeit zwischen den beiden Glasplatten ansteigen würde, wenn sie senkrecht und parallel ständen und von einander die Entfernung hätten, welche sie bei diesem Versuche im Abstände b von ihrer Durchschnittsline haben. Dieses voraus gesetzt, so er-

hellet aus 11. (Seite 86.), dafs sehr nahe feyn wird

$$\sin. V = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Bei den Versuchen Hawksbee's waren die beiden Glasplatten in einem Abstände von 20 Zoll von ihrer Durchschnittslinie, da, wo die Achse an ihrem Rande angebracht war, um $\frac{1}{16}$ Zoll von einander entfernt; sie machten also mit einander einen Winkel von $10' 44''$. Um die Hälfte dieses Winkels, d. i. um $5' 22''$, sind also die Neigungswinkel der untern Platte, welche Hawksbee angiebt, zu vermindern, wenn man den wahren Werth von V haben will. Die Werthe von a erhält man aus seinen Angaben, wenn man die Entfernungen des Tropfens von der Achse, wie sie sich bei ihm finden, von 20 Zoll abzieht. Setzen wir endlich b gleich 10 engl. Zollen, in welchem Abstände von ihrer Durchschnittslinie die beiden Ebenen um $\frac{1}{32}$ Zoll von einander entfernt waren, so ist h derjenigen Höhe gleich, bis zu welcher Orangen-Oehl zwischen zwei senkrechten parallelen Glasplatten, die um $\frac{1}{32}$ engl. Zoll von einander entfernt sind, über das Niveau ansteigen würde. Nun aber haben wir gesehen, dafs diese Höhe halb so grofs ist, als die, in welcher Orangen-Oehl in einem cylindrischen Haarröhrchen aus Glas von demselben Durchmesser steht, und dafs in einem Haarröhrchen, von 1 Millim. Durchmesser, Orangen-Oehl 6,7389 Millim. hoch steht. Da nun

1 englischer Zoll gleich ist 25,3918 Millim., so
muss seyn

$$\frac{1}{32} \text{ e. Z.} : \frac{1}{25,3918} \text{ e. Z.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6,7389}{25,3918} \text{ e. Z.} : h \text{ e. Z.},$$

und also ist $h = \frac{16 \cdot 6,7389}{(25,3918)^2}$ engl. Zoll; und es ver-
wandelt sich daher für diesen Versuch die obige
Formel in folgende:

$$\sin. V = \frac{16 \cdot 6,7389}{10 \cdot (25,3918)^2} \cdot \frac{100}{a^2},$$

worin a in engl. Zollen gegeben werden muss.

Die folgende Tafel zeigt die hieraus berech-
neten Werthe von V für die einzelnen von Hawks-
bee beobachteten Werthe von a .

Abstand des Mittel- punkts d. Tropfens von der Durchschn. Lin. der Eben. od. a	Neigungs - Winkel V der Ebe- nen für den Fall des Gleich- gewichts:		Unterschied in Theilen des beobachteten Winkels.
	beobachteter.	berechneter.	
18 engl. Z.	9' 38"	17' 44"	+ $\frac{5}{6}$
16	19 38	22 27	+ $\frac{1}{7}$
14	29 38	29 20	- $\frac{1}{99}$
12	39 38	39 55	+ $\frac{1}{146}$
10	54 38	57 29	+ $\frac{1}{19}$
8	1° 39 38	1° 29 53	- $\frac{1}{16}$
6	2 39 38	2 39 45	+ $\frac{1}{1328}$
5	3 54 38	3 50 6	- $\frac{1}{32}$
4	5 54 38	5 59 58	+ $\frac{1}{66}$
3	9 54 38	10 42 31	+ $\frac{1}{12}$
2	21 54 38	24 42 49	+ $\frac{10}{78}$

Die berechneten Werthe des Neigungswin-
kels V stimmen mit den beobachteten so gut über-
ein, wie man das bei einer Formel, die sich bloß
der wahren nähert, und bei Beobachtungen, in
welchen Winkel unter 15' geschätzt wurden, nur
immer erwarten kann. In den größten und in den

kleinsten Entfernungen des Tropfens von der Durchschnittslinie der beiden Ebenen sind die Unterschiede am größten; dieß muß auch so seyn, nach meiner Analyse, wie man sie in 11. findet, weil der Tropfen in den größten Entfernungen noch nicht Breite genug, im Vergleiche mit seiner Dicke, in den kleinsten Entfernungen aber zu viel Breite für seinen Abstand von der Durchschnittslinie hat *).

Folgendes sagt von diesem Versuche Hawksbee's Newton in der 31. Frage am Ende seiner

*) Orangen-Oehl, sagt Hawksbee, läuft so schnell nach den auf einander liegenden Rändern der beiden Platten, daß dieses der Genauigkeit der Beobachtung hinderlich wird. Aus dem Grunde habe er den Versuch mit einem Tropfen *Weingeist* wiederholt, der sich langsamer bewege. Diesen Versuch, welchen Herr La Place nicht berechnet, habe ich auf folgende Art mit seiner Formel verglichen. Der Versuch giebt die Größen V und a . Nach der Formel ist aber $a^2 \cdot \sin V = h \cdot b$. Es läßt sich also daraus für jeden Stand des Tropfens der Werth von hb berechnen. Wird nun, wie zuvor, $b = 10$ engl. Zoll gesetzt, so findet man in Theilen eines englischen Zolls die Höhen h , bis zu welchen der Weingeist, der zu dem Versuche gedient hat, zwischen zwei senkrechten parallelen Glasebenen ansteigen mußte, wenn sie von einander denselben Abstand hätten, den bei Hawksbee's Versuchen die beiden gegen einander geneigten Ebenen in der Entfernung von 10 engl. Zollen von ihrer Durchschnittslinie hatten. Wären folglich Formel und Versuche beide völlig richtig, so müßten während einer einzelnen Reihe von Versuchen, bei welchen die Neigung der beiden Ebenen gegen einander unverändert bleibt, die Werthe von h durchgehends gleich seyn. Bei der ersten Reihe von Versuchen sollen beide Ebenen mit einander einen Winkel von $18'$, bei der zweiten von $10'$ gemacht haben. Die von Hawksbee beobachteten Neigungswin-

Optik: „Man nehme zwei ebene polirte Glastafeln, die 3 bis 4 Zoll breit und 20 bis 25 Zoll lang sind, und lege die eine horizontal, und auf sie die zweite so, daß sie sie an dem einen Ende berührt und mit ihr einen Winkel von 10 oder 15' macht. Hat man nun zuvor die beiden innern Glasflächen mit einem in Orangen-Oehl oder in Terpenthin-Spiritus getauchten Lappen nass gemacht, und einen oder zwei Tropfen jenes Oehls oder dieses Spiritus auf die untere Tafel unweit dieses Randes, der

kel der untern Ebene, bei welchen der Tropfen ruhig stehen blieb, sind also im ersten Falle um 9', im zweiten um 5' zu vermindern; und so stehen sie in der folgenden Tabelle:

Versuch 1. mit 18' Nei-			Versuch 2. mit 10' Nei-		
gung.			gung.		
a	V	h	V	h	
beobach-	beobach-	berech-	beobach-	berech-	
tet.	tet.	net.	tet.	net.	
engl. Z.	verbessert.	engl. Z.	verbessert.	engl. Z.	
18 $\frac{1}{2}$	36'	0,358	1° 25'	0,846	
16 $\frac{1}{2}$	46	0,364	1 45	0,831	
14 $\frac{1}{2}$	56	0,342	2 5	0,762	
12 $\frac{1}{2}$	1° 11	0,322	2 35	0,721	
10 $\frac{1}{2}$	1 21	0,259	3 5	0,593	
9 $\frac{1}{2}$	1 31	0,238	3 25	0,538	
8 $\frac{1}{2}$	1 51	0,233	3 55	0,514	
7 $\frac{1}{2}$	2 21	0,231	5	0,490	
6 $\frac{1}{2}$	3 11	0,234	7 35	0,557	
5 $\frac{1}{2}$	4 16	0,225	10 45	0,564	
4 $\frac{1}{2}$	5 51	0,206	14 13	0,497	
4	7 14	0,201	17 55	0,492	

Das Mittel aus allen Werthen für h von 14 $\frac{1}{2}$ bis 4 $\frac{1}{2}$ Zoll Abstand (innerhalb welcher Grenzen bei dem von Herrn La Place berechneten Versuche die Unterschiede nur gering sind), ist für Versuch 1., 0,254; und für Versuch 2., 0,582. Beide sollten zu einander im verkehrten Verhält-

von dem Winkel der beiden Glastafeln am weitesten entfernt ist, fallen lassen, so wird augenblicklich, (nachdem die obere Glastafel so auf die untere gelegt worden, daß sie, wie gesagt, an ihrem einen Ende die untere Glastafel, und an dem andern den Tropfen berührt, während beide einen Winkel von 10 bis 15' mit einander machen,) der Tropfen nach der Seite hin, wo beide Tafeln sich berühren, sich in Bewegung setzen, und mit beschleunigter Bewegung fort gehen, bis er dorthin gelangt ist; denn die beiden Gläser ziehen den Tropfen an, und treiben ihn nach der Seite zu, nach welcher die Anziehungen hin geneigt sind. Hebt man, während der Tropfen sich bewegt, die Glastafeln an dem Ende auf, wo sie sich berühren, so steigt der Tropfen, der sich dahin bewegt, zwischen ihnen an, und folglich wird er angezogen. Je höher man dieses Ende hebt, desto langsamer schreitet der Tropfen fort, und endlich bleibt er

nisse der zu h gehörigen Entfernungen beider Ebenen, also im Verhältnisse von 10 : 18 stehen; verhalten sich aber wie 10 : 22,9. Schon dieses ist ein Beweis, daß auf völlige Genauigkeit des Versuchs nicht zu rechnen ist, da die Neigungswinkel beider Ebenen gegen einander um mehrere Minuten falsch seyn müssen. Auch zeigen die Resultate der Berechnung bedeutende Anomalien.

Noch gehörten in Versuch I. zu einander folgende Werthe von

a : $3\frac{3}{4}$; $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$; 3 ; $2\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; 2 e. Z.
 V : $8^{\circ}31'$; $9^{\circ}16'$; $10^{\circ}21'$; $12^{\circ}31'$; $14^{\circ}51'$; $18^{\circ}41'$; $23^{\circ}16'$; $29^{\circ}51'$
 h : 0,208 ; 0,197 ; 0,190 ; 0,195 ; 0,194 ; 0,200 ; 0,200 ; 0,199.

Gilbert.

stehen, wenn er durch sein eigenes Gewicht ebenso stark herabwärts, als durch die Anziehung heraufwärts gezogen wird. Durch dieses Mittel läßt sich finden, mit welcher Kraft der Tropfen in allen Entfernungen von der Linie, in der die beiden Gläser sich berühren, angezogen wird. Aus einigen Versuchen dieser Art, welche der sel. Hawksbee angestellt hat, erhellet, daß die Anziehung beinahe im umgekehrten doppelten Verhältnisse der Abstände des Mittelpunkts der Tropfen von der Linie, in der sich die beiden Gläser berühren, steht; nämlich verkehrt im einfachen Verhältnisse, weil der Tropfen sich dann immer weiter ausbreitet, und jedes Glas in einer größern Fläche berührt; und nochmahls verkehrt im einfachen Verhältnisse, weil bei gleicher Oberfläche die Anziehungen immer stärker werden. Folglich ist die Anziehung, welche in derselben anziehenden Oberfläche vor sich geht, mit dem Abstände der beiden Gläser von einander im verkehrten Verhältnisse; und es muß daher, wenn der Abstand sehr klein ist, diese Anziehung außerordentlich groß seyn." Die Erklärungen, welche Newton an dieser Stelle, und an der, die ich S. 33. aus ihm angeführt habe, von den haarröhren-artigen Erscheinungen giebt, sind ganz dazu geeignet, den großen Vorzug der mathematischen und präzisen Theorie, die ich im vorigen Abschnitte entwickelt habe, in die Augen fallen zu machen.

Zu §. 12.

[Die Versuche der HH. Haüy und Tremery über die *Gestalt der Oberfläche von Wasser, Orangen-Oehl und Quecksilber in Haarröhrchen aus Glas*, welche Hr. La Place hierher setzt, hat der Leser schon im ersten Abschnitte S. 27. gefunden.]

Herr La Place macht den Beschluss mit einer Anwendung auf das Barometer, welche den *Einfluss der Haarröhrchen-Wirkung auf den Barometerstand* und die davon abhängende *Correction der Barometerhöhen* betrifft. In heberförmigen Barometern mit Schenkeln von gleicher Weite findet kein Einfluss dieser Art Statt. Bei den Gefäß-Barometern wird er desto merkbarer, je enger die Röhre ist. In Barometern dieser Art ist immer die Quecksilbersäule, von der Spitze der Convexität an gerechnet, kleiner, als sie es dem Drucke der Atmosphäre gemäß seyn sollte; woraus erhellet, wie fehlerhaft es ist, wenn einige Beobachter die Höhe des Barometers vom Niveau des Quecksilbers bis an den Punkt der Röhre rechnen, wo die convexe Fläche das Glas berührt. Um die beobachteten Höhen solcher Barometer auf wahre Höhen zu reduciren, welche dem Drucke der Atmosphäre entsprechen, und um die Gefäß-Barometer dadurch völlig vergleichbar zu machen, bedarf es einer Correction wegen des Einflusses der Capillarität. Zu dieser gelangt man, wenn man die Differentialgleichung für $\frac{2}{b}$ in §. 4., S. 51, durch Näherung integrirt.

grirt. Sie giebt beim Integriren

$$\frac{H}{b} = \frac{H}{u} \cdot \frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} - \frac{2g}{u^2} \int z u du,$$

wobei die z von oben nach unten, von der Spitze der Queckfilber-Säule an zu nehmen sind.

$\frac{H}{gb}$ ist die Haarröhrchen-Wirkung, oder das, was zur beobachteten Barometerhöhe hinzu gefügt werden muß, damit man die wahre, dem Luftdruck entsprechende, Barometerhöhe erhalte. Nun ist, nach dem Vorhergehenden,

$$\frac{2H \cdot \sin. \vartheta'}{1^{mi}} = g \cdot 7^{mi},333.$$

Es sey l der Halbmesser der Röhre in Millimeter ausgedruckt. In den Punkten, wo $u = b$ ist,

hat man $\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)}} = \sin. \vartheta$. Folglich ist

der Werth von $\frac{H}{gb}$ gleich

$$\frac{1^{mi} \cdot 7^{mi},333}{2l} - \frac{2}{2l} \int z u du,$$

wenn dieß Integral von $u = 0$ bis $u = l$ genommen wird.

Um dieses Integral zu haben, müßte man z als eine Function von u kennen. Es läßt sich indess auch durch Beobachtung bestimmen, wenn man bedenkt, daß $2\pi \int z u du$ den Raum bedeutet, der

H

3

zwischen der convexen Oberfläche des Queckfilbers, einer durch den obersten Punkt dieser Convexität gelegten Horizontalebene, und den Wänden der Röhre enthalten ist. Dieser Raum läßt sich durch das Gewicht von Queckfilber, welches erfordert wird, um ihn auszufüllen, mit Genauigkeit messen. Man kann daher eine Tafel bilden, entweder durch Hülfe der Integration oder durch Hülfe von Versuchen, welche für die verschiedenen Durchmesser l der Röhre, die Correction wegen des Einflusses der Capillarität giebt, die man den beobachteten Höhen eines Gefäß-Barometers hinzu zu fügen hat, um die wahren Barometerhöhen zu erhalten. Genau genommen würde dieses zwar voraus setzen, daß alle solche Röhren von gleicher Natur sind, die Verschiedenheit ihrer Materie ist indess an sich nicht bedeutend, und die Wirkung der Glasröhre auf das Queckfilber muß überhaupt nur sehr klein seyn, soll die Oberfläche des Queckfilbers in sehr engen Röhren nahe die Gestalt einer Halbkugel annehmen können; die Verschiedenheit des Glases kann daher keinen wahrnehmbaren Einfluss auf die Barometerhöhen äußern.

Neuere
UNTERSUCHUNGEN

über
die Kraft,
welche
in den Haarröhren und bei ähnlichen
Erscheinungen wirkt,

von
P. S. L A P L A C E,
Kanzler des Senats, Großoffic. der Ehrenlegion und
Mitgl. des Nat.-Institut.

nach dem
*Supplément à la Théorie de l'action
capillaire;*

und
populäre Darstellungen
dieser
Untersuchungen

von
BIOT und LA PLACE

als
E i n l e i t u n g e n.

NOTIZ

UNTERSUCHUNG

1831

Die H. A. L.

Im Jahr 1831

Erhalten

von

R. S. L. A. P. L. C. A.

Erhalten

1831

Erhalten

1831

Erhalten

1831

Erhalten

1831

Erhalten

1831

Erhalten

DARSTELLUNG

der neuern Untersuchungen des Hrn. La Place
über die haarröhren-artigen Wirkungen;

von

B I O T ,

Mitgl. des National-Instituts.

Als Einleitung zu den drei folgenden Haupttheilen
der Theorie des Hrn. La Place,

frei übersetzt von Gilbert.

(Nach dem *Journ. de Phys. Juill. 1807.*)

Es ist ungefähr ein Jahr her, als ich meine Anzeige von der Entdeckung niederschrieb, welche Herr La Place von der wahren Theorie der sogenannten haarröhren-artigen Erscheinungen (*phénomènes capillaires*) gemacht hat *). Er hatte damahls bewiesen, daß die Ursache dieser Wirkungen in der Anziehung liegt, welche die Flüs-

*) Man findet sie in meinen *Annalen der Physik*, Jahrg. 1807.
St. II. oder B. XXV. S. 233. Gilbert.

figkeiten auf sich selbst, und auf Körper, die darin eingetaucht sind, ausüben, und daß diese Attraction modificirt wird durch die Gestalt dieser Körper, und durch die Gestalt, welche das Flüssige in der Berührung mit ihnen annimmt. Die ersten Untersuchungen des Herrn La Place über diese Erscheinungen hatten uns die wahre Erklärung derselben, ihre Beziehung auf einander, und selbst ihr Maass in Zahlen kennen gelehrt; er vielleicht allein hielt diesen Gegenstand dennoch für nicht erschöpft.

In dem *Supplément à la Théorie de l'action capillaire*, welche er jetzt bekannt macht, will er, wie er sagt, nicht bloß die Theorie der haarröhren-artigen Wirkungen vervollkommen, und sie noch auf mehrere Gegenstände anwenden, um sie durch neue Vergleichen mit der Erfahrung immer mehr zu befestigen, sondern er hatte auch zur Absicht, diese Klasse von Erscheinungen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, um die Identität der anziehenden Kräfte, von welchen sie abhängen, mit denen, welche die chemischen Verwandtschaften begründen, immer mehr ins Helle zu setzen.

Der unschätzbare Vorzug mathematischer Theorien vor den vagen Erklärungen der gemeinen Physik springt hierbei recht auffallend in das Auge. Die letztern lassen die Erscheinungen einzeln und wie isolirt, zeigen sie nicht in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, und lehren höchstens

die besondern Gesetze, nach denen sie sich richten, nicht aber die Verbindung kennen, welche nach der Natur der Sache sie alle mit einander verkettet. Hat dagegen der mathematische Physiker nur erst die Hauptursache entdeckt und einem genauen Calcul unterworfen, so gehen dann alle besondern Thatfachen daraus, wie in der Natur selbst, und mit derselben Gewissheit, hervor. Er hat dann gleichsam den Faden der Ariadne, der mit Sicherheit durch alle Irrwege des Labyrinths hindurch führt, in welchem die Natur ihre Geheimnisse niedergelegt hat.

Herr La Place war in seinen ersten Untersuchungen, bei Bestimmung der Gestalt der Oberfläche eines Flüssigen, welches in einem haarröhren-artigen Raume in Ruhe steht, von dem hydrostatischen Grundsätze ausgegangen: „dass in einem Kanale, von welcher Figur er sey, der mit der Oberfläche eines Flüssigen in Verbindung steht, allgemein Gleichgewicht Statt finden muss,“ — und er hatte daraus die partielle Differentialgleichung für die Oberfläche des Flüssigen abgeleitet. Er wendet sich in dem *Supplement* wieder zu diesem Grundsätze, und zeigt, dass er mit dem folgenden noch evidentern Grundsätze in Verbindung steht: — „dass die mittlere Kraft, welche aus allen die kleinsten Theile der flüssigen Oberfläche sollicitirenden Kräften entspringt, auf dieser Oberfläche senkrecht seyn muss.“ Diese Bedingung führt ihn auf eine Gleichung, welche das

Differential der Gleichung ist, die er durch die andere Methode gefunden hatte, und folglich dieselbe Gestalt der Oberfläche als diese giebt *). Wir sehen hier also zuvörderst eine Bestätigung des Fundamental-Theorems dieser ganzen Theorie.

Aus dieser Gleichung für die Oberfläche des Flüssigen leitet Herr La Place folgende äußerst merkwürdige Eigenschaft ab: „dass nämlich in „prismatischen Haarröhren von gleicher Natur, „wie auch übrigens ihre Gestalt ist, das Volumen „des Flüssigen, welches über das Niveau angeho- „ben oder unter dasselbe herab gedrückt ist, dem „innern Umfange ihres Horizontal-Schnittes pro- „portional seyn muß“ **).

Dieses Resultat, welches sich durch seine Allgemeinheit und durch seine große Einfachheit auszeichnet, wünscht Herr La Place noch auf einem leichtern Wege direct zu beweisen; und das ist ihm dadurch gelungen, dass er die Haarröhren-Kraft aus einem andern Gesichtspunkte betrachtete, als den er Anfangs gefasst hatte; wiewohl unter demselben Principe einer anziehenden Kraft, die mit der Entfernung ausnehmend schnell abnimmt. Dabei hatte er nunmehr nicht bloß die Bedingung des Gleichgewichts des Flüssigen, um

*) Eine Untersuchung, welche Herr Brandes in dem Vorhergehenden der frühern Untersuchungen in §. 5, S. 54, eingeschaltet hat. *Gilbert.*

**) Auch diese Ableitung findet sich hier, in §. 7, S. 65, der frühern Untersuchung eingeschaltet. *Gilbert.*

ihr Genüge zu leisten, im Auge, sondern er ging unmittelbar von der Betrachtung der anziehenden Kräfte des Flüssigen und der Röhre selbst aus, und unternahm es, die Wirkungen derselben zu berechnen. Das Flüssige wird in den Haarröhren von einer Kraft angehoben, oder unter das Niveau niedergedrückt, welche das Resultat aller jener einzelnen Kräfte ist, und ihr hält das Gewicht der wirklich angehobenen oder niedergedrückten Säule des Flüssigen das Gleichgewicht; eine Gleichheit, aus deren Ausdruck sich unmittelbar das Volumen dieser Säule ergibt. Nun aber sind die anziehenden Kräfte der Röhre und des Flüssigen nur bis auf sehr kleine Entfernungen merkbar; daraus fließt der Beweis, daß diejenigen Glieder in jener Gleichung, welche von diesen Kräften abhängen, dieselben seyn müssen, als unter der Bedingung, daß von der Krümmung der Röhre abstrahirt werde, und daß folglich diese Glieder einzig und allein proportional seyn müssen der in der Berührung befindlichen Oberfläche der Röhre (*à la surface de contact qu'il présente*), oder, was auf eins heraus kommt, dem Umfange des Querschnitts der Röhre. Und dieses ist der Beweis des Theorems.

Vermittelt dieses Resultates ist es leicht, jedes Mal die *mittlere Höhe* zu finden, bis zu welcher sich ein Flüssiges in einer prismatischen Röhre von beliebiger Gestalt erhebt, wenn man die Höhe kennt, in welcher dieses Flüssige in einer

cylindrischen Röhre von gegebenem Durchmesser, die aus derselben Materie besteht, über das Niveau ansteigt. Denn da in einer cylindrischen Röhre von gleicher Materie und gleichem Umfange mit der prismatischen, ein eben so großes Volumen des Flüssigen, als in der prismatischen Röhre angehoben wird, in cylindrischen Röhren aus gleicher Materie aber die Höhen im verkehrten Verhältnisse der Durchmesser der Röhren stehen, so findet sich alsdann sogleich das Volumen der in der prismatischen Röhre erhobenen Flüssigkeit, und daraus ihre mittlere Höhe.

Will man diese *mittleren Höhen* durch Beobachtungen bestimmen, so reicht es nicht hin, die Höhen des höchsten oder die des niedrigsten Punktes des Meniscus, mit dem die Säule des Flüssigen sich endigt, zu messen. Diese Höhen sind nicht in aller Strenge den Durchmessern der Röhren verkehrt proportional, und können das nicht seyn nach dem Theoreme, daß die Volumina der angehobenen Säulen dem Umfange ihrer Grundflächen proportional seyn müssen. Denn bei dem Berechnen dieser Voluminum muß man auf den flüssigen Meniscus am Ende dieser Säule Rücksicht nehmen, und wird er zu dem angehobenen Cylinder hinzu gefügt, so findet jene Proportionalität nicht mehr genau Statt. Damit dieses der Fall sey, muß man bei den beobachteten Höhen eine Correction anbringen. Wenn das Flüssige die Röhre vollkommen näst, so ist dieser Meniscus

sehr nahe eine Halbkugel, und dann besteht, wie sich aus dem Vorhergehenden leicht übersehen läßt, diese Correction darin, daß man zu der beobachteten Höhe den sechsten Theil des Durchmessers der Röhre hinzu fügt. Nächst dagegen das Flüssige die Röhre nicht vollkommen, so wird diese Correction etwas zusammen gesetzt, weil dann der Meniscus keine Halbkugel, sondern ein Kugelabschnitt ist, dessen Gradmenge durch die Neigung der die Röhre berührenden flüssigen Elemente gegen die Röhrenwände bestimmt wird. Herr La Place giebt den allgemeinen Werth desselben in einer Function dieser Neigung.

Aus dem obigen Theorem ergibt sich eine Menge anderer merkwürdiger Folgerungen. In prismatischen Röhren von gleicher Materie und ähnlicher Grundfläche sind die mittlern Höhen derselben Flüssigen den homologen Linien proportional. Sind die Grundflächen Polygone, welche sich in einerlei Kreisen einschreiben lassen, so sind diese Höhen gleich. Denkt man sich Prismen mit rechteckigen Grundflächen, von denen zwei gegen über stehende Seiten unendlich lang sind, so hat man den Fall zweier parallelen Ebenen, die in ein Flüssiges eingetaucht sind; zwischen ihnen muß folglich auch hiernach das Flüssige eben so hoch oder so tief stehen, als in einer cylindrischen Röhre von gleicher Materie, deren Halbmesser dem Abstände der beiden Ebenen von einander gleich ist.

Alle haarröhren-artigen Erscheinungen, selbst die, in welchen sich die sonderbarsten Variationen zeigen, und die den bisarresten Anschein haben, erklärt Herr La Place aus seiner Theorie ohne Mühe, und er entwickelt aus ihr selbst die Ursachen ihrer Irregularität. Dahin gehört z. B. der Fall, wenn man eine Säule Alkohol senkrecht in einer Glasröhre schwebend erhält. Es bildet sich dann ein Tröpfchen an dem untern Ende der Röhre, und ein hohler sphärischer Meniscus am obern Ende der Alkoholsäule; das Tröpfchen hat vermöge seiner Kugelgestalt ein Bestreben, die Säule im Innern der Röhre anzuheben, und dasselbe Bestreben äußert der Meniscus durch sein Saugen; beide Kräfte sind gleich, und es muß daher der Alkohol in der Röhre doppelt so hoch stehen, als wenn das untere Ende der Röhre in ein Gefäß mit Alkohol eingetaucht wäre. Die Erfahrung giebt genau diesen Erfolg. — Hat man in die Röhre eine längere Alkoholsäule hinein gebracht, so läuft ein Theil des Flüssigen heraus, und verbreitet sich über das untere Ende der Röhre, benetzt es, und bildet daselbst wieder einen kugelförmigen Tropfen; der Durchmesser dieses Tropfens ist dann dem Durchmesser des äußern Umfangs der Röhre gleich, folglich muß nun die Höhe der flüssigen Säule der Wirkung dieses Tropfens und des Saugens des obern Meniscus entsprechen. In der That lehren die Versuche, daß in diesem Falle die Länge der flüssigen Säule gleich ist der Summe der Höhen,

welche dasselbe Flüssige in zwei Glasröhren aus derselben Materie, beim Eintauchen darin, annimmt, wenn der Durchmesser der einen dem innern, und der Durchmesser der andern dem äußern Durchmesser jener ersten Röhre gleich ist.

Man nehme eine heberförmige Röhre, deren einer Schenkel ein Haarröhrchen und deren anderer Schenkel sehr weit ist, halte sie aufrecht, und giesse in den weiten Schenkel Alkohol. Es bildet sich dann sogleich in dem haarröhren-artigen Schenkel ein hohler Meniscus und erhebt den Alkohol über das Niveau des weiten Schenkels bis zu derselben Höhe, welche er erreichen würde, wenn man das Haarröhrchen unmittelbar in eine große Fläche Alkohol eintauchte. Gießt man mehr Alkohol in den weiten Schenkel nach, so erfolgt stets dieselbe Wirkung, bis endlich der Alkohol die obere Mündung des Haarröhrchens erreicht. Hier wird dann die Oberfläche des Meniscus beim Höhertreten des Flüssigen immer minder hohl; die Saugkraft desselben muß also immer mehr abnehmen, und mit ihm der Unterschied des Niveau's immer geringer werden. Wird endlich die Oberfläche ganz eben, so steht der Alkohol in beiden Schenkeln genau in einerlei Höhe. Bei fernerem Zugießen in den weiten Schenkel tritt Alkohol aus der Mündung des Haarröhrchens heraus, und bildet dort ein Tröpfchen, dessen Convexität eben so wirkt, als wenn das Flüssige dort höher anstiege; daher alsdann der Alkohol in dem

weitem Schenkel höher steht, bis er hier, vermöge des Widerstandes, den jener Tropfen leistet, sich so hoch über das Niveau im Haarröhrchen erhebt, als er zuvor darunter stand, da noch in dem Haarröhrchen ein Meniscus ihn auffog. Fügt man dann noch ein wenig Alkohol hinzu, so zieht sich der Tropfen in die Länge, und platzt, wenn er dem Drucke nicht mehr widerstehen kann, an den Seiten, wo seine Krümmung geringer ist.

Herr La Place wählt zu diesen Beispielen den Alkohol, weil Alkohol eine vollkommene Flüssigkeit zu haben scheint, und daher diese Erscheinungen in ihrer ganzen Reinheit, frei von fremden Hindernissen, zeigt. Dasselbe ist der Fall mit jedem andern Tropfbaren, das denselben Grad der Flüssigkeit besitzt. Herr La Place ist aber geneigt, zu glauben, daß die Flüssigkeit der tropfbaren Körper um so größer ist, je weiter sie von ihrem Gefrierpunkte absteht. In den klebrigen Flüssigkeiten, das ist, in denen, die bei ihrem geringen Abstände von ihrem Gefrierpunkte schon etwas von den Eigenschaften angenommen haben, die ihnen im festen Zustande zukommen, ist die Adhäsion der Theilchen unter einander ein Hinderniß für die Bewegung der Schichten des Flüssigen. Diese gleiten dann nicht mehr mit hinlänglicher Freiheit eine über die andere hinweg, um den Kräften, von denen sie getrieben werden, augenblicklich zu gehorchen, und der Widerstand, der von diesem Reiben, auf das sich in der Rech-

nung nicht sehen läßt, herrührt, macht sie mehrerer Zustände des Gleichgewichts fähig, welche nicht unter den Formeln begriffen sind, bei denen voraus gesetzt ist, man habe es mit den Eigenschaften vollkommener Flüssigkeiten zu thun. Dieses ist z. B. der Fall mit dem gewöhnlichen Wasser; und darin liegt der wahre Grund, warum die Haarröhren-Versuche so schwer mit Wasser gelingen, und damit Unregelmäßigkeiten zeigen, die sich nur mit der höchsten Sorgfalt vermeiden lassen. Die Viscosität der Flüssigkeiten ist also, bemerkt Hr. La Place, so wenig die Ursache der haarröhren-artigen Erscheinungen, wofür sie einige Physiker genommen haben, daß sie vielmehr die Wirkungen der Haarröhren-Kraft stört.

Wer bewundert nicht die Leichtigkeit, mit der alle diese Erscheinungen eine aus der andern und aus dem Calcul fließen, und mit der sie sich in einer gegenseitigen Beziehung zeigen, die wir nie geahnet haben würden, führte uns darauf nicht dieses bewundernswürdige Hülfsmittel, wie durch eine Art von Divination. Aber das ist noch nicht alles; so merkwürdig jene Resultate auch sind, so führen sie doch zu noch merkwürdigeren.

Herr La Place übernimmt nun, den Erfolg zu bestimmen, der entstehen muß, wenn man eine gerade prismatische Röhre mit ihrem untern Ende in mehrere über einander stehende Flüssigkeiten eintaucht. Er bestimmt, wie groß das Vo-

lumen jeder einzelnen Flüssigkeit ist, das angehoben wird, und welche Gestalt die Flüssigkeiten in ihren gemeinschaftlichen Berührungsflächen im Innern der Röhre annehmen müssen. Sind es nur zwei Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber und Wasser, und benetzt das letztere die Röhre vollkommen, so ist es, da die Einwirkungen auf höchst kleine Entfernungen eingeschränkt sind, alsdann so gut, als bestände die ganze Röhre aus Wasser; und die Oberfläche der untern Flüssigkeit ist in diesem Falle genau eine Halbkugel. Hieraus folgen mehrere andere interessante Sätze, die ich hier übergehen muß; von dem angeführten Satze findet man indeß in der Folge noch eine sehr schöne Anwendung.

Alle diese Eigenschaften und alle diese Sätze sind auf Ersuchen des Herrn La Place von Herrn Gay-Lussac durch sehr genaue Versuche geprüft und bewährt worden, zu denen er neue Apparate erdacht, und die er mit aller Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen angestellt hat. Beim Vergleichen dieser Beobachtungen mit der Theorie muß man auf die Veränderungen der Dichtigkeit des Flüssigen bei veränderter Temperatur Rücksicht nehmen; denn Herr La Place beweiset durch seine Berechnung, daß die Höhen, welche ein Flüssiges in derselben Röhre, bei verschiedenen Temperaturen, einnimmt, im Verhältnisse seiner Dichtigkeit stehen. Und das stimmt mit den Versuchen des Grafen von Rumford überein.

*

*

*

Die Erklärung, welche Hr. La Place von den Erscheinungen giebt, die erfolgen, wenn man *zwei kleine Streifen* senkrecht *so in einer Flüssigkeit* aufhängt, daß sie parallel und nur wenig von einander entfernt sind, — ist eins der Resultate dieser Theorie, welches am mehresten genügt. Schon in seiner frühern Untersuchung hatte er bewiesen, daß es, vermöge der Wirkung der Haarröhren-Kraft, scheinen muß, diese Streifen zögen einander an, gleich viel, ob das Flüssige zwischen ihnen über oder unter dem Niveau steht. Jetzt betrachtet er den Fall, wenn die eine der beiden Ebenen das Flüssige anhebt, die andere es niederdrückt, wie das geschehen muß, so oft die eine Ebene von dem Flüssigen nafsbar ist, die andere nicht. Die Oberfläche des Flüssigen zwischen den beiden Ebenen muß in diesem Falle, vermöge jener entgegen gesetzten Wirkungen, einen Wendungspunkt haben, und die Berechnung lehrt, daß die kleinen Streifen von einander zurück weichen müssen. Nähert man sie indess einander, so rückt der Wendungspunkt immer näher an eine der beiden Ebenen, und endlich fällt er in sie hinein. Führt man dann noch fort, die Ebenen einander näher zu bringen, so wird das Flüssige zwischen ihnen erhoben oder niedergedrückt, und daraus entsteht eine andere Kraft, welche die beiden Ebenen gegen einander treibt, und nach Ueberwindung der äufsern Wirkung des Flüssigen, sie mit beschleunigter Bewegung in Berührung bringt.

Herr Hauy hat auf Erfuchen des Hrn. La Place hierüber Versuche angestellt, und findet den Erfolg der Theorie völlig entsprechend. Dieser Fall ist um so merkwürdiger, da er uns ein Beispiel einer durch Verminderung des Abstandes in Anziehung sich verwandelnden Zurückstoßung giebt, wie dieses uns in der Physik so häufig vorkommt. Jede der beiden Ebenen scheint in diesem Versuche die andere zurück zu stoßen und von ihr zurück gestoßen zu werden, und die Rechnung zeigt, daß dies von beiden mit gleicher Kraft geschieht. Obgleich indess die beiden Ebenen, bemerkt Hr. La Place, nur durch die haarröhren-artige Wirkung des Flüssigen auf einander einwirken, so ist doch auch hier, wie in allen Erscheinungen der Natur, Wirkung und Gegenwirkung einander gleich.

Herr La Place wendet seine Theorie noch auf eine Erscheinung an, von der man auf den ersten Anblick glauben sollte, die Haarröhren-Kraft habe damit nichts zu thun, die aber in der That auf ihr beruht: nämlich auf die *Adhäsion von Platten mit der Oberfläche von Flüssigkeiten*. Eine Platte von großer Oberfläche, die man mit einem Flüssigen, das in Ruhe ist, in Berührung gebracht hat, adhärirt mit ihr so stark, daß es einer merkbaren und manchmahl selbst einer bedeutenden Kraft bedarf, um sie los zu reißen. Sucht man sie allmählich zu heben, wie das der Fall ist, wenn sie an dem einen Arme einer Wage hängt, und man den andern Arm allmählich mit mehr Gewichten

beschwert, so hebt die Platte eine Säule des Flüssigen, auf dem sie ruhte, mit an, und das Gewicht dieser Säule im Augenblicke, wenn die Platte los reißt, giebt ein Mafs für diese Adhäsion. Dafs diese Erscheinung eine Wirkung der Haarröhren-Kraft ist, beweiset Herr La Place durch eine genaue Rechnung unwidersprechlich. Aus dem bekannten Durchmesser der kreisrunden Platte, und aus der als bekannt voraus gesetzten Höhe, bis zu welcher dasselbe Flüssige in einer Röhre von gegebener Weite ansteigt, die aus derselben Materie als die Platte besteht, findet er, wie groß die Kraft seyn muß, welche nöthig ist, um die Scheibe los zu reißen. Wendet man seine Formel auf Flüssigkeiten verschiedener Art an, z. B. auf Wasser, auf Terpenthin-Oehl und auf Alkohol von verschiedenen Dichten, so findet man Zahlwerthe, welche mit denen genau übereinstimmen, die Herr Gay-Lussac bei den sehr genauen Versuchen gefunden, die er ausdrücklich über diesen Gegenstand angestellt hat.

Da die haarröhren-artige Anziehung nur bis auf unmerkliche Entfernungen reicht, so müssen Scheiben, welche von dem Flüssigen vollkommen genäht sind, bei einerlei Oberfläche genau einerlei Adhäsion zu diesem Flüssigen äußern, wie verschieden sie auch übrigens ihrer Natur nach seyn mögen, und zwar muß diese Adhäsion genau der gleich seyn, welche das Flüssige auf sich selbst ausübt. Auch dieses bestätigt die Erfahrung. So

z. B. haben völlig genähte Scheiben aus Kupfer und aus Glas, bei einerlei Durchmesser, genau einerlei Adhäsion zu einem Flüssigen.

Diese Wirkungen hängen ab von dem Berührungswinkel, den das Flüssige mit dem Umfange (*le contour*) der auf ihr ruhenden Scheibe macht. Sie verschwinden, wenn dieser Winkel null ist. Nun haben wir aber oben gesehen, daß, in einer Haarröhre aus Glas, Quecksilber, das mit Wasser bedeckt ist, sich in eine Oberfläche setzt, die genau eine Halbkugel ist. Bringt man folglich eine an einer Wage schwebende Glascheibe mit einer darunter befindlichen Quecksilberfläche in Berührung, und man gießt dann Wasser darauf, so daß das Quecksilber und die Scheibe davon bedeckt werden, so kann man, weil dann der Berührungswinkel zwischen der Scheibe und dem Quecksilber null ist, beim Losreißen der Scheibe keinen andern Widerstand, als den finden, den sie durch ihr eigenes Gewicht leistet. Auch dieses haben die Versuche des Herrn Gay-Lussac bewährt. Die Ursache des Erfolgs liegt hier so ganz in dem Wasser, daß, als kein Wasser mitwirkte, die Adhäsion der Glascheibe mit dem Quecksilber in diesem Versuche bis auf 296 Grammes stieg, ja bis auf 400 Grammes steigen konnte.

Die letzte Anwendung, welche Hr. La Place von seiner herrlichen Theorie macht, ist, daß er die *Gestalt* untersucht, welche ein *großer Quecksilbertropfen*, der auf einer horizontalen Glastafel
ruht,

ruht, annehmen muß. Die Gestalt und die Dicke dieses Tropfens, so wie die Neigung seiner Seitenwände gegen das Glas, hängen ab von der Einwirkung des Queckfilbers auf sich selbst und auf das Glas, das ihn trägt; folglich ist hierbei die Haarröhren-Kraft im Spiele. Die Resultate, welche die Theorie für diesen Fall giebt, stimmen auf das Genaueste mit den Versuchen des Herrn Gay-Lussac überein. Dieselbe Methode giebt die Depression des Queckfilbers in weiten Röhren, z. B. in den Barometern; und vergleicht man damit die Größen, welche die HH. Carl Cavendish und Gay-Lussac durch Versuche bestimmt haben, so zeigt sich die vollkommenste Uebereinstimmung.

* * *

Herr La Place beschließt dieses Werk mit *allgemeinen physikalischen und chemischen Betrachtungen*, die zwar nur wenige Seiten einnehmen, doch mehr als ganze Bände zu denken und nachzuforschen geben, und mit einigen historischen Rückblicken. Er zeigt, daß die nur in sehr kleinen Entfernungen wahrzunehmende anziehende Kraft, welche die haarröhren-artigen Erscheinungen hervor bringt, die wahre Ursache der *chemischen Verwandtschaften* ist. In den haarröhren-artigen Erscheinungen äußert sich die anziehende Kraft aber nicht in ihrem ganzen Umfange, sondern zeigt sich nur durch ihre Verschiedenheiten und durch die Variationen, welche in ihr die ver-

K

schiedene Krümmung der Oberflächen, mit denen die Körper sich endigen, hervor bringt. In den chemischen Verwandtschaften wirkt dagegen die eigene und einiger Massen individuelle Attraction der kleinsten Theilchen direct, mit ihrer ganzen Energie, und ohne durch irgend etwas modificirt zu werden.

Die Entwicklung dieser tieffinnigen Idee führt Herrn La Place darauf, den *Zustand der Festigkeit* für ein Resultat der Anziehung der kleinsten Theilchen des Körpers, so fern sie durch die Gestalt der Theilchen modificirt ist, zu nehmen. Die Figur der Theilchen kann der Grund seyn, daß ihre Anziehung sich in einigen Seitenflächen sehr viel stärker als in andern äußert. Werden nun die Theilchen durch die ausdehnende Kraft des Wärmestoffs, oder durch irgend eine andere Ursache, weiter aus einander getrieben, so kann zwar, bis auf eine gewisse Grenze, ihre anziehende Kraft ihren Einfluß noch äußern; aber die Modificationen, welche diese Kraft durch die Figur der kleinsten Theilchen erlitt, werden bei zunehmender Entfernung der Theilchen von einander unmerkbar. Denn die Wirkung derselben muß sehr viel schneller, als die anziehende Kraft selbst, abnehmen; auf dieselbe Art, wie bei den Erscheinungen am Himmel, welche von der Figur der Planeten abhängen, z. B. beim Vorrücken der Nachtgleichen, dieser Einfluß sich nach dem Kubus der zunehmenden Entfernungen vermindert, während

der Einfluß der Attraction selbst nur nach dem Quadrate der wachsenden Entfernungen kleiner wird. Der Gaszustand scheint, dieser Vorstellung gemäß, derjenige Zustand zu seyn, in welchem sich die kleinsten Theilchen schon in einer solchen Entfernung von einander befinden, daß weder der Einfluß ihrer Figur, noch ihre eigenthümliche Attraction überhaupt, auf einander mehr merkbar ist, so daß sie dann bloß durch die Expansivkraft der Wärme im Gleichgewichte erhalten werden. In dem ersten Zustande, dem der Festigkeit, leistet der Körper jeder Veränderung seines Zustandes den größten möglichen Widerstand; unaufhörlich streben die kleinsten Theilchen, sie mögen auch noch so wenig aus ihrer gegenseitigen Lage verrückt werden, darein wieder zurück zu kommen; dieses ist das System eines stabilen Gleichgewichts*). In dem tropfbaren Zustande, in welchem der Einfluß der Figur der kleinsten Theilchen unmerkbar geworden ist, finden sich bei jeder Lage der Theilchen dieselben Kräfte und dieselben Zustände von Gleichgewicht; die Theilchen geben daher dem kleinsten Drucke nach, wie das bei dem vollkommenen Flüssigen der Fall ist.

Die weitere Betrachtung dieser verschiedenen Zustände stabilen und nicht-stabilen Gleichgewichts, in ihrer Anwendung auf die Chemie, ist sehr tief-

*) *D'un équilibre stable*, ein Kunstwort, das ich beibehalte, weil ich es nicht ohne Zweideutigkeit zu übersetzen weiß.

Gilbert.

finnig. Da sie auf einem mechanischen Principe beruht, welches für jedes System von Körpern gilt, so hat sie den großen Vorzug, vollkommen exact zu seyn. Herr La Place erklärt daraus eine Menge sehr wichtiger chemischer Phänomene.

Alle Analogieen scheinen dahin überein zu stimmen, daß die anziehende Kraft, mit welcher die kleinsten Theilchen auf einander einwirken, außerordentlich beträchtlich ist. In den haarröhren-artigen Wirkungen werden wir nur die Unterschiede derselben gewahr; ihre absolute GröÙe aber ist unglaublich. Diese Kraft drückt senkrecht die Oberfläche der tropfbaren Flüssigkeiten, unabhängig von der Schwere. Wenn man annimmt, daß die Kraft, mit der das Wasser auf sich selbst wirkt, eben so groß sey, als die anziehende Kraft, welche es auf das Licht äussert, so würde der Druck, den das Wasser diesem gemäß in seinem Innern litte, durch eine Wassersäule dargestellt werden, deren Höhe größer wäre, als der Abstand der Erde von der Sonne zehn tausend Mahl genommen. Wahrscheinlich ist die Wirkung des Wassers auf sich selbst kleiner, als die auf das Licht; man übersieht indess doch hieraus, zu welcher Ordnung sie gehört. Sollte man hieraus nicht schließen dürfen, bemerkt Herr La Place, daß jede tropfbare Flüssigkeit vermöge dieser Kraft durch sich selbst zusammen gedrückt wird, und daher im Innern weit dichter als an der Oberfläche ist? Denn in der Oberfläche ist dieser

Druck null; von ihr ab wächst er in dem Innern des Flüssigen sehr schnell, bis zu der ausnehmend geringen Tiefe, bis zu welcher die Sphäre der merkbaren Wirksamkeit der Theilchen herab reicht; und über sie hinaus ist er constant, weil dann die nach der Oberfläche zu liegenden Schichten des Flüssigen gerade so stark anziehen, als das Flüssige im Innern. Wenn man sich eine so dünne Lage eines Flüssigen denkt, daß jene Sphäre merkbarer Wirksamkeit ihre Dicke überträfe, so müßte eine solche Lage Flüssigkeit an ihren beiden Oberflächen einen viel kleinern Druck leiden, als es der Fall ist, wenn sie eine merkbare Dicke hat. Wäre es daher nicht möglich, daß in ihr das Flüssige ein weit geringeres specifisches Gewicht hätte, als sich das in unsern Versuchen zeigt, bei denen die Kraft, die das Flüssige zusammen drückt, ihre ganze Intensität hat? Und sollte dieser Fall nicht bei der wässerigen Hülle der bläschen-artigen Dünste eintreten, die vielleicht eben dadurch specifisch leichter als die Luft, in der sie schwimmt, wie wir das täglich sehen, und die sich dem zu Folge in einem Mittelzustande zwischen dem des tropfbaren Wassers und des Wasserdampfs befinden würde. Dieses sind einige von den Ideen, welche Herr La Place hinstellt, und die er dem Nachdenken der Physiker und der Chemiker empfiehlt.

Herr La Place stellt zuletzt noch mit seiner Theorie die *vorzüglichsten Hypothesen* zusammen, die man bis hierher zur Erklärung der haarröhren-

artigen Erscheinungen erdacht hatte. Er macht zuerst darauf aufmerksam, daß Clairaut, der alle Kräfte, auf welchen diese Erscheinungen beruhen, in seiner sehr genauen Analyse umfaßt hatte, bloß durch die falsche Annahme gehemmt wurde, daß die anziehende Kraft des Glases bis auf die Wassertheilchen in der Achse des Röhrchens wirke. Darauf zeigt er nach seiner zweiten Methode, daß, wenn man in dem Falle, wenn die Röhre von der Flüssigkeit vollkommen genäßt ist, sich dächte, die Flüssigkeit würde einzig und allein von dem unmittelbar über ihrer Oberfläche befindlichen, nicht merkbar hohen, Ringe der innern Röhrenfläche sollicitirt, alles nach dieser Hypothese genau so erfolgen müßte, als es in der Wirklichkeit geschieht, ob gleich hier der Erfolg von andern Ursachen abhängt. Die Annahmen, aus welchen der Dr. Jurin die haarröhren-artigen Wirkungen zu erklären versucht hat, nähern sich dieser Hypothese außerordentlich. Herr La Place thut ferner dar, daß die von andern Physikern erdachte Erklärung unzureichend ist, der zu Folge diese Erscheinungen Wirkungen der Spannung der flüssigen Oberfläche seyn sollen, welche, nach ihrer Gestalt, von diesen Physikern mit denen Oberflächen verglichen wird, die von den Geometern *lintearische* oder *elastische* genannt werden. Endlich führt er die Bemerkungen Segner's und Thomas Young's über den Einfluß der Krümmung der Oberflächen auf die haarröhren-artigen Erschei-

nungen, auf seine erste Methode zurück; beide Mathematiker hatten zwar die Nothwendigkeit, auf diesen Einfluss zu sehen, erkannt, nicht aber durchschauert, in wie fern er bei diesen Erscheinungen mitwirkt, noch wie er mit den ursprünglichen Kräften, die ihn erzeugen, zusammen hängt.

Wird eine zahlreiche Folge von Erscheinungen auf eine einzige Ursache in der Natur, deren Wirklichkeit sich nicht bezweifeln läßt, zurück geführt, und durch einen strengen Calcul bis in das kleinste Detail aus ihr wieder abgeleitet; so tritt sie eben dadurch aus dem Gebiete der gemeinen Physik heraus, und bildet nun einen Inbegriff mathematischer Wahrheiten. Dieses ist der Gesichtspunkt, aus dem man von nun an die haarröhren-artigen Erscheinungen zu betrachten hat. Dasselbe wird künftig einmahl mit andern Zweigen der Physik geschehen, mit den Erscheinungen der Wärme, der Elektricität, und des Magnetismus, wenn höhere Genies uns die wahren Ursachen derselben enthüllen werden, die jetzt noch unbekannt sind, und an deren Stelle wir, in Ermangelung eines Besseren, Hypothesen setzen, oder Fictionen, aus denen sich die beobachteten Erscheinungen mehr oder minder gut darstellen lassen. Die haarröhren-artigen Erscheinungen, und die Erscheinungen, welche aus der Einwirkung der Körper auf das Licht entstehen, sind bis jetzt die Einzigen, welche man mittelst eines strengen Calculs aus der Attraction in kleinen Entfernungen

abgeleitet hat; und von diesen beiden Entdeckungen gehört die eine Newton. Aber wahrscheinlich hängen noch viele Erscheinungen anderer Art von derselben, nur verschieden modificirten, Ursache ab. In der That zeigt uns Herr La Place in ihr schon jetzt mit Evidenz und durch mathematische Schlüsse die Quelle aller chemischen Erscheinungen. Es wird ihm unstreitig nicht genügen, den Ruhm dieser glänzenden Entdeckungen mit Newton getheilt zu haben; er wird den Ausichten, auf deren Wichtigkeit er selbst uns aufmerksam gemacht hat, weiter nachspüren; und vielleicht gelingt es seiner tiefsinnigen Analyse, uns noch mehr als Ein Naturgesetz zu enthüllen, das uns bis jetzt verborgen ist.

(Bis hierher die als Einleitung zu den folgenden Haupttheilen dienende Darstellung des Herrn Biot.)

ZWEITER HAUPTTHEIL
der
U n t e r s u c h u n g e n
des Herrn
L A P L A C E.

Die Wirkung der Haarröhren-Kraft
auf eine neue Art betrachtet.

Uebersetzt, mit einigen Anmerkungen,
von

Brandes und Gilbert.

I. *Vergleichung der Kräfte mit der angehobenen
Masse des Flüssigen.*

13. Bei unsern Untersuchungen über die haarröhren-artigen Erscheinungen, wie wir sie bis hierher behandelt haben, gründete sich alles auf die Betrachtung der Oberfläche, welche das Flüssige in einem haarröhren-artigen Raume annimmt, und auf die Bedingungen des Gleichgewichts eines Flüssigen, welches in einem unendlich engen Kanale enthalten ist, dessen eines Ende sich in dieser

Oberfläche befindet, und dessen anderes Ende in der Oberfläche des unbegrenzten Flüssigen liegt, in das der haarröhren-artige Raum eingetaucht ist. Jetzt wollen wir dagegen die *Kräfte* betrachten, welche das Flüssige in Räumen dieser Art anzuheben oder niederzudrücken streben, und diese Kräfte direct zu bestimmen suchen. Eine Untersuchung, welche uns zu mehreren allgemeinen Resultaten führen wird, die sich nach der vorigen Methode nicht so leicht ableiten lassen. Beide Methoden vereinigt werden über dieß uns ein Mittel an die Hand geben, die Verwandtschaften der verschiedenen Körper zu den flüssigen Körpern mit Genauigkeit unter einander zu vergleichen.

Man denke sich eine prismatische Röhre *ABCD* (Fig. 1. Taf. II.) *), gleich viel, von welcher Grundfläche, deren Seitenflächen gegen die Grundflächen senkrecht sind. Sie stehe senkrecht, und ihr unteres Ende sey in ein Flüssiges eingetaucht, das sich in ihr über das Niveau *MN* des umgebenden Flüssigen erhebe. Dafs das Flüssige in dem Innern der Röhre, über dem Niveau ansteigt, davon kann der Grund in nichts Anderm liegen, als in der Wirkung der Wände der Röhre auf das Flüssige und der flüssigen Theilchen auf einander selbst.

Die zunächst an einer Röhrenwand liegende Schicht des Flüssigen wird nämlich durch diese

*) Die Figur und die Beziehungen auf sie finden sich in dem Originale nicht. Ich habe sie zum leichtern Verständnisse beigelegt. *Gilbert.*

Einwirkung gehoben; diese Schicht erhebt eine zweite, die zweite eine dritte und so weiter, bis endlich das Gewicht der erhobenen Säule des Flüssigen den Kräften, welche noch mehr zu heben streben, das Gleichgewicht hält.

Um das angehobene Volumen des Flüssigen, bei welchem das Gleichgewicht Statt findet, zu bestimmen, wollen wir uns an dem Ende der eingetauchten prismatischen Röhre *ABCD* eine bloß imaginäre Fortsetzung *DCIK* dieser Röhre denken, so nämlich, daß die unendlich dünnen Wände dieser zweiten Röhre die Verlängerung der innern Oberfläche der ersten Röhre sind, und daß diese Wände selbst gar nicht auf das Flüssige wirken, folglich die Einwirkung der ersten Röhre *ABCD* und des Flüssigen auf einander auf keine Art stören. Diese zweite Röhre sey Anfangs vertikal, krümme sich dann horizontal, und nehme dann die vertikale Richtung wieder an, behalte dabei aber überall einerlei Figur und Weite. Es ist einleuchtend, daß dann, in dem aus den beiden Röhren zusammen gesetzten Kanale *ABIK*, bei dem Zustande des Gleichgewichts, der Druck in den beiden vertikalen Armen *ABEF* und *IKHG* gleich seyn muß. Weil aber in dem ersten Arme *ABEF* sich eine größere Masse des Flüssigen befindet, als in dem zweiten *IKHG*, so muß der daraus entspringende größere Druck durch die vertikalen Attraktionen zerstört werden, welche die prismatische Röhre und das Flüssige, auf das im ersten Arme enthaltene Flüssige

äufsern. Wir wollen diese verschiedenen Attraktionen genau und einzeln untersuchen, und zwar zuerst diejenigen, welche um den untern Theil der ersten Röhre Statt finden.

Da die erste Röhre ein senkrechtes Prisma seyn und vertikal stehen soll, so ist ihre Grundfläche horizontal. Das in dem ersten senkrechten Arme *DCEF* der zweiten Röhre enthaltene Flüssige wird vertikal niederwärts gezogen, 1) durch sich selbst, und 2) durch das sie umgebende Flüssige; aber beide Attraktionen werden aufgehoben durch die ähnlichen Attraktionen, welche auf das Flüssige in dem andern Arme *IKHG* dieser Röhre, in der Nähe der Oberfläche, wirken, daher man hier von ihnen absehen kann. Es wird aber auch 3) das in *DCEF* enthaltene Flüssige vertikal aufwärts gezogen durch das Flüssige in der ersten Röhre *ABCD*; diese Attraction wird aber ebenfalls dadurch zerstört, daß jenes Flüssige dieses letztere mit eben der Kraft herabwärts anzieht, und es kommen daher hier auch diese beiden gegenseitigen Anziehungen nicht in Rechnung. Endlich wird 4) das Flüssige in dem Schenkel *DCFE* der zweiten Röhre vertikal aufwärts gezogen, durch die prismatische Röhre *ABCD* selbst, und es entsteht dadurch in diesem Flüssigen eine senkrecht aufwärts gerichtete Kraft, die wir $= Q$ setzen wollen; sie trägt wirklich dazu bei, das in der ersten Röhre *ABCD* erhobene Flüssige über dem Niveau des umgebenden Flüssigen zu erhalten.

Was die Kräfte betrifft, die auf das in der *ersten Röhre ABCD* enthaltene Flüssige wirken, so finden an dem untern Theile derselben folgende Attractionen Statt: 1) die Anziehung, die das Flüssige auf sich selbst äußert; sie kommt indess hier nicht in Rechnung, weil diese gegenseitigen Anziehungen der Theilchen einem Körper keine Bewegung einzudrücken vermögen, wenn er fest ist, und man unbeschadet des Gleichgewichts sich denken kann, das Wasser der *ersten Röhre* sey fest geworden. — 2) Das in der untern Röhre enthaltene Flüssige zieht die flüssige Masse niederwärts; aber wir haben eben schon erwähnt, daß diese Anziehung durch die entgegen gesetzte des obern Flüssigen aufgehoben wird. — 3) Das die untere Röhre umgebende Fluidum zieht das in der *ersten Röhre ABCD* enthaltene Flüssige senkrecht herabwärts; und diese Kraft kommt wirklich in Rechnung. Wir wollen sie $= - Q'$ setzen, da sie, als der vorhin gefundenen entgegen gesetzt wirkend, mit $-$ bezeichnet werden muß. — 4) Zu diesen Kräften kommt endlich noch eine vierte; auch das in der *ersten Röhre ABCD* enthaltene Flüssige wird nämlich von dieser Röhre selbst senkrecht aufwärts gezogen, und zwar mit einer Kraft, welche gleichfalls $= Q$, das heißt, eben so groß ist, als die Attraction, welche eben diese Röhre auf das Flüssige in der zweiten Röhre ausübt. Denn wenn man durch eine horizontale Ebene irgend wo den untern Theil des in der *ersten Röhre ABCD* ent-

haltenen Flüssigen abschneidet, so kann der untere abgeschnittene Theil der Röhre, der überall rund um mit der Flüssigkeit in Berührung ist, keine vertikale aufwärts gerichtete Attraction auf das Flüssige hervor bringen, sondern bloß der oberhalb liegende Theil der Röhre vermag dieses zu bewirken; folglich wirkt auch für die ganze flüssige Masse, welche in der prismatischen Röhre enthalten ist, nur der oberhalb liegende Theil der Röhre, und zwar eben so, wie die prismatische Röhre *ABCD* auf das in der zweiten Röhre enthaltene Flüssige anziehend einwirkt.

Hiernach ist also die gesammte vertikale Kraft, welche das Flüssige, das in dem ersten Arme *ABEF* des Kanals *ABIK* enthalten ist, aufwärts zieht, $= 2Q - Q'$.

Noch können wir hierbei bemerken, daß, wenn das Gesetz, wonach sich die Attraction mit der Entfernung ändert, für die Theilchen des Flüssigen dasselbe ist als für die Theilchen der Röhrenwand, die gesammten Kräfte Q, Q' , den Intensitäten ρ, ρ' , mit welchen gleiche Volumina der einen und andern Materie wirken, proportional seyn müssen. Denn da die Oberfläche des die zweite Röhre umgebenden Flüssigen völlig gleich ist der innern Oberfläche der eingetauchten Röhre, so kann hier, wo es auf die Dicke der Röhrenwand nicht ankommt, so bald diese Dicke einen merklichen Werth hat, die Kraft Q bloß

nach dem Verhältnisse der Intensität der Anziehung von Q verschieden seyn.

Diese gefundene vertikale Kraft $= 2Q - Q'$ muß dem Drucke des über dem Niveau erhobenen Flüssigen das Gleichgewicht halten. Wenn also das Volumen dieser flüssigen Masse $= V$, ihre Dichtigkeit $= D$, und folglich ihr Gewicht $= gDV$ ist, so muß seyn

$$gDV = 2Q - Q'.$$

Da die Attractionen, welche hier wirksam sind, nur in unmerklich kleinen Abständen merklich bleiben, so wirken die eingetauchten Röhrenwände nur auf die ihnen äußerst nahen flüssigen Säulen, und man kann daher von der Krümmung der Röhrenwände gänzlich absehen, und die Röhrenwand als in eine Ebene ausgebreitet oder als abgewickelt ansehen *). Da dann die Kraft Q der Breite dieser Ebene entsprechen muß, so ist sie dem Umfange der Grundfläche der prismatischen Röhre proportional; und nennt man diesen Umfang c , so kann man $Q = \rho c$ setzen, wenn ρ eine beständige Gröſſe ist. Wenn das Gesetz, wie die Attraction von der Entfernung abhängt, für die verschiedenen Körper dasselbe ist, so bedeutet ρ zugleich die Intensität der Attractionskraft derjenigen Materie, aus welcher die eingetauchte Röhre besteht, gegen das Flüssige; allgemein aber bedeutet ρ eine Gröſſe, welche von der Attraction der Materie der Röhre abhängt, dagegen von der Fi-

*) Man vergleiche oben S. 19.

Gilbert.

gur und Gröſſe derselben unabhängig ist. Eben so findet man $Q' = \rho' \cdot c$, wenn ρ' , in Rücksicht auf die Attraction der Theilchen des Flüssigen unter einander, eben die Bedeutung hat, als ρ in Rücksicht auf die Attraction der Röhre gegen das Flüssige. Und so ergiebt sich dann

$$gD \cdot V = (2\rho - \rho') c.$$

Eine Gleichung, welche mit der am Ende von §. 7. gefundenen überein stimmt, wenn man $2\rho - \rho' = \frac{1}{2}H \cdot \cos.\omega$ setzt.

Aus §. 12. erhellet, daß für $\rho = \rho'$ der Winkel $\omega = 0$ wird; in diesem Falle also ist

$$\rho' = \frac{1}{2}H.$$

Weil ρ' einerlei bleibt, wenn man in dasselbe Flüssige Röhren von verschiedener Materie eintaucht, so muß allgemein seyn, wenn ρ nicht $= \rho'$ ist, $2\rho - \rho' = \rho' \cdot \cos.\omega$, folglich

$$\rho = \rho' \cdot \cos.^2 \frac{1}{2}\omega.$$

Und so findet man aus dem Winkel ω das Verhältniß $\rho : \rho'$, und umgekehrt; ω aber ist der Winkel, welchen der äußerste Theil der Oberfläche des Flüssigen mit der Röhrenwand macht.

Ein directer Beweis für die Gleichung $\rho' = \frac{1}{2}H$.

14. Es sey (Fig. 17. *) AB eine vertikale Ebene von merklicher Dicke, deren untere Seite horizontal ist. In der Entfernung $EC = a$ von die-

*) Auch diese Figur findet sich nicht in dem Originale, sondern ist von Hrn. Dr. Brandes der Deutlichkeit halber hier hinzu gefügt worden. Gilbert.

dieser Ebene befinde sich eine nach D zu unbegrenzte verticale Linie CD , deren oberes Ende C mit der untern Grenze der Ebene in einerley Niveau liege, und diese Linie werde von der Ebene angezogen. Die Function $\varphi(s)$ drücke das Gesetz der Attraction in Rücksicht auf die Entfernung s aus. Wir wollen die Lage eines jeden Punktes der festen Ebene durch Coordinate x, y, z bestimmen, die auf einander senkrecht sind, und die von C , dem obern Ende der angezogenen Linie, an gerechnet werden. Die Achse des x sey gleichlaufend dem kürzesten Abstände CE der verticalen Linie von der mit ihr parallelen Ebene; die Achse des y sey horizontal, und folglich die auf beide senkrechte Achse des z vertical. Endlich sey z' die verticale Tiefe eines unbestimmten Punktes Z unter C , und s die Entfernung dieses Punktes von irgend einem Elemente der Ebene, also

$$s^2 = x^2 + y^2 + (z + z')^2.$$

Nach diesen Bezeichnungen ist die verticale Attraction der ganzen festen Ebene auf einen Punkt Z

$$= \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{(z + z')}{s} \cdot \varphi(s),$$

und man findet die Attraction für die ganze Linie, wenn man dieses Integral mit dz' multiplicirt, und das Integral in Beziehung auf z' zwischen den Grenzen $z' = 0$ und $z' = \infty$ sucht.

Setzen wir, wie in §. 1., $\int ds \cdot \varphi(s) = c - \Pi(s)$, wenn dieses Integral von $s = 0$ an gerechnet wird,

L

und c den Werth bedeutet, welchen es für $s = \infty$ erlangt, so ist, wenn dieses Integral mit $s = f$ verschwinden sollte,

$$\int ds \cdot \varphi(s) = c - \Pi(s) - c + \Pi(f).$$

Folglich ist der bis zu $s = \infty$ erstreckte Werth des Integrals

$$\int dz' \cdot \frac{z+z'}{s} \cdot \varphi(s) = \Pi(f),$$

und es bedeutet hier f denjenigen Werth, welchen s in C erhält, oder den Abstand des obern Punktes der Linie von dem anziehenden Theilchen der Ebene. Die Attraction der ganzen festen Ebene ist also =

$$\iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \Pi(f).$$

Es sey nun ω der Winkel, welchen s mit der durch C gelegten horizontalen Ebene macht, und ϑ der Winkel, welchen die Projection von s auf die horizontale Ebene, mit der Achse der y bildet; so ist

$$x = s \cdot \sin. \vartheta \cdot \cos. \omega; \quad y = s \cdot \cos. \vartheta \cdot \cos. \omega.$$

und $dx \cdot dy \cdot dz = s^2 ds \cdot d\vartheta \cdot d\omega \cdot \cos. \omega.$

Nach der Natur der hier betrachteten Attractionen, welche auf unmerkliche Entfernungen eingeschränkt sind, ist es einerley, ob man die Dicke der festen Ebene als endlich oder als unendlich annimmt, wir wollen sie also als unendlich ansehen. Ist nun

$$\int s ds \cdot \Pi(s) = c' - \Psi(s) \text{ und } c' \text{ der Werth des Integrals für } s = \infty, \text{ so ist}$$

$$\int s^2 ds \cdot \Pi(s) = -s \cdot \Psi(s) + \int ds \cdot \Psi(s) + \text{const.}$$

Hier werden die Integrale von $s=f$ an gerechnet, und da für $s=\infty$ die Function $s. \Psi(s)$ verschwindet, so ist $const. = f. \Psi(f)$; und der vollständige Werth des Integrals ist

$$\int s^2. ds. \Pi(s) = f. \Psi(f) + \int ds. \Psi(s).$$

Ich setze ferner $\int ds. \Psi(s) = c'' - \Gamma(s)$, wenn dieß Integral mit $s=0$ verschwindet, und $=c''$ wird für $s=\infty$. Es läßt sich leicht übersehen, daß dann der auf die Grenzen $s=f$ und $s=\infty$ eingeschränkte Werth des Integrals $=\Gamma(f)$ wird, so daß man hat

$$\int s^2. ds. \Pi(s) = f. \Psi(f) + \Gamma(f).$$

Unser dreyfaches Integral verwandelt sich dem zu Folge in folgendes zweyfache Integral

$$\iint d\vartheta. d\omega. \cos. \omega. [f. \Psi(f) + \Gamma(f).]^*)$$

Wir wollen uns jetzt eine durch die angezogene Linie CD und die Achse der x gehende Ebene denken, und untersuchen, wie diese von der festen Ebene nach verticaler Richtung angezogen wird. Man findet diese Attraction, indem man die vorige Function mit da multiplicirt und integriert. Es ist aber $a=f. \sin. \vartheta. \cos. \omega$, und, wenn bloß f veränderlich angenommen wird, $da=df. \sin. \vartheta. \cos. \omega$. Die gesuchte verticale Attraction ist also

$$= \iiint df. d\vartheta. d\omega. \sin. \vartheta. \cos.^2 \omega. [f. \Psi(f) + \Gamma(f)],$$

*) In dem Originale sind die Buchstaben s und f nicht zu unterscheiden; ich hoffe, daß meine Unterscheidung beider die richtige ist.

Br.

und das Integral muß in Beziehung auf f von $f=0$ bis $f=\infty$ genommen werden. Nach dem Vorigen ist für diese Grenzen

$$\int f. df. \Psi(f) = -f. \Gamma(f) + \int df. \Gamma(f) = \int df. \Gamma(f),$$

weil für $f=\infty$, das Product $f. \Gamma(f)=0$ ist. Da

wir nun §. 1. $\int f. df. \Psi(f) = \frac{1}{2\pi} \cdot H$ gesetzt haben, so

ist das vorige dreyfache Integral =

$$\frac{H}{\pi} \iint d\omega. d\vartheta. \sin.\vartheta \cos.^2\omega.$$

Nimmt man das Integral in Beziehung auf ω von $\omega=0$ bis $\omega=\frac{1}{2}\pi$, und in Beziehung auf ϑ von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=\pi$, so wird

$$\iint d\omega. d\vartheta. \sin.\vartheta. \cos.^2\omega = \frac{1}{2}\pi,$$

also endlich. Folglich ist die *gesamte verticale Attraction* der festen Ebene auf die gegen sie senkrechte Ebene $= \frac{1}{2}H$. Diese Attraction ist es, die wir vorhin mit ρ bezeichneten, oder mit ρ' , wenn die anziehende Masse mit dem Flüssigen von einerley Materie ist; also ist auch hier

$$\rho' = \frac{1}{2}H,$$

wie es oben die Vergleichung beider Methoden ergab.

Man überfieht auf diese Art, eben sowohl nach der einen als nach der andern dieser Methoden, nicht bloß die Gleichheit der Kräfte ρ und $\frac{1}{2}H$, von denen die haarröhren-artigen Erscheinungen abhängen, sondern auch ihre Ableitung aus den Attractionskräften der Körpertheilchen, welche ebenfalls die Verwandtschaften hervorbringen.

Die *Haarröhrchen-Kraft* ist nichts anders, als die Modification dieser anziehenden Kräfte, welche von der Krümmung der Oberfläche (nach der Ansicht der in §. 1. aus einander gesetzten Methode), oder von der Lage der anziehenden Ebenen (nach der zweyten, eben ausgeführten Methode), abhängt; dagegen scheinen die *Verwandtschaften* die Attractivkräfte selbst zu seyn, so fern sie mit ihrer völligen Gewalt wirken.

K. *Betrachtung einzelner Fälle.*

15. Die am Ende von §. 13. gefundene Gleichung $gDV = (2\rho - \rho')c$, giebt für einen Cylinder vom Halbmesser $= l$, in welchem das Flüssige zu der mittlern Höhe $= q$ steigt,

$$2\rho - \rho' = \frac{1}{2}gD \cdot lq;$$

und man findet daher für jede andere Röhre zur Vergleichung mit der kreisförmig cylindrischen das *Volumen*

$$V = \frac{1}{2}l \cdot q \cdot c.$$

Diese Gleichung zeigt, daß unter allen prismatischen Röhren von gleichem innern Querschnitte, der hohle Cylinder die geringste Quantität des Flüssigen über das Niveau erhebt, weil sein Umfang der kleinste ist.

Nennt man b den Querschnitt der Röhre, und h die mittlere Höhe aller Punkte der Oberfläche des in ihr angehobenen Flüssigen, so ist $V = hb$, und folglich für jede Röhre

$$h = \frac{lq}{2b}.$$

In diesen Formeln muß man q , V , h und $2\rho - \rho'$ negativ annehmen in den Fällen, wenn das Fluidum sich in der Röhre *senkt*, statt in ihr zu steigen.

Uebrigens gelten diese Formeln auch für ein *eckiges Prisma*; denn sie könnten nur in den Ecken auf eine Entfernung, die der merklichen Wirkungssphäre der Röhrenwand gleich wäre, fehlerhaft seyn; da aber diese Entfernung unmerklich ist, so kann auch der gesammte Irrthum nicht anders als unmerklich seyn. Die Formeln gelten also ohne Ausnahme in allen Fällen.

Sind die Querschnitte verschiedener *prismatischer Röhren ähnliche Figuren*, so ist der Inhalt b dem Quadrate des Umfangs c proportional, und also die Höhe h diesem Umfange umgekehrt proportional. Eine leichte Folgerung hieraus ist, daß in prismatischen Röhren, deren Querschnitte reguläre, um einerley Kreis beschriebene Polygone sind, h gleich groß ist, oder daß in ihnen das Flüssige sich zu einerley mittlern Höhe erhebt.

Gellert hat einige Beobachtungen über das Aufsteigen des Wassers in *prismatischen Glasröhren mit rechteckigen und dreieckigen Grundflächen* angestellt *), und fand, daß bey ähnlichen Grundflächen die Höhen den ähnlich liegenden Seiten umgekehrt proportional sind, wie das unsere Formeln ergeben. Er glaubte auch schließen zu dürfen, daß das Wasser in rechteckigen und trian-

*) *Mémoires de l'acad. de Petersbourg.* Tom. XII.

gulären Röhren von gleichen Grundflächen gleich hoch stiege; doch entscheidet er hierüber nicht völlig. Er führt nicht genug Data an, um die Beobachtungen mit der Theorie vergleichen zu können; indessen giebt diese, wenn die eine Grundfläche ein Quadrat, die andere ein gleichseitiges Dreyeck ist, und beide von gleichem Inhalte sind, die Höhen wie $2:\sqrt[4]{3^3}$, oder beynahe wie 7:8.

Ist das Prisma *rechteckig*, und die grössere Seite der Basis $=a$, die andere sehr klein $=l$, so ist $b=a+l$ und $c=2(a+l)$, folglich

$$h = \left(1 + \frac{l}{a}\right) q.$$

Für den Fall also, da a sehr groß gegen l ist, hat man $h=q$: oder, zwischen zwey einander sehr nahen und *parallelen Ebenen* steigt das Flüssige sehr nahe so hoch, als in einer cylindrischen Röhre von gleicher Materie, wenn die Entfernung der Ebenen von einander dem Halbmesser des Cylinders gleich ist. Eine Regel, die wir schon oben §. 9. gefunden haben.

In diesen Formeln bezeichnen q und h die *mittlere Höhe* der verschiedenen Punkte der Oberfläche; diese Höhe ist also verschieden von der Höhe desjenigen Punkts der Oberfläche des Flüssigen, der in der Achse einer verticalen cylindrischen Röhre liegt, und diese letztere Höhe ist nicht genau dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional. Wenn das Flüssige die Wände

der Röhre vollkommen naß macht, wie Wasser und Alkohol das Glas benetzen, so muß man, um eine Gröſſe zu erhalten, die dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional iſt, zu der Höhe in der Achſe der Röhre noch ein Sechſtel des Durchmeſſers der Röhre addiren. Iſt nämlich die Höhe in der Achſe der Röhre $= q$, und der Halbmesser der Röhre $= l$, ſo iſt das Volumen des bis zum niedrigſten Punkte der Oberfläche erhobenen Flüſſigen $= \pi l^2 q$. Nimmt man nun an (wie man in dieſem Falle nach §. 12. darf), der oberhalb dieſes Punkts liegende Meniscus ſey durch eine hohle Halbkugel begrenzt, ſo iſt das Volumen des Meniscus $= \frac{1}{3} \pi l^3$, alſo das Volumen der ganzen Säule $= \pi l^2 (q + \frac{1}{3} l)$. Dieſes Volumen muß dem Umfange der Baſis $= 2\pi l$ proportional ſeyn; alſo muß $l(q + \frac{1}{3} l)$ eine in verſchiedenen cylindriſchen Röhren conſtante Gröſſe ſeyn; und folglich iſt die Gröſſe $q + \frac{1}{3} l$ dem Durchmeſſer der Röhre umgekehrt proportional.

Man denke ſich eine *heberförmig gekrümmte* Glasröhre, deren kürzerer Schenkel ein Haarröhrchen, der längere Schenkel dagegen ſo *breit* iſt, daß er ein anſehnliches Gefäß bildet. Gießt man in dieſes Gefäß *Alkohol*, ſo erhebt dieſer ſich im Haarröhrchen über das Niveau im Gefäße, und fährt fort, ſich zu erheben, wenn man mehr Alkohol in das Gefäß eingießt, indem der Unterſchied der Höhe im Haarröhrchen und im Gefäße ſo lange gleich bleibt, bis der Alkohol das Ende

des Haarröhrchens erreicht hat. Führt man, nachdem er zu dieser Höhe gestiegen ist, noch fort, Alkohol in das Gefäß zu gießen, so wird die Oberfläche im Haarröhrchen immer weniger und weniger concav, und wenn im Gefäße die Oberfläche in einerley Niveau mit dem Ende des Haarröhrchens gekommen ist, so wird die Oberfläche im Haarröhrchen eben und horizontal seyn.

Nun haben wir oben (§. 12.) gesehen, daß, wenn die Wirkung des Glases auf ein Flüssiges größer ist, als die Wirkung der Theilchen des Flüssigen auf einander, eine Schichte des Flüssigen sich an die Wände des Glases anlegt, und einen neuen Körper bildet, dessen Attraction gegen das Flüssige mit der Wirkung der flüssigen Theilchen auf einander einerley ist. Bey Flüssigkeiten, die das Glas vollkommen befeuchten, kann man daher die Wirkung des Glases auf das Flüssige, der gegenseitigen Einwirkung der Theilchen des Flüssigen gleich setzen. In dem Falle, wenn das Niveau im Gefäße gerade durch die Oeffnung des Haarröhrchens geht, verhält sich dann also alles eben so, als wenn in einem größern Gefäße, worin Alkohol im Gleichgewicht steht, eine unbestimmte Masse Alkohol sich zum Theil in eine feste Masse verwandelt, und ein Haarröhrchen gebildet hätte, in welchem sich etwas flüssiger Alkohol in Verbindung mit dem übrigen nicht consolidirten Alkohol befände. Offenbar würde in diesem Falle das Gleichgewicht unverändert,

und die Oberfläche im Haarröhrchen horizontal, und mit der andern Oberfläche im Niveau bleiben. Es ist folglich nicht allgemein wahr, daß die Oberfläche des Alkohols mit den Wänden des Glasgefäßes alle Mal einerley Winkel bildet, sondern dieß gilt nur, so lange das Ende der Wände nicht erreicht ist; in diesem letztern Falle bleibt offenbar die Wirkung der Wände auf das Flüssige nicht mehr dieselbe.

Fährt man immer noch fort, Alkohol in das Gefäß einzugießen, nachdem er schon das Niveau des Endes der Haarröhre erreicht hat, so entsteht am Ende des Haarröhrchens ausserhalb ein Tropfen, der immer convexer, und endlich eine Halbkugel wird; und wenn dieß geschieht, so ist der Alkohol im Gefäße gerade so hoch über der durch das Ende des Haarröhrchens gehenden Horizontalebene gestiegen, als er Anfangs, ehe er das Ende des Haarröhrchens erreichte, in diesem sich über dem Niveau des Alkohols im Gefäße erhoben hatte. Denn der Druck, welcher von der Convexität des Tropfens in dem Falle herrührt, ist gleich der saugenden Kraft (*succion*), welche in dem andern Falle durch die Concavität bewirkt wird. Gießt man endlich noch etwas Alkohol in das Gefäß, so verschwindet der Tropfen; er fängt nämlich an, sich zu verlängern, und muß in den Punkten seiner Oberfläche bersten, wo der Krümmungshalbmesser sich vergrößert.

Aehnliche Erscheinungen zeigen sich an einer Säule Alkohols, die in einer gläsernen verticalen Haarröhre hängt. Der Alkohol bildet am untern Ende der Röhre einen Tropfen, der desto convexer wird, je länger die flüssige Säule in der Röhre war. Wenn der Tropfen eine Halbkugel ist, so findet man die Länge der Säule doppelt so groß, als die Höhe, zu welcher sich der Alkohol in dieser Röhre erhebt, wenn sie mit dem untern Ende in ein Gefäß voll Alkohol getaucht wird. Nimmt man die flüssige Säule noch länger, so verbreitet sich der Tropfen über die untere Grundfläche der Röhre, und es entsteht ein neuer Tropfen, der immer convexer wird, und endlich eine Halbkugel bildet, deren Durchmesser dem äußern Durchmesser der Röhre gleich ist; und wenn dann die Säule im Gleichgewichte ist, so ist ihre Länge so groß, als die Summe der Höhen, welche der Alkohol in zwey Röhren erreichen würde, deren eine den innern Durchmesser, die andere den äußern Durchmesser der Röhre zum innern Durchmesser hätte. Giebt man der flüssigen Säule im Innern der Röhre eine noch größere Länge, so tröpfelt etwas von dem Flüssigen weg. — Alle diese Resultate bestätigt die Erfahrung.

L. Betrachtung des Falles, wenn in einem Haarröhrchen zwey verschiedene Fluida über einander stehen, und Versuche von Hn. Gay-Lussac.

16. „Wenn sich in einem Gefäße verschiedene Flüssigkeiten in horizontalen Schichten über

„einander befinden, und man hat in diese Flüssig-
 „keiten eine gerade, prismatische, senkrecht ste-
 „hende Röhre mit ihrem untern Ende eingetaucht:
 „so übertrifft das Gewicht des in der Röhre wirk-
 „lich enthaltenen Flüssigen das Gewicht desjenigen
 „Flüssigen, welches die Röhre *ohne* Einwirkung der
 „Haarröhrenkraft enthalten würde, um eben so
 „viel, als das Gewicht des Flüssigen beträgt, wel-
 „ches sich in der Röhre über das Niveau in dem
 „Falle erheben würde, wenn sich in dem Gefäße
 „nur das einzige Flüssige befände, in welchem sich
 „das untere Ende der Röhre befindet.“ Denn of-
 fenbar wirkt auf das Flüssige, welches das untere
 Ende der Röhre berührt, die Röhre und dieses
 Flüssige selbst eben so, als wenn die andern Flüs-
 sigkeiten nicht vorhanden wären; die übrigen in
 der Röhre enthaltenen Flüssigkeiten sind um
 etwas Merkliches von der untern Basis derselben
 entfernt, daher die Einwirkung der Röhre auf sie
 gar nichts beytragen kann, um sie zu heben oder
 nieder zu drücken; und was die gegenseitige Wir-
 kung dieser Flüssigkeiten eine auf die andere betrifft,
 so würde sie sich offenbar aufheben, wenn alle zu-
 sammen eine feste Masse bildeten, welches sich an-
 nehmen liesse, ohne daß dadurch das Gleichge-
 wicht gestört werden würde. „Hieraus folgt, daß,
 „wenn man ein Haarröhrchen mit seinem untern
 „Ende in ein Flüssiges eintaucht, und dann eine
 „andere Flüssigkeit, die über die erstere stehend
 „bleibt, in das Haarröhrchen gießt; das Gewicht

„beider Flüssigkeiten, welche in der Röhre über
 „dem Niveau angehoben sind, eben so groß seyn
 „muss, als das Gewicht des ersten, Anfangs allein
 „darin enthaltenen Flüssigen.“

Die Oberfläche des zu oberst stehenden Flüssigen muss in diesem Falle offenbar eben dieselbe seyn, als in dem Falle, wenn die Röhre in ein bloß mit diesem Flüssigen gefülltes Gefäß getaucht würde; da hingegen, wo beide Fluida sich berühren, haben sie eine gemeinschaftliche Oberfläche, deren Gestalt anders ausfallen wird, als wenn jedes Fluidum sich einzeln in der Röhre befände; und es ist interessant, diese Gestalt zu bestimmen.

Wir wollen zu dem Ende annehmen, die innere Oberfläche der eingetauchten Röhre sey ein gerader, verticaler und sehr enger Cylinder. In diesem Falle kann man sowohl die gemeinschaftliche Oberfläche beider Flüssigkeiten, als auch die Oberfläche, welche jede einzeln in der Röhre annehmen würde, als Kugelsegmente von verschiedenen Halbmessern ansehen. Es sey ω der Winkel, welchen die Oberfläche des obern Flüssigen mit der innern Röhrenwand macht; ω' eben dieser Winkel, den das untere Flüssige mit der innern Röhrenwand machen würde, wenn es allein in der Röhre wäre; und ϑ der Winkel, welchen die gemeinschaftliche Oberfläche beider Flüssigkeiten mit der Oberfläche der Röhre bildet. Dabey ist zu bemerken, daß diese Winkel nicht diejenigen sind, welche die verschiedenen Oberflächen an den Be-

rührungspunkten mit der Röhrenwand machen, sondern daß darunter, wie mehrmahls erwähnt worden, die Winkel verstanden werden, welche Tangential-Ebenen, die an der Grenze der Wirkungssphäre der Röhre an die Oberfläche gelegt sind, mit der Röhrenwand bilden. Wir wollen mit K und H für das obere Flüssige eben das bezeichnen, was diese Buchstaben in §. 1. (S. 43.) bedeuteten; und mit K' und H' dieselben Größen für das untere Flüssige. Endlich mögen K_1 und H_1 das bedeuten, was aus K und H wird, wenn man nicht die Wirkung des obern Flüssigen auf sich selbst, sondern seine Wirkung auf das untere Flüssige betrachtet; da dann, weil Wirkung und Gegenwirkung gleich sind, K_1 und H_1 zugleich auch das bedeuten muß, was aus K' und H' wird, wenn man die Wirkung des untern Flüssigen auf das obere betrachtet. Man denke sich nun einen unendlich engen, längs der Achse der Röhre fortgehenden, dann sich unter der Röhrenwand hin krümmenden, und an der Oberfläche im Gefäße sich endenden Kanal. In diesem Kanale wird das *oben stehende Flüssige erstlich* mit einer Kraft $= K - \frac{H \cdot \cos. \varphi}{l}$ an seiner obern Fläche nach unten zu getrieben, wenn l den innern Halbmesser der Röhre bedeutet, und *zweytens* an der gemeinschaftlichen Oberfläche beider Flüssigkeiten mit einer Gewalt $= K + \frac{H \cdot \cos. \varphi}{l}$ aufwärts getrieben, wegen der Wirkung des obern Fluidums auf

sich selbst; und *drittens* wird es hier mit einer Kraft $= K_1 + \frac{H_1 \cdot \cos.\vartheta}{l}$ niederwärts getrieben, wegen der Einwirkung des untern Flüssigen auf das obere. Das obere Flüssige des Kanals wird also nieder gezogen mit einer Kraft

$$= K_1 + \frac{(H_1 - H) \cos.\vartheta}{l} - \frac{H \cdot \cos.\omega}{l}.$$

Dagegen wird das *unten stehende Flüssige* niederwärts gezogen, *erstlich* wegen der Einwirkung dieses untern Flüssigen auf sich selbst, mit einer Kraft $= K' - \frac{H' \cdot \cos.\vartheta}{l}$; *zweitens* wegen der Wirkung des obern Flüssigen auf dasselbe mit einer Kraft $= -K_1 + \frac{H_1 \cos.\vartheta}{l}$; also überhaupt mit der Kraft

$$= K' - K_1 + \frac{(H_1 - H') \cos.\vartheta}{l}.$$

Die *gesamte* auf das Flüssige im Kanale wirkende Kraft ist also

$$= K' + \frac{(2H_1 - H - H') \cos.\vartheta}{l} - \frac{H \cdot \cos.\omega}{l}.$$

Wäre das untere Flüssige allein vorhanden, so wäre diese Kraft $= K' - \frac{H' \cos.\omega'}{l}$. Da nun aber das Gewicht des in der Röhre enthaltenen Flüssigen in beiden Fällen einerlei ist, wie wir gezeigt haben, so müssen diese Kräfte gleich seyn; wir haben folglich

$$\frac{H \cdot \cos.\omega}{l} = \frac{H' \cdot \cos.\omega'}{l} + \frac{(2H_1 - H - H') \cos.\vartheta}{l}$$

und also

$$\cos.\vartheta = \frac{H' \cdot \cos.\omega' - H \cdot \cos.\omega}{H + H' - 2H_1}.$$

Bezeichnet man mit $\bar{H}$ den Werth, welchen H erlangt, wenn man die Wirkung des obern Flüs-

figen auf die Materie der Röhre betrachtet, und mit $\bar{H}'$ das, was aus H' wird, wenn man die Wirkung des untern Flüssigen auf die Materie der Röhre betrachtet, so ist $2\bar{H} - H = H \cdot \cos.\omega$ und $2\bar{H}' - H' = H' \cdot \cos.\omega'$ *), und

$$\cos.\vartheta = \frac{2\bar{H}' - 2\bar{H} + H - H'}{H + H' - 2H_1}.$$

Ist aber ϑ bekannt, so findet man nach den im Vorigen vorkommenden Lehrrätzen leicht die Differentialgleichung für die gemeinschaftliche Oberfläche bei jeder Weite und Figur der Röhre, und ϑ ist noch immer der Winkel, den eine an die gemeinschaftliche Oberfläche beider Flüssigkeiten an der Grenze der merklichen Wirkungssphäre der Röhrenwand gelegte Tangential-Ebene mit der Röhrenwand macht.

Diese Formeln setzen eigentlich voraus, daß die Flüssigkeiten die Wände der Röhre nicht vollkommen befeuchten. Wir haben gesehen (§. 12.), daß, im Fall die Wirkung der Röhre auf das Flüssige größer ist, als die Wirkung der flüssigen Theilchen auf einander, die Röhrenwand sich mit einer Schichte des Flüssigen überzieht; sind also mehrere Flüssigkeiten in der Röhre enthalten, welche alle sie vollkommen befeuchten, so bilden diese innerhalb der Röhre verschiedene Schichten, bei denen die strenge Anwendung der Formeln wegfällt.

Wir

*) Diese Gleichungen folgen aus §. 13, wo $2\xi - \xi' = \xi' \cdot \cos.\omega$ gefunden wurde.
Br.

Wir wollen hier nur eine Glasröhre betrachten, welche *Wasser* und *Queckfilber* enthält, und annehmen, die Röhrenwände wären sehr befeuchtet und mit einer sehr dünnen Wasserschicht überzogen. In diesem Falle kann man die Röhre selbst als aus Wasser bestehend ansehen, und hat $H_1 = \overline{H'}$ und $\overline{H} = H$. Es wird also $\cos.\vartheta = -1$ und $\vartheta = \pi$; das heist, die Oberfläche des Queckfilbers wird convex und beinahe eine Halbkugel, wenn die Röhre sehr enge ist. Man kann sich von diesem Resultate auch durch Anwendung derjenigen Schlüsse überzeugen, durch welche in §. 12. bewiesen wurde, daß die Oberfläche des Flüssigen in einer sehr engen Röhre eine convexe Halbkugel wird, wenn die Wirkung der Röhre auf das Flüssige unmerklich ist.

Nach dem Vorigen ist, wenn man auf die Wirkung der Schwere nicht Rücksicht nimmt, die *Depression des Queckfilbers* $= -\frac{H' \cos.\omega'}{gl} = \frac{H' - 2H_1}{gl}$, wenn man die auf der Oberfläche stehende Wasserfäule nicht mit in Betrachtung zieht. Ist die Höhe dieser Säule $= b$ und des Queckfilbers Dichtigkeit $= D$, die des Wassers $= 1$, so wird die Depression des Queckfilbers

$$= \frac{H' - 2H_1}{gl} + \frac{b}{D}.$$

Wäre eben diese Röhre mit *Alkohol* befeuchtet, und man nennt H die Wirkung des Alkohols

M

auf das Queckfilber, $'b$ die Höhe der Alkoholfäule, welche über die Oberfläche des Queckfilbers steht, und $'D : 1$ das Verhältniß der specifischen Schwere des Queckfilbers zu der des Alkohols, so wird jetzt die Depression des Queckfilbers

$$= \frac{H' - 2'H}{gl} + \frac{'b}{'D}.$$

Da die Wirkung der Wassertheilchen auf einander viel größer ist, als die der Alkoholtheilchen auf einander, wie wir bald sehen werden, so ist es wahrscheinlich, daß die Wirkung des Wassers auf das Queckfilber größer ist, als die des Alkohols auf dasselbe, oder $'H < H_1$, und dieser Unterschied müßte bei Versuchen merklich werden.

Herr Gay-Lussac hat sich bemühet, diesen Unterschied zu bestimmen. Er bediente sich einer sehr befeuchteten Glasröhre, deren innerer Durchmesser mit Hülfe des Gewichts der sie füllenden Queckfilberssäule sehr genau bestimmt, und $= 1,29441$ Millim. gefunden war. Er tauchte diese Glasröhre mit dem untern Ende in Queckfilber, und ein Mittel aus zehn nahe übereinstimmenden Versuchen gab ihm die Depression des Queckfilbers $= 7,4148$ Millim. Das Queckfilber hatte bei seinem Eintritte in die Röhre etwas von dem an den Wänden hängenden Wasser auf seiner Oberfläche gesammelt, und die Länge der so gebildeten Wasserssäule war $= 7,730$ Millim.; die Beobachtungen wurden bei $17^{\circ},5$ Temperatur angestellt *). Die

*) Wahrscheinlich nach der hunderttheiligen Skale. Br.

wahre, um das Gewicht dieser Wasserschale verminderte, Depression des Quecksilbers war also $= 6,8464$ Millim., und dieses ist für diese Flüssigkeiten der Werth von $\frac{H' - 2H}{gl}$.

Als Herr Gay-Lussac dieselbe Röhre mit Alkohol vom specifischen Gewichte $= 0,81971$ benetzt hatte, fand er abermahl aus zehn wenig verschiedenen Beobachtungen die Depression des Quecksilbers $= 8,0261$ Millim., und die Länge der oberhalb stehenden Alkoholsäule $= 7,4735$ Millim.; die Temperatur war $17^{\circ},5$. Diese Beobachtung giebt $\frac{H' - 2H}{gl} = 7,5757$ Millim., und dieser Werth ist, wie es voraus zu errathen war, merklich grösser, als er bei Wasser und Quecksilber sich gefunden hatte.

Herr Gay-Lussac hat auch die Krümmung der concaven Oberfläche des Quecksilbers in der vorigen Röhre beobachtet, indem er den Pfeil derselben mass *), und er hat diesen eben so gefunden, wie bei der hohlen oberen Fläche des Wassers und des Alkohols; diese Oberflächen sind also unter einander gleich, und zwar bilden sie Halbkugeln von eben dem Durchmesser wie die Röhre, der vorher gehenden Theorie entsprechend.

„Wenn ein Gefäß von unbestimmter Grösse
„nur zwei verschiedene Flüssigkeiten enthält, und

*) Vergl. S. 27.

„man taucht eine gerade prismatische Röhre vertikal in dasselbe so unter, daß das obere Ende derselben sich in dem einen, das untere Ende in dem andern Flüssigen befindet, so ist das Gewicht der durch die Haarröhren-Kraft innerhalb der Röhre erhobenen Masse des untern Flüssigen über das Niveau desselben im Gefäße, gleich der Summe von dem Gewichte eines gleichen Volumens des obern Flüssigen, und dem Gewichte derjenigen Masse des untern Flüssigen, welche sich in diesem Prisma über das Niveau erheben würde, wenn es kein zweites Flüssiges in dem Gefäße gäbe; weniger dem Gewichte der Masse des obern Flüssigen, welche sich in demselben Prisma über das Niveau erheben würde, wenn dieses Flüssige sich allein in dem Gefäße befände, und das untere Ende der Röhre darin eingetaucht wäre.“

Um dieses zu beweisen, muß man bemerken, daß die Wirkung der Röhre und des *untern* Flüssigen auf den in der Röhre enthaltenen Theil dieses Flüssigen eben so groß ist, als wenn sich dieses Flüssige allein im Gefäße befände, daß also dieser Theil des Flüssigen in beiden Fällen gleich stark aufwärts gezogen wird, und zwar mit einer Kraft, die dem Gewichte desjenigen Volumens eben dieses Flüssigen gleich ist, welches sich in der Röhre über das Niveau erheben würde, wenn es das einzige Flüssige in dem Gefäße und der Röhre wäre. Auf gleiche Weise ist die Kraft, mit welcher das

zuoberst stehende und im obern Theile der Röhre enthaltene Flüssige durch die Röhre und das die obere Oeffnung umgebende Flüssige niederwärts gezogen wird, gerade so groß, als die aufwärts gerichtete Kraft in dem Falle, da bloß das zuoberst stehende Flüssige vorhanden, und die Röhre mit dem untern Ende darin eingetaucht wäre; und diese Kraft ist also gleich dem Gewichte desjenigen Theiles des obern Flüssigen, welches sich in diesem letztern Falle in dieser Röhre über das Niveau erheben würde. Endlich wird das gesammte in der Röhre, oberhalb dem Niveau des untern Fluidums, enthaltene Flüssige niederwärts gedrückt durch sein eigenes Gewicht, hingegen aufwärts durch das Gewicht einer gleich hohen Säule des obern Flüssigen. Vereiniget man diese Kräfte, so findet man gerade, was der Lehrsatz angiebt. Durch ähnliche Schlüsse läßt sich ohne Schwierigkeit bestimmen, wie die Sache sich verhalten würde, wenn noch mehrere Flüssigkeiten in dem Gefäße vorhanden wären.

M. Noch einige Theoreme und einzelne Bemerkungen.

17. Wir haben bisher immer die untere Basis der prismatischen Röhre, gleich viel, von welcher Figur sie sey, als horizontal angesehen; aber wenn sie auch *geneigt* ist, so wird doch die vertikale Attraction der Röhre und des sie umgebenden Flüssigen gegen die in der Röhre enthaltene Masse die-

felbe feyn, als wenn die Basis horizontal wäre, und es muß in beiden Fällen das Gewicht der über das Niveau erhobenen flüssigen Masse gleich feyn. Stellt man sich nämlich, wie wir schon oben thaten, die innere Oberfläche der prismatischen Röhre in das Fluidum verlängert vor, so daß die Anfügung wegen ihrer unendlich dünnen Wände die Wirkung des umgebenden Flüssigen auf das in der Röhre enthaltene Flüssige nicht ändert; so ist es einleuchtend, daß, wenn man die erste Röhre in unendlich kleine vertikale Säulen zerlegt, jede dieser Säulen eben so die Erhebung des Flüssigen im Innern beider Röhren zu bewirken strebt, als wenn die Basis horizontal wäre. Die Summe dieser Wirkung ist also auch hier $= 2pc$.

„Wenn die prismatische Röhre, welche mit „ihrem untern Ende in das Flüssige eines unbegrenzten Gefäßes eingetaucht ist, eine *Neigung* „gegen den Horizont hat, so ist das Volumen des „in der Röhre über das Niveau erhobenen Flüssigen, multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels der Röhrenwände gegen den Horizont, „immer gleich groß, bei jeder Neigung der Röhre.“ Dieses Produkt drückt nämlich das parallel mit den Seitenwänden zerlegte Gewicht des über das Niveau erhobenen Flüssigen aus, und eben dieses so zerlegte Gewicht muß der Einwirkung der Röhre und des äußern Flüssigen auf das in der Röhre enthaltene Flüssige das Gleichgewicht halten.

Da nun diese Kraft dieselbe bleibt, bei jeder Neigung der Röhre, so bleibt auch die mittlere vertikale Höhe über dem Niveau bei jeder Neigung der Röhre ungeändert.

„Wenn man in ein hohles rechtwinkliges und
„senkrecht stehendes Prisma ein anderes recht-
„winkliges Prisma von gleicher Materie senkrecht
„stellt, und diese verbundenen Prismen mit dem
„untern Ende in ein Flüssiges taucht, so ist das
„Volumen V des in dem *Zwischenraume* zwischen
„beiden Prismen über das Niveau erhobenen Flüs-
„sigen =

$$V = \frac{2q - q'}{gD} \cdot (c + c') = \frac{1}{2} l q \cdot (c + c'),$$

„wenn nämlich c den Umfang der innern Grund-
„fläche des weitem Prisma's, und c' den Umfang
„der äußern Grundfläche des kleinern Prisma's
„bedeutet.“ Ein Theorem, dessen Beweis sich
aus dem Vorhergehenden ohne Schwierigkeit füh-
ren läßt.

Sind die Grundflächen beider Prismen *ähnli-
che Polygone*, deren homologe Seiten parallel und
gleich entfernt von einander sind, so ist, wenn
man diesen Abstand $= l$ nennt, die Basis des
zwischen beiden Prismen enthaltenen Raumes
 $= \frac{1}{2} l \cdot (c + c')$; und wenn h die mittlere Höhe
des erhobenen Flüssigen bedeutet, so ist

$$V = \frac{1}{2} h l \cdot (c + c'), \text{ also hier } h = q.$$

Das heißt, die mittlere Höhe des gehobenen Flüs-

figen ist so groß, als die Höhe, welche eben dieses Flüssige in einer cylindrischen Röhre vom Halbmesser $= l$ erreichen würde. Aber auch allgemein läßt sich der Beweis aus §. 13. führen. Man könnte auch bestimmen, was erfolgen müßte, wenn die Prismen ganz oder zum Theil in ein mit mehreren Flüssigkeiten gefülltes Gefäß eingetaucht wären.

„Sind in dem Falle, von welchem das vorige Theorem handelte, die Prismen von *verschiedenen Materien*, und nennt man q für das grössere und q' für das kleinere Prisma, das, was wir vorhin mit q bezeichneten, so wird

$$V = \frac{(2q - q')c}{gD} + \frac{(2q' - q)c'}{gD}.$$

„Bedeuteten also q und q' die Höhen, zu welchen das Flüssige in zwei sehr engen cylindrischen Röhren vom Halbmesser l , die aus diesen Materien bestehen, sich über das Niveau erhebt, so ist auch

$$V = \frac{1}{2}l \cdot (qc + q'c'), \text{ und folglich } h = \frac{qc + q'c'}{c + c'}.$$

Auch hierfür läßt sich der Beweis aus dem Vorigen leicht führen. Man muß bemerken, daß q , q' negativ werden für Materien, welche in Haarröhrchen niedriger stehen, als das Niveau des umgebenden Flüssigen. — Wie man Formeln bestimmt für den Fall, daß das Fluidum zwischen *Ebenen* von mehrern verschiedenen Materien eingeschlossen wäre, läßt sich leicht übersehen.

Das vorige Theorem ergiebt, daß das Volumen V des durch die Haarröhren-Kraft *an der äußern Seite eines prismatischen Körpers* erhobenen Flüssigen, in welches jener Körper mit seinem untern Ende eingetaucht ist,

$$V = \frac{(2\varrho - \varrho') c}{gD} = \frac{1}{2} l q c$$

seyn muß, wenn c den horizontalen Umfang des Prisma's bedeutet. Dieses Volumen druckt die von der Haarröhren-Kraft herrührende *Gewichtszunahme* des Prisma aus. „Im Allgemeinen ist die „von der Haarröhren-Kraft herrührende Gewichtszunahme eines Körpers von willkürlicher Figur, „gleich dem Gewichte des durch diese Kraft über „das Niveau erhobenen Flüssigen; wird hingegen „das Flüssige unter das Niveau herab gedrückt, so „verwandelt sich die Vermehrung des Gewichts „in Verminderung. Folglich ist die gesammte „*Verminderung des Gewichts eines Körpers in „einem Flüssigen* gleich dem ganzen Gewichte „des Flüssigen, welches der Körper aus der Stelle treibt, theils dadurch, daß er selbst einen „Raum unterhalb des Niveau's füllt, theils dadurch, daß er vermöge der Haarröhren-Kraft „einen Raum um sich leer macht.“ Dieser Satz umfaßt, wie man sieht, das bekannte hydrostatische Gesetz über die Gewichts-Verminderung eingetauchter Körper; man erhält nämlich dieses, wenn man wegläßt, was von der Haarröhren-Kraft herrührt, und der Einfluß dieser ver-

schwindet ohnehin bei vollständiger Untertauchung gänzlich.

Um diesen Lehrsatz zu beweisen, wollen wir uns einen vertikalen Kanal vorstellen, der weit genug sey, um den Körper und das ganze Volumen des merklich gehobenen oder durch die Haarröhren-Kraft niedergedrückten Flüssigen zu fassen. Dieser Kanal gehe Anfangs innerhalb des Flüssigen niederwärts, krümme sich dann horizontal und endlich wieder aufwärts, behalte aber überall gleiche Weite. Offenbar muß beim Gleichgewichte das Gewicht der in beiden vertikalen Armen des Kanals enthaltenen Massen gleich seyn, und es muß folglich der Körper durch sein Gewicht den, vermöge der Haarröhren-Kraft um ihn entstehenden, leeren Raum compensiren; oder, wenn die die Haarröhren-Kraft das Flüssige erhebt, so muß er durch seine specifische Leichtigkeit das Gewicht des gehobenen Flüssigen mit ersetzen. Im ersten Falle hebt also die Haarröhren-Kraft den Körper, und dieser kann daher schwimmen, wenn auch sein specifisches Gewicht das des Flüssigen übertrifft. Im zweiten Falle trägt die Haarröhren-Kraft bei, den Körper in das Flüssige zu versenken.

Man denke sich ein rechteckiges sehr schmales Prisma, dessen Höhe $= h$, Länge $= a$, und Breite $= l$ ist, so auf ein Flüssiges gelegt, daß die grössere Seite desselben, a , horizontal sey, und wir wollen annehmen, dieser prismatische Körper

drücke das Flüssige unter sich nieder. Es sey q die mittlere Vertiefung des Flüssigen unter dem Niveau in einer cylindrischen Röhre vom Halbmesser $= l$, die aus der Materie des Prisma's besteht. Wir wollen endlich mit iD die Dichtigkeit des Prisma's bezeichnen, mit D die Dichtigkeit des Flüssigen, und mit x die Tiefe, bis zu welcher das Prisma sich unterhalb des Niveau's erstreckt. Die vorigen Theoreme ergeben für den Zustand des Gleichgewichts folgende Gleichung

$$gD \cdot alx + gD \cdot lq(a + l) = igD \cdot ahl,$$

weil nämlich in diesem Falle der am Umfange leer bleibende Raum $= lq \cdot (a + l)$ ist. Dieses giebt

$$x = ih - q \cdot \left(1 + \frac{l}{a}\right).$$

So lange also $h < \frac{q \left(1 + \frac{l}{a}\right)}{i - 1}$ ist, sinkt das Pris-

ma nicht ganz in dem Flüssigen unter, selbst wenn i größer als 1, das heisst, das Prisma specifisch schwerer als das Flüssige ist. Hierin liegt der Grund, warum *feine Stahl-Nadeln*, die durch einen Firnis oder durch eine kleine sie umgebende Luftschicht vor dem Nafswerden gesichert sind, an der Oberfläche des Wassers schwimmend bleiben. Legt man *zwei* solche gleiche Cylinder horizontal und parallel so auf das Wasser, dass sie sich berühren und etwas neben einander vorbeireichen, so bemerkt man, dass der eine über den anderen gleitet, um ihre Enden in einerlei Niveau

zu bringen. Denn wegen der Haarröhren-Kraft ist das Flüssige an dem Ende, wo einer dieser Cylinder den andern berührt, mehr niedergedrückt, als am andern Ende; die Basis am letztern Ende leidet also mehr Druck als am erstern, und jeder Cylinder strebt folglich, sich mehr und mehr mit dem andern zu vereinigen; und weil beschleunigende Kräfte Körper, die einmahl aus dem Zustande des Gleichgewichts gekommen sind, immer über den für das Gleichgewicht passenden Zustand hinaus treiben, so werden die Cylinder wechselseitig bei einander vorbeirücken und Oscillationen machen, die wegen des Widerstandes, den sie leiden, allmählich abnehmen und endlich verschwinden; und wenn so das Gleichgewicht hergestellt ist, sind die Enden der Cylinder im Niveau.

18. Die vorigen Untersuchungen zeigen, daß diese meine *neue Methode*, die Wirkung der Haarröhren-Kraft darzustellen, auf eine ganz einfache Weise zu eben den Resultaten führt, als meine *frühere Theorie*. Die Methode, welche ich in dieser Theorie [im ersten Haupttheile] dargestellt habe, hat aber doch einige ihr eigenthümliche Vorzüge. Sie lehrt die Natur der Oberfläche eines in einem haarröhren-artigen Raume enthaltenen Flüssigen kennen, und zeigt deutlich, daß in sehr engen cylindrischen Röhren diese Oberfläche sehr nahe kugelförmig ist, und daß folglich die Höhen der verschiedenen Punkte dieser Oberfläche über

dem Niveau sehr wenig verschieden sind. Auch läßt sich aus ihr folgern, daß, wenn *mehrere* Röhren von einerlei Materie mit ihrem untern Ende in dasselbe Flüssige eingetaucht werden, dieses Flüssige sich in ihnen allen gleich hoch erheben muß, wenn ihre Gestalt in dem Theile, wo das erhobene Flüssige sich befindet, gleich ist, der übrige Theil der Röhre mag, wie man will, gestaltet seyn. Dieses folgt nämlich nothwendig aus dem Gleichgewichte des Flüssigen in einem unendlich engen, längs der Achse jeder Röhre hingehenden, und dann unterhalb gekrümmten und an der Niveaufläche sich endenden Kanale; denn wenn die Röhren in dem Theile, in welchem das Flüssige sich darin erhebt, gleich geformt sind, so muß die Oberfläche des Flüssigen in der Röhre, und folglich die Wirkung des Flüssigen auf den Kanal, in den verschiedenen Röhren gleich seyn, und in allen diesen Kanälen ist Gleichgewicht vorhanden, wenn es in einem derselben Statt findet.

In einer Röhre von *ungleichförmiger Weite* kann es mehrere Fälle geben, für welche das Gleichgewicht bestehen kann. Schmelzt man z. B. ein engeres Haarröhrchen oben an ein weiteres an, so lassen sich die Durchmesser und die Längen oder Höhen beider Röhren so abmessen, daß bei vertikaler Lage derselben das Flüssige, welches sich bei dem Zustande des Gleichgewichts oberhalb des Niveau's befindet, einmahl bloß einen Theil der weitem Röhre erfüllt; zweitens aber, wenn es so

hoch steht, daß es die engere Röhre erreicht und zum Theil füllt, es hier zum zweiten Mahle zum Gleichgewichte gelangt. Verengert sich ein Haarröhrchen durch unmerkliche Uebergänge allmählich, so sind die verschiedenen Zustände des Gleichgewichts in demselben abwechselnd, der eine dauerhaft, der andere nicht (*stables et non stables*). Gleich Anfangs strebt das Flüssige, sich in der Röhre zu erheben; dieses Streben nimmt mit dem wirklichen Ansteigen der Oberfläche ab, verschwindet für den Zustand des Gleichgewichts, und wird darüber hinaus negativ, oder das Flüssige strebt dort, sich zu senken, und folglich ist dieses erste Gleichgewicht dauernd, weil das Flüssige, wenn man es etwas von diesem Zustande entfernt, dahin zurück zu kehren strebt. Führt man fort, das Flüssige mehr in der Röhre zu erheben, so nimmt wieder das Bestreben, zu sinken, ab, und wird Null für den zweiten Zustand des Gleichgewichts; darüber hinaus wird er positiv, das Flüssige strebt anzusteigen, und dieses Gleichgewicht ist also nicht Stand haltend. So würde, wenn man fortführe, der dritte Gleichgewichtszustand wieder dauerhaft seyn, der vierte nicht, und so weiter.

Endlich hat uns die Vergleichung beider Methoden das Verhältniß kennen gelehrt, worin die Größen ρ und ρ' , oder was auf eins hinaus kommt, die beiden Größen $\frac{1}{2}H$ und $\frac{1}{2}H'$ zu einander stehen, und zwar wird dieses Verhältniß vermittelt

des Winkels ω gegeben, welchen die Tangential-Ebenen, die an der Oberfläche des im Haarröhrchen enthaltenen Flüssigen an der Grenze der Wirkungssphäre der Röhrenwand gelegt werden, mit der Röhrenwand macht. Diese Grössen stellen die *Kräfte* dar, von denen die haarröhren-artigen Erscheinungen abhängen. Sie werden zwar durch die Attractivkräfte der Körpertheilchen bestimmt, von denen sie bloß Modificationen sind; sind aber unvergleichlich viel kleiner als diese Attractivkräfte selbst, welche, wenn sie mit ihrer ganzen Energie wirken, die *chemischen Verwandtschaften* ausmachen. Wenn für verschiedene Körper das Gesetz, wie Attraction von der Entfernung abhängt, einerlei wäre, so würden, wie wir schon bemerkt haben, die Werthe von ρ und ρ' den respectiven Intensitäten ihrer Attractionskräfte proportional seyn, nämlich den beständigen, aber bei verschiedenen Körpern ungleichen, Coëfficienten, in welche die gemeinschaftliche Function der Entfernungen, durch die das Gesetz der Attraction dargestellt wird, multiplicirt ist. „Die Werthe von ρ und ρ' beziehen sich dann „auf gleiche Volumina und nicht auf gleiche „Massen.“ Um dieses zu zeigen, wollen wir zwei Haarröhrchen von einerlei Halbmesser und von verschiedener Materie annehmen, worin aber ein Flüssiges sich auf einerlei Höhe erhebt. Wir wissen aus dem Vorigen, daß, wenn man in diesen Röhren zwei gleiche, unendlich kleine,

Volumina nimmt, die gegen das innere Flüssige einerlei Lage haben, ihre Wirkung auf dieses Flüssige ganz gleich seyn wird. Um also das Verhältniß der Attractionen bei gleichen Massen zu haben, muß man die Werthe von ρ durch die respectiven Dichtigkeiten der Körper dividiren.

Hieraus folgt, „dass sich also die Werthe „von ρ , ρ' und ω mit der *Temperatur* verändern „müssen.“ Wir wollen als Beispiel ein gläsernes Haarröhrchen annehmen, welches mit seinem untern Ende in ein das Glas vollkommen befeuchtendes Flüssiges, z. B. in Alkohol, getaucht ist. Die Höhe, bis zu welcher dieses Flüssige sich bei der Temperatur $= 0$ in der Röhre über das Niveau erhebt, sey $= q$, und bei wachsender Wärme vermindere sich die Dichtigkeit in dem Verhältnisse $1 - \alpha$ zu 1. Stellen wir uns nun einen längs der Achse des Haarröhrchens hingehenden, äußerst engen, Kanal vor, so wird die Wirkung des Meniscus, welcher oberhalb einer durch den niedrigsten Punkt der Oberfläche gelegten Horizontal - Ebene liegt, aus zwei Gründen vermindert. Erstlich, weil die Dichtigkeit des Meniscus geringer wird, nimmt seine Attraction in eben dem Verhältnisse ab; denn man muß natürlich annehmen, dass bei einerlei Substanz auch diese Attraction im Verhältnisse der Dichtigkeit stehe, so wie man es bei der Wirkung der Luftarten auf das Licht durch äußerst

ferst genaue Versuche wirklich gefunden hat. Zweitens vermindert sich die Wirkung des flüssigen Meniscus auf den Kanal offenbar mit der Dichtigkeit des im Kanal enthaltenen Flüssigen. Wegen dieser vereinigten Ursachen wird also der Werth von H im Verhältnisse des Quadrates der Dichtigkeit des Flüssigen vermindert, also in dem Verhältnisse $(1 - \alpha)^2 : 1$. Aber H , mit dem Halbmesser l der Röhre dividirt, giebt die Wirkung des Meniscus auf den Kanal an, welcher dem Gewicht des gehobenen Flüssigen das Gleichgewicht halten muß, und dieses Gewicht ist gleich dem Volumen, in die Dichtigkeit und Schwerkraft multiplicirt. Bedeutet also q' die Höhe über dem Niveau bei irgend einer Temperatur, welcher die Dichtigkeit $= 1 - \alpha$ zugehört, wenn die Dichtigkeit $= 1$ ist für die Temperatur $= 0$, so ist

$$\frac{H}{l} = gq \text{ und } \frac{H}{l} (1 - \alpha)^2 = g \cdot q' (1 - \alpha),$$

also

$$q' = q \cdot (1 - \alpha);$$

oder die Erhebung desselben Flüssigen in einerlei Röhre, bei verschiedenen Temperaturen, ist der Dichtigkeit proportional. Auf die Ausdehnung der Röhre durch die Wärme nehmen wir hier nicht Rücksicht; da diese den innern Durchmesser der Röhre vergrößert, so vermindert sie die Höhe des gehobenen Flüssigen. Man kann also für Flüssigkeiten, die, wie der Alkohol, eine voll-

N

kommene Flüssigkeit zu besitzen scheinen, den
 Lehrsatz fest setzen: „dass die Höhe, um wel-
 „che ein Flüssiges, das die Röhrenwände voll-
 „kommen benetzt, sich im Haarröhrchen bei
 „verschiedenen Temperaturen über das Niveau
 „des umgebenden Flüssigen erhebt, in directem
 „Verhältnisse der Dichtigkeit des Flüssigen und
 „im umgekehrten des Halbmessers der Röhre
 „steht.“

E I N L E I T U N G

zu den folgenden Hauptstücken;

aus zwei Berichten

des Herrn

L A P L A C E.

Frei übersetzt von Gilbert *).

I. *Ueber das scheinbare Anziehen und Zurückstossen, welches sich bei kleinen Körpern zeigt, die auf der Oberfläche eines Flüssigen schwimmen.*

Ich habe in meiner Theorie der Haarröhren-Kraft der Analyse den Fall unterworfen, wenn zwei senkrechte und parallele, einander sehr nahe, Platten, die mit ihren untern Enden in eine Flüssigkeit eingetaucht sind, einander anziehen. Ich habe gezeigt, daß, wenn diese Platten von gleicher Materie sind, die Haarröhren-Kraft sie einander zu nähern strebt, gleich viel, ob das Flüssige in der

*) Herr La Place hat den ersten dieser Berichte am 29 Sept. und den zweiten am 24. Novemb. 1806 in der ersten Klasse des National-Instituts vorgelesen. Beide übertrage ich hierher aus dem *Journ. de Phys.* 1806, t. 2, als eine zweckmäßige, populäre und doch ziemlich umständliche, Einleitung zu dem dritten Haupttheile seiner Untersuchungen über die haarröhren-artigen Erscheinungen.

Gilbert.

Berührung mit ihnen angehoben oder herab gedrückt wird, wie das erstere bei Elfenbein-Platten, das zweite bei den Blättchen des venetianischen Talks geschieht, wenn man sie in Wasser taucht; letztere, die sich fettartig anfühlen lassen, werden vom Wasser nicht genäßt. Die beiden Platten erleiden unter diesen Umständen jede einen Druck nach der andern zuwärts, der sich folgender Massen bestimmen läßt. Das Flüssige wird an den beiden entgegengesetzten Oberflächen jeder dieser Platten angehoben oder herab gedrückt, und zwar so, daß die obersten der angehobenen oder die tiefsten der herab gedrückten Theile in gerader und horizontaler Linie liegen. Sind die Platten einander sehr nahe, so wird das Flüssige an der innern Seite, die sie einander zuwenden, stärker als an der äußeren angehoben oder herab gedrückt. „Nun denke man sich ein Parallelepipedum des Flüssigen, das zur Grundfläche den Flächenraum hat, der zwischen jenen beiden Horizontallinien liegt, welche durch die Grenzen der Anhebung oder des Niederdrückens an beiden Seitenflächen gehen, und dessen Höhe gleich ist der halben Summe der Größen, um welche das Flüssige an der innern und an der äußern Seite jeder Platte über das Niveau erhoben oder unter dasselbe herab gedrückt ist. Das Gewicht eines solchen Parallelepipedums des Flüssigen ist dem Drucke gleich, der jede der Platten nach der andern zu treibt.“ Dieses Theorem lehrt uns die wahre Ursache der scheinbaren Anziehung

ken-

kennen, die sich zwischen schwimmenden Körpern zeigt, wenn das Flüssige in der Berührung mit ihnen angehoben oder herab gedrückt wird.

Nun aber lehrt uns die Erfahrung, daß diese Körper einander abstossen, wenn der Eine das Flüssige anhebt, indess der Andere es herab drückt. Ich habe meine Analyse auf dieses scheinbare Abstossen angewendet, und sie hat mich zu folgenden Resultaten geführt, welche die Theorie der Haarröhren - Kraft vervollständigen, und von denen ich geglaubt habe, daß sie die mathematischen Physiker interessieren werden.

Die beiden Platten mögen wieder senkrecht und mit einander parallel seyn, und das in allen Entfernungen bleiben. Man denke sich den Durchschnitt, den eine auf beide senkrecht stehende Vertikal-Ebene mit der Oberfläche des Flüssigen zwischen beiden Platten macht. Diese Durchschnittslinie hat einen Wendungspunkt, wenn beide Platten einige Centimeter von einander entfernt sind. Nähert man sie einander, so rückt der Wendungspunkt weiter nach einer von ihnen hin; und zwar nach der Platte, welche das Flüssige herab drückt, im Fall an den äußeren Seiten das Flüssige mehr angehoben als herab gedrückt ist; dagegen nach der, welche das Flüssige anhebt, im umgekehrten Falle. Immer bleibt der Wendungspunkt in dem Niveau des Flüssigen, welches sich in dem Gefäße befindet, in das die Platten eingetaucht sind, und immer steht das Flüssige an der innern Seite

O

der Platten an der einen weniger hoch, an der andern weniger tief, als an den äußern Seiten. In diesem Zustande scheinen die beiden Platten einander abzustossen; und dieses findet, wenn man fortfährt sie einander näher zu bringen, so lange Statt, als noch ein Wendungspunkt vorhanden ist. Dieser fällt zuletzt in eine der beiden innern Seitenflächen der Platten. Auch über diese Grenze hinaus findet noch Abstoßung Statt, endlich aber wird sie bei weiterer Annäherung der Platten an einander null, und verwandelt sich in Anziehung. In diesem Augenblicke steht das Flüssige an der innern und an der äußern Seite der näsbaren Platte in gleichen Höhen über dem Niveau; und an der andern Platte steht es an der innern Seite eben so hoch über, als an der äußern Seite unter dem Niveau. Das Abstoßen verwandelt sich so in ein Anziehen für beide Platten in demselben Augenblicke. Nähert man sie einander noch mehr, so ziehen sie sich wirklich an, und kommen mit einander durch beschleunigte Bewegung in Berührung. Die Platten geben auf diese Art die merkwürdige Erscheinung einer auf sehr kleine Entfernungen beschränkten Anziehung, die sich über eine gewisse Grenze hinaus in Abstoßung verwandelt; eine Erscheinung, welche uns die Natur auch beim Ablenken des Lichts dicht an der Oberfläche der Körper, und bei den elektrischen und magnetischen Anziehungen zeigt. Es giebt indess einen Fall, in welchem die Platten sich in jeder auch noch so klei-

nen Entfernung von einander abstoßen; wenn nämlich die Grösse, um welche die eine das Flüssige anhebt, genau der gleich ist, um welche die andere dasselbe niederdrückt. Die flüssige Oberfläche zwischen beiden Platten hat dann immer eine Wendungslinie, und diese liegt in ihrer Mitte.

Die Gestalt der Oberfläche des Flüssigen zwischen den beiden Platten wird durch eine Differential-Gleichung gegeben, deren Integration im Allgemeinen von der Rectification der Kegelschnitte abhängt, sich also nicht durch einen endlichen Ausdruck geben läßt. Dieses wird indess möglich für die Entfernung der beiden Ebenen von einander, in welcher die Abstoßung sich in Anziehung verwandelt: dann läßt sich die Entfernung in einer Function der Grösse, um welche das Flüssige an den äussern Seiten der Platten erhoben und nieder gedrückt wird, geben. Man findet auf diese Art, daß diese Entfernung unendlich groß ist, wenn das Flüssige an der äussern Seite der nicht-nähsbaren Platte nur unendlich wenig nieder gedrückt wird; und daraus folgt, daß die beiden Platten sich alsdann nie zurück fliessen. Auch bei merkbarem Niederdrücken an der Aussen Seite kann dasselbe Statt finden, wenn das Reiben an der Innenseite macht, daß hier das Flüssige ein wenig höher steht, als es ohne dieß stehen würde; eine Wirkung, der analog, die man täglich beim Fallen des Barometers wahrnehmen kann. Noch erhellt aus dieser Analyse, daß, wenn die Ober-

fläche der näfsbaren Platte befeuchtet ist, die beiden Platten sich in einer sehr merkbaren und grössern Entfernung, als zuvor, anziehen werden. Man darf also nicht sagen, dafs zwei Platten, von denen die eine näfsbar ist, die andere nicht, sich immer zurück stossen werden. Es tritt hier etwas Aehnliches ein, als bei zwei Kugeln, die gleichartig elektrifirt sind, und sich dennoch anziehen, wenn man die Intensität ihrer Elektricitäten und ihre Entfernung danach abändert.

Das Bestreben, welches die beiden Platten zeigen, sich eine der andern zu nähern, und ihr gegenseitiges Abstossen, lassen sich vermöge der beiden folgenden Theoreme schätzen.

Aus welcher Materie auch die beiden Platten bestehen, immer strebt die eine zur andern hin mit einer Kraft, welche gleich ist dem Gewichte eines Parallelepipedons des Flüssigen, das zur Länge die Länge der Platte in horizontaler Richtung, zur Breite die halbe Summe der Höhen hat, um welche das Flüssige an der innern und an der äufsern Seite der Platte über das Niveau angehoben ist; und zur Höhe die Differenz dieser beiden Anhebungen. Vertiefung über dem Niveau mufs man hierbei für negative Anhebung nehmen. Ist das Produkt jener drei Grössen negativ, so tritt statt Anziehung Zurückstossung ein.

Sind die Platten einander sehr nahe, so ist die Höhe, um welche das Flüssige zwischen ihnen

angehoben ist, ihrem Abstände von einander verkehrt proportional, und gleich der halben Summe der Anhebungen, die Statt finden würden, wenn die beiden Platten ein Mahl aus der Materie der ersten, und das zweite Mahl aus der Materie der andern Platte beständen. Auch hier muß man die Anhebung negativ setzen, wenn statt ihrer Vertiefung Statt findet.

Man sieht aus diesen Theoremen, daß die abstoßende Kraft im Allgemeinen sehr viel schwächer als die anziehende Kraft ist, die sich, wenn die Platten einander sehr nahe sind, entwickelt, und sie dann mit beschleunigter Bewegung eine zur andern führt. In diesem Falle ist die Anhebung des Flüssigen zwischen den beiden Ebenen im Vergleiche mit der an der äußern Seite derselben sehr groß, und man kann daher das Quadrat der letztern Anhebung im Vergleiche mit dem Quadrate der erstern vernachlässigen. Das Parallelepipedon des Flüssigen, dessen Gewicht, zu Folge des ersten Theorems, das Bestreben einer Platte nach der andern hinwärts mißt, läßt sich dann ausdrücken durch das Produkt aus dem Quadrate der Anhebung des Flüssigen zwischen beiden Platten, in die halbe Länge der Platte in horizontaler Richtung. Und da diese Anhebung, dem zweiten Theoreme zu Folge, dem Abstände der beiden Platten von einander verkehrt proportional ist; so wird dieses Parallelepipedon der horizontalen Länge der Platte, dividirt durch das Quadrat der Entfer-

nung der beiden Platten von einander, proportional seyn.

Ich wünschte zu wissen, in wie weit die Resultate aus meiner Theorie der Natur entsprechen, und ersuchte in dieser Absicht Herrn Haüy, einige Versuche über diesen Gegenstand, der eben so delikat als merkwürdig ist, anzustellen. Er fand, daß die Analyse völlig mit der Erfahrung überein stimmt; und mit besonderer Sorgfalt bewährte er hierbei die sonderbare Verwandlung der Anziehung in Abstoßung bei zunehmender Entfernung.

2. Ueber die Adhäsion der Körper an der Oberfläche von Flüssigkeiten.

Man hatte eine große Menge von Versuchen über die Adhäsion der Körper an der Oberfläche von Flüssigkeiten angestellt, ohne geahndet zu haben, daß diese Adhäsion eine Wirkung der Haarröhren-Kraft sey. So viel ich weiß, ist Herr Thomas Young der Erste, der diese scharfsinnige Bemerkung gemacht hat *). Als ich meine Analyse auf diese Versuche anwendete, fand sich, daß sie sie so genau darstellt, als es bei so feinen Versuchen, die nicht immer unter einander selbst überein stimmen, nur immer zu erwarten war. Da die Erscheinungen, welche von der Haarröhren-

*) In den *Philosophical Transact. of the Roy. Soc. of London*, 1806.

Kraft herrühren, jetzt auf eine mathematische Theorie zurück geführt sind, so fehlt es diesem interessanten Zweige der Physik nur noch an einer Reihe genauer Versuche, in welcher man alles, was die Wirkungen dieser Kraft stören kann, sorgfältig absondert.

Das Bedürfnis sehr genauer Versuche wird desto merkbarer, je vollkommener die Wissenschaften werden. Eben so sehr, als den großen Entdeckungen in der Mechanik und der Analyse, haben wir der Erfindung des Fernrohrs und des Pendels die unermesslichen Fortschritte der Astronomie zu verdanken. Man kann daher die Physiker nicht oft genug anmahnen, den Resultaten ihrer Versuche die größte mögliche Präcision zu geben; und man kann einen geschickten Künstler, der sich der Vervollkommnung der wissenschaftlichen Instrumente widmet, nicht Aufmunterung genug zukommen lassen. Ein schlecht angestellter Versuch ist mehrmahls die Ursache vieler Irrthümer geworden; indess ein gut gemachter Versuch für immer besteht, und vielleicht zu einer Quelle von Entdeckungen wird. Man fusst auf ihn mit Sicherheit. Aber der vorsichtige Physiker hält es für seine Pflicht, die Resultate derjenigen Versuche selbst zu prüfen, die von Beobachtern herrühren, welche noch keinen gegründeten Ruhm der Genauigkeit erworben haben.

Wenn man mit der Oberfläche von Wasser, das in einem weiten Gefäße ruhig steht, eine Glas-

scheibe in Berührung gebracht hat, und sie wieder fortheben will, so empfindet man einen desto größern Widerstand, je größer die Fläche der Scheibe ist. Indem man sie aufhebt, erhebt man zu gleicher Zeit über dem Spiegel des Wassers eine Wassermasse, welche wie eine an ihrem Umfange vertiefte Scheibe (oder wie ein Rollenbals) gestaltet ist. Ihre untere Grundfläche verbreitet sich unbestimmt über die Wasserfläche; weiter herauf zieht sie sich zusammen bis auf etwa sieben Zehntel ihrer Höhe; dann erweitert sie sich wieder und bedeckt die Oberfläche der Glascheibe mit ihrer obern Grundfläche. Ihr Volumen läßt sich durch folgende Betrachtung bestimmen.

Man denke sich in dem Innern dieser Wasserfäule einen sehr kleinen Kanal, der in der Ebene ihrer größten Verengung in horizontaler Lage anfängt, sich dann herabwärts krümmt, senkrecht bis zum Niveau des Wassers im Gefäße herab geht, und hier wieder horizontal wird. Es fällt in die Augen, daß, wenn jene Wasserfäule im Gleichgewichte ist, die Haarröhren-Kraft, welche von der Gestalt der Oberfläche des Wassers herrührt, dem Gewichte des Wassers in dem senkrechten Arme des Kanals gleich seyn muß. Wird die Scheibe höher angehoben, so erhält dieses Gewicht die Oberhand über die Haarröhren-Kraft, und nun trennt sich die Wasserfäule von der Scheibe. Das Gewicht der Wasserfäule, die bei diesem Zustande des Gleichgewichts angehoben ist, dient folglich dem Wider-

stande, der sich beim Losreißen der Scheibe äußert, zum Masse. Die Analyse lehrt, dafs, wenn die Scheibe einen beträchtlichen Durchmesser hat, (das heifst, von 0,03 Meter und mehr) dieses Gewicht dem eines Wassercylinders gleich ist, der die Oberfläche der Scheibe zur Grundfläche hat, und dessen Höhe, in Millimeter ausgedruckt, gleich ist der Quadratwurzel der in Millimeter gegebenen Höhe, bis zu welcher Wasser in einer Haarröhre aus derselben Glasart, von 1 Millimeter Weite, ansteigt. Die untere Fläche der Scheibe ist eine berührende Ebene für die Oberfläche des Wassers; wenn statt dessen diese beiden Oberflächen einander schnitten, so müßte diese Zahl noch mit dem Cosinus des halben spitzen Winkels, unter dem beide sich schneiden, multiplicirt, und mit der Quadratwurzel des Cosinus dieses ganzen Winkels dividirt werden.

Wenn das Flüssige in einer Haarröhre, die aus derselben Materie als die Scheibe besteht, nicht angehoben, sondern nieder gedrückt wird, wie das bei Queckfilber und Glas der Fall ist, so hat die von der Scheibe angehobene Säule des Flüssigen nicht mehr die Gestalt eines Rollenhalses. Ihre untere Grundfläche verbreitet sich zwar noch ins Unbestimmte über das Flüssige, in der Höhe verringert sie sich aber fortdauernd, bis wo sie die Scheibe berührt. In dem Zustande des Gleichgewichts ist das Gewicht dieser Säule gleich dem eines Cylinders, der die Oberfläche der Scheibe zur

Grundfläche hat, und dessen Höhe, in Millimeter ausgedruckt, gleich ist der in Millimeter gegebenen Tiefe, bis zu welcher das Flüssige in einem Haarrohre, aus derselben Materie als die Scheibe, von 1 Millimeter Durchmesser, niedergedrückt wird, multiplicirt mit dem Sinus des halben spitzen Winkels, den die Oberfläche des Flüssigen mit der Scheibe macht, und dividirt durch die Quadratwurzel des Cofinus desselben ganzen Winkels.

Ist der Durchmesser der Scheibe kleiner als 0,03 Meter, so bedürfen diese Resultate noch einer kleinen Correction, welche ich angegeben habe, und die sich bei größern Scheiben ohne merkba-
ren Fehler vernachlässigen läßt.

Wir wollen uns eine Glascheibe von 0,1 Meter Durchmesser denken, und das, was uns die vorher gehenden Resultate für sie geben, mit der Erfahrung vergleichen. Da, zu Folge der Versuche des Herrn Haüy (oben S. 97.), Wasser in einer Haarröhre aus Glas, die 1 Millimeter weit ist, zu einer Höhe von 13,569 Millimeter über das Niveau ansteigt, so würde, nach dem ersten der vorstehenden Theoreme, eine Kraft von 28,931 Grammes erfordert werden, um jene Glascheibe von der Oberfläche des ruhig stehenden Wassers los zu reißen. Hr. Achard fand bei seinen Versuchen diese Kraft gleich 29,319 Grammes, welches nur sehr wenig von dem Resultate der Berechnung abweicht. Ueber die Kraft, welche nöthig ist, um eine Glascheibe von Quecksilber los zu rei-

sen, hat man zwar auch einige Versuche; um sie mit der Theorie vergleichen zu können, müßte man indess den Winkel kennen, den das Quecksilber mit dem Glase macht, da, wo es mit demselben in Berührung kommt. Aus einem recht genauen Versuche dieser Art würde sich dieser finden lassen; er scheint 30 bis 40° zu betragen.

Legt man zwei Glascheiben, die man mit Wasser genäßt hat, horizontal auf einander, so adhären sie an einander mit einer beträchtlichen Kraft. Das Wasser zwischen ihnen hat nun die Gestalt einer an ihrem Umfange vertieften Rolle, und der kleinste Krümmungshalbmesser der Oberfläche desselben ist sehr nahe gleich der halben Dicke der Wasserschicht. Vernachlässigt man daher, wie das bei Scheiben von großem Durchmesser erlaubt ist, ihren größten Krümmungshalbmesser, so findet sich der Widerstand, der sich beim Losreißen der Scheiben von einander äußert, gleich dem Gewichte eines Wassercylinders, der die Oberfläche der Scheibe zur Grundfläche, und zu seiner Höhe die Höhe hat, bis zu welcher Wasser zwischen zwei parallelen Ebenen ansteigt, deren Entfernung dem Abstände der beiden Scheiben von einander gleich ist. Hr. Guyton de Morveau hat einen Versuch dieser Art mit zwei Glascheiben von 81,21 Millimeter Durchmesser angestellt, und die Kraft, welche nöthig war, um sie aus einander zu reißen, gleich 250,6 Grammes gefunden. Nach dem vorstehenden Theoreme hätte sie nur

155,78 Grammes, also um ein Drittel weniger betragen sollen. Diese Verschiedenheit rührt wahrscheinlich her, entweder von einer unrichtigen Schätzung der Entfernung der beiden Scheiben von einander, die bei so kleinen Abständen äußerst schwierig ist, oder von den Ungleichheiten der Oberflächen der Scheiben, die es schwer hält, vollkommen eben zu machen *).

* *

Kleine feste Körper bleiben an der Oberfläche von Flüssigkeiten schweben. Folgendes ist das allgemeine Princip für alle diese Erscheinungen: „Wenn man einen Körper in ein Flüssiges eintaucht, „das durch die Haarröhren-Kraft um ihn niedergedrückt oder angehoben wird, so ist der Gewichts-Verlust desselben im ersten Falle größer, „im zweiten Falle kleiner als das Gewicht eines „Wasser-Volumens, das dem unter dem Niveau „eingesenkten Theile des Körpers gleich ist, und „zwar um das Gewicht des durch die Haarröhren-Kraft des Körpers nieder gedrückten oder angehobenen Volumens der Flüssigkeit.“ Ist der feste Körper ganz untergetaucht, so verschwindet alle Haarröhren-Wirkung, und dieses Princip verwandelt sich in das bekannte hydrostatische Gesetz.

*) Herr Gay-Lussac scheint, nach dieser Stelle zu urtheilen, die Versuche, welche man in dem folgenden Haupttheile findet, später angestellt zu haben, als Herr La Place diesen Bericht schrieb. Von dem, was nun unmittelbar folgt, hat Herr La Place schon in dem zweiten Haupttheile (s. S. 174) gehandelt. *Gilbert.*

Der Beweis dieses Princip's beruht darauf, daß die Wassersäule unter dem Körper den neben stehenden Wassersäulen das Gleichgewicht nicht halten könnte, wenn nicht der feste eingetauchte Körper, im Falle er das Flüssige herab drückt, auf Kosten seines Gewichts die Leere compensirte, die er durch die haarröhren-artige Wirkung hervor bringt; und im Falle er das Flüssige anhebt, auf Kosten seiner minder specifischen Schwere das Gewicht des angehobenen Flüssigen ausgleicht. Die haarröhren-artige Wirkung strebt im ersten Falle den Körper anzuheben, und dieser kann an der Oberfläche des Flüssigen schweben bleiben, wenn er gleich specifisch schwerer als das Flüssige ist; im zweiten Falle strebt sie den Körper in das Flüssige herab zu ziehen.

Ein kleiner, sehr feiner, Stahlcylinder, der durch einen Firnißüberzug oder durch eine dünne Lage Luft um ihn her, gegen das Nässen durch das Wasser geschützt ist, bleibt auf diese Art an der Oberfläche des Wassers schweben und wird vom Wasser getragen. Legt man zwei solche gleiche Stahlcylinder neben einander auf die Oberfläche von Wasser, so daß beide sich berühren, daß aber das Ende des einen über das des andern heraus reicht, so sieht man sie sogleich neben einander hingleiten, bis ihre Theilen neben einander liegen. Der Grund davon fällt leicht in die Augen. An den sich berührenden Theilen der beiden Cylinder wird das Flüssige durch die Haarröhren-Kraft tiefer, als an den andern Enden herab gedrückt. Die Basis dieser letztern Theile wird folg-

lich stärker gedrückt als die Basis der andern Theile, weil das Flüssige dort höher steht; jeder der beiden Cylinder strebt folglich mit dem andern immer mehr, seiner ganzen Länge nach in Berührung zu kommen. Da aber beschleunigende Kräfte ein System von Körpern, das nicht im Gleichgewichte ist, stets über die Lage des Gleichgewichts hinaus führen, so wird jeder der beiden Cylinder abwechselnd mit dem einen Ende und dann wieder mit dem andern Ende über den andern Cylinder hinaus gehen; wegen des Widerstandes, den sie leiden, werden diese Oscillationen immer schwächer, und wenn sie endlich ganz aufhören, so liegen die Enden der beiden Cylinder neben einander. Diese Oscillationen ließen sich durch die Analysis bestimmen, und man könnte dann auch bei diesem Gegenstande die Theorie der Haarröhren-Kraft mit den Versuchen zusammen halten. Solche Vergleichen sind die wahren Prüfsteine der Theorien, die nur dann nichts mehr zu wünschen übrig lassen, wenn man mittelst ihrer alle Wirkungen, die unter gegebenen Umständen erfolgen müssen, vorher sagen und sie zugleich ihrer Größe nach genau bestimmen kann.

*

*

*

Betrachtet man das Ganze der haarröhren-artigen Erscheinungen, und überlegt man die Abhängigkeit aller von dem einzigen Principe, daß die Anziehung der kleinsten Körpertheilchen ausnehmend schnell abnimmt, wenn die Entfernung bis

zum Merkbarwerden zunimmt; so ist es unmöglich, an der Wahrheit dieses Principis zu zweifeln. Diese Anziehung ist die Ursache der chemischen Verwandtschaften. Sie ist nicht bloß auf die Oberfläche der Körper eingeschränkt, sondern dringt in ihr Inneres bis auf eine Weite ein, die zwar für unsere Sinne nicht mehr wahrnehmbar ist, in dem Spiele der Verwandtschaften sich aber sehr merkbar äußert. Sie ist es, auf welche der Einfluß der Massen bei den Verwandtschaften beruht, welche Hr. Berthollet auf eine so neue und glückliche Art nachgewiesen hat. In Verbindung mit der Figur der haarröhren-artigen Räume bewirkt sie eine kaum zu zählende Menge von Erscheinungen, die jetzt, eben so gut als die Erscheinungen an dem Himmel, unter das Gebiet der Analyse gehören. Die Theorie dieser haarröhren-artigen Erscheinungen ist der Punkt der Physik und Chemie, die sich am innigsten berühren; zwei Wissenschaften, die jetzt überhaupt so in einander greifen, daß man die eine mit keinem großen Erfolge bearbeiten kann, wenn man nicht zugleich die andere ergründet hat. Die Aehnlichkeit der Figur der durch die Haarröhren-Kraft angehobenen, herab gedrückten, oder abgerundeten Flüssigkeiten, mit Oberflächen, welche durch die Curven erzeugt werden, die unter dem Namen der *Kettenlinie*, der *Lintearea* und der *Elastica* bekannt sind, und mit denen die Geometer sich beim Entstehen der Infinitesimal-Rechnung beschäftigten, hat einige Physiker auf den Gedanken geführt, es möchten wohl auch die

Oberflächen der Flüssigkeiten gleichförmig gespannt seyn, eben so wie die elastischen Oberflächen. Segner *), der diesen Gedanken zuerst gehabt zu haben scheint, sah zwar ein, daß dieses nur eine Fiction seyn könne, die dazu diene, die Wirkungen einer sehr schnell abnehmenden Anziehung zwischen den Theilchen der Körper darzustellen, und dieser geschickte Mathematiker hat versucht, zu beweisen, daß eine solche Anziehung auf dasselbe Resultat führen müsse; folgt man aber seinen Schlüssen, so zeigt sich leicht, daß sie wenig genau sind, und aus seiner Schlussanmerkung scheint zu erhellen, daß sie ihm selbst nicht genügt haben. Andere Physiker haben diese Meinung von einer gleichförmigen Spannung der flüssigen Oberflächen wieder aufgenommen, und sie auf verschiedene haarröhren-artige Erscheinungen angewendet; sie sind indess in der Erklärung dieser Kraft nicht glücklicher als Segner gewesen, und die Klügsten unter ihnen haben sich begnügt, dieses als ein Mittel zu betrachten, die Erscheinungen darzustellen. Giebt man sich allen Vermuthungen hin, welche beim ersten Anblicke von Erscheinungen entstehen, so kann man wohl auf einige Wahrheiten stoßen; diese sind aber fast immer mit vielen Irrthümern vermengt, und die Entdeckung derselben gebührt nur dem, der sie von diesem Zusatze befreiet, und sie durch Beobachtung oder durch Rechnung fest begründet.

*) *Comment. Soc. Reg. Götting. t. I.*

DRITTER HAUPTTHEIL.

Theorie des Anziehens und Abstossens schwimmender Körper, der Adhäsion einer Scheibe an einer flüssigen Oberfläche, und der Figur eines grossen Queckfilber-Tropfens;

mit

prüfenden Versuchen von Gay-Lussac.

N. *Von dem scheinbaren Anziehen und Abstossen schwimmender Körper.*

a) *Betrachtung des Falles, wenn beide schwimmende Körper gleichartig sind.*

19. *) Wenn man zwei parallele und vertikale Ebenen mit ihren untern Seiten in ein Flüssiges taucht, so bemerkt man, dass diese Ebenen

*) Hier eingeschaltet aus der *Theorie etc.*

P

sich einander zu nähern streben, sowohl wenn das Flüssige sich neben ihnen erhebt, als auch, wenn es sich in ihrer Nähe niedriger hält, als das Niveau. Läßt man z. B. zwei kleine parallelepipedische Glasgefäße auf Wasser oder Quecksilber schwimmen, so gehen sie auf einander zu, so bald sie sich erheblich nahe gekommen sind.

Um die Gründe hiervon einzusehen, wollen wir die beiden Ebenen MB , NR (Fig. 18. Taf. III.) betrachten, und zuerst annehmen, das Flüssige erhebe sich zwischen ihnen. Der Druck, welchen der in einer dieser Ebenen unterhalb des Niveau's VW befindliche Punkt R von Aussen her leidet, läßt sich folgender Massen bestimmen. Man denke sich einen Kanal VSR , dessen einer Schenkel VS vertikal, der andere SR horizontal sey. Die Kraft, welche das in dem Schenkel VS befindliche Flüssige antreibt, ist $= g \cdot VS +$ der in R wirkenden Kraft, welche letztere theils von der Wirkung des Flüssigen auf den Kanal, theils von dem Drucke der Atmosphäre herrührt. Behält daher K seine vorige Bedeutung (siehe §. 1. am Ende), und stellt P den Druck der Atmosphäre vor, so ist die Kraft, welche das in dem vertikalen Schenkel befindliche Flüssige antreibt, $= g \cdot VS + K + P$. Auf das Flüssige in dem Schenkel SR wirken von R her zwei Kräfte: *erstens*, die Wirkung des Flüssigen auf diesen Schenkel $= K$, und *zweitens*, die Attraction der Ebene auf das Flüssige in demselben; diese letztere wird aber zerstört durch die

Attraction des Flüssigen auf die Ebene, und kann daher in der Ebene kein Bestreben auf Bewegung erzeugen; Wirkung und Gegenwirkung sind hierbei gleich und entgegen gesetzt, diese Attractionen können also nur ein Anhängen der Ebene an dem Flüssigen bewirken, welches während der Ruhe in gar keine Betrachtung kommt. Der Druck in R ist also von *aussen* her $= g \cdot VS + K + P - K = g \cdot VS + P$.

Um den Druck zu bestimmen, welchen die Ebene in R von der *innern* Seite her leidet, denke man sich eben so einen zwischen den beiden Ebenen befindlichen Kanal OQR , dessen Schenkel OQ vertikal, und dessen Schenkel QR horizontal ist.

Aus den eben angeführten Gründen ist die auf das Flüssige in dem Schenkel OQ wirkende Kraft $= g \cdot OQ + P + K - \frac{H}{b}$, da nämlich das Flüssige in O auf diesen Schenkel mit der Kraft $K - \frac{H}{b}$ einwirkt (§. 1). Es ist aber (nach §. 6.) $\frac{H}{b} = g \cdot OP$, wenn P im Niveau des umgebenden unbegrenzten Flüssigen liegt. Die Kraft, welche das Flüssige in OQ befeelt, ist also $= P + K + g \cdot PQ$. Auf das Flüssige in dem Schenkel QR wirkt von R her wieder die Kraft $= K$. Also leidet der Punkt R von *Innen* her den Druck $= P + g \cdot PQ$. Dieser Druck ist folglich dem Drucke gleich, den der Punkt R von *Aussen* her leidet. Jeder Punkt der Ebene also, welcher *unterhalb des Niveau's* des unbe-

grenzten Flüssigen liegt, leidet von Aussen und von Innen gleichen Druck, und würde für sich allein im Gleichgewichte bleiben. Soll also ein ungleicher Druck entstehen, so muß dieser oberhalb P Statt finden.

Das Flüssige erhebe sich an der äussern Seite bis an Z , indem die Oberfläche desselben eine Curve $ZZ'V$ bilde; und an der innern Seite bis an N , und hier stehe es mit der krummen Oberfläche $NN'O$. Wir müssen also noch untersuchen, welchen Druck die Ebene oberhalb VP , bis an Z , und in noch grössern Höhen leidet. Diejenigen Punkte der Ebene, welche äusserst nahe bei Z und äusserst nahe bei N liegen, und gegen diese Punkte eine ähnliche Lage haben, in einem Abstände von Z und N , welcher die Grösse der merklichen Wirkungssphäre der Ebene nicht übertrifft, leiden, die ersten von Aussen, die letzten von Innen her, einen gleichen Druck; denn innerhalb der merklichen Wirkungssphäre der Ebenen ist die Oberfläche des Flüssigen, nahe bei Z und N , nur unmerklich verschieden. Man kann also den Druck auf diese Punkte ganz bei Seite setzen, da der Unterschied des innern und äussern Druckes, welcher hier etwa Statt finden möchte, theils äusserst geringe ist, theils nur in einem unmerklichen Raume Statt findet. Diesem zu Folge brauchen wir bloß diejenigen Punkte zu betrachten, wo die Wirkung der Ebene auf die Oberfläche aufhört, merklich zu seyn. Es sey Z' ein solcher Punkt der Oberfläche, $Z'q$ ein

horizontaler Kanal, und R der Krümmungshalbmesser der Oberfläche in Z' ; so ist die in Z' wirkende Kraft $= P + K - \frac{H}{R}$, oder $= P + K - g \cdot Z'T$, weil $g \cdot Z'T = \frac{H}{R}$ seyn muß, wie die Betrachtung des Gleichgewichts in einem Kanale $VFLZ'$ zeigt, wenn V und T in dem wahren Niveau des unbegrenzten Flüssigen liegen. Der äußere Druck in q ist also, wenn man $Z'T = x$ nennt, $= P + K - g \cdot x$. Der innere Druck in q ist dagegen $= P + K + g \cdot OP - gx - \frac{H}{b} = P + K - gx$. Also ist auch von Z bis G der innere und äußere Druck gleich.

Oberhalb Z ist überall der äußere Druck $= P$, der innere Druck auf einen Punkt R' aber $= P - \frac{H}{b} + g \cdot OQ'$; oder, wenn des Punktes R' Höhe über dem Niveau $= PQ' = z$ ist, $= P - gz$. Die Ebene wird also in jedem Punkte R' mit einer Kraft $= gz$ von aussen nach innen gedrückt. In dem Theile NKO , welcher höher als der niedrigste Punkt O der Oberfläche in dem Raume zwischen den beiden Ebenen liegt, ist in N' der Druck $= P + K = \frac{H}{b'}$, wenn b' der Krümmungshalbmesser in N' ist; also ist der Druck in p' , $= P - \frac{H}{b'}$, wenn $N'p'$ horizontal ist. Es sey x' die Höhe des Punktes N' über der durch O gehenden Horizontalinie IK , so ist $\frac{H}{b'} = \frac{H}{b} + gx' = g \cdot p'G$. Also ist in p' der Druck von Aussen nach Innen $= g \cdot p'G$, abermahl der Höhe über dem Niveau proportional.

Es läßt sich also leicht schliessen, daß die Kraft, welche die Ebene *NR* von Aussen nach Innen drückt, gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe $= \frac{1}{2}(NG + GZ)$ und deren Basis der oberhalb *Z* bis an *N* benetzte Theil der Ebene ist *).

Da die Ebene *MB* einen eben so grossen Druck leidet, so kennen wir nun die Kraft, welche beide Ebenen antreibt, sich einander zu nähern. Diese Kraft wächst, wie man sieht, sehr nahe im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes beider Ebenen von einander, wenn dieser Abstand sehr geringe ist. — Auch im leeren Raume bleibt dieses Resultat dasselbe; die Adhärenz der Ebene an das Flüssige bewirkt dann eben das, als hier der Druck der Atmosphäre.

Wenn das Flüssige zwischen den Ebenen *niedriger* steht, als ausserhalb, so läßt sich eben so zeigen, daß der Druck, welchen jede Ebene von Aussen nach Innen leidet, gleich ist dem Gewichte einer Säule dieses Flüssigen, welche die halbe Summe der Depressionen unter das Niveau des unbegrenzten Flüssigen, die Aussen und Innen in der Berührung der flüssigen Oberfläche mit der Ebene Statt findet, zur Höhe hat, und deren Basis demjenigen Theile der

*) Man hat nämlich den Druck auf das Differential der Ebene, dessen Länge $= dz$ und Höhe über *G* $= z$ ist, $= z dz$, und folglich das Integral $= \frac{1}{2}z^2 + \text{const.}$ Da nun der Druck $= 0$ ist, wenn $z = GZ$, so ist der gesammte Druck bis an *N* $= \frac{1}{2}(GN^2 - GZ^2) = \frac{1}{2}NZ.(GN + GZ)$, wie oben.

Br.

Ebene gleich ist, welcher nur an einer Seite von dem Flüssigen berührt wird.

b) *Vom scheinbaren Abstoßen zweier Körper, deren einer das Flüssige erhebt, der andere es deprimirt.*

20. Wenn man auf einem Flüssigen zwei Körper schwimmen läßt, an deren einem sich das Flüssige über das Niveau erhebt, und an deren andern es niedriger als das Niveau steht, so zeigt die Erfahrung, daß diese Körper einander abstoßen. Wir wollen daher untersuchen, was für Kräfte auf zwei verschieden-artige Ebenen wirken, wenn sie vertikal und einander parallel, mit ihrem untern Theile in ein Flüssiges eingetaucht sind, das an der einen höher, an der andern tiefer als das Niveau steht.

Wir wollen die Ebene, an der das Flüssige sich erniedrigt, die *erste*, und die, an welcher das Flüssige sich erhebt, die *zweite Ebene* nennen. Der Durchschnitt der Oberfläche des zwischen beiden enthaltenen Flüssigen, mit einer auf die beiden Ebenen und den Spiegel des Flüssigen senkrechten Ebene, muß nothwendig einen Wendungspunkt haben, wenn die beiden Ebenen einen beträchtlichen Abstand von einander haben, und dieser Wendungspunkt muß in dem Niveau der Oberfläche des unbegrenzten Flüssigen, worin die Ebenen eingetaucht sind, liegen; denn da in dem Wendungspunkte der Krümmungshalbmesser unendlich ist, so muß die Höhe über dem Niveau hier $= 0$ seyn.

Es sey in Fig. 19. *) GH das Niveau des unbegrenzten Flüssigen, und für irgend einen zwischen den beiden Ebenen befindlichen Punkt Z der flüssigen Oberfläche sey die Höhe über das Niveau $YZ = z$, und der Abstand von der ersten Ebene $XY = y$. Wir haben dann (nach §. 4.)

$$\frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)^3}} = 2\alpha z,$$

weil hier im Punkte I auch b' unendlich, oder $\frac{1}{b'} = 0$ ist. Diese Gleichung, mit dz multiplicirt und integrirt, giebt

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} = \text{const.} - \alpha z^2.$$

Es sey ω der spitze Winkel, welchen mit der ersten Ebene AB eine Tangential-Ebene macht, die an die flüssige Oberfläche in dem Punkte jener Durchschnittslinie gelegt wird, der sich an der Grenze der Wirkungskphäre der ersten Ebene befindet; und man setze die Depression des Flüssigen an diesem Punkte, $XE, = q$. Wir haben dann für diesen Punkt $\alpha z^2 = \alpha q^2$, und folglich $\text{const.} = \sin.\omega + \alpha q^2$. Wird dieser Werth in die Gleichung gesetzt, so erhalten wir allgemein

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} = \sin.\omega + \alpha q^2 - \alpha z^2.$$

*) Herr Brandes hat sie, der Deutlichkeit halber, hier zugefügt; im Originale findet sie sich nicht. *Gilbert.*

Es mögen eine ähnliche Bedeutung, als ω und q in Beziehung auf die erste Ebene, ω' und q' in Beziehung auf die zweite Ebene haben, für den Punkt F , welcher an der Grenze der merklichen Wirkungssphäre dieser zweiten Ebene CD liegt, so ist in diesem Punkte

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} = \sin.\omega' \text{ und } z = q',$$

folglich ist

$$\sin.\omega - \sin.\omega' = \alpha q'^2 - \alpha q^2.$$

Wir wollen der Kürze halber setzen, $\sin.\omega + \alpha q^2 - \alpha z^2 = Z$, also den allgemeinen Werth von $dy = \frac{Zdz}{\sqrt{(1-Z^2)}}$. Dem zu Folge kann Z nie größer als 1 seyn. Für den Wendungspunkt der flüssigen Oberfläche ist $z = 0$, also $Z = \sin.\omega + \alpha q^2$, und also auch $\sin.\omega + \alpha q^2 =$ oder < 1 . Es kann aber $\sin.\omega + \alpha q^2$ nicht $= 1$ seyn; denn dann würde $Z = 1 - \alpha z^2$ und $dy = \frac{(1 - \alpha z^2) dz}{z \sqrt{(2\alpha - \alpha^2 z^2)}}$. Das Integral dieser Gleichung, zwischen den Grenzen genommen, zwischen welchen $z = 0$ ist, giebt für y , und folglich für den Abstand der Ebenen von einander, einen unendlichen Werth; also ist in dem Falle, da die Entfernung der Ebenen von einander endlich ist, und es einen Wendungspunkt in der Oberfläche zwischen ihnen giebt, $\sin.\omega + \alpha q^2 < 1$; folglich ist auch $\sin.\omega' + \alpha q'^2 < 1$.

In dem Falle, da der Abstand der Ebenen von einander *unendlich* ist, muß y unendlich, folg-

lich $Z = 1$ seyn, für $z = 0$. Nennt man also q_1 die Depression in diesem Falle, oder $q_1 = XK$, als die Depression an der äußern Seite der *ersten* Ebene, so ist $\alpha q_1^2 + \sin.\omega = 1$ und dagegen $\alpha q^2 + \sin.\omega < 1$, also $q < q_1$, das ist $XE < XK$. Und wenn man die Schlüsse in §. 19. hier anwendet, so findet man, daß diese erstere Ebene von Innen nach Aussen gedrückt wird, mit einer Kraft, die dem Gewichte eines flüssigen Prisma's von der Höhe $= \frac{1}{2}(q + q_1)$ und der Breite $= (q_1 - q)$ gleich ist. Für die *zweite* Ebene findet man, bei unendlicher Entfernung, wenn sich dann q' in q'_1 verwandelt, $\sin.\omega' + \alpha q'_1{}^2 = 1$, statt daß bei endlicher Entfernung $\sin.\omega' + \alpha q'^2 < 1$ war. Es ist also $ML > MF$, und die zweite Ebene wird nach aussen gedrückt, mit einer Kraft, die dem Gewichte eines flüssigen Prisma's von der Höhe $= \frac{1}{2}(q' + q'_1)$ und der Breite $= (q'_1 - q')$ gleich ist. Die Länge des Prisma's ist gleich der horizontalen Breite der Ebenen, die wir gleich annehmen. Die Kraft also, mit welcher jede Ebene sich von der andern zu entfernen strebt, ist für beide gleich, denn diese Kräfte sind

$$\frac{1}{2}(q_1^2 - q^2) = \frac{1 - \sin.\omega' - \alpha q'^2}{2\alpha},$$

und

$$\frac{1}{2}(q'_1{}^2 - q'^2) = \frac{1 - \sin.\omega' - \alpha q'^2}{2\alpha}.$$

Wenn für die beiden Ebenen die Winkel ω und ω' gleich sind, so hat der Durchschnitt der Oberfläche in der Mitte zwischen beiden alle Mahl

einen Wendungspunkt, die Ebenen mögen sich einander so sehr nähern, als man will, und diese Ebenen stoßen einander in allen Entfernungen ab. — Ist hingegen ω von ω' verschieden, so rückt der Wendungspunkt, oder die Linie aller Wendungspunkte, wenn die Entfernung der Ebenen von einander geringer wird, derjenigen Ebene, für welche der Winkel ω am größten ist, näher. Wir wollen annehmen $\omega > \omega'$, so wird $q_1 < q'_1$ seyn, oder das Flüssige wird an der äußern Seite der ersten Ebene weniger niedergedrückt seyn, als es an der äußern Seite der zweiten Ebene erhoben ist. Nähert man in diesem Falle die Ebenen einander, so wird die Wendungslinie der Oberfläche der ersten Ebene näher als der zweiten liegen, und endlich mit jener zusammen fallen. Wirklich zeigt die Gleichung

$$\sin.\omega - \sin.\omega' = \alpha q'^2 - \alpha q^2,$$

dass alle Mal $\alpha q'^2$ größer als $\sin.\omega - \sin.\omega'$ ist, und doch ist aus der oben gefundenen Gleichung $dy = \frac{Zdz}{\sqrt{1-Z^2}}$ klar, dass, wenn eine Wendungslinie der Oberfläche Statt findet, q' von der Ordnung des Abstandes der Ebenen von einander ist, und dieser kann kleiner werden, als jede gegebene GröÙe. Es muß also eine Grenze der Annäherung geben, mit welcher die Wendung der Oberfläche aufhört, und wo folglich die Wendungslinie mit der ersten Ebene zusammen fällt. Nähern sich die Ebenen mehr, so fahren sie noch fort, sich abzustößen, so lange, bis das Flüssige

sich an der innern Seite der erstern Ebene so hoch über das Niveau gehoben hat, als es an der äußern Seite deprimirt ist, wie sich aus den Schlüssen in §. 19. übersehen läßt. Heißt in diesem Falle q die Erhebung des Flüssigen an der innern Seite der ersten Ebene, so ist

$$\alpha q^2 = \alpha q_1^2 = 1 - \sin. \omega,$$

und weil alle Mal $\sin. \omega - \sin. \omega' = \alpha q'^2 - \alpha q^2$, auch

$$\alpha q'^2 = \alpha q_1'^2 = 1 - \sin. \omega',$$

und es hört zugleich auch für die zweite Ebene die abstoßende Kraft auf, so daß das Abstoßen sich für beide Ebenen zugleich in Anziehen verwandelt.

Der Abstand der Ebenen, bei welchen diese Aenderung Statt findet, läßt sich leicht bestimmen. Da nämlich alsdann $\alpha q^2 = 1 - \sin. \omega$ ist, so ist $Z = 1 - \alpha z^2$; folglich

$$dy = \frac{(1 - \alpha z^2) \cdot dz}{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{(2 - \alpha z^2)}},$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} \cdot \log. \text{nat.} \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^2)}}{1 + \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^2)}} \right) + \frac{2\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\alpha z^2)}}{\sqrt{2\alpha}} + \text{const.}$$

Wir wollen den Abstand der beiden Ebenen von einander $2l$ setzen, so ist an der ersten Ebene, wo $y = 0$, $z = q$ und $\alpha q^2 = 1 - \sin. \omega$, und an der andern Ebene, wo $y = 2l$, $z = q'$ und $\alpha q'^2 = 1 - \sin. \omega'$. Folglich wird, wenn man $\omega = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ und $\omega' = \frac{1}{2}\pi - \vartheta'$ setzt,

$$2l = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \log. \text{nat.} \left(\frac{\tan. \frac{1}{4}\vartheta'}{\tan. \frac{1}{4}\vartheta} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (\cos \frac{1}{2}\vartheta - \cos \frac{1}{2}\vartheta'),$$

und ϑ , ϑ' bedeuten hier die Neigungen der äußersten Theile der Oberfläche in der Durchschnittebene gegen den Horizont.

Ist ϑ unendlich klein, so ist die Depression an der äußern Seite der ersten Ebene unendlich geringe, und der Ausdruck für $2l$ wird dann unendlich; die beiden Ebenen haben also dann bei jeder Entfernung ein Bestreben, sich einander zu nähern. Für $\vartheta = \vartheta'$ ist $2l = 0$, oder es findet dann selbst bis zur Berührung noch ein Bestreben, sich von einander zu entfernen, Statt. Aber für Werthe von ϑ , die zwischen diesen Grenzen liegen, stoßen die Ebenen einander ab, so lange ihre Entfernung größer als $2l$ ist, und ziehen einander an, wenn diese Entfernung kleiner als $2l$ ist. Die Stärke der Attraction und Repulsion wird durch folgendes Theorem bestimmt, dessen Beweis sich so, wie in §. 19, führen läßt.

„Wenn auch die Ebenen aus verschiedenen
„Materien bestehen, so ist doch die Kraft, wel-
„che jede Ebene antreibt, sich der andern zu nä-
„hern, gleich dem Gewichte eines aus dem umge-
„benden Flüssigen gebildeten Prisma's, dessen Hö-
„he gleich ist derjenigen, um welche das Flüssige
„an der innern Seite der Ebene und in der Berüh-
„rung mit derselben höher steht, als an der äu-
„ßern Seite, dessen Breite gleich ist der halben
„Summe der Elevationen an der innern und äu-
„ßern Seite der Ebene, und dessen Länge gleich
„ist der horizontalen Länge beider Ebenen, die

„wir als gleich annehmen. Die Vertiefungen unter dem Niveau werden als negative Erhebungen angesehen, und die Attraction verwandelt sich in Repulsion, wenn das Produkt der drei als Dimensionen des Prisma's angegebenen Gröfsen negativ ist.“

Die Kraft, welche die Ebenen antreibt, sich einander zu nähern, oder sich von einander zu entfernen, ist bei beiden Ebenen gleich, wenn sie, wie wir annehmen, gleiche Breite haben. Denn die beiden ersten Factoren der in dem Theoreme angegebenen Produkte sind für die erste Ebene

$$(q - q_1) \cdot \frac{1}{2}(q + q_1) = \frac{1}{2}(q^2 - q_1^2),$$

und für die zweite Ebene

$$(q' - q'_1) \cdot \frac{1}{2}(q' + q'_1) = \frac{1}{2}(q'^2 - q'^2_1),$$

und die Gleichheit dieser Ausdrücke haben wir schon bewiesen. Ob gleich also die beiden Ebenen nur vermittelt der Haarröhren-Kraft des zwischen ihnen liegenden Flüssigen auf einander wirken, so ist doch diese gegenseitige Wirkung so beschaffen, daß auch hier Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind.

Nähert man die Ebenen einander recht sehr, so ist für alle Werthe von z der Unterschied $z - q = z'$ so klein, daß man das Quadrat dieser Gröfse vernachlässigen kann. Dann ist $Z = \sin. \omega$
 $- 2\alpha q z'$, $dz = dz' = -\frac{dZ}{2\alpha q}$ und $dy = \frac{-Z dZ}{2\alpha q \sqrt{1-Z^2}}$,
 folglich

$$y = \frac{-\cos. \omega + \sqrt{1-Z^2}}{2\alpha q},$$

wenn das Integral mit y zugleich verschwinden soll. Heißt nun wieder $2l$ der Abstand der beiden Ebenen von einander, so ist für $y = 2l$, $z = q'$, und $Z = \sin.\omega$, weil $\alpha q'^2 - \alpha q^2 = \sin.\omega - \sin.\omega'$; folglich $2l = \frac{\cos.\omega' - \cos.\omega}{2\alpha q}$ und $q = \frac{\cos.\omega' - \cos.\omega}{4\alpha l}$. Diese Höhe verhält sich also umgekehrt wie die Entfernung der beiden Ebenen von einander, wenn diese Entfernung sehr geringe ist.

Die Untersuchung führt noch zu folgendem Theoreme, welches ein Zusatz zu demjenigen ist, wodurch wir in §. 17. die Erhebung des Flüssigen zwischen zwei einander umgebenden prismatischen Flächen gefunden haben. „Wenn die Ebenen einander äußerst nahe sind, so ist die Erhebung des Flüssigen zwischen ihnen im umgekehrten Verhältnisse ihres Abstandes von einander, und ist gleich der halben Summe der Erhebungen, welche Statt finden würden, wenn ein Mahl beide Ebenen aus der Materie der erstern, und das andere Mahl aus der Materie der zweiten Ebene beständen, — wo dann auch hier die Depression als negative Erhebung in Betrachtung kommt.“

Hält man diesen Lehrsatz mit dem vorher gehenden zusammen, so zeigt sich, daß die abstoßende Kraft der beiden Ebenen viel geringer ist, als ihre anziehende Kraft, die entsteht, wenn man beide einander sehr nahe bringt, und durch welche die beiden Ebenen angetrieben werden, sich mit beschleunigter Bewegung einan-

der zu nähern. In diesem letztern Falle ist die Elevation des Flüssigen zwischen den Ebenen sehr viel gröfser, als die Erhebung desselben an ihren äufsern Seiten; man kann dann also das Quadrat der letztern in Vergleichung gegen das Quadrat der erstern weglassen, und es verhält sich folglich alsdann die Kraft, welche die Ebenen gegen einander treibt, wie $\frac{1}{2}q^2$, das heifst, wie das Quadrat der Erhebung des Flüssigen an der innern Seite der Ebenen, oder (weil $q = \frac{\text{const.}}{l}$) umgekehrt wie das Quadrat der Abstände der Ebenen von einander. Diese Attraction befolgt also dasselbe Gesetz, wie die allgemeine Schwere, und eben das Gesetz scheinen alle Attractionen und Repulsionen, z. B. bei der Elektricität und dem Magnetismus, zu befolgen, wenn sie in merklichen Entfernungen wirken.

c) *Bestätigende Versuche von Hrn. Haüy.*

21. Ich wünschte dieses auffallende Phänomen des Abstoßens, welches sich bei vermehrter Annäherung in ein Anziehen verwandelt, auch durch *Erfahrung* bestätigt zu sehen, und habe mich deshalb an Herrn Haüy gewendet, der auf mein Ersuchen mehrere Versuche dieser Art angestellt hat. Er bediente sich dabei Platten von Elfenbein, welche bekanntlich vom Wasser nass werden, und Blätter venetianischen Talks (*talc laminaire*), die sich fett anfühlen und deshalb nicht vom

vom

vom Wasser befeuchtet werden. Die Versuche be-
 stätigten vollkommen das Resultat der Theorie,
 wie folgende Nachricht, welche er mir mittheilte,
 beweiset. „Ich hing an einen sehr zarten Faden
 „ein kleines quadratisches Blättchen venetianischen
 „Talk so auf, daß es mit der untern Seite in dem
 „Wasser eingetaucht war. In eben dieses Wasser
 „tauchte ich den untern Theil eines Parallelepi-
 „peds von Elfenbein so ein, daß die eine Seite
 „desselben dem Talkblättchen parallel und nur ei-
 „nige Centimeter davon entfernt war, und bewegte
 „es in unverrückter paralleler Lage sehr langsam
 „nach dem Talkblättchen zu, wobei ich von Zeit
 „zu Zeit mit der Bewegung inne hielt, um sicher zu
 „seyn, daß die Bewegung, welche vielleicht in dem
 „Flüssigen entstanden seyn konnte, keinen Einfluß
 „auf den Versuch habe. Das Talkblättchen entfern-
 „te sich von dem Parallelepipede. Ich fuhr so fort,
 „dieses dem Blättchen mit äußerster Langsamkeit
 „immer mehr zu nähern, bis die Entfernung beider
 „Körper nur noch sehr geringe war; plötzlich näher-
 „te sich das Talkblättchen dem Parallelepipede und
 „kam damit in Berührung. Als ich beide Körper
 „von einander trennte, fand ich das Elfenbein bis
 „auf eine gewisse Höhe über dem Niveau des Was-
 „fers befeuchtet, und wenn ich dann den Versuch,
 „ohne es vorher abgetrocknet zu haben, wieder-
 „holte, so fing die Attraction früher an, zuweilen
 „vom ersten Augenblicke des Eintauchens an, oh-
 „ne daß ein Abstoßen vorher gegangen wäre.

Q

„Mehrmahlige sorgfältige Wiederholung des Versuchs gab immer einerlei Resultat.“

Wenn das Elfenbein vollkommen befeuchtet ist, so bildet das Wasser, welches die Oberfläche desselben bedeckt, eine neue, das Talkblättchen anziehende, Ebene, für welche der Winkel ϑ so groß wie möglich, nämlich einem rechten Winkel gleich ist (§. 12.); der Werth von $2l$, welcher die Grenze des Anziehens und Abstoßens bestimmt, wird also in diesem Falle größer; so wie die Beobachtung es ergiebt. Ueberdies kann es seyn, daß wegen einer Reibung des Flüssigen an der Talkplatte der Winkel ϑ gleich null oder sehr klein wird, wenn das Flüssige nach seiner Erhebung zwischen den sehr genäherten Flächen sich wieder senkt, (so wie man beim Quecksilber im Barometer bemerkt, daß beim Sinken dieser Winkel abnimmt,) und dann wird der Ausdruck für $2l$ unendlich, und es geht vor dem Anziehen kein merkliches Abstoßen vorher.

O. *Ueber die Adhäsion einer Scheibe an der Oberfläche eines Flüssigen.*

22. Man bringe eine Scheibe mit der Oberfläche eines still stehenden Flüssigen, das in einem großen Gefäße enthalten ist, in Berührung. Will man sie wieder fort heben, so erfährt man selbst im luftleeren Raume einen Widerstand, der desto beträchtlicher ist, je größer die Oberfläche der Scheibe ist. Indem man nämlich die Scheibe

hebt, erhebt man zugleich eine Säule des Flüssigen, welche ihr bis zu einer gewissen Grenze folgt, und sich dann von ihr trennt, um in das Gefäß zurück zu fallen. An dieser Grenze könnte die flüssige Säule im Gleichgewichte erhalten werden, wenn die Kraft, welche die Scheibe hebt, genau diesem Zustande des Gleichgewichts angemessen wäre; und dieses würde Statt finden, wenn die Kraft so groß wäre als das Gewicht der Scheibe und der gehobenen Säule des Flüssigen zusammen genommen. Die Adhäsion der Scheibe an dem Flüssigen ist also eins der Phänomene, welche durch die Haarröhren-Kraft bewirkt werden. Um dieses indess auf eine unumstößliche Art darzuthun, will ich die Kraft dieser Adhäsion durch die Analyse bestimmen, und dann mit der Erfahrung vergleichen.

Es sey (Fig. 20.) AB eine kreisförmige Scheibe, welche horizontal bis zu der eben erwähnten Grenze erhoben ist; $CABD$ sey ein vertikaler, durch den Mittelpunkt G der Scheibe gehender Querschnitt der gehobenen Säule des Flüssigen; so ist AEC die Curve, durch deren Umdrehung um die vertikale Achse GH die Oberfläche der gehobenen Säule bestimmt wird. Der Scheibe Halbmesser sey $= l$, und $l + y$ sey der Abstand irgend eines Punktes der krummen Oberfläche von der Achse, und z die Höhe eben dieses Punktes über dem Niveau des unbegrenzten Flüssigen. Die Differentialgleichung für die Oberfläche findet sich aus §. 4.; wo aber jetzt $b = \infty$ wird, weil der

Q 2

niedrigste Punkt der krummen Fläche in der unbegrenzten Niveauläche selbst liegt. Es ist also für diesen Fall

$$\frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)^3}} + \frac{1}{l+y} \frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)}} = 2\alpha z.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, wollen wir ω den Winkel nennen, welchen ein Element der Curve mit einer Horizontallinie macht, welche durch den untersten Punkt dieses Elementes an die Achse GH gezogen wird. Dann ist $\frac{dz}{dy} = -\tan \omega$, und die Gleichung wird zu folgender:

$$\frac{d\omega}{dy} \cos \omega + \frac{\sin \omega}{l+y} = -2\alpha z.$$

Multipliziert man mit $dz = -dy \cdot \tan \omega$, und integriert, so wird

$$+ \cos \omega + \int \frac{dz \cdot \sin \omega}{l+y} = \text{const.} - \alpha z^2.$$

Soll dieses Integral mit $z = 0$ verschwinden, so wird für den Anfang des Integrals $\omega = 0$, weil die Oberfläche sich in dem Niveau des unbegrenzten Flüssigen verliert; also $\text{const.} = 1$. Folglich erhalten wir

$$\alpha z^2 = 1 - \cos \omega - \int \frac{dz \cdot \sin \omega}{l+y},$$

wo dann auch das letztere Integral mit $z = 0$ anfängt.

Für eine beträchtlich große Scheibe ist l sehr bedeutend groß in Vergleichung mit $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, und man erhält daher dann einen ersten genäherten

Werth von z , wenn man in der vorstehenden Gleichung das unaufgelösete Integral wegläfst. Dieser *genäherte* Werth ist

$$z = \sin. \frac{1}{2} \omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha}}.$$

Wird das Differential dieses Werths in dem Gliede

$$-\int \frac{dz \cdot \sin. \omega}{l + y} \text{ gebraucht, so hat man}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d\omega \cdot \sin. \frac{1}{2} \omega \cdot \cos. \frac{3}{2} \omega}{l + y}, \text{ und dieses Integral}$$

ist, von $\omega = 0$ an genommen,

$$= -\frac{2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}}{3(l+y)} \cdot (1 - \cos. \frac{3}{2} \omega) - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\alpha}} \int \frac{dy \cdot (1 - \cos. \frac{3}{2} \omega)}{(l+y)^2}.$$

Das Element dieses letzten Integrals ist nie unend-

lich; denn wenn auch $\frac{dy}{d\omega}$ unendlich wird für

$$\omega = 0, \text{ indem es dann } = -\frac{dz \cdot \cos. \omega}{d\omega \cdot \sin. \omega} = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{\cos. \omega}{\sin. \frac{1}{2} \omega}$$

ist, so wird doch jenes Differential nicht unendlich, weil es den letztern Coëfficienten, mit $d\omega \cdot (1 - \cos. \frac{3}{2} \omega)$ multiplicirt, enthält.

Läfst man die mit $(l+y)^2$ dividirten Glieder in Vergleichung gegen die mit $l+y$ dividirten aus diesem Integrale weg, so ist

$$-\int \frac{dz \cdot \sin. \omega}{l + y} = -\frac{2\sqrt{2} \cdot (1 - \cos. \frac{3}{2} \omega)}{3 \cdot (l+y) \cdot \sqrt{\alpha}}.$$

Bedeutet ω' den Winkel, welchen der äußerste Theil der Curve mit der nach dem Centro der Scheibe längs ihrer untern Oberfläche gezogenen Linie macht, und z' den äußersten Werth von z , oder die ganze Höhe der durch die Scheibe geho-

benen Säule, so giebt unsere oben gefundene Formel

$$\alpha z'^2 = 1 + \cos.\omega' - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{(1 - \sin.\omega')}{l},$$

weil hier $\omega = \pi - \omega'$ ist. Es ist also beinahe

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \cos.\frac{1}{2}\omega' - \frac{(1 - \sin.\frac{3}{2}\omega')}{3l\alpha \cdot \cos.\frac{1}{2}\omega'}.$$

Um nun das ganze Gewicht der gehobenen Säule zu haben, muß man diesen Werth von z' mit πl^2 , als dem Inhalte der untern Fläche der Scheibe, multipliciren, und das Gewicht des Flüssigen, welches außerhalb dieses Cylinders gehoben ist, hinzu addiren. Das Volumen des letztern ist $= -2\pi \int (l+y) z dy$, wenn man dieses Integral von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi - \omega'$ nimmt. Wir hatten aber vorhin $-2\alpha z = \frac{d\omega \cdot \cos.\omega}{dy} + \frac{\sin.\omega}{l+y}$, also ist

$$\begin{aligned} -\int (l+y) \cdot z dy &= \int \frac{(l+y) \cdot d\omega \cdot \cos.\omega + dy \cdot \sin.\omega}{2\alpha} \\ &= \frac{(l+y) \cdot \sin.\omega}{2\alpha} + \text{const.}; \end{aligned}$$

und dieses Integral muß auf die Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \pi - \omega'$ ausgedehnt werden. Für $\omega = 0$ verschwindet $(l+y) \cdot \sin.\omega$; zwar wird dann $l+y = \infty$, aber es läßt sich zeigen, daß das Produkt dennoch $= 0$ ist. Denkt man sich nämlich $l+y$ durch eine nach den Potenzen von ω wachsende Reihe ausgedrückt, so wird das erste Glied von dieser Form seyn $A \cdot \omega - r$; weil hingegen z mit ω zugleich verschwindet, so muß in einer nach wachsenden Potenzen von ω geordneten Reihe,

welche z ausdrückt, das erste Glied von der Form $A' \cdot \omega^{r'}$ seyn, wenn r und r' positive Zahlen sind. Die Gleichung $\frac{dz}{dy} = -\text{tang.} \omega$ giebt also, wenn man nur auf diese ersten Glieder Rücksicht nimmt, für sehr kleine Werthe von ω

$$\frac{r' A' \cdot \omega^{r'}}{r A \cdot \omega^{-r}} = \omega = \frac{r' A'}{r A} \cdot \omega^r + r',$$

und die Vergleichung der Potenzen von ω zeigt, daß $r + r' = 1$ oder $r' = 1 - r$ ist. Setzt man also in dem Produkte $(l + y) \cdot \sin. \omega$, für die kleinsten Werthe von ω , $l + y = y = A \omega^{-r}$ und $\sin. \omega = \omega$, so wird dieses Produkt $= A \omega^{1-r} = A \omega^{r'}$, und es verschwindet also mit ω zugleich. Den vollständigen Werth des Integrals findet man nun, wenn man $\omega = \pi - \omega'$ und $y = 0$ setzt, also

$$-2\pi \int (l + y) z dy = \frac{\pi}{\alpha} \cdot l \cdot \sin. \omega',$$

und folglich ist das *Volumen der ganzen gehobenen Säule* =

$$\frac{\pi l^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \cos. \frac{1}{2} \omega'}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi l}{3\alpha \cdot \cos. \frac{1}{2} \omega'} \cdot [1 - 6 \sin. \frac{1}{2} \omega' + 5 \sin. \frac{3}{2} \omega'].$$

Nach dieser Formel lassen sich die Resultate von Versuchen vergleichen, wenn man nur noch α kennt. Wir fanden aber in §. 6., wenn dort für $\frac{g}{H} = \alpha$ diese letztere GröÙe gesetzt wird, und q die Höhe ist, welche das Flüssige in der Achse eines cylindrischen Haarröhrchens vom Durchmesser $= h$ erreicht, da denn das dortige $2l$ hier $= h$ ist,

$$q = \frac{2 \cdot \sin. \vartheta'}{\alpha h} \cdot \left[1 - \frac{h}{2q \cdot \sin. \vartheta'} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \frac{(1 - \cos. \vartheta')}{\sin. \vartheta'} \right) \right]$$

oder weil $\vartheta' = \pi - \omega'$,

$$q = \frac{2 \cdot \cos. \omega'}{\alpha h} \cdot \left(1 - \frac{h}{6q \cdot \cos.^3 \omega'} \cdot (1 - \sin. \omega')^2 \cdot (1 + 2 \sin. \omega') \right).$$

Diese Gleichung giebt beinahe

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{h}{2 \cdot \cos. \omega'} \cdot \left(q + \frac{h}{6 \cdot \cos.^3 \omega'} \cdot (1 - \sin. \omega')^2 \cdot (1 + 2 \sin. \omega') \right).$$

Hierbei muß q negativ angenommen werden, wenn statt der Erhebung Depreffion Statt findet.

Diese Gleichung zeigt denn auch, daß man, um Höhen zu erhalten, welche dem innern Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional find, zu den beobachteten Höhen q das Sechstel des Durchmessers, multiplicirt mit $\frac{(1 - \sin. \omega')^2 \cdot (1 + 2 \sin. \omega')}{\cos.^3 \omega'}$, addiren muß, und dieser Factor wird $= 1$ für $\omega' = 0$. Auf diese Correction muß man bei so genauen Beobachtungen, als diejenigen find, die wir anführen werden, nothwendig Rücksicht nehmen.

Versuche von Gay-Lussac.

23. Hr. Gay-Lussac hat auf mein Ersuchen *Versuche* über diesen Gegenstand unternommen, und hat zur Abmessung der Erhebung oder der Senkung des Flüssigen in durchsichtigen Haarröhrchen ein Mittel erdacht, wodurch seine Versuche die Genauigkeit astronomischer Beobachtungen erhalten. Man kann daher seine Resultate mit völligem Vertrauen annehmen. Er bediente sich dabei gut calibrirter Röhren, und ihr innerer Halbmesser wurde durch das Gewicht der sie füllenden Quecksil-

berfäulen bestimmt, welches die genaueste Methode ist, diese Halbmesser zu messen.

Die Physiker sind nicht einstimmig über die Höhe, zu welcher sich das *Wasser* in *Glasröhren* von gegebenem Halbmesser erhebt; ja ihre Angaben weichen so von einander ab, daß einige diese Höhe doppelt so groß, als andere, setzen. Dieser Unterschied rührt vorzüglich von der mindern oder mehrern Befeuchtung der Röhrenwände her; wenn diese sehr nass sind, wie es bei den folgenden Versuchen der Fall war, so erhebt sich das Wasser in einerlei Röhre immer fast genau bis zu einerlei Höhe. Herr Gay-Lussac stellte die folgende Beobachtung in einer Röhre von weißem Glase an, deren innerer Durchmesser $= 1,29441$ Millimeter war. Die Erhebung des niedrigsten Punktes des in ihr enthaltenen Wassers, über dem Wasser-Niveau in dem sehr weiten Gefäße, worin ihr unteres Ende eingetaucht war, betrug, nach mehrern übereinstimmenden Versuchen, $23,1634$ Millim., bei einer Temperatur von etwa $8\frac{1}{2}$ Gr. der hunderttheiligen Scale. Da das Wasser die Röhre vollkommen befeuchtete, so war in diesem Falle der Winkel $\omega' = 0$. Vermehrt man daher jene beobachtete Höhe um ein Sechstel des Halbmessers der Röhre, so erhält man die *corrigirte Höhe* $= 23,3791$ Millimeter. Diese GröÙe, mit dem Durchmesser der Röhre multiplicirt, giebt

$$\frac{2}{\pi} = 30,2621 \text{ Quadrat-Millimeter.}$$

In einer andern Röhre, deren innerer Durchmesser $= 1,90381$ Millimeter war, beobachtete Herr Gay-Lussac, bei eben der Temperatur, die Erhebung des niedrigsten Punktes der hohlen Oberfläche über das Niveau $= 15,5861$, also die corrigirte Höhe $= 15,9034$ Millimeter. Leitet man aus der corrigirten Höhe beim ersten Versuche die corrigirte Höhe ab, welche für die zweite Röhre Statt finden muß, so findet sie sich $= 15,896$ Millimeter, welches wenig von der Beobachtung abweicht. Man sieht daher, daß die corrigirten Höhen überaus nahe den Durchmessern der Röhren umgekehrt proportional sind, und daß man bei sehr genauen Beobachtungen die Correction durch Addition von einem Sechstel des Durchmessers der Röhre nicht vernachlässigen darf.

Man könnte den Werth von $\frac{2}{\alpha}$ auch aus der Höhe bestimmen, welche der niedrigste Punkt der Oberfläche des Wassers zwischen *zwei vertikalen* und parallelen, einander sehr genäherten, *Ebenen* erreicht, wenn diese Ebenen mit ihrem untern Ende in ein weites Gefäß mit Wasser getaucht sind. Herr Gay-Lussac fand aus fünf, wenig von einander abweichenden Versuchen, diese Höhe $= 13,574$ Millimeter, wenn der Abstand beider Ebenen von einander $1,069$ Millimeter betrug. Dieser Abstand war genau dem Durchmesser eines durch den Drahtzug gezogenen Drahtes gleich, und um diesen Durchmesser zu bestimmen, waren mehrere

Stücke des Drahtes ganz dicht an einander gelegt, und die ziemlich beträchtliche Breite, welche der Summe ihrer Durchmesser gleich war, mit Sorgfalt gemessen, und mit der Anzahl der Durchmesser dividirt worden. Die Glasplatten waren vollkommen eben und sehr stark befeuchtet; die Temperatur betrug während der Versuche 16° C. Addirt man zu der beobachteten Höhe des Wasserstandes das Produkt aus dem halben Abstände der Ebenen von einander in $1 - \frac{1}{4}\pi$ (wo $\pi = 3,14159$) und multiplicirt die Summe durch den Abstand der beiden Ebenen, $= 1,069$, so hat man den Werth von $\frac{1}{\alpha}$ (nach §. 9. am Ende). Die eben angeführten Versuche ergeben hiernach diesen Werth $\frac{1}{\alpha} = 14,524$ Millimeter. Dieser Werth muß etwas vermehrt werden, um ihn auf die bei den vorigen Versuchen Statt findende Temperatur von $8\frac{1}{2}$ Gr. zurück zu führen, weil die Erhebung mit der Temperatur des Flüssigen wächst. Uebrigens weicht er wenig von dem aus jenen Versuchen abgeleiteten $= 15,13$. ab. Auch hier wird also wieder das Resultat der Theorie bestätigt, daß die Erhebung zwischen zwei parallelen Ebenen ungefähr die Hälfte der Höhe ist, welche das Flüssige in einem Haarröhrchen erlangen würde, dessen Durchmesser dem Abstände der Ebenen von einander gleich ist.

Wir wollen indess hier den aus den Versuchen mit engen Röhren hergeleiteten Werth beibehalten,

und also für $8\frac{1}{2}$ Gr. C. Temperatur $\frac{2}{\alpha} = 30,2621$ Quadrat-Millimeter setzen. Dieses angenommen, giebt die vorige Formel für das *Volumen Wassers, welches durch eine kreisförmige Scheibe von weissem Glase, deren Durchmesser 118,366 Millimeter ist, angehoben wird,*

$$= 60,5327 - 0,9378 \text{ Kubik-Centimeter.}$$

Das Gewicht des Kubik-Centimeters Wasser von der *größesten* Dichtigkeit ist $= 1$ Gramme; aber da die Versuche bei $8\frac{1}{2}$ Gr. Temperatur angestellt worden, so wiegt der Kubik-Centimeter Wassers in diesem Falle etwas weniger als 1 Gramme. Zieht man diese Correction in Betrachtung, so findet man das *Gewicht* der gehobenen Wasserfäule, für den Augenblick, da die Scheibe im Begriffe ist, sich abzulösen, $= 59,5878$ Grammen. Herr Gay-Lussac hat durch mehrere gut übereinstimmende Versuche dieses Gewicht $= 59,40$ Gr. gefunden, also mit dem Resultate der Analysis so genau übereinstimmend, als man nur immer erwarten kann.

Bei Versuchen mit *Alkohol*, dessen specifische Schwere bei $8\frac{1}{2}$ Gr. Temperatur $= 0,81961$ war, wenn man die specifische Schwere des gleich warmen Wassers $= 1$ setzte, fand sich bei 8 Gr. Temperatur die Erhebung, welche er in der vorhin zuerst gebrauchten Röhre über dem Niveau annahm, $= 9,18235$ Millimeter. Da auch der Alkohol das Glas vollkommen befeuchtet, so muß

man zu dieser Höhe ein Sechstel des Durchmessers der Röhre addiren, so dafs sie $= 9,39808$ Millim. wird; und diese Gröfse mit dem Durchmesser der Röhre multiplicirt, giebt, in Beziehung auf diesen Alkohol,

$$\frac{2}{\alpha} = 12,1649 \text{ Quadrat-Millimeter.}$$

Mit Hülfe dieses Werthes läfst sich nun die corrigirte Höhe für die zweite Röhre finden, wenn man $\frac{2}{\alpha}$ mit dem Durchmesser dieser Röhre dividirt; die Rechnung giebt sie $= 6,38976$, und Hr. Gay-Lussac fand sie durch Beobachtung $= 6,40127$. Diese so nahe Uebereinstimmung zeigt, dafs die corrigirten Erhebungen des Alkohols in sehr engen Röhrchen sich umgekehrt wie die Durchmesser der Röhren verhalten.

Gebraucht man diesen Werth von $\frac{2}{\alpha}$, so findet man das Volumen des Alkohols, den die vorhin gebrauchte Glascheibe in dem Augenblicke des Losreisens von der Oberfläche des Alkohols erhoben hat,

$$= 38,3792 - 0,3770 \text{ Kubik-Centimeter.}$$

Wird dieses Volumen mit dem specifischen Gewichte des Alkohols $= 0,81961$ multiplicirt, so erhält man das Volumen Wasser, welches eben so viel wiegt als diese Masse Alkohol, $= 31,1469$ Kubik-Centimeter Wasser von 8 Gr. Temperatur, von welchem das Gewicht $= 31,1435$ Grammen ist. So grofs müfste also das Gewicht seyn, welches gerade hinreicht, jene Scheibe, bei 8 Gr. Tempe-

ratur, von dem Alkohol zu trennen. Hr. Gay-Lussac fand durch Beobachtung dieses Gewicht $= 31,08$ Grammen, nahe genug der Berechnung gemäß.

Alkohol, dessen specifische Schwere bei 10 Gr. Temperatur $= 0,8595$ war, wenn die des Wassers bei gleicher Temperatur $= 1$ ist, stieg in der ersten Röhre zu 9,30097 Millimeter, welches die corrigirte Höhe $= 9,51649$ Millimeter und für diesen Alkohol den Werth von $\frac{2}{\alpha} = 12,31905$ Quadrat-Millimeter giebt. Hieraus folgt das Gewicht, welches nöthig ist, um die eben erwähnte Scheibe von der Oberfläche dieses Alkohols abzureißen, $= 32,86$ Grammen. Die Beobachtung des Herrn Gay-Lussac gab 32,87.

Endlich für Alkohol, dessen Dichtigkeit bei 8 Gr. Temperatur $= 0,94153$ war, fand sich die Erhebung in der ersten Röhre $= 9,99727$ Millim., also $\frac{2}{\alpha} = 13,2198$ Quadrat-Millimeter, und folglich die Adhäsion der vorhin gebrauchten Scheibe $= 37,283$ Grammen. Herr Gay-Lussac fand bei eben der Temperatur durch Beobachtung 37,152 Grammen.

Terpenthin-Oehl, dessen specifisches Gewicht bei 8 Gr. Temperatur, verglichen mit der des eben so warmen Wassers, $= 0,869458$ war, stieg in der ersten Röhre auf 9,95159 Millimeter. Dieses giebt die corrigirte Höhe $= 10,16729$ und $\frac{2}{\alpha} = 13,1606$ Quadrat-Millimeter, und daraus findet sich die

Adhäsion der vorigen Scheibe an dieses Flüssige durch Rechnung = 34,350 Grammen. Hr. Gay-Lussac fand sie durch Beobachtung bei eben der Temperatur = 34,104 Gr., abermahls wenig von der Berechnung verschieden.

Herr Gay-Lussac hat mehrere Versuche über die Adhäsion eben dieser Scheibe an Quecksilber gemacht; aber um sie mit der Theorie zu vergleichen, muß man *erstens* die Erhebung des Quecksilbers in einer Glasröhre von gegebenem Durchmesser, und *zweitens* den Winkel kennen, welchen die Oberfläche des Quecksilbers mit dem Glase im Punkte der Berührung bildet. Beide Stücke sind durch die Beobachtung schwer zu bestimmen, weil die Reibung des Quecksilbers an dem Glase der Erhebung oder Niederdrückung des Quecksilbers im Haarröhrchen zu viel Hinderniß in den Weg legt, und weil sie auch den Neigungswinkel der Oberfläche des Quecksilbers gegen die Röhrenwand erheblich ändern kann. Die Vergleichung mehrerer Beobachtungen über Phänomene, welche von der Haarröhren-Kraft abhängen, mit der Theorie, hat mir, als mittleren Werth von $\frac{2}{\alpha}$ für das Quecksilber, bei einer Temperatur von 10 Graden,

$$\frac{2}{\alpha} = 13 \text{ Quadrat-Millimeter}$$

gegeben, und für den spitzen Winkel, welchen die Wände des Glasgefäßes mit einer Tangentialebene machen, welche an die Oberfläche des Quecksilbers

an der Grenze der Wirkungssphäre der Wände gelegt wird, 48 Centesimal-Grade. Ich werde von diesen Gröſsen Gebrauch machen, obgleich sie vielleicht durch zahlreichere Beobachtungen noch berichtigt werden können. Sie geben $\omega' = 152$ Gr. und $\frac{1}{2}\omega' = 76$ Gr. der Centesimaltheilung. Unsere Formel bestimmt daher das Gewicht der durch die vorige Glasplatte gehobenen Queckſilberſäule $= 207$ Grammen. Hr. Gay-Lussac fand zwischen den Resultaten seiner Versuche über diesen Gegenstand äusserst groſse Verschiedenheiten. Bei seinen Beobachtungen über die Adhäsion der Glasſcheibe an der Oberfläche eines Flüssigen, hing er diese Scheibe an eine sehr genaue Wage und hob sie durch sehr kleine Gewichte, die allmählich und langsam in die gegenüber hängende Wagſchale zugelegt wurden. Die Summe der kleinen Gewichte in dem Augenblicke, da die Scheibe sich von der Oberfläche des Flüssigen los riſs, bestimmte das Gewicht der ganzen gehobenen Säule. Verfuhr er nun beim Queckſilber auf diese Weise, so fand er, daſs diese Summe deſto gröſser war, je langsamer er die Gewichte nachlegte, und als er sehr lange Zeiträume zwischen dem Auflegen der Gewichte verfließen lieſs, so konnte er es dahin bringen, daſs die Summe derſelben von 158 bis 296 Grammen ſtieg. Diese Summe hängt, wie die vorige Formel zeigt, von dem spitzen Winkel ab, welchen die Oberfläche des Queckſilbers mit der des Glases macht, und iſt
 sehr

sehr nahe dem Sinus der Hälfte dieses Winkels proportional; es zeigt aber die tägliche Erfahrung am Barometer, daß dieser Winkel sich erheblich vermehren kann, wenn das Quecksilber sehr langsam sinkt, weil dann die Reibung des Flüssigen gegen die Wände der Röhre, die an den Wänden liegenden Theilchen am Sinken hindert. Eben so hindert die Reibung die Quecksilbersäule, sich von der Scheibe los zu reißen; reißt sie sich aber los, so verläßt sie erst den Rand der Scheibe, dann wird sie immer schmaler und verläßt endlich die Scheibe ganz. Die Reibung des Quecksilbers gegen die untere Fläche der Scheibe muß diesen Erfolg hindern, und eben so, wie beim Sinken des Barometers, den spitzen Berührungswinkel der Oberfläche des Quecksilbers und des Glases vermindern. Man übersieht daher, daß, wenn alle Theilchen der flüssigen Säule Zeit genug haben, um sich dem hieraus entstehenden neuen Zustande des Gleichgewichtes zu accommodiren, das ganze zum Losreißen der Scheibe nöthige Gewicht leicht noch sehr viel größer werden kann. Dieses Gewicht würde sogar auf 400 Grammen steigen, wenn der Berührungswinkel ein rechter wäre.

Scheiben von *verschiedenen Materien*, die mit einem Flüssigen vollkommen befeuchtet sind, müssen, bei gleichen Halbmessern, der Trennung von diesem Flüssigen gleichen Widerstand entgegen setzen; denn in diesem Falle wird der Widerstand durch den Zusammenhang des Flüssigen mit sich

R

selbst zuwege gebracht; nämlich durch den Zusammenhang des Flüssigen mit der Schichte, welche die untere Seite der Scheibe überzieht. Um diesen Satz zu prüfen, brachte Herr Gay-Lussac eine kupferne Scheibe von 116,604 Millimeter Durchmesser in Berührung mit Wasser, und fand bei $18\frac{1}{2}$ Grad Temperatur das Gewicht, welches nöthig war, um sie abzureißen, $= 57,945$ Grammen. Nimmt man nun an, daß für Kupfer der Werth von $\frac{2}{\alpha}$ eben so groß, als für Glas ist, nämlich $= 30,2621$ Quadrat-Millimeter, so findet man das Gewicht des gehobenen Wassers $= 57,757$ Grammen, welches äußerst wenig von der Beobachtung abweicht.

24. Wenn man die Adhäsion von Scheiben aus verschiedenen Materien an der Oberfläche desselben Flüssigen beobachtet, so läßt sich das Verhältniß der *anziehenden Kräfte* dieser Materien auf das Flüssige bestimmen. Bedient man sich kreisförmiger Scheiben von einem sehr großen Durchmesser, so ist, nach dem Vorigen, die

Adhäsion beinahe $= \pi l^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \cdot D' \cdot \cos. \frac{1}{2} \omega'$,
wenn D' die Dichtigkeit des Flüssigen bedeutet. Nennt man also p das Gewicht, welches nöthig ist, um die Scheibe von der Oberfläche des Flüssigen los zu reißen, so ist jene GröÙe $= p$. Hier beziehen sich die GröÙen D' und α bloß auf das Flüssige, und es sind daher die Werthe, welche $\cos. \frac{1}{2} \omega'$ bei Scheiben von gleichen Durchmessern, die aus verschie-

denen Substanzen bestehen, erhält, der Gröſſe p , folglich $\cos.^2 \frac{1}{2} \omega'$ der Gröſſe p^2 proportional. Wir wiſſen aber (aus §. 13.), daſſ $\cos.^2 \frac{1}{2} \omega' = \frac{\rho}{\rho'}$ iſt; alſo ſind, da ρ' ſich auf das Flüſſige bezieht, die den verſchiedenen Scheiben entſprechenden Werthe von ρ den Quadraten der correſpondirenden Gewichte p proportional. Dieſe Werthe beziehen ſich (nach §. 1. am Ende) auf gleiche Volumina, und man muſs ſie mit den Dichtigkeiten der Subſtanzen dividiren, um die Werthe zu erhalten, welche ſich auf gleiche Maſſen beziehen. Dieſe Werthe von ρ würden den Attractivkräften proportional ſeyn, wenn das Geſetz der Anziehung für die verſchiedenen Subſtanzen einerlei wäre; in dieſem Falle alſo verhielten ſich die *Attractivkräfte der verſchiedenen Materien auf das Flüſſige*, bei gleichem Volumen, wie die Quadrate der Gewichte, die erfordert werden, um einerlei Scheibe von der Oberfläche des Flüſſigen abzureiſſen.

Wenn eine Flüſſigkeit die Scheibe vollkommen befeuchtet, ſo zeigen die Beobachtungen über die Adhäsion bloß die Attraction des Flüſſigen gegen ſich ſelbſt. Benetzt das Flüſſige die Scheiben nicht vollkommen, ſo bringt die Reibung deſſelben gegen die untere Seite groſſe Aenderung in den Reſultaten der beobachteten Adhäsion hervor, ſo wie wir dieſes bei Glasplatten, die an einer Queckſilberfläche anliegen, geſehen haben. In dieſem Falle iſt es ſchwer, dasjenige Reſultat aus-

zufinden, welches ohne diese Anomalie Statt finden würde, und es läßt sich folglich die Attraction der Scheibe auf ein solches Flüssiges nicht sicher bestimmen.

Wir haben im Vorigen gesehen (§. 16.), daß der Berührungswinkel des Queckfilbers mit dem Glase, im Wasser, $= 0$ ist, oder daß die Oberfläche des mit Wasser bedeckten Queckfilbers in einem gläsernen Haarröhrchen eine convexe Halbkugel bildet. Hieraus folgt, wenn man eine Glascheibe an die Oberfläche des Queckfilbers anlegt und dann die Glascheibe und das Queckfilber im Gefäße mit Wasser bedeckt, daß $\omega' = \pi$ seyn, und folglich der vorige Ausdruck für das Gewicht der mit der Scheibe gehobenen Queckfilbersäule $= 0$ werden muß; die Scheibe muß sich dann also ohne allen Widerstand vom Queckfilber trennen lassen. Und in der That hat Herr Gay-Lussac dieses bei seinen Versuchen so gefunden.

P. Figur eines grossen Queckfilber-Tropfens, und Depression des Queckfilbers in einer Glasröhre von bedeutendem Durchmesser.

24. Wenn sich auf einer ebenen, horizontalen Glasplatte ein breiter, kreisförmiger Queckfilbertropfen befindet, so ist der vertikale, durch des Tropfens Centrum gehende, Querschnitt desselben am Scheitel sehr wenig gekrümmt; aber wenn man sich von diesem Punkte entfernt, so nimmt die Krümmung immer mehr zu bis an den

Punkt, wo die Tangente vertikal wird. In diesem Punkte ist die Breite des Tropfens am größten und die Krümmung am stärksten; unterhalb nähert die Oberfläche sich wieder der Achse, und stößt endlich unter einem spitzen Winkel mit dem Glase zusammen. Wir wollen jetzt die Gleichung für diese Durchschnits-Curve bestimmen.

Es sey b der Krümmungshalbmesser der Curve am Scheitel, und es sey zugleich in diesem Scheitel der Anfangspunkt der horizontalen Ordinaten u und der vertikalen Ordinaten z , durch welche die Lage irgend eines Punktes der Curve bestimmt werde. Es ist dann nach §. 4.

$$\frac{\frac{d^2 z}{du^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{u} \cdot \frac{dz}{du}}{\left(1 + \frac{dz^2}{du^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 2az = \frac{2}{b};$$

Ist der Tropfen sehr breit, so kann man für einen grossen Theil seiner Oberfläche die dritten Potenzen von $\frac{dz}{du}$ vernachlässigen, und dann erhält die Gleichung folgende Form

$$u \cdot \frac{d^2 z}{du^2} + \frac{dz}{du} - 2auz - \frac{2u}{b} = 0.$$

Diese vereinfachte Gleichung ist dennoch nach den bekannten Methoden nicht integrabel, aber man kann ihr Genüge thun, wenn man

$$z = \frac{1}{ab\pi} \int d\varphi \cdot [e^{u\sqrt{2a}} \cdot \cos.\varphi - 1]$$

setzt, und das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ nimmt. Dieser Werth ist nicht das vollständige Integral dieser Gleichung, aber er genügt für den

jetzigen Fall, wo z und $\frac{dz}{du}$ mit u zugleich verschwinden.

Dafs dieser Werth der Differentialgleichung entspreche, läst sich folgender Maßen übersehen. Es folgt aus

$$z = \frac{1}{\alpha b \pi} \int d\varphi [e^{u \cdot \cos \varphi} \cdot \sqrt{2\alpha} - 1]$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\alpha b \pi} \int d\varphi \cos \varphi \cdot \sqrt{(2\alpha)} \cdot e^{u \cos \varphi} \cdot \sqrt{(2\alpha)};$$

$$\frac{d^2 z}{du^2} = \frac{1}{\alpha b \pi} \int d\varphi \cdot 2\alpha \cdot \cos^2 \varphi \cdot e^{u \cos \varphi} \cdot \sqrt{2\alpha};$$

und wenn man diese Werthe in unsere zu integrierende Gleichung setzt, so muß seyn

$$\frac{1}{\alpha b \pi} \int d\varphi [2\alpha u \cdot \cos^2 \varphi + \cos \varphi \cdot \sqrt{2\alpha} - 2\alpha u] \cdot e^{u \cdot \cos \varphi} \sqrt{2\alpha}$$

$$+ \frac{2u \int d\varphi}{\pi} - \frac{2u}{b} = 0.$$

Nimmt man hier die Integrale von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, so heben sich sogleich die beiden letzten Glieder auf, die erstern aber geben

$$\frac{1}{\alpha b \pi} \sqrt{(2\alpha)} \cdot \sin \varphi \cdot e^{u \cos \varphi} \cdot \sqrt{2\alpha} + \text{const.}$$

Und da die $\text{const.} = 0$ wird für $\varphi = 0$, und auch der vollständige Werth verschwindet für $\varphi = \pi$, so ist unserer Gleichung Genüge geschehen.

Da $\cos \varphi = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi$, so kann man auch setzen

$$z = \frac{e^{u \sqrt{2\alpha}}}{\alpha b \pi} \int d\varphi \cdot e^{-2u \cdot \sqrt{2\alpha}} \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{\alpha b}.$$

Wenn nun $2u \cdot \sqrt{2\alpha}$ einen bedeutenden Werth hat, wie dieses gegen den Rand eines breiten Trop-

fens zu Statt findet, so wird der Werth von $e^{-2u\sqrt{2\alpha}} \cdot \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi$ sehr klein und unmerklich, so bald Φ einen merklichen Werth hat. Giebt man also dann der Integralformel $\int d\Phi \cdot e^{-2u\sqrt{2\alpha}} \cdot \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi$ folgende Form

$$\int d\Phi \cdot \cos.^{\frac{1}{2}}\Phi \left(1 + \frac{1}{2} \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi\right) e^{-2u\sqrt{2\alpha}} \cdot \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi$$

$$+ 2 \int d\Phi \cdot \sin.^4 \frac{1}{4}\Phi \left(1 + 2 \cos.^2 \frac{1}{4}\Phi\right) \cdot e^{-2u\sqrt{2\alpha}} \cdot \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi,$$

so kann man ohne merklichen Irrthum dieses letzte Glied weglassen, und erhält dann, wenn man $2u \cdot \sin.^2 \frac{1}{2}\Phi \sqrt{2\alpha} = t^2$ setzt,

$$z = \frac{e^{u\sqrt{2\alpha}}}{\alpha b \pi \sqrt{[2u\sqrt{2\alpha}]}} \int 2dt \cdot e^{-t^2} \left(1 + \frac{t^2}{4u\sqrt{2\alpha}}\right) - \frac{1}{\alpha b}.$$

Das Integral muß in Beziehung auf t von $t^2 = 0$ bis $t^2 = 2u\sqrt{2\alpha}$ genommen werden. Da aber, wie wir voraus setzen, $e^{-2u\sqrt{2\alpha}}$ eine unmerkliche Gröfse ist, so kann man das Integral von $t = 0$ bis $t = \infty$ nehmen, und hat dann $2 \int dt \cdot e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$ und

$$z = \frac{e^{u\sqrt{2\alpha}}}{\alpha b \sqrt{[2\pi u\sqrt{2\alpha}]}} \left(1 + \frac{1}{8u\sqrt{2\alpha}}\right) - \frac{1}{\alpha b}. \quad *)$$

*) Ob gleich dieser Werth von z sich auf Punkte beziehen soll, die dem Rande näher liegen, so muß man sich doch erinnern, daß es nur für Punkte gelten kann, wo $\frac{dz}{du}$ sehr klein ist, und also nicht für die, welche dem äußern Rande sehr nahe liegen. Daß $\int e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ sey, beweiset Kramp, *analyse des réfractions*, p. 65, wo in-
deß der Beweis nicht ganz strenge ist, in so fern als er

Wir wollen jetzt die ganz allgemeine Integralgleichung wieder vornehmen, und darin $z = q - z'$ setzen, wo dann q der größte Werth ist, welchen z erreichen kann. Diese Gleichung wird dann

$$\frac{\frac{d^2 z'}{du^2}}{\left(1 + \frac{dz'^2}{du^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{u} \cdot \frac{dz'}{du}}{\left(1 + \frac{dz'^2}{du^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + 2aq - 2az' = -\frac{2}{b}.$$

Es sey ω der Winkel, welchen die Tangente an der Curve mit dem Radius u macht, so wird $\frac{dz'}{du} = -\tan \omega$, und die vorige Gleichung wird

$$\frac{d\omega}{du} \cdot \cos \omega + \frac{1}{u} \sin \omega = 2aq + \frac{2}{b} - 2az'.$$

Multipliziert man die verschiedenen Glieder mit $dz' = -du \cdot \tan \omega$ und integrirt, so wird

$$\cos \omega + \int \frac{dz' \cdot \sin \omega}{u} = 2aqz' + \frac{2z'}{b} - az'^2 + \text{const.}$$

Soll das Integral von $z' = 0$ an gerechnet werden, und ist für $z' = 0$, $\omega = \omega'$ der stumpfe Winkel, den die Oberfläche des Tropfens mit der Ebene macht, so ist $\text{const.} = \cos \omega'$.

Wir können fürs erste das unaufgelösete Integral und das Glied $\frac{2z'}{b}$ weglassen, und noch in der dann entstehenden Gleichung $\cos \omega = 2aqz' - az'^2 + \cos \omega'$ als erste Annäherung $z' = q$ annehmen, für den Punkt, wo die Tangente horizontal ist.

auf §. 20. beruht, wo n unendlich klein angenommen ward, statt dafs in §. 23. $n = \frac{1}{2}$ ist. Ein anderer Beweis findet sich in La Place's *mécanique céleste*, Tom. IV, p. 251. Br.

Dann wird $1 - \cos.\omega' = \alpha q^2$, $q - z' = z' = \sin.\frac{1}{2}\omega' \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$

und $dz' = -\frac{1}{2}d\omega' \cdot \cos.\frac{1}{2}\omega' \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$, daher

$$\int \frac{dz' \cdot \sin.\omega}{u} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d\omega' \cdot \sin.\frac{1}{2}\omega' \cdot \cos.^2.\frac{1}{2}\omega'}{u}.$$

Dieses Integral ist unbedeutend, wenn ω ein sehr kleiner Winkel ist, denn ob gleich alsdann der Nenner des Differentials $\frac{dz' \cdot \sin.\omega}{u}$ sehr klein und selbst $= 0$ seyn kann, so ist doch das Differential selbst weit kleiner als in dem Falle, da ω grössere Werthe erlangt. In dem letztern Falle ist u wenig verschieden von dem Halbmesser des Kreises, in welchem die Oberfläche des Quecksilbers an die Ebene trifft, [und wenn dieser $= l$ ist, so kann man ohne merklichen Irrthum im vorigen Integrale $u = l$ setzen, und das Integral von $\omega = \omega'$ an rechnen. Dann erhält man

$$\int \frac{dz' \cdot \sin.\omega}{u} = \frac{2}{3l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} [\cos.^3.\frac{1}{2}\omega - \cos.^3.\frac{1}{2}\omega'].$$

So hätte man also

$$\begin{aligned} \cos.\omega + \frac{2\sqrt{2}}{3l\sqrt{\alpha}} (\cos.^3.\frac{1}{2}\omega - \cos.^3.\frac{1}{2}\omega') \\ = (2\alpha q + \frac{2}{b}) z' - \alpha z'^2 + \cos.\omega', \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos.\omega + \frac{2\sqrt{2}}{3l\sqrt{\alpha}} (\cos.^3.\frac{1}{2}\omega - \cos.^3.\frac{1}{2}\omega') \\ = \alpha q^2 + \frac{2}{b} (q - z) - \alpha z^2 + \cos.\omega'. \end{aligned}$$

Weil nun z mit ω verschwindet, so ist ω^2 durch eine nach den Potenzen von z steigende Reihe ausgedruckt. Substituirt man diese in die vorige Gleichung und vergleicht die Coëfficienten der

gleichen Potenzen, so giebt der von z unabhängige Coëfficient

$$1 - \cos.\omega' + \frac{2\sqrt{2}}{3l\sqrt{\alpha}} (1 - \cos.\frac{3}{2}\omega') = aq^2 + \frac{2q}{b}.$$

Bei einem sehr breiten Tropfen ist $\frac{1}{b}$ ein kleiner Bruch, dessen Quadrat man weglassen darf, und dann giebt die vorige Gleichung beinahe

$$q + \frac{1}{ab} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sin.\frac{1}{2}\omega' + \frac{1 - \cos.\frac{3}{2}\omega'}{3\alpha l \cdot \sin.\frac{1}{2}\omega'}.$$

Um $\frac{1}{b}$ zu bestimmen, kehren wir zu der Gleichung

$$dz' = - du \cdot \text{tang}.\omega = - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} \cdot d\omega \cdot \cos.\frac{1}{2}\omega$$

zurück, welche giebt

$$u\sqrt{2\alpha} = \log.\text{tang}.\frac{1}{4}\omega + 2\cos.\frac{1}{2}\omega \\ + l\sqrt{2\alpha} = \log.\text{tang}.\frac{1}{4}\omega' + 2\cos.\frac{1}{2}\omega',$$

und die beständige GröÙe ist dadurch bestimmt, daß für $u=l$, $\omega=\omega'$ wird. Man hat also

$$\text{tang}.\frac{1}{4}\omega = \text{tang}.\frac{1}{4}\omega' \cdot e^{(u-l)\sqrt{2\alpha}} - 2\cos.\frac{1}{2}\omega + 2\cos.\frac{1}{2}\omega',$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems ist. Für kleine Werthe von ω giebt diese Gleichung

$$\text{tang}.\omega = 4 \cdot \text{tang}.\frac{1}{4}\omega' \cdot e^{(u-l)\sqrt{2\alpha}} - \sin.^2\frac{1}{4}\omega'.$$

Differentiirt man den oben für z gefundenen Ausdruck für den Fall, daß ω sehr klein ist, so wird

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{2\alpha} \cdot e^{u\sqrt{2\alpha}}}{ab \sqrt{[2\pi u \sqrt{2\alpha}]}} \left(1 - \frac{3}{8u \cdot \sqrt{2\alpha}} - \frac{3}{16u^2 \cdot \alpha} \right)$$

und man kann hier in den letzten Gliedern $u=l$ setzen, und wenn l sehr groß ist, die Glieder

$\frac{3}{8u \cdot \sqrt{2\alpha}}$ und $\frac{3}{16u^2 \cdot \alpha}$ übersehen, wodurch dann

$$\text{tang. } \omega = \frac{\sqrt{\alpha}}{ab \sqrt{[\pi l \sqrt{2\alpha}]}} \cdot e^{u \sqrt{2\alpha}},$$

wird. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorigen, so erhält man

$$\frac{1}{\alpha b} = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{[\pi l \sqrt{2\alpha}]} \cdot \text{tang. } \frac{1}{4} \omega' \cdot e^{-l \sqrt{2\alpha} - 4 \sin^2 \frac{1}{4} \omega'}.$$

Dieser Werth von $\frac{1}{\alpha b}$ giebt (nach §. 4.) die Depref-
sion in einer weiten Barometerröhre. Es ist näm-
lich einleuchtend, daß die Oberfläche des Queck-
silbers in einer weiten Röhre eben so ist, wie die
des eben betrachteten Tropfens; aber da, wo die-
se Oberfläche sich endigt, macht sie mit den Wän-
den der Röhre einen Winkel, dessen Complement
 $= \omega'$ ist.

Für ein Fluidum, welches, wie Wasser oder
Alkohol, die Wände der Glasröhre vollkommen
befeuchtet, druckt die Gröfse $\frac{1}{\alpha b}$ in einer solchen
Röhre die Erhebung des niedrigsten Punktes der
Oberfläche über das Niveau aus, und man hat
 $\omega' = \frac{1}{2}\pi$, also die Erhebung für diesen Fall

$$= \frac{4}{(1 + \sqrt{2}) \sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{[\pi l \cdot \sqrt{2\alpha}]} \cdot e^{-l \sqrt{2\alpha} - 2 + \sqrt{2}},$$

oder

$$= \frac{3,63476}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{l \cdot \sqrt{2\alpha}} \cdot e^{-l \sqrt{2\alpha}}.$$

Versuche von Gay-Lussac.

25. Wir wollen nun diese Resultate mit der Erfahrung vergleichen. Herr Gay-Lussac hat bei einer Temperatur von 12,8 C. Gr. Beobachtungen über die Dicke eines breiten Quecksilbertropfens angestellt, der kreisförmig war, 1 Decimeter im Durchmesser hielt, und sich auf einer vollkommen ebenen, horizontalen Platte von weissem Glase befand. Mit Hülfe eines sehr genauen Micrometers maß er diese Dicke auf 3,378 Millimeter. Dieser Werth ist sehr wenig von demjenigen verschieden, welchen Segner gefunden hat, und der in unserm Masse 3,40674 Millimeter beträgt. Berechnet man diese Dicke nach dem vorigen Werthe von $q + \frac{1}{\alpha b}$, und setzt dabei $\frac{2}{\alpha} = 13$ Quadrat-Millimeter, den spitzen Winkel welchen des Quecksilbers Oberfläche mit dem Glase macht $= 48^\circ$, also $\omega' = 152^\circ$, und vernachlässiget das Glied $\frac{1}{\alpha b}$, welches bei einem so breiten Tropfen unmerklich wird, — so erhält man für die Dicke q des Tropfens, $q = 3,39664$ Millimeter; nahe mit der Erfahrung übereinstimmend.

Herr Gay-Lussac maß ferner in einem weiten Glasgefäße, mit vertikalen Wänden, den Abstand des Punktes, wo die Oberfläche des Quecksilbers die Wand berührte, von dem höchsten Punkte der Oberfläche; er fand diesen Abstand $= 1,455$ Millimeter. Er muß nach dem Vorigen $= \sqrt{\frac{2}{\alpha} \cdot \sin. \frac{1}{2}\omega'}$, also wenn $\omega' = 52^\circ$ ist, hier

= 1,432 Millimeter seyn; welches sich wieder nur wenig von der Beobachtung entfernt.

Um die Formel für die Depression des Quecksilbers in weiten Glasröhren mit der Erfahrung zu vergleichen, wähle ich die in den *Philos. Transactions* for 1776 erzählten Versuche von Cavendish. Sie bestimmen

für eine Glasröhre von	die Depression
0,6 Zoll Durchmesser	auf 0,005 engl. Zoll.
0,5 — — —	auf 0,007 —
0,4 — — —	auf 0,015 —

Da hier $\omega' = 52^\circ$ ist, so giebt unsere Formel für $\frac{1}{\alpha b}$, wenn man alles in englischen Zollen berechnet, die Depression in der ersten Röhre = 0,0038, in der zweiten = 0,0069, in der dritten = 0,0126, also so nahe mit der Erfahrung übereinstimmend, als bei diesen Beobachtungen, wo so sehr kleine Größen zu bestimmen sind, erwartet werden kann.

Herr Gay-Lussac fand durch ein Mittel aus fünf Beobachtungen die Erhebung des niedrigsten Punktes der Oberfläche für *Alkohol*, der sich in einer Glasröhre von 10,508 Millimeter Durchmesser befand, gleich 0,3835 Millimeter. Die Temperatur bei dem Versuche war 16° C., und die specifische Schwere des Alkohols bei derselben = 0,813467. In einer Glasröhre, deren Durchmesser = 1,2944 Millimeter betrug, erhob sich dasselbe Flüssige, bei eben der Temperatur, auf 7,0785 Millimeter. Aus der letztern Beob-

achtung folgt $\frac{2}{\alpha} = 12,0305$ Quadrat-Millimeter,
 und die vorige Formel giebt für die Erhebung in
 der weiten Röhre 0,3378 Millimeter, statt daß
 die Erfahrung diese Erhebung $= 0,3835$ gab.
 Dieser Unterschied ist innerhalb der Grenzen der
 Irrthümer, welche sowohl bei den Versuchen
 Statt finden, als auch aus der Formel, wel-
 che nur eine Näherungsformel ist, entspringen
 konnten.

VIERTER HAUPTTHEIL.

Allgemeine Betrachtungen über die Haarröhren - Kraft und über die Kräfte der chemischen Verwandtschaft.

Uebersetzt von Brandes und Gilbert.

26. Aus den Untersuchungen, welche wir über die Wirkungen der Haarröhrchen und über Erscheinungen des Anziehens und Abstoßens kleiner Körper, der Adhäsion fester Körper an Flüssigkeiten, der Gestaltung grosser aufliegender Tropfen, und andere Erscheinungen, welche auf derselben Kraft beruhen, die in den Haarröhren wirkt, bis hierher angestellt haben, — geht sehr deutlich hervor, daß die grösste Uebereinstimmung herrscht zwischen den Phänomenen der Haarröhrchen und zwischen den Resultaten aus demjenigen Gesetze der Attraction der kleinsten Körpertheilchen, welches annimmt, daß die anziehende Kraft,

S

mit welcher die Theilchen der Körper auf einander wirken, sehr schnell mit der Entfernung abnimmt, und schon bei dem kleinsten für unsere Sinne merkbaren Abstände unmerklich wird.

Auf diesem Naturgesetze beruhet ebenfalls die *chemische Verwandtschaft*. Die Wirksamkeit dieser Kraft ist, gleich der Schwere, nicht bloß auf die Oberfläche der Körper eingeschränkt; sie dringt in die Körper ein, indem sie über die Berührung hinaus bis auf äußerst kleine Entfernungen wirkt, welche nicht mehr merkbar sind. Hiervon hängt der Einfluß der Massen auf die chemischen Erscheinungen ab, oder die Sättigungs-Capacität, deren Wirkung Berthollet so glücklich gezeigt hat. So theilen zwei Säuren, wenn sie auf dieselbe Basis wirken, diese unter sich, nach Verhältniß ihrer Verwandtschaft zu derselben; eine Erscheinung, welche nicht Statt finden könnte, wenn die Verwandtschaft nicht über die Berührung hinaus wirkte; denn alsdann würde die stärkere Säure sich der Basis ganz und gar bemächtigen. Die Wirkungen der an jenem Gesetze gebundenen Kraft werden durch die Figur der kleinsten Theile der Körper, durch die Wärme und durch andere Ursachen modificirt, und die Untersuchung dieser Ursachen und der Umstände, unter welchen sie sich entwickeln, ist der feinste und schwierigste Theil der Chemie; er macht die Philosophie dieser Wissenschaft aus, indem er uns die innere Natur

der Körper, das Gesetz der Attraction ihrer Theilchen und das Gesetz der fremden auf sie wirkenden Kräfte, so weit dieses möglich ist, kennen lehrt.

Die Theilchen eines *festen* Körpers haben diejenige Lage gegen einander, in welcher sie einer Aenderung der Lage den größten Widerstand leisten. Entfernt man irgend ein Theilchen unendlich wenig von dieser Lage, so sucht es, vermöge der Kräfte, die auf dasselbe wirken, zu ihr zurück zu kehren; und hierin besteht die *Elasticität* der Körper, welche man, so fern nur von einer unendlich geringen Aenderung der Figur die Rede ist, allen Körpern zuschreiben darf. Leidet hingegen die gegenseitige Lage der Theilchen eine bedeutende Aenderung, so finden diese Theilchen neue Lagen, bei welchen ein ficherer oder nicht leicht zu erschütterndes (*stables*) Gleichgewicht Statt findet, so wie dieses bei den geschmiedeten Metallen, oder überhaupt bei allen Körpern der Fall ist, welche vermöge ihrer Dichtigkeit alle Formen behalten, die man ihnen durch einen Druck giebt. Die *Härte* und die *Zähheit* der Körper scheinen mir von nichts anderm herzurühren, als von dem Widerstande der Theilchen gegen solche Aenderung des Gleichgewichts-Zustandes. — Da die Expansivkraft der Wärme der anziehenden Kraft der Theilchen entgegen wirkt, so vermindert eine zunehmende Wärme nach und nach die Zähheit der Körper oder die gegenseitige Adhäsion.

renz ihrer Theile; und wenn die Theilchen eines Körpers im Innern und an der Oberfläche nur noch einen sehr geringen Widerstand jener Verschiebung der Theilchen entgegen setzen, so wird er *fließend*. Indefs dauert doch die Zähheit oder Klebrigkeit desselben noch fort, ob schon sie sehr geschwächt ist, bis sie endlich bei zunehmender Temperatur ganz verschwindet; und dann erst tritt der Zustand *vollkommener Flüssigkeit* ein, wo jedes Theilchen in allen Lagen gleichen Attractionen und gleichen Repulsionskräften der Wärme ausgesetzt ist, und dem leisesten Drucke ausweicht. Man kann mit Wahrscheinlichkeit annehmen, daß diese vollkommene Flüssigkeit bei denjenigen tropfbaren Körpern Statt findet, welche, wie der Alkohol, sich in einer weit höhern Temperatur befinden, als die, bei der sie zu gefrieren anfangen.

Sehr sichtbar äußert die Figur der Theilchen ihren Einfluß bei den Erscheinungen des Gefrierens und der KrySTALLISATION, welche man sehr beschleunigt, wenn man in das Flüssige ein Stück Eis oder einen aus derselben Materie gebildeten KrySTALL hinein bringt. Die Theilchen der Oberfläche des festen Körpers bieten sich nämlich dann den sie berührenden gleichartigen flüssigen Theilchen in derjenigen Stellung dar, welche für die Vereinigung dieser mit ihnen die günstigste ist. Dieser Einfluß der Figur der kleinen Theilchen muß bei vergrößerter Entfernung dieser Theilchen von einander weit schneller abnehmen, als die Attraction selbst. Ge:

rade so vermindert sich der Einfluß der Figur bei den himmlischen Erscheinungen, die von der Figur der Planeten abhängen; z. B. bei dem Vorücken der Nachtgleichen, nach dem Verhältnisse des Kubus des Abstandes, indem die Attraction nur im Verhältnisse des Quadrates der Entfernung abnimmt.

Der feste Zustand der Körper scheint also von der Attraction der Theilchen und von ihrer Figur abzuhängen; so dafs eine Säure, auf die zwei Basen wirken, sich mit derjenigen Basis, auf welche ihre Attraction in der Ferne die geringere ist, dennoch lieber verbinden und mit ihr krySTALLISIREN kann, wenn bei dieser die Gestalt der Theilchen eine innigere Berührung erlaubt. Der Einfluß der Figur bleibt noch merklich bei den halbfüssigen Körpern, aber verschwindet gänzlich bei denen, die vollkommen flüssig sind.

Alles deutet endlich darauf hin, dafs im *gasförmigen Zustande* nicht bloß der Einfluß der Gestalt der Theilchen, sondern selbst ihre gegenseitige Attraction unmerklich ist, in Vergleichung mit der Repulsivkraft der Wärme. Diese Theilchen scheinen alsdann bloße Hindernisse der Expansion dieser Kraft zu seyn (*qu'un obstacle à l'expansion de cette force*); denn man kann, ohne die Spannung eines gegebenen Volumens irgend eines Gas zu ändern, statt einiger in diesem Volumen zerstreuten Gastheilchen eine gleiche Anzahl Theilchen eines andern Gas substituiren. Aus diesem

Grunde vermischen sich mehrere in Berührung mit einander gesetzte Gasarten nach einiger Zeit zu einem gleichförmigen Flüssigen; dann erst sind sie in einem Zustande, wo das Gleichgewicht Stabilität hat. Ist einer dieser gasförmigen Körper ein Dampf, so findet die Stabilität des Gleichgewichts nur dann Statt, wenn sich von dem Dampfe nur so viel (oder weniger) in dem Raume befindet, als sich von eben dem Dampfe, bei gleicher Temperatur, in dem von dem ganzen Gemenge angefüllten Raume, wenn er leer wäre, verbreiten würde. Ist des Dampfes mehr vorhanden, so muß, um die Stabilität des Gleichgewichtes zu bewirken, der Ueberschuß sich in Form eines tropfbaren Flüssigen verdichten.

Die Betrachtung der Stabilität des Gleichgewichtes bei einem Systeme von Theilchen, die gegenseitig auf einander einwirken, ist zur Erklärung sehr vieler Phänomene von großem Nutzen. Die Mechanik lehrt, daß in einem Systeme von festen und flüssigen Körpern, auf welche die Schwere wirkt, mehrere Zustände eines stabilen oder nicht leicht zu erschütternden Gleichgewichtes Statt finden; eben so zeigt uns die Chemie bei den Verbindungen aus zwei oder mehrern Bestandtheilen mehrere permanente Zustände. Zuweilen vereinigen sich zwei Materien mit einander, und die hieraus gebildeten Theilchen vereinigen sich wieder mit den Theilchen einer dritten Materie; von dieser Beschaffenheit scheint die Verbindung der Be-

standtheile einer Säure mit einer Basis zu seyn. Ein anderes Mahl verbinden sich die Bestandtheile einer Substanz, ohne vereinigt zu bleiben, wie sie es in der Substanz selbst waren, mit andern Elementen, und bilden mit ihnen dreifache oder vierfache Zusammensetzungen; so dafs, wenn man durch die chemische Analyse jene Substanz wieder erhält, sie ein Produkt dieser Operation ist. Die integrirenden Theilchen können sich auch mit verschiedenen Seitenflächen an einander legen und verbinden, und dadurch Krystalle hervor bringen, die an Gestalt, Härte, specifischer Schwere und Einwirkung auf das Licht, verschieden sind. Auf der Bedingung eines stabeln Gleichgewichtes scheinen mir endlich noch die festen Verhältnisse zu beruhen und durch sie bestimmt zu werden, nach welchen verschiedene Materien unter vielen Umständen sich vereinigen. Alle diese Erscheinungen hängen von der Figur der Elementartheilchen, von den Gesetzen ihrer anziehenden Kraft, von der Repulsivkraft der Wärme, und vielleicht von andern, noch unbekannten, Kräften ab. Die Unwissenheit, in welcher wir uns über diese Data befinden, und ihre äufferste Verwicklung, erlauben es uns nicht, das Resultat dieser Kräfte einer mathematischen Analyse zu unterwerfen; indess kann man, in Ermangelung dieser Hülfe, sich durch die Vergleichung gut beobachteter Thatfachen dem Ziele nähern, wenn man aus dieser Vergleichung allgemeine Verhältnisse ableitet, welche eine gro-

fse Anzahl von Erscheinungen unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte vereinigen und so die Grundlage chemischer Theorien werden, und die Anwendung derselben auf die Künste erweitern und vervollkommen.

27. An der Oberfläche der tropfbar-flüssigen Körper bewirkt die Anziehung der kleinsten Theilchen, so fern sie durch die Krümmung der Oberflächen und der einschließenden Wände modificirt wird, die *haarröhren-artigen Erscheinungen*. Diese Erscheinungen und alle diejenigen, welche die Chemie uns darbietet, reihen sich also an ein und dasselbe allgemeine Gesetz an, welches man nun nicht mehr in Zweifel ziehen kann. Einige Physiker haben den Grund der Phänomene der Haarröhrchen in einer Adhäsion der Theilchen eines Flüssigen unter einander und an den Wänden, die sie umschließen, gesucht; aber es ist unmöglich, sie daraus abzuleiten. Denkt man sich für einen Augenblick die Oberfläche von Wasser, das in einer Glasröhre enthalten ist, horizontal und im Niveau mit der Oberfläche des Wassers in dem Gefäße, worin die Röhre mit ihrem untern Ende eingetaucht ist, so können die Klebrigkeit des Wassers und die Adhärenz desselben an die Röhre, die Wasserfläche nicht krümmen und sie nicht concav machen. Um dieses zu bewirken, muß man nothwendig eine Attraction des obern Theils der Röhre, welcher nicht unmittelbar mit dem Wasser in Berührung ist, auf das Wasser annehmen. Wäre

diese nicht vorhanden, so würde die Oberfläche des in der Röhre enthaltenen Flüssigen, wenn sie concav ist, durch die an ihr adhärenden vertikalen Säulen des Flüssigen vertikal niederwärts gezogen werden; dagegen würde sie, wenn sie convex ist (wie beim Quecksilber in Glasröhren, und beim Wasser, das an dem Ende einer Röhre hängt), in jedem ihrer Punkte perpendikulär durch das Gewicht der höhern Säulen des Flüssigen gedrückt werden. Diese Oberfläche würde also nicht in beiden Fällen dieselbe seyn, und die Phänomene der Haarröhrchen würden nicht einerlei Gesetze in beiden Fällen befolgen, wie es doch die Erfahrung zeigt. Man muß also einräumen, daß diese Phänomene nicht bloß und allein von einer Wirkung in der Berührung, sondern von einer Attraction abhängen, welche sich über die Berührung hinaus erstreckt, obgleich sie mit großer Schnelligkeit in der Ferne abnimmt.

Die Klebrigkeit oder unvollkommene Flüssigkeit der tropfbaren Körper ist so weit entfernt, die Ursache der Phänomene der Haarröhrchen zu seyn, daß sie vielmehr störend auf sie wirkt. Diese Phänomene sind nur bei vollkommen flüssigen Körpern in strenger Uebereinstimmung mit der Theorie; denn die Kräfte, von welchen sie abhängen, sind so klein, daß das geringste Hinderniß ihre Wirkungen merklich verändern kann. Eben dieser Klebrigkeit muß man die bedeutenden Verschiedenheiten zuschreiben, welche sich zwischen den

Beobachtungen der Naturforscher über die Höhe findet, zu welcher das Wasser in gläsernen Haarröhrchen, die von gleichem Durchmesser sind, ansteigt. Die zweite Art, wie wir diese Phänomene betrachtet haben, belehrt uns, daß zuerst die innere Wand der Röhre eine dünne Wasserschicht erhebt; diese Wasserschicht erhebt eine zweite; die zweite eine dritte, und so weiter, bis an die Achse der Röhre. Die wirkliche Existenz dieser Schichten kann man mit Hülfe einiger Staubkörnchen, die an den Wänden des Glases kleben, merklich machen: man sieht nämlich diese kleinen Körper durch den Anstoß dieser Schichten in Bewegung kommen, ehe sie von der Oberfläche des Flüssigen erreicht werden. Die gegenseitige Attraction der Schichten ist schief gegen die Oberfläche der Wände, und strebt, die Theilchen der zweiten Schicht in die erste selbst hinein zu ziehen; dieses kann aber nicht geschehen, ohne diese Schicht anzuheben oder zu durchbrechen. Ist die Röhre sehr wenig befeuchtet, so widersteht diese erste dann noch sehr feine Schicht diesem Bestreben vermöge ihrer Adhärenz am Glase und der Klebrigkeit ihrer Theilchen. Hierin liegt, wie mich dünkt, der Grund, warum Newton und Hauy nur etwa 13 Millimeter für die Erhebung des Wassers in einer Glasröhre von 1 Millimeter Durchmesser gefunden haben, da sich doch in eben solchen Röhren, wenn sie sehr befeuchtet sind, das Wasser über 30 Millimeter erhebt.

Am Ende einer Glasröhre können sich die ersten Wasserschichten nicht weiter erheben, ohne daß sich die Figur ihrer obern Fläche verändert; und von dem Augenblicke an, da diese Oberfläche convex wird, strebt sie das untere Fluidum niederzudrücken, und setzt also dem fernern Steigen ein Hinderniß entgegen. Diese Ursache, verbunden mit der Klebrigkeit des Flüssigen und der Adhärenz desselben am Glase, erklärt den kleinen Widerstand, welchen das Wasser bei seinem Steigen findet, wenn es dem Ende der Röhre nahe kommt; aber dieser Widerstand muß verschwinden, und verschwindet wirklich, bei solchen Körpern, die, wie der Alkohol, vollkommen flüßig sind.

Die Reibung des Flüssigen gegen die Fläche der Wände, und die Adhäsion der Luft an der Oberfläche der Körper, verursachen gleichfalls Anomalien in den Erscheinungen der Haarröhrchen. Man muß auf diese bei der Vergleichung der Erfahrungen mit der Theorie Rücksicht nehmen; beide stimmen desto besser mit der Theorie überein, je weniger Einfluß diese Störungen haben.

28. Die Intensität der Kraft, mit welcher die Körpertheilchen einander anziehen, durch Erfahrung zu bestimmen, ist fast unmöglich; wir wissen bloß, daß sie ganz unvergleichbar größer als die Haarröhren-Kraft ist. Wir haben oben gesehen, daß das Wasser in der Achse eines Haarröhrchens gehoben bleibt, durch den Unterschied der Wir-

kungen, welche das Flüssige an der Oberfläche im unbegrenzten Gefäße, und welche das in der Röhre enthaltene Flüssige auf sich selbst ausübt. Dieser Unterschied ist die Wirkung des flüssigen Meniscus, den eine Horizontalebene, welche durch den niedrigsten Punkt der concaven Oberfläche in der Röhre geht, abschneidet, und diese Wirkung wird durch die Höhe der erhobenen Säule des Flüssigen gemessen. Um die Wirkung der ganzen Masse des Flüssigen zu bestimmen, wollen wir uns in einer unbegrenzten Masse still stehenden Wassers einen vertikalen, unendlich engen, Kanal vorstellen, welcher sich an der Oberfläche des Wassers endige, und dessen unendlich dünnen Wände die Wirkung des außerhalb liegenden Wassers auf die im Kanale enthaltene Wasserfäule nicht hindern mögen. Wir wollen nun den Druck zu bestimmen suchen, den diese Wasserfäule gegen einen auf die Wände des Kanals senkrechten Querschnitt ausübt, der sich in einem merklichen Abstände unterhalb der Oberfläche des Flüssigen befinde, und wollen hierbei diese Grundfläche als $= 1$ annehmen. Man kann sich leicht überzeugen, daß, wenn man mehrere solche ähnliche, gleich weite, aber ungleich lange, Kanäle hätte, in welchen auf das Wasser Kräfte einwirkten, die für jeden dieser Kanäle verschieden und nach irgend einem Gesetze veränderlich wären, — der Druck, den sie leiden, sich verhalten müßte, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, welche Körper erlangen würden, indem sie

sich von der Ruhe ab durch diese, nun als leer betrachteten, Kanäle bewegten, und dabei in jedem Punkte des Kanals diejenigen Kräfte auf sie einwirkten, welche die correspondirenden Wassertheilchen, mit denen der Kanal gefüllt ist, belebt. Wenn die Wirkung des Wassers auf sich selbst eben so groß wäre, als die Wirkung desselben auf das Licht, so folgt aus den Untersuchungen über die Strahlenbrechung (*Mécanique céleste*, Livre X. Nr. 2.), daß das Quadrat der in dem oben beschriebenen Kanäle erlangten Geschwindigkeit $= 2K$ seyn würde, wenn man die Dichtigkeit des Wassers $= 1$ setzt. In einem Kanale, dessen Höhe $= s$ ist, und in welchem eine unveränderliche, der Schwere gleiche, Kraft wirkt, ist das Quadrat der erlangten Geschwindigkeit $= 2gs$, wenn g das Doppelte des Raumes bedeutet, welchen ein freifallender Körper in der ersten Zeit-Einheit, (wir wollen annehmen, in einer Decimal-Sekunde,) durchläuft. Der Druck der Wasserfäulen auf die Grundflächen jenes und dieses Kanals wird sich also verhalten, wie $2K$ zu $2gs$, und wenn der Druck in ihnen gleich seyn soll, so muß $s = \frac{K}{g}$ seyn. Dieses ist also, nach der angenommenen Hypothese, die Höhe, welche ein Kanal haben müßte, wenn auf das Wasser in demselben bloß eine Schwerkraft wirkte, die überall dieselbe als an der Oberfläche der Erde wäre, damit der Druck des Wassers auf die Grundfläche dieses Kanals der ganzen Wirkung der unbestimmten Waf-

fermasse auf das Wasser in dem ersten Kanal gleich würde.

Die Lehre von der Refraction ergiebt $R^2 - 1 = \frac{4K}{n^2}$, wenn n der Raum ist, welchen das Licht in einer Decimalsekunde, als Zeit-Einheit, durchläuft, und R das Verhältniß des Einfallswinkels zum gebrochenen Winkel beim Uebergange des Lichtstrahles aus dem Vacuo in Wasser bedeutet. Dieses giebt also $s = \frac{(R^2 - 1)n^2}{4g}$. Legt

man die genauesten Bestimmungen der Sonnenparallaxe und die Geschwindigkeit des Lichts zum Grunde, so findet sich s zehntausend Mal so groß, als der Abstand der Sonne von der Erde. Einen so ungeheuren Werth für die Wirkung des Wassers auf sich selbst kann man unmöglich als wahrscheinlich annehmen, und es scheint daher die Wirkung des Wassers auf sich selbst viel schwächer, als seine Wirkung auf das Licht zu seyn; dennoch ist sie erstaunend groß in Vergleichung mit der Haarröhren-Kraft. Sie muß folglich eine sehr starke Zusammendrückung in den Schichten des Flüssigen bewirken. Man stelle sich in einer unbegrenzten Masse still stehenden Wassers einen aufwärts gekrümmten unendlich engen Kanal mit sehr dünnen Wänden vor, dessen Enden in der Oberfläche des Wassers liegen; die Wasserschichten in demselben, welche sich in einer merklichen Entfernung unterhalb der Oberfläche des Flüssigen befinden, leiden vermöge der Wirkung des über ihnen in unmerkli-

cher Nähe bei diesen Enden befindlichen Waffers einen Druck $= K$, welcher durch den gleichen und entgegen gesetzten Druck am andern Ende des Kanals aufgehoben wird; jede Schicht innerhalb des Kanals wird also durch diese Kräfte comprimirt. An der Oberfläche des Flüssigen ist diese Compression $= 0$; sie wächst mit erstaunender Schnelligkeit, wenn man sich von der Oberfläche nach dem Innern des Waffers zu entfernt, und wird schon in dem kleinsten merklichen Abstände unterhalb derselben beständig.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß aus diesen großen Ungleichheiten in der Compression sehr bedeutende Verschiedenheiten der Dichtigkeit in den Schichten eines Flüssigen, die sehr nahe an der Oberfläche liegen, entstehen; und in Mischungen zweier Flüssigen, z. B. von Alkohol und Wasser, können sie nicht nur die Dichtigkeit der Schichten nahe an der Oberfläche ungleich machen, sondern auch das Mischungsverhältniß in diesen und in den zunächst an den Röhrenwänden liegenden Schichten verändern. Diese Aenderungen würden indess keinen Einfluß auf die Refraction haben, indem diese, wenn der Lichtstrahl bis zu einer merklichen Entfernung unterhalb der Oberfläche gekommen ist, eben so groß seyn müßte, als wenn die Natur und die Dichtigkeit des Flüssigen gar keine Aenderung gelitten hätte. Dagegen aber können sie auf die Phänomene der Haarröhrchen einen sehr bedeutenden Einfluß haben,

und einige Versuche, welche Herr Gay-Lussac über das Aufsteigen verschiedener Mischungen von Alkohol und Wasser in Haarröhrchen angestellt hat, scheinen so etwas anzudeuten.

Ein isolirtes Wasser-Blättchen von einer Dicke, welche kleiner ist, als der Halbmesser der merklichen Wirkungssphäre der Wassertheilchen, muß, diesem zu Folge, eine viel geringere Zusammendrückung leiden, als ein ähnliches Wassertheilchen, welches sich mitten in einer bedeutenden Wassermasse befindet. Es ist daher natürlich, zu schliessen, daß ein solches isolirtes Wasser-Blättchen weniger dicht seyn wird, als das Wasser da, wo es sich in Masse befindet. Sollte es wohl unwahrscheinlich seyn, anzunehmen, daß dieses der Fall mit der wässerigen Hülle sey, welche die Dunstbläschen umgiebt, und daß aus diesem Grunde diese Hülle weit leichter als das gewöhnliche Wasser sey, und sich in einem Mittelzustande zwischen dem tropfbaren und dampfförmigen Zustande befinde?

29. Ich habe in meiner Theorie der Haarröhren-Kraft weder auf den Druck der Luft, noch auf die Repulsivkraft der Wärme, Rücksicht genommen. Die Betrachtung dieser Kräfte war überflüssig; denn da sie für die ganze Oberfläche einerlei sind, so hängen sie mit der Krümmung derselben gar nicht zusammen. Die Wärme hat also auf die Phänomene der Haarröhrchen keinen andern Einfluß, als daß sie die Dichtigkeit der flüssigen Körper vermin-

mindert, und die Beobachtung hat gezeigt, daß bei vollkommen flüssigen Körpern die durch Aenderung der Temperatur entstehende Aenderung der Phänomene, völlig der Theorie gemäß ist.

30. Da die Wirkungen der Haarröhren-Kraft auf eine mathematische Theorie zurück geführt sind, so fehlte es diesem interessanten Zweige der Physik nur noch an einer Reihe recht genauer Beobachtungen, mit deren Hülfe man die Theorie mit der Natur vergleichen konnte. Das Bedürfnis solcher Beobachtungen wird überhaupt immer mehr fühlbar, je mehr die vervollkommnete Physik in das Gebiet der Analysis übergeht; denn man ist alsdann in ihr im Stande, die Resultate der Theorien mit großer Genauigkeit anzugeben; und wenn man diese Resultate mit sehr genauen Versuchen vergleicht, so erhebt man die Theorien zu dem höchsten Grade von Gewissheit, der in der Naturforschung Statt finden kann. Glücklicher Weise lassen die Versuche, welche die HH. Rumford und Gay-Lussac über die haarröhren-artigen Erscheinungen vor Kurzem angestellt haben, wenig über diesen Gegenstand zu wünschen übrig; und wir haben in dem Vorhergehenden gesehen, wie sehr meine Theorie mit den Beobachtungen des Letztern überein stimmt, welcher in diese Art von Versuchen eine Genauigkeit, die den astronomischen Beobachtungen gleich kommt, erreicht hat.

31. Wenn man die wahre Ursache von Phänomenen kennen gelernt hat, so ist es interessant,

T

rückwärts zu blicken und zu sehen, bis auf welchen Punkt die Hypothesen, welche früher die Physiker zur Erklärung dieser Erscheinung angenommen haben, sich der Wahrheit näherten. Eine der ältesten und angesehensten Meinungen über die Haarröhrchen ist die von Jurin. Dieser englische Physiker schreibt die Erhebung des Wassers in einem gläsernen Haarröhrchen der Attraction des ringförmigen Theiles der Röhre zu, welcher die Oberfläche des Wassers berührt und an der sie sich anlegt; „denn,“ sagt er, „bloß von diesem Theile der Röhre braucht das Wasser beim Sinken sich los zu reißen, und folglich ist dieser Theil der einzige, welcher durch seine Attraction dem Sinken des Wassers entgegen wirkt. Diese Ursache ist der Wirkung proportional, indem sowohl der Umfang der Röhre, als die gehobene Wassersäule dem Durchmesser der Röhre proportional sind“. (*Philos. Transactions*, Nr. 363.). Hiergegen hat schon Clairaut in seiner Abhandlung über die Figur der Erde eingewendet, daß man das Princip, die Wirkungen seyen den Ursachen proportional, nur dann anwenden dürfe, wenn man zu einer ersten Ursache zurück gehe, und nicht, wenn man Wirkungen untersucht, die aus einer Vereinigung verschiedener Ursachen entstehen. Nähme man nämlich auch an, daß der einzige Ring, in welchem die Oberfläche die Röhre berührt, die Ursache der Erhebung des Flüssigen sey, so dürfe man darum doch nicht schließen, daß

das gehobene Gewicht dem Durchmesser proportional seyn müsse, weil man die Kraft dieses Ringes nicht kennen lernen kann, ohne die Kräfte, mit welchen alle Theile desselben wirken, zu summiren. Clairaut setzte daher an die Stelle der Jurin'schen Hypothese eine genaue Entwicklung aller Kräfte, die auf eine Wassersäule wirken, welche sich in einem längs der Achse der Röhre gehenden unendlich engen Kanale im Gleichgewichte befindet. Dennoch hat dieser große Geometer die Haupterscheinung in den Haarröhren nicht erklärt, daß nämlich die Elevation und Depression eines Flüssigen in sehr engen Röhren dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist; er begnügt sich, zu bemerken, ohne doch dafür einen Beweis zu geben, daß unzählige Gesetze der Attraction möglich sind, bei welchen diese Erscheinung Statt finden muß. Seine Voraussetzung, daß die Wirkung des Glases noch für die in der Achse der Röhre befindlichen Theilchen merklich sey, entfernte ihn von der richtigen Erklärung der Erscheinungen. Indes verdient es bemerkt zu werden, daß, wenn er die Attraction als nur in unmerklichen Entfernungen merkbar angenommen, und die Bestimmung der Kräfte für die wahre Wirkungssphäre der Röhrenwände so gesucht hätte, wie er es für die in der Achse liegenden Theilchen gethan hat, — er nicht nur auf das Resultat von Jurin, sondern auch auf alle die Folgerungen würde gekommen seyn, welche unsere

zweite Methode (§. 13.) an die Hand giebt. Diese Methode zeigt, daß bei einem Flüssigen, welches die Röhre vollkommen befeuchtet, bloß derjenige Theil der Röhre, der zunächst oberhalb der Oberfläche des Flüssigen in unmerkbarer Entfernung von derselben liegt, das Flüssige zum Ansteigen sollicitirt, hebt, und es schwebend erhält wenn das Gewicht der gehobenen Säule mit der Attraction dieses Röhren-Ringes im Gleichgewichte ist. Dieses nähert sich sehr den Ideen Jurin's, und führt zu seiner Folgerung, daß das Gewicht der gehobenen Säule dem Umfange der innern Grundfläche der Röhre proportional ist; eine Folgerung, die für jede prismatische Röhre gilt, wie auch immer ihr innerer Querschnitt beschaffen sey, und wie sich auch die Attraction der Theilchen der Röhre auf das Flüssige zu der Attraction der flüssigen Theilchen gegen einander verhalten möge.

Die Aehnlichkeit, welche die Oberfläche der Tropfen und die Oberfläche von Fluidi's, die in Haarröhrchen enthalten sind, mit denjenigen Oberflächen haben, mit welchen sich die Geometer in den ersten Zeiten der Infinitesimalrechnung unter dem Namen der *Lintearia*, *Elastica* und andere beschäftigt haben, hat mehrere Physiker bewogen, die Fluida so zu betrachten, als ob sie in solche Flächen eingeschlossen wären, und als ob diese Flächen durch ihre Spannung und Elasticität den flüssigen Körpern die Formen gäben, welche die Erfahrung zeigt. Segner, einer der ersten, der

diese Idee hatte, überfah sehr wohl, daß dieses eine bloße zur Darstellung der Phänomene dienliche Fiction sey, die man nur in so weit annehmen dürfe, als sie sich auf das Gesetz einer bloß in unmerklichen Entfernungen merkbaren Attraction zurück führen läßt (s. die ältern Schriften der Götting. Societät, Tom. I.). Er versuchte daher diese Abhängigkeit zu beweisen; aber wenn man seine Schlüsse näher betrachtet, so bemerkt man leicht ihre wenige Genauigkeit, und die Resultate, zu welchen er gelangt, zeigen gleichfalls ihre Unzulänglichkeit. Er findet z. B., daß man nur auf die Krümmung des Schnittes eines Tropfens Rücksicht nehmen dürfe, und keinesweges auf die Krümmung seines horizontalen Querschnittes, was doch nicht genau richtig ist. Uebrigens hat er nicht bemerkt (was ein strenges Raisonnement ihm würde gezeigt haben), daß die Spannung der Oberfläche bei jeder GröÙe des Tropfens einerlei ist. Endlich sieht man aus der Bemerkung, womit er seine Untersuchung schließt, daß er selbst nicht damit zufrieden gewesen ist.

Während ich mich mit diesem Gegenstande beschäftigte, hat auch Hr. Thomas Young über eben diese Materie scharfsinnige Untersuchungen angestellt, die man in den *Philosophical Transactions* für 1805 findet. Er vergleicht, wie Segner, die Haarröhren-Kraft mit der Spannung einer Oberfläche, welche die flüssigen Körper umhülle, und indem er auf jene Kraft die Resultate

anwendet, welche über die Tension der Oberflächen bekannt sind, findet er, daß man die Krümmung der flüssigen Oberflächen nach zwei auf einander senkrechten Richtungen in Betrachtung ziehen müsse. Er nimmt ferner an, daß bei demselben Flüssigen und bei Röhren aus gleicher Materie, die flüssigen Oberflächen mit der Röhrenwand, da, wo sie mit ihr in Berührung kommen, einerlei Winkel machen, ihre Figur mag im Uebrigen beschaffen seyn, wie sie will; — eine Voraussetzung, welche, wie wir gesehen haben, nahe am Ende der Wände nicht mehr richtig ist. Er hat aber nicht, wie Segner, versucht, diese Hypothese aus dem Gesetze einer mit der Entfernung schnell abnehmenden Attraction der kleinsten Theilchen abzuleiten; was doch zu ihrer Bestätigung durchaus nöthig gewesen wäre. Diese Bestätigung konnte nur eine strenge Demonstration von der Art, wie wir sie im Anfange unserer Untersuchung mitgetheilt haben, ergeben. Uebrigens schliessen sich Segner's und Young's Ideen mehr an unsere erste Methode, Jurin's Gedanken mehr an die zweite Methode an.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 8.

Fig. 10.

Fig. 6.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Gillb. N. Ann. d. Phys. 31. B. 12. H.

Fig. 17.

Fig. 16.

Zum 2^{ten} Hauptst.

Fig. 20.

Fig. 18.

Fig. 19.

Zum 3^{ten} Hauptst.

Gilb. N. Ann. d. Phys. 3^{te} B. 2-3^{te} H.