GRUNDRISS

DER

KRYSTALLOGRAPHIE

VON

DR. CARL FRIEDRICH NAUMANN,

AUSSERORD. PROF. D. PHIL. AN DER UNIVERSITÄT ZU LEIPZIG, MITGLIED DER LEIPZIGER UND HALLISCHEN NATURFORSCHENDEN, DER DRESDNER UND JENAER MINERALOGISCHEN GESELLSCHAFT.

Nebst 3 Kupfertafeln.

LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1826.

HERRN

FRIEDRICH MOHS,

RITTER DES CIVIL-VERDIENST-ORDENS, KÖNIGL. SÄCHS. BERG-COMMISSIONSRATHE UND PROFESSOR DER MINERALOGIE,

SEINEM

HOCHVEREHRTEM LEHRER

WEIHET

DIESE ARBEIT

DER

VERFASSER.

Vorerinnerung.

In neueren Zeiten hat sich auch in Teutschland die Aufmerksamkeit der Mineralogen ganz besonders auf das Studium der Gestalten der anorganischen Körper gerichtet. Wenn dagegen früher in unserm Vaterlande die Gestaltung der Mineralien weniger beachtet wurde, wenn man überhaupt die nach Zahl, Maas und Gewicht bestimmbaren Eigenschaften derselben vernachlässigte, und die Charaktere oder Beschreibungen der Species vorzüglich nach solchen Eigenschaften entwarf, deren qualitative Verschiedenheiten noch nicht auf quantitative Differenzen zurückgeführt werden konnten, so mochte diess in der psychologischen Thatsache seinen Grund haben, dass die qualitative Differenz, das So oder Anders der Erscheinung vom gesundem

Sinne ohne Beyhülfe des reflectirenden Verstandes in unmittelbarer Anschauung genau und vollständig aufgefasst wird, während alles Quantitative der Erscheinungen zu seiner bestimmten und vollständigen Auffassung eine Vergleichung mit irgend einer Einheit, somit eine Reflexion, und ausserdem nicht selten gewisse vorbereitende Hülfsoperationen erfordert.

Um roth von grün, um Glasglanz von Metallglanz zu unterscheiden, dazu bedarf es bloss eines Blickes, und wer nur einmal die Anschauung empfand, weiss dann für immer, was er roth oder grün, was er glasartig oder metallisch glänzend nennen soll. Um aber das specifische Gewicht des rothen Kupfererzes vom specifischem Gewichte des grünen Smaragdes, um die Härte des glasartig glänzenden Kalkspathes von der Härte des metallisch glänzenden Silbers zu unterscheiden, dazu ist nicht hinreichend, dass ich von jenen irgend beliebige Stücke in der Hand abwäge, oder gegen diese so lange mit einer Stahlspitze drücke, bis sie geritzt werden; dazu werden jederzeit noch Reflexionen erfordert, durch welche ich im ersterem Falle das Volumen der abgewogenen Körper mit der Grösse ihrer Wugt auf meiner Hand, im zweytem Falle die Stärke des von mir angewendeten Druckes mit der Grösse des empfundenen Widerstandes vergleiche.

Dieser wesentliche Unterschied muss nothwendiger Weise eine ganz verschiedene Methode für die schärfere Bestimmung der naturhistorischen Eigenschaften bedingen, je nachdem die Varietäten derselben entweder auf eine Menge qualitativ verschiedener Eindrücke, oder auf eine Menge quantitativ verschiedener Grade eines und desselben qualitativen Eindruckes hinauslaufen. Dass sich dann für jede einzele Varietät der ersteren Eigenschaften das zweyte Verhältniss des Grades geltend macht, begreift sich von selbst; nur ist in ihnen dieses Verhältniss von keiner besondern Wichtigkeit, weil in der vorhandenen Vielfältigkeit des Qualitativen die zu ihrer Brauchbarkeit als Merkmal erforderlichen Unterschiede hinlänglich gegeben sind, und weil die Intensität ihres Erscheinens meistentheils von zufälligen Verhältnissen abhängig zu seyn scheint.

Dagegen ist einleuchtend, dass bey jenen andern Eigenschaften, welche nur quantitative Differenzen bemerken lassen, in scharfer Bestimmung der Intensität oder des Grades derselben einzig und allein die Methode gegeben ist, das Verschiedene zu fixiren, und den einzelen Bestimmungen die zu einem naturhistorischem Merkmale erforderliche Brauchbarkeit zu verleihen. Deshalb war es ein so grosses Bedürfniss für die Mineralogie, dass zur Bestimmung der relativen Härtegrade eine brauchbare Scale entworfen wurde, und man muss sich wundern, wie seit dem Erscheinen von Kirwan's Mineralogie so manches Handbuch das Licht der Welt erblicken konnte, ohne dessen Methode der

Härte - Bestimmungen adoptirt zu haben. Auf gleiche Weise war es mit der Angabe der specifischen Gewichte noch übel bestellt, so lange man es verschmähte, ihre bestimmten numerischen Ausdrücke statt schwankender und willkührlicher Phrasen einzuführen.

Wenn wir nun die Krystallgestalten in Bezug auf die bey ihrer Anwendung als naturhistorisches Merkmal geltend zu machende Methode prüfen, so ist in ihnen beydes vereinigt, indem jede besondre Krystallgestalt einen qualitativ verschiedenen Eindruck macht, der jedoch auf quantitativen Verschiedenheiten der Dimensionen beruht, so dass sich das eigenthümliche So oder Anders der Erscheinungen jederzeit auf ein blosses Mehr oder Minder ihrer Elemente zurückführen lässt. Dieses Verhältniss macht es nothwendig, das Qualitative der Gestalten durch das Quantitative zu erkennen und festzuhalten, indem dieses mathematisch erkannt und bestimmt werden kann, während jenes gewissermaassen nur der Reflex des andern ist. Die Krystallographie kann sich daher, wenn sie anders auf wissenschaftlichen Werth Ansprüche machen will, keinesweges mit blossen repräsentativen Beschreibungen begnügen; sie muss vielmehr in ihren Untersuchungen streng mathematisch verfahren, und darf sich weder in der Theorie noch in ihrer Anwendung auf die Mineralogie von dem exactem Wege der Geometrie und des Calculs entfernen.

Gegen diese letztere Forderung nun erheben sich die Stimmen so Mancher, welche in dem Wahne befangen sind, die Mineralogie werde auf solche Weise in eine dürre, abstruse Formenlehre verwandelt, indem man ihr Object der ganzen Fülle seines anschaulichen Wesens beraube, und nur ein leeres Skelett von Umrissen zurücklasse; auch erhalte sie dadurch einen solchen Grad von Schwierigkeit und Unverständlichkeit, dass das Studium derselben immer abschreckender und ermüdender, und nur denen überlassen werden müsse, welche ihre Zeit auf dergleichen nutzlose Speculationen verwenden können.

Allein diese und ähnliche Bedenklichkeiten dürfen uns keinesweges bekümmern; denn erstens ist es eine unumstössliche Wahrheit, dass die Methode jedes Zweiges der Naturwissenschaft um so vollendeter werde, je mehr sie sich der mathematischen Behandlung anschmiegt, weil nur dadurch und insofern die an sich empirische Wissenschaft denjenigen Grad von Evidenz erlangen kann, dessen sich die evidenteste aller menschlichen Wissenschaften zu erfreuen hat, dass und wiefern sie gewisse Eigenschaften ihres Objectes auf mathematische Weise zu behandeln versucht. Zweytens darf man nie vergessen, dass alle beschreibende Naturwissenschaft ihre Untersuchungen zunächst auf das Individuum beziehen, und von diesem, als der naturhistorischen Einheit ausgehen muss, wenn sie anders auf richtige Resultate gelangen will *); eine Wahrheit, welche für Botanik und Zoologie von jeher unwillkührlich anerkannt worden ist, während sie für Mineralogie erst in neueren Zeiten mit Nachdruck ausgesprochen und geltend gemacht werden musste. Im Mineralreiche aber finden wir den Begriff des Individuums in den Krystallen verwirklicht, indem eigentlich nur der vollkommene rundum ausgebildete Krystall als das von der Natur vollständig individualisirte anorganische Einzelwesen zu betrachten ist.

Da nun endlich so viel Mathematik, als zum Verständnisse der Krystallgestalten erfordert wird, bey den meisten Naturforschern vorausgesetzt werden darf, so scheint es nur noch hier und da an der Anerkennung jener beyden Wahrheiten zu fehlen, obgleich ich überzeugt bin, dass deren Gültigkeit bey einigem Nachdenken von Jedem mit dem unbedingtestem Beyfalle eingesehen werden muss.

In dieser Ueberzeugung nun, und in der Hoffnung, vielleicht etwas zur Verbreitung einer für die Kenntniss der anorganischen Körper unentbehrlichen, aber nur zu häufig vernachlässigten Wissenschaft beytragen zu können, wage ich die öffentliche Bekanntmachung gegenwärtigen Versuches, die ersten Anfangsgründe der theoretischen Krystallographie nach einer einfachen und leicht

*) Mohs Grundriss der Mineralogie I, VII.

verständlichen Methode darzustellen: eines Versuches, bey welchem ich zunächst nur beabsichtige, den Leser so weit in die Krystallographie einzuführen, dass er nach erworbener Uebersicht der Mannichfaltigkeit der Krystallformen und Einsicht in den Zusammenhang derselben in den Stand gesetzt werde, jedem gegebenem Krystall sein System anzuweisen, und nach gewählter Grundgestalt die übrigen seiner Gestalten zu bestimmen. Daher macht auch meine Arbeit nur auf diejenige Brauchbarkeit und Wissenschaftlichkeit Ansprüche, welche von dem bezeichnetem Gesichtspuncte aus gefordert werden können, indem ich mich gern bescheide, dass von einem höherem Standpuncte, und für einen die Schranken dieses Gesichtskreises überschreitenden Horizont nicht nur ganz andere Forderungen, sondern wohl auch andere Methoden geltend zu machen seyn dürften. Kürze und Leichtigkeit mussten mir immer ein Hauptaugenmerk bleiben, wenn anders meine Arbeit ihrem Zwecke entsprechen sollte, und bey allen Mängeln und Unvollkommenheiten, mit welchen dieser erste Versuch behaftet seyn mag *), hoffe ich doch jene beyden Eigenschaften wenig-

*) So bedürfen namentlich einige Begriffe der Propädeutik eine schärfere, andere, (wie z. B. die der Stellungen) eine richtigere Bestimmung. Auch muss ich wegen der dem gewöhnlichem Sprachgebrauche nicht ganz entsprechenden Bedeutung, in welcher ich mich des Ausdrucks „Coordinaten" bedient habe, um Nachsicht bitten, da mir kein anderer passender Ausdruck für die coordinirten Axen - Abschnitte beyfiel.

stens in Hinsicht der Ableitung und Bezeichnung einigermaasen erreicht zu haben.

Uebrigens habe ich bey der Ausarbeitung dieser Anleitung nächst den Arbeiten von Mohs die nicht minder trefflichen von Weiss, und, was zumal die Nomenclatur betrifft, jene von Hausmann und Breithaupt zu Rathe gezogen und benutzt. Kenner werden es leicht bemerken, dass die von mir befolgte Methode sich gewissermaassen als eine eklektische zu den Methoden der beyden erst genannten Meister verhält *).

*) Wenn man in der Mohsischen Methode das Dogma der nach Potenzen fortschreitenden Reihen aufgiebt, wie ich aus Bedürfniss nach grösserer Einfachheit thun zu müssen glaubte, so werden sowohl die Ableitung als die Bezeichnung gleichsam von selbst die leichtere Form annehmen, in welcher ich sie hier zu geben versuche.

Dr. Carl Naumann.

Inhalt

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen.

ZWEITER THEIL.

SYSTEMATIK.

ERSTER ABSCHNITT.

VOM TESSERAL-SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des Tesseral-Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Kantenwinkel der einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von d. Combinationen der einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

ZWEITER ABSCHNITT.
VOM TETRAGONAL-SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Tetragonal-Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des Tetragonal-Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Gestalten des Tetragonal-Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von d. Combinationen d. einzelen Gestalten des Tetragonal-Systemes.

DRITTER ABSCHNITT.

VOM RHOMBISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

VIERTER ABSCHNITT.

VOM KLINOMETRISCHEM ODER KLINORHOMBISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des klinorhombischen Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des klinometrischen Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Kanten der Gestalten des klinometrischen Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des klinorhombischen Systemes.

FUENFTER ABSCHNITT.

VOM DIKLINOMETRISCHEM ODER KLINORHOMBOIDISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des diklinometrischen Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des diklinometrischen Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Berechnung der Gestalten des diklinometrischen Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des diklinometrischen Systemes.

SECHSTER ABSCHNITT.

VOM TRIKLINOMETRISCHEM ODER DIKLINORHOMBOIDISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des triklinometrischen Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

SIEBENTER ABSCHNITT.

VOM HEXAGONAL-SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Hexagonal-Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des Hexagonal-Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des Hexagonal-Systemes.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des Hexagonal-Systemes.

Einleitung.

Die Krystalle sind der Anorganographie, was die Individuen der Organographie; wenigstens lässt sich keine Form des anorganischen Stoffes nachweisen, welche dem Begriffe des Individuums mehr entspräche, als die des vollkommenen, rundum ausgebildeten Krystalles. Wenn in dem vollendetem organischem Individuum eine vollständige Harmonie aller Eigenschaften und Thätigkeiten, und folglich eine gleichmässige Zusammenstimmung aller äusseren und inneren Merkmale zu einem in sich geschlossenem Ganzen besteht, so wird in dem anorganischem Individuum, wiewohl es auf einer weit niedrigeren Stufe des Seyns steht, ein ähnliches Verhältniss Statt finden müssen.

Jemehr naturhistorische Eigenschaften also an einem Quantum anorganischen Stoffes auf einen solchen gemeinschaftlichen, inneren Zusammenhang hinweisen, um so eher wird sich dieses Quantum dem Begriffe des Individuums unterordnen lassen; wiewohl diese Unterterordnung nur dann mit vollem Rechte erfolgen kann, wenn jener Zusammenhang als ein allgemeiner, für alle Merkmale durchgängig gültiger erkannt worden ist.

Vergleichen wir z. B. ein Bruchstück dichten Kalksteines, ein Stück Isländischen Doppelspath und einen Kalkspathkrystall. Das erstere stellt sich uns dar als ein regellos gestaltetes, nach allen Richtungen gleichstark zusammenhängendes, gleichstark schimmerndes und ohne besondere Regel pellucides *) Quantum kohlensauren Kalkes; die Verhältnisse des Glanzes, der Cohärenz, der Durchsichtigkeit, der Gestalt verrathen nicht den mindesten Causalzusammenhang, nicht eine Spur von gegenseitiger Abhängigkeit; denn ich kann die äusseren Umrisse durch Wegschlagen beliebig verändern, und die übrigen Eigenschaften werden eben so wenig in Bezug auf die neuen Conture eine bestimmte Modification zeigen, als sie es in Bezug auf die früheren Conture thaten; auch nenne ich noch das neue Stück mit demselben Rechte B r u c h s t ü c k, wie das früher gegebene, indem zufällige Veränderungen der Umrisse da etwas Indifferentes sind, wo diese Umrisse selbst schon zufällige waren.

Nehmen wir dagegen den Isländischen Doppelspath zur Hand, so finden wir jetzt ein mit der Gestalt

---

*) Pellucid (lichtleitend, durchleuchtend) ist jeder Körper, der nicht, wie die Metalle, absolut undurchsichtig ist. Der Grad der Pellucidität ist zufällig, aber die Pellucidität an sich, wo sie einmal Statt findet, höchst wesentlich.

eines schiefen Parallelepipedons oder Rhomboeders begabtes, nach drey auf den Flächen dieser Gestalt senkrechten Richtungen am wenigsten cohärirendes, am stärksten glänzendes, bestimmte, mit der Gestalt und Cohärenz zusammenhängende Verhältnisse der Strahlenbrechung und Lichtpolarisation zeigendes Quantum kohlensauren Kalkes, welches sich durch diese gegenseitige Abhängigkeit seiner Gestalt und übrigen Eigenschaften gar wesentlich von dem vorher betrachtetem Stücke dichten Kalksteines unterscheidet.

Allein auch dieses, fast in allen seinen physikalischen Verhältnissen einen innern Causalzusammenhang offenbarende Vorkommen des kohlensauren Kalkes entspricht dem Begriffe des Individuums noch nicht vollkommen, denn seine Gestalt ist keine ursprüngliche, d. h. sie ist nicht das Product einer durch die Natur gebotenen Hemmung des Bildungsprocesses, sondern eine durch gewaltsame, nach längst vollendeter Bildung später hinzugetretene äussere Einwirkung hervorgerufene Gestalt, wie denn die Natur Theilungsstücke als solche niemals hervorbringt, obgleich die ursprüngliche Gestalt eines Individuums mit der Gestalt seines Theilungsstückes nicht selten einerley zu seyn pflegt, in welchem Falle aber jederzeit die Umrisse des einen primitive, genetisch-wesentliche, die des andern dagegen secundäre, genetisch-zufällige sind.

Weil also die Gestalt des Individuums durchaus eine ursprüngliche seyn muss, so folgt hieraus, dass jede Verletzung ihrer primitiven Umrisse eine Entstaltung und Verstümmelung des individuellen Wesens verursacht. Deshalb ist auch das Wort „*individuum*“ so bezeichnend, weil der ihm entsprechende Begriff darin seine Vollständigkeit findet, dass die Dinge, auf welche er anwendbar seyn soll, die Unversehrtheit ihres Wesens durch Theilung einbüssen, und mehr oder weniger entstellt und verstümmelt werden; (*individuum dividi nequit salva natura sua*). Diese Unverletzlichkeit oder Untheilbarkeit ist ein allgemeines und nothwendiges Attribut des Individuums in allen Naturreichen. Das ganze Thier, die ganze Pflanze wird zum verstümmeltem Krüppel durch Beraubung einzeler Glieder oder sonstige mechanische Theilung seines Körpers; aber ein Glied eines Thieres, ein Ast eines Baumes bleibt ein Glied und ein Ast, wenn ich auch da und dort Stücke wegnehme, wodurch ich nur auf immer kleinere Glieder, immer kleinere Aeste und Zweige gelange *).

Daher ist auch das anorganische Theilungsstück kein *ens individuum* im Sinne der Naturgeschichte; denn das Stück Doppelspath lässt sich ja durch Theilung in viele andere Stücke zerfällen, welche insgesammt dieselben Eigenschaften in denselben Graden mit denselben Modificationen zeigen, wie das anfänglich gegebene, so dass dieses zu jedem seiner Stücke sich nur verhält, wie von zwey ähnlichen aber ungleichen Dreyecken das grössere zum kleinerem.

Hiernach wird es leicht begreiflich seyn, dass nur der Krystall, und zwar zunächst **) nur der vollkom-

*) Mohs a. a. O. S. 5.

**) Dass die durch das Gedränge von Individuen innerhalb eines Raumes regellos verdrückten und ihrer Wesentlichmene, rundum ausgebildete Krystall als anorganisches Individuum angesprochen werden könne. Betrachten wir z. B. einen dergleichen Kalkspath-Krystall, so finden wir wiederum dieselbe gegenseitige Abhängigkeit, denselben inneren Zusammenhang der physikalischen Eigenschaften und der Gestalt; allein diese ist jetzt nicht nur eine wesentliche, sondern auch eine ursprüngliche, bey der Bildung des gegebenen Quantums kohlensauren Kalkes durch eine selbsteigene, nach bestimmten Gesetzen erfolgte Hemmung des Bildungsprocesses hervorgerufene Gestalt, die in jedem Falle durch Theilung vernichtet wird, wenn auch die Theilungsstücke wiederum die Gestalt des Ganzen zeigen sollten. Die so bestimmte Gestalt ist also eine ursprüngliche, von der Natur selbst ausgeprägte räumliche Begränzung, und ihre Umrisse sind unverletzlich, wenn anders die Unversehrtheit des Naturproductes erhalten und anerkannt werden soll.

Da es nun sowohl die beschreibende Naturgeschichte als die Physiologie zunächst nur mit den Individuen der drey Naturreiche zu thun hat, so ergiebt sich, dass die Naturgeschichte des anorganischen Reiches zunächst die Krystalle der Mineralien, Salze u. s. w. als Gegenstand ihrer Betrachtung anerkennen muss. Auch ist nicht zu verkennen, dass in den Krystallen die vollendetste Darstellung des anorganischen Stoffes ge-

---

keit scheinbar beraubten Gestalten der Zusammensetzungsstücke die Individualität dieser letztern nicht aufheben sondern nur entstalten und verhüllen, zeigt die Mineralogie.

geben ist, und die vollendetsten Zustände müssen ja aus der Reihe der Zustände ausgehoben werden, als die zur wissenschaftlichen Betrachtung vorzüglich einladenden, und das Wesen der Dinge am richtigsten ausdrückenden.

Freylich ist jeder Stoff und jede Stoffverbindung des dreyfachen Zustandes fähig, sowohl in gasartiger als in tropfbarer und starrer Form zu erscheinen; ja, manche Stoffe sind bey den sogenannten gewöhnlichen, d. h. dicht an der Oberfläche unserer gemässigten Zone meistentheils Statt findenden Bedingungen, stets flüssig. Und welchen Unterschied in der Gesammtheit seiner Eigenschaften zeigt ein und derselbe Stoff in diesen verschiedenen Formen seines Erscheinens! — Gestaltlos und jeder dargebotenen Raumschranke sich anschmiegend erscheint das Wasser mit einer fast auf o herabgesunkenen Cohärenz, mit anderem specifischem Gewichte, mit ganz anderen Verhältnissen der Lichtbrechung, der specifischen Wärme, u. s. w. als sein *alter ego* das Eis, in welchem nur Farblosigkeit und Pelluciditât als schwache Zeugen seines früheren Wesens rückständig blieben. Und nun der Wasserdampf, wie unähnlich dem Wasser, wie viel unähnlicher dem Eis! und dennoch bilden sie alle drey eine wahre *trinitas*, einerley der Substanz nach, und nur der Form nach dreyerley. Wenn aber die beschreibende Naturgeschichte die Dinge nach ihren physikalischen Eigenschaften betrachtet, so entsteht die Frage: was ist sich in Bezug auf diese Eigenschaften ähnlicher, ein und derselbe Stoff (z. B. Wasser) in verschiedenen Formen seines Seyns (flüssig und starr), oder zwey verschiedene Stoffe (z. B. Eis, Borax) in derselben Form ihres Seyns, (beyde starr oder flüssig)? Ich glaube, die Antwort ist leicht gefunden, da schon die absolute Gestaltlosigkeit und der ausserordentliche Unterschied der Cohärenz als so bedeutende Momente erscheinen, dass je zwey feste Körper in diesen wichtigsten Merkmalen einander immer ähnlicher seyn werden, als ein und derselbe Körper sich selbst in seinen beyden Vorkommnissen als flüssiger und fester Körper. Demnach würde das ganze Gebiet der Anorganographie in drey Abschnitte zerfallen, in Stereographie, Hygrographie und Pneumatographie, von denen jeder auf jeden Stoff und jede Stoffverbindung seine besondern Ansprüche hätte, die beyden letzteren aber jeden Stoff nur im substantiell-individualisirtem Zustande, als ein zwar physikalisch homogenes, aber amorphisches Wesen betrachten würden, während ihn die Stereographie im räumlich-individualisirtem Zustande, als ein Wesen zu betrachten hat, in welchem die einzelen physikalischen Eigenschaften (um mich eines oft gemissbrauchten Wortes zu bedienen) gleichsam differentiirt erscheinen, da sie sich den morphologischen Beziehungen gemäss nach verschiedenen Richtungen verschiedentlich äussern, welches im flüssigem Zustande nicht der Fall ist.

Da wir oben gezeigt haben, dass vollendetes anorganisches Individuum und Krystall absolut identische Begriffe sind, so können wir nun von letzterem folgende Definition aufstellen:

Krystall ist jedes mit ursprünglicher und wesentlicher Gestalt begabte Quantum starrer anorganischer Substanz.

Durch diese Definition werden alle krystallähnlichen Bildungen aus dem Umfange des Begriffes Krystall ausgeschlossen, denn da die Gestalt 1) eine ursprüngliche, d. h. bey der Bildung des gegebenen Quantums anorganischer Substanz von der Natur selbst ausgeprägte, und 2) eine wesentliche, d. h. mit dem Wesen desselben, oder mit der Gesammtheit seiner physikalischen Eigenschaften im innigstem Zusammenhange stehende Gestalt seyn muss, so sind weder die Theilungsstücke noch die Pseudomorphosen Krystalle zu nennen, da jene zwar wesentliche, aber keine ursprünglichen, und diese zwar ursprüngliche, aber keine wesentlichen Gestalten besitzen. Diess letztere gilt von allen nachahmenden Gestalten freyer und gestörter Bildung.

Uebrigens trifft diese Definition zunächst nur den vollkommen ausgebildeten Krystall, wie denn in aller Naturwissenschaft zuvörderst die vollendeten ungetrübten Formen der Erscheinungen, und dann erst ihre durch Störungen entstellten Modificationen in Betracht gezogen werden können; weshalb es auch die Morphologie der Natur zunächst immer, so zu sagen, mit Idealen zu thun hat, indem sie die Gestalten in derjenigen Vollkommenheit der Ausbildung betrachtet, welche ein völlig unbeschränktes Spiel der Bildungskräfte voraussetzen würde.

Da von allen physikalischen Eigenschaften vorzüglich die Cohärenz im evidentestem und auffallend-stem Zusammenhange mit den Krystallgestalten steht, und da diese ihrer Idee nach jederzeit von ebenen Flächen umschlossene Körper darstellen, so lässt sich obige Definition auch folgendermaassen aussprechen: Krystall ist jedes Quantum starrer, anorganischer Substanz, welches eine ursprüngliche, ebenflächige Gestalt, und gewisse, dieser Gestalt entsprechende Cohärenz-Verhältnisse besitzt.

Krystallogie ist die Wissenschaft von den Krystallen, und zerfällt in zwey, durch den Unterschied von Form und Materie, von Gestalt und Gehalt bedingte Abtheilungen: 1) Krystallographie, Wissenschaft von den Gestalten der Krystalle, 2) Krystallophysik, Wissenschaft von den allgemeinen physikalischen Eigenschaften der Krystalle und ihren Beziehungen zu einander sowohl als zur Krystallgestalt. Diese beyden Wissenschaften bilden eigentlich die Propädeutik, oder vielmehr den theoretischen Theil der gesammten Stereologie, denn aus der Anwendung ihrer Resultate auf irgend einen besonderen Fall entspringt eben die wissenschaftliche Kenntniss des in diesem Falle vorliegenden Gegenstandes. Es ist nämlich jeder starre anorganische Körper entweder ein Krystall, oder ein Aggregat von Krystallen; da nun die Eigenschaften eines gleichartigen Aggregates mit denen seiner constitutiven Einheit identisch seyn müssen, insofern eine solche Identität vermöge des Wesens dieser Eigenschaften möglich ist *), so folgt hieraus, dass die Stereologie überhaupt in der Krystallogie ihre vollständige Begründung findet.

Krystallographie ist die Wissenschaft von den Krystallgestalten. Sie betrachtet daher an den Krystallen oder anorganischen Individuen nichts als die Gestalten und deren mannichfaltige Modificationen, indem sie von allen übrigen Eigenschaften abstrahirt **). Da nun diese Gestalten, ganz anders als jene der organischen Individuen, unter den bestimmtesten Gesetzen räumlicher Begränzung stehen, und in der Regel (also ihrer Idee nach) ebenflächige Figuren sind, so folgt daraus, dass die Krystallographie ohne Mathematik, und namentlich ohne Geometrie und Trigonometrie ihre Aufgabe nicht vollständig zu lösen vermag, indem durch ungefähre Bestimmungen und oberflächliche Beschreibungen die mannichfaltigen Beziehungen ihres Gegenstandes weder gründlich erforscht, noch wissenschaftlich dargestellt werden können.

---

*) So wird man z. B. die Eigenschaften der Gestalt und Theilbarkeit, so wie den Inbegriff aller übrigen damit zusammenhängenden Eigenschaften in einer körnigen Zusammensetzung nicht mehr identisch mit den gleichnamigen Eigenschaften des vollkommenen Krystalles befinden, indem deren an den Raum gebundne Gesetzlichkeit durch die Zufälligkeit der räumlichen Aggregation völlig aufgehoben wird.

**) Vergl. Mohs a. a. O. S. 31.

Da der Gegenstand der Krystallographie eine gegebene Mannichfaltigkeit von Gestalten ist, zwischen welchen möglicherweise gar mancherley Beziehungen und Verknüpfungen Statt finden können, so hat sie nicht nur eine wissenschaftliche Darstellung der einzelen Gestalten schlechthin zu geben, womit für den nach Uebersicht der Mannichfaltigkeit, und nach Einsicht in den Zusammenhang der Erscheinungen strebenden Verstand nur wenig gewonnen seyn würde, sondern auch diese Darstellung in einer solchen systematischen Folge zu entwickeln, dass die inneren Verknüpfungen und gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Gestalten in dieser Folge unmittelbar hervortreten. Deshalb wird sie vorläufig einen möglichst grossen Inbegriff von Krystallgestalten einer vergleichenden Beobachtung unterwerfen, um zu entdecken, ob und welche allgemeine Beziehungen zwischen ihnen Statt finden. Denn da es nicht auf ein willkührliches, sondern auf ein natürliches System der Gestalten ankommt, so kann die Geometrie allein den Leitfaden zur Auffindung desselben nicht abgeben, sondern nur als Regulativ der Beobachtung zur Seite stehen, welche der Natur die gesetzmässige Verknüpfung der Mannichfaltigkeit ablauschen muss. So wenig also die Krystallographie ohne Beobachtung ausmitteln kann, welche einzele Formen sie überhaupt zum Gegenstande ihrer Betrachtungen zu wählen hat, eben so wenig vermag sie ohne Beobachtung den wirklichen, in der Natur Statt findenden Zusammenhang dieser einzelen Formen nachzuweisen.

Wenn es sich nun bey dieser Beobachtung ergeben sollte, dass manche Gestalten aus einer Verbindung oder Combination anderer einfacherer Gestalten hergeleitet werden könnten, so wird es sowohl die Einfachheit als die Consequenz der Methode fordern, dass die Krystallographie zuvörderst diese einfacheren Gestalten abhandle, bevor sie zur Betrachtung jener Combinationen schreitet. Und wenn von den einfacheren Gestalten nur immer gewisse, von bestimmten Verhältnissen, theils einzeln theils in Combinationen an denselben Stoffen erscheinen, während andre von dem Zusammenvorkommen mit jenen völlig ausgeschlossen bleiben, aber unter sich wiederum zu einem ähnlichem abgeschlossenem Kreise verbunden sind, so werden alle dergleichen Inbegriffe als eben so viele besondere Hauptstücke der Betrachtung gelten müssen, weil die Wissenschaft dieselben Abschnitte und Gränzmarken anerkennen muss, welche die Beobachtung in der Natur nachweist.

Innerhalb jedes solchen Hauptstückes wird sich aber die Betrachtung ferner theilen:

1) in Betrachtung der einzelen Gestalten schlechthin, welche nur in einer Aufzählung der zu diesem Inbegriffe gehörigen einzelen Gestalten so wie der vorzüglichsten ihrer Merkmale bestehen wird;
2) in Betrachtung des geometrischen und krystallographischen Zusammenhanges dieser Gestalten;
3) in Betrachtung der Combinationen und der dieselben beherrschenden Gesetze.

Allein die einzelen Gestalten sowohl als ihre Combinationen sind stereometrische Figuren, und keine Beobachtung vermag den individuellen Charakter derselben mit hinlänglicher Bestimmtheit aufzufassen, keine Beschreibung ihn vollständig zu vergegenwärtigen, wenn nicht alle Hülfsmittel zur Verdeutlichung und Versicherung der Beobachtung und Beschreibung in Anwendung gebracht werden. Dahin gehören einestheils Berechnungen der Begränzungselemente der einzelen Gestalten, anderntheils eine bestimmte krystallographische Bezeichnung. Die ersteren machen in jedem Hauptstücke einen eigenen Abschnitt nothwendig, der sich am füglichsten zwischen den zweyten und dritten der oben erwähnten Abschnitte einschieben lässt. Der Bezeichnung dagegen, als einem für das Ganze der Wissenschaft wie für jeden ihrer Theile in gleicher Weise geltend zu machendem Hülfsmittel gebühren in der Propädeutik ihre vollständigen Bestimmungen, die wir dann in den einzelen Hauptstücken dem jedesmaligem Bedürfnisse gemäss in Anwendung zu bringen haben. Die Propädeutik enthält nämlich vorläufige, und die Gesammtheit aller Gestalten betreffende Bestimmungen, welche theils von Thatsachen der Beobachtung, theils von geometrischen Betrachtungen entlehnt werden.

ERSTER THEIL.

PROPAEDEUTIK.

ERSTES CAPITEL.

Von den Theilen und Verhältnissen der einzelen Gestalten.

§. 1.

Begränzungselemente.

1) Begränzungselemente (*elementa*) einer Gestalt heissen alle Flächen, Kanten und Ecke (*hedrae, margines sive acies, apices sive anguli solidi*) derselben.

2) Begränzungselemente von gleichem Namen heissen gleichnamige, (*homonyma*) z. B. alle Flächen, alle Kanten alle Ecke sind gleichnamige B.

3) Gleichnamige Begränzungselemente von gleichem Werthe in Bezug auf Grösse, Figur und Lage heissen gleichwerthige (*aequalia sive aequivalentia*).

4) Ausser den Begränzungsflächen kommen auch noch andre Flächen in Betrachtung.

§. 2.

Flächen, ihre Figuren und Arten.

1) Die Flächen werden nach der Zahl ihrer Seiten in drey- vier- fünf- .... n- seitige Figuren getheilt.

2) Eine Figur heisst regelmässig (*regularis*) wenn sie gleichseitig und gleichwinklich, halbregelmässig (*semiregularis*) wenn sie gleichseitig aber nur abwechselnd gleichwinklich, (*alternatim aequiangula*) ist. Die Rhomben und oblongen Rectangel nennen wir symmetrische Figuren.

3) Eine halbregelmässige Figur hat jederjeit eine gerade Seitenzahl und heisst ein Ditrigon, wenn sie sechsseitig, Ditetragon, wenn sie achtseitig, Dihexagon, wenn sie zwölfseitig ist. Die Benennungen der übrigen Figuren sind die bekannten der Geometrie.

4) Es heissen Figuren der ersten Art, oder tetragonale F., in oder um welche sich Quadrate, der zweyten Art oder hexagonale F., in oder um welche sich regelmässige Dreyecke oder Sechsecke, der dritten Art oder rhombische F., in oder um welche sich Rhomben, endlich der vierten Art oder rhomboidische F., in oder um welche sich nur Rhomboide beschreiben lassen.

5) Ein Trapezoid heisst symmetrisch, wenn es durch eine seiner Diagonalen in zwey gleichschenklige Dreyecke getheilt wird.

6) An jedem Rhombus und Rhomboid unterscheidet

man die Makrodiagonale und Brachydiagonale.

§. 3.

Kanten und deren Theile.

1) An jeder Kante unterscheidet man die Kantenflächen, den Kantenwinkel und die Kantenlinie.

2) Kantenflächen sind die beyden ebenen Flächen, durch deren Durchschnitt die Kante gebildet wird.

3) Kantenlinie ist dieser Durchschnitt an sich.

4) Kantenwinkel ist der Neigungswinkel beyder Flächen, oder der Winkel, welchen zwey in einem und demselben Puncte der Kantenlinie auf ihr selbst in beyden Flächen errichtete Normalen bilden.

5) Kanten heissen gleichgross, wenn sie gleiche Kantenwinkel, gleichlang, wenn sie gleiche Kantenlinien haben.

6) Eine symmetrische Kante ist, deren Flächen congruente Figuren sind, und von den aus dem Mittelpuncte der Kante in ihnen errichteten Normalen in zwey congruente Hälften getheilt werden.

§. 4.

Ecke, und deren Arten.

1) An jedem Eck unterscheidet man die Flächenwinkel, die Kantenwinkel und den Eckpunct.

2) Ein **regelmässiges** Eck ist, das gleiche Flächen- und Kanten-Winkel, ein **halbregelmässiges**, das gleiche und wenigstens sechs Flächen-, aber nur abwechselnd gleiche Kanten-Winkel, ein **symmetrisches**, das vier gleiche Flächen-, und abwechselnd gleiche Kanten-Winkel hat.

3) Die regelmässigen Ecke heissen **trigonale, tetragonale, hexagonale** u. s. w. je nachdem sie von drey, vier, sechs u. s. w. gleichen Kanten, die halbregelmässigen Ecke **ditrigonale, ditetragonale, dihexagonale** u. s. w. je nachdem sie von sechs, acht, zwölf u. s. w. abwechselnd gleichen Kanten gebildet werden. Die symmetrischen Ecke heissen auch **rhombische Ecke.**

§. 5.

Nebenflächen, Gegenflächen, Flächensysteme.

1) **Nebenfläche** (*hedra contigua*) einer gegebenen Fläche ist jede, die eine Kante mit ihr bildet.

2) Die Nebenfläche der Nebenflächen heissen **Nachbarflächen** der gegebenen (*hedrae vicinae*), wenn sie mit derselben noch einen Eckpunct gemeinschaftlich haben.

3) Eine **Zone von Nebenflächen** (*zona hedrarum contiguarum*) heisst jede stetige Reihe von Nebenflächen. Was die ersten, zweyten, dritten u. s. w. Nebenflächen einer gegebenen sind, begreift sich von selbst.

4) Gegenfläche (*hedra opposita*) einer gegebenen Fläche heisst die ihr parallele am entgegengesetztem Ende der Gestalt.

5) Die Flächen einer Gestalt lassen sich übrigens entweder einzeln oder gruppirt betrachten, weshalb man neben den einzelen Flächen Flächenpaare (*paria hedrarum*), überhaupt zwey- drey- vier-.... nzählige Flächensysteme (*systemata hedrarum binaria, ternaria etc.*), unterscheidet.

6) Jedes Flächenpaar oder Flächensystem hat seine Neben-Paare oder Systeme und Nachbar-Paare oder Systeme. Gegenpaar oder Gegensystem heisst das einem gegebenem gegenüberliegende, dessen einzele Flächen den einzelen des gegebenen parallel sind.

§. 6.

Einfache, zusammengesetzte Gestalt. Combinationen.

1) Eine einfache Gestalt (*forma simplex*) ist, die lauter gleiche und ähnliche Flächen hat.

2) Eine zusammengesetzte Gestalt (*forma composita*) ist, die zwar nicht von lauter gleichen und ähnlichen Flächen umschlossen wird, deren Flächen aber insgesammt gleichartig (Dreyecke) und durch dieselben Grund-Dimensionen bestimmt sind; (§. 16.)

3) Die Inbegriffe aller gleichwerthigen Flächen einer

zusammengesetzten Gestalt heissen ihre Theilgestalten (*formae partiariae*).

4) Jede Theilgestalt besteht entweder aus zwey Gegen-Flächenpaaren oder aus zwey einzelen Gegenflächen; diese heissen die Glieder (*membra*) der Theilgestalt.

5) Eine krystallographische Combination, oder Combination schlechthin (*combinatio*) ist ein Inbegriff zweyer oder mehrer Gestalten, die alle um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct so verbunden sind, dass die Flächen der einen symmetrisch zwischen den Flächen der andern erscheinen. In einer Combination kann keine Gestalt rundum ausgebildet und völlig unbeschränkt erscheinen, indem eine jede der andern etwas einräumen muss, wie ja überall durch das Zusammentreten von Individuen zu einem Ganzen die Bildungssphäre der Einzelen beschränkt wird.

§. 7.

Homoedrie, Hemiedrie.

1) Bey vielen Gestalten findet das eigenthümliche Verhältniss Statt, dass sie nicht nur mit der ganzen, sondern auch mit der halben oder viertel Anzahl ihrer Flächen erscheinen können.

2) So ist es bey den zusammengesetzten Gestalten sehr häufig, ja in der Regel der Fall, dass nur einzele ihrer Theilgestalten erscheinen, was sich allerdings bey ihnen um so eher erwarten lässt, da schon in der Verschiedenheit der Flächen ihrer Theilgestalten eine

Zerfällung oder Zerfällbarkeit der zusammengesetzten Gestalt in ihre Elemente angedeutet ist.

3) Aber auch die einfachen Gestalten sind diesem Verhältnisse zum Theil unterworfen, und die dadurch bedingten Erscheinungen wesentlich von jenen unterschieden, wie schon daraus gemuthmasst werden kann, dass wir es hier mit Gestalten zu thun haben, in deren Verhältnissen keine Prädisposition zu einer Zerlegung oder Zerfällung angedeutet ist. Deshalb nennen wir auch die Producte der Zerlegung dieser Gestalten nicht Theilgestalten, sondern halbflächige und viertelflächige Gestalten, (*formae hemiëdricae et tetartoëdricae*) im Gegensatz zu ihren Muttergestalten, den vollflächigen Gestalten (*formae homoëdricae*), und das Verhältniss der Zerlegung selbst die Hemiëdrie (*hemiëdria*).

§. 8.

Arten der Hemiëdrie.

Die Hemiëdrie kann sowohl nach einzelen Flächen als nach Flächenpaaren, oder nach drey- vier- sechszähligen Flächensystemen erfolgen, wobey nur das allgemeine Gesetz Statt findet, dass die bleibenden oder wachsenden Flächen jederzeit eine ringsum gleichmässige oder symmetrische Vertheilung haben müssen; ein Gesetz, welches sich auch in folgenden Formeln aussprechen lässt:

Es wachsen jederzeit die abwechselnden Flächen oder Flächensysteme; oder:

Für jede wachsende Fläche oder jedes wachsende Flächensystem verschwinden die Neben- und wachsen die Nachbar-Flächen oder Systeme.

Wenn für eine wachsende Fläche oder ein wachsendes Flächensystem die Gegenfläche oder das Gegensystem verschwindet, so entsteht natürlich eine hemiëdrische Gestalt, an welcher keine Fläche einer andern parallel, sondern jede gegen jede geneigt ist; wenn dagegen für jede wachsende Fläche die Gegenfläche ebenfalls wächst, so wird auch die hemiëdrische Gestalt je zwey paralleler Flächen behalten. Auf diesen wesentlichen Unterschied gründet sich die Eintheilung der hemiedrischen Gestalten in parallelflächige (*paralleloëdricae*) und geneigtflächige (*clinoëdricae*).

§. 9.

Symmetrie, Mittelpunct, Schnitte.

1) Symmetrie (*symmetria*) einer Gestalt ist die in der Zahl, Grösse und Vertheilung ihrer verschiedenen Begränzungselemente obwaltende Gesetzmässigkeit, vermöge welcher sie als ein mehr oder weniger regelmässig zusammengesetztes und wohlgeordnetes Ganze erscheint.

2) Mittelpunct (*centrum*) einer Gestalt ist derjenige Punct innerhalb derselben, von welchem alle gleichwerthigen Begränzungselemente gleich weit abstehen.

3) Schnitt (*sectio*) ist derjenige Theil einer durch eine Gestalt gelegten beliebigen Ebene, welcher innerhalb der Gestalt enthalten ist.

4) Was regelmässige, halbregelmässige, symmetrische

Schnitte, was Schnitte der ersten, zweyten, dritten und vierten Art sind folgt aus §. 2.

5) Hauptschnitt (*sectio principalis*) ist jeder Schnitt durch den Mittelpunct einer Gestalt, welcher keine Kante derselben schneidet.

§. 10.
Axen, Querschnitte.

1) Durchmesser (*diameter*) einer Gestalt ist jede Linie durch ihren Mittelpunct.

2) Axe (*axis*) nennen wir vorläufig jeden Durchmesser, welcher die Mittelpuncte regelmässiger, halbregelmässiger oder symmetrischer Begränzungselemente verbindet.

3) Gleichwerthige Axen (*axes aequivalentes*) sind, deren respective Begränzungselemente unter einander gleichwerthig sind.

4) Hauptaxen (*axes principales*) sind diejenigen Axen, in Bezug auf welche die grösste Symmetrie (§. 9.) der Gestalten Statt findet.

5) Querschnitt (*sectio transversa*) ist jeder auf einer Axe rechtwinklige Schnitt; Mittelquerschnitt (*s. t. media*) derjenige Querschnitt einer Hauptaxe, welcher durch den Mittelpunct der Gestalt geht; er ist gleichsam der Repräsentant der übrigen ihm parallelen Schnitte, so dass nach seiner Figur die auf die Figur der Querschnitte überhaupt gegründeten Verhältnisse beurtheilt werden.

6) Die Axen werden nach der Figur ihrer Querschnitte in Axen der ersten, zweyten, dritten und vierten Art, oder in Hexagonale, tetragonale, rhombische und rhom-

boidische Axen getheilt, wobey aber der Mittelquerschnitt vorzüglich zu berücksichtigen ist.

§. 11.

Regeln zur Bestimmung der Hauptaxen.

1) Wenn in einer einfachen Gestalt mehre Axen der ersten Art auftreten, so sind sie jederzeit Hauptaxen.

2) Wenn in einer einfachen Gestalt keine Axen ersten, aber mehre Axen der zweyten und dritten Art zugleich auftreten, so sind jederzeit die Axen der dritten Art die Hauptaxen,

3) Wenn in einer einfachen Gestalt nur eine Axe der ersten oder zweyten Art auftritt, so ist sie die Hauptaxe, und zwar eine nothwendige oder absolute Hauptaxe,

4) Wenn in einer einfachen Gestalt nur Axen der dritten Art auftreten, so sind sie entweder gleichwerthig oder nicht; im ersterem Falle sind sie insgesammt Hauptaxen, im zweytem Falle wird eine zur Hauptaxe erwählt. Die so bestimmte Hauptaxe ist daher eine willkührliche oder relative (*axis relativus sive arbitrarius.*)

§. 12.

Fortsetzung.

Eine zusammengesetzte Gestalt (§. 6.) hat keine Axe im Sinne des §. 11. da an ihr weder symmetrische noch halbregelmässige oder regelmässige Begränzungselemente vorkommen. Indess treten statt deren die unregelmässigen Ecke ein, welche an ihnen jederzeit zu sechs vorhanden sind, und solchergestalt drey Axen bestimmen. Da sich aber diese Ecke in drey verschiedene Paare absondern, so können die ihnen entsprechenden Axen nie gleichwerthig seyn, weshalb hinsichtlich der Bestimmung einer Hauptaxe der in §. 11. no. 4. erwähnte zweyte Fall auch hier seine Anwendung findet. Die zusammengesetzten Gestalten haben daher gleichfalls nur eine relative, und zwar eine zweyfach- oder dreyfach-relative Hauptaxe, je nachdem die Verhältnisse derselben zwischen zweyen oder allen dreyen Axen die Wahl lassen. Sämmtliche Gestalten zerfallen solchergestalt nach der Zahl ihrer Hauptaxen in vielaxige und einaxige Gestalten, (*formae multiaxes et uniaxes*), und wir haben zu unterscheiden:

a) Einfache Gestalten mit mehren Hauptaxen,
b) Einfache Gestalten mit einer absoluten Hauptaxe,
c) Einfache Gestalten mit einer relativen Hauptaxe,
d) Zusammengesetzte Gestalten mit einer relativen Hauptaxe.

§ 13.

Aufrechte Stellung, Diagonalen.

1) Eine Gestalt ist in aufrechter Stellung (*positio erecta*) wenn ihre Hauptaxe oder eine ihrer Hauptaxen vertical vor dem Beobachter steht. Die vielaxigen Gestalten sind daher mehrfacher, die einaxigen dagegen nur einfacher aufrechten Stellung fähig.

2) **Umgekehrte aufrechte Stellung** (*p. e. inversa*) entsteht, wenn man eine aufrechte Gestalt umkehrt, d. h. ihre Axe um den Mittelpunct in einer Verticalebene durch 180° dreht.

3) Bey aufrechter Stellung einer vielaxigen Gestalt heisst die verticale Hauptaxe die **Scheitelaxe** (*axis verticalis*) jede andre Hauptaxe eine **Queraxe** (*axis transversus*); die übrigen Axen werden **Nebenaxen** (*axes secundarii*) genannt.

4) In den einaxigen Gestalten sind die Hauptaxe und Scheitelaxe identisch, da es keine transversalen Hauptaxen giebt. Man könnte deshalb die übrigen Axen derselben mit dem Namen der Queraxen bezeichnen, wofür wir jedoch lieber den Ausdruck **Diagonalen** (*diagonales*) gebrauchen werden, weil dadurch die wörtliche Unterscheidung einer Hauptaxe als solcher überflüssig wird, so dass wir die Hauptaxe aller einaxigen Gestalten deren Axe schlechthin (*axis κατ᾽ ἐξοχην*) nennen können.

5) Eben so nennen wir in den vielaxigen Gestalten die Hauptaxen der Kürze halber Axen schlechthin, da die Nebenaxen durch ihren Namen schon hinlänglich als etwas von den Axen Verschiedenes bezeichnet sind.

6) In den einaxigen Gestalten mit absoluter Haupt-Axe kommt nur die halbe Anzahl der Queraxen in Betrachtung, so dass entweder diejenigen, welche Kanten, oder diejenigen, welche Ecke verbinden als wirkliche Queraxen gelten, und mit dem Namen der

Diagonalen bezeichnet werden. In den einaxigen Systemen mit relativer Hauptaxe dagegen werden alle vorhandenen Queraxen in Betrachtung gezogen und Diagonalen genannt.

§. 14.

Polkanten, Mittelkanten.

1) Der Mittelpunct theilt jede Axe in zwey Halbaxen (*semiaxes*) jede Diagonale in zwey Halbdiagonalen (*semidiagonales*).

2) Die Endpuncte einer Axe im Sinne von no. 5. des vorigen §. heissen Pole (*poli*); fallen die Pole in Ecke, so werden dieselben Polecke (*anguli polares sive vertices*) und ihre Kanten Polkanten (*margines polares*) genannt.

3) Obere oder untere Flächen (*hedrae superae aut inferae*) einer Gestalt sind, die an sich oder auch gehörig verlängert mit der oberen oder unteren Halbaxe derselben zum Durchschnitte kommen.

4) Mittelkanten (*margines medii*) sind, die von einer oberen und einer unteren Fläche; Mittelecke, (*anguli medii*) die von oberen und unteren Flächen gebildet werden.

5) In den einfachen einaxigen Gestalten heisst jede gegen die Axe geneigte Fläche eine terminale, jede auf die Axe rechtwinklige Fläche eine basische, jede mit der Axe parallele Fläche eine laterale.

§. 15.

Normale, parallele, diagonale Stellung.

1) **Normale Stellung** (*positio normalis*) ist diejenige aufrechte, bey welcher eine der Queraxen oder Diagonalen die Richtung auf den Beobachter hat.

2) Eine hemiedrische Gestalt kommt in **verwendete Stellung** (*positio hemitropica*) wenn man sie aus der Normalstellung um ihre aufrechte Axe durch 90° oder 180° dreht; letzteres gilt für die einaxigen Gestalten mit einer Axe zweyter Art, ersteres für die übrigen Gestalten.

3) **Parallele Stellung** (*positio parallela*) ist diejenige zweyer oder mehrer Gestalten, bey welcher die Axen und Diagonalen der einen den gleichwerthigen Axen und Diagonalen der anderen parallel laufen.

4) Zwey gleichartige einaxige Gestalten befinden sich in **diagonaler Stellung** (*positio diagonalis*) wenn bey paralleler Stellung die Flächen der einen und die Polkanten der andern über den Diagonalen liegen.

5) Die meisten hemiedrischen Gestalten lassen sich daran erkennen, dass sie hinsichtlich der Lage ihrer Begränzungselemente in verwendeter Stellung eine andere Symmetrie zeigen, als in normaler Stellung. Allein wiewohl jede hemiedrische Gestalt einen geringeren Grad von Symmetrie hat, als ihre Muttergestalt, so darf sie doch nie weder mehr noch weniger Hauptaxen haben, als dieselbe.

ZWEITES CAPITEL.

Von dem Zusammenhange der Gestalten, und den Systemen derselben.

§. 16.

Geometrische Grundbestimmungen.

Die Lage einer Ebene wird durch drey Puncte im Raume bestimmt. Man denke durch irgend einen Punct im Raume drey, nicht in einer Ebene gelegene, sonst beliebig gewählte gerade Linien von unbestimmter Länge, so wird jede gegebene Ebene wenigstens eine dieser Linien oder zwey oder auch alle drey schneiden müsssen.

Kennt man nun die Grösse und Lage der zwischen jenem gemeinschaftlichem Durchschnittspuncte und den Durchschnittspuncten der Ebene begriffenen Linienabschnitte a, b und c, so ist dadurch die Lage der gegebenen Ebene selbst in Bezug auf das Liniensystem bestimmt, indem die Abschnitte derjenigen Linien, welche die Ebene nicht schneidet unendlich gross werden, weil ihnen die Ebene parallel ist. Auf diese Weise können nicht nur einzele, sondern beliebig viele Ebenen bestimmt werden, indem man für jede die Grösse und Lage der respectiven Abschnitte jener Linien angiebt; wie denn auch dieselbe Methode auf die Lage der Durchschnitte je zweyer oder mehrer Ebenen, ihrer Kantenlinien und Eckpuncte ihre Anwendung findet.

§. 17.

Fortsetzung.

Den Inbegriff von drey (oder auch mehren) dergleichen durch einen Punct, aber nicht in einer Ebene gezogenen Linien, in Bezug auf welche man die Lage gegebener Ebenen, Linien und Puncte bestimmt, nennt man ein Axensystem oder System von Dimensionslinien; jede einzele seiner Linien eine Axe *) oder Dimensionslinie und ihren gemeinsamen Durchschnittspunct den Anfangspunct des Systemes. Die durch gegebene Ebenen von den Dimensionslinien abgeschnittenen Theile heissen Abscissen, und die zu einer und derselben Ebene gehörigen Abscissen coordinirte Abscissen, oder Coordinaten dieser Ebene.

§. 18.

Fortsetzung.

Da nun die Krystallgestalten von lauter ebenen Flächen umschlossene Körper sind, so lassen sich sämmtliche zu einer und derselben Gestalt gehörige Flächen,

---

*) Da die analytische Geometrie unter dem Worte Axe einerseits die Linien von unbestimmter Grösse (*magnitudinis indefinitae*) auf welche die Coordinaten x, y und z bezogen werden, anderseits die Linien von bestimmter

Kantenlinien und Eckpuncte, oder alle ihre Begränzungselemente solcher gestalt durch beliebig gewählte Dimensionslinien bestimmen. Dabey entstehen die Fragen, wo der Anfangspunct derselben gewählt, und wie viele und unter welchen Winkeln geneigte Dimensionslinien angenommen werden sollen. Geometrisch wäre es gleichgültig, ob man den Anfangspunct ausserhalb oder innerhalb der Gestalt wählte, und drey, nicht in einer Ebene befindliche Dimensionslinien würden auf jeden Fall zur Bestimmung ausreichen; aber die Geometrie allein kann hier nicht entscheiden, da es uns nicht nur um mathematisch genaue Bestimmung schlechthin, sondern auch um eine möglichst einfache, übersichtliche und der Natur angemessene Bestimmung zu thun ist. Deshalb müssen wir zuvörderst die Anschauung, jedoch mit steter Rücksicht auf das Bedürfniss geometrischer Genauigkeit, zu Rathe ziehen, um beyden Forderungen Genüge leisten zu können.

§. 19.

Fortsetzung.

Auf diesem Wege gelangen wir zu folgenden allgemeinen Bestimmungen:

1) Den Anfangspunct des Systemes verlege man jederzeit in den Mittelpunct der Gestalt.

Grösse (*magnitudinis definitae*) versteht, welche in den Körpern eine so wichtige Rolle spielen, und wir das Wort schon oben in diesem letzterem Sinne gebraucht haben, so ziehen wir für gegenwärtigen Begriff das Wort Dimensionslinien vor, dessen sich bereits Weiss in demselben Sinne bedient hat.

2) Die Zahl der Dimensionslinien ist für die meisten Gestalten auf drey, für einige jedoch auf vier zu setzen, weil nur so die in der Natur erscheinende Symmetrie auch in der Methode der geometrischen Bsstimmung erhalten wird.

3) Die Neigung der dreyzähligen Dimensionslinien ist verschieden; bey den vierzähligen dagegen herrscht jederzeit das Gesetz, dass sich drey in einer Ebene unter 60° schneiden, während die vierte auf ihnen rechtwinklig ist.

4) Dimensionen einer Gesalt sind die durch das Zusammentreffen ihrer verschiedenen Flächen bestimmten Werthe der Dimensionslinien, und zerfallen in die aufrechte oder verticale, und in die Quer-Dimensionen, die entweder geneigt oder horizontal sind.

5) Das Grössenverhältniss der Dimensionen ist entweder ein allgemeines oder ein besonderes; jenes ist nur das der Gleichheit oder Ungleichheit überhaupt, dieses jederzeit ein bestimmtes, in Zahlen ausgedrücktes.

Nach der verschiedenen Neigung der Dimensionslinien, und nach den verschiedenen Grössenverhältnissen der Coordinaten aller zu einer und derselben Gestalt gehörigen Flächen, gehen aus diesen Grundbestimmungen mehre andere hervor, welche zugleich mit jenen die ganze gränzenlose Mannichfaltigkeit der Krystallgestalten bedingen.

§. 20.

Krystallsysteme.

Ein **Krystallsystem** ist der Inbegriff aller möglichen Gestalten von gleichen Zahl - Neigungs - und allgemeinen Grössen - Verhältnissen der Dimensionen. Wenn wir die Merkmale der einzelen Gestalten mit dem Inhalte dieser Definition vergleichen, so ergiebt sich Folgendes.

Es zerfallen sämmtliche Gestalten zuvörderst nach der Zahl ihrer Dimensionen in zwey Abtheilungen:

A) Gestalten mit drey Dimensionen; **trimetrische Gestalten.**

B) Gestalten mit vier Dimensionen; **tetrametrische Gestalten.**

Die ersteren sondern sich ferner in solche, deren Dimensionen insgesammt unter rechten Winkeln geneigt sind, weshalb bey aufrechter Stellung nach einer derselben (der Axe) die Ebene durch die beyden übrigen (die Basis) rechtwinklich auf jene erstere erscheint; und in solche, deren Dimensionslinien nicht alle gegen einander rechtwinklich sind, weshalb bey aufrechter Stellung nach einer derselben die Ebene durch die beyden übrigen jene schiefwinklich schneidet. Dies giebt die beyden Unterabtheilungen der **orthobasischen** oder **orthometrischen** und **klinobasischen** oder **klinometrischen** trimetrischen Gestalten.

Die orthobasischen trimetrischen Gestalten, welche insgesammt einfache Gestalten sind, theilen sich ferner nach dem verschiedenem allgemeinem Grössenverhältnisse ihrer Dimensionen in drey Systeme, indem jenes Verhältniss entweder das der durchgängigen Gleichheit, oder das der Gleichheit zweyer Dimensionen gegen eine ungleiche, oder das der durchgängigen Ungleichheit ist. Diese Verschiedenheit begründet die mit den Namen des tesseralen oder isometrischen, des tetragonalen oder monodimetrischen und des rhombischen oder anisometrischen Systemes bezeichneten Abtheilungen.

Die klinobasischen trimetrischen Gestalten, welche insgesammt zusammengesetzte Gestalten sind, und, so weit sie jetzt bekannt worden, jederzeit Ungleichheit ihrer Dimensionen zeigen, gestatten nur Verschiedenheiten nach der Neigung derselben. Ist eine Dimension rechtwinklig auf den beyden übrigen, so werden, bey aufrechter Stellung nach einer dieser letzteren, die basischen Schnitte geneigte Rhomben, und das System der so beschaffenen Gestalten heisst das klinorhombische. Ist dagegen eine Dimension nur auf einer der beyden übrigen rechtwinklig, und die dritte gegen beyde schiefwinklig, so werden die basischen Schnitte bey aufrechter Stellung nach einer der rechtwinkligen Dimensionen geneigte Rhomboide, und das System wird das klinorhomboidische genannt. Schneiden sich endlich sämmtliche Dimensionen unter schiefen Winkeln, so sind die basischen Schnitte in jedem Falle doppelt geneigte Rhomboide, und das System der unter diesem Gesetze stehenden Gestalten erhält den Namen des diklinorhomboidischen Systemes.

Die tetrametrischen Gestalten endlich bilden das hexagonale System.

§. 21.

Uebersicht.

Aus dem Inhalte des vorigen §. ergiebt sich folgende übersichtliche Zusammenstellung sämmtlicher Abtheilungen der Krystallgestalten.

A) Trimetrische Gestalten. Drey Dimensionen.

a) *Orthometrische oder orthobasische Gestalten.* Rechtwinkliges Dimensions-System.

1) Isometrisches oder Tesseral-System; drey gleiche Dimensionen.
Vielaxige Gestalten; (§. 12.)

2) Monodimetrisches oder Tetragonal-System; zwey gleiche Dimensionen gegen eine ungleiche. Einaxige Gestalten mit absoluter Axe erster Art.

3) Anisometrisches oder Rhombisches System; drey ungleiche Dimensionen.
Einfache einaxige Gestalten mit relativer Axe dritter Art.

b) *Klinometrische oder klinobasische Gestalten.* Schiefwinkliges Dimensions-System.

1) Klinometrisches oder klinorhombisches System; eine Dimension gegen die andere geneigt, die dritte rechtwinklig auf beyden.
Aus zwey Theilgestalten zusammengesetzte einaxige Gestalten mit zweifach-relativer Axe; (§. 12.)

2) Diklinometrisches oder klinorhomboidisches System; eine Dimension geneigt gegen die beyden übrigen, diese rechtwinklig auf einander.

Aus vier Theilgestalten zusammengesetzte einaxige Gestalten mit zweifach-relativer Axe.

3) Triklinometrisches oder diklinorhomboidisches System; alle Dimensionen gegen einander geneigt.

Aus vier Theilgestalten zusammengesetzte einaxige Gestalten mit dreifach-relativer Axe. (§. 12.)

B. Tetrametrische Gestalten. Vier Dimensionen.

1) Monotrimetrisches oder Hexagonal-System; eine ungleiche Dimension rechtwinklig auf drey gleichen gegen einander unter 60° geneigten Dimensionen.

§. 22.

Zusatz.

Die zweyte der für jedes System angegebenen Benennungen bezieht sich, mit Ausnahme des Tesseralsystems auf die Gestalt und Lage der Basis, als der durch die Querdimensionen gelegten Ebene. Da dieses Verhältniss ein abgeleitetes, jenes der Grösse und Neigung der Dimensionen hingegen ein ursprüngliches ist, so verdienen die zuerst angeführten Benennungen in vielen Fällen den Vorzug. Dass übrigens der Begriff der Dimensionen mit dem oben (§. 10.) entwickeltem der Axen im isometrischem, der Axen und Diagonalen in den übrigen

Systemen aequivalent sey, ist einleuchtend. — Einige dieser Systeme zerfallen nun weiter nach dem in §. 7. angedeutetem Verhältnisse der Hemiedrie in mehre Gruppen, und so haben wir namentlich im Tesseral - Tetragonal - und Hexagonal - Systeme die Gruppen der homoedrischen, der geneigtflächig - und parallelflächig - hemiedrischen Gestalten zu unterscheiden, von denen zumal die des Hexagonal - Systemes von so grosser Bedeutung ist, dass sie füglich als ein besonderes hemiedrisches System neben seinem homoedrischem aufgeführt werden dürfte.

§. 23.

Grundcharakter und Grundgestalt.

1) Geometrischen Grundcharakter eines Systemes nennt man das seinen sämmtlichen Gestalten zukommende Zahl - Neigungs - und allgemeine Grössen - Verhältniss der Dimensionen. So ist z. B. der Grundcharakter des Tesseral - Systemes Dreyzahl, Rechtwinkligkeit und Gleichheit der Dimensionen, der Grundcharakter des diklinorhomboidischen Systemes Dreyzahl, Schiefwinkligkeit und Ungleichheit seiner Dimensionen.

2) Grundgestalt eines Systemes ist möglicherweise jede Gestalt, in welcher der Grundcharakter desselben unmittelbar und vollständig repräsentirt wird, oder deren Flächen ein dem Grundcharakter entsprechendes endliches Verhältniss der Coordinaten haben. So wird z. B. die Grundgestalt des Tesseral - Systems diejenige seiner Gestalten seyn, deren Flächen drey gleiche Coordinaten haben; da hingegen im Tetragonal - Sy-

steme jede Gestalt als Grundgestalt auftreten kann, deren Flächen zwey gleiche Coordinaten gegen eine ungleiche haben, vorausgesetzt, dass letztere in die aufrechte Dimensionslinie fällt, und einen endlichen Werth hat.

§. 24.

Krystallographische Ableitung.

Ableitbarkeit der Gestalten überhaupt ist die Fähigkeit derselben, vermöge welcher jede aus jeder durch zweckmässige Veränderungen des Grössen- und Neigungs-Verhältnisses der Coordinaten ihrer Flächen construirt werden kann.

Die krystallographische Ableitbarkeit der Gestalten ist die Fähigkeit der zu einem Systeme gehörigen Gestalten, vermöge welcher jede aus jeder durch blosse Veränderung des Grössen-Verhältnisses ihrer Coordinaten construirt werden kann.

Diese Construction selbst heisst die krystallographische Ableitung der Gestalten, oder Ableitung schlechthin (*derivatio*), und darf niemals auf ein den geometrischen Grundcharakter des Systemes überschreitendes Verhältniss der Dimensionen führen, worin eben der Unterschied der krystallographischen und geometrischen Ableitbarkeit und Ableitung besteht.

Gestalten verschiedener Systeme sind daher krystallographisch nicht ableitbar, wiewohl geometrisch ihrer Ableitung nichts im Wege steht.

Zur Ableitung wählt man jederzeit eine Grundgestalt, und die dazu einmal auserwählte heisst dann die krystallographische Grundgestalt oder Grundgestalt schlechthin. Im Tesseralsysteme ist daher die Grundgestalt eine absolute, weil die nothwendige Gleichheit aller drey Coordinaten alle übrigen Verhältnisse ausschliesst; in den übrigen Systemen dagegen ist sie eine relative, geometrisch-willkührliche und nur krystallographisch-bestimmbare, indem gar viele Gestalten den Grundcharakter des Systemes repräsentiren.

Ableitung der ersten Art nennt man diejenige Ableitung, welche die Veränderung nur einer, Ableitung der zweyten Art, welche die Veränderung zweyer Coordinaten der Flächen der Grundgestalt voraussetzt. In jedem Falle bleibt also wenigstens eine der Dimensionen der Grundgestalt unveränderlich.

Ein Krystallreihe ist der Inbegriff aller Gestalten, welche aus einer nach dem besonderem Grössenverhältnisse (§. 16.) ihrer Dimensionen bestimmten Grundgestalt abgeleitet werden können *).

---

*) Vergl. Mohs a. a. O. S. XX.

DRITTES CAPITEL.

Von der Benennung und Bezeichnung der Krystallgestalten.

§. 25.

Benennung; Forderungen.

Die Namen der einzelen Krystallgestalten müssen von ihren Eigenschaften entlehnt werden. Da nun diese Eigenschaften mancherley sind, die Namen aber doch nicht übermässig lang oder zusammengesetzt seyn dürfen, indem sie dann durch Schwerfälligkeit verlören, was sie an Bestimmtheit gewönnen, so können nur gewisse, vorzüglich bezeichnende Eigenschaften zur Benennung in Anwendung kommen. Dabey müssen wir aber den schon eingeführten Sprachgebrauch der Geometrie möglichst berücksichtigen *), um nicht in der Krystallographie und in der Geometrie denselben Gegenstand mit verschiedenen Worten zu bezeichnen.

Für die vielaxigen oder tesseralen Gestalten, welche die Geometrie zu betrachten pflegt, hat sie, wie die Namen Oktaëder, Hexaëder, Dodekaëder beweisen, die

---

*) Mohs a. a. O. S. X.

Nomenclatur auf die Zahl der Flächen gegründet, während sie für die einaxigen Gestalten (als Pyramide, Prisma) andre, mehr willkührliche Verhältnisse zu Grunde legte. Wir werden diesen Sprachgebrauch um so eher befolgen können, da die Natur selbst die vielaxigen Gestalten so wesentlich vor den übrigen ausgezeichnet hat, dass mit allem Rechte für beyderley Gestalten ein verschiedenes Princip der Nomenclatur geltend gemacht werden kann.

§. 26.

Benennung der vielaxigen Gestalten.

Die vielaxigen oder tesseralen Gestalten erhalten ihren allgemeinsten Namen von der Zahl ihrer Flächen *); wo dieses Verhältniss allein nicht mehr ausreichend unterscheidet, da wird eine nähere Determination von der Gestalt der Flächen entlehnt. Eine tesserale Gestalt von n Flächen heisst daher allgemein ein *n* Flächner; z. B. Vierflächner, Achtflächner u. s. w., wofür wir jedoch häufiger die griechischen Namen Tetraeder, Oktaeder u. s. w. gebrauchen werden. Da sich aber die Flächen mancher tesseralen Gestalten in mehre gleichzählige Flächensysteme gruppiren, so lässt sich in solchen Fällen der allgemeine Name weit bezeichnender bilden, wenn man die ganze Zahl der Flächen in ihre beyden Factoren, die Zahl der Flächensysteme und die Zahl der einzelen Flächen in jedem Systeme zerfällt. Z. B. eine *n* flächige Gestalt zerfalle in a Flächensysteme, de-

---

*) Mohs a. a. O. S. 49.

ren jedes b Flächen zählt, so ist n = b. a, und der Ausdruck *b* mal *a* Flächner weit bezeichnender und bestimmter als der Ausdruck *n* Flächner *).

§. 27.

Benennung der einaxigen Gestalten.

Die einaxigen Gestalten erhalten ihren allgemeinsten Namen nicht von der Zahl ihrer Flächen, sondern von der Figur derselben oder von andern allgemeinen Gestaltverhältnissen **). So hat man z. B. folgende Arten von einaxigen Gestalten:

Pyramiden (*pyramides*) (eigentlich Dipyramiden ***) sind von sechs und mehr Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen.

Rhomboeder (*rhomboedra*) sind von sechs Rhomben umschlossene Gestalten.

---

*) Diese sehr zweckmässige Methode ist, so viel mir bekannt zuerst von Weiss angewendet worden.

**) Mohs a. a. O.

***) Vergl. Mohs a. a. O. S. X. In der That stellt jede Pyramide der Krystallographie zwey in ihren Grundflächen verbundne Pyramiden der Geometrie dar. Allein da bis jetzt in der Natur niemals oder höchst selten einfache Pyramiden beobachtet wurden, so ist die Distinction zwischen ihnen und den doppelten Pyramiden für die Krystallographie überflüssig und der kürzere Name vorzuziehen. Das einzige mir bekannte Beispiel angeblich einfacher Pyramiden im Mineralreich am Sideroschisolith bedarf wiederholter Prüfung, und kann bis dahin zu keinem Einwande dienen, in jedem Falle aber nur als Ausnahme gelten. Wer sich übrigens an den Gebrauch stossen sollte, braucht nur überall Dipyramide statt Pyramide zu sagen.

Trapezoeder*) (*trapezoedra*) sind von sechs und mehr Trapezen umschlossene Gestalten.

Skalenoeder **) (*scalenoedra*) sind von sechs und mehr Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen.

Sphenoeder ***) (*sphenoedra*) sind von vier Dreyecken umschlossene Gestalten.

Ein Prisma (*prisma*) heisst in den einaxigen Krystallsystemen jeder Inbegriff von gleichwerthigen Flächen, welche einer der Dimensionen, oder auch zweyen, wenn die aufrechte eine derselben ist, parallel laufen. Die Dimension, welcher die Flächen eines Prismas parallel sind, heisst die Axe desselben; wo aber der Parallelismus in Bezug auf zwey Dimensionen Statt findet, da ist jederzeit die aufrechte die Axe. Da nun Flächen, welche einer und derselben Linie parallel laufen, keinen Raum umschliessen, so ergiebt sich, dass die Prismen keine geschlossenen oder endlichen, sondern offene oder unendliche Gestalten sind, und als solche nicht selbständig, sondern nur in Combination mit andern, gegen ihre Axe geneigten Flächen erscheinen können.

Diese Gestalten insgesammt werden weiter nach dem Systeme, zu welchem sie gehören, nach der Figur ihrer basischen oder Quer-Schnitte, zum Theil auch nach ihrer Stellung durch zweckmässige Beynamen unterschieden.

---

*) Breithaupt Charakteristik des Mineralsystems. S. LXIV.

**) Breithaupt a. a. O. LXIII.

***) Breithaupt a. a. O.

§. 28.

Bezeichnung; Forderungen.

Iede Bezeichnung (*signatio*) muss möglichst verständlich, bestimmt, vollständig und kurz seyn. Das Zeichen (*signum, symbolum*) ist der Repräsentant seines Gegenstandes, soll mir also das Bild oder die Vorstellung desselben unmittelbar vergegenwärtigen, und wird diess um so sicherer leisten, je leichter und schneller ich aus ihm die Physiognomie des bezeichneten Gegenstandes herauslesen kann, d. h. je verständlicher, kürzer und repräsentativer es ist. Dabey muss es aber auch die Vorstellung des Gegenstandes mit der gehörigen Bestimmtheit und Schärfe vergegenwärtigen, indem man sonst Gefahr laüft, bey verschiedenen Zeichen denselben Gegenstand vorzustellen. Endlich wird gefordert, dass die Bezeichnung auf alle Gegenstände des Gebietes, für welches sie gelten soll, ohne Ausnahme ihre Anwendbarkeit finde, mithin vollständig und umfassend sey. Dass sie übrigens nicht die zu bezeichnenden Gegenstände selbst im Bilde darstellen dürfe, wenn sie eine Bezeichnung bleiben soll, versteht sich von selbst.

§. 29.

Einfache und zusammengesetzte Bezeichnung.

Die Bezeichnung ist entweder einfach oder zusammengesetzt, (*signatio simplex vel composita*). Eine einfache Bezeichnung giebt für jeden besondern Gegestand ein einfaches oder einzeles Zeichen, wird aber eben dadurch sehr schwerfällig und unbequem, sobald die Zahl der zu bezeichnenden Gegenstände etwas gross ist. Eine zusammengesetzte Bezeichnung giebt für jeden Gegenstand ein aus zweyen oder mehren einzelen Zeichen zusammengesetztes Zeichen, und ist eigentlich nur auf solche Gegenstände anwendbar, zwischen welchen gewisse Verknüpfungen und Verwandschaften Statt finden; wobey an sie die besondere Forderung zu machen ist, dass sie diese Verknüpfungen und Verwandschaften möglichst vollständig ausdrücken muss. Man unterscheidet an ihr die Materie, als den Inbegriff der zur Bezeichnung erforderlichen einzelen Zeichen oder Elemente, und die Form, als die Weise der Verbindung dieser Elemente zu den zusammengesetzten Zeichen. Beyde stehen gewissermassen in einem reciprokem Verhältnisse, inwiefern nämlich die grössere Einfachheit der einen eine grössere Zusammengesetztheit der anderen nothwendig macht.

§. 30.

Grund- und Hülfs-Elemente der Bezeichnung.

Der Anforderung, die zwischen den Gegenständen bestehenden Verknüpfungen und ihr Gemeinsames wie ihr Verschiedenes in der Bezeichnung wieder zu geben, wird man am zweckmässigsten Genüge leisten, indem man gewisse Elemente durchgängig in alle Zeichen eingehen lässt, und darauf durch andre Elemente die obwaltenden Verschiedenheiten ausdrückt. Jene gemeinschaftlichen Elemente heissen die Grundelemente (*elementa fundamentalia*), oder das Substrat, diese dagegen die Hülfselemente (*elementa accessoria*) oder die Adjectiven der Bezeichnung *). Ie mehr Grundelemente eingeführt werden, desto einfacher kann allerdings die Form der Zeichen werden, jedoch dürfte dadurch die Vorstellbarkeit des Gegenstandes nicht selten erschwert werden **). Ueberhaupt gilt die allgemeine Regel, so wenig Elemente einzuführen, als es nur die Einfachheit der Form gestattet.

§. 31.

Krystallographische Bezeichnung.

Da in der Krystallographie die verschiedenen Systeme als eben so viele abgeschlossene Inbegriffe von Gestalten zu betrachten sind, so dass zwischen den Gestalten verschiedener Systeme keine wesentlichen Beziehungen Statt finden, so wird auch die Bezeichnung zunächst nur in Bezug auf die einzelen Systeme gebildet werden müssen. Weil dagegen innerhalb der einzelen Systeme wegen der gegenseitigen Ableitbarkeit der Gestalten der innigste Zusammenhang Statt findet, so wird auch dieser Zusammenhang in der Bezeichnung hervortreten, und diese selbst eine zusammengesetzte seyn müssen;

---

*) So ist z. B. in den Zeichen der lateinischen Sprache für die zeitlich und persönlich verschiedenen Modificationen des Begriffes lieben *am* das Grundelement, während *o as at abam avi* u. s. w. die Hülfselemente bilden.

**) Dies ist namentlich der Fall mit *Hauy's* Bezeichnungsart, welche fast eben so viele Grundelemente nothwendig macht, als die *forme primitive* Begränzungselemente hat; ein Umstand, der auch Hausmanns Bezeichnung in vieler Hinsicht unbequem erscheinen lässt.

(§. 29.). Da nun alle Gestalten eines Systemes aus einer beliebig gewählten Grundgestalt abgeleitet werden können, und diese den geometrischen Grundcharakter des Systemes, wie er sich in allen Gestalten durchgängig ausgeprägt finden muss, am einfachsten und unverhülltesten darstellt, so dürfte es am zweckmässigsten seyn, der Grundgestalt ein beliebiges Zeichen zu geben *), und dieses als den Repräsentanten des in allen Gestalten mehr oder weniger verhüllt wiederkehrenden Verhältnisses zum Grundelemente der Bezeichnung zu wählen.

§. 32.

Fortsetzung.

Man bezeichne die gewählte Grundgestalt mit dem Anfangsbuchstaben ihres Namens, z. B. mit P, wenn sie eine Pyramide ist. Gesetzt nun, das Verhältniss der Coordinaten ihrer Flächen sey $= a : b : c$ und jenes der Flächen irgend einer andern Gestalt $= a' : b' : c'$, so wird sich zuvörderst dieses Verhältniss den Bedingungen der Ableitung gemäss in ein andres verwandeln müssen (§. 20.) in welchem eine der Grössen des ersteren Verhältnisses wieder erscheint, so dass z. B.

$$a' : b' : c' = a'' : b'' : c$$

a'' und b'' aber lassen sich, wie die Erfahrung lehrt, jederzeit als Multipla oder Submultipla von a und b ausdrücken, so dass

$$a'' : b'' : c = ma : nb : c$$

Da es nun in der Krystallographie einzig und allein auf die **Lage** der Flächen, nicht auf die absolute

*) Mohs a. a. O. S. 95.

Grösse der Gestalten ankommt, so ist es ganz gleichgültig, ob wir statt des Verhältnisses a' : b' : c' das Verhältniss ma : nb : c als das den Flächen der zu bezeichnenden Gestalt eigenthümliche einführen. Nun war das Zeichen der Grundgestalt, für die Coordinaten a : b : c = P, also dürfte das Zeichen irgend einer andern Gestalt für die Coordinaten ma : nb : c am zweckmässigsten = mPn zu schreiben seyn, indem man die Coefficienten der Coordinaten a und b vor und hinter das Zeichen der Grundgestalt setzt.

§. 33.

Fortsetzung.

Auf die hier vorgetragene Methode werden wir die Bezeichnung der Gestalten sämmtlicher Krystall-Systeme gründen, da sie sich vollkommen ausreichend gezeigt hat und im Gebrauche manche Vortheile gewährt. Das Grundelement der Bezeichnung ist daher für jedes System das Zeichen der Grundgestalt; die Hülfselemente sind die gewöhnlichen Ziffern. Wo die Stellung, oder, wie in den zusammengesetzten und hemiedrischen Gestalten, die oberen und unteren, rechten und linken Theilgestalten oder Hälften zu unterscheiden sind, da geschieht es durch Vorsetzung der Zeichen + und — der Buchstaben r und l, u. d. gl. *). Die hemiedrischen Gestalten erhalten in der Regel das Zeichen ihrer Muttergestalt mit untergeschriebener 2 oder 4 **); so

*) Mohs a. a. O. II. S. XI.

**) Mohs, ebendaselbst.

wird z. B. das Zeichen der hemiedrischen oder tetartoedrischen Gestalt von $mPn = \frac{mPn}{2}$ oder $= \frac{mPn}{4}$. Die linken Theilgestalten der zusammengesetzten Gestalten könnten auch durch oben beygefügte Striche von den rechten unterschieden werden, so dass z. B. $+ P$ und $+ P'$ die beyden obern, $- P$ und $- P'$ die beyden unteren Glieder der vorderen Hälfte einer triklinometrischen Pyramide bedeuteten. Das Zeichen einer vollständigen zusammengesetzten Gestalt wird gebildet, indem man die Zeichen ihrer Theilgestalten durch Interpunctionen getrennt neben einander schreibt; so ist z. B. $+ P. + P'. - P. - P'$ das Zeichen einer vollständigen triklinometrischen Pyramide *). Wo es endlich nöthig wird, die hinteren und vorderen Flächen einer Gestalt zu unterscheiden, da kann man für jene den kleinen lateinischen Buchstaben gebrauchen, während für diese der grosse beybehalten wird.

*) Wie in der Algebra, wird das Zeichen + gewöhnlich weggelassen, so dass P schlechthin die obere oder positive Theilgestalt bedeutet.

Viertes Capitel.

Von den Combinationen.

§. 34.

Symmetrie der Combinationen.

Eine krystallographische Combination ist nach §. 6. ein Inbegriff zweyer oder mehrer Gestalten oder Theilgestalten, welche um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct unter solchen Verhältnissen verbunden sind, dass die Flächen oder Flächensysteme (§. 5.) der einen symmetrisch zwischen den Flächen oder Flächensystemen der andern erscheinen. Da nun die Flächen der einzelen Gestalten entweder Kanten oder Ecke zwischen sich bilden, so ist klar, dass in einer Combination die Flächen der einen Gestalt an der Stelle gewisser Ecke oder Kanten der anderen Gestalt oder Gestalten gerade so erscheinen müssen, als wären sie die Flächen von Schnitten, durch welche diese Begränzungselemente abgestumpft, zugeschärft oder zugespitzt worden; und weil die Flächen der combinirten Gestalten eine gegenseitig-symmetrische Vertheilung beobachten, so lässt sich erwarten, dass die Flächen einer und derselben Gestalt oder Theilgestalt nur immer an den Stellen gleichwerthiger Begränzungselemente erscheinen werden, weil nur diese in gleichmässiger Lage und symmetrischer Vertheilung an den Gestalten auftreten.

§. 35.

Gesetz der Combinationen.

Diese Symmetrie, welche in wesentlichem Zusammenhange mit der Ableitung und mit dem geometrischem Grundcharakter der Gestalten steht, ist nur eine Folge *) des allgemeinen Combinationsgesetzes, dass die combinationsfähigen Gestalten jederzeit Glieder nicht nur eines und desselben Krystall-Systemes, sondern auch einer und derselben Krystallreihe, und in derjenigen Stellung mit einander verbunden seyn müssen, in welcher sie durch die Ableitung erhalten werden **). —

Uebrigens werden die Combinationen nach der Zahl der in ihnen enthaltenen Gestalten in zwey-drey-vier-...... *n*-zählige, (*combinationes binariae, ternariae, etc.*), und nach dem Character derselben in homoedrische und hemiedrische Combinationen getheilt, so dass eine Combination eine hemiedrische heisst, wenn sie auch nur eine hemiedrische Gestalt enthält.

*) Mohs a. a. O. S. 182.

**) Mohs a. a. O. S. 179.

Die Kanten, in welchen die Flächen zweyer Gestalten zum Durchschnitte kommen, heissen die Combinationskanten.

§. 36.

Vorherrschende, untergeordnete Gestalten.

Die Gestalten einer Combination haben nach Massgabe der relativen Grösse oder gegenseitigen Ausdehnung ihrer Flächen einen grösseren oder geringeren Antheil an der allgemeinen Physiognomie oder dem Totalhabitus der Combination. Diejenigen Gestalten, welche die allgemeinsten Umrisse einer Combination ausschliessend bestimmen, nennt man vorherrschende; diejenigen dagegen, welche keinen oder doch nur sehr unbedeutenden Antheil an der Bildung der Totalform nehmen, untergeordnete Gestalten. In vielen Fällen wird die Bestimmung vorherrschender Gestalten sehr schwankend, in andern fast unmöglich.

§. 37.

Entwicklung und Bezeichnung der Combinationen.

Eine Gestalt bestimmen, heisst, ihren Namen und das Verhältniss ihrer Abmessungen sowohl als ihrer Stellung zu der gewählten Grundgestalt, oder, was dasselbe ist, ihr krystallographisches Zeichen angeben. Die Bestimmung der verschiedenen in einer Combination enthaltenen Gestalten, oder die Entwicklung *) (*expli-*

*) Mohs, a. a. O. S. 183.

catio) der Combinationen bildet eine der vorzüglichsten Aufgaben der Krystallographie. Das Zeichen einer entwickelten Combination ist der Inbegriff der Zeichen aller in ihr enthaltenen Gestalten, welche durch Interpunctionen abgesondert neben einander geschrieben werden *); dabey findet die Regel Statt, dass die Zeichen der vorherrschenden Gestalten (§. 36) den Zeichen der untergeordneten vorangehen, und dass die Zeichen derjenigen Gestalten, welche ungefähr im Gleichgewichte befindlich sind, durch schwächere Interpunctionen von einander getrennt werden, als die Zeichen derjenigen, welche in sehr verschiedenen Graden hervortreten.

§. 38.

Allgemeine und besondere Entwicklung.

Das leichteste Geschäft bei der Entwicklung einer Combination ist die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen in ihr enthaltenen Gestalten oder Theilgestalten, oder die Beantwortung der Frage: wie vielzählig ist die Combination (§. 35.). Denn da alle zu einer und derselben einfachen Gestalt oder Theilgestalt gehörigen Flächen gleichwerthige seyn müssen (§. 1.) (§. 6.), und diese Forderung durch das Auftreten derselben in Combinationen vermöge des dieselben beherrschenden Symmetriegesetzes keine Einschränkung erleiden kann, so wird die Anzahl der in einer Combination enthaltenen Gestalten oder Theilgestalten unmittelbar durch die Beobachtung gegeben seyn, wie vielerley ungleichwerthige Flächen in derselben auftreten, indem

*) Mohs, a. a. O. S. 191.

jederzeit der Satz gilt, dass eine Combination genau so vielerley Gestalten oder Theilgestalten enthält, wie vielerley verschiedenwerthige Flächen in ihr erscheinen. Die übrigen Bestimmungen dagegen setzen einige Kenntniss der näheren Verhältnisse, welche zwischen den einzelen Gestalten jedes Systemes Statt finden, voraus, und sind folgende:

1) Bestimmung des Krystallsystems, in welches die Combination und somit der Inbegriff ihrer einzelen Gestalten gehört.
2) Bestimmung des allgemeinen und besondern Namens jeder einzelen Gestalt der Combination.
3) Bestimmung der Dimensionen und Stellung der einzelen Gestalten in Bezug auf eine zweckmässig gewählte Grundgestalt.

Diese letztere Bestimmung nennen wir die besondere, den Inbegriff der übrigen Bestimmungen die allgemeine oder vorläufige Entwicklung einer Combination. Von den Gestalten, welche nach §. 23 möglicherweise zur Grundgestalt gewählt werden können, wird übrigens diejenige in jedem Falle das Vorrecht haben, welche die einfachste Entwicklung und Bezeichnung gestattet.

§. 39.

Häufig vorkommendes Combinationsverhältniss.

Wiewohl die Gesetze der Combinationen überhaupt insofern keinen Gegenstand für die Darstellungen der Propädeutik abgeben, inwiefern sie sich nach dem eigenthümlichem Character der verschiedenen Systeme mehr oder weniger modificiren, so lässt sich doch ein sehr häufig vorkommender Fall hiervon ausnehmen, weil ihm, wenigstens für alle trimetrischen Systeme, seine Regel in grösster Allgemeinheit vorgeschrieben werden kann.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn zwischen den Flächen zweier bekannter Gestalten die Flächen einer dritten unbekannten Gestalt so auftreten, dass die neuen Combinationskanten einander parallel laufen. Im rhombischem und in den klinobasischen Systemen findet dieser Fall so häufig Statt, dass man die ihn betreffende Regel nicht mit Unrecht den allgemeinen Schlüssel zur Beurtheilung der Combinationen dieser Systeme nennen könnte. Daher dürfte die Entwicklung dieser Regel hier nicht am unrechtem Orte stehen.

§. 40.

Bestimmung der Lage der Combinationskante.

Es sey die Grundgestalt irgend einer trimetrischen Krystallreihe durch die Dimensionen

$$a : b : c$$

bestimmt, und aus derselben Krystallreihe ein Paar Gestalten, deren Coordinaten die Verhältnisse,

$$ma : nb : rc$$
$$\text{und } m'a : n'b : r'c$$

entsprechen, zu einer binären Combination verbunden. Wir betrachten zwey in denselben Raum-Octanten fallende Flächen, setzen daher alle Coordinaten positiv und suchen die Lage der Combinationskante zu bestimmen.

Seyen die beyden Dreyecke ABC, $A'B'C'$ tab. I. Fig. 1. die gegebenen Flächen, und

$$MA = ma,\ MB = nb,\ MC = rc$$
$$MA' = m'a,\ MB' = n'b,\ MC' = r'c$$

so schneiden sich die Linien AB, $A'B'$ in Q, die Linien AC, $A'C'$ in P, die Linien BC, $B'C'$ in R, und die drey Puncte P, Q, R fallen in eine gerade Linie, welche den Durchschnitt beyder Flächen oder die Combinationskante derselben darstellt. Man ziehe durch Q parallel mit MA die $QL = \alpha a$

. . . . MB die $QE = \beta b$

durch P . . MC die $PF = \gamma c$

. . . . MA die $PK = \alpha' a$

durch R . . MB die $RS = \beta' b$

und nenne $MS = \gamma' c$, so ist:

$$\text{I} \begin{cases} m : n = m - \alpha : \beta \\ n' : m' = \beta : m' - \alpha \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} m : r = m - \alpha' : \gamma \\ r' : m' = \gamma : m' - \alpha' \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} n : r = \beta' : r + \gamma' \\ r' : n' = r' + \gamma' : \beta' \end{cases}$$

Aus I folgt:

$$\alpha = \frac{mm'(n - n')}{m'n - mn'}$$

$$\beta = \frac{nn'(m' - m)}{m'n - mn'}$$

Aus II folgt:

$$\gamma = \frac{mm'(r - r')}{m'r - mr'}$$

$$\alpha' = \frac{rr'(m'-m)}{m'r-mr'}$$

Aus III endlich:

$$\beta' = \frac{nn'(r-r')}{n'r-nr'}$$

$$\gamma' = \frac{rr'(n-n')}{n'r-nr'}$$

§ 41.

Coordinaten-Verhältnisse einer durch die Combinationskante gelegten Fläche.

Gesetzt nun, die Fläche einer dritten Gestalt, deren unbekannte Coordinaten $m''a : n''b : r''c$ sind, solle zwischen ABC und A'B'C' mit parallelen Combinationskanten erscheinen, so wird damit offenbar eine solche Lage für sie gefordert, dass sie der Combinationskante PQR, oder auch irgend einer durch diese Kante gelegten Fläche parallel läuft. Wir wollen den letzteren Gesichtspunct festhalten, und dem gemäss eine beliebige Fläche durch PQR gelegt denken, deren Coordinaten $\mu a : \nu b : \varrho c$ seyn mögen, so ist einleuchtend, dass für diese Coordinaten folgende Proportionen gelten müssen:

$$\mu : \nu = \mu - \alpha : \beta$$
$$\mu : \varrho = \mu - \alpha' : \gamma$$
$$\nu : \varrho = \beta' : \varrho + \gamma'$$

Daraus ergeben sich folgende sechs Gleichungen:

$$\mu = \frac{mm'(n-n')\nu}{\nu(m'n-mn') - nn'(m'-m)}$$

$$\mu = \frac{mm'(r - r)\,\varrho}{\varrho(m'r - mr') - rr'(m' - m)}$$

$$\nu = \frac{nn'(m' - m)\,\mu}{\mu(m'n - mn') - mm'(n - n')}$$

$$\nu = \frac{nn'(r - r')\,\varrho}{\varrho(n'r - nr') + rr'(n' - n)}$$

$$\varrho = \frac{rr'(m' - m)\,\mu}{\mu(m'r - mr') - mm'(r - r')}$$

$$\varrho = \frac{rr'(n' - n)\,\nu}{\nu(n'r - nr') - nn'(r - r')}$$

§. 42.

Einschränkung der gefundenen Verhältnisse.

Allein diese Formeln sind für unsern Zweck ohne besondern Nutzen, da die Grössen μ, ν und ϱ ganz unbestimmte Werthe haben, und sich für jeden beliebig gewählten Werth einer derselben keineswegs alle so bestimmen würden, dass sie mit unserer krystallographischen Ableitung und Bezeichnung in Einklang kämen. Die auf die Veränderlichkeit nur je zweyer Dimensionen gegründete Ableitung (§. 24) sowohl, als die mit zwey Coefficienten durchgeführte Bezeichnung (§. 32.) gestatten keine willkührliche Wahl der Coordinaten, wobey nur auf ihr Verhältniss, und nicht auf ihre absolute Grösse Rücksicht genommen würde, sondern gebieten vielmehr mit Nothwendigkeit die Zurückführung aller Verhältnisse auf eine der beyden Formen:

$$m''a : n''b : b$$
$$m''a : b : r''c$$

so dass entweder r'' oder $n'' = 1$.

Beyde Formen müssen jedoch in unserem Falle, wegen des geforderten Parallelismus der ihnen entsprechenden Fläche mit der Hülfsfläche, die wir durch die Combinationskante PQR gelegt dachten, dem Verhältnisse

$$\mu a : \nu a : \varrho c$$

als dem den Coordinaten jener Hülfsfläche entsprechendem Verhältnisse proportional seyn.

§. 43.

Allgemeine Combinationsgleichungen.

Hat also die gesuchte Fläche das bestimmte Verhältniss $m''a : b : r''c$, so folgt:

$$\nu : \mu = 1 : m''$$
$$\nu : \varrho = 1 : r''$$

Bringt man in diese Gleichungen statt μ und ϱ ihre oben bestimmten Werthe als Functionen von ν, so wird

$$m'' = \frac{mm'(n-n')}{\nu(m'n-mn')-nn'(m'-m)}$$

$$r'' = \frac{rr'(n-n')}{-\nu(n'r-nr')+nn'(r-r')}$$

Daraus ergiebt sich als Function von r''

$$\nu = \frac{r'' n n' (r - r') - r r' (n - n')}{r'' (n' r - n r')}$$

und endlich durch Einführung dieses Werthes in obige Gleichung für m''

$$\text{A)} \quad m'' = \frac{r'' (n' r - n r') m m'}{r'' (m' r - m r') n n' - (m' n - m n') r r'}$$

$$\text{B)} \quad r'' = \frac{m'' (m' n - m n') r r'}{m'' (m' r - m r') n n' - (n' r - n r') m m'}$$

Hat dagegen die gesuchte Fläche das bestimmte Verhältniss $m'' a : n'' b : c$, so ist:

$$\varrho : \mu = 1 : m''$$
$$\varrho : \nu = 1 : n''$$

woraus durch Einführung der als Functionen von ϱ bestimmten Werthe von μ und ν zwey Gleichungen für m'' und n'' folgen, aus welcher letzteren sich ϱ als Function von n'', und, durch Substitution des so erhaltenen Werthes von ϱ in die Gleichung für m'', folgender Werth dieser letzteren Grösse ergiebt:

$$\text{C)} \quad m'' = \frac{n'' (n' r - n r) m m'}{n'' (m n' - m' n) r r' + (m' r - m r') n n'}$$

und endlich

$$\text{D)} \quad n'' = \frac{m'' (m' r - m r') n n'}{m'' (m' n - m n') r r' + (n' r - n r') m m'}$$

§. 44.

Brauchbarkeit dieser Gleichungen.

In diesen vier Formeln sind die unserer krystallographischen Methode angemessenen, und auf alle trimetrischen Systeme durchgängig anwendbaren Combinationsgleichungen gefunden, vermittels welcher für irgend eine unbekannte Gestalt $m''Pn''$, deren Flächen zwischen jenen der Gestalten mPn und $m'Pn'$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen, m als Function von n'' und lauter bekannten Grössen, und n'' gleicherweise als Function von m'' bestimmt ist. Bringen nun die Flächen der unbekannten Gestalt noch ausserdem zwischen den Flächen zweyer anderer bekannten Gestalten $\mu P\nu$ und $\mu' P\nu'$ parallele Combinationskanten hervor, so erhält man eine zweyte Gleichung für m'', wiederum mit lauter bekannten Grössen ausser n'', durch welche dann n'' und m'' vollkommen bestimmt werden. Folglich wird in allen Fällen, da die einzelen Flächen einer unbekannten Gestalt von zwey Paaren paralleler Kanten begränzt werden, und die in diesen Kanten mit ihnen zum Durchschnitte kommenden Flächen bekannt sind, das Problem der krystallographischen Bestimmung ohne alle Messung vollständig gelöst werden können; was darin seinen Grund hat, dass durch je zwey sich schneidende Linien nur eine einzige Ebene gelegt werden kann.

Anmerkung. Diese Combinationsgleichungen, welche sich in der Anwendung noch etwas vereinfachen, sind für die trimetrischen Systeme durchgängig, und für das tetrametrische System in vielen Fällen ausreichend; nur ist begreiflich, dass nach Massgabe der verschiedenen Lage der zum Durchschnitt kommenden Flächen die Coefficienten ihrer respectiven Coordinaten positiv oder negativ genommen werden müssen, während sie in der hier gegebenen Entwicklung durchgängig positiv angenommen wurden. So lange also beyde Flächen mPn und $m'Pn'$ in einem und demselben Raum-Octanten liegen, wird in den Zeichen der Combinationsgleichungen nichts verändert, ausser wenn die Subtraction eine Umstellung der Glieder nothwendig machen sollte, in welchem Falle diese Veränderung von der relativen Grösse, keineswegs aber von der Lage der Coordinaten abhängt.

A n h a n g.

§. 45.

Anzahl der Flächen, Kanten und Ecke einer Gestalt.

Als ein für die Krystallographie sehr brauchbares aber weniger bekanntes Lemma gebe ich zum Schlusse dieser Propädeutik den zuerst von Euler *), später auch von Legendre **) bewiesenen Satz über das gegenseitige Zahl-Verhältniss der Flächen, Kanten und Ecke einer Gestalt. Es sey nämlich in irgend einem Polyeder

---

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. IV. p. 119.

**) Elements de Geometrie, cinquième edit. p. 226 et 307.

die Zahl der Flächen = H
- - - Kanten = A
- - - Ecke = S

so findet in der Voraussetzung, dass unter den Kanten keine einspringenden Winkel befindlich sind, jederzeit die Gleichung Statt:

$$H + S = A + 2$$

Ist daher die Zahl und Figur der Flächen einer einfachen Gestalt gegeben, so lässt sich die Zahl der Kanten und Ecke nach dieser Gleichung mit Leichtigkeit bestimmen, weil allgemein in einer von m n-seitigen Figuren umschlossenen Gestalt

$$A = \frac{mn}{2}$$

und daher $$S = \frac{m(n-2) + 4}{2}$$

ZWEITER THEIL.

SYSTEMATIK.

ERSTER ABSCHNITT.

VOM TESSERAL - SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

§. 46.

Umfang und Name des Systemes.

Das Tesseral-System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Rechtwinkligkeit und Gleichheit der Dimensionen ausgesprochen ist, begreift alle trimetrischen, orthobasischen, vielaxigen Gestalten, und keine anderen.

Tesseral-System nennen wir es deshalb, weil das Hexaeder oder der Würfel (*tessera*) eine seiner charakteristischen Gestalten ist, weshalb es bereits von Werner das Tessular- oder Tesselar-System (von *tessella*) genannt wurde. Weiss nennt es das reguläre, gleichgliedrige oder gleichaxige, auch das sphäroedrische, Hausmann das isometrische System, welche Benennungen insgesammt von solchen Eigenschaften der Gestalten dieses Systemes entlehnt sind, die aus dem geometrischem Grundcharakter desselben (§. 23.) mit Nothwendigkeit folgen.

§. 47.

Arten der tesseralen Gestalten.

Die einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes benennt man zunächst nach der Zahl ihrer Flächen (§. 26.), und unterscheidet dem gemäss:

das Tetraeder oder den 4 Flächner,
das Hexaeder oder den 6 Flächner,
das Oktaeder oder den 8 Flächner,
die Dodekaeder oder 12 Flächner,
die Ikositetraeder oder 24 Flächner,
die Tetrakontaoktaeder oder 48 Flächner.

Die drey ersteren Gestalten sind die einzigen in ihrer Art, während es von den übrigen mehre Arten und Unterarten giebt. Da $24 = 3.8 = 4.6 = 2.12$, und $48 = 6.8$, so könnten uns gewisse Verhältnisse veranlassen, manche von 24 Flächen umschlossene Gestalten Dreymalacht-Flächner, Viermalsechs-Flächner, Zweymalzwölf-Flächner, und die von 48 Flächen umschlossenen Gestalten Sechsmalacht-Flächner zu nennen; (§. 26).

§. 48.

Das Tetraeder.

Syn. Einfache dreyseitige Pyramide.
Reguläres Tetraeder.

Das Tetraeder oder der Vierflächner (*tab. II. Fig. 1.*) ist eine von 4 gleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalt, hat also 6 Kanten und 4 Ecke (§. 45). Die Kanten sind symmetrisch (§. 3.) und gleich; die Ecke regelmässig, trigonal (§. 4.)

Die Hauptaxen sind scheinbar Axen der dritten, aber in der That Axen der ersten Art, und ihre Pole fallen in die Mittelpuncte der Kanten. Die Querschnitte sind rhombisch, allein die Mittelquerschnitte Quadrate. Hauptschnitte und Nebenaxen fehlen; (§. 13).

Es giebt nur ein Tetraeder, dessen Kantenwinkel $\zeta = 70^\circ\, 31'\, 44''$.

§. 49.

Das Hexaeder.

Syn. Würfel.

Das Hexaeder oder der Sechsflächner (*tab. II. Fig. 2.*) ist eine von 6 Quadraten umschlossene Gestalt, hat also 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind symmetrisch und gleich; die Ecke regelmässig, trigonal.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art, und ihre Pole fallen in die Mittelpuncte der Flächen. Nebenaxen sind zweyerley; vier der zweyten und sechs der dritten Art. Die Querschnitte sind insgesammt gleiche Quadrate und die Mittelquerschnitte keine Hauptschnitte. Die Hauptschnitte sind oblonge Rectangel.

Es giebt nur ein Hexaeder, dessen Kantenwinkel $y = 90°$.

§. 50.

Das Oktaeder.

Syn. Reguläre vierseitige Doppelpyramide.
Reguläres Oktaeder.

Das Oktaeder oder der Achtflächner (*tab. II. Fig. 3.*) ist eine von 8 gleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalt, hat also 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind symmetrisch und gleich; die Ecke regelmässig, tetragonal.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art und ihre Pole fallen in die Ecke; Nebenaxen wie im Hexaeder. Die Querschnitte sind Quadrate und die Mittelquerschnitte Hauptschnitte.

Es giebt nur ein Oktaeder, dessen Kantenwinkel $z = 109° \, 28' \, 16''$.

§. 51.

Die Trigon-Dodekaeder.

Syn. Pyramiden-Tetraeder, Weiss.
Trigonal-Dodekaeder, Mohs.
Pyramidales Dodekaeder, Breithaupt.

Die Dodekaeder oder Zwölfflächner sind viererley Art nach Massgabe der Figur ihrer Flächen, indem einige von Dreyecken, andere von Rhomben und noch andre von Trapezoiden oder Fünfecken umschlossen werden. Bezeichnen wir sie mit den ihnen entsprechenden Namen, so haben wir Trigon-Rhomben-Trapez- und Pentagon-Dodekaeder, welche wir nun der Reihe nach durchgehen werden.

Die Trigon-Dodekaeder (*tab. II. Fig. 4.*) sind von 12 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Tetraeders, haben also 18 Kanten, 8 Ecke, und vier dreyzählige Flächensysteme, indem sie Tetraeder vorstellen, welche auf jeder ihrer Flächen eine sehr niedrige dreyseitige Pyramide tragen.

Die Kanten zerfallen in 6 symmetrische (ζ), in den Kantenlinien des Tetraeders, und in 12 unregelmässige (y), zu drey über den Tetraederflächen gelegene; in jenen stossen die Grundlinien, in diesen die Schenkel der Dreyecke zusammen.

Die Ecke zerfallen in 4 ditrigonale (oder hexagonale) in den Eckpuncten des Tetraeders, und vier trigonale über den Flächen des Tetraeders gelegene.

Die Hauptaxen sind scheinbar rhombisch, aber in der That tetragonal oder erster Art, und ihre Pole fallen in die Mittelpuncte der symmetrischen Kanten. Die Querschnitte sind rhombisch, die Mittelquerschnitte ditrigonal. Hauptschnitte und Nebenaxen fehlen.

Es giebt möglicherweise viele Varietäten dieser Gestalten, doch sind bis jetzt nur zwey beobachtet worden, deren Kantenwinkel y und ζ folgende Werthe haben:

	y	ζ
Erste Varietät	$146^\circ\ 26'\ 34''$	$109^\circ\ 28'\ 16''$
Zweyte Varietät	$129^\circ\ 51'\ 16''$	$129^\circ\ 31'\ 16''$

§. 52.

Das Rhomben-Dodekaeder. (*Breithaupt.*)

Syn. Granatoeder, Weiss.
Einkantiges Tetragonal-Dodekaeder, Mohs.
Rautenzwölfflach, v. Raumer.
Granat-Dodekaeder, Werner.
Reguläres Rhomben-Dodekaeder, Hausmann.

Das Rhomben-Dodekaeder (*tab. II. Fig. 5.*) ist eine von 12 Rhomben umschlossene Gestalt, hat also 24 Kanten und 14 Ecke.

Die Kanten sind insgesammt einander gleich.

Die Ecke zerfallen in 6 tetragonale, an den Eckpuncten des Oktaeders, und 8 trigonale an den Eckpuncten des Hexaeders gelegene.

Die Hauptaxen sind erster Art, und ihre Pole fallen in die tetragonalen Ecke; Nebenaxen wie im Hexaeder. Die Querschnitte sind tetragonal, die Mittelquerschnitte Quadrate. Die Hauptschnitte rhombisch.

Es giebt möglicherweise nur eine einzige Varietät dieser Gestalt, deren Kantenwinkel $x = 120°$.

§. 53.

Die Trapez-Dodekaeder *).

Syn. Trapezoid Dodekaeder, Weiss.
Zweykantiges Tetragonal-Dodekaeder, Mohs.
Trapezoidales Dodekaeder, Breithaupt.

Die Trapez-Dodekaeder (*tab. II. Fig. 6.*) sind von 12 symmetrischen Trapezoiden (§. 2.) umschlosse-

---

*) Trapezoid-Dodekaeder ist auf jeden Fall richtiger; allein um die ohnediess langen und schleppenden Namen doch

ne Gestalten, haben also 24 Kanten und 14 Ecke. Ihre Hauptform nähert sich jener des Tetraeders, wenigstens sind die vier Eckpuncte des Tetraeders noch vorhanden, und die Flächen erscheinen in 4 Flächensysteme versammelt.

Die Kanten zerfallen in 12 schärfere, zu zwey über den Tetraederkanten (ζ), und in 12 stumpfere, zu drey über den Tetraederflächen gelegene, (x).

Die Ecke sind dreyerley: a) 4 trigonale, spitzere, an den Eckpuncten des Tetraeders; b) 4 trigonale, stumpfere, über den Mitten der Tetraederflächen; c) 6 rhombische, über den Mitten der Tetraederkanten.

Die Hauptaxen sind scheinbar dritter Art, aber in der That Axen der ersten Art, und ihre Pole fallen in die 6 rhombischen Ecke; Nebenaxen fehlen. Die Querschnitte sind rhombisch, jedoch die Mittelquerschnitte Quadrate. Hauptschnitte sind unregelmässig sechsseitig.

Zur Zeit sind zwey Varietäten bekannt, deren Kantenwinkel x und ζ folgende Werthe haben:

	x	ζ
Erste Varietät	162° 39' 30"	82° 9' 45"
Zweyte Varietät	152° 44' 2"	90° 0' 0"

---

etwas abzukürzen, glaubte ich mit demselben Rechte Trapez-Dodekaeder und Trapez-Ikositetraeder sagen zu können, mit welchem man diese letztere Gestalt Trapezoeder genannt hat. Die adjectiven Formen, trapezoidal (trigonal, pentagonal u. s. w.) drücken eigentlich das nicht aus, was sie in diesen Zusammensetzungen ausdrükken sollen.

§. 54.

Die Pentagon-Dodekaeder. (Weiss.)

Syn. Hexaedrisches Pentagonal-Dodekaeder, Mohs.
Dachförmiges Dodekaeder, Breithaupt.
Kies-Zwölfflach, v. Raumer.
Pyritoeder, Weiss.
Pentagonaldodekaeder, Hausmann.

Die Pentagon-Dodekaeder (*tab. II. Fig 7.*) sind von 12 symmetrischen Fünfecken umschlossene Gestalten, und haben also 30 Kanten und 20 Ecke. Ihre Hauptform nähert sich jener des Hexaeders, wenigstens erscheinen noch die Eckpuncte desselben, auch sind 6 zweyzählige Flächensysteme unterscheidbar.

Von den Kanten sind 6 symmetrisch, über den Hexaederflächen gelegen (r), und 24 unregelmässig, zu drey in den Hexaederecken zusammenlaufend (B); jene heissen die charakteristischen Kanten.

Von den Ecken sind 8 trigonal, an den Eckpuncten, und 12 unregelmässig-dreykantig, paarweis über den Flächen des Hexaeders gelegen.

Die Hauptaxen sind Axen der dritten Art und ihre Pole fallen in die Mitten der charakteristischen Kanten; Nebenaxen sind vier der zweyten Art. Die Querschnitte sind rhombisch bis auf zwey an jeder Axe, welche jederzeit Quadrate sind. Hauptschnitte fehlen.

Zur Zeit sind drey Varietäten dieser Gestalt bekannt, deren Kantenwinkel r und B folgende Werthe haben:

	r	B
Erste Varietät	112° 37′ 12″	117° 29′ 11″
Zweyte Varietät	126° 52′ 12″	113° 34′ 41″
Dritte Varietät	143° 7′ 48″	107° 27′ 27″

§. 55.

Die Ikositetraeder.

Die 24 Flächner oder Ikositetraeder überhaupt zerfallen nach der Figur ihrer Flächen in Trigon-Trapez- und Pentagon-Ikositetraeder, und von diesen wiederum die ersteren in die drey Unterarten von der Hauptform des Tetraeders, Hexaeders und Oktaeders, die anderen in die zwey Unterarten mit symmetrischen und unregelmässigen Trapezen, welche letztere die Hauptform des Pentagon-Dodekaeders besitzen. Das eine Trapez- und die Pentagon-Ikositetraeder ausgenommen gruppiren sich also die Flächen aller übrigen in Systeme, und gestatten somit die §. 26 angegebene Methode der Zerfällung der Flächenzahl zur Erleichterung und Vereinfachung der Nomenclatur. So erhalten wir für die dreyerley Trigon-Ikositetraeder die Namen der Hexakistetraeder (6mal 4 Flächner), Tetrakishexaeder (4mal 6 Flächner), und Triakisoktaeder (3mal 8 Flächner) und für die eine Art der Trapez-Ikositetraeder den Namen der Dyakisdodekaeder, oder 2mal 12 Flächner.

§. 56.

Die Hexakistetraeder oder 6mal 4 Flächner.

Syn. Gebrochene Pyramiden-Tetraeder, Weiss.
Tetraedrisches Trigonal-Ikositetraeder, Mohs.
Skalenisches Ikositessaraeder, Breithaupt.

Die Hexakistetraeder (*tab. II. Fig. 8.*) sind von 24 ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Tetraeders, und haben daher 36 Kanten, 14 Ecke und 4 sechszählige Flächensysteme. Die Eckpuncte des Tetraeders sind noch vorhanden.

Die Kanten sind dreyerley; a) 12 schärfere, zu drey in den Tetraederecken zusammenlaufende (ζ); b) 12 stumpfere, längere (y) und c) 12 stumpfere, kürzere, über den Tetraederflächen gelegene, (x).

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: a) 4 ditrigonale, spitzere, an den Eckpuncten des Tetraeders; b) 4 hexagonale oder ditrigonale, stumpfere, über den Mitten der Tetraederflächen; c) 6 rhombische über den Mitten der Tetraederkanten.

Die Hauptaxen sind scheinbar Axen der dritten, aber in der That Axen der ersten Art, und ihre Pole fallen in die rhombischen Ecke; Nebenaxen fehlen. Die Querschnitte sind rhombisch, die Mittelquerschnitte ditetragonal; die Hauptschnitte unregelmässig sechseckig.

Es sind bis jetzt drey Varietäten bekannt, deren Kantenwinkel x, y und ζ folgende Werthe haben:

	x	y	ζ
Erste Var.	158° 12′ 48″	158° 12′ 48″	110° 55′ 29″
Zweyte Var.	152° 20′ 22″	152° 20′ 22″	122° 52′ 42″
Dritte Var.	162° 14′ 50″	144° 2′ 58″	124° 51′ 0″

§. 57.

Die Tetrakishexaeder oder 4mal 6 Flächner.

Syn. Pyramiden-Würfel, Weiss, v. Raumer.
Hexaedrisches Trigonal-Ikositetraeder, Mohs.
Hexaedrisch pyramidales Ikositessaraeder, Breithaupt.

Die Tetrakishexaeder (*tab. II. Fig. 9.*) sind von 24 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Hexaeders, und haben daher 36 Kanten, 14 Ecke und 6 vierzählige Flächensysteme. Die Eckpuncte und Kantenlinien des Hexaeders sind noch vorhanden.

Die Kanten sind zweyerley: a) 12 schärfere, längere, in die Kantenlinien des Hexaeders fallende (y); b) 24 stumpfere, kürzere zu vier über den Hexaederflächen gelegene, (x).

Die Ecke sind ebenfalls zweyerley: a) 8 spitzere, ditrigonale oder hexagonale, in die Eckpuncte des Hexaeders fallende; b) 6 stumpfere, tetragonale über den Flächen des Hexaeders gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art, und ihre Pole fallen in die tetragonalen Ecke; Nebenaxen wie im Hexaeder und Oktaeder. Die Querschnitte sind tetragonal, zum Theil Quadrate; der Mittelquerschnitt ein Ditetragon. Hauptschnitte rhombisch.

Es sind von dieser Gestalt bis jetzt drey Varietäten bekannt, welche sich am leichtesten unter dem Bilde eines Hexaeders vorstellen lassen, das auf jeder Fläche eine niedrige vierseitige Pyramide trägt. Die Kantenwinkel x und y haben folgende Werthe:

	x	y
Erste Varietät	133° 48′ 47″	157° 22′ 48″
Zweyte Varietät	143° 7′ 48″	143° 7′ 48″
Dritte Varietät	154° 9′ 29″	126° 52′ 12″

§. 58.

Die Triakisoktaeder oder 3mal 8 Flächner.

Syn. Pyramiden-Oktaeder, Weiss.
Oktaedrisches Trigonal-Ikositetraeder, Mohs.
Oktaedrisch pyramidales Ikositessaraeder, Breithaupt.
Pyramiden 8flach, v. Raumer.

Die Triakisoktaeder (*tab. II. Fig. 10.*) sind von 24 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten von der Hauptform des Oktaeders, und haben daher 36 Kanten, 14 Ecke und 8 dreyzählige Flächensysteme. Die Eckpuncte und Kantenlinien des Oktaeders sind noch vorhanden.

Die Kanten sind zweyerley: a) 12 schärfere, längere, symmetrische, in die Kantenlinien des Oktaeders fallende (z); b) 24 stumpfere, kürzere, nicht symmetrische, zu drey über den Flächen des Oktaeders gelegene, (x).

Die Ecke sind ebenfalls zweyerley: a) 6 ditetragonale, spitzere, in die Eckpuncte des Oktaeders fallende; b) 8 trigonale, stumpfere, über den Mitten der Oktaederflächen gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art und ihre Pole fallen in die ditetragonalen Ecke; Nebenaxen wie im Hexaeder und Oktaeder. Die Querschnitte sind tetragonale, meist Ditetragone, die Mittelquerschnitte Quadrate.

Von dieser Gestalt sind bis jetzt zwey *) Varietäten bekannt, welche sich übrigens am leichtesten als Oktaeder vorstellen lassen, die auf jeder ihrer Flächen eine niedrige dreyseitige Pyramide tragen; die Werthe ihrer Kantenwinkel x und z sind:

	x	z
Erste Varietät	162° 39′ 30″	129° 31′ 19″
Zweyte Varietät	152° 44′ 2″	141° 3′ 27″

§. 59.

Die Trapez-Ikositetraeder, oder Ikositetraeder, 24 Flächner schlechthin.

Syn. Leucitoeder und Leucitoide, Weiss.
Zweykantige Tetragonal-Ikositetraeder, Mohs.
Trapezoidale Ikositessaraeder, Breithaupt.
Trapezoeder, Hausmann.
Leuzit, v. Raumer.

Die Trapez-Ikositetraeder (*tab. II. Fig. 11.*) oder Ikositetraeder schlechthin sind von 24 symmetrischen

*) Mohs führt nur eine Varietät auf, allein bey Neumann in seinen Beyträgen zur Krystallonomie I. S. 17 findet sich noch eine zweyte Varietät angegeben.

Trapezoiden umschlossene Gestalten, und haben daher 48 Kanten und 26 Ecke. Ihre Hauptform schwankt zwischen denen des Oktaeders und Hexaeders, indem die Eckpuncte beyder Gestalten noch vorhanden sind.

Die Kanten sind zweyerley: a) 24 längere, paarweis über den Oktaederkanten (z), und b) 24 kürzere, paarweis über den Hexaederkanten gelegene, (y).

Die Ecke sind dreyerley: a) 6 tetragonale, in die Eckpuncte des Oktaeders, und b) 8 trigonale, in die Eckpuncte des Hexaeders fallende; c) 12 rhombische, über den Mitten der Kanten des eingeschriebenen Oktaeders oder Hexaeders gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art und ihre Pole fallen in die tetragonalen Ecke; Nebenaxen wie im Hexaeder und Oktaeder. Die Querschnitte sind tetragonale, unter ihnen Quadrate, die Mittelquerschnitte Ditetragone.

Es sind bis jetzt nur zwey Varietäten bekannt, deren Kantenwinkel y und z folgende Werthe haben:

	y	z
Erste Varietät	146° 26′ 34″	131° 48′ 37″
Zweyte Varietät	129° 31′ 16″	144° 54′ 12″

§. 60.

Die Dyakisdodekaeder oder 2mal 12 Flächner.

Syn. Gebrochene Pentagon-Dodekaeder, Weiss.
Dreykantige Tetragonal-Ikositetraeder, Mohs.
Heterogonale Ikositessaraeder, Breithaupt.
Kies 24flach, v. Raumer.

Die Dyakisdodekaeder (*tab. II. Fig. 12.*) sind von 24, mit einem Paare gleicher Nebenseiten versechenen, Trapezoiden umschlossene Gestalten von der Hauptform des Pentagon-Dodekaeders und haben demnach 48 Kanten, 26 Ecke und 12 paarige Flächensysteme. Die Eckpuncte des Hexaeders und Oktaeders treten noch hervor.

Die Kanten sind dreyerley: a) 24 unregelmässige, zu drey an den Hexaederecken (B), b) 12 längere, stumpfere über den Dodekaederflächen (z) und c) 12 kürzere, schärfere, paarweis über den charakteristischen Kanten des Dodekaeders gelegene, (r).

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: a) 8 trigonale, von den unsymmetrischen Kanten gebildete, in die Eckpuncte des Hexaeders fallende; b) 6 rhombische, von den kürzeren und längeren Kanten gebildete, in die Eckpuncte des Oktaeders fallende; c) 12 unregelmässige, von zwey unsymmetrischen, einer kürzeren und einer längeren Kante gebildete, zwischen je zwey rhombischen Ecken gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der dritten Art, und ihre Pole fallen in die rhombischen Ecke; Nebenaxen wie im Pentagon-Dodekaeder. Die Querschnitte der Hauptaxen sind rhombisch.

Es sind von dieser Gestalt bis jetzt drey Varietäten bekannt, und man kann sich die Vorstellung ihrer Umrisse einigermassen erleichtern, wenn man sich die Flächen eines Pentagon-Dodekaeders nach der aus dem einzelem Winkel auf die einzele Seite gefällten Normale gebrochen denkt. Der Winkel, welchen je zwey der grösseren Kantenlinien bilden, heisst der charakteristische Winkel. Die Werthe ihrer Kantenwinkel z, r, und B sind folgende:

	z	r	B
Erste Var.	148° 59′ 50″	115° 22′ 37″	141° 47′ 12″
Zw. Var.	160° 32′ 13″	119° 3′ 33″	131° 4′ 56″
Dritte Var.	154° 47′ 28″	128° 14′ 28″	131° 48′ 37″

§. 61.

Die Pentagon-Ikositetraeder.

Syn. Gedrehte Leucitoide, Weiss.
Pentagonal - Ikositetraeder, Mohs.
Granat-Dyoeder, Neumann.

Die Pentagon - Ikositetraeder (*tab. II. Fig.* 13.) sind von 24 ungleichwinkligen, mit 2 Paar gleichen Nebenseiten versehenen Fünfecken umschlossene Gestalten, haben also 60 Kanten und 38 Ecke. Die Eckpuncte des Hexaeders und Oktaeders treten noch hervor.

Die Kanten sind insgesammt unsymmetrisch und dreyerley: a) 24 von den längeren Seitenpaaren gebildete, zu vier an den Eckpuncten des Oktaeders (A), b) 24 von den kürzeren Seitenpaaren gebildete, zu drey an den Eckpuncten des Hexaeders (B), und c) 12 längste, von den einzelen Seiten gebildete, und schräg über den Oktaederkanten gelegene, (C).

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: a) 6 tetragonale in die Eckpuncte des Oktaeders, b) 8 trigonale in die Eckpuncte des Hexaeders fallende und c) 24 dreykantige, paarweis über den Oktaederkanten gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art und ihre Pole fallen in die tetragonalen Ecke; die Querschnitte sind tetragonale, darunter Quadrate, die Mittelquerschnitte aber Ditetragone.

Das Pentagon - Ikositetraeder ist bis jetzt noch nicht in der Natur beobachtet worden, also eine fingirte Gestalt. Nach seinen Verhältnissen zu der folgenden Gestalt lassen sich drey Varietäten annehmen, obgleich deren mehre möglich sind.

Die respectiven Kantenwinkel A, B und C haben folgende Werthe:

	A	B	C
Erste Var.	130° 0′ 19″	141° 47′ 12″	141° 47′ 12″
Zw. Var.	135° 35′ 5″	131° 4′ 56″	145° 57′ 8″
Dritte Var.	139° 37′ 57″	131° 48′ 37″	135° 35′ 5″

Von jeder dieser Varietäten aber giebt es zwey, nach ihren einzelen Begränzungselementen gleiche und ähnliche, aber nach deren Stellung und Verknüpfung wie ein Rechtes und Linkes (z. B. wie ein rechter und linker Handschuh) unterschiedene Gestalten. Weil diese Gestalt in der Natur nicht vorzukommen scheint, so ist dadurch der Vorschlag gerechtfertigt, *in praxi* das Trapez-Ikositetraeder ein Ikositetraeder schlechthin zu nennen, indem die von der Figur der Flächen entlehnte Determination überflüssig wird.

§. 62.

Die Hexakisoktaeder oder 6mal 8 Flächner (Weiss).

Syn. Pyramiden-Granatoeder, Weiss.
Tetrakontaoktaeder, Mohs.
Achtundvierzigflächner Weiss, u. Breithaupt.
Trigonalpolyeder, Hausmann.
Pyramidenrauten 12flach, v. Raumer.

Die Hexakisoktaeder (*tab. II. Fig. 14.*) sind von 48 ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, haben also 72 Kanten und 26 Ecke. Ihre Hauptform schwankt zwischen der des Oktaeders und Hexaeders, indem sich eben sowohl 8 sechsflächige als 6 achtflächige Flächensysteme unterscheiden lassen, und die Eckpuncte beyder Gestalten hervortreten.

Die Kanten sind symmetrisch und dreyerley: a) 24 paarweis über den Oktaederkanten (z), b) 24 kürzere paarweis über den Hexaederkanten gelegene (y), und c) 24 längere die Eckpuncte des Hexaeders und Oktaeders verbindende, (x).

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: a) 6 ditetragonale, in die Eckpuncte des Oktaeders; b) 8 hexagonale oder ditrigonale, in die Eckpuncte des Hexaeders fallende, und c) 12 rhombische, über den Mittelpuncten der Kanten des Hexaeders oder Oktaeders gelegene.

Die Hauptaxen sind Axen der ersten Art und ihre Pole fallen in die ditetragonalen Ecke; Nebenaxen wie im Oktaeder. Die Querschnitte sind tetragonale, die Mittelquerschnitte Ditetragone.

Es sind bis jetzt drey Varietäten dieser Gestalt bekannt, deren Kantenwinkel x, y und z folgende Werthe haben:

	x	y	z
Erste Var.	158° 12' 48"	158° 12' 48"	148° 59' 50"
Zw. Var.	152° 20' 22"	152° 20' 22"	160° 32' 13"
Dritte Var.	162° 14' 50"	144° 2' 58"	154° 47' 28"

§. 63.

Symmetrie der tesseralen Gestalten.

Schon in der Propädeutik wurde des Verhältnisses der Homoedrie und Hemiedrie Erwähnung gethan (§. 7.) und zugleich an einem anderem Orte bemerkt, dass die Symmetrie einer Gestalt jederzeit durch das Ausfallen ihrer halben Flächenzahl vermindert werde, so dass die hemiedrische Gestalt einen geringeren Grad von Symmetrie besitzt als ihre Muttergestalt (vergl. §. 15). Da es nun im Tesseral-Systeme sowohl 4 Flächner, 12-Flächner und 24 Flächner, als 8 Flächner, 24 Flächner nnd 48 Flächner giebt, so könnte es wohl der Fall seyn, dass der 4 Flächner nur die hemiedrische Gestalt des 8-Flächners, dass mehre 24 Flächner nur hemiedrische 48-Flächner wären. Diess kann nun zunächst erst im zweytem Capitel des gegenwärtigen Abschnittes, in welchem von der Ableitung die Rede seyn wird, specieller nachgewiesen werden; indess wird uns schon die Betrachtung der Symmetrie auf einige allgemeine Resultate führen, welche für die vorläufige Uebersicht hinreichen mögen.

§. 64.

Geneigtflächig-hemiedrische Gestalten.

Da sich jede der Dimensionen einer homoedrischen Gestalt vom Mittelpuncte aus nach zwey Richtungen gleichweit erstreckt, wie diess aus den geometrischen Grundbestimmungen folgt, so muss jede homoedrische Gestalt parallelflächig, oder für jede ihrer Flächen am entgegengesetztem Ende eine parallele Gegenfläche vorhanden seyn, weshalb Gestalten, an denen diess nicht der Fall ist, schlechthin für hemiedrische anzusprechen sind. Vergleichen wir nach diesem Merkmale die bisher aufgeführten Gestalten des Tesseral-Systemes, so ergiebt sich, dass jener Flächen-Parallelismus als wesentliche Bedingung der Homoedrie folgenden Gestalten gänzlich abgeht:

Dem Tetraeder,
Den Trigon-Dodekaedern,
Den Trapez-Dodekaedern,
Den Hexakistetraedern,
Den Pentagon-Ikositetraedern.

Diese Gestalten sind daher keine homoedrischen, sondern als hemiedrische, und zwar als geneigtflächig-hemiedrische Gestalten zu beurtheilen.

§. 65.

Parallelflächig-hemiedrische Gestalten.

Ein andres Merkmal der Hemiedrie lässt sich ebenfalls aus den Symmetrie-Verhältnissen der Gestalten ableiten. In jeder homoedrischen Gestalt des Tesseral-Tetragonal- und Hexagonal-Systemes muss um die Endpuncte ihrer Queraxen oder Diagonalen eine vollkommene Gleichmässigkeit der Begränzungselemente rücksichtlich ihrer Zahl, Lage und Grösse Statt finden, so dass sie in normaler und in verwendeter Stellung völlig dasselbe Bild gewährt. Fehlt also diese Gleichmässigkeit in einem jener Verhältnisse, so wird die Gestalt für eine hemiedrische gelten müssen. Wenden wir dies Kriterium auf die noch rückständigen Gestalten des Tesseral-Systemes an, so finden wir, dass die Pentagon-Dodekaeder und Dyakisdodekaeder ebenfalls, und zwar zu den parallelflächig-hemiedrischen Gestalten zu rechnen sind. Denn denken wir beyde in der Normalstellung, und bringen sie darauf nach § 15 in die verwendete Stellung, indem wir sie durch 90° um ihre verticale Axe drehen, so werden dann dieselben Kanten horizontal vor uns liegen, welche vorher aufgerichtet waren, und umgekehrt, so dass beyde Gestalten in beyderley Stellungen ganz verschiedene Bilder gewähren. Dasselbe Kriterium gilt übrigens auch für die geneigtflächig-hemiedrischen Gestalten mit Ausnahme des Pentagon-Ikositetraëders.

§. 66.

Uebersicht des Tesseral-Systemes.

Nach den Verhältnissen der Homoedrie und Hemiedrie, mit welchen die Verhältnisse der Axen im genauestem Zusammenhange stehen, erhalten wir daher folgende systematische Uebersicht sämmtlicher in der Natur beobachteten einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes:

A) HOMOEDRISCHE GESTALTEN: Drey Hauptaxen erster, vier Nebenaxen zweyter, und sechs Nebenaxen dritter Art.

1) das Hexaeder,
2) das Oktaeder,
3) das Rhombendodekaeder,
4) die Tetrakishexaeder,
5) die Triakisoktaeder,
6) die Ikositetraeder,
7) die Hexakisoktaeder.

B) HEMIEDRISCHE GESTALTEN:

a) Geneigtflächige: Drey Hauptaxen der ersten Art, gar keine Nebenaxen.

1) das Tetraeder,
2) die Trigon-Dodekaeder,
3) die Trapez-Dodekaeder,
4) die Hexakistetraeder.

b) Parallelflächige: Drey Hauptaxen der dritten und vier Nebenaxen der zweyten, aber keine Axen der ersten Art.

1) die Pentagon-Dodekaeder,
2) die Dyakis-Dodekaeder.

ZWEITES CAPITEL.

Vom geometrischem Zusammenhange u. von der Ableitung der Gestalten des Tesseral-Systemes.

A) HOMOEDRISCHE GESTALTEN.

§. 67.

Grundgestalt.

Zur Grundgestalt des Tesseral-Systemes muss das Oktaeder gewählt werden *), da nur in seinen Gestaltverhältnissen der geometrische Grundcharakter des Systemes unmittelbar, und in höchster Einfachheit hervortritt, indem es möglicherweise die einzige Gestalt ist, in welcher die Coordinaten der einzelen Flächen das Verhältniss der Dimensionen des Systemes repräsentiren (§. 23.), so dass a : b : c = 1 : 1 : 1. Wir bezeichnen das Oktaeder mit O, und leiten aus ihm alle

*) Aus dem Begriffe, welchen die Propädeutik von der Grundgestalt aufstellte, folgt mit Nothwendigkeit, dass keine andere Gestalt des Tesseralsystems zur Grundgestalt gewählt werden könne und dürfe, als das Oktaeder. Dass die Ableitungen am natürlichsten aus ihm folgen, lehrte schon Werner, indem er es zum Mittelpuncte seines tessularischen Uebergang-Systemes machte.

übrigen Gestalten des Tesseral-Systemes ab, durch zweckmässige Verlängerungen oder Vervielfachungen seiner Coordinaten, also durch zweckmässige Substitution eines anderen Verhältnisses statt jenes der durchgängigen Gleichheit.

§. 68.

Besondere Regel der Ableitung.

Hierbey ist es nothwendig, zu bemerken, dass die zur Ableitung erforderliche Construction im Tesseral-Systeme rund um die ganze Gestalt vollführt werden muss. Denn da es in diesem Systeme drey absolut gleichwerthige Hauptaxen, also auch drey absolut gleichwerthige aufrechte Stellungen giebt, so wird die zur Ableitung erforderliche Construction, welche wir in Bezug auf eine Stellung angeben, für die beyden übrigen Stellungen ganz auf gleiche Weise wiederholt werden müssen, bevor die Construction, und somit die Ableitung selbst vollendet genannt werden, und die abzuleitende Gestalt wirklich zum Vorscheine kommen kann. Diess ist ein Umstand, welcher in den übrigen Systemen in solcher Allgemeinheit nicht wiederkehrt, und deshalb an gegenwärtigem Orte wohl berücksichtigt werden muss.

§. 69.

Ableitung der Triakisoktaeder.

Satz. Wenn die Halbaxen des Oktaeders nach irgend einem Coefficienten m verlängert, und durch jede seiner Kanten und die Eckpuncte der verlängerten Halbaxen Ebenen gelegt werden, so entsteht ein Triakisoktaeder.

Beweis. Sey OLVRHU (*tab. I. Fig.* 2.) das Oktaeder und zuvörderst OU dessen aufrechte Axe, M der Mittelpunct. Verlängere MO und MU bis O' und U', so dass MO' = MU' = m, wenn MO = 1. Lege darauf Ebenen durch die vier Kanten LV, VR, RH, HL und den Punct O' einerseits, den Punct U' anderseits, so stellen die Linien O'L, O'V, O'R, O'H und U'L, U'V, U'R, U'H deren Durchschnitte dar, und die Forderungen des Satzes sind für die erste Stellung durch die Construction der tetragonalen Pyramide O'LVRHU' erfüllt.

Stelle nun das Oktaeder nach der Axe RL aufrecht, mache MR' = ML' = m, und lege wiederum Ebenen durch die vier Kanten OV, VU, UH, HO und den Punct R' einerseits, den Punct L' anderseits, so stellen die Linien R'O, R'V, R'U, R'H und L'O, L'V, L'U, deren Durchschnitte dar und die Forderungen des Satzes sind für die zweyte Stellung durch Construction der tetragonalen Pyramide R'OVUHL' erfüllt.

Ganz auf gleiche Weise werden, wenn MV' = MH' = m, durch Construction der Pyramide V'ROLUH' die Forderungen des Satzes für die dritte Stellung erfüllt werden, womit denn die Construction vollendet seyn, und die abzuleitende Gestalt vollständig zum Vorschein kommen wird.

Dass aber diese Gestalt wirklich ein Triakisoktaeder und keine andere sey, beweist sich leicht; denn:

1) In jede Oktaederkante wurden zwey, in alle 12 Kanten also 24 Ebenen gelegt; die neue Gestalt ist daher ein 24 Flächner.

2) Da von den 24 Flächen der neuen Gestalt je zwey in einer Oktaederkante zum Durchschnitte kommen, so muss sie insofern die Hauptform des Oktaeders haben, als dessen Kantenlinien und Eckpuncte noch vorhanden seyn werden.

3) Ueber jeder Oktaederfläche erscheinen drey neue Ebenen, denn von jeder Seite dieser Fläche fällt nach der durch den gegenüberliegenden Winkelpunct gehenden Axe eine Ebene der neuen Gestalt. Von diesen drey Ebenen müssen nothwendig je zwey zum Durchschnitte kommen, und eine Kante bilden, so dass drey Kanten über jeder Oktaederfläche erscheinen, welche, da je zwey benachbarte Ebenen ursprünglich einen Eckpunct des Oktaeders gemein hatten, von diesen Eckpuncten auslaufend in irgend einem Puncte über der Oktaederfläche zusammentreffen müssen. Somit ist auf jeder Oktaederfläche als auf ihrer Basis eine dreyseitige Pyramide construirt worden. Da nun alle 8 Oktaederflächen gleichseitige Dreyecke, und, vermöge der gleichen Axenverlängerung, alle Ebenen gegen ihre respectiven Oktaederflächen gleich geneigt sind, so folgt, dass alle jene dreyseitigen Pyramiden gleiche Polkanten haben, und von congruenten gleichschenkligen Dreyecken gebildet werden.

Folglich ist die neue Gestalt eine von 24 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalt von der Hauptform des Oktaeders, d. h. ein Triakisoktaeder. (§. 58).

Wir bezeichnen die Triakisoktaeder allgemein mit mO, indem m den Coefficienten der Axenvervielfachung bedeutet. Die bis jetzt beobachteten beyden Varietäten sind $\frac{3}{2}$O und 2O.

§. 70.

Ableitung des Rhomben-Dodekaeders.

Setzen wir in einem Triakisoktaeder $m = \infty$, so fallen je zwey an einer Oktaederkante gelegene Flächen in eine Ebene, weshalb die Oktaederkanten verschwinden und je zwey mit den Grundlinien in ihnen verbunden gewesene gleichschenklige Dreyecke einen Rhombus bilden, dessen Makrodiagonale die Kantenlinie der verschwundenen Oktaederkante ist. Die neue Gestalt ist daher eine von 12 Rhomben umschlossene Gestalt, d. h. ein Rhomben-Dodekaeder, und das Zeichen desselben $= \infty$O.

Man begreift hieraus, warum es nur ein Rhomben-Dodekaeder geben kann, oder, warum es die einzige Gestalt seiner Art ist.

§. 71.

Ableitung des Hexakisoktaeders.

Satz. Wenn des Oktaeders aufrechte Axe m-mal, seine Queraxen (§. 13.) n-mal vervielfacht, darauf die Pole der Queraxen mit den Endpuncten ihrer Verlängerungen durch gerade Linien verbunden, und endlich durch jede Seite des solchergestalt construirten Achteckes und die Endpuncte der verlängerten Hauptaxe

Ebenen gelegt werden, so entsteht nach vollendeter Operation ein Hexakisoktaeder.

Beweis. Um die Figur nicht noch verwickelter zu machen, gebe ich die Construction nur für die vordere Hälfte des Oktaeders, wodurch die Betrachtung bedeutend erleichtert wird, ohne doch an Gründlichkeit und Allgemeingültigkeit etwas zu verlieren.

Sey also OLVRU (*tab. I. Fig. 3.*) die vordere Hälfte eines Oktaeders, M sein Mittelpunct, OU die aufrechte Axe. Verlängere MO und MU, bis dass $MO' = MU' = m$, und auf gleiche Weise die halben Queraxen ML, MV, MR, bis das $ML'' = MV'' = MR'' = n$; ziehe darauf LV'', VL'' und VR'', RV'', welche sich in D' und D schneiden, so ist LD'VDR die vordere Hälfte des Achteckes, welches für alle rationalen Werthe von n ein Ditetragon werden muss. Lege nun Ebenen durch die Seiten dieses Achteckes, also durch LD', D'V, VD, DR (auch die hinteren, hier nicht construirten) und den Punct O' einerseits, den Punct U' anderseits, so stellen die Linien O'L, O'D', O'V, O'D, O'R und U'L, U'D' U'V, U'D, U'R deren Durchschnitte dar, und die Forderungen des Satzes sind für die erste Stellung durch die Construction der ditetragonalen Pyramide O'LD'VDRU' (ihre hintere Hälfte mit gedacht) erfüllt.

Stelle nun das Oktaeder nach der Axe RL aufrecht, mache $MR' = ML' = m$, und verlängere wiederum die halben Queraxen MO, MV, MU, bis dass $MO'' = MV'' = MU'' = n$; construire wie vorhin das halbe Achteck OFVF'U und lege Ebenen durch dessen Seiten OF, FV, VF', F'U und den Punct R' einerseits den Punct L anderseits, so stellen die Linien $R'O$, $R'F$, $R'V$, $R'F'$, $R'U$ und $L'O$, $L'F$, $L'V$, $L'F'$, $L'U$ deren Durchschnitte dar, und die Forderungen des Satzes sind durch die Construction der ditetragonalen Pyramide $R'OFVF'UL'$ auch für die zweyte Stellung erfüllt.

Stelle endlich das Oktaeder nach seiner dritten Axe VH aufrecht, verlängere MV (und die hintere, nicht sichtbare Halbaxe MH), bis dass MV'' (und MH'') $= m$, und die halben Nebenaxen MO, ML, MU, MR, bis dass $MO'' = ML'' = MU'' = MR'' = n$; construire das Achteck $OELE'UE''RE'''$ und lege darauf Ebenen durch jede seiner Seiten und den vordern Punct V' einerseits, (und den hinteren nicht sichtbaren Punct H' anderseits), so sind die Linien $V'O$, $V'E$, $V'L$, $V'E'$ $V'U$, $V'E''$, $V'R$, $V'E'''$ deren Durchschnitte, und die Bedingungen des Satzes sind auch für die dritte Stellung durch die Construction der 8seitigen Pyramide $V', OELE'UE''RE''', H'$ erfüllt; womit denn die Operation vollendet und die abzuleitende Gestalt den Bedingungen gemäss vollständig construirt ist.

Dass aber diese Gestalt wirklich ein Hexakisoktaeder sey, lässt sich ungefähr so zeigen.

1) Da wir in jede Seite der drey Achtecke, welche wir an den Hauptschnitten des Oktaeders construirten, ein Paar Ebenen legten, so wird die neue Gestalt von $3 . 8 . 2 = 48$ Flächen umschlossen seyn. Weil aber die beyden Ebenen jeder einzelen Achteckseite in ihr selbst zum Durchschnitte kommen, so werden 24 Kantenlinien der neuen Gestalt mit den 24 Seiten jener Achtecke zusammenfallen, und folglich auch

die Eckpuncte des Oktaeders in der neuen Gestalt noch vorhanden seyn.

2) Es ist also nur noch zu beweisen, dass über jeder Oktaederfläche 6 gleiche und ähnliche ungleichseitige Dreyecke gelegen sind; wir beweisen es z. B. für die Fläche OVR. Im Eck DFM,V *) ist

Kante DFVM = FDVM

da nun CFVM = CDVM nach der Constr.

so ist CFVD = CDVF

und folglich W. CVF = W. CVD

da nun auch W. CFV = W. CDV

und FV = DV

so folgt Δ CFV $\cong$ Δ CDV

und die drey Linien FC, VC und DC treffen demnach in einem Puncte C zusammen. Ganz auf gleiche Weise findet sich, dass Δ COF $\cong$ Δ COE'''

Δ CRE''' $\cong$ Δ CRD

Allein diese Dreyecke sind nicht nur paarweis, sondern auch überhaupt einander gleich und ähnlich, denn:

W. DVF = W. FOE''' = W. E'''RD

und folglich das Eck CDF,V = dem Eck CFE''',O

= dem Eck CDE''',R

demnach W. CVF = W. COF

W. COE''' = W. CRE'''

W. CRD = W. CVD

---

*) Ein Eck bezeichnen wir dadurch, dass wir einen Buchstaben an jede seiner Kantenlinien und an seinen Eckpunct setzen, und darauf die Kantenbuchstaben neben einander schreiben, den Eckbuchstaben aber zuletzt durch ein Komma von den übrigen getrennt folgen lassen.

Da nun auch vermöge der Construction

$$\begin{aligned}
W.\ CFV &= W.\ CFO \\
W.\ CE'''O &= W.\ CE''R \\
W.\ CDR &= W.\ CDV \\
\text{und} \quad OF &= FV = OE'' = RE''' \\
&= DV = DR
\end{aligned}$$

so folgt, dass sämmtliche 6 Dreyecke einander gleich und ähnlich sind, und 6 ihrer gleichwerthigen Winkelpuncte in den Punct C zusammenfallen.

Da nun um den Punct C 6, um den Punct V 8 ebene Winkel liegen, so ist jeder Winkel wie FCV immer $< 60^\circ$, jeder Winkel wie FVC immer $< 45^\circ$, also

$$W.\ FCV + W.\ FVC < 105^\circ$$
$$\text{und folglich } W.\ CFV > 75^\circ$$

Da nun aber W. CFV = W. CFO. so kann keiner von beyden jemals grösser als 90° seyn; sollten aber die Dreyecke jemals gleichschenklige werden können, so müsste seyn

$$\begin{aligned}
\text{entweder } W.\ FVC &= W.\ FCV \\
\text{also } \quad W.\ CFV &> 90^\circ \\
\text{oder } W.\ CFV &= W.\ FCV \\
\text{oder auch } W.\ FVC &= W.\ VFC
\end{aligned}$$

Da nun von allen diesen eines so unmöglich ist als das andere, so folgt, dass die Dreyecke jederzeit ungleichseitige seyn müssen.

Folglich ist die abgeleitete Gestalt eine von 48 gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalt, d. h. ein Hexakisoktaeder (§. 62).

Wir bezeichnen die Hexakisoktaeder allgemein mit mOn, indem m und n die Coefficienten der Axen-

Vervielfachung bedeuten, so dass sich m jederzeit auf die aufrecht gedachte Axe bezieht. Die bis jetzt beobachteten drey Varietäten sind $3O\frac{3}{2}$, $5O\frac{5}{3}$ und $4O2$.

§. 72.

Ableitung des Trapez-Ikositetraeders.

Setzen wir bey der Ableitung des Hexakisoktaeders $m = n$, so fallen je zwey über einem und demselben Flächenwinkel des Oktaeders gelegene Dreyecke des Hexakisoktaeders in eine Ebene, bilden ein symmetrisches Trapezoid, und aus dem Hexakisoktaeder wird eine von 24 symmetrischen Trapezoiden umschlossene Gestalt, d. h. ein Trapez-Ikositetraeder (§. 59.), dessen allgemeines Zeichen folglich $= mOm$.

Die bis jetzt beobachteten beyden Varietäten sind $2O2$ und $3O3$.

§. 73.

Ableitung des Tetrakishexaeders.

Setzt man dagegen bey der Ableitung des Hexakisoktaeders $m = \infty$, so fallen je zwey über derselben Oktaederkante und an demselben Oktaedereck gelegene Dreyecke des Hexakisoktaeders in eine Ebene, und bilden ein gleichschenkliges Dreyeck, so dass sich das Hexakisoktaeder in eine von 24 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalt verwandelt, an welcher die Eckpuncte und Kantenlinien des Hexaeders hervortreten. Sie ist also ein Tetrakishexaeder, und das allgemeine Zeichen desselben $= \infty On$; die bis jetzt beobachteten drey Varietäten sind: $\infty O\frac{3}{2}$, $\infty O2$ und $\infty O3$.

§. 74.

Ableitung des Hexaeders.

Setzt man endlich bey der Ableitung des Hexakisoktaeders $m = n = \infty$, so fallen je 8 um ein Oktaedereck gelegene Dreyecke des Hexakisoktaeders in eine auf der durch dieses Eck gehenden Axe rechtwinklige Ebene, und die neue Gestalt wird statt eines Hexakisoktaeders eine von drey auf einander rechtwinkligen Paaren paralleler Flächen umschlossene Gestalt, d. h. ein Hexaeder, dessen Zeichen $= \infty O \infty$.

§. 75.

Uebersicht.

Und so wären denn sämmtliche homoedrische Gestalten des Tesseral-Systemes aus dem Oktaeder als ihrer gemeinschaftlichen Grundgestalt abgeleitet. Eigentlich hätten wir nur der einen Construction des Hexakisoktaeders bedurft, und uns die besondere Construction des Triakisoktaeders ersparen können, indem wir nur für mOn den Werth $n = 1$ einzuführen, und somit das Hexakisoktaeder in ein Triakisoktaeder zu verwandeln brauchten; um aber den Leser mit beyden Arten der Ableitung, von welchen wir in der Folge so oft Gebrauch machen werden, schon jetzt bekannt und vertraut zu machen, hielten wir es für zweckmässig, die Construction des Triakisoktaeders besonders zu geben, weil dabei die erstere einfachere Art der Ableitung in Anwendung kommt. Stellen wir die Resultate der vorigen §§. noch einmal zusammen, so erhalten wir folgende Uebersicht:

1) Oktaeder = Grundgestalt = O.
2) Triakisoktaeder = $\frac{3}{2}$O, 2O.
3) Rhomben-Dodekaeder = ∞O.
4) Hexakisoktaeder = 3O$\frac{3}{2}$, 5O$\frac{5}{3}$, 4O2.
5) Trapez-Ikositetraeder = 2O2, 3O3.
6) Tetrakishexaeder = ∞O$\frac{3}{2}$, ∞O2, ∞O3.
7) Hexaeder = Gränzgestalt = ∞O∞.

Da sich diese Gestalten insgesammt unter dem allgemeinem Zeichen mOn darstellen lassen, so begreift man, dass alle möglichen Arten von homoedrischen Gestalten in diesen sieben erschöpft sind, und dass weder die Geometrie, noch die *natura geometrizans* als Krystallbildnerinn eine tesserale homoedrische Gestalt darzustellen vermag, welche nicht der Art nach mit einer der sieben bekannten Gestalten des Tesseral-Systemes übereinstimmte. Denn dass 2O = O2, und ∞O = O∞, so wie ∞On = nO∞, ist leicht zu erweisen. Das Hexakisoktaeder, welches gleichsam die Bedingungen aller übrigen Gestalten in sich vereinigt, und somit den gemeinschaftlichen Repräsentanten derselben darstellt, steht billig in der Mitte der Reihe, welche einerseits das Oktaeder, anderseits das Hexaeder beschliesst, da die Coefficienten m und n in ersterem die möglichst kleinsten, in letzterem die möglichst grössten Werthe erreicht haben.

B) HEMIEDRISCHE GESTALTEN.

§. 76.

Welche Gestalten der Hemiedrie fähig sind.

Wenn wir die homoedrischen Gestalten des Tesseral-Systemes, welche wir auch die tesseralen Gestalten schlechthin nennen werden, hinsichtlich ihrer Fähigkeit zur Hemiedrie prüfen, so ergiebt sich Folgendes:

1) Das Hexaeder ist der Hemiedrie überhaupt unfähig, da drey ebene Flächen den Raum nicht allseitig umschliessen, und daher weder einen geometrischen Körper, noch eine Krystallgestalt darstellen können.

2) Das Rhomben-Dodekaeder ist der Hemiedrie überhaupt ebenfalls unfähig, da je 6 seiner Flächen, man mag sie wählen wie man will, entweder den Raum nicht allseitig umschliessen, also keine Gestalt darstellen, oder eine solche Gestalt darstellen, in welcher der Grundcharakter des Tesseral-Systemes nicht mehr vorhanden ist (§. 15, no. 5).

Uebrigens lässt sich für die halbe Flächenzahl weder in der einen noch in der andern dieser beyden Gestalten eine rund um symmetrische Vertheilung auffinden, welche doch die Bedingung aller Hemiedrie ist; (§. 8.).

Von den fünf übrigen Gestalten sind ferner der parallelflächigen Hemiedrie unfähig:

1) Das Oktaeder, weil zwey paar paralleler Flächen den Raum nicht allseitig umschliessen.

2) Das Trapez - Ikositetraeder; denn nach einzelen Flächen ist in ihm die parallelflächige Hemiedrie unmöglich, da jeder Fläche Gegenfläche ihre fünfte Nebenfläche (§. 5.), also die sechste Fläche von ihr aus gerechnet ist; wächst daher no. 1, so fällt no. 6 aus, und umgekehrt; aus demselben Grunde kann auch dieselbe Hemiedrie nach dreyzähligen Flächensystemen nicht Statt finden, da das Gegensystem eines jeden das vierte von ihm aus gerechnet ist.

3) Das Triakisoktaeder; gegen die Hemiedrie nach dreyzähligen Flächensystemen gilt der für das Ikositetraeder angeführte Grund; nach einzelen Flächen ist sie aber deshalb unmöglich, weil, obgleich für jede Fläche ihre Gegenfläche die siebente von ihr aus gerechnet ist, doch keine allseitig symmetrische Vertheilung der abwechselnden Flächen Statt finden kann.

Es können also nur das Tetrakishexaeder und Hexakisoktaeder parallelflächig hemiedrisch auftreten.

a) Geneigtflächig hemiedrische Gestalten.

§. 77.

Ableitung des Tetraeders.

Satz. Das Tetraeder ist die geneigtflächig-hemiedrische Gestalt des Oktaeders nach einzelen Flächen, oder die hemiedrische Gestalt des Oktaeders schlechthin.

Beweis. Jede einzele Fläche hat drey Nachbarflächen, drey Nebenflächen und eine Gegenfläche;

da nun die Nebenflächen ausfallen, weil die Hemiedrie nach einzelen Flächen erfolgt, (§. 8.), und die Gegenfläche ausfällt, weil die Hemiedrie geneigtflächig ist (§. 8.), so bilden die übrigen vier Flächen, von denen eine jede Hauptfläche und zugleich Nachbarfläche der drey übrigen ist die hemiedrische Gestalt. Da nun jede dieser Flächen mit ihren drey Nachbarflächen zum Durchschnitte kommt, so wird die hemiedrische Gestalt 6 Kanten, 4 trianguläre Flächen und 4 Ecke haben, und da die Neigungswinkel je zweyer Nachbarflächen vor der Vergrösserung gleich waren, so werden sämmtliche Kanten der hemiedrischen Gestalt gleich gross seyn, woraus die Gleichheit der Flächenwinkel und die Gleichseitigkeit der die Gestalt umschliessenden Dreyecke folgt. Die hemiedrische Gestalt des Oktaeders ist folglich das Tetraeder $= \frac{O}{2}$.

Zusatz. Da es willkührlich ist, welche vier abwechselnde Flächen man vergrössern will, so begreift man, dass sich aus jedem Oktaeder zwey vollkommen gleiche und ähnliche, und nur durch ihre gegenseitige Stellung unterschiedene Tetraeder ableiten lassen. Bezeichnen wir diese Verschiedenheit der Stellung, welche keine anderen, als die im §. 15 erwähnte der normalen und verwendeten Stellung ist, durch Vorsetzung der Zeichen + und —, so giebt jedes Oktaeder zwey Tetraeder $+\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$, deren Combination wiederum die Muttergestalt darstellt.

§. 78.

Ableitung des Trapez-Dodekaeders.

Satz. Das Trapez-Dodekaeder ist die geneigtflächig-hemiedrische Gestalt des Triakisoktaeders nach dreyzähligen Flächensystemen, oder die hemiedrische Gestalt des Triakisoktaeders schlechthin.

Beweis. Dass das Triakisoktaeder nicht nach einzelen Flächen, sondern einzig nach dreyzähligen Flächensystemen der Hemiedrie fähig sey, lässt sich leicht zeigen, indem nur auf diese Weise die allseitige Symmetrie in der Vertheilung der Flächen erhalten wird. Daher wird die geforderte hemiedrische Gestalt nach demselben Gesetze aus dem Triakisoktaeder abzuleiten seyn, nach welchem das Tetraeder aus dem Oktaeder abgeleitet wurde, d. h. es werden die abwechselnden Flächensysteme vergrössert werden müssen, bis zum Verschwinden der übrigen; weshalb denn auch die neue Gestalt die Hauptform des Tetraeders haben wird. — Weil nun jede Fläche vor der Vergrösserung mit ein paar Flächen zweyer Nachbarsysteme einen Punct gemein hatte, so wird sie nach der Vergrösserung zwey neue Durchschnitte erleiden, und folglich eine vierseitige Figur werden, indem sie sich über ihre Basis hinaus in ein zweytes Dreyeck ausbreitet. Und weil die Neigungswinkel beyder Flächen gegen die betrachtete Fläche sowohl als gegen deren Basis vor der Vergrösserung gleich waren, so werden nicht nur die neuen Kanten, sondern auch die an der Basis gelegenen Winkel des zweyten Dreyeckes gleich gross seyn. Die vierseitige Figur ist daher ein symmetrisches Trapezoid (§. 2.), und da, was von einer Fläche gilt, auf alle anwendbar ist, so wird die neue Gestalt eine von 12 symmetrischen Trapezoiden umschlossene Gestalt von der Hauptform des Tetraeders, d. h. ein Trapez-Dodekaeder $= \frac{mO}{2}$; (§. 53).

Zusatz. Aus demselben Grunde, welcher in der Anmerkung des vorigen § angegeben wurde, lassen sich aus jedem Triakisoktaeder zwey gleiche und ähnliche, in verwendeter Stellung befindliche Trapez-Dodekaeder ableiten, deren Zeichen $+\frac{mO}{2}$ und $-\frac{mO}{2}$ sind.

§. 79.

Ableitung des Trigon-Dodekaeders.

Satz. Das Trigon-Dodekaeder ist die geneigtflächig-hemiedrische Gestalt des Trapez-Ikositetraeders nach dreyzähligen Flächensystemen, oder die hemiedrische Gestalt des Ikositetraeders schlechthin.

Beweis. Das Trapez-Ikositetraeder ist eben so wenig als das Triakisoktaeder der Hemiedrie nach einzelen Flächen fähig, indem nur die dreyzähligen Flächensysteme eine symmetrische Halbirung gestatten. Deshalb wird auch die abzuleitende hemiedrische Gestalt die Hauptform des Tetraeders haben müssen. — Weil nun jede Trapezfläche mit der eines anderen benachbarten Flächensystemes vor der Vergrösserung einen Eckpunct gemein hatte, so werden beyde nach der Vergrösserung eine Kante bilden; und weil je zweyer solcher Flächen Vergrösserung nur innerhalb des von den Hauptschnitten durch ihre kürzeren Kanten umschlossenen Raumes Statt findet, ihr gegenseitiger Neigungswinkel aber dem Neigungswinkel ihrer beyderseitigen Brachydiagonalen gleich, und folglich die neue Kante den Makrodiagonalen parallel ist, so wird jede der beyden Flächen nach der Vergrösserung ein gleichschenkliges Dreyeck darstellen. Da nun, was von einer Fläche gilt, auf alle seine Anwendung findet, so folgt, dass die neue Gestalt eine von 12 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalt von der Hauptform des Tetraeders, d. h. ein Trigon-Dodekaeder (§. 51) $= \frac{mOm}{2}$ seyn wird.

Zusatz. Da wir hier ebenfalls zweyfache Stellung zu berücksichtigen haben, so erhalten wir aus jedem Ikositetraeder ein $+\frac{mOm}{2}$ und ein $-\frac{mOm}{2}$.

§. 80.

Ableitung des Hexakistetraeders.

Satz. Das Hexakistetraeder ist die geneigtflächig-hemiedrische Gestalt des Hexakisoktaeders nach sechszähligen Flächensystemen.

Beweis. Da eine Vergrösserung der abwechselnden sechszähligen Flächensysteme gefordert wird, so ist zuvörderst klar, dass die neue Gestalt ein 24 Flächner von der Hauptform des Tetraeders seyn müsse. — Da nun die ursprünglichen Schranken des Wachsthumes jeder Fläche die beyden Hauptschnitte durch ihre längste und durch ihre kürzeste Kante sind, so wird sich jede Fläche nur zwischen den Ebenen dieser Hauptschnitte ausbreiten, und überhaupt nur mit denjenigen Flächen neue Kanten hervorbringen können, welche innerhalb derselben beyden Hauptschnitte diesseits gelegen sind. Dahin gehört zuvörderst eine des Nachbarsystemes, die mit ihr einen Eckpunct gemein hat. Die ursprünglichen Schranken des Wachsthums dieser anderen Fläche sind aber einerseits der Hauptschnitt durch ihre grösste Kante, welcher mit dem gleichnamigem Hauptschnitte der ersteren Fläche identisch ist, anderseits der Hauptschnitt durch ihre kleinste Kante, welcher mit dem gleichnamigem der ersteren Fläche zum Durchschnitt kommt. Also ist der von diesen drey Hauptschnitten umschlossene Raum der Spielraum des Wachsthumes für diese beyden Flächen, aber auch nur für sie. Sie werden daher in einer neuen Kante zusammentreffen, in dieser das Ziel ihres Wachsthums erreichen und folglich wiederum Dreyecke bilden. Da nun, was von einer Fläche gilt, auf alle anwendbar ist, so werden sämmtliche 24 Flächen der 4 sechszähligen Flächensysteme nach ihrer Vergrösserung wiederum Dreyecke bilden, und eine von 24 Dreyecken umschlossene Gestalt von der Hauptform des Tetraeders darstellen, welche keine andere, als ein Hexakistetraeder seyn kann.

Zusatz. Auch hier haben wir wegen der doppelten Stellung ein $+\frac{mOn}{2}$ und ein $-\frac{mOn}{2}$ zu unterscheiden.

§. 81.

Ableitung des Pentagon-Ikositetraeders.

Satz. Das Pentagon-Ikositetraeder ist die geneigtflächig-hemiedrische Gestalt des Hexakisoktaeders nach einzelen Flächen.

Beweis. Da im Hexakisoktaeder jeder Fläche Gegenfläche die zehnte von ihr aus gerechnet ist, so kann die Hemiedrie nach einzelen Flächen nur eine geneigtflächige Gestalt hervorbringen, weil mit der Fläche 1 zugleich die Flächen 3, 5, 7 und 9 aber nicht 10 wachsen können. — Dass aber dann jede einzele Fläche mit fünf andern zum Durchschnitt kommen, und folglich ein Fünfeck werden muss, lässt sich leicht nachweisen. Es verschwinden nämlich die Nebenflächen, und wachsen die Nachbarflächen jeder wachsenden Fläche; der Nachbarflächen sind aber fünf, da ein Paar der Nebenflächen nur eine einzige Fläche zwischen sich hat. Jede wachsende Fläche wird also fünf Durchschnitte erleiden, und folglich ein Fünfeck werden. Da nun sowohl die beyden Nachbarflächen am ditetragonalem Eck, als die beyden Nachbarflächen am ditrigonalem Eck des Hexakisoktaeders gegen die wachsende Fläche vor der Vergrösserung gleiche Neigung hatten, so werden nach der Vergrösserung zwey Paare gleicher Kanten resultiren. Was aber von einer Fläche gilt, ist auf alle anwendbar. Die neue Gestalt wird daher eine von 24 Pentagonen, deren jedes mit seinen Nebenflächen zwey Paar gleicher Kanten bildet, umschlossene Gestalt, d. h. ein Pentagon-Ikositetraeder seyn; (§. 61).

Zusatz. Das allgemeine Zeichen dieser Gestalt kann nicht $\pm \frac{mOn}{2}$ seyn, weil dieses schon für das Hexakistetraeder gebraucht worden ist. Obwohl übrigens die Ableitung aus jedem Hexakisoktaeder ebenfalls zwey Pentagon-Ikositetraeder giebt, so tritt doch hier das ganz eigenthümliche Verhältniss ein, dass die Begränzungselemente beyder Gestalten einzeln gleich und ähnlich, und nur in ihrer Verbindung, also ihrer Lage nach wie rechts und links gewendete verschieden sind, weshalb sich die Gestalten selbst ungefähr so verhalten, wie eine rechte Hand zu einer linken. Da es also nicht sowohl die verschiedene Stellung, als diess Verhältniss von rechts und links ist, was beyde Gestalten unterscheidet, so würden sie mit $r\frac{mOn}{2}$ und $l\frac{mOn}{2}$ zu bezeichnen seyn.

b) Parallelflächig-hemiedrische Gestalten.

§. 82.

Ableitung des Pentagon-Dodekaeders.

Satz. Das Pentagon-Dodekaeder ist die parallelflächig-hemiedrische Gestalt des Tetrakishexaeders nach einzelen Flächen, oder die hemiedrische Gestalt des Tetrakishexaeders schlechthin.

Beweis. Dass die Hemiedrie nach einzelen Flächen bey dem Tetrakishexaeder auf eine parallelflächige Gestalt führen muss, ist einleuchtend, weil jeder Fläche Gegenfläche (von ihr selbst aus gerechnet die siebente Fläche ist, so dass no. 1, 3, 5 und 7 zugleich wachsen, wenn die abwechselnden einzelen Flächen überhaupt wachsen sollen. — Dass aber die so entstehende parallelflächige Gestalt ein Pentagon-Dodekaeder ist, ergiebt sich daraus, weil jede Fläche fünf Nachbarflächen hat, folglich nach der Vergrösserung fünf Durchschnitte erleidet, und sich in ein Fünfeck verwandelt. Da nun vier Nachbarflächen vor der Vergrösserung gleiche Neigung gegen die gegebene Fläche hatten, so wird diese nach der Vergrösserung vier gleiche und eine ungleiche Kante bilden, und da, was von einer Fläche gilt, auf alle anwendbar ist, so wird die neue Gestalt eine von 12 Fünfecken, deren jedes mit seinen Nebenflächen 4 gleiche und eine ungleiche Kante bildet, umschlossene Gestalt, d. h. ein Pentagon-Dodekaeder seyn; (§ 54).

Zusatz. Da auch diese hemiedrische Gestalt ihr in verwendeter Stellung befindliches Ebenbild hat, so wird ihr allgemeines Zeichen $\pm \frac{\infty On}{2}$ seyn.

§. 83.

Ableitung des Dyakisdodekaeders.

Satz. Das Dyakisdodekaeder ist die parallelflächig-hemiedrische Gestalt des Hexakisoktaeders nach den zwischen je zwey ditrigonalen und einem ditetragonalem Ecke gelegenen Flächenpaaren.

Beweis. Dass die so bestimmte Hemiedrie auf eine parallelflächige Gestalt führen müsse, ist einleuchtend, weil das Gegenpaar jedes solchergestalt bestimmten Flächenpaares von ihm aus gerechnet das siebente in der Reihe der Nebenpaare ist, und folglich unter

Voraussetzung abwechselnder Vergrösserung zugleich mit jenem wachsen muss. — Dass aber die Gestalt wirklich ein Dyakisdodekaeder werden wird, folgt daraus, weil jede einzele Fläche, da ihr Wachsthum nach der Richtung ihrer bleibenden Nebenfläche ursprünglich gehemmt ist, nur mit denjenigen Nachbarflächen und zweyten Nebenflächen zum Durchschnitte kommen kann, welche diesseits des durch ihre Verbindungskante gehenden Hauptschnittes liegen. Da nun deren zusammen nicht mehr als drey sind, so wird jede Fläche ausser der ursprünglichen Kante mit ihrer Nebenfläche noch drey Kanten mit diesen (zwey Nachbarflächen und einzelen zweyten Nebenfläche) bilden; und da die beyden Nachbarflächen vor der Vergrösserung gegen die gegebene Fläche gleiche Neigung hatten, so werden von jenen drey Kanten zwey einander gleich seyn. Was aber von einer Fläche gilt, gilt von allen gleichmässig; die neue Gestalt wird also eine von 12 Paaren vierseitiger Flächen, deren jede ein Paar gleicher Kanten bildet, umschlossene Gestalt darstellen, welche keine andere seyn kann, als ein Dyakisdodekaeder.

Zusatz. Das Zeichen der beyden aus einem und demselben Hexakisoktaeder abzuleitenden Dyakisdodekaeder ist $\pm\left(\frac{mOn}{2}\right)$.

§. 84.

Uebersicht.

Wir haben nun die Ableitung sämmtlicher hemiedrischer Gestalten des Tesseral-Systemes, die wir auch semitesserale Gestalten nennen werden, somit die Ableitung für das Tesseral-System selbst vollständig durchgeführt, und zugleich den geometrischen Zusammenhang, welcher zwischen den einzelen Gestalten dieses Systemes sowohl in Bezug auf ihre Gestaltung, als in Bezug auf ihre gegenseitige Stellung Statt findet, nachgewiesen. Allerdings hätten wir bei der Ableitung der hemiedrischen Gestalten den Weg geometrischer Construction und Demonstration einschlagen können, wodurch die für jeden Satz zu gebenden Beweise eine weit grössere Evidenz und Allgemeinheit erhalten haben würden; allein da der Zweck dieser Arbeit zunächst nur der ist, eine leichte Anleitung zur Kenntniss der Krystallformen und ihrer Verhältnisse in möglichst populärer Darstellung zu geben, so hielten wir es für passender, die zum Theil etwas verwickelten Constructionen zu vermeiden, und aus den Verhältnissen der Neben- und Nachbarflächen die allgemeine Figur der Flächen aller hemiedrischen Gestalten zu bestimmen. Wer gründlicher verfahren will, wird sich nach den hier gegebenen Beweisen leicht die Constructionen und die vollständigen Demonstrationen entwickeln können. Um aber die Resultate der vorhergehenden §§. mit einem Blicke zu überschauen, dazu diene die nochmalige Zusammenstellung der hemiedrischen Gestalten mit ihren Zeichen.

a) Geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

1) Tetraeder $= \pm \frac{O}{2}$.

2) Trapez-Dodekaeder $= \pm \frac{\frac{3}{2}O}{2}, \pm \frac{2O}{2}$.

3) Trigon-Dodekaeder $= \pm \frac{2O2}{2}, \pm \frac{3O3}{2}$.

4) Hexakistetraeder $= \pm \frac{3O\frac{3}{2}}{2}, \pm \frac{5O\frac{5}{3}}{2}, \pm \frac{4O2}{2}$.

5) Pentagon-Ikositetraeder $=$ lr $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$, lr $\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$, lr $\frac{4O2}{2}$.

b) **Parallelflächig-semitesserale Gestalten.**

1) Pentagon-Dodekaeder $= \pm \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}, \pm \frac{\infty O2}{2}, \pm \frac{\infty O3}{2}$.

2) Dyakisdodekaeder $= \pm \left(\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right), \pm \left(\frac{5O\frac{5}{3}}{2}\right), \pm \left(\frac{4O2}{2}\right)$.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Winkel der einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

A) HOMOEDRISCHE ODER TESSERALE GESTALTEN.

§. 85.

Kantenwinkel von mOn.

Da sämmtliche homoedrische Gestalten des Tesseral-Systemes unter dem allgemeinem Zeichen mOn begriffen sind, so ist es am zweckmässigsten, für die Berechnung ihrer Kanten- und Flächen-Winkel die Berechnung der Winkel eines Hexakisoktaeders von ganz unbestimmten Werthen der Coefficienten m und n zu Grunde zu legen. Aus den so erhaltenen Formeln lassen sich dann die Winkel sämmtlicher Gestalten durch Einführung der respectiven Werthe von m und n mit leichter Mühe berechnen.

In jedem Hexakisoktaeder mOn bezeichnen wir die über den Oktaederkanten gelegenen Kanten mit z, die über den Hexaederkanten gelegenen mit y, und die von den ditrigonalen nach den ditetragonalen Ecken laufenden Kanten mit x. Aus der in §. 71 gegebenen Ableitung von mOn aus O folgt nach bekannten Sätzen der sphärischen Trigonometrie der Werth von y und z, nämlich:

$$\cos. y = -\frac{n^2 + 2nm^2}{n^2 + m^2(n^2+1)}$$

$$\cos. z = \frac{n^2 - m^2(n^2+1)}{n^2 + m^2(n^2+1)}$$

$$\text{und} \sin. y = \frac{m(n-1)\sqrt{(n+1)^2m^2 + 2n^2}}{n^2 + m^2(n^2+1)}$$

$$\sin. z = \frac{2mn\sqrt{n^2+1}}{n^2 + m^2(n^2+1)}$$

Setzen wir ferner den an dem Oktaedereck gelegenen Winkel des ditetragonalen Hauptschnittes $= \nu$, den anderen $= \delta$, so ist:

$$\cos. \nu = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\cos. \delta = -\frac{2n}{n^2+1}$$

$$\text{tang.}\ \frac{\nu}{2} = n,\quad \text{tang.}\ \frac{\delta}{2} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\sin.\ \frac{\nu}{2} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}},\quad \sin.\ \frac{\delta}{2} = \frac{n+1}{\sqrt{2(n^2+1)}}$$

$$\cos.\ \frac{\nu}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}},\quad \cos.\ \frac{\delta}{2} = \frac{n-1}{\sqrt{(n^2+1)}}$$

§. 86.

Fortsetzung.

Da nun der Neigungswinkel eines ditetragonalen gegen einen rhombischen Hauptschnitt $= 45°$, so giebt diess nach der bekannten Gleichung:

$$\cos \frac{x}{2} = -\cos.\frac{z}{2}\cos.\ 45° + \sin.\frac{z}{2}\sin.\ 45°\cos.\frac{\nu}{2}$$

Da ferner $\cos.\ \dfrac{z}{2} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+m^2(n^2+1)}}$

$$\sin.\ \frac{z}{2} = \frac{m\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+m^2(n^2+1)}}$$

so folgt $\cos.\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{m-n}{\sqrt{2n^2+2m^2(n^2+1)}}$

und $\cos.\ x = -\dfrac{mn(mn+2)}{n^2+m^2(n^2+1)}$

$$\sin.\ x = \frac{(m-n)\sqrt{2m^2n^2+(m+n)^2}}{n^2+m^2(n^2+1)}$$

Somit wären die zur Berechnung aller Kantenwinkel des Hexakisoktaeders nöthigen Gleichungen gefunden.

§. 87.

Flächenwinkel von mOn.

Die Flächenwinkel sind leicht aus den Kantenwinkeln und den von je zwey Hauptschnitten gebildeten Winkeln von 60° und 45° zu berechnen. Man nenne

den Winkel am Oktaedereck $= \alpha$
- - - Hexaedereck $= \beta$
den dritten Flächenwinkel $= \gamma$

so gelten folgende Gleichungen:

$$\cos.\ \alpha = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \cos.\frac{x}{2}\cos.\frac{z}{2}}{\sin.\frac{x}{2}\sin.\frac{z}{2}}$$

$$\cos.\ \beta = \frac{\tfrac{1}{2} + \cos.\frac{x}{2}\cos.\frac{y}{2}}{\sin.\frac{x}{2}\sin.\frac{y}{2}}$$

$$\cos.\ \gamma = \cot.\frac{y}{2}\cot.\frac{z}{2}$$

Nun ist, wenn $\sqrt{2}\sqrt{n^2 + m^2(n^2+1)} = M$,

$$\cos.\frac{x}{2} = \frac{m-n}{M}$$

$$\sin.\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2m^2n^2 + (m+n)^2}}{M}$$

$$\cos\frac{y}{2} = \frac{m(n-1)}{M}$$

$$\sin.\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2n^2+m^2(n+1)^2}}{M}$$

$$\cos.\frac{z}{2} = \frac{n\sqrt{2}}{M}$$

$$\sin.\frac{z}{2} = \frac{m\sqrt{2}\sqrt{n^2+1}}{M}$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichungen, so erhält man:

$$\cos.\,\alpha = \frac{mn^2+m+n}{\sqrt{(n^2+1)[2m^2n^2+(m+n)^2]}}$$

$$\cos.\,\beta = \frac{n^2(m^2-m+1)+mn(m+1)}{\sqrt{[2m^2n^2+(m+n)^2][2n^2+m^2(n+1)^2]}}$$

$$\cos.\,\gamma = \frac{n(n-1)}{\sqrt{(n^2+1)[2n^2+m^2(n+1)^2]}}$$

Diese Gleichungen sind zur Berechnung der Kantenwinkel der semitesseralen Gestalten unentbehrlich, so wie sich auch mittels ihrer die Flächenwinkel aller tesseralen Gestalten berechnen lassen.

§. 88.

Kanten der Hexakisoktaeder.

Ich schreite nun zur Anwendung der Formeln der vorhergehenden §§., indem ich die Kantenwinkel sämmtlicher tesseralen Gestalten durch Einführung der respectiven Werthe von m und n berechne.

Setzt man $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$, so erhält man die Kanten der ersten Varietät des Hexakisoktaeders, $3O\frac{3}{2}$:

$$\cos. x = -\tfrac{13}{14}, \quad x = 158^\circ\ 12'\ 48''$$
$$\cos. y = \cos. x \quad y = x$$
$$\cos. z = -\tfrac{12}{14}, \quad z = 148^\circ\ 59'\ 50''$$

Setzt man $m = 5$, $n = \frac{5}{3}$, so erhält man die Kanten der zweyten Varietät, $5O\frac{5}{3}$:

$$\cos. x = -\tfrac{31}{35}, \quad x = 152^\circ\ 20'\ 22''$$
$$\cos. y = \cos. x, \quad y = x$$
$$\cos. z = -\tfrac{33}{35}, \quad z = 160^\circ\ 32'\ 13''$$

Setzt man endlich $m = 4$, $n = 2$, so folgen die Kanten der dritten Varietät, $4O2$:

$$\cos. x = -\tfrac{20}{21}, \quad x = 162^\circ\ 14'\ 50''$$
$$\cos y = -\tfrac{17}{21}, \quad y = 144^\circ\ 2'\ 58''$$
$$\cos. z = -\tfrac{19}{21}, \quad z = 154^\circ\ 47'\ 28''$$

§. 89.

Kanten der Trapez-Ikositetraeder.

Für $m = n$ gilt allgemein:

$$\cos. x = -1$$

$$\cos. y = -\frac{2m+1}{m^2+2}$$

$$\cos. z = -\frac{m^2}{m^2+2}$$

Die Kante x verschwindet also, je zwey in ihr zusammenstossende Dreyecke fallen in eine Ebene, und bilden somit ein symmetrisches Trapezoid. Aus dem Hexakisoktaeder wird folglich ein Trapez-Ikositetraeder mOm, und die Winkel der Varietäten bestimmen sich wie folgt:

Erste Varietät = 2O2:

$\cos. y = -\frac{5}{6}$, $y = 146° 26' 34''$

$\cos. z = -\frac{4}{6}$, $z = 131° 48' 37''$

Zweyte Varietät = 3O3:

$\cos. y = -\frac{7}{11}$, $y = 129° 31' 16''$

$\cos. z = -\frac{9}{11}$, $z = 144° 54' 12''$

§. 90.

Kanten der Tetrakishexaeder.

Für $m = \infty$ ist allgemein:

$$\cos. x = -\frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\cos. y = -\frac{2n}{n^2+1}$$

$$\cos. z = -1$$

Daraus folgt, dass die Kante z verschwindet, und je zwey in ihr zusammenstossende Dreyecke in eine Ebene fallen und ein gleichschenkliges Dreyeck bilden. Das Hexakisoktaeder verwandelt sich in ein Tetrakishexaeder, und die Winkel der Varietäten bestimmen sich folgendergestalt:

Erste Varietät = $\infty O\frac{3}{2}$

$\cos. x = -\frac{9}{13}$, $x = 133° 48' 47''$

$\cos. y = -\frac{12}{13}$, $y = 157° 22' 48''$

Zweyte Varietät = $\infty O2$,

$\cos. x = -\frac{4}{5}$, $x = 143° 7' 48''$

$\cos. y = \cos. x$, $y = x$

Dritte Varietät $= \infty O3$,

$\cos. x = -\frac{9}{10}$, $x = 154° \; 9' \; 29''$

$\cos. y = -\frac{6}{10}$, $y = 126° \; 52' \; 12''$

§. 91.

Kanten des Hexaeders.

Für $m = n = \infty$ wird

$\cos. x = -1$, $x = 180°$

$\cos. y = 0$, $y = 90°$

$\cos. z = -1$, $z = 180°$

Die Kanten x und z verschwinden also; je acht um ein Oktaedereck gelegene Flächen fallen in eine Ebene, und der Winkel y wird $= 90°$. Das Hexakisoktaeder verwandelt sich daher in eine von sechs Ebenen umschlossene tesserale Gestalt, mit lauter rechtwinkligen Kanten, d. h. in ein Hexaeder.

§. 92.

Kanten der Triakisoktaeder.

Für $n = 1$ wird allgemein:

$$\cos. x = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1}$$

$$\cos. y = -1$$

$$\cos. z = -\frac{2m^2-1}{2m^2+1}$$

Die Kanten y verschwinden daher; je zwey in ihnen zusammenstossende Dreyecke fallen in eine Ebene und bilden ein gleichschenkliges Dreyeck, wobey nothwendig auch je zwey Kanten z in eine (Oktaeder-) Kante fallen müssen. Das Hexakisoktaeder verwandelt sich in ein Triakisoktaeder, und die Winkel der beyden bis jetzt bekannten Varietäten sind:

Erste Varietät $= \frac{3}{2}O$,

$\cos. x = -\frac{21}{22}, \quad x = 162^\circ\ 39'\ 30''$

$\cos. z = -\frac{14}{22}, \quad z = 129^\circ\ 31'\ 19''$

Zweyte Varietät $= 2O$,

$\cos. x = -\frac{8}{9}, \quad x = 152^\circ\ 44'\ 2''$

$\cos. z = -\frac{7}{9}, \quad z = 141^\circ\ 3'\ 27''$

§. 93.

Kanten des Rhomben-Dodekaeders.

Wird in den Gleichungen des vorhergehenden §. $m = \infty$ gesetzt, so erhält man:

$\cos. x = -\frac{1}{2}, \quad x = 120^\circ$

$\cos. y = -1, \quad y = 180^\circ$

$\cos. z = -1, \quad z = 180^\circ$

Es verschwinden also die Kanten y und z; je vier um ein rhombisches Eck gelegene Flächen fallen in eine Ebene, und bilden einen Rhombus. Das Hexakisoktaeder verwandelt sich in ein Rhomben-Dodekaeder, dessen Kanten insgesammt 120° messen.

B) HEMIEDRISCHE ODER SEMITESSERALE GESTALTEN.

a) Geneigtflächig-semitesserale Gestalten.

§. 94.

Auch für die Berechnung der Kantenwinkel der hemiedrischen Gestalten legen wir das Hexakisoktaeder zu Grunde, indem wir zuerst für alle semitesseralen Gestalten von der Hauptform des Tetraeders das Hexakistetraeder als ihren Repräsentanten einführen.

Wenn am Hexakisoktaeder die abwechselnden sechszähligen Flächensysteme wachsen und ein Hexakistetraeder bilden, so entstehen durch das Zusammenstossen je zweyer, in verschiedenen Systemen, aber an einem und demselben Oktaedereck gelegenen Flächen zwölf neue Kanten ζ, während die Kanten z verschwinden, die beyderley Kanten x und y aber nur in Bezug auf die Länge ihrer Kantenlinien eine Veränderung erleiden. Um nun die neue Kante ζ berechnen zu können, berechne man zuvörderst den am Oktaedereck gelegenen Winkel des rhombischen Hauptschnittes; er sey $= \varrho$. Aus diesem Winkel ϱ und den halben Winkeln der Kanten x lässt sich sogleich der Winkel ζ berechnen. — Der Hülfswinkel ϱ findet sich aber folgenderweise: Die durch die Kanten x und z irgend einer Fläche gehenden Hauptschnitte bilden mit dieser Fläche einen körperlichen Winkel, dessen Scheitel in den Eckpunct des Oktaeders fällt. In diesem Körperwinkel sind alle drey Kanten gegeben, denn die eine ist $= \frac{x}{2}$, die andere $= \frac{z}{2}$, und die dritte als Neigungswinkel beyder Hauptschnitte $= 45°$; der Kante $\frac{z}{2}$ gegenüber liegt der halbe Hülfswinkel ϱ; folglich ist:

$$\cos. \frac{\varrho}{2} = \frac{\cos. \frac{z}{2} + \cos. \frac{x}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sin. \frac{x}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$\cos. \frac{\varrho}{2} = \frac{m+n}{\sqrt{2m^2 n^2 + (m+n)^2}}$$

$$\text{und } \cos. \varrho = \frac{(m+n)^2 - 2m^2 n^2}{(m+n)^2 + 2m^2 n^2}$$

und nun, nach der bekannten Formel:

$$\cos. \zeta = \cos. \varrho \ \sin.^2 \frac{x}{2} - \cos.^2 \frac{x}{2}$$

$$= - \frac{mn\,(mn-2)}{n^2 + m^2 (n^2 + 1}$$

§. 95.

Berechnung der Kante ζ in den verschiedenen Gestalten.

Nach dieser Gleichung bestimmt sich der Werth der Kante ζ für die verschiedenen hemiedrischen Gestalten von der Hauptform des Tetraeders, durch Einführung der respectiven Werthe von m und n.

1) Für die Hexakistetraeder selbst;
erste Var. ist $\cos. \zeta = -\frac{5}{14}$, $\zeta = 110^\circ\ 55'\ 29''$
zw. Var. - - - $= -\frac{19}{35}$, $\zeta = 122^\circ\ 52'\ 42''$
dritte Var. - - - $= -\frac{4}{7}$, $\zeta = 125^\circ\ 51'\ 0''$

2) Für die Trigon-Dodekaeder;
erste Var. $\cos. \zeta = -\frac{1}{3}$, $\zeta = 109^\circ\ 28'\ 16''$
zw. Var. - - $= -\frac{7}{11}$, $\zeta = 129^\circ\ 31'\ 16''$

3) Für die Trapez-Dodekaeder;
erste Var. $\cos. \zeta = \frac{3}{22}$, $\zeta = 82^\circ\ 9'\ 45''$
zw. Var. - - $= 0$, $\zeta = 90^\circ\ 0'\ 0''$

4) Für das Tetraeder;
$\cos. \zeta = \frac{1}{3}$, $\zeta = 70^\circ\ 31'\ 44''$

§. 96.

Kanten des Pentagon-Ikositetraeders.

Zur Bestimmung der Kanten des Pentagon-Ikositetraeders müssen wir die Winkel berechnen, welche jede Fläche mit ihren Nachbarflächen hervorbringt. Man begreift sogleich, dass unter diesen fünf Winkeln zwey Paare gleicher Winkel vorkommen werden, da sowohl die am Oktaedereck als die am Hexaedereck gelegenen Nachbarflächen gleiche Neigung gegen die Hauptfläche haben. Es seyen die in den Oktaederecken zusammenlaufenden Kanten = A, die in den Hexaederecken = B, die einzelen Kanten = C, so ist nach bekannten Gleichungen der Trigonometrie:

$$\cos. A = -\cos. z \cos. x + \cos. \gamma \sin. z \sin. x$$
$$\cos. B = -\cos. y \cos. x + \cos. \beta \sin. y \sin. x$$
$$\cos. C = -\cos. y \cos. z + \cos. \gamma \sin. y \sin. z$$

Setzt man in diese Formeln die entsprechenden Werthe der cos. und sin. von x, y und z (§. 85 und §. 86), und der cos. von α, β und γ, (§. 87) so erhält man:

$$\cos. A = -\frac{m^2 n^2}{n^2+m^2(n^2+1)}$$

$$\cos. B = -\frac{(1+n+m)\,mn}{n^2+m^2(n^2+1)}$$

$$\cos. C = -\frac{(2m^2-n)\,n}{n^2+m^2(n^2+1)}$$

Hiernach berechnen sich die Kanten der drey Varietäten des Pentagon-Ikositetraeders wie folgt:

Erste Varietät, in welcher $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$:

$$\cos. A = -\tfrac{9}{14},\ A = 130^\circ\ 0'\ 19''$$
$$\cos. B = -\tfrac{11}{14},\ B = 141^\circ\ 47'\ 12''$$
$$\cos. C = -\tfrac{11}{14},\ C = B$$

Zweyte Varietät, in welcher $m = 5$, $n = \frac{5}{3}$:

$$\cos. A = -\tfrac{25}{35},\ A = 135^\circ\ 35'\ 5''$$
$$\cos. B = -\tfrac{23}{35},\ B = 131^\circ\ 4'\ 56''$$
$$\cos\ C = -\tfrac{29}{35},\ C = 145^\circ\ 57'\ 8''$$

Dritte Varietät, in welcher $m = 4$, $n = 2$:

$$\cos. A = -\tfrac{16}{21},\ A = 139^\circ\ 37'\ 57''$$
$$\cos. B = -\tfrac{14}{21},\ B = 131^\circ\ 48'\ 37''$$
$$\cos. C = -\tfrac{15}{21},\ C = 135^\circ\ 35'\ 5''$$

b) Parallelflächig-semitesserale Gestalten.

§. 97.

Um endlich die Kanten der Dyakisdodekaeder und Pentagon-Dodekaeder zu berechnen, muss man zuvörderst erwägen, dass jede Fläche des Hexakisoktaeders mit drey Nachbarflächen zum Durchschnitte kommt, und nur nach einer Seite mit ihrer bleibenden Nebenfläche unverändert die ursprüngliche Kante behauptet, dass folglich nur die Kante z zurückbleibt, und ausserdem drey neue Kanten auftreten. Unter diesen wird sich aber ein Paar gleicher Kanten befinden, weil jede wachsende Fläche gegen ihre an demselben Hexaedereck gelegenen Nachbarflächen gleich geneigt ist, und folglich ihre Durchschnitte mit beyden Flächen gleiche Kanten hervorbringen. Diese Kanten werden übrigens völlig identisch mit jenen seyn, welche wir am Pentagon-Ikositetraeder mit B bezeichneten. Da nun die längeren der in den Oktaederecken zusammenlaufenden Kanten die bleibenden Kanten z sind, so sind nur noch die kürzeren Kanten zu berechnen. Sie seyen = r, so ist

$$\cos. r = - \cos.^2 \frac{z}{2} + \cos. v \sin.^2 \frac{z}{2}$$

$$= - \frac{n^2 + (n^2 - 1) m^2}{n^2 + (n^2 + 1) m^2}$$

§. 98.

Kanten der Dyakisdodekaeder und Pentagon-Dodekaeder.

Hiernach bestimmen sich die Kanten der beyden parallelflächig-semitesseralen Gestalten wie folgt:

1) Der Dyakisdodekaeder,

Erste Varietät, in welcher $m = 3$, $n = \frac{3}{2}$.

$\cos. r = - \frac{6}{14}$, $r = 115° 22' 37''$

Zweyte Varietät, in welcher $m = 5$, $n = \frac{5}{3}$,

$\cos. r = - \frac{17}{35}$, $r = 119° 3' 33{,}4''$

Dritte Varietät, in welcher $m = 4$, $n = 2$,

$\cos. r = - \frac{13}{21}$, $r = 128° 14' 48''$

Die Winkel B haben dieselben Werthe, wie im Pentagon-Ikositetraeder und die Winkel z sind dieselben, welche für die Hexakisoktaeder berechnet wurden.

2) Der Pentagon-Dodekaeder:

Wenn $m = \infty$, so verwandeln sich die Formeln des vorigen und 96sten § in folgende:

$$\cos. r = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\cos. z = - 1$$

$$\cos. B = -\frac{n}{n^2 + 1}$$

Die Kanten z verschwinden also, die beyden in ihnen zusammenstossenden Flächen fallen in eine Ebene und bilden ein Pentagon mit 4 gleichen Seiten. Die Kantenwinkel sind folgende:

Erste Varietät, in welcher $n = \frac{3}{2}$:

$\cos. r = -\frac{5}{13}$, $r = 112^\circ\ 37'\ 12''$

$\cos. B = -\frac{6}{13}$, $B = 117^\circ\ 29'\ 11''$

Zweyte Varietät, in welcher $n = 2$:

$\cos. r = -\frac{3}{5}$, $r = 126^\circ\ 52'\ 12''$

$\cos. B = -\frac{2}{5}$, $B = 113^\circ\ 34'\ 41''$

Dritte Varietät, in welcher $n = 3$:

$\cos. r = -\frac{4}{5}$, $r = 143^\circ\ 7'\ 48''$

$\cos. B = -\frac{3}{10}$, $B = 107^\circ\ 27'\ 27''$

Anmerkung. Gäbe es ein gleichwinkliges Pentagon-Dodekaeder, so müsste für dasselbe $n^2 - 1 = n$, folglich $n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ seyn; da nun bis jetzt für n nur rationale Werthe beobachtet wurden, und der rationale Charakter der Axencoefficienten sich überhaupt für die gesammten Krystallgestalten ohne Ausnahme bewährt hat, so ist es sehr unwahrscheinlich, dass jemals das regelmässige Pentagon-Dodekaeder der Geometrie in der Natur beobachtet werden sollte.

§. 99.

Coefficienten der Nebenaxen.

Zum Schlusse dieses Capitels mögen die allgemeinen Formeln für die Coefficienten der Nebenaxen der homoedrischen Gestalten folgen, da solche von häufiger Anwendung zumal bey der Zeichnung der Gestalten sind, welche ein sehr verwickeltes Geschäft seyn würde, wenn man alle die zur Ableitung erforderlichen Linien construiren wollte.

Allgemein sind die Coefficienten der Nebenaxen für mOn folgende:

Der Nebenaxen der zweyten Art, deren Querschnitte

hexagonal $= \dfrac{3mn}{mn + m + n}$

Der Nebenaxen der dritten Art, deren Querschnitte

rhombisch $= \dfrac{2n}{n + 1}$

Berechnet man hiernach die Werthe derselben für die bisher beobachteten Varietäten der tesseralen Gestalten, so erhält man folgende Tafel:

Gestalten	*Coefficienten der Axen.* zweyter Art	dritter Art.
O	1	1
$\frac{3}{2}O$	$\frac{9}{8}$	1
$2O$	$\frac{6}{5}$	1
∞O	$\frac{3}{2}$	1
$3O\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
$5O\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
$4O2$	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{3}$
$2O2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
$3O3$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{2}$
$\infty O\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\infty O2$	2	$\frac{4}{3}$
$\infty O3$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\infty O \infty$	3	2

Was die Flächenwinkel der tesseralen und semitesseralen Gestalten betrifft, so lassen sich dieselben theils vermittels der oben in §. 87 aufgestellten, theils vermittels anderer leicht zu entwickelnder Formeln berechnen. Eine vollständige Aufzählung derselben findet man in Mohs Grundriss I, S. 61 — 80.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des Tesseral-Systemes.

§. 100.

Eintheilung und Bezeichnung.

Da sich die Gestalten überhaupt nur in derjenigen Stellung combiniren können, in welcher sie gegenseitig auseinander abgeleitet werden (§. 35), und da die semitesseralen gewöhnlich nur mit ihres Gleichen oder mit solchen Gestalten erscheinen, welche der Hemiedrie unfähig sind, so wird sich die Lehre von den Combinationen des Tesseral-Systemes unmittelbar auf die Lehre von der Ableitung gründen und in zwey Abschnitte theilen, von denen der eine die tesseralen, der andere die semitesseralen Combinationen zum Gegenstande hat. — Die Bezeichnung der Combinationen wird dadurch erhalten, dass man die Zeichen der in ihnen enthaltenen Gestalten durch Interpunctionen getrennt neben einander schreibt, wobey zu beobachten ist, dass die Zeichen derjenigen Gestalten, deren Flächen vorherrschen und somit die Hauptform der Combination bestimmen, den Zeichen der untergeordneten Gestalten vorangesetzt werden (§. 37). Da eine und dieselbe Combination durch das reciproke Vorherrschen dieser oder jener Gestalt eine ganz andre Physiognomie erhält, so ist dieser Unterschied der Zeichenstellung sehr wichtig, und keinesweges zu vernachlässigen. So bedeutet z. B. $O.\ \infty O \infty.$ ein Oktaeder mit abgestumpften Ecken, während $\infty O \infty . O.$ ein Hexaeder mit dergleichen Ecken bedeutet. Sind beyde Gestalten im Gleichgewichte, so entsteht eine Art von neutraler Zwischengestalt, deren Zeichen eigentlich $\left\{\begin{matrix}\infty O \infty. \\ O.\end{matrix}\right.$ seyn würde, wofür sich aber füglich vorschlagen lassen möchte, beyde Zeichen neben einander zu schreiben, und statt des Punctes nur ein Komma zur Interpunction zu gebrauchen (§. 37), weil sich dann ein Mittelgrad des Vorherrschens z. B. von $\infty O \infty$ zwischen $\infty O \infty . O$ und $\infty O \infty , O$ durch $\infty O \infty ; O$ ausdrücken liesse *). Durch dieses einfache Hülfsmittel vermehrt sich die Brauchbarkeit der Bezeichnung um ein Bedeutendes, indem nun jedes gegebene Zeichen das Bild der bezeichneten Combination in dem Grade repräsentirt, dass der Leser des Zeichens jederzeit in Stand gesetzt wird, sich den individuellen Charakter derselben zu vergegenwärtigen, was ein sehr wesentliches Bedürfniss zu seyn scheint.

*) Da der Punct mehr als das Semikolon, und dieses wiederum mehr als das Komma trennt, so ist es ganz natürlich, die Zeichen von Gestalten, welche sich gewissermaasen im Gleichgewichte befinden, weil sie doch einmal getrennt geschrieben werden müssen, durch das am wenigsten trennende Zeichen abzusondern, und immer stärkere Interpunctionen zu gebrauchen, je grösser das Uebergewicht der einen Gestalt gegen die andere ist.

A) TESSERALE COMBINATIONEN.

§. 101.

Combinationen des Oktaeders mit den übrigen Gestalten.

Die tesseralen Combinationen werden sich am füglichsten so betrachten lassen, dass wir alle Binionen der sieben homoedrischen Gestalten besonders, und zwar jede Binion mit beyderley Stellung ihrer Zeichen durchgehen. Die drey- und mehr-zähligen Combinationen bedürfen keiner allgemeinen Betrachtung, da sie sich jederzeit in binäre Combinationen zerfällen lassen. Wir betrachten zuerst die Combinationen des Oktaeders mit den übrigen sechs Gestalten.

1) O. 2O, erscheint als O mit zugeschärften Kanten.
2) O. ∞O, erscheint als O mit abgestumpften Kanten.
3) O. mOn, erscheint als O mit achtflächig zugespitzten Ecken.
4) O. mOm, erscheint als O mit vierflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Oktaederflächen aufgesetzt.
5) O. ∞On, erscheint als O mit vierflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Oktaederkanten aufgesetzt.
6) O. ∞O ∞, erscheint als O mit abgestumpften Ecken.

§. 102.

Combinationen der Triakisoktaeder.

1) mO. O, erscheint als mO mit abgestumpften trigonalen Ecken.

2) $mO.\infty O$, erscheint als mO mit abgestumpften Oktaederkanten.

3) $mO.mOn$, erscheint als mO mit achtflächig zugespitzten Oktaederecken.

4) $mO.\ mOm$, erscheint als mO mit vierflächig zugespitzten Oktaederecken, die Zuspitzungsflächen auf die unsymmetrischen Kanten aufgesetzt.

5) $mO.\ \infty On$, erscheint als mO mit vierflächig zugespitzten Oktaederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Oktaederkanten aufgesetzt.

6) $mO.\ \infty O\infty$, erscheint als mO mit abgestumpften Oktaederecken.

§. 103.

Combinationen des Rhomben-Dodekaeders.

1) $\infty O.O$, erscheint als ∞O mit abgestumpften trigonalen Ecken.

2) $\infty O.2O$, erscheint als ∞O mit zugespitzten trigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

3) $\infty O.mOn$;

$\infty O.3O\frac{3}{2}$, erscheint als ∞O mit zugeschärften Kanten, die beyden übrigen Varietäten aber bilden nur 8flächige Zuspitzungen der tetragonalen oder Oktaederecke von ∞O.

4) $\infty O.mOm$;

$\infty O.2O2$, erscheint als ∞O mit abgestumpften Kanten; $\infty O.3O3$ dagegen als ∞O mit vierflächig zugespitzten tetragonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gesetzt.

5) $\infty O . \infty On$, erscheint jederzeit als ∞O mit vierflächig zugespitzten tetragonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

6) $\infty O . \infty O \infty$, erscheint als ∞O mit abgestumpften tetragonalen Ecken.

§. 104.

Combinationen des Hexakisoktaeders.

1) $mOn . O$, erscheint als mOn mit abgestumpften ditrigonalen oder hexagonalen Ecken.

2) $mOn . 2O$, erscheint als mOn mit dreyflächig zugespitzten ditrigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die kürzesten Kanten gesetzt.

3) $mOn . \infty O$;

$3O\frac{3}{2} . \infty O$, erscheint als $3O\frac{3}{2}$ mit abgestumpften rhombischen Ecken, so dass die Combinationskanten den längsten Kanten von $3O\frac{3}{2}$ parallel laufen. Bey den beyden übrigen Varietäten findet dieser Parallelismus nicht Statt.

4) $mOn . mOm$;

$3O\frac{3}{2} . 2O2$, erscheint als $3O\frac{3}{2}$ mit abgestumpften längsten Kanten. $4O2 . 2O2$ erscheint als $4O2$ mit dreyflächig zugespitzten ditrigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die längsten Kanten gesetzt, und die Combinationskanten den mittlern Kanten von $4O2$ parallel. $5O\frac{5}{3} . 2O2$ ercheint als $5O\frac{5}{3}$ mit dreyflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen ebenfalls auf die längsten Kanten gesetzt, allein ohne den Kantenparallelismus der vorigen Combination. Alle übrigen Combinationen erscheinen als mOn mit vierflächig zugespitzten ditetragonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die längsten Kanten aufgesetzt.

5) mOn. ∞On;

$3O\frac{3}{2}.\infty O\frac{3}{2}$ und $4O2.\infty O2$ erscheinen als $3O\frac{3}{2}$ und $4O2$ mit abgestumpften mittlern oder Oktaederkanten. $5O\frac{5}{3}.\infty O\frac{3}{2}$ und $4O2.\infty O\frac{3}{2}$ erscheinen als mOn mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die längeren Kanten dieser Ecke aufgesetzt. Alle übrigen Combinationen erscheinen als mOn mit vierflächig zugespitzten ditetragonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die kürzeren Kanten dieser Ecke aufgesetzt.

6) mOn. ∞O ∞, erscheint als mOn mit abgestumpften ditetragonalen Ecken.

§. 105.

Combinationen des Trapez-Ikositetraeders.

1) mOm.O, erscheint als mOm mit abgestumpften trigonalen Ecken.

2) mOm.2O, erscheint als mOm mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die kürzeren Kanten gesetzt.

3) mOm. ∞O.

4) mOm.mOn;

$2O2.3O\frac{3}{2}$, erscheint als 2O2 mit vierflächig zugespitzten rhombischen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so aufgesetzt, dass die Combinationskanten je zweyer auf dieselbe Fläche aufgesetzten Zuspitzungsflächen parallel sind; $2O2.4O2$ erscheint als $2O2$ mit zugeschärften längeren Kanten. $2O2.5O\frac{5}{3}$ erscheint als $2O2$ mit vierflächig zugespitzten rhombischen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so gesetzt, dass der Parallelismus der Combinationskanten nicht Statt findet. $3O3$ erscheint mit allen drey Hexakisoktaedern als $3O3$ mit sechsflächig zugespitzten trigonalen Ecken.

5) $mOm. \infty On$;

$2O2. \infty O2$ und $3O3. \infty O3$ erscheinen als mOm mit abgestumpften längeren Kanten; $3O3. \infty O$ erscheint als $3O3$ mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die längeren Kanten so aufgesetzt, dass je zwey Combinationskanten parallel werden; $2O2. \infty O\frac{3}{2}$ erscheint ebenfalls als $2O2$ mit zugeschärften rhombischen Ecken, $2O2. \infty O3$ als $2O2$ mit zugespitzten tetragonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gesetzt; $3O3. \infty O2$ als $3O3$ mit zugeschärften rhombischen Ecken.

6) $mOm. \infty O \infty$, erscheint als mOm mit abgestumpften tetragonalen Ecken.

§. 106.

Combinationen des Tetrakishexaeders.

1) $\infty On.O$, erscheint als ∞On mit abgestumpften Hexaederecken.

2) $\infty On. \infty O$, erscheint als ∞On mit abgestumpften Hexaederkanten.

3) $\infty On.2O$, erscheint als ∞On mit dreyflächig zugespitzten Hexaederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Hexaederkanten aufgesetzt.

4) $\infty O n . m O n$;

$\infty O\frac{3}{2}.3O\frac{3}{2}$ und $\infty O2.\ 4O2$ erscheinen als ∞On mit sechsflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so aufgesetzt, dass je zwey auf derselben Fläche aufgesetzte parallele Combinationskanten hervorbringen. Alle übrigen Combinationen erscheinen als ∞On mit sechsflächig zugespitzten Ecken.

5) $\infty On.mOm$;

$\infty O\frac{3}{2}.3O3$, erscheint als $\infty O\frac{3}{2}$ mit abgestumpften kürzeren Kanten. $\infty O2.2O2$ und $\infty O3.3O3$ erscheinen als ∞On mit dreyflächig zugespitzten Hexaederecken, die Zuspitzungsflächen auf die kürzeren Kanten so aufgesetzt, dass je zwey auf einer Fläche liegende Combinationskanten parallel sind. Alle übrigen Combinationen erscheinen als ∞On mit dreyflächig zugespitzten Hexaederecken ohne jenen Parallelismus der Comb. Kanten.

6) $\infty On.\ \infty O\infty$, erscheint als ∞On mit abgestumpften Oktaederecken.

7) $\infty On.\ \infty On'$, erscheint als ∞On mit zugeschärften Hexaederkanten, oder vierflächig zugespitzten Oktaederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt, je nachdem $n' < $ oder $> n$.

§. 107.

Combinationen des Hexaeders.

1) $\infty O\infty.O$, erscheint als $\infty O\infty$ mit abgestumpften Ecken.

2) $\infty O\infty.2O$, erscheint als $\infty O\infty$ mit dreyflächig

zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gesetzt.

3) $\infty O \infty . \infty O$, erscheint als $\infty O \infty$ mit abgestumpften Kanten.

4) $\infty O \infty . mOn$, erscheint als $\infty O \infty$ mit sechsflächig zugespitzten Ecken.

5) $\infty O \infty . mOm$, erscheint als $\infty O \infty$ mit dreyflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

6) $\infty O \infty . \infty On$, erscheint als $\infty O \infty$ mit zugeschärften Kanten.

B) SEMITESSERALE COMBINATIONEN.

§. 108.

Dass in einer Combination semitesserale Gestalten auftreten, lässt sich jederzeit mit Bestimmtheit behaupten, sobald sie in normaler und verwendeter Stellung einen verschiedenen Anblick gewährt; diejenigen Flächen, welche diese Verschiedenheit begründen, sind dann gewöhnlich Flächen semitesseraler Gestalten. Bis jetzt hat sich das Gesetz bewährt, dass die geneigtflächigen und parallelflächigen semitesseralen Gestalten nie zugleich als Glieder einer und derselben Krystallreihe erscheinen, sondern dass entweder diese oder jene theils allein, theils in Combination mit tesseralen Gestalten auftreten. Die Natur scheint also beyderley semitesserale Gestalten als wesentlich unterschiedene von einander getrennt zu halten. Da nun das Pentagon-Ikositetraeder keine reale Gestalt ist, so werden wir die übrigen viergeneigtflächigen Gestalten und die beyden parallelflächigen Gestalten besonders zu betrachten, dagegen die (allerdings möglichen, aber nicht wirklich vorkommenden) Combinationen zwischen beyderley Gestalten ganz zu vernachlässigen haben.

a) Geneigtflächig-semitesserale Combinationen.

§. 109.

Combinationen des Tetraeders.

1) $\frac{O}{2} \cdot -\frac{O}{2}$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit abgestumpften Ecken.

2) $\frac{O}{2} \cdot \frac{2O}{2}$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit scharf, $\frac{O}{2} \cdot -\frac{2O}{2}$, als $\frac{O}{2}$ mit sehr stumpf dreyflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

3) $\frac{O}{2} \cdot \infty O$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit stumpf dreyflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

4) $\frac{O}{2} \cdot \frac{mOn}{2}$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit scharf, $\frac{O}{2} \cdot -\frac{mOn}{2}$, als $\frac{O}{2}$ mit sehr stumpf sechsflächig zugespitzten Ecken.

5) $\frac{O}{2} \cdot \frac{mOm}{2}$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit zugeschärften Kanten, $\frac{O}{2} \cdot -\frac{mOm}{2}$ dagegen als $\frac{O}{2}$ mit dreyflächig zuge-

spitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gesetzt.

6) $\frac{O}{2} \cdot \infty O \infty$, erscheint als $\frac{O}{2}$ mit abgestumpften Kanten.

§. 110.

Combinationen des Trapez-Dodekaeders.

1) $\frac{2O}{2} \cdot \frac{O}{2}$, erscheint als $\frac{2O}{2}$ mit abgestumpften stumpferen, $\frac{2O}{2} \cdot -\frac{O}{2}$ als $\frac{2O}{2}$ mit abgestumpften schärferen trigonalen Ecken.

2) $\frac{2O}{2} \cdot -\frac{2O}{2}$, erscheint als $\frac{2O}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten schärferen trigonalen Ecken, die Zuspfl. auf die Flächen gesetzt.

3) $\frac{2O}{2} \cdot \infty O$, wie no. 2.

4) $\frac{2O}{2} \cdot \frac{mOn}{2}$, erscheint als $\frac{2O}{2}$ mit scharf, $\frac{2O}{2} \cdot -\frac{mOn}{2}$ als $\frac{2O}{2}$ mit stumpf sechsflächig zugespitzten Tetraederecken.

5) $\frac{2O}{2} \cdot \frac{mOm}{2}$, erscheint als $\frac{2O}{2}$ mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zschfl. auf die stumpferen Kanten gesetzt; $\frac{2O}{2} - \frac{mOn}{2}$, als $\frac{2O}{2}$ mit dreyflächig

zugespitzten Tetraederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gesetzt.

6) $\frac{2O}{2}.\infty O\infty$, erscheint als $\frac{2O}{2}$ mit abgestumpften rhombischen Ecken.

§. 111.

Combinationen des Hexakistetraeders.

1) $\frac{mOn}{2}.\frac{O}{2}$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften stumpferen, $\frac{mOn}{2}.-\frac{O}{2}$ als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften schärferen ditrigonalen Ecken.

2) $\frac{mOn}{2}.\frac{2O}{2}$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten stumpferen, $\frac{mOn}{2}.-\frac{2O}{2}$ als $\frac{mOn}{2}$ mit eben so zugespitzten schärferen ditrigonalen Kanten, die Zuspitzungsflächen in beyden Fällen auf die längsten Kanten gesetzt.

3) $\frac{mOn}{2}.\infty O$, wie der zweyte Fall von no. 2.

4) $\frac{mOn}{2}.-\frac{mOn}{2}$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit sechsflächig zugespitzten Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

5) $\frac{mOn}{2}.\frac{mOm}{2}$;

$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}.\frac{2O2}{2}$, erscheint als $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ mit abgestumpften kürzesten Kanten. $\frac{4O2}{2}$. $\frac{2O2}{2}$ und $\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$. 2O2 erscheinen als $\frac{mOn}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten stumpferen ditrigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die kürzesten Kanten gesetzt; alle übrigen als $\frac{mOn}{2}$ mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zuschärfungsflächen auf die kürzesten Kanten gesetzt.

Sämmtliche $\frac{mOn}{2}$. $-\frac{mOm}{2}$ dagegen erscheinen als $\frac{mOn}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten Tetraederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Tetraederkanten gesetzt.

6) $\frac{mOn}{2}$. ∞O∞, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften rhombischen Ecken.

§. 112.

Combinationen des Trigon-Dodekaeders.

1) $\frac{mOm}{2} . \underline{+} \frac{O}{2}$, erscheint als $\frac{mOm}{2}$ mit abgestumpften trigonalen oder ditrigonalen Ecken.

2) $\frac{mOm}{2} . \underline{+} \frac{O}{2}$, erscheint als $\frac{mOm}{2}$ mit dreyflächig scharf oder stumpf zugespitzten ditrigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die stumpferen Kanten gesetzt.

3) $\frac{mOm}{2}$ ∞O, erscheint als $\frac{mOm}{2}$ mit stumpf zu-

gespitzten ditrigonalen Ecken; Zuspitzungsflächen wie in no. 2.

4) $\frac{mOm}{2}$. $\frac{mOn}{2}$;

$\frac{2O2}{2}$. $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$, erscheint als $\frac{2O2}{2}$ mit sechsflächig zugespitzten ditrigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so gesetzt, dass je zwey auf derselben Fläche befindliche Comb. Kanten parallel laufen; die übrigen Combinationen von $\frac{2O2}{2}$ erscheinen als $\frac{2O2}{2}$ mit sechsflächig scharfzugespitzten ditrigonalen Ecken ohne Kanten-Parallelismus; $\frac{3O3}{2}$. $\frac{mOn}{2}$ aber jederzeit als $\frac{3O3}{2}$ mit sechsflächig zugespitzten trigonalen Ecken. $\frac{mOm}{2}$. $-\frac{mOn}{2}$ allgemein als $\frac{mOm}{2}$ mit sechsflächig sehr stumpf zugespitzten Tetraederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen gesetzt.

5) $\frac{mOn}{2}$. $-\frac{mOm}{2}$, erscheint als $\frac{mOm}{2}$ mit dreyflächig stumpf zugespitzten Tetraederecken, die Zuspitzungsflächen auf die Tetraederkanten gesetzt.

6) $\frac{mOm}{2}$. $\infty O \infty$, erscheint als $\frac{mOm}{2}$ mit abgestumpften Tetraederkanten.

b) Parallelflächig-semitesserale Combinationen.

§. 113.

Combinationen des Pentagon-Dodekaeders.

1) $\frac{\infty On}{2}$. O, erscheint als $\frac{\infty On}{2}$ mit abgestumpften trigonalen Ecken.

$\frac{\infty On}{2}$, O erscheint als eine von 8 gleichseitigen und 12 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalt, und wurde sonst für eine einfache Gestalt, für das Ikosaeder der Geometrie gehalten.

2) $\frac{\infty On}{2}$. 2O, erscheint als $\frac{\infty On}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten trigonalen Ecken.

3) $\frac{\infty On}{2}$. ∞O, erscheint als $\frac{\infty On}{2}$ mit abgestumpften unregelmässigen Ecken.

4) $\frac{\infty On}{2}$. $\frac{mOn}{2}$;

$\frac{\infty O2}{2}$. $\frac{4O2}{2}$ und $\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$. $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ erscheinen als $\frac{\infty On}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten trigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so aufgesetzt, dass die Combinationskanten auf den charakteristischen (§. 54) Kantenlinien rechtwinklig sind.

$\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$. $\frac{4O2}{2}$ und $\frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$. $\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$ erscheinen als $\frac{\infty On}{2}$

mit zugeschärften unregelmässigen Ecken, die Zuschärfungsflächen auf die Flächen gesetzt.

$\frac{\infty O 2}{2} . - \frac{3O\frac{3}{2}}{3}$, erscheint als $\frac{\infty O 2}{2}$ mit abgestumpften unsymmetrischen Kanten.

5) $\frac{\infty O n}{2} . mOm$;

$\frac{\infty O 2}{2} \cdot 2O2$ und $\frac{\infty O 3}{2} \cdot 3O3$ erscheinen als $\frac{\infty O n}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten trigonalen Ecken, die Zuspfl. auf die Flächen so aufgesetzt, dass die Combinationskanten auf den charakteristischen Kantenlinien rechtwinklig sind.

6) $\frac{\infty O n}{2} \cdot \infty O \infty$, erscheint als $\frac{\infty O n}{2}$ mit abgestumpften symmetrischen Kanten.

§. 114.

Combinationen des Dyakisdodekaeders.

1) $\frac{mOn}{2} \cdot O$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften trigonalen Ecken.

2) $\frac{mOn}{2}$ 2O, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit dreyflächig zugespitzten trigonalen Ecken.

3) $\frac{mOn}{2} \cdot \infty O$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften unregelmässigen Ecken.

4) $\frac{mOn}{2} \cdot \frac{\infty On}{2}$;

$\frac{3O\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{4O2}{2} \cdot \frac{\infty O2}{2}$ erscheinen als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften längeren Kanten.

$\frac{4O2}{2} \cdot \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$ und $\frac{5O\frac{5}{3}}{2} \cdot \frac{\infty O\frac{3}{2}}{2}$ erscheinen als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften unregelmässigen Ecken, die Abstfl. auf die längeren Kanten aufgesetzt.

$\frac{3O\frac{3}{2}}{2} \cdot - \frac{\infty O2}{2}$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit abgestumpften unregelmässigen Ecken, die Abstfl. auf die längeren Kanten so aufgesetzt, dass je zwey auf einer Fläche gelegene Combinationskanten einander parallel laufen.

$\frac{3O\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{\infty O2}{2}$ und $\frac{5O\frac{5}{3}}{2} \cdot \frac{\infty O2}{2}$, $\frac{3O\frac{3}{2}}{2} \cdot \frac{\infty O3}{2}$ und $\frac{5O\frac{5}{3}}{2} \cdot \frac{\infty O3}{2}$ erscheinen als $\frac{mOn}{2}$ mit zugeschärften rhombischen Ecken, die Zuschärfungsflächen auf die längeren Kanten gesetzt.

5) $\frac{mOn}{2} \cdot mOm$;

$\frac{4O2}{2} \cdot 2O2$, erscheint als $2O2$ mit dreyflächig zugespitzten trigonalen Ecken, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen so aufgesetzt, dass die Combinationskanten den längeren Kanten parallel laufen.

$\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\cdot 3O3$, erscheint als $\frac{mOn}{2}$ mit zugeschärften kürzeren Kanten, die Zuspitzungsflächen auf die Flächen aufgesetzt.

6) $\frac{mOn}{2}\cdot \infty O \infty$, erscheint als $\frac{mOn}{2}\cdot$ mit abgestumpften rhombischen Ecken.

ZWEITER ABSCHNITT.

VOM TETRAGONAL-SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Tetragonal-Systemes.

§. 115.

Umfang und Name des Systemes.

Das Tetragonal-System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Rechtwinkligkeit und Gleichheit zweyer Dimensionen gegen eine ungleiche ausgesprochen ist, begreift alle trimetrischen, orthobasischen, einaxigen Gestalten mit tetragonalen Querschnitten, und keine andern.

Allerdings giebt es Gestalten im Tetragonal-Systeme, an welchen auch rhombische Querschnitte erscheinen; allein diese sind durch das Verhältniss der Hemiedrie gleichsam secundär hervorgerufen, und werden durch den jederzeit vollkommen tetragonalen Mittelquerschnitt nach §. 10 als pseudorhombische Querschnitte erkannt.

Den hier gebrauchten Namen für dieses System verdanken wir Breithaupt; Weiss nennt es das vier-gliedrige System, weil jede seiner Gestalten gleichsam in vier gleiche und ähnliche Glieder zerfällt; Mohs das quadratopyramidale*) oder pyramidale schlechthin, weil in ihm die Pyramiden häufiger als in anderen Systemen erscheinen. Der von Hausmann sehr wohl gewählte Name monodimetrisches System**) bezieht sich auf die Gleichheit zweyer Dimensionen gegen eine ungleiche.

§. 116.

Arten der tetragonalen Gestalten.

Die einfachen Gestalten des Tetragonal-Systemes werden nach gewissen Verhältnissen der Figur ihrer Flächen oder ihrer allgemeinen Umrisse, auch nach dem Namen ihres Systemes oder nach der Figur ihres Mittelquerschnittes benannt, und in folgende Arten unterschieden:

1) Tetragonale Pyramiden.
2) Ditetragonale Pyramiden.
3) Tetragonale Skalenoeder.
4) Tetragonale Trapezoeder.
5) Tetragonale Sphenoeder.

Von jeder dieser Arten ist der Möglichkeit nach eine Unzahl von Varietäten gegeben, indem der unveränderliche Grundcharakter des Systemes dennoch un-

---

*) A. a. O. I S. 173.

**) Hausmann Untersuchungen über die Formen der leblosen Natur I S. 273.

endlich viele Verhältnisse der Coordinaten zulässt. Ausserdem giebt es noch tetragonale und ditetragonale Prismen, welche aber an und für sich nicht sowohl Gestalten, d. h. ringsum geschlossene stereometrische Figuren, sondern nur Inbegriffe gleichwerthiger und der Axe paralleler Flächen darstellen, von denen die Ableitung lehrt, dass sie nur als die Gränzgestalten der tetragonalen und ditetragonalen Pyramiden anzusehen sind, weshalb sie nicht wohl neben diesen als besondere selbstständige Gestalten aufgezählt werden können.

§. 117.

Tetragonale Pyramiden. (*Breithaupt.*)

Syn. Viergliedriges Oktaeder, Weiss.
Gleichschenklige vierseitige Pyramide, Mohs.
Quadratoktaeder, Bernhardi, Weiss, Hausmann.

Die tetragonalen Pyramiden oder Dipyramiden (*tab. II. Fig. 15.*) sind von 8 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelquerschnitt ein Hauptschnitt ist; sie haben 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind zweyerley: 8, (nämlich 4 obere und 4 untere) Polkanten (x), 4 symmetrische Mittelkanten (z).

Die Ecke sind ebenfalls zweyerley: 2 tetragonale Polecke oder Endspitzen (*vertices, sommets*), und 4 rhombische Mittelecke oder Ecke schlechthin.

Die Querschnitte sind Quadrate, die Axen-Hauptschnitte Rhomben.

Zusatz. Von diesen Gestalten giebt es drey, ihrer Stellung nach wesentlich zu unterscheidende Vorkommnisse, indem einige in normaler, andere in diagonaler und noch andere in abnormer, d. h. weder in normaler noch in diagonaler, sondern in irgend einer mittleren Stellung auftreten. In den ersteren laufen die Diagonalen durch je zwey gegenüberliegende Ecke, in den anderen durch die Mittelpuncte, in den dritten durch andere Puncte je zweyer gegenüberliegender Mittelkanten.

§. 118.

Ditetragonale Pyramiden. (*Breithaupt.*)

Syn. 4 und 4kantiges Dioktaeder, Weiss.
Ungleichschenklige achtseitige Pyramide, Mohs.
Doppelt achtseitige Pyramide. Hausmann.

Die ditetragonalen Pyramiden oder Dipyramiden (*tab. II. Fig. 16.*) sind von 16 ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelquerschnitt ein Hauptschnitt ist; sie haben 24 Kanten und 10 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: 8 kürzere, stumpfere (y), 8 längere, schärfere Polkanten (x), und 8 Mittelkanten (z).

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: 2 ditetragonale Polecke, 4 stumpfere, und 4 spitzere rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind Ditetragone, die Axen-Hauptschnitte Rhomben.

Diejenigen Polkanten und Mittelecke, welche in den durch die Diagonalen der Basis gehenden Hauptschnitten liegen, nennen wir normale, die zwischenliegenden diagonale Polkanten und Mittelecke.

Die Flächen der ditetragonalen Pyramiden grup-p'ren sich in 8 Flächenpaare.

§. 119.

Tetragonale Skalenoeder. (*Breithaupt.*)

Vergl. Mohs. I. S. 232.

Die tetragonalen Skalenoeder (*tab. II. Fig. 17.*) sind von 8 Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist; sie haben 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: 4 längere, stumpfere (y'), 4 kürzere, schärfere Polkanten (x'), und 4 im Zickzack um die Gestalt laufende Mittelkanten (z').

Die Ecke sind zweyerley: 2 rhombische Polecke, und vier unregelmässig-vierkantige Mittelecke.

Die Querschnitte sind scheinbar rhombisch, der Mittelquerschnitt ein Ditetragon; die Hauptschnitte symmetrische Trapezoide.

Die Flächen dieser Gestalten gruppiren sich in 4 zweyzählige Flächensysteme, oder Flächenpaare.

Der Vorkommnisse hinsichtlich der Stellung giebt es hier ebenfalls mehre, von denen zumal die in normaler und diagonaler Stellung zu merken sind.

§. 120.

Tetragonale Trapezoeder.

Mohs I. S. 231.

Die tetragonalen Trapezoeder (*tab. II. Fig. 18.*) sind von 8 Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren

Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist; sie haben 16 Kanten und 10 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: 8 Polkanten (x'), 4 kürzere, schärfere (z'), und 4 längere, stumpfere (z''), abwechselnd verbundene, im Zickzack um die Gestalt laufende Mittelkanten.

Die Ecke sind zweyerley: 2 tetragonale Polecke, und 8 unregelmässig-dreykantige Mittelecke.

Die Querschnitte sind tetragonal, meist Quadrate; der Mittelquerschnitt ein Ditetragon; die Hauptschnitte sind symmetrische Trapezoide.

Von jeder dieser Gestalten giebt es zwey, in Bezug auf die Grösse ihrer Begränzungselemente gleiche und ähnliche, allein in Bezug auf deren Lage wie rechts und links unterschiedene Varietäten. Die eine ist daher allerdings das Ebenbild der andern, verhält sich jedoch so zu ihr, wie ein rechter Handschuh zu einem linken, oder wie das Spiegelbild zum wirklichem Bilde.

§. 121.

Tetragonale Sphenoeder. (*Breithaupt.*)

Mohs, I. S. 231.

Die tetragonalen Sphenoeder (*tab. II. Fig. 19.*) sind von 4 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist; sie haben 6 Kanten und 4 Ecke.

Die Kanten sind zweyerley: 2 symmetrische Endkanten, und 4 unsymmetrische Seitenkanten.

Die Ecke sind nur einerley, unregelmässig-dreykantig; die Pole fallen in die Mitten der symmetrischen Kanten.

Die Querschnitte sind scheinbar rhombisch, jedoch der Mittelquerschnitt ein Quadrat. Hauptschnitte fehlen.

An diesen Gestalten sind ebenfalls die beyderley Vorkommnisse der normalen und verwendeten Stellung zu unterscheiden

§. 122.

Symmetrie der einfachen Gestalten.

Dass auch im Tetragonal-Systeme das Verhältniss der Hemiedrie Statt finde, lehrt uns die Betrachtung der Symmetrie-Verhältnisse der abgehandelten Gestalten. Die Kriterien für das Vorhandenseyn der Hemiedrie sind: 1) die Abwesenheit des Flächen-Parallelismus als eines allgemeinen Symmetrieverhältnisses sämmtlicher homoedrischer Gestalten; 2) die unsymmetrische Vertheilung der Begränzungselemente bey normaler Stellung der Gestalt; 3) Verschiedenheit der Physiognomie einer und derselben Gestalt in normaler und verwendeter Stellung, welches Kriterium jedoch nur für das Tesseral-Tetragonal- und Hexagonal-System Gültigkeit hat. Prüfen wir nun die Gestalten des Tetragonal-Systemes nach diesen Merkmalen, so ergiebt sich, dass nur ein Theil der tetragonalen und die ditetragonalen Pyramiden als homoedrische, alle übrigen Gestalten dagegen als hemiedrische Gestalten zu betrachten sind.

§. 123.

Hemiedrische Gestalten; Uebersicht.

Zuvörderst ist es ausser allem Zweifel, dass die Sphenoeder, Skalenoeder und Trapezoeder hemiedrische, und zwar geneigtflächig-hemiedrische Gestalten sind, da für keine ihrer Flächen eine Gegenfläche vorhanden ist. Dass aber die in abnormer Stellung befindlichen tetragonalen Pyramiden, obwohl in ihnen Flächenparallelismus vorhanden ist, dennoch hemiedrische, und folglich parallelflächig-hemiedrische Gestalten sind, folgt aus dem zweyten der im vorigen §. angegebenen Kriterien. Demnach erhalten wir folgende allgemeine Uebersicht der Gestalten des Tetragonal-Systemes rücksichtlich der Verhältnisse der Homoedrie uud Hemiedrie:

A) HOMOEDRISCHE GESTALTEN

1) Tetragonale Pyramiden in normaler und diagonaler Stellung.

2) Ditetragonale Pyramiden.

B) HEMIEDRISGHE GESTALTEN

a) *Parallelflächige*

1) Tetragonale Pyramiden in abnormer Stellung.

b) *Geneigtflächige*

1) Tetragonale Skalenoeder.

2) Tetragonale Trapezoeder.

3) Tetragonale Sphenoeder.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des Tetragonal-Systemes.

A) HOMOEDRISCHE GESTALTEN.

§. 124.

Grundgestalt.

Zur Grundgestalt des Tetragonal-Systemes muss nach §. 23 eine tetragonale Pyramide in normaler Stellung erwählt werden. Da wir aber weder eine besondere, von numerisch bestimmten Dimensionen, noch den allgemeinen Begriff *in abstracto* zu Grunde legen können, indem jenes mit der Allgemeinheit der Darstellung, dieses mit der Möglichkeit geometrischer Construction unverträglich seyn würde, so wählen wir irgend eine beliebige, von allgemein ausgedrücktem, unbestimmtem Verhältnisse der Dimensionen *), bezeichnen sie mit P und das Verhältniss der Halbaxe zur Halbdiagonale mit a : b.

---

*) Gewissermaassen ein Schema der Einbildungskraft.

§. 125.

Hauptreihe der tetragonalen Pyramiden.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe tetragonaler Pyramiden von derselben Basis und Stellung ableiten.

Man setze zu dem Ende den Werth von a veränderlich, während b constant bleibt, gebe nach einander dem a verschiedene Werthe, welche theils $>$ a theils $<$ a seyn können, und lege durch die Mittelkanten von P und die Endpuncte der so verlängerten oder verkürzten Axe Ebenen, so wird für jeden besondern Werth von a eine andere tetragonale Pyramide zum Vorschein kommen, welche nach Maassgabe jenes Werthes spitzer oder flacher als P seyn, jederzeit aber dieselbe Basis und Stellung haben wird. Nun lässt sich jeder andere Werth von a allgemein durch ma, als ein Multiplum oder Submultiplum von a, und folglich das Verhältniss der Dimensionen jeder abgeleiteten Pyramide durch ma: b darstellen. Wenn also das Zeichen der Grundgestalt, in welcher Diagonale: Axe $=$ b: a, $=$ P ist, so wird das Zeichen der abgeleiteten Pyramide, in welcher Diagonale: Axe $=$ b: ma am zweckmässigsten durch mP ausgedrückt werden. Da nun m einerseits $<$ 1, anderseits $>$ 1, die beyderseitigen Gränzen seiner möglichen Werthe aber o und ∞ sind, so erhalten wir folgende Reihe von Pyramiden;

$$oP \ldots\ldots mP \ldots\ldots P \ldots\ldots mP \ldots\ldots \infty P$$

in welcher die Glieder linker Hand lauter flachere, die Glieder rechter Hand lauter spitzere Pyramiden als P bedeuten.

Zusatz. Diese Reihe nennen wir die Hauptreihe des Tesseral-Systemes, und erkennen ihre Glieder jederzeit daran, dass sie sich mit der Grundgestalt in paralleler Stellung befinden. Ihre Gränzen sind oP und ∞P; die erstere stellt eine tetragonale Pyramide von unendlich kleiner Axe und von gleichem und ähnlichem Mittelquerschnitte mit P, d. h. diesen Mittelquerschnitt selbst, die letztere eine tetragonale Pyramide von unendlich grosser Axe und demselben Querschnitte, d. h. ein tetragonales Prisma von indefiniter Länge dar. Beyde können natürlich nicht für sich, sondern nur in Combinationen erscheinen.

Anmerkung 1. Dasjenige, was diese Gestalten in eine einzige Reihe vereinigt, oder die Copula dieser Reihe ist keinesweges ein nach bestimmten Gesetzen fortschreitendes Verhältniss der Coefficienten der Axe, sondern die Gleichheit der Stellung und Basis aller in ihr enthaltenen Gestalten. Der Coefficient m kann alle möglichen Werthe erhalten, doch zeigt die Beobachtung, dass diesen Werthen in der Natur jederzeit rationale und meist sehr einfache, ganze oder gebrochene Zahlen entsprechen.

Anmerkung 2. Obgleich nun oP eigentlich den Mittelquerschnitt oder die Basis bedeutet, so erweitern wir doch zum Behuf der krystallographischen Bezeichnung diese Bedeutung dahin, dass wir mit oP jede der Basis parallele Fläche, oder die basischen Flächen überhaupt bezeichnen; eine Erweiterung, welche den grössten Vortheil gewährt, indem sie uns die Einfachheit der Zeichensprache erhält, die auf andere Weise mehr oder weniger verloren gehen würde. oP. ∞P bedeutet daher ein indefinites, an beyden Enden durch basische Flächen terminirtes tetragonales Prisma in paralleler Stellung mit P.

§. 126.

Ableitung der ditetragonalen Pyramiden.

Aus jedem Gliede mP der Hauptreihe lässt sich eine Reihe ditetragonaler Pyramiden ableiten.

Man verlängere die Halbdiagonalen von mP durch Vervielfachung ihrer selbst nach irgend einem Coefficienten n, und verbinde die Eckpuncte der Basis mit den Endpuncten der verlängerten Diagonalen durch gerade Linien, so werden sich je zwey dieser Linien schneiden, wodurch eine achtseitige Figur zum Vorscheine kommt, welche nur in einem Falle ein regelmässiges, ausserdem jederzeit ein halbregelmässiges Achteck, oder ein Ditetragon seyn wird. Legt man nun Ebenen durch die Seiten dieser Figur, als der Basis der neuen Gestalt und die Polecke der Pyramide mP, so resultirt eine achtseitige Pyramide, welche nur in einem Falle lauter gleiche, in jedem andern Falle hingegen abwechselnd gleiche Polkanten haben, und nur in jenem einem Falle von gleichschenkligen Dreyecken, ausserdem jederzeit von ungleichseitigen Dreyecken umschlossen, folglich eine ditetragonale Pyramide seyn wird. Da nun das Zeichen derjenigen Pyramide, in welcher $n = 1$, $= mP$ war, so wird das Zeichen jeder ditetragonalen Pyramide füglich als mPn zu schreiben seyn; und da n alle möglichen Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so erhalten wir aus jedem Gliede mP der Hauptreihe eine Reihe von folgender Gestalt:

mP.....mPn.....mP∞

Die Gränzen dieser Reihe sind einerseits das Glied der Hauptreihe selbst, anderseits wiederum eine tetragonale Pyramide von gleicher Axe mit mP, aber in diagonaler Stellung (§. 15), und mit einer Basis, welche sich zu jener von mP verhält wie 2 : 1. Alle mittleren Glieder sind durchgängig ditetragonale Pyramiden von verschiedener Gestalt und Grösse ihrer Mittelquerschnitte nach Maassgabe der Grösse des Coefficienten n.

Zusatz. Die Beobachtung lehrt uns, dass auch die Werthe von n jederzeit rational, und meist von sehr einfachem numerischem Ausdrucke sind. Sollte aber eine regelmässige achtseitige Pyramide vorkommen, so würde sie, wie die Berechnung zeigt, einen irrationalen Werth von n fordern; da nun dergleichen, so weit unsre Beobachtungen gehen, in der Natur nicht auftreten, so wird es sehr unwahrscheinlich, dass regelmässige achtseitige Pyramiden überhaupt existiren.

§. 127.

Fortsetzung.

Da die hier vorgetragene Methode der Ableitung auf jedes Glied der Hauptreihe anwendbar ist, so muss sich auch aus ∞P, oder dem tetragonalem Prisma folgende Reihe ableiten lassen:

∞P..... ∞Pn..... ∞P∞

Hier ist einleuchtend, dass die Zwischenglieder durchweg ditetragonale Prismen von verschiedenen Querschnitten nach den verschiedenen Werthen von n darstellen werden, während einerseits das tetragonale Prisma der Hauptreihe, anderseits wiederum ein tetragonales Prisma in diagonaler Stellung und mit doppelt so grosser Basis als ∞P die Gränzglieder der Reihe bilden. Kein Glied dieser Reihe kann für sich oder einzeln erscheinen, indem jederzeit basische oder terminale Flächen (§. 14) die Möglichkeit ihrer Erscheinung bedingen. Die Combination $\infty P, \infty P\infty . oP$ stellt sich als ein gleichwinklig - achtseitiges, durch eine basische Fläche an jedem Ende begränztes Prisma dar, dessen Flächen jedoch eine ganz andere Lage haben, als die Flächen desjenigen gleichwinklig - achtseitigen Prismas, welches als Gränzgestalt einer dergleichen Pyramide abgeleitet worden wäre.

§. 128.

Uebersicht.

Durch die Ableitungen der beyden vorhergehenden §§ ist die ganze mögliche Mannichfaltigkeit der Gestalten des Tetragonal - Systemes erschöpft, so dass keine Gestalt angegeben werden kann, welche nicht auf die eine oder die andere Art aus der Grundgestalt hergeleitet werden könnte. Wenn wir die Reihen der ditetragonalen Pyramiden mit der Hauptreihe in Verbindung bringen, so erhalten wir folgendes Schema des Tetragonal - Systemes:

oP	mP	P	mP	∞P
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
oPn	mPn	Pn	mPn	∞Pn
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
oP∞	mP∞	P∞ ...	mP∞	∞P∞

Aus dem bisher Vorgetragenem ergeben sich für dieses vollständige Schema folgende Sätze:

1) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die Hauptreihe des Systemes (*series principalis*) nannten, begreift alle tetragonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von paralleler Stellung und gleicher Basis mit P.

2) Die unterste horizontale Reihe begreift alle tetragonalen Pyramiden und das gleichnamige Prisma von diagonaler Stellung und doppelt so grosser Basis als P. Wir nennen sie die Nebenreihe des Systemes; (*series terminalis*).

3) Die mittleren horizontalen Reihen, deren so viele möglich sind, als es rationale Werthe von n giebt, begreifen lauter ditetragonale Pyramiden und Prismen, und zwar jede einzele horizontale Reihe nur solche von gleichen und ähnlichen Mittelquerschnitten, da ein und derselbe Werth von n eine und dieselbe ditetragonale Basis giebt. Wir nennen sie die Zwischenreihen des Systemes; (*series intermediae*).

4) Jede verticale Reihe begreift Gestalten von gleicher Axenlänge, in welchen die Kantenlinien der norma-

len Polkanten, oder der Polkanten des Gliedes der Hauptreihe noch erscheinen.

B) HEMIEDRISCHE GESTALTEN.

a) Parallelflächig-hemiedrische Gestalten.

§. 129.

Ableitung der tetragonalen Pyramiden in abnormer Stellung.

Satz. Die tetragonalen Pyramiden in abnormer Stellung sind die parallelflächig-hemiedrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren.

Beweis. Die acht Mittelkanten der ditetragonalen Pyramiden liegen in der Ebene der Basis; werden also vier an den abwechselnden Mittelkanten gelegene Flächenpaare bis zum Verschwinden der übrigen Flächen vergrössert, so sind die vier neuen Mittelkanten nur die verlängerten früheren, und liegen folglich wie sie in der Ebene der Basis oder des Mittelquerschnittes. Die neue Gestalt ist daher eine vierseitige Pyramide. Da aber von den abwechselnden Mittelkanten der ditetragonalen Pyramiden je zwey gegenüberliegende parallel, und je zwey benachbarte auf einander rechtwinklig sind, so wird die Basis der neuen Gestalt ein Quadrat, und mithin die hemiedrische Gestalt selbst eine tetragonale Pyramide. Da endlich die Mittelkanten der ditetragonalen Pyramiden niemals den Mittelkanten tetragonaler Pyramiden von normaler oder diagonaler Stellung parallel laufen können, sondern jederzeit irgend eine mittlere zwischen den Richtungen jener beyden behaupten, so werden sich auch die durch Vergrösserung der an den abwechselnden Mittelkanten der ditetragonalen Pyramiden liegenden Flächenpaare abzuleitenden tetragonalen Pyramiden weder in normaler noch in diagonaler, sondern in irgend einer mittleren oder abnormen Stellung befinden.

§. 130.

Fortsetzung.

In jeder ditetragonalen Pyramide giebt es zwey vierzählige Systeme von abwechselnden Mittelkanten; man wird daher auch aus jeder derselben, je nachdem man die an dem einem oder an dem anderem dieser Systeme gelegenen Flächenpaare wählt, zweyerley an sich gleiche und ähnliche, und nur durch ihre Stellung unterschiedene tetragonale Pyramiden in abnormer Stellung erhalten. Da nun das allgemeine Zeichen der aus einer ditetragonalen Pyramide mPn abzuleitenden hemiedrischen Gestalten $= \frac{mPn}{2}$ ist, so lassen sich die beyden tetragonalen Pyramiden in abnormer Stellung von den übrigen hemiedrischen Gestalten derselben Muttergestalt durch Vorsetzung der Zeichen $\frac{l}{r}$ und $\frac{r}{l}$ unterscheiden, weil nach Maasgabe der beyden aufrechten Stellungen *) die Flächen einer jeden dieser tetragonalen Pyramiden sowohl die rechten als die linken von je vier um ein

*) Der eigentlichen und der umgekehrten aufrechten Stellung, vergl. §. 13.

Mitteleck der Muttergestalt gelegenen Flächen darstellen können, welche Zweydeutigkeit durch die Zeichen $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ sehr treffend ausgedrückt wird.

Anmerkung. Für $n = \infty$ verwandeln sich sowohl $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ als $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ in $mP\infty$, oder die tetragonale Pyramide der Nebenreihe; für $n = 1$ in mP, oder die tetragonale Pyramide der Hauptreihe von gleicher Axe.

Geneigtflächig-hemiedrische Gestalten.

§. 131.

Ableitung der tetragonalen Skalenoeder.

Satz. Die tetragonalen Skalenoeder sind die geneigtflächig-hemiedrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach den an den gleichnamigen Polkanten gelegenen, abwechselnden Flächenpaaren.

Beweis. Da nur von den an den gleichnamigen Polkanten gelegenen Flächenpaaren die abwechselnden vergrössert werden sollen, so werden z. B. für das Flächenpaar einer diagonalen oberen Polkante das gegenüberliegende Paar der oberen, und die beyden zwischengelegenen Paare der unteren Pyramidenhälfte zu vergrössern seyn; da also für jede wachsende obere Fläche die untere Nebenfläche eine verschwindende ist, und umgekehrt, so ist begreiflich, dass die Mittelkanten der Muttergestalt verschwinden und irgend andere an deren Stelle treten müssen. Weil aber jede einzele obere

Fläche vor der Vergrösserung mit einer unteren einen in der Ebene der Basis gelegenen Eckpunct gemein hatte, so muss sie nach der Vergrösserung mit ihr eine Kante bilden, welche, weil sie nur diesen einzigen Punct mit der Basis gemein hat, gegen die Ebene derselben geneigt seyn wird. Folglich kann der Mittelquerschnitt der neuen Gestalt kein Hauptschnitt, und diese selbst keine Pyramide seyn. Ausserdem hat aber auch jede Fläche vor der Vergrösserung einen Punct, nämlich den Poleckpunct, mit einer in derselben Pyramidenhälfte gelegenen Fläche gemeinschaftlich, und wird daher, weil das zwischenliegende Flächenpaar ausfällt, nach der Vergrösserung eine Kante mit dieser Fläche bilden. Folglich wird jede obere Fläche der neuen Gestalt von der ursprünglichen Kante mit ihrer bleibenden Nebenfläche, von einer neuen Mittelkante gegen eine untere, von einer neuen Polkante gegen eine obere Fläche, überhaupt von drey Kanten begränzt, mithin ein Dreyeck seyn; da nun, was von einer Fläche gilt, auf alle anwendbar ist, so wird die neue Gestalt eine von Dreyecken umschlossene Gestalt, deren Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist, d. h. ein Skalenoeder (§. 27), und zwar, da der Dreyecke überhaupt acht sind, ein tetragonales Skalenoeder darstellen.

§. 132.

Fortsetzung.

Es ist einleuchtend, dass die Ableitung für jede ditetragonale Pyramide mPn auf doppelte Weise ihre Anwendung finden muss, da sich abwechselnde Flächenpaare sowohl in den normalen als in den diagonalen Polkanten bestimmen, und die in beyden Fällen erhaltenen Producte der Ableitung sowohl durch Stellung als durch Grösse und Gestalt von einander wesentlich unterscheiden werden. Bezeichnen wir also diejenigen Skalenoeder, welche durch Vergrösserung der an den diagonalen Polkanten gelegenen abwechselnden Flächenpaare erhalten werden mit $\frac{mPn}{2}$, so können wir für jene anderen, welche durch Vergrösserung der an den normalen Polkanten gelegenen abwechselnden Flächenpaare entstehen, zur Unterscheidung das Zeichen $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ wählen. Beyderley Gestalten befinden sich in diagonaler Stellung gegeneinander, gerade so wie die Pyramiden der Haupt- und Neben-Reihe. Allein ausser dieser wesentlichen Verschiedenheit ist noch für jede einzele Varietät der Unterschied der normalen und verwendeten Stellung geltend zu machen, was sich durch Vorsetzung der Zeichen + und − erreichen lässt, so dass jenes der normalen dieses der verwendeten Stellung gilt.

Anmerkung. Die wesentliche Verschiedenheit der Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$ und $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ wird am auffallendsten, wenn man die Gränzgestalten beyder in Bezug auf den Coefficienten n bestimmt. Während $\frac{mPn}{2}$ für $n = \infty$ die tetragonale Pyramide der Nebenreihe von gleicher Axe darstellt, verwandelt sich

$\left(\frac{mPn}{2}\right)$ für denselben Werth von n in ein tetragonales Sphenoeder der Nebenreihe, und zwar in dasselbe, welches als hemiedrische Gestalt aus jener Pyramide folgen würde.

§. 133.

Ableitung der tetragonalen Trapezoeder.

Satz. Die tetragonalen Trapezoeder sind die geneigtflächig hemiedrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden nach einzelen Flächen.

Beweis. Dass die Hemiedrie nach einzelen Flächen in den ditetragonalen Pyramiden nur auf geneigtflächige Gestalten führen kann, ist einleuchtend, da jeder Fläche Gegenfläche in der Zone der Nebenflächen die sechste von ihr aus gerechnet, und folglich eine verschwindende ist, wenn jene vergrössert wird. Es hat aber jede Fläche drey Neben- und vier Nachbarflächen; wenn also jene verschwinden und diese zugleich mit ihr wachsen, so wird jede bleibende Fläche mit vier anderen zum Durchschnitte kommen, und die hemiedrische Gestalt von acht vierseitigen Flächen umschlossen seyn. Weil aber jede Fläche ursprünglich nur gegen zwey ihrer Nachbarflächen gleiche, gegen die beyden übrigen dagegen (welche in der anderen Pyramidenhälfte liegen) ungleiche Neigung hat, so werden auch die neuen Kanten dreyerley verschiedenen Werth haben, und zwey gleiche Polkanten nebst zwey ungleichen Mittelkanten jede Fläche der hemiedrischen Gestalt begränzen. Dass aber die Kantenlinien dieser vier Kanten weder gleich noch paarweis parallel, und folglich die Flächen der hemiedrischen Gestalt keine Parallelogramme, sondern nur Trapezoide seyn können, ist aus den ursprünglichen Neigungsverhältnissen je fünf mit einander zum Durchschnitte kommender Flächen leicht zu erweisen. Die neue Gestalt wird also von acht Trapezoiden umschlossen seyn. Da nun für jede obere bleibende Fläche die untere Nebenfläche eine verschwindende ist, so verschwinden nicht nur die Mittelkanten der Muttergestalt, sondern die neuen Mittelkanten werden auch nicht in die Ebene der Basis fallen, vielmehr gegen dieselbe geneigt, und der Mittelquerschnitt der neuen Gestalt kein Hauptschnitt seyn. Folglich ist diese Gestalt selbst eine von acht Trapezoiden umschlossene Gestalt, deren Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt, d. h. ein tetragonales Trapezoeder.

§. 134.

Fortsetzung.

Aus bereits oben erwähnten Gründen giebt die Ableitung für jede ditetragonale Pyramide zwey tetragonale Trapezoeder, welche in Bezug auf ihre einzelen Begränzungselemente vollkommen gleich und ähnlich, und nur hinsichtlich der Vertheilung derselben wie ein Rechtes und Linkes unterschieden sind. Da nun die ihnen entsprechenden Flächen der Muttergestalt nach beyden Richtungen der aufrechten Stellung entweder rechte oder linke Flächen sind, so lassen sich beyde Gestalten im Zeichen hinlänglich durch Vorsetzung der Buchstaben l und r unterscheiden, so dass die beyden aus der ditetragonalen Pyramide mPn abzuleitenden tetragonalen Trapezoeder mit $l\frac{mPn}{2}$ und $r\frac{mPn}{2}$ zu bezeichnen sind.

Anmerkung. Für $n = \infty$ wird $l\frac{mPn}{2} = r\frac{mPn}{2} = \frac{mP\infty}{2}$, welches in der Erscheinung durch nichts von $mP\infty$ zu unterscheiden ist.

§. 135.

Ableitung der tetragonalen Sphenoeder.

Satz. Die tetragonalen Sphenoeder sind die geneigtflächig hemiedrischen Gestalten der tetragonalen Pyramiden.

Dass die tetragonalen Pyramiden keiner anderen Hemiedrie als der geneigtflächigen nach einzelen Flächen fähig seyn können, ist einleuchtend, indem ihre Verhältnisse in dieser Hinsicht ganz und gar mit jenen des Oktaeders übereinstimmen, und jede andere Halbirung eine Gestalt hervorbringen würde, welcher die wesentlichen Merkmale des tetragonalen Systemes abgängen. Weil nun jede Fläche der tetragonalen Pyramide drey Nachbarflächen hat, und mit diesen zum Durchschnitte kommt, so wird die neue Gestalt von vier Dreyecken umschlossen seyn. Da ferner jede Fläche mit ihrer in derselben Pyramidenhälfte gelegenen Nachbarfläche einen anderen Winkel bildet als mit den beyden übrigen, die Flächen selbst aber insgesammt vor der Vergrösserung gleichschenklige Dreyecke waren, so werden sich neben vier schrägen Seitenkanten zwey horizontale Endkanten ausbilden; auch wird jede neue Fläche wegen der gleichen Neigung der beyden in der anderen Pyramidenhälfte gelegenen Nachbarflächen gegen sie selbst sowohl als gegen die Mittelkante der Muttergestalt ein gleichschenkliges Dreyeck, und folglich die neue Gestalt selbst eine von vier gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalt, deren Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist, d. h. ein tetragonales Sphenoeder darstellen.

§. 136.

Fortsetzung.

Wiederum tritt hier wie bey den tetragonalen Skalenoedern der wohl zu beachtende Unterschied von normaler und diagonaler Stellung ein, da die Pyramiden der Hauptreihe sowohl als jene der Nebenreihe der Ableitung des § unterworfen werden können. Obgleich wir also hier wie dort diesen Unterschied durch $\frac{mP}{2}$ und $\left(\frac{mP}{2}\right)$ bezeichnen könnten, so ist doch eine solche Unterscheidung hier unnöthig, da die Zeichen der Glieder der Nebenreihe von jenen der Glieder der Hauptreihe hinlänglich verschieden sind, und folglich auch die beyderseitigen Sphenoeder durch $\frac{mP}{2}$ und $\frac{mP\infty}{2}$ vollkommen abgesondert werden. Dass übrigens ausser dieser wesentlichen Verschiedenheit auch auf die verwendete Stellung Rücksicht zu nehmen ist, versteht sich von selbst, weshalb wir denn wiederum ein $+\frac{mP}{2}$ und ein $-\frac{mP}{2}$, ein $+\frac{mP\infty}{2}$ und ein $-\frac{mP\infty}{2}$ zu unterscheiden haben.

Anmerkung. Für $m = \infty$ wird $+\frac{mP}{2} = -\frac{mP}{2} = \frac{\infty P}{2} \cong \infty P$, und $+\frac{mP\infty}{2} = -\frac{mP\infty}{2} = \frac{\infty P\infty}{2} \cong \infty P\infty$, so dass die hemiedrischen Prismen in der Erscheinung durch nichts von den homoedrischen unterschieden sind.

§. 137.

Uebersicht.

Somit wäre die Ableitung sämmtlicher Gestalten des Tetragonal-Systemes vollendet. Da aber die hemiedrischen Gestalten in diesem Systeme von weit geringerer Bedeutung sind, als im tesseralem oder hexagonalem Systeme, und da sie sehr selten in selbstständiger, rundum ausgebildeter Form, sondern in der Regel nur untergeordnet in Begleitung homoedrischer Gestalten auftreten, so hielten wir es für unnöthig, ihre Ableitung auf geometrische Construction zu gründen; wie wir es denn auch für überflüssig erachteten, die Ableitung der homoedrischen Gestalten durch dergleichen Constructionen zu erläutern, da wohl nichts leichter verständlich seyn kann, als die in den §§. 125 dargestellte einfache Methode der Ableitung tetragonaler und ditetragonaler Pyramiden, und da in den ersten Elementen der Krystallographie die meist etwas verwickelten stereometrischen Constructionen vermieden werden müssen, wenn es der Gegenstand nur einigermaassen gestattet.

Zur nochmaligen Uebersicht der Gesammtheit tetragonaler Gestalten, diene folgende tabellarische Zusammenstellung:

a) HOMOEDRISCHE GESTALTEN,

1) Tetragonale Pyramiden in normaler und diagonaler Stellung, mP und $mP\infty$.

2) Ditetragonale Pyramiden mPn.

b) HEMIEDRISCHE GESTALTEN,

α) parallelflächige,

1) Tetragonale Pyramiden in abnormer Stellung $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$.

β) geneigtflächige,

1) Tetragonale Skalenoeder in normaler und diagonaler Stellung $\pm\frac{mPn}{2}$ $\pm\left(\frac{mPn}{2}\right)$.

2) Tetragonale Trapezoeder, $l\frac{mPn}{2}$ und $r\frac{mPn}{2}$.

3) Tetragonale Sphenoeder $\pm\frac{mP}{2}$.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Gestalten des Tetragonal-Systemes.

§. 138.

Forderungen.

Da keinesweges die Grunddimensionen der Krystalle, sondern nur ihre Kantenwinkel den Gegenstand unsrer genaueren Beobachtungen und unmittelbaren Messungen bilden, der eigenthümliche Charakter aber aller zu einer und derselben Krystallreihe gehörigen Gestalten von dem Werthe ihrer Grunddimensionen wesentlich abhängt, und in den numerischen Verhältnissen derselben nicht nur am leichtesten von der Phantasie aufgefasst, sondern auch am sichersten vom Gedächtnisse festgehalten wird, so müssen wir die Gesetze der Abhängigkeit der Dimensionen einer Gestalt von den gemessenen Winkeln zu bestimmen suchen, indem wir diese als Functionen von jenen, und rückwärts jene aus diesen berechnen. Diese Berechnung wird für die hemiedrischen Gestalten auf einige eigenthümliche Betrachtungen gegründet werden müssen, welche es nothwendig machen, die Berechnung der homoedrischen Gestalten vorher und besonders abzuhandeln.

A) HOMOEDRISCHE GESTALTEN.

§. 139.

Winkel der ditetragonalen Pyramide.

Da alle homoedrischen Gestalten des Tetragonalsystemes unter der allgemeinen Form mPn begriffen sind, so enthalten die Gleichungen für die Kanten- und Flächen-Winkel irgend einer ditetragonalen Pyramide mPn die nöthigen Formeln für die gesammten Gestalten ihres Systemes.

Es seyen ihre normalen Polkanten $= x$
- - - diagonalen - - $= y$
- - - Mittelkanten - - $= z$

ferner die normalen Winkel der Basis $= \nu$
die diagonalen Winkel derselben $= \delta$

endlich die an der Basis gelegenen Winkel
der normalen Axenhauptschnitte $= \nu'$
der diagonalen - - - $= \delta'$

so ist: $\operatorname{tang.} \frac{\nu}{2} = n \quad \operatorname{tang.} \frac{\delta}{2} = \frac{n+1}{n-1}$

$$\operatorname{tang.} \frac{\nu'}{2} = \frac{ma}{b} \quad \operatorname{tang.} \frac{\delta'}{2} = \frac{ma(n+1)}{nb\sqrt{2}}$$

Ferner findet sich

$$\operatorname{tang.} \frac{x}{2} = \frac{n\sqrt{b^2+m^2a^2}}{ma}$$

$$\text{tang.}\ \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2n^2 b^2 + m^2 a^2 (n+1)^2}}{ma\,(n-1)}$$

$$\text{tang.}\ \frac{z}{2} = \frac{ma\sqrt{n^2+1}}{nb}$$

§. 140.

Fortsetzung.

Berechnet man nun nach der Formel:

$$\cos.\alpha = \frac{1 - \text{tang.}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tang.}^2 \frac{\alpha}{2}}$$ die *cosinus* der ganzen Winkel ν, ν', δ, δ', x, y und z, so erhält man für dieselben folgende Gleichungen:

$$\cos.\nu = -\frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$\cos.\delta = -\frac{2n}{n^2+1}$$

$$\cos.\nu' = \frac{b^2 - m^2 a^2}{b^2 + m^2 a^2}$$

$$\cos.\delta' = \frac{2n^2 b^2 - m^2 a^2 (n+1)^2}{2n^2 b^2 + m^2 a^2 (n+1)^2}$$

$$\cos.x = -\frac{n^2 b^2 + m^2 a^2 (n^2-1)}{n^2 b^2 + m^2 a^2 (n^2+1)}$$

$$\cos.y = -\frac{n^2b^2 + 2nm^2a^2}{n^2b^2 + m^2a^2(n^2+1)}$$

$$\cos.z = \frac{n^2b^2 - m^2a^2(n^2+1)}{n^2b^2 + m^2a^2(n^2+1)}$$

Für $m = \infty$ verwandeln sich diese Formeln in jene für die ditetragonalen Prismen, für welche

$$\cos.x = \frac{1-n^2}{1+n^2}$$

$$\cos.y = -\frac{2n}{1+n^2}$$

Anmerkung 1. Gäbe es also eine Reihe gleichwinkliger ditetragonaler oder oktogonaler Pyramiden, so würde auch das Gränzglied derselben ein oktogonales Prisma seyn und folglich die Gleichung

$$\cos.x = \cos.y$$

$$\text{oder } 2n = n^2 - 1$$

Statt finden müssen, nach welcher

$$n = 1 + \sqrt{2}$$

Da nun bis jetzt in der Natur niemals andre als rationale Werthe für n beobachtet worden sind, und diese Rationalität durch ein wirkliches Naturgesetz geboten zu seyn scheint, so lässt sich mit ziemlicher Gewissheit behaupten, dass in der Natur keine oktogonalen Pyramiden vorkommen.

Anmerkung 2. Für jede zwey Prismen ∞Pn und $\infty Pn'$, in welchen die diagonalen Seitenkanten des einen den normalen Seitenkanten des andern gleich sind, und umgekehrt, gilt die Gleichung

$$\frac{n'^2 - 1}{n'^2 + 1} = \frac{2n}{1 + n^2}$$

und folglich $n' = \frac{n + 1}{n - 1}$.

§. 141.

Cosinus der halben Kantenwinkel.

Sehr häufig kommen die *sinus* und *cosinus* der halben Kantenwinkel, von welchen die letzteren überdiess auf sehr leichte Formeln zur Berechnung von m und n führen, in Anwendung, so dass die ihnen entsprechenden Gleichungen hier nicht füglich übergangen werden können. Man findet,

wenn $\sqrt{n^2 b^2 + m^2 a^2 (n^2 + 1)} = K$,

$$\sin.\frac{x}{2} = \frac{n\sqrt{b^2 + m^2 a^2}}{K}$$

$$\sin.\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2n^2 b^2 + m^2 a^2 (n + 1)^2}}{K\sqrt{2}}$$

$$\sin.\frac{z}{2} = \frac{ma\sqrt{n^2 + 1}}{K}$$

$$\cos.\frac{x}{2} = \frac{ma}{K}$$

$$\cos.\frac{y}{2} = \frac{ma(n - 1)}{K\sqrt{2}}$$

$$\cos.\frac{z}{2} = \frac{nb}{K}$$

Aus den letzteren drey Gleichungen ergeben sich folgende Proportionen:

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma : nb$$

$$\cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma\,(n-1) : nb\sqrt{2}$$

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2} = \sqrt{2} : n-1$$

§. 142.

Berechnung von m wenn $n = \frac{m}{m-1}$.

Diese Proportionen dienen uns bey der Berechnung der Werthe von m und n als Functionen der Kantenwinkel, wodurch das zweyte Problem dieses Capitels in Bezug auf die ditetragonalen Pyramiden gelöst wird. Die Messung giebt nämlich zunächst die Kantenwinkel als die bekannten Grössen, aus welchen die Werthe von ma und nb als die gesuchten Grössen berechnet werden müssen. Dass zu diesem Behufe für jede ditetragonale Pyramide, in welcher m und n irgend unbestimmte, von einander unabhängige Werthe haben, wenigstens zwey Kanten gegeben seyn müssen, ist einleuchtend; allein die Erfahrung lehrt, dass nicht selten m und n in einer solchen gegenseitigen Abhängigkeit stehen, dass

$$n = \frac{m}{m-1}$$

Führt man daher diesen Werth in obige Proportionen ein, so erhält man für alle ditetragonalen Pyramiden von der Form $mP\frac{m}{m-1}$:

1) Wenn x und y gegeben sind:

$$m = \frac{\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}{\cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \frac{\cos.\frac{x}{2}}{\cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}$$

2) Wenn x und z gegeben sind:

$$m = \frac{a\cos.\frac{z}{2} + b\cos.\frac{x}{2}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

$$= 1 + \frac{b\cos.\frac{x}{2}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

Für y und z giebt die entsprechende Proportion keinen Werth für m, weil dann

$$\cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2} = a : b\sqrt{2}$$

so dass für alle $mP\frac{m}{m-1}$ ein constantes Verhältniss zwischen dem *cosinus* der halben diagonalen Polkante und dem *cosinus* der halben Mittelkante Statt findet.

§. 143.

Fortsezung.

Wiewohl nun die Formeln des vorigen §. von grossem Nutzen sind, da sie uns in sehr einfachen Ausdrücken mit den Verhältnissen der den halben Kantenwinkeln aller ditetragonalen Pyramiden $mP\frac{m}{m-1}$ entsprechenden *cosinus* bekannt machen, so ist doch in ihnen die vollständige und einfachste Lösung der Aufgabe, aus den gegebenen Kantenwinkeln einer solchen Pyramide ihre Dimensionen zu bestimmen keinesweges enthalten. Sobald nämlich eine ditetragonale Pyramide unter die Form $mP\frac{m}{m-1}$ gehört, so ist ihre Bestimmung nur noch von einer einzigen Messung abhängig, indem die Gleichung für jede Kante alle zu dieser Bestimmung nöthigen Elemente enthält. Während daher die Gleichungen des vorigen §. mehr dazu dienen, die einfachen Verhältnisse nachzuweisen, welche zwischen den Kantenwinkeln einer ditetragonalen Pyramide obwalten, so dass wir uns ihrer allerdings in allen denjenigen Fällen mit Vortheil bedienen werden, da zwey Kanten, wenn auch nur durch ungefähre Messungen, bekannt sind, so werden ganz andere Gleichungen erfordert, um die vollständige und möglichst einfache Bestimmung der Pyramiden $mP\frac{m}{m-1}$ vermittels eines **einzigen** Winkels zu bewerkstelligen. Diese Gleichungen, in welchen m nach einander als Function je einer der Kanten x, y und z erscheint, sind folgende:

1) Wenn x bekannt ist:

$$m = \frac{a\,\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} + \sqrt{(a^2+b^2)\,\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} - b^2}}{a\left(\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} + \sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} - \frac{b^2}{a^2}}}{\mathrm{tang.}^2\frac{x}{2} - 1}$$

2) Wenn y bekannt ist:

$$m = \frac{a + \sqrt{a^2\,\mathrm{tang.}^2\frac{y}{2} - 2b^2}}{2a}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{\mathrm{tang.}^2\frac{y}{2} - \frac{2b^2}{a^2}}}{2}$$

3) Wenn z bekannt ist:

$$m = \frac{a + \sqrt{2b^2\,\mathrm{tang.}^2\frac{z}{2} - a^2}}{2a}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{\frac{2b^2}{a^2}\,\mathrm{tang.}^2\frac{z}{2} - 1}}{2}$$

§. 144.

Berechnung von m wenn n = m.

Weit häufiger noch als dem in den vorigen beyden §§. betrachtetem Verhältnisse $n = \frac{m}{m-1}$ begegnet man dem Verhältnisse $m = n$, welches beinahe als das vorherrschende für die meisten ditetragonalen Pyramiden betrachtet werden kann. Dann finden sich aus den Gleichungen für die Tangenten der halben Kantenwinkel folgende Werthe von m:

1) Wenn x bekannt ist:

$$m = \frac{\sqrt{a^2 \,\text{tang.}^2 \frac{x}{2} - b^2}}{a}$$

$$= \sqrt{\text{tang.}^2 \frac{x}{2} - \frac{b^2}{a^2}}$$

2) Wenn y bekannt ist:

$$m = \frac{1 + \cot.^2 \frac{y}{2} + \cot. \frac{y}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{h^2}{a^2}\left(1 - \cot.^2 \frac{y}{2}\right) + 2}}{1 - \cot.^2 \frac{y}{2}}$$

3) Wenn z bekannt ist:

$$m = \frac{\sqrt{b^2 \,\text{tang.}^2 \frac{z}{2} - a^2}}{a}$$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{a^2} \,\text{tang.}^1 \frac{z}{2} - 1}$$

§. 145.

Allgemeine Bestimmung von m und n.

Findet dagegen kein Verhältniss zwischen m und n Statt, oder, ist das Gesetz des Statt findenden Verhältnisses unbekannt, dann werden zur vollständigen Bestimmung der Pyramide mPn jederzeit zwey Messungen erfordert, so dass entweder x und y, oder x und z, oder y und z als gegebene Grössen zu betrachten sind. Die diesen drey Fällen entsprechenden Werthe von m und n sind folgende:

Erster Fall; x und y sind bekannt; dann ist:

$$n = \frac{\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}{\cos.\frac{x}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}{\cos.\frac{x}{2}}$$

$$m = \frac{b\left(\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}\right)}{a\sqrt{\sin.^2\frac{x}{2} - \left(\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}\right)^2}}$$

Der Werth von n folgt unmittelbar aus der letzten Proportion in §. 141; worauf der Werth von m durch Einführung des gefundenen Werthes n in die Gleichung für $\cos.\frac{x}{2}$ erhalten wird.

Zweyter Fall; x und z sind bekannt; dann ist:

$$n = \frac{\sqrt{1 - \cos.^2\frac{x}{2} - \cos.^2\frac{z}{2}}}{\cos.\frac{x}{2}}$$

$$m = \frac{b\sqrt{1 - \cos.^2\frac{x}{2} - \cos.^2\frac{z}{2}}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

Der Werth für n findet sich, indem man aus der Formel für cos.x oder cos.z (§. 140) das Verhältniss $m^2a^2 : n^2b^2$ bestimmt, und es mit dem Verhältnisse $ma : nb = \cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2}$ (§. 141) in Gleichung bringt. Der Werth für m bestimmt sich dann aus dem gefundenem Werthe für n, durch Einführung desselben in diess letztere Verhältniss.

Dritter Fall; y und z sind bekannt; dann ist:

$$n = \frac{\sin.^2\frac{z}{2} + 2\cos.\frac{y}{2}\sqrt{\sin.^2\frac{z}{2} - \cos.^2\frac{y}{2}}}{\sin.^2\frac{z}{2} - 2\cos.^2\frac{y}{2}}$$

$$m = \frac{b\left(\sin.^2\frac{z}{2} + 2\cos.\frac{y}{2}\sqrt{\sin.^2\frac{z}{2} - \cos.^2\frac{y}{2}}\right)}{a\sqrt{2}\left(\cos.\frac{y}{2} + \sqrt{\sin.^2\frac{z}{2} - \cos.^2\frac{y}{2}}\right)\cos.\frac{z}{2}}$$

Der Werth von n findet sich, indem man aus der Formel für cos.z (§. 140) das Verhältnist $m^2a^2 : n^2b^2$ entwickelt, und mit dem Verhältnisse $ma : nb = \cos.\frac{y}{2}\sqrt{2} : \cos.\frac{z}{2}(n-1)$ (§. 141) in Gleichung bringt; worauf sich der Werth von m aus dem gefundenem Werthe von n, durch Einführung desselben in das letztere Verhältniss ergiebt.

§. 146.

Winkel der tetragonalen Pyramiden.

Setzt man in den Formeln von §. 140 $n = 1$, so erhält man die trigonometrischen Gleichungen für die Kantenwinkel der tetragonalen Pyramide mP aus der Hauptreihe, nämlich:

$$\cos.x = -\frac{b^2}{b^2 + 2m^2a^2}$$

$$\cos.y = -1,\ \text{also}\ y = 180^\circ$$

$$\cos.z = \frac{b^2 - 2m^2a^2}{b^2 + 2m^2a^2}$$

Setzt man dagegen in denselben Formeln $n = \infty$, so erhält man die *cosinus* für die Kantenwinkel der tetragonalen Pyramiden $mP\infty$ aus der Nebenreihe:

$$\cos.x = -1,\ \text{also}\ x = 180^\circ$$

$$\cos.y = -\frac{b^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$$\cos.z = \frac{b^2 - m^2a^2}{b^2 + m^2a^2}$$

Für gegebenes x bestimmt sich in der Pyramide mP.

$$m = \frac{b \cos. \frac{x}{2}}{a\sqrt{1 - 2\cos.^2 \frac{x}{2}}}$$

für gegebenes z dagegen

$$m = \frac{b \tang. \frac{z}{2}}{a \sqrt{2}}$$

Auf gleiche Weise findet sich in der Pyramide $mP\infty$ für bekanntes y

$$m = \frac{b \cos. \frac{y}{2} \sqrt{2}}{a\sqrt{1 - 2 \cos.^2 \frac{y}{2}}}$$

und für bekanntes z

$$m = \frac{b \tang. \frac{z}{2}}{a}$$

welche Werthe unmittelbar aus den im vorigem §. enthaltenen Gleichungen für m durch Einführung der Werthe $\cos. \frac{y}{2} = 0$ und $\cos. \frac{x}{2} = 0$ abgeleitet werden.

B) HEMIEDRISCHE GESTALTEN.

a) Parallelflächige Gestalten.

§. 147.

Berechnung der tetragonalen Pyramiden in abnormer Stellung.

Dass in den tetragonalen Pyramiden von abnormer Stellung als den parallelflächig hemiedrischen Gestalten der ditetragonalen Pyramiden die Mittelkanten denselben Werth haben müssen, wie in ihren respectiven Muttergestalten, folgt unmittelbar aus der Ableitung. Es bleibt uns daher nur noch die Bestimmung der Polkanten und der neuen Diagonalen übrig.

Es sey $BB'B''B'''$ (*tab. I. Fig. 4*) die Basis der Grundgestalt, M ihr Mittelpunct und $BDB'D'B''D''B'''D'''$ die Basis einer ditetragonalen Pyramide mPn, deren parallelflächig-hemiedrische Gestalt bestimmt werden soll. Man verlängere z. B. die BD, $B'D'$, $B''D''$ und $B'''D'''$ bis zu ihren Durchschnitten in E, E', E'' und E''', so ist $EE'E''E'''$ die Basis der abgeleiteten Gestalt. Man ziehe nun ME und MB, so ist

$$W.\ BEM = 45^\circ$$

und folglich im Dreyeck BEM die Seite $BM = b$ nebst den beyden Winkeln $EBM = \frac{v'}{2}$ (§. 139) und $BEM = 45^\circ$ bekannt; daraus folgt

$$EM = \frac{nb\sqrt{2}}{\sqrt{1+n^2}}$$

und es verhält sich demnach die Basis von $\frac{r}{l}\,\frac{mPn}{2}$ zur Basis von P wie

$$1 : \frac{2n^2}{1 + n^2}$$

Die Neigungswinkel $\frac{\delta'}{2}$ der neuen Polkantenlinien gegen die Basis bestimmt sich durch

$$\text{tang.}\frac{\delta'}{2} = \frac{ma\sqrt{1 + n^2}}{nb\sqrt{2}}$$

und die neue Polkante x' durch

$$\cos.x' = -\frac{n^2b^2}{n^2b^2 + m^2a^2(n^2 + 1)}$$

während $\cos.z' = \cos.z$ in §. 146.

Anmerkung. Für $n = 1$ verwandelt sich der Werth von $\cos.x'$ in den gleichnamigen für die tetragonale Pyramide der Hauptreihe, so wie für $n = \infty$ in denselben für die Pyramide der Nebenreihe von gleicher Axenlänge, so dass die Rechnung die Resultate der Ableitung bestätigt, (§. 130. Anm.).

b) Geneigtflächige Gestalten.

§. 148.

Berechnung der tetragonalen Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$.

Sey $BDB'D'B''D''B'''D'''$ (*tab. I. Fig. 5.*) die Basis, M den Mittelpunct, OU die Axe, OD''' eine obere, UD eine untere diagonale Polkante der ditetragonalen Pyramide mPn, aus welcher ein tetragonales Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$ abgeleitet werden soll. Man verlängere zu dem Ende die BD''' und $B'D$, die $B'''D'''$ und $B''D'$, bis sie sich in F und F' schneiden, ziehe die OF und OF', die UD und UD'' und verlängere dieselben, bis sie die OF und OF' in P und P' schneiden, so sind OP OP' die Kantenlinien der beyden neuen oberen Polkanten, welche von den Flächen OBD''' $OB'D'$ und $OB'''D'''$ $OB''D'$ gebildet werden, UP UP' die Kantenlinien der beyden ursprünglichen, aber in der hemiedrischen Gestalt verlängerten, diagonalen unteren Polkanten der Muttergestalt. Ziehe darauf die PB, so stellt diese die halbe Kantenlinie derjenigen Mittelkante der hemiedrischen Gestalt dar, welche von den Flächen OBD'' und UBD gebildet wird. Ziehe noch die MF und MB, darauf die PQ, PR parallel der OM, MF, und verlängere endlich die BD''' und MB''' bis zu ihrem Durchschnitte in T, so ist:

$$MB = b, \quad OM = ma, \quad MT = nb$$

Daraus bestimmt sich:

$$MD = \frac{nb\sqrt{2}}{n+1}$$

$$MF = \frac{nb\sqrt{2}}{n-1}$$

und ferner:

$$PQ = MR = \frac{ma}{n}$$

$$PR = MQ = b\sqrt{2}$$

Sey nun der Winkel, welchen die Kantenlinie OP der kürzeren Polkante mit der Axe bildet $= \xi$, derselbe Winkel der längeren Polkante UP $= v$, der Winkel einer oberen mit einer unteren Polkante $= \sigma$, die schärfere kürzere Polkante $= x'$, die stumpfere längere $= y'$, die Mittelkante $= z'$, so ist:

$$\text{tang. } \xi = \frac{nb\sqrt{2}}{ma\,(n-1)}$$

$$\text{tang. } v = \frac{nb\sqrt{2}}{ma\,(n+1)}$$

$$\cos.\sigma = \frac{2n^2b^2 - m^2a^2\,(n^2-1)}{\sqrt{(2n^2b^2+m^2a^2(n-1)^2)(2n^2b^2+m^2a^2(n+1)^2)}}$$

$$\cos.x' = -\frac{n^2b^2 - 2n\,m^2a^2}{n^2b^2 + m^2a^2\,(n^2+1)}$$

$$\cos.y' = \cos.y \text{ in §. 140.}$$

$$\cos.z' = \frac{n^2b^2 - m^2a^2\,(n^2-1)}{n^2b^2+m^2a^2\,(n^2+1)}$$

Wenn $\sqrt{n^2b^2 + m^2a^2\,(n^2+1)} = K$, so wird;

$$\cos.\frac{x'}{2} = \frac{ma\,(n+1)}{K\sqrt{2}}$$

Da nun $\cos.\dfrac{y'}{2} = \dfrac{ma\,(n-1)}{K\sqrt{2}}$ (§. 141)

so folgt $\cos.\dfrac{x'}{2} : \cos.\dfrac{y'}{2} = n+1 : n-1$

$$\text{und } n = \frac{\cos.\frac{x'}{2} + \cos.\frac{y'}{2}}{\cos.\frac{x'}{2} - \cos.\frac{y'}{2}}$$

Anmerkung 1. Für $n = \infty$ wird

$$\cos.x' = -\frac{b^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$$\cos.z' = \frac{b^2 - m^2a^2}{b^2 + m^2a^2}$$

welches die Gleichungen für die Pyramiden der Nebenreihe sind, so dass die Rechnung dasjenige bestätigt, was bey der Ableitung §. 132 Anm. angeführt worden ist.

Anmerkung 2. Für $m = n$ wird

$$\cos.z' = \frac{a^2 + b^2 - a^2m^2}{a^2 + b^2 + a^2m^2}$$

$$\text{und } m = \frac{\text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{b^2 + a^2}}{a}$$

$$= \text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}$$

welche Formel von häufiger Anwendung in der Entwicklung der Combinationen ist.

§. 149.

Berechnung der tetragonalen Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$.

In der Figur des vorigen §. sey jetzt OD''' eine obere, UD eine untere **normale** Polkante, so gilt dieselbe Construction für die Ableitung eines Skalenoeders $\left(\frac{mPn}{2}\right)$; nur wird jetzt

$$MD = MD''' = b,\ MF = nb$$

Demgemäss bestimmt sich

$$PQ = \frac{ma\,(n-1)}{n+1}$$

$$PR = \frac{2nb}{n+1}$$

$$\text{und tang.}\,\xi = \frac{nb}{ma}$$

$$\text{tang.}\,v = \frac{b}{ma}$$

$$\text{endlich cos.}\sigma = \frac{nb^2 - m^2a^2}{\sqrt{(b^2+m^2a^2)(n^2b^2+m^2a^2)}}$$

Setzen wir nun die schärferen kürzeren Polkanten $= y'$ die stumpferen längeren $= x'$ die Mittelkanten $= z'$, so finden wir:

$$\text{cos.}x' = \text{cos.}x \text{ in §. 140.}$$

$$\text{cos.}y' = -\frac{n^2b^2 - m^2a^2\,(n^2-1)}{n^2b^2 + m^2a^2\,(n^2+1)}$$

$$\cos. z' = \frac{n^2 b^2 - 2n\, m^2 a^2}{n^2 b^2 + m^2 a^2 (n^2 + 1)}$$

und für $\sqrt{n^2 b^2 + m^2 a^2 (n^2 + 1)} = K$

$$\cos. \frac{y'}{2} = \frac{man}{K}$$

Da nun $\cos. \frac{x'}{2} = \frac{ma}{K}$ (§. 141)

so folgt $\cos. \frac{y'}{2} : \cos. \frac{x'}{2} = n : 1$

$$\text{und } n = \frac{\cos. \frac{y'}{2}}{\cos. \frac{x'}{2}}$$

Anmerkung 1. Für diejenigen Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$, in welchen $n = \frac{m}{m-1}$ wird

$$\cos. z' = \frac{b^2 - 2ma^2 (m - 1)}{b^2 + a^2 (2m^2 - 2m + 1)}$$

$$\text{und folglich } m = \frac{a \pm \text{tang.} \frac{z}{2} \sqrt{a^2 + 2b^2}}{2a}$$

$$= 0{,}5\left(1 + \text{tang.} \frac{z}{2} \sqrt{1 + \frac{2b^2}{a^2}}\right)$$

welche Gleichung zur Entwicklung mancher Combinationen sehr brauchbar ist.

§. 150.

Berechnung der tetragonalen Sphenoeder.

Die Formeln für die Winkel der tetragonalen Sphenoeder folgen aus den Formeln für die Skalenoeder durch zweckmässige Bestimmung des Werthes von n.

Setzt man nämlich in den Formeln für $\frac{mPn}{2}$ $n = 1$, so erhält man als entsprechende Gleichungen für die Sphenoeder $\frac{mP}{2}$

$$\cos.x' = -\frac{b^2 - 2m^2a^2}{b^2 + 2m^2a^2}$$

$$\cos.y' = -1$$

$$\cos.z' = \frac{b^2}{b^2 + 2m^2a^2}$$

Bringt man dagegen in die Formeln für $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ den Werth $n = \infty$, so verwandeln sie sich in die Formeln für die Sphenoeder $\frac{mP\infty}{2}$

$$\cos.x' = -1$$

$$\cos.y' = -\frac{b^2 - m^2a^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$$\cos.z' = \frac{b^2}{b^2 + m^2a^2}$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass die Kantenwinkel der Sphenoeder dis Supplemente der Kantenwinkel ihrer Muttergestalten, der tetragonalen Pyramiden sind, und zwar so, dass die Polkanten der einen die Supplemente der Mittelkanten der andern bilden, ein Verhältniss, welches sich aus der Ableitung unmittelbar folgern lässt.

§. 151.

Berechnung der tetragonalen Trapezoeder.

Dass die Polkanten der tetragonalen Trapezoeder mit jenen der tetragonalen Pyramiden in abnormer Stellung gleiches Maass haben müssen, ist aus der Ableitung beyder Gestalten unmittelbar einleuchtend. Es bleibt uns daher nur noch die Berechnung der Mittelkanten übrig, welche zweyerley sind, indem vier längere stumpfere mit vier kürzeren schärferen Kanten abwechselnd im Zickzack um die Gestalt laufen; (120).

Zu dieser Berechnung werden die Werthe der an der Basis liegenden Flächenwinkel der ditetragonalen Pyramide mPn erfordert. Sie bestimmen sich leicht aus den in §. 141 gegebenen trigonometrischen Werthen der Winkel $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ und $\frac{z}{2}$; nennen wir nämlich den am normalen Eck von mPn gelegenen Flächenwinkel β, den am diagonalen Eck gelegenen β, so ist:

$$\cos.\beta = \cot.\frac{x}{2}\cot.\frac{z}{2}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{(n^2+1)(b^2+m^2a^2)}}$$

$$\cos.\beta' = \cot.\frac{y}{2}\ \cot.\frac{z}{2}$$

$$= \frac{nb\,(n-1)}{\sqrt{(n^2+1)\left[2n^2b^2+m^2a^2(n+1)^2\right]}}$$

Aus diesen Winkeln β und β' nun, so wie aus den Winkeln $180^\circ - x$, $180^\circ - y$ und $180^\circ - z$ lassen sich die gesuchten Kanten des Trapezoeders unmittelbar berechnen; es seyen nämlich von diesen Kanten die an den normalen Ecken von mPn gelegenen $= z'$, die an den diagonalen Ecken gelegenen $= z''$, so ist nach bekannten Gleichungen der Trigonometrie:

$$\cos.z' = \cos.x\ \cos.z + \cos.\beta\ \sin.x\ \sin.z$$
$$\cos.z'' = \cos.y\ \cos.z + \cos.\beta'\ \sin.y\ \sin.z$$

Nun ist:

$$\sin.x = \frac{2man\sqrt{b^2+m^2a^2}}{n^2b^2+m^2a^2\,(n^2+1)}$$

$$\sin.y = \frac{ma\sqrt{2n^2b^2+m^2a^2\,(n+1)^2}}{n^2b^2+m^2a^2\,(n^2+1)}$$

$$\sin.z = \frac{2man\ b\sqrt{n^2+1}}{n^2b^2+m^2a^2(n^2+1)}$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen für $\cos.z'$ und $\cos.z''$, so erhält man

$$\cos.z' = \frac{n^2b^2-m^2a^2\,(n^2-1)}{n^2b^2+m^2a^2\,(n^2+1)}$$

$$\cos.z'' = \frac{n^2b^2-2n\,m^2a^2}{n^2b^2+m^2a^2\,(n^2+1)}$$

also völlig dieselben Werthe, welche oben für die Cosinus der Mittelkanten in den beyderley tetragonalen Skalenoedern erhalten wurden. Diess ist auch ganz natürlich, da die Ableitung der Trapezoeder aus den ditetragonalen Pyramiden die Vergrösserung der abwechselnden einzelen Flächen fordert, und folglich jede obere Fläche der Muttergestalt sowohl mit ihrer unteren Nachbarfläche am diagonalem Eck, als mit ihrer unteren Nachbarfläche am normalem Eck zum Durchschnitt kommt, von welchen beyden Verhältnissen jenes bey der Ableitung der Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$, dieses bey der Ableitung der Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ Statt findet.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des Tetragonal-Systemes.

§. 152.

Homoëdrische und hemiedrische Combinationen.

Die vorläufige Entwicklung (§. 38) der Combinationen des Tetragonal - Systemes wie aller Systeme steht in dem genauestem Zusammenhange mit den allgemeinen Resultaten der Ableitung, und kann daher für Denjenigen, welchem diese letzteren hinlänglich geläufig sind, keine besonderen Schwierigkeiten haben. Der einzige jedoch selten eintretende Umstand, welcher eine besondere Aufmerksamkeit erfordert, ist das Erscheinen von hemitetragonalen Gestalten, weshalb auch hier, gleichwie im Tesseral-Systeme, homoedrische und hemiedrische, und unter den letzteren, parallelflächig- und geneigtflächig-hemiedrische Combinationen zu unterscheiden sind. Diese letzteren werden sich sogleich dadurch verrathen, dass für gewisse Flächen der Combination keine, oder doch keine gleichwerthigen Gegenflächen vorhanden sind *), während sich die ersteren dadurch zu erkennen geben, dass gewisse Flächen derselben das Symmetriegesetz nicht beobachten, nach welchem

1) in jeder homoedrischen Combination des Tetragonal-Systemes bey normaler Stellung in Bezug auf rechts und links, auf oben und unten eine vollkommen gleichförmige Vertheilung der Begränzungselemente Statt finden, nnd

2) die Combination in normaler und verwendeter Stellung völlig dasselbe Bild gewähren muss.

Jede Combination, welche diesen beyden Bedingungen nicht entspricht, wird man als eine hemiedrische Combination zu betrachten haben.

---

*) Diess Kriterium kann am gegenwärtigem Orte in solcher Allgemeinheit ausgesprochen werden, während die angewandte Krystallographie auf die Vorsicht aufmerksam zu machen hat, welche anzuwenden ist, um nicht durch zufällig verdrängte und ausgefallene Flächen in dieser und den folgenden Beurtheilungen getäuscht zu werden.

§. 153.

Wahl der Grundgestalt.

Nachdem die allgemeinsten Eigenschaften einer tetragonalen Combination, nämlich die Zahl ihrer Gestalten und ihr Charakter rücksichtlich der Homoedrie und Hemiedrie nach §. 38 und §. 152 bestimmt sind, so muss vor allen Dingen irgend eine der tetragonalen Pyramiden zur Grundgestalt erwählt werden. Dabey ist es nun nicht selten der Fall, dass von diesen Pyramiden, als denjenigen Gestalten, welche nach §. 23 allein Ansprüche auf diese Erwählung haben, schlechterdings keine in der Combination enthalten ist. Lässt sich in einem solchem Falle aus den Verhältnissen der übrigen Gestalten beurtheilen, welche von jenen möglichen Grundgestalten die leichteste Entwicklung der Combination gestatten würde, so wird diese zur wirklichen Grundgestalt gewählt, und die ganze Entwicklung auf ihre Verhältnisse gegründet. Lässt sich dagegen aus den vorhandenen Gestalten gar nichts in Bezug auf die besonderen Verhältnisse der Grundgestalt schliessen, so dass jede nach §. 23 mögliche Grundgestalt der Entwicklung Genüge leisten würde, so lässt man sie auch einstweilen unbestimmt, und verbindet mit dem Zeichen P nicht mehr die Vorstellung einer bestimmten Pyramide.

§. 154.

Allgemeine, aus der Ableitung folgende Gesetze.

Sobald aber die Grundgestalt P bestimmt ist, so werden uns die Resultate der Ableitung bey der vorläufigen Entwicklung einer gegebenen Combination sogleich auf die Beantwortung der Fragen gelangen lassen:

1) welche Gestalten der Hauptreihe, welche der Nebenreihe und welche den Zwischenreihen angehören;

2) welche Gestalten Pyramiden und welche Prismen sind.

Ferner ergeben sich folgende, gleichfalls unmittelbar aus der Ableitung hervorgehende Regeln:

1) Die Flächen je zweyer Gestalten einer und derselben horizontalen Reihe des allgemeinen Schemas in §. 128 bringen mit einander horizontale Combinationskanten hervor; wenn daher zwey Gestalten mPn und $m'Pn'$ in dergleichen Combinationskanten zusammenstossen, so ist $n = n'$.

2) Die Flächen je zweyer Gestalten einer und derselben verticalen Reihe des allgemeinen Schemas bringen mit einander Combinationskanten hervor, welche den normalen Polkanten des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe parallel sind; wenn daher zwey Gestalten mPn und $m'Pn'$ in dergleichen Kanten zusammenstossen, so ist $m = m'$.

Anmerkung. Die Flächen von $mP\infty$ werden daher die Polkanten von mP regelmässig abstumpfen, so dass je zwey auf einer Fläche von $mP\infty$ gelegene Combinationskanten einander parallel laufen. Das umgekehrte Verhältniss findet zwischen den Flächen der Gestalten mP und $2mP\infty$ Statt, so dass mP die Polkanten von $2mP\infty$ regelmässig abstumpft.

§. 155.

Combinationsgleichungen.

Was den sehr häufig vorkommenden Fall betrifft, da die Flächen einer unbekannten Gestalt $m''Pn''$ zwischen den Flächen zweyer bekannter Gestalten mPn und $m'Pn'$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen, so modificiren sich die für denselben im viertem Capitel der Propädeutik entwickelten Combinationsgleichungen für die Combinationen des Tetragonal-Systemes folgendergestalt. Weil die zum Durchschnitte kommenden Flächen in der Regel eine solche Lage haben, dass sie alle drey auf eine und dieselbe Halbdiagonale der Grundgestalt bezogen werden können, so sind die Verhältnisse ihrer Coordinaten folgende:

$$\begin{array}{ccccc} ma & : & nb & : & c \\ m'a & : & n'b & : & c \\ m''a & : & n''b & : & c \end{array}$$

Setzt man also in den Gleichungen C und D (§. 43.) *)

$$r = r' = 1$$

so erhält man:

$$m = \frac{n''(n' - n)\,mm'}{n''(mn' - m'n) + (m' - m)\,nn'}$$

$$n'' = \frac{m''(m' - m)\,nn'}{m''(m'n - mn') + (n' - n)\,mm'}$$

---

*) Oder auch in den Gleichungen A und B desselben §. $n' = n = 1$, wenn man die in Rede stehenden Flächen mit mPr, $m'Pr'$ und $m''Pr''$ bezeichnen will.

In der Anwendung erleiden diese Gleichungen natürlich für jeden besondern Fall eine eigenthümliche Umgestaltung, nach Maassgabe der Werthe der Coefficienten m', n', m und n; da indess von allen möglichen Fällen einige ganz vorzüglich häufig vorkommen, und deshalb von ganz besonderem Interesse sind, so wird es nicht unzweckmässig seyn, die für sie aus obigen Gleichungen folgenden Regeln besonders anzuführen.

§. 156.

Einige besondere Regeln der Combinationen.

1) Ein häufig vorkommender und sehr interessanter Fall ist der, wenn die Flächen einer ditetragonalen Pyramide $m''Pn''$ die Combinationskanten zwischen einer tetragonalen Pyramide der Hauptreihe mP, nnd dem tetragonalem Prisma der Nebenreihe $\infty P \infty$ regelmässig, d. h. mit parallelen Combinationskanten abstumpfen. Um für diesen Fall das Verhältniss zwischen m'' und n'' zu bestimmen, setze man

$$\begin{aligned} mPn &= mP \\ m'Pn' &= \infty P \infty \\ \text{also } n &= 1 \\ \text{und } m' = n' &= \infty; \end{aligned}$$

dann folgt durch Einführung dieser Werthe in obige Gleichung:

$$m'' = mn''$$

und für den besonderen Fall, da $mP = P$:

$$m'' = n''$$

2) Ein zweyter, ebenfalls häufiger Fall ist der umgekehrte des vorigen, wenn nämlich die Flächen einer ditetragonalen Pyramide $m''Pn''$ die Combinationskanten zwischen dem Prisma der Hauptreihe ∞P und einer Pyramide der Nebenreihe $mP\infty$ abstumpfen, dann ist:

$$mPn = mP\infty,$$
$$m'Pn' = \infty P,$$

also $m = m \quad , \quad n = \infty$
$\quad m' = \infty \quad , \quad n' = 1;$

durch welche Werthe die Combinationsgleichung folgende Gestalt erhält:

$$m'' = \frac{mn''}{n'' - 1}$$

oder, für $mP\infty = P\infty$:

$$m'' = \frac{n''}{n'' - 1}$$

3) Als eine dritte specielle Regel, welche sich indess nicht unmittelbar aus der Combinationsgleichung des vorigen §. ergiebt, führe ich noch folgende an:

Für diejenige tetragonale Pyramide $m'P$, welche die diagonalen Polkanten einer ditetragonalen Pyramide mPn abstumpft, ist:

$$m' = \frac{m(n+1)}{2n} \text{ *)}$$

---

*) Diese Regel folgt zwar unmittelbar aus dem in §. 148 bestimmtem Verhältnisse der Linien MD : MO, lässt sich aber gleichfalls aus den allgemeinen Combinationsgleichungen der Propädeutik entwickeln, indem man sie für den Fall einrichtet, da die beyden gegebenen Flächen mPn

§. 157.

Fälle, in welchen Messungen nöthig sind.

Mit Hülfe dieser wenigen Regeln wird man im Stande seyn, die meisten in der Natur vorkommenden tetragonalen Combinationen mit Kanten-Parallelismus zu entwickeln, und wiewohl Fälle vorhanden sind, für welche diese Regeln nicht ausreichen, sondern eigenthümliche Regeln gelten, so würde es doch nutzlos seyn, ihrer wegen die Aushebung von besonderen Regeln zu vervielfältigen, da jene Fälle nicht nur ziemlich isolirt dastehen, sondern auch vermittels der allgemeinen Gleichungen in §. 43 hinlänglich bestimmt werden können. Wo kein Parallelismus der Combinationskanten Statt findet, da müssen jederzeit Messungen zu Rathe gezogen werden, für welche sich jedoch nicht wohl allgemeine Regeln angeben lassen, da die zweckmässigste Wahl der zu messenden Kanten dem jedesmaligem Bedürf-

---

und $m'Pn'$ nicht mehr dieselbe Halbdiagonale der Grundgestalt unter ihren Coordinaten zählen, so dass die ihnen entsprechenden Verhältnisse

$$\begin{array}{ccccc} ma & : & nb & : & c \\ m'a & : & b & : & n'c \end{array}$$

sind. Setzt man dann in der Gleichung A (§. 43) $r = n' = 1$, und schreibt nachher n' statt r' und n'' statt r'', so folgt:

$$m'' = \frac{n''(nn'-1)\,mm'}{n''(mn'-m')\,n+(m'n-m)\,m'}$$

welcher Werth sich für unseren Fall, in welchem $m = m'$, $n = n'$, $n'' = 1$, in den oben gefundenen

$$m'' = \frac{m(n+1)}{2n}$$

verwandelt.

nisse gemäss zu treffen ist. Die Aufgabe aber, aus den gemessenen Kanten die übrigen Kanten so wie die Dimensionen der Gestalten zu berechnen, wird theils mittels der im dritten Capitel dieses Abschnittes gegebenen Gleichungen, theils mittels anderer Kunstgriffe gelöst werden können, welche jedem, der nur einige Kenntniss der Geometrie und Trigonometrie besitzt, hinlänglich geläufig sind *).

§. 158.

Entwicklung einiger Combinationen des tetragonalen Zinnerzes.

Da es nöthig ist, die hier vorgetragene Methode der Entwicklung tetragonaler Combinationen an einigen Beyspielen zu erläutern, so wähle ich dazu einige von den Combinationen, welche Mohs auf der sechsten und siebenten Tafel zum zweyten Theile seines Grundrisses der Mineralogie mitgetheilt hat, da einestheils die in diesem Werke gegebenen Zeichnungen mit Genauigkeit ausgeführt sind, und anderntheils vorausgesetzt werden kann, dass das Mohsische Werk in Teutschland allgemein bekannt ist. Es stellen auf taf. III fig. 1, 2 und 3 drey Combinationen des tetragonalen Zinnerzes, ebendaselbst fig. 4 eine Combination des tetragonalen Granates dar; ich schreite zuerst zur Entwicklung der drey erstgenannten Combinationen.

---

*) Mehre hierher gehörige Probleme finden sich zusammengestellt von Mittscherlich in *Vetenskaps Academiens Handlingar* 1821 und im *Journal de physique* 1825; wer nur Trigonometrie versteht, wird sich in jedem Falle selbst zu rathen wissen.

Man sieht sogleich, dass fig. 1 eine 3zählige, fig. 2 eine 4zählige, und fig. 3 eine 5zählige homoedrische Combination darstellt. Wählt man nun diejenige tetragonale Pyramide, deren Flächen mit *s* bezeichnet sind, zur Grundgestalt P, so wird das Verhältniss der Dimensionen b : a = 40 : 27, und sämmtliche in diesen Combinationen auftretende Gestalten erhalten folgende vorläufige Bestimmung: es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen *s*
- - - - - - - - *g*
2) Gliedern der Nebenreihe - - *P*
- - - - - - - - *l*
3) Gliedern der Zwischenreihen - - *z*
- - - - - - - - *r*

Von diesen Gestalten sind *s*, *P* und *z* Pyramiden, die übrigen Prismen. Weil nun $s = \mathrm{P}$, so folgt

$$g = \infty\mathrm{P};$$

Ferner, weil *P* die Polkanten von $s = \mathrm{P}$ regelmässig abstumpft, so ist:

$$P = \mathrm{P}\infty$$
$$\text{und } l = \infty\mathrm{P}\infty.$$

Es bleibt also nur noch die Bestimmung der beyden Gestalten aus den Zwischenreihen übrig, von denen die eine eine Pyramide von der Form mPn, die andre ein Prisma von der Form $\infty\mathrm{P}n'$ ist; da nun die Flächen beyder mit einander horizontale Combinationskanten hervorbringen, so ist

$$n' = n. \quad (\S.\ 154)$$

Da ferner die Flächen *z* die Combinationskante zwischen $P = P\infty$ und $g = \infty P$, so ergiebt sich nach §. 156.

$$m = \frac{n}{n-1}$$

§. 159.

Fortsetzung.

Bis hierher reichen die in den gegebenen Combinationen zu beobachtenden Verhältnisse zur unmittelbaren Bestimmung der in ihnen auftretenden Gestalten hin, und der Werth von n ist die einzige Grösse, deren Bestimmung von einer Messung abhängig bleibt. Hätte man durch oberflächliche Messung, wie sie etwa das Handgoniometer giebt, für die beyden Polkanten x und y der Pyramide *z* die ungefähren Werthe $x = 118°$, $y = 159°$ gefunden, so folgt daraus nach der Gleichung

$$n = 1 + \frac{\cos.\frac{y}{2}\sqrt{2}}{\cos.x} \quad (§.\ 145)$$

$$n = 1 + \frac{2577}{5151} = \frac{3}{2}$$

Hätte man aber nur Gelegenheit, den einen dieser Winkel, z. B. y, jedoch mit einiger Genauigkeit zu messen, so findet sich daraus

$$m = \frac{1 + \sqrt{\text{tang.}^2 \frac{y}{2} - 4{,}39}}{2} \ (\S.\,143) = 3.$$

und wiederum $n = \frac{3}{2}$.

Hätte man endlich nur die Combinationskante zwischen *g* und *z* messen können, und dieselbe ungefähr 155° gefunden, so folgt daraus für das aus der ditetragonalen Pyramide mPn abzuleitende Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ die halbe Mittelkante

$$\frac{z}{2} = 155^\circ - 90^\circ = 65^\circ$$

Da nun $m = \frac{n}{n-1}$, oder $n = \frac{m}{m-1}$, so wird:

$$m = 0{,}5\left(1 + \text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{5{,}39}\right) (\S.\,149)$$

$$= \frac{5{,}98}{2} = 2{,}99 = 3.$$

Die Pyramide *z* ist daher $= 3P\frac{3}{2}$, und das Prisma $r = \infty P\frac{3}{2}$; die zu entwickelten Combinationen selbst aber erhalten folgende Zeichen:

fig. 1 = $\infty P\infty . P . \infty P$.
fig. 2 = $\infty P\infty . P . \infty P . P\infty$.
fig. 3 = $\infty P . 3P\frac{3}{2}, P\infty . \infty P\frac{3}{2} . P$.

§. 160.

Entwicklung einer Combination des tetragonalen Granates.

Auf taf. VI fig. 95 a. a. O. oder bey uns tab. III fig. 4 ist diese Combination dargestellt, welche man nach der Zahl und Vertheilung ihrer gleichwerthigen Flächen sogleich für eine 14zählige homoedrische Combination erkennt. Wählt man nun diejenige tetragonale Pyramide, deren Flächen mit c bezeichnet sind, zur Grundgestalt P, so ist das Verhältniss der Dimensionen b : a = 28 : 15 und die verschiedene Gestalten bestimmen sich vorläufig, wie folgt; es gehören:

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen *P*
- - - - - - - - *c*
- - - - - - - - *b*
- - - - - - - - *r*
- - - - - - - - *d*

2) Gliedern der Nebenreihe die Flächen *o*
- - - - - - - - *M*

3) Gliedern der Zwischenreihen die Flächen *a*
- - - - - - - - *z*
- - - - - - - - *s*
- - - - - - - - *x*
- - - - - - - - *e*
- - - - - - - - *f*
- - - - - - - - *h*

Von diesen Gestalten bestimmen sich nun zuvörderst unmittelbar aus ihren Verhältnissen zu der gewählten Grundgestalt P, folgende:

$$P = \mathrm{oP} \quad o = \mathrm{P}\infty$$
$$d = \infty\mathrm{P} \quad M = \infty\mathrm{P}\infty$$

Eine oberflächliche Messung der Combinationskanten von b und c, von r und d lehrt ferner, dass:

$$b = 2\mathrm{P} \quad r = 4\mathrm{P}$$

Weil nun die Flächen der drey ditetragonalen Pyramiden z, s und x, welche wir einstweilen mit mPn, m'Pn' und m''Pn'' bezeichnen wollen, zwischen den Flächen von P und $\infty\mathrm{P}\infty$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen, so folgt, dass

$$\mathrm{m} = \mathrm{n}$$
$$\mathrm{m}' = \mathrm{n}'$$
$$\mathrm{m}'' = \mathrm{n}'' \; (\S.\,156)$$

und eben so, wegen der parallelen Combinationskanten zwischen $b = 2\mathrm{P}$ und $M = \infty\mathrm{P}\infty$ für $e = \mu\mathrm{P}\nu$

$$\mu = 2\nu \; (\S.\,156)$$

Weil ferner die Fläche $z = \mathrm{nPn}$ mit der Fläche $e = 2\nu\mathrm{P}\nu$, und diese mit der Fläche $f = \infty\mathrm{P}\nu'$ horizontale Combinationskanten hervorbringt, so folgt

$$\nu = \nu' = \mathrm{n} \; (\S.\,154)$$

und auf gleiche Weise für $s = \mathrm{n'Pn'}$ und $a = \mu''\mathrm{P}\nu''$, dass

$$\nu'' = \mathrm{n}'$$

Nun bestimmt uns eine einzige Messung den Werth von n auf 2, und folglich die Zeichen

$$\text{von } z = 2P2$$
$$e = 4P2$$
$$f = \infty P2$$

Weil aber die diagonalen Polkanten der ditetragonalen Pyramide $a = \mu'' Pn'$ von der tetragonalen Pyramide $c = P$ regelmässig abgestumpft werden, so ist

$$1 = \frac{\mu''(n'+1)}{2n'} \quad (\text{§. } 156)$$

und folglich $\mu'' = \dfrac{2n'}{n'+1}$

Es erscheinen aber auch die Flächen a mit parallelen Combinationskanten zwischen den Flächen $o = P\infty$ und $z = 2P2$; führt man daher in die Combinationsgleichung von §. 155 die Werthe $m = 1$, $n = \infty$, $m' = n = 2$ ein, so erhält man

$$\mu'' = \frac{n'}{n'-1}$$

aus welcher Gleichung verbunden mit der vorigen sich der Werth von $n' = 3$ und die Zeichen

$$\text{von } a = \tfrac{2}{3}P3$$
$$\text{von } s = 3P3 \text{ bestimmen.}$$

Die ditetragonale Pyramide $x = n''Pn''$ ist vollständig durch ihre Verhältnisse zur Pyramide $e = 4P2$ bestimmt, indem die Combinationskanten von beyderley Flächen den normalen Polkanten von x parallel sind, woraus sich nach §. 154 folgern lässt, dass beyde zu einer und derselben verticalen Reihe des allgemeinen Schemas gehören, also gleiche Axenlängen haben, so dass

$$n''Pn'' = 4P4$$

Also bleibt uns nur noch die Bestimmung des ditetragonalen Prismas $h = \infty Pq$ übrig, welche zwar nicht unmittelbar, allein schon durch eine sehr oberflächliche Messung der Kante *Mh* auf das Zeichen $\infty P3$ gelangen lässt.

§. 161.

Uebersicht der bestimmten Gestalten.

Der Inbegriff aller in der gegebenen Combination enthaltenen Gestalten des tetragonalen Granates ist daher folgender:

1) Aus der Hauptreihe	$P = oP$
- - - -	$c = P$
- - - -	$b = 2P$
- - - -	$r = 4P$
- - - -	$d = \infty P$
2) Aus der Nebenreihe	$o = P\infty$
- - - -	$M = \infty P\infty$
3) Aus der Zwischenreihe mit $n = 2$,	$z = 2P2$
- - - - - - - -	$e = 4P2$
- - - - - - - -	$f = \infty P2$
4) Aus der Zwischenreihe mit $n = 3$,	$a = \frac{3}{2}P3$
- - - - - - - -	$s = 3P3$
- - - - - - - -	$h = \infty P3$
5) Aus der Zwischenreihe mit $n = 4$,	$x = 4P4$

Die betrachtete Combination selbst wäre aber etwa folgendergestalt zu schreiben:

$$\infty P\infty,\ P,\ oP,\ \infty P.\ 2P,\ 4P,\ 2P2,\ 4P2,\ P\infty,\ \tfrac{3}{2}P3.\ \infty P3,\ \infty P2,\ 3P3,\ 4P4.$$

wodurch angezeigt wird, dass die Flächen der vier ersteren Gestalten die vorherrschendsten sind, und dass jene der sechs folgenden Gestalten untergeordnet, aber doch noch weit weniger untergeordnet erscheinen, als die Flächen der vier letzteren Gestalten.

DRITTER ABSCHNITT.

VOM RHOMBISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einfachen Gestalten des rhombischen Systemes.

§. 162.

Umfang und Name des Systemes.

Das rhombische System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Rechtwinkligkeit und Ungleichheit der Dimensionen ausgesprochen ist, enthält alle trimetrischen, orthobasischen, einaxigen Gestalten mit rhombischen Querschnitten und keine anderen. Mohs nennt es das rhombeopyramidale *) oder auch das prismatische System, weil die Krystallreihen desselben durch einen grossen Reichthum prismatischer Gestalten ausgezeichnet sind; Weiss das zwey- und-zwey-gliedrige, Hausmann das trimetrische System. Der Name rhombisches System rührt von Breithaupt her.

*) Mohs a. a. O. I, 173.

§. 163.

Arten und aufrechte Stellung der rhombischen Gestalten.

Die einfachen Gestalten des rhombischen Systemes sind nur mehre Arten rhombischer Pyramiden, als deren Gränzgestalten sich eben so vielerley rhombische Prismen ergeben. Da die drey Axen oder Dimensionen einer rhombischen Pyramide ungleichen Werthes sind, so ist es geometrisch gleichgültig, nach welcher derselben in jedem Falle die aufrechte Stellung bestimmt wird, (§. 12) nur ist die einmal angenommene Stellung für die ganze Krystallreihe consequent beyzubehalten. Uebrigens hängt von der schicklichen Wahl derselben die grössere oder geringere Leichtigkeit der Bestimmung und Entwicklung der Combinationen ab, so dass es krystallographisch nicht ganz gleichgültig seyn kann, nach welcher Richtung die Gestalten einer rhombischen Krystallreihe aufrecht gedacht werden. Da ferner die beyden Nebenaxen oder Diagonalen jeder aufrechten rhombischen Pyramide ungleichen Werthes sind, so werden in der Grundgestalt einer rhombischen Krystallreihe auch nicht, wie im Tetragonal-Systeme, beyde Diagonalen zugleich an der Ableitung der Gestalten Theil nehmen, sondern die Makrodiagonale und Brachydiagonale (§. 2) in dieser Hinsicht ganz unabhängig von einander seyn, weshalb es auch im rhombischem Systeme keine achtseitigen Pyramiden giebt, so dass die Ableitung nur immer auf andere rhombische Pyramiden gelangen lässt.

§. 164.

Rhombische Pyramiden. (Breithaupt.)

Syn. Ungleichschenklige vierseitige Pyramiden, Mohs. Zwey - und zwey - gliedrige Oktaeder, Weiss. Rhombenoktaeder, Bernhardi, Weiss, Hausmann. Sechseckige Oktaeder zum Theil, Bernhardi.

Die rhombischen Pyramiden (oder Dipyramiden) sind von 8 gleichen und ähnlichen ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelquerschnitt ein Hauptschnitt ist, und haben daher 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley, so dass in jedem der drey Hauptschnitte vier gleiche Kanten liegen, nämlich: a) 4 kürzere, stumpfere Polkanten im Hauptschnitte durch die Axe und kürzere Diagonale, oder im brachydiagonalem Hauptschnitte; b) 4 längere, schärfere Polkanten im Hauptschnitte durch die Axe und längere Diagonale, oder im makrodiagonalem Hauptschnitte; c) 4 Mittelkanten im Hauptschnitte durch beyde Diagonalen, oder im basischem Hauptschnitte.

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley und insgesammt rhombisch, nämlich: a) 2 Polecke oder Endspitzen an den Endpuncten der Axe; b) 2 stumpfere Mittelecke an den Endpuncten der Brachydiagonale; c) 2 spitzere Mittelecke an den Endpuncten der Makrodiagonale; wir nennen jene die brachydiagonalen, diese die makrodiagonalen Mittelelecke.

Querschnitte und Hauptschnitte sind Rhomben.

Anmerkung. Ausser den rhombischen Pyramiden kommen keine einfachen, geschlossenen oder endlichen Gestalten im rhombischem Systeme vor, so dass, da in Bezug auf die prismatischen Gestalten auch hier die zu Ende des §. 116 gegebene Bemerkung gilt, die allgemeine Betrachtung der einzelen Gestalten des Systemes mit diesem einzigem §. beendigt ist. Demungeachtet ist der Gestaltenreichthum desselben keineswegs unbedeutend, da eine grosse Mannichfaltigkeit von rhombischen Pyramiden verschiedener Ordnungen, so wie von verticalen und horizontalen Prismen jene scheinbare Einfachheit hinlänglich aufwiegt. Dagegen scheinen hemiedrische Gestalten diesem Systeme fremd zu seyn.

ZWEYTES CAPITEL.

Von der Ableitung der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

§. 165.

Grundgestalt.

Der Begriff der möglichen **Grundgestalt**, welcher bereits im tetragonalem Systeme einen grossen Umfang hatte, indem eine Unzahl von Pyramiden auf denselben als auf ihr Prädicat Ansprüche machen konnte, erweitert seine Sphäre im rhombischem Systeme in dem Grade, dass jede endliche oder geschlossene Gestalt desselben als mögliche Grundgestalt gelten kann, weil in jeder derselben die dem rhombischem Systeme angemessenen Bedingungen des §. 23 erfüllt, und folglich die zur Grundgestalt erforderlichen Merkmale vorhanden sind. Je mehr aber dadurch der Willkühr Raum gegeben zu seyn scheint, desto umsichtiger muss man *in praxi*, sobald es die wirkliche Bestimmung einer Krystallreihe gilt, sowohl bey der Wahl der Grundgestalt, als auch bey der Bestimmung der aufrechten Stellung derselben verfahren, indem es für die krystallographischen Entwicklungen eben so wenig gleichgültig seyn kann, welche von den möglichen Grundgestalten zur wirklichen Grundgestalt erwählt, als nach welcher ihrer Dimensionen die einmal erwählte aufrecht gestellt wird. In gegenwärtiger abstracten, oder rein schematischen Darstellung des rhombischen Systemes haben wir jedoch diese Verhältnisse in grösster Allgemeinheit aufzufassen, denken daher irgend eine beliebige rhombische Pyramide von ganz unbestimmtem Verhältnisse der Dimensionen, setzen ihre Halbaxe = a, ihre halbe Makrodiagonale = b, ihre halbe Brachydiagonale = c, und leiten aus ihr als Grundgestalt nach derselben Methode wie im tetragonalem Systeme den schematischen Inbegriff sämmtlicher übrigen Gestalten des Systemes ab.

§. 166.

Hauptreihe der rhombischen Pyramiden.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe rhombischer Pyramiden von derselben Basis und Stellung ableiten.

Man setze zu dem Ende a veränderlich, b und c constant, lasse a verschiedene grössere und kleinere Werthe annehmen, und lege für jeden dieser Werthe ma durch die Mittelkanten von P und durch die Endpuncte der so verlängerten oder verkürzten Axe Ebenen, so resultirt in jedem Falle eine andere rhombische Pyramide, welche entweder spitzer oder flacher als P seyn, aber dieselbe Basis und Stellung haben wird. Da nun das Zeichen derjenigen Pyramide, deren Flächen das Coordinaten-Verhältniss a : b : c entspricht, = P ist, so wird das Zeichen jeder anderen Pyramide, von dem Coordinaten-Verhältnisse ma : b : c, = mP zu schreiben seyn, und da m bald > 1 bald < 1 gewählt werden, und einerseits bis auf ∞ steigen, anderseits bis auf o sinken kann, so erhält man folgende Reihe von Pyramiden:

oP . . . . . mP . . . . P . . . . . mP . . . . ∞P

in welcher die Glieder rechter Hand spitzer, die Glieder linker Hand flacher als P sind.

Anmerkung 1. Diese Reihe, deren Glieder durch Gleichheit der Stellung und Basis mit P verbunden sind, nennen wir die Hauptreihe des Systemes; ihre Gränzen sind einerseits oP, d. h. der Mittelquerschnitt, die Basis, oder jede ihr parallele basische Fläche (vergl. §. 125), anderseits ∞P, oder ein verticales Prisma von indefiniter Länge, dessen Querschnitte insgesammt dem Mittelquerschnitte von P gleich und ähnlich sind. Dass beyde Gränzgestalten nicht an und für sich, sondern nur in Combination mit einander oder mit anderen Gestalten erscheinen können, versteht sich von selbst; (vergl. §. 27.)

Anmerkung 2. Das Meiste, was in §. 125 bey Gelegenheit der Ableitung der Hauptreihe des tetragonalen Systemes gesagt worden ist, findet seine unmittelbare Anwendung auf das rhombische System, so dass *mutatis mutandis* der Inhalt jenes §. buchstäblich auf gegenwärtigen Fall passt.

§. 167.

Reihen der makrodiagonalen und brachydiagonalen rhombischen Pyramiden.

Aus jedem Gliede der Hauptreihe lassen sich zwey verschiedene Reihen von Pyramiden ableiten, in welchen einerseits die Makrodiagonale, anderseits die Brachydiagonale der Grundgestalt noch vorhanden ist.

Man setze die halbe Makrodiagonale der Pyramide mP constant, ihre halbe Brachydiagonale dagegen dergestalt veränderlich, dass sie jeden beliebigen grösseren, aber keinen kleineren Werth annehmen kann als c, so lässt sich jeder dergleichen Werth durch nc ausdrücken. Legt man nun durch die makrodiagonalen Polkanten der Pyramide und durch die Endpuncte der verlängerten Brachydiagonale 2nc Ebenen, so wird in jedem Falle eine andere rhombische Pyramide von gleicher Axe und ursprünglicher Makrodiagonale mit mP, aber von ungleicher ursprünglicher Brachydiagonale, und folglich auch von unähnlichen Querschnitten zum Vorschein kommen. Durch die Vergrösserung von c vertauschen nämlich die Makrodiagonale und Brachydiagonale gewöhnlich ihre Rollen, indem die veränderliche Diagonale 2c durch die Vervielfachung meistentheils grösser wird, als die unveränderliche Diagonale 2b, so dass wir die ursprüngliche Makrodiagonale und Brachydiagonale von der abgeleiteten oder secundären Makrodiagonale und Brachydiagonale zu unterscheiden haben.

Da nun das Zeichen derjenigen Pyramide, in welcher $n = 1$, $= mP$ war, so wird das Zeichen der abgeleiteten Pyramide $= mPn$ zu schreiben seyn; um aber zugleich das sehr wesentliche Verhältniss anzudeuten, dass die *längere* und nicht die *kürzere* Diagonale der Grundgestalt in der abgeleiteten Pyramide unverändert enthalten ist, so ertheilen wir dieser letzteren den Namen einer *makrodiagonalen Pyramide*, und schreiben über das Grundelement (§. 33) ihres Zeichens ein $\smile$, so dass $m\breve{P}n$ ihr vollständiges Zeichen wird. Weil endlich n alle möglichen Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so erhalten wir aus jedem Gliede der Hauptreihe eine Reihe makrodiagonaler Pyramiden von folgender Gestalt:

$$mP \ldots\ldots m\breve{P}n \ldots\ldots m\breve{P}\infty$$

deren Gränzen einerseits mP oder das respective Glied der Hauptreihe selbst, anderseits $m\breve{P}\infty$ oder ein horizontales Prisma ist, dessen Flächen der Brachydiagonale der Grundgestalt als ihrer Axe parallel laufen, und dessen Querschnitte *) insgesammt dem makrodiagonalem Hauptschnitte der Pyramide mP gleich und ähnlich sind.

§. 168.

Fortsetzung.

Ganz auf gleiche Weise lässt sich bey constanter Brachydiagonale und veränderlicher Makrodiagonale

*) Dass hier die Querschnitte auf die horizontale Axe des Prisma's zu beziehen sind, folgt aus der Definition von Querschnitten (§. 10) und von Axen der Prismen (§. 27).

aus jedem Gliede der Hauptreihe eine zweyte Reihe von Pyramiden ableiten, in deren einzelen Gliedern die kürzere und nicht die längere Diagonale der Grundgestalt unverändert enthalten, und folglich der allgemeine Ausdruck des Coordinaten-Verhältnisses $ma : nb : c$ ist. Wir unterscheiden sie von den vorigen Pyramiden, indem wir ihnen den Namen der brachydiagonalen Pyramiden beylegen, und über das Grundelement ihres Zeichens ein – schreiben, so dass $m\bar{P}n$ ihr vollständiges Zeichen und die Gestalt ihrer Reihe folgende wird:

$$mP \,\ldots\ldots\, m\bar{P}n \,\ldots\ldots\, m\bar{P}\infty$$

Die Gränzglieder dieser Reihe sind wiederum einerseits das Glied der Hauptreihe, anderseits $m\bar{P}\infty$ oder ein horizontales Prisma, dessen Flächen der Makrodiagonale der Grundgestalt als seiner Axe parallel laufen, und dessen Querschnitte insgesammt dem brachydiagonalem Hauptschnitte der Pyramide mP gleich und ähnlich sind.

Anmerkung. Die Erfahrung lehrt, dass auch im rhombischem Systeme die Zahlwerthe von m und n jederzeit rational und meist von sehr einfachem Ausdrucke sind. (vergl. §. 125 und §. 126.)

§. 169.

Fortsetzung.

Was für mP im Allgemeinem gilt, muss auch auf ∞P insbesondere anwendbar seyn. Daher werden sich auch aus dem Prisma der Hauptreihe durch Veränderung entweder seiner kurzen oder seiner langen Diagonale zwey Reihen rhombischer Prismen ableiten lassen, von welchen die Glieder der einen die Makrodiagonale, die Glieder der andern die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten. Jene Reihe, von der Form

$$\infty P \ldots\ldots \infty \breve{P}n \ldots\ldots \infty \breve{P}\infty$$

nennen wir daher die makrodiagonale, diese, von der Form

$$\infty P \ldots\ldots \infty \bar{P}n \ldots\ldots \infty \bar{P}\infty$$

die brachydiagonale Reihe der Prismen. Das Gränzglied jeder Reihe ist ein paralleles Flächenpaar, von welchen das eine $\infty \breve{P}\infty$ dem brachydiagonalem, das andere $\infty \bar{P}\infty$ dem makrodiagonalem Hauptschnitte der Grundgestalt parallel läuft, da für jenes die Axe und Brachydiagonale, für dieses die Axe und Makrodiagonale der Grundgestalt unendlich gross geworden sind. Die Combination $oP . \infty \breve{P}\infty . \infty \bar{P}\infty .$ stellt daher ein rechtwinkliges Parallelepipedon dar, welches, obgleich seine Winkel jenen des Hexaeders, oder auch jenen der tetragonalen Combination $oP . \infty P$ durchgängig gleich sind, doch weder mit dieser noch mit jenem zu verwechseln ist, da seine Flächen nicht nur eine ganz verschiedene krystallographische Bedeutung, sondern auch in der Natur einen ganz verschiedenen physikalischen Werth haben.

§. 170.

Uebersicht.

Durch die Ableitungen der vorigen §§. ist Alles erschöpft, was möglicherweise aus einer rhombischen

Pyramide als Grundgestalt abgeleitet werden kann, so dass sich keine rhombische Gestalt nachweisen lässt, welche nicht ein Glied einer oder der anderen der gefundenen Reihen wäre. Aus der Zusammenstellung dieser Reihen zu einem Ganzen ergiebt sich folgendes übersichtliche Schema, welches uns mit einem Blicke den gesammten Gestaltenreichthum des rhombischen Systemes übersehen lässt.

$$\begin{array}{ccccccccc}
o\bar{P}\infty & \ldots\ldots & m\bar{P}\infty & \ldots\ldots & \bar{P}\infty & \ldots\ldots & m\bar{P}\infty & \ldots\ldots & \infty\bar{P}\infty \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\bar{P}n & \ldots\ldots & m\bar{P}n & \ldots\ldots & \bar{P}n & \ldots\ldots & m\bar{P}n & \ldots\ldots & \infty\bar{P}n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots\ldots & mP & \ldots\ldots & P & \ldots\ldots & mP & \ldots\ldots & \infty P \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\breve{P}n & \ldots\ldots & m\breve{P}n & \ldots\ldots & \breve{P}n & \ldots\ldots & m\breve{P}n & \ldots\ldots & \infty\breve{P}n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
o\breve{P}\infty & \ldots\ldots & m\breve{P}\infty & \ldots\ldots & \breve{P}\infty & \ldots\ldots & m\breve{P}\infty & \ldots\ldots & \infty\breve{P}\infty
\end{array}$$

Aus der Betrachtung dieses Schemas ergeben sich folgende Eigenschaften desselben:

1) Die mittelste horizontale Reihe, welche wir die Hauptreihe des Systemes nannten, enthält lauter rhombische Pyramiden so wie das rhombische Prisma von gleichem und ähnlichem Mittelquerschnitte

mit der Grundgestalt P, als welche den Mittelpunct des ganzen Schemas behauptet.

2) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die brachydiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, enthält alle diejenigen horizontalen Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist, deren Flächen also der Makrodiagonale derselben parallel laufen; oder, alle brachydiagonalen horizontalen Prismen, und das brachydiagonale Flächenpaar des Systemes.

3) Die unterste horizontale Reihe, welche wir die makrodiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, enthält alle diejenigen horizontalen Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Makrodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist, deren Flächen also der Brachydiagonale derselben parallel laufen; oder, alle makrodiagonalen horizontalen Prismen, und das makrodiagonale Flächenpaar des Systemes.

4) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, welche wir die brachydiagonalen Zwischenreihen nennen, enthalten alle diejenigen rhombischen Pyramiden und rhombischen Prismen von unähnlichen Basen und Querschnitten mit der Basis der Grnndgestalt, in welchen die Brachydiagonale dieser Grundgestalt noch unverändert enthalten ist; oder, alle brachydiagonalen Pyramiden und Prismen des Systemes.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, welche wir die makrodiagona-

len Zwischenreihen nennen, enthalten alle diejenigen rhombischen Pyramiden und rhombischen Prismen von unähnlichen Basen und Querschnitten mit der Basis der Grundgestalt, in welchen die Makrodiagonale dieser Grundgestalt noch unverändert enthalten ist; oder, alle makrodiagonalen Pyramiden und Prismen des Systemes.

6) Jede horizontale Reihe, welcher Ordnung sie auch sey, enthält lauter Gestalten von ähnlichen Querschnitten und congruenten Mittelquerschnitten.

7) Die verticalen Reihen endlich zerfallen in eine obere oder brachydiagonale, und eine untere oder makrodiagonale Hälfte; die obere Hälfte jeder verticalen Reihe enthält lauter Gestalten, in welchen die Kantenlinien der brachydiagonalen, die untere Hälfte dagegen lauter Gestalten, in welchen die Kantenlinien der makrodiagonalen Polkanten des Gliedes der Hauptreihe noch hervortreten.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

§. 171.

Allgemeine Formeln für die Kantenwinkel.

Da sämmtliche geschlossene Gestalten des rhombischen Systemes rhombische Pyramiden sind, und entweder die grössere oder die kleinere, oder auch beyde Diagonalen der Grundgestalt unverändert enthalten, so werden wir die trigonometrischen Gleichungen für ihre respectiven Kantenwinkel unmittelbar aus den Gleichungen ableiten können, welche die Berechnung für eine Pyramide von dem unbestimmtem Verhältnisse der Coordinaten ma : nb : rc giebt. — In allen Pyramiden nennen wir diejenigen Polkanten, welche über der Makrodiagonale der **Grundgestalt** liegen, die **makrodiagonalen**, diejenigen, welche über der Brachydiagonale der Grundgestalt liegen, die **brachydiagonalen** Polkanten, so dass häufig die makrodiagonalen Polkanten einer Pyramide über der kürzeren Diagogonale derselben liegen können, und umgekehrt. Eben so bestimmen wir den Gebrauch der Worte makrodiagonaler und brachydiagonaler Hauptschnitt.

Es sey nun allgemein in einer Pyramide von dem Coordinaten-Verhältnisse ma : nb : rc

die makrodiagonale Polkante = x
die brachydiagonale Polkante = y
die Mittelkante = z

so ist:

$$\text{tang.}\frac{x}{2} = \frac{rc\sqrt{m^2a^2+n^2b^2}}{manb}$$

$$\text{tang.}\frac{y}{2} = \frac{nb\sqrt{m^2a^2+r^2c^2}}{marc}$$

$$\text{tang.}\frac{z}{2} = \frac{ma\sqrt{n^2b^2+r^2c^2}}{nbrc}$$

Daraus findet sich nach der Formel $\cos.\alpha$

$$= \frac{1 - \text{tang.}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tang.}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos.x = \frac{m^2a^2n^2b^2 - (m^2a^2 + n^2b^2)r^2c^2}{m^2a^2n^2b^2 + (m^2a^2 + n^2b^2)r^2c^2}$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2r^2c^2 - (m^2a^2 + r^2c^2)\,n^2b^2}{m^2a^2r^2c^2 + (m^2a^2 + r^2c^2)\,n^2b^2}$$

$$\cos.z = \frac{n^2b^2r^2c^2 - (n^2b^2 + r^2c^2)\,m^2a^2}{n^2b^2r^2c^2 + (n^2b^2 + r^2c^2)\,m^2a^2}$$

Anmerkung. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\cos.x + \cos.y + \cos.z = -1,$$

$$\cos.x = -(1 + \cos.y + \cos.z)$$

$$\cos.y = -(1 + \cos.x + \cos.z)$$

$$\cos.z = -(1 + \cos.x + \cos.y)$$

Anmerkung. Berechnet man die Werthe von $\cos.\frac{x}{2}$, $\cos.\frac{y}{2}$ und $\cos.\frac{z}{2}$, so erhält man folgende Proportionen:

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2} = nb : rc$$

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma : rc$$

$$\cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma : nb$$

§. 172.

Besondere Formeln für die Kantenwinkel.

Da uns jedoch die Ableitung niemals auf eine Pyramide gelangen lässt, welcher das Coordinatenverhältniss ma : nb : rc entspräche, indem jederzeit wenigstens eine Diagonale der Grundgestalt in der abgeleiteten Gestalt unverändert erhalten werden muss, so modificiren sich die Gleichungen des vorigen §. für die Pyramiden der verschiedenen Ordnungen, wie folgt:

1) Für die Pyramiden der Hauptreihe von der Form mP, in welchen $n = r = 1$, wird

$$\cos.x = \frac{m^2a^2b^2 - (m^2a^2 + b^2)\,c^2}{m^2a^2b^2 + (m^2a^2 + b^2)\,c^2}$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2c^2 - (m^2a^2 + c^2)\,b^2}{m^2a^2c^2 + (m^2a^2 + c^2)\,b^2}$$

$$\cos.z = \frac{b^2c^2 - (b^2 + c^2)\,m^2a^2}{b^2c^2 + (b^2 + c^2)\,m^2a^2}$$

Diese Werthe verwandeln sich für $m = \infty$ in die entsprechenden für das Prisma der Hauptreihe

$$\cos.x = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\cos.y = -\cos.x$$

$$\cos.z = -1$$

2) Für die Pyramiden der makrodiagonalen Zwischenreihen von der Form $m\breve{P}n$, in welchen $nb = b$, $rc = nc$, wird:

$$\cos.x = \frac{m^2a^2b^2 - (m^2a^2 + b^2)\,n^2c^2}{m^2a^2b^2 + (m^2a^2 + b^2)\,n^2c^2}$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2n^2c^2 - (m^2a^2 + n^2c^2)b^2}{m^2a^2n^2c^2 + (m^2a^2 + n^2c^2)b^2}$$

$$\cos.z = \frac{b^2n^2c^2 - (b^2 + n^2c^2)m^2a^2}{b^2n^2c^2 + (b^2 + n^2c^2)m^2a^2}$$

Diese Werthe verwandeln sich für $m = \infty$ in die entsprechenden Werthe für die makrodiagonalen Prismen:

$$\cos.x = \frac{b^2 - n^2c^2}{b^2 + n^2c^2}$$

$$\cos.y = -\cos.x$$

$$\cos.z = -1$$

und für $n = \infty$ in die Werthe für die Glieder der makrodiagonalen Nebenreihe, oder die horizontalen Prismen von der Form $m\breve{P}\infty$

$$\cos.x = -1$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2 - b^2}{m^2a^2 + b^2}$$

$$\cos.z = -\cos.y$$

3) Für die Pyramiden der brachydiagonalen Zwischenreihen von der Form $m\bar{P}n$, in welchen $rc = c$, wird:

$$\cos.x = \frac{m^2a^2n^2b^2 - (m^2a^2 + n^2b^2)c^2}{m^2a^2n^2b^2 + (m^2a^2 + n^2b^2)c^2}$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2c^2 - (m^2a^2 + c^2)n^2b^2}{m^2a^2c^2 + (m^2a^2 + c^2)n^2b^2}$$

$$\cos.z = \frac{n^2b^2c^2 - (n^2b^2 + c^2)m^2a^2}{n^2b^2c^2 + (n^2b^2 + c^2)m^2a^2}$$

Diese Werthe verwandeln sich für $m = \infty$ in die entsprechenden für die brachydiagonalen Prismen:

$$\cos.x = \frac{n^2b^2 - c^2}{n^2b^2 + c^2}$$

$$\cos.y = -\cos.x$$

$$\cos.z = -1$$

und für $n = \infty$ in die Werthe für die Glieder der brachydiagonalen Nebenreihe, oder die horizontalen Prismen von der Form $m\bar{P}\infty$:

$$\cos.x = \frac{m^2a^2 - c^2}{m^2a^2 + c^2}$$

$$\cos y = -1$$

$$\cos.z = -\cos.x$$

§. 173.

Berechnung der Coefficienten m und n.

Aus den obigen Gleichungen für $\text{tang.}\frac{x}{2}$, $\text{tang.}\frac{y}{2}$ und $\text{tang.}\frac{z}{2}$ lassen sich die Werthe der Coefficienten m und n in den verschiedenen Pyramiden als Functionen der Kantenwinkel mit Leichtigkeit entwickeln, womit denn die zweyte wesentliche Aufgabe dieses Capitels gelöst wäre. Wir finden:

I) Für die Pyramiden mP der Hauptreihe:

1) wenn x bekannt ist,

$$m = \frac{bc}{a\sqrt{b^2\ \text{tang.}^2\frac{x}{2} - c^2}}$$

2) wenn y bekannt ist,

$$m = \frac{bc}{a\sqrt{c^2 \tan^2\frac{y}{2} - b^2}}$$

3) wenn z bekannt ist,

$$m = \frac{bc \tan\frac{z}{2}}{a\sqrt{b^2 + c^2}}$$

II. Für die makrodiagonalen Pyramiden $m\breve{P}n$:

1) wenn x und y bekannt sind,

$$m = \frac{b\sqrt{1 + \tan^2\frac{x}{2}}}{a\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}\tan^2\frac{y}{2} - 1}}$$

$$= \frac{b\cos\frac{y}{2}}{a\sqrt{\cos\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2}}}$$

$$n = \frac{b\cos\frac{y}{2}}{c\cos\frac{x}{2}}$$

2) wenn x und z bekannt sind,

$$m = \frac{b\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}\tan^2\frac{z}{2} - 1}}{a\sqrt{1 + \tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$m = \frac{b\sqrt{\cos.\frac{x+z}{2}\cos.\frac{x-z}{2}}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

$$n = \frac{b\sqrt{\text{tang.}^2\frac{x}{2}\,\text{tang.}^2\frac{z}{2} - 1}}{c\sqrt{1 + \text{tang.}^2\frac{z}{2}}}$$

$$= \frac{b\sqrt{\cos.\frac{x+z}{2}\cos.\frac{x-z}{2}}}{c\cos.\frac{x}{2}}$$

3) wenn y und z bekannt sind,

$$m = \frac{b\cos.\frac{y}{2}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

$$n = \frac{b\sqrt{1 + \text{tang.}^2\frac{z}{2}}}{c\sqrt{\text{tang.}^2\frac{y}{2}\,\text{tang.}^2\frac{z}{2} - 1}}$$

$$= \frac{b\cos.\frac{y}{2}}{c\sqrt{\cos.\frac{y+z}{2}\cos.\frac{y-z}{2}}}$$

III Für die brachydiagonalen Pyramiden $m\bar{P}n$:

1) wenn x und y bekannt sind,

$$m = \frac{c\sqrt{1 + \tang.^2\frac{y}{2}}}{a\sqrt{\tang.^2\frac{x}{2}\,\tang.^2\frac{y}{2} - 1}}$$

$$= \frac{c\cos.\frac{x}{2}}{a\sqrt{\cos.\frac{y+x}{2}\,\cos.\frac{y-x}{2}}}$$

$$n = \frac{c\cos.\frac{x}{2}}{b\cos.\frac{y}{2}}$$

2) wenn x und z bekannt sind,

$$m = \frac{c\cos.\frac{x}{2}}{a\cos.\frac{z}{2}}$$

$$n = \frac{c\sqrt{1 + \tang.^2\frac{z}{2}}}{b\sqrt{\tang.^2\frac{x}{2}\,\tang.^2\frac{z}{2} - 1}}$$

$$n = \frac{c \cos.\frac{x}{2}}{b\sqrt{\cos.\frac{x+z}{2}\ \cos.\frac{x-z}{2}}}$$

3) wenn y und z bekannt sind,

$$m = \frac{c\sqrt{\tang.^2\frac{y}{2}\ \tang.^2\frac{z}{2} - 1}}{a\sqrt{1 + \tang.^2\frac{y}{2}}}$$

$$= \frac{c\sqrt{\cos.\frac{y+z}{2}\ \cos.\frac{y-z}{2}}}{a \cos.\frac{z}{2}}$$

$$n = \frac{c\sqrt{\tang.^2\frac{y}{2}\ \tang.^2\frac{z}{2} - 1}}{b\sqrt{1 + \tang.^2\frac{z}{2}}}$$

$$= \frac{c\sqrt{\cos.\frac{y+z}{2}\ \cos.\frac{y-z}{2}}}{b \cos.\frac{y}{2}}$$

Anmerkung. Für die makrodiagonalen verticalen Prismen $\infty \breve{P}n$ ist,

$$n = \frac{b\,\mathrm{tang.}\frac{x}{2}}{c} = \frac{b\,\mathrm{cot.}\frac{y}{2}}{c}$$

für die brachydiagonalen verticalen Prismen $\infty\bar{P}n$,

$$n = \frac{c\,\mathrm{cot.}\frac{x}{2}}{b} = \frac{c\,\mathrm{tang.}\frac{y}{2}}{b}$$

für die makrodiagonalen horizontalen Prismen $m\breve{P}\infty$;

$$n = \frac{b\,\mathrm{cot.}\frac{y}{2}}{a} = \frac{b\,\mathrm{tang.}\frac{z}{2}}{a}$$

und endlich für die brachydiagonalen horizontalen Prismen $m\bar{P}\infty$,

$$n = \frac{c.\,\mathrm{cot.}\frac{x}{2}}{a} = \frac{c\,\mathrm{tang.}\frac{z}{2}}{a}$$

§. 174.

Berechnung des Coefficienten m, wenn n = m.

Da nicht selten der Fall eintritt, dass die beyden Coefficienten einer rhombischen Pyramide $m\breve{P}n$ einander gleich sind, wodurch die vollständige Bestimmung derselben nur von einer einzigen Messung abhängig wird, so ist es nothwendig, die diesem Falle angemessenen Werthe von m als Functionen der Kantenwinkel zu kennen. Man findet:

I. Fär makrodiagonale Pyramiden $m\breve{P}m$:

1) wenn x bekannt ist.

$$m = \frac{b\sqrt{a^2 \tan^2\frac{y}{2} - c^2}}{ac}$$

2) wenn y bekannt ist,

$$m = \frac{b \cot.\frac{y}{2} \sqrt{a^2 + c^2}}{ac}$$

3) wenn z bekannt ist,

$$m = \frac{b\sqrt{c^2 \tan^2\frac{z}{2} - a^2}}{ac}$$

II. Für brachydiagonale Pyramiden $m\bar{P}m$:

1) wenn x bekannt ist,

$$m = \frac{c \cot.\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

2) wenn y bekannt ist,

$$m = \frac{c\sqrt{a^2 \tan^2\frac{y}{2} - b^2}}{ab}$$

3) wenn z bekannt ist,

$$m = \frac{c\sqrt{b^2 \tan^2\frac{z}{2} - a^2}}{ab}$$

§. 175.

Bestimmung der Dimensionen a, b und c.

Was die Bestimmung des Dimensions-Verhältnisses a : b : c der Grundgestalt P betrifft, so sind dazu, wie zur Bestimmung jeder rhombischen Pyramide überhaupt, die Messungen zweyer ihrer Kanten erforderlich. Aus je zweyen derselben ergiebt sich dann sogleich vermittels der zu Ende von §. 171 aufgestellten Proportionen das Verhältniss zweyer ihrer Dimensionen; nämlich

$$1)\ b : c = \cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2}$$

$$2)\ a : c = \cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2}$$

$$3)\ a : b = \cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2}$$

Aus den Werthen für tang. $\frac{x}{2}$, tang. $\frac{y}{2}$ und tang. $\frac{z}{2}$ lassen sich aber folgende Gleichungen ableiten:

$$a = \frac{bc}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang.}^2\frac{x}{2} - c^2}} = \frac{bc}{\sqrt{c^2 \operatorname{tang.}^2\frac{y}{2} - b^2}}$$

$$b = \frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang.}^2\frac{x}{2} - c^2}} = \frac{ac}{\sqrt{c^2 \operatorname{tang.}^2\frac{z}{2} - a^2}}$$

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang.}^2\frac{y}{2} - b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang.}^2\frac{z}{2} - a^2}}$$

so dass mit Hülfe jener Gleichungen und obiger Proportionen aus je zwey gemessenen Kantenwinkeln der Grundgestalt das ihr entsprechende Verhältniss der Coordinaten a : b : c gefunden werden kann.

Anmerkung. Die Erfahrung scheint auf ein allgemeines Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit dieser drey Dimensionen zu verweisen, so dass jederzeit eine derselben der Summe der beyden übrigen, oder auch der Summe gewisser aliquoter Theile derselben gleich wäre *). So findet sich z. B. in vielen Krystallreihen $b = a + c$, in anderen $b = a + \frac{c}{2}$ oder $= c + \frac{a}{2}$; sollten sich diese und ähnliche einfache Verhältnisse für alle Krystallreihen des rhombischen Systemes bewähren, so würde sich dadurch die Bestimmung der Dimensionen der Grundgestalt um Vieles vereinfachen, vorausgesetzt, dass man in jedem Falle die besondere Form jenes Gesetzes der gegenseitigen Abhängigkeit vorläufig ausgemittelt hätte.

*) Vergl. meinen Aufsatz über die Dimensionen der Grundgestalten, Isis 1824, X S. 1092.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des rhombischen Systemes.

§. 176.

Wahl der Grundgestalt.

Die Zahl der in einer Combination enthaltenen Gestalten bestimmt sich nach der bekannten Regel (§. 38), dass die Flächen einer und derselben Gestalt gleichwerthige, (§. 1) und folglich genau so viele verschiedene Gestalten als vierlerley Flächen vorhanden seyn müssen. Die übrigen Bestimmungen der vorläufigen Entwicklung haben keine Schwierigkeiten, sobald die Grundgestalt und deren Normal-Stellung zweckmässig gewählt worden ist.

Das Prismen nicht zur Grundgestalt gewählt werden können, ergiebt sich aus dem Begriffe derselben; (§. 23, §. 27); wenn daher in einer rhombischen Combination keine, oder doch keine mit solchen Eigenschaften versehenen Pyramiden enthalten sind, welche dieselben zur Grundgestalt ganz vorzüglich geeignet erscheinen lassen, so beobachtet man die nämlichen Regeln, wie sie in ähnlichen Fällen für die tetragonalen Combinationen zu beobachten waren, d. h. man schliesst aus den Verhältnissen der vorhandenen Gestalten auf diejenige Grundgestalt, welche die leichtesten und zweckmässigsten Entwicklungen gewähren würde, oder lässt, wenn dergleichen Schlüsse aus den zu beobachtenden Verhältnissen nicht gefolgert werden können, die Grundgestalt ganz unbestimmt.

Die aufrechte Stellung wählt man zwar gern nach der Längenrichtung der Krystalle, wenn eine solche vorherrschend gegeben ist, doch dürfte in den meisten Fällen diejenige Stellung unbedingt den Vorzug verdienen, bey welcher möglichst viele Pyramiden und Prismen, die bey anderer Stellung Glieder der Zwischenreihen darstellen würden, als Glieder der Hauptreihe erscheinen, weil dadurch die Entwicklung bedeutend vereinfacht wird.

§. 177.

Allgemeine Combinationsgesetze.

Nach gewählter Grundgestalt und Normalstellung ergeben sich unmittelbar aus den Resultaten der Ableitung folgende vorläufige Bestimmungen:

1) Welche Gestalten Pyramiden, welche verticale und welche horizontale Prismen sind, indem alle achtzähligen Flächen zu Pyramiden, alle vierzähligen zu Prismen gehören.
2) Welche Gestalten in die Hauptreihe, welche in die makrodiagonalen oder brachydiagonalen Zwischenreihen, welche in die gleichnamigen Nebenreihen des Systemes gehören.

Für die besondere Entwicklung sind dann folgende ebenfalls unmittelbar aus der Ableitung hervorgehende Regeln zu beachten:

1) Die Flächen je zweyer Glieder einer und derselben horizontalen Reihe des allgemeinen Schemas in §. 170 bringen mit einander horizontale Combinationskan-

ten hervor; wenn also die Flächen zweyer Gestalten mPn und $m'Pn'$ in dergleichen Combinationskanten zusammentreffen, so ist $n = n'$.

2) Die Flächen je zweyer gleichnamiger (d. h. makrodiagonaler oder brachydiagonaler) Glieder einer und derselben verticalen Reihe bringen mit einander Combinationskanten hervor, welche den makrodiagonalen oder brachydiagonalen Polkanten des Gliedes der Hauptreihe parallel sind; wenn also die Flächen zweyer Gestalten $m\breve{\bar{P}}n$ und $m'\breve{\bar{P}}n'$ in dergleichen Combinationskanten zusammentreffen, so ist $m = m'$.

Anmerkung. Die Flächen der horizontalen Prismen $m\breve{\bar{P}}\infty$ werden daher die makrodiagonalen oder brachydiagonalen Polkanten aller rhombischen Pyramiden $m\breve{\bar{P}}n$ regelmässig abstumpfen.

§. 178.

Combinationsgleichungen.

Die im vierten Capitel der Propädeutik entwickelten Combinationsgleichungen für den Fall, da die Flächen einer unbekannten Gestalt $m''Pn''$ zwischen den Flächen zweyer bekannten Gestalten mPn und $m'Pn'$ mit parallelen Combinationskanten auftreten, erleiden für das rhombische System eine unbedeutende Veränderung, indem sie vorzüglich für folgende drey Fälle einzurichten sind:

1) Alle drey Flächen gehören makrodiagonalen Pyramiden,

2) Alle drey Flächen gehören brachydiagonalen Pyramiden,

3) Von den bekannten Flächen gehört die eine einer makrodiagonalen, die andere einer brachydiagonalen Pyramide.

Erster Fall.

Da wir die Makrodiagonale der Grundgestalt $= b$, die Brachydiagonale derselben $= c$ setzten, so werden wir in den Formeln A und B des §. 43 vermöge der Statt findenden Verhältnisse

$$\begin{array}{ccccc} ma & : & b & : & nc \\ m'a & : & b & : & n'c \\ m''a & : & b & : & n''c \end{array}$$

$n' = n = 1$ zu setzen, und darauf statt den Buchstaben r'', r' und r die Buchstaben n'', n' und n zu schreiben haben, um ihnen die dem gegenwärtigem Falle angemessene Gestalt zu verleihen. So erhalten wir für den Fall, dass die Flächen einer unbekannten Gestalt $m''\breve{P}n''$ zwischen denen der behannten Gestalten mPn und $m'\breve{P}n$ mit parallelen Combinationskanten auftreten, folgende Combinationsgleichungen zur Bestimmung von m'' und n''.

$$\text{A)} \quad m'' = \frac{n''(n'-n)mm'}{n''(mn'-m'n)+(m'-m)nn'},$$

$$\text{B)} \quad n'' = \frac{m''(m'-m)nn'}{m''(m'n-mn')+(n'-n)mm'}$$

welche, wie sich leicht voraussehen liess, mit denen identisch sind, die oben §. 155 für die Combinationen des Tetragonal-Systemes gefunden wurden.

Zweyter Fall. Dass für diesen Fall die Combinationsgleichungen des vorigen Falles gelten müssen, ist begreiflich, weil die Verhältnisse zwischen den Gestalten $m\bar{P}n$, $m'\bar{P}n'$ und $m''\bar{P}n''$ in Bezug auf das betrachtete Combinationsverhältniss ganz und gar dieselben sind, welche zwischen den Gestalten $m\breve{P}n$, $m'\breve{P}n'$ und $m''\breve{P}n''$ Statt fanden.

Dritter Fall. Die eine der bekannten Flächen $m\breve{P}n$, gehört einer makrodiagonalen, die andere, $m'\bar{P}n'$, einer brachydiagonalen Gestalt. Hier sind in Bezug auf die dritte Fläche $m''Pn''$ zwey Möglichkeiten vorhanden, indem sie entweder einer makrodiagonalen oder einer brachydiagonalen Gestalt angehören kann. Ist sie eine $m''\bar{P}n''$, so wird

$$A')\quad m'' = \frac{n''(nn'-1)\,mm'}{n''(m'n-m)\,n'+(mn'-m')\,n}$$

$$B')\quad n'' = \frac{m''(mn'-m')\,n}{(nn'-1)\,mm'-m''(m'n-m)\,n'}$$

Ist sie dagegen eine $m''\breve{P}n''$, so wird

$$A'')\quad m'' = \frac{n''(nn'-1)\,mm'}{n''(mn'-m')\,n+(m'n-m)\,n'}$$

$$B'')\quad n = \frac{m''(m'n-m)\,n'}{(nn'-1)\,mm'-m''(mn'-m')\,n}$$

§. 179.

Entwicklung einer Combination des rhombischen Hal-Barytes.

Da es nöthig ist, durch einige Beyspiele die Methode der Entwicklung der Combinationen des rhombischen Systemes zu erläutern, so wähle ich dazu einige von denjenigen Combinationen, welche auf der zweyten der zum zweyten Theile des Grundrisses der Mineralogie von Mohs gehörigen Kupfertafeln und auf beyfolgender Tafel III Fig. 5—8 gezeichnet sind. Fig. 5 stellt eine fünfzählige Combination des rhombischen Hal-Barytes oder Schwerspathes dar; stellen wir dieselbe nach der Axe des Prismas *o* aufrecht, und wählen wir die einzige in der Combination auftretende Pyramide *z* zur Grundgestalt P, so ordnen sich die fünf Gestalten folgendermassen: es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen *z*
   - - - - - - - - *o*
2) Gl. d. brachydiagonalen Nebenreihe d. F. *M*
3) Gl. d. makrodiagonalen Nebenreihe d. F. *d*
   - - - - - - - - *P*

Dass *z* und *o* in eine und dieselbe horizontale Reihe des Schemas, und zwar in die Hauptreihe gehören, folgt aus der horizontalen Lage ihrer Combinationskante und aus der Annahme von *z* als Grundgestalt; folglich ist

$$o = \infty P$$

Da nun $M = m\bar{P}\infty$ die brachydiagonalen Polkanten der Grundgestalt regelmässig abstumpft, so ist $m = 1$ und

$$M = \bar{P}\infty$$

Weil die Flächen P und o verticale Combinationskanten hervorbringen, so gehört erstere dem makrodiagonalem Flächenpaare, und es wird

$$P = \infty\breve{P}\infty$$

Es ist also nur noch die Bestimmung der Flächen $d = m''\breve{P}\infty$ übrig. Da dieselben mit parallelen Combinationskanten zwischen den Flächen $z = P$ und $o = \infty P$ erscheinen, jedoch so, dass die jeder Fläche d in dieser Hinsicht entsprechenden Flächen o und z in verschiedenen Raum-Octanten gelegen sind, so ist in der Combinationsgleichung A entweder n oder n' negativ zu nehmen, damit sie dem gegenwärtigem Falle angemessen werde. Da nun $n'' = \infty$, so erhalten wir für negatives n' oder n

$$m'' = \frac{(n' + n)\,mm'}{mn' + m'n}$$

und da ferner $m' = \infty$,

$$n'' = m = n = 1$$

so wird $m'' = 2$

und $d = m''\breve{P}\infty = 2\breve{P}\infty$

Sonach ist die Combination ohne alle Beyhülfe von Messungen vollständig entwickelt, und ihr Zeichen etwa folgendergestalt zu schreiben:

$$2\breve{P}\infty\,.\,\infty P\,.\,\infty\breve{P}\infty\,.\,\bar{P}\infty\,.\,P$$

Anmerkung. Die Zeichen der einzelen Gestalten folgen so auf einander, wie diess der Grad ihres Vorherrschens erfordert. Da sowohl $2\breve{P}\infty$ als ∞P

ganz vorzüglich, jedoch jenes noch mehr als dieses vorherrschend ist, so könnte man ihr Verhältniss zu einander und zu den übrigen Gestalten dadurch bezeichnen, dass man ihre Zeichen nur durch ein Semikolon trennte, und beyde gemeinschaftlich in Klammern einschlösse. Weil nun zwischen $\infty\breve{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ ungefähr dasselbe Verhältniss Statt findet, so würde obiges Zeichen etwa folgende Gestalt erhalten:

$$(2\breve{P}\infty\,;\,\infty P);(\infty\breve{P}\infty\,;\bar{P}\infty).P$$

§. 180.

Entwicklung zweyer Combinationen des rhombischen Topases.

Fig. 6 und Fig. 7 stellen zwey Combinationen des rhombischen Topases vor, von welchen die erstere eine fünf- die andere eine acht-zählige ist. Wählt man die Pyramide *o* zur Grundgestalt, so ergeben sich bey aufrechter Stellung nach der Axe des Prismas *M* sogleich folgende vorläufige Bestimmungen: es gehören:

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen *P*
\- - - - - - - - *s*
\- - - - - - - - *o*
\- - - - - - - - *M*

2) Gl. makrodiagonaler Zwischenreihen d. Fl. *x*
\- - - - - - - - - - *l*

3) Gl. d. makrodiagonalen Nebenreihe d. Fl. *n*
\- - - - - - - - - - *y*

Das Verhältniss der Grund-Dimensionen a : b : c ist = 898 : 1894 : 1000. Da nun $o = P$, so wird

$M = \infty P$, $P = oP$ und s irgend eine Pyramide mP, in welcher $m < 1$; die Messung der Kante $s : P$ und das daraus folgende Dimensionsverhältniss für s lehrt, dass

$$s = \tfrac{2}{3}P$$

Somit wären denn alle Glieder der Hauptreihe bestimmt. Dass die beyden Glieder der Zwischenreihen, nämlich die makrodiagonale Pyramide x und das gleichnamige Prisma l in eine und dieselbe horizontale Reihe gehören, und folglich rechter Hand vom Grundelemente ihrer Zeichen denselben Coefficienten haben, folgt nothwendig aus der horizontalen Lage ihrer Combinationskante. Die Messung der Kante $l : l$ lehrt, dass

$$l = \infty\breve{P}2$$

folglich ist $x = m''\breve{P}2$

Bevor wir zur Bestimmung von m'' schreiten, wollen wir die beyden makrodiagonalen horizontalen Prismen n und y mit Hülfe der Kanten $n : P$ und $y : P$ bestimmen, da eine unmittelbare Bestimmung derselben wegen des Mangels an Parallelismus ihrer Combinationskanten mit schon bekannten Gestalten unmöglich ist; aus den angegebenen Kantenwinkeln ergiebt sich

$$n = 2\breve{P}\infty$$

$$y = 4\breve{P}\infty$$

Es erscheinen aber die Flächen der Pyramide $x = m''\breve{P}2$ zwischen denen der Pyramide $o = P$ und des horizontalen Prismas $n = 2\breve{P}\infty$ mit parallelen Combinationskanten; da nun alle drey Flächen als makrodiagonale zu betrachten sind, so kommt zur Bestimmung von m'' die Formel A in Anwendung, indem man die Werthe

$$m = n = 1$$
$$m' = 2, \quad n' = \infty$$
$$\text{und } n'' = 2$$

in dieselbe einführt. Dadurch findet sich unmittelbar

$$m'' = \tfrac{4}{3}$$
$$\text{und } x = \tfrac{4}{3}\breve{P}2 \text{ *)}$$

Somit wären denn sämmtliche in den gegebenen Combinationen enthaltene Gestalten bestimmt, folglich die Combinationen selbst entwickelt, und ihre Zeichen etwa so zu schreiben:

$$\text{Fig. } 6 = \infty P . \infty\breve{P}2 . P . 2\breve{P}\infty . \tfrac{4}{3}\breve{P}2.$$

$$\text{Fig. } 7 = \infty P . \infty\breve{P}2 . 0P . P . 2\breve{P}\infty . \tfrac{4}{3}\breve{P}2 . \tfrac{2}{3}P . 4\breve{P}\infty .$$

§. 181.

Entwicklung einer Combination des prismatoidischen Antimon-Glanzes.

Fig. 8 stellt eine siebenzählige Combination des prismatoidischen Antimonglanzes dar. Wählt man die Pyramide *P* zur Grundgestalt, und stellt dieselbe nach der Axe des Prismas *m* aufrecht, so ergeben sich folgende vorläufige Bestimmungen: es gehören:

---

*) Dasselbe Resultat hätte man aus dem Parallelismus der Kanten *s* : *x* und *s* : *s* folgern können; weil jedoch dieser Parallelismus wegen der geringen Ausdehnung der Flächen *s* nicht sehr in die Augen fällt, so zog ich die gegebene Entwicklung vor.

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen P
- - - - - - - - s
- - - - - - - - m
2) Gl. d. makrodiagonalen Zwischenreihen e
- - - - - - - b
3) Gl. d. makrodiagonalen Nebenreihe d. Fl. a
- - - - - - - - o

Das Verhältniss der Grund-Dimensionen a : b : c ist ungefähr = 50 : 49 : 48.

Da nun $P = \text{P}$, so folgt:

$$m = \infty\text{P}$$

$$o = \infty\breve{\text{P}}\infty$$

Die Pyramide s ist nicht unmittelbar zu bestimmen; misst man aber die Combinationskante s : P, so erhält man nach Subtraction der halben Mittelkante von P für s das Verhältniss $\frac{1}{3}$ a : b : c, und folglich

$$s = \tfrac{1}{3}\text{P}$$

Die Flächen des horizontalen Prismas $a = \text{m}''\breve{\text{P}}\infty$ erscheinen zwischen den Flächen der beyden Pyramiden $s = \frac{1}{3}\text{P}$ und $P = \text{P}$ mit parallelen Combinationskanten, und da sie alle drey als makrodiagonale Gestalten betrachtet werden können *), so findet auch hier wiederum die Gleichung A ihre Anwendung, erleidet jedoch, weil die Flächen, zwischen welchen die parallelen Kanten hervorgebracht werden, in verschiedenen Raum-Octanten gelegen sind, eine von dieser Verschiedenheit der Lage abhängige Modification. Setzen wir nämlich für

*) Denn jedes Glied der Hauptreihe lässt sich eben so wohl als ein m$\breve{\text{P}}$ oder als ein m$\bar{\text{P}}$ ansehen.

die Fläche *P* alle drey Coordinaten positiv, so muss die Coordinate c für die entsprechende Fläche *s* negativ genommen werden, weil sie in dem benachbartem Raum-Octanten gelegen und die Combinationsgleichung zunächst für lauter positive Coordinaten berechnet ist. Es sey nun

$$P = \mathrm{P} = \mathrm{mPn}$$
$$s = \tfrac{1}{3}\mathrm{P} = \mathrm{m'Pn'}$$

so ist z. B. für positives n, n' negativ zu nehmen, wodurch die Gleichung A zuvörderst folgende Gestalt erhält:

$$m'' = \frac{n''(n' + n)\,mm'}{n''(mn' + m'n) - (m' - m)\,nn}$$

Da aber $n'' = \infty$, so wird

$$m'' = \frac{(n' + n)\,mm'}{mn' + m'n}$$

und weil $m = n = n' = 1$

dagegen $m' = \frac{1}{3}$

so wird

$$m'' = \frac{(1 + 1)\,\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

und folglich $a = \frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$

§. 182.

Fortsetzung.

Was die beyden makrodiagonalen Pyramiden *e* und *b* betrifft, so finden sich beyde in dem gleichem

Falle, dass ihre Flächen zwischen denen der Grundgestalt P und denen eines Gliedes der makrodiagonalen Nebenreihe $m'\breve{P}\infty$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen. Setzt man daher in der Gleichung A

$$m = n = 1$$
$$\text{und } n' = \infty$$

so erhält man

$$m'' = \frac{n''m'}{n''+m'-1}$$

als denjenigen Werth von m'', welcher beyden Pyramiden entspricht.

Nun ist für *b* der Coefficient $m' = \infty$,

$$\text{also } m'' = n''$$
$$\text{und } b = mPm$$

zu dessen vollständiger Bestimmung eine Messung erfordert wird.

Für *e* ist der Coefficient $m' = \frac{1}{2}$,

$$\text{und folglich } m'' = \frac{n''}{2n''-1}$$

Weil aber die Combinationskanten zwischen *s* und *e* den brachydiagonalen Polkanten der Pyramide $s = \frac{1}{3}P$ parallel laufen, so muss auch das Verhältniss

$$m'' : n'' = 1 : 3$$
$$\text{oder } m'' = \frac{n''}{3}$$

Statt finden; aus beyden Gleichungen folgt dann:

$$n'' = 2,$$
$$m'' = \frac{2}{3}$$
$$\text{und } e = \frac{2}{3}\check{P}2$$

Somit wären alle in der gegebenen Combination enthaltene Gestalten so weit bestimmt, als es ohne Beyhülfe von Messungen möglich ist, und die Combination wird etwa folgendergestalt zu schreiben seyn:

$$\infty P . P . \infty \breve{P} \infty . \tfrac{1}{3} P . m\breve{P}m . \tfrac{1}{2}\breve{P}\infty . \tfrac{2}{3} P 2.$$

VIERTER ABSCHNITT.

VOM KLINOMETRISCHEM ODER KLINORHOMBISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des klinorhombischen Systemes.

§. 183.

Umfang nnd Name des Systemes.

Das klinorhombische System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Ungleichheit und Rechtwinkligkeit einer gegen zwey schiefwinklige Dimensionen ausgesprochen ist, begreift alle trimetrischen, klinobasischen Gestalten, deren basische Schnitte Rhomben sind, und keine anderen. Weil es das erste System ist, in welchem uns statt Rechtwinkligkeit aller Dimensionen Schiefwinkligkeit zweyer derselben begegnet, so nennen wir es auch das klinometrische System schlechthin, wofür wir eigentlich, da nur eine Dimension gegen eine geneigt ist, um consequent zu seyn, monoklinometrisches System sagen müssten, zum Unterschiede von den für die folgenden Systeme weiter unten gebrauchten Namen diklinometrisches und triklinometrisches

System, weil in ersterem eine Dimension gegen zwey oder auch zwey Dimensionen gegen eine, in letzterem dagegen alle drey Dimensionen gegen einander geneigt sind. Mohs nennt es das prismatische System mit einfach abweichender Axe, wodurch allerdings die wesentliche Eigenthümlichkeit desselben ausgesprochen wird; Weiss das zwey- und ein-gliedrige (zum Theil auch das ein- und zwey-gliedrige) System.

§. 184.

Normale Stellung der Gestalten.

Die Gestalten des klinometrischen Systemes befinden sich in normaler Stellung, wenn eine der schiefwinkligen Dimensionen aufrecht steht, während die andere in eine und dieselbe Verticalebene mit der Augenaxe des Beobachters fällt; daher giebt es möglicherweise für alle Gestalten einer klinorhombischen Krystallreihe, in welcher die relative Lage der Dimensionen bestimmt worden ist, zwey verschiedene Normal-Stellungen, von denen jedoch stets die eine sowohl eine bequemere Entwicklung der Combinationen, als auch eine leichtere Uebersicht der einzelnen Gestalten gewährt, als die andere, weshalb die Wahl zwischen beyden keinesweges ganz willkührlich ist. Nur muss, gleichwie im rhombischem Systeme, die einmal gewählte Normalstellung consequent beybehalten werden; worauf die senkrechte Dimension die Axe, die geneigte Dimension die Klinodiagonale, und die horizontale Dimension die Orthodiagonale der Krystallreihe oder ihrer Grundgestalt genannt wird.

§. 185.

Geschlossene Gestalten des Systemes.

Die geschlossenen Gestalten des klinometrischen Systemes sind keine einfachen, sondern zusammengesetzte Gestalten (§. 6), indem sie in zwey Theilgestalten zerfallen, deren jede von zwey Gegenflächenpaaren (§. 5) als ihren Gliedern gebildet wird. Jede vollständige geschlossene Gestalt erscheint nämlich als eine klinorhombische oder klinometrische Pyramide, welche in normaler Stellung dem Beobachter ein vorderes oberes Glied (§. 6) ihrer einen, und ein vorderes unteres Glied ihrer anderen Theilgestalt präsentirt. Uebrigens bietet der Inbegriff der Gestalten des klinorhombischen, eben so wie jener des rhombischen Systemes nur wenig Mannichfaltigkeit dar, indem sich ausser den klinorhombischen Pyramiden verschiedener Ordnungen nur noch verticale, geneigte und horizontale Prismen unterscheiden lassen, auf welche letztere jedoch die zu Ende des §. 116 stehende Bemerkung gleichfalls anzuwenden ist.

§. 186.

Klinorhombische oder klinometrische Pyramiden.

Syn. Einfache Rhomboidaloktaeder, Bernhardi.
Ungleichschenklige vierseitige Pyramiden mit einfacher Abweichung, Mohs.
Octaedra pyramidibus obliquis? Weiss. *)

Die klinorhombischen Pyramiden (oder Dipyramiden) sind von acht zweyerley ungleichseitigen Drey-

*) Vergl. *Weiss, de indagando etc. p.* 27. Eigentlich meint der Verf. die Combination $+ P_\infty . - P_\infty . (P_\infty)$; jedoch passt der dafür gewählte Name seiner allgemeinen Bedeutung nach auch auf unsre Pyramiden.

ecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, wiewohl ihr Mittelquerschnitt kein Hauptschnitt ist. Sie haben, wie die rhombischen Pyramiden, 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Flächen haben insgesammt ein Paar gleicher Seiten, aber nur je vier derselben sind gleichwinklig, und untereinander gleich und ähnlich; daher giebt es zweyerley Flächen, welche dergestalt in vier Flächenpaare vertheilt sind, dass sich zwey einander gegenüberliegende Paare als congruente Gegenflächenpaare (§. 5) verhalten, und zu einer und derselben Theilgestalt oder Hemipyramide vereinigen.

Die Kanten sind viererley: a) 2 längere, stumpfere Polkanten der einen, b) 2 kürzere, schärfere Polkanten der anderen Theilgestalt, c) 4 von beyden Theilgestalten gemeinschaftlich gebildete Polkanten, d) 4 dergleichen Mittelkanten.

Die Ecke sind insgesammt vierkantig und unregelmässig, aber dreyerley: a) 2 dreyerleykantige Polecke, b) 2 ebenfalls dreyerleykantige an den Endpuncten der Klinodiagonale, und c) 2 zweyerleykantige an den Endpuncten der Orthodiagonale gelegene Mittelecke.

Die Querschnitte sind meist symmetrische Trapezoide (§. 2), der Mittelquerschnitt aber jederzeit ein Rhombus; der basische und der orthodiagonale Hauptschnitt ist rhombisch, der klinodiagonale Hauptschnitt rhomboidisch.

Anmerkung. Die Theilgestalten jeder zusammengesetzten Gestalt können, wenn auch nicht selbstständig, doch einzeln auftreten, so dass die Erscheinung der einen keineswegs an die Erscheinung der anderen gebunden ist. Dadurch werden ganz eigenthümliche Combinationen zum Vorscheine kommen, deren Verhältnisse sich jedoch nach den allgemeinen Gesetzen und Gleichungen für die Combinationen trimetrischer Systeme bestimmen lassen müssen.

§. 187.

Benennung der Theilgestalten und ihrer Elemente.

Zum Behufe der leichteren mündlichen und schriftlichen Verständigung wird es nöthig, die verschiedenen Theilgestalten, Kanten und Ecke der klinorhombischen Pyramiden mit besonderen Namen zu bezeichnen. Wir nennen daher diejenige Hemipyramide, deren Flächen die kürzeren und schärferen Polkanten bilden die positive Hemipyramide +P, die andere die negative Hemipyramide −P, ihre beyderseitigen Polkanten die positiven und negativen, die übrigen dagegen die neutralen oder auch die orthodiagonalen Polkanten. Die Mittelecke sind theils orthodiagonale, zweyerleykantige, seitliche, theils klinodiagonale, dreyerleykantige, vordere und hintere. Die hinteren Glieder der Theilgestalten einer in normaler Stellung befindlichen klinometrischen Pyramide erhalten die Zeichen +p und −p, sobald ihre besondere Unterscheidung nothwendig wird; wobey +p das Gegenflächenpaar von +P, −p das Gegenflächenpaar von −P bedeutet; jedoch verstehen wir gewöhnlich unter +P und −P die vollständige Theilgestalt schlechthin. Ist es endlich nöthig, die einzelen Flächen zu unterscheiden, so werden die linke obere vordere Fläche mit $+P'$ die linke untere vordere Fläche mit $-P'$, und die ihnen entsprechenden hinteren Gegenflächen mit $+p'$ nnd $-p'$, bezeichnet, während die übrigen Flächen die Zeichen der ganzen Theil-Gestalten behalten.

Anmerkung. Da, wie wir im drittem Capitel sehen werden, die Formeln für die trigonometrischen Functionen der positiven und negativen Polkanten nur durch die in ihnen auftretenden positiven und negativen Werthe des Cosinus der Neigung der Axe gegen die Klinodiagonale unterschieden sind, so dürfte die Uebertragung dieser Ausdrücke auf die respectiven Kanten und auf die denselben entsprechenden Theilgestalten nicht unpassend genannt werden.

§. 188.

Prismen des Systemes.

Unter den Prismen des klinometrischen Systemes lassen sich folgende drey wesentlich verschiedene Arten unterscheiden:

1) Verticale Prismen mit rhombischen Querschnitten; ihre Axe fällt in die verticale Dimensionslinie des Systemes oder in die Axe der Grundgestalt.

2) Horizontale Prismen mit rhomboidischen Querschnitten; ihre Axe fällt in die horizontale Dimensionslinie des Systemes, oder in die Orthodiagonale der Grundgestalt; ihre Flächen sind zweyerley, sie selbst somit aus zwey Theilgestalten zusammengesetzt, und des theilweisen Auftretens fähig. Jede ihrer Theilgestalten, oder jedes horizontale Hemiprisma stellt

ein paralleles Flächenpaar dar, und wir unterscheiden, gemäss den in der Anmerkung des vorigen §. enthaltenen Bestimmungen, ein positives und ein negatives Hemiprisma.

3) Geneigte Prismen mit rhombischen Querschnitten; ihre Axe fällt in die Klinodiagonale der Grundgestalt, oder in die geneigte Dimensionslinie des Systemes.

ZWEYTES CAPITEL.

Von der Ableitung der verschiedenen Gestalten des klinometrischen Systemes.

§. 189.

Hülfsvorstellung bey der Ableitung.

Für die Ableitung der Gestalten des klinometrischen Systemes legen wir irgend eine klinometrische Pyramide zu Grunde, und entwickeln aus ihr den Inbegriff aller übrigen Gestalten gerade so, als ob sie jederzeit vollständig und in derjenigen Regelmässigkeit erschiene, welche ein vollkommenes Gleichgewicht der Ausbildung ihrer beyden Theilgestalten voraussetzen würde. Obgleich nun die Wirklichkeit dieser Voraussetzung niemals, oder höchst selten, und auch dann nur annäherungsweise entspricht, so müssen wir sie doch als Hülfshypothese gelten lassen, um zu einer leichteren und bestimmteren Uebersicht sämmtlicher einzeler Gestalten sowohl als ihres gegenseitigen Zusammenhanges zu gelangen.

§. 190.

Grundgestalt.

Was die Wahl der Grundgestalt und die Bestimmung ihrer Stellung betrifft, so gelten für dieselbe *mutatis mutandis* buchstäblich die für die Grundgestalt des rhombischen Systemes in §. 165 enthaltenen Bemerkungen. Wir wählen daher irgend eine klinorhombische Pyramide von unbestimmtem Verhältnisse ihrer Dimensionen, von unbestimmtem Neigungswinkel der Axe gegen die Klinodiagonale zur Grundgestalt, bezeichnen sie mit $\pm$P und bestimmen ihr ein für allemal ihre aufrechte Stellung. Setzen wir nun:

die aufrechte Halbaxe	=	a
die halbe Klinodiagonale	=	b
die halbe Orthodiagonale	=	c
den Winkel von a und b	=	α

und den Cosinus dieses Winkels für den Halbmesser a, oder den zwischen dem Mittelpuncte der Pyramide und dem Fusspuncte der von a auf b gefällten Normale befindlichen Abschnitt von b = d, so drückt allgemein a : b : c : d das unbestimmte Verhältniss der Elemente oder Grunddimensionen des klinorhombischen Systemes aus *), indem wir statt des Winkels α die Grösse d als Hülfsdimension einführen.

Anmerkung 1. Die Reduction des Winkels α auf eine Lineargrösse d = a cos.α wird nothwendig, da man in den Calcul doch nicht die Winkel als solche, sondern nur die ihnen entsprechenden trigonometrischen Linien einführen kann. Dass wir aber a unmittelbar,

*) Mohs a. a. O. II, S. VI.

und nicht a sin.α oder die von a auf b gefällte Normale als die eine der Dimensionen einführen, geschieht deshalb, weil es nicht ganz zweckmässig seyn dürfte, ausser den ursprünglichen drey Dimensionslinien noch andere, gleichsam secundäre dergleichen Linien in den Raum hinein zu construiren, sobald man es vermeiden kann.

Anmerkung. 2. Durch bestimmte numerische Angabe des Verhältnisses a : b : c : d wird jederzeit der Begriff der klinorhombischen Pyramide vollständig individualisirt, indem für jedes dergleichen Verhältniss nur eine Pyramide möglicherweise construirt werden kann. Da es jedoch einzig und allein auf das Verhältniss, nicht auf die absolute Grösse der Dimensionen ankommt, so setzt die vollständige Bestimmung jeder klinometrischen Pyramide, und folglich auch der Grundgestalt jeder Krystallreihe des klinometrischen Systemes nicht mehr und nicht weniger als drey Kantenmessungen, überhaupt drey Beobachtungselemente voraus.

§. 191.

Hauptreihe des Systemes.

Aus der Grundgestalt $\pm$P lässt sich eine Reihe klinorhombischer Pyramiden von derselben Basis und Stellung ableiten.

Man setze die Axe veränderlich, während die Diagonalen ihre ursprünglichen Werthe behalten, und bezeichne jeden anderen grösseren oder kleineren Werth der ersteren mit ma. Legt man nun für jeden bestimmten Werth von m Ebenen durch die Mittelkanten der Grundgestalt, und die Endpuncte der verlängerten oder verkürzten Axe, so resultirt eine klinorhombische Pyramide von mfacher Axe aber gleicher und ähnlicher Basis, deren Zeichen $= \pm$ mP seyn wird. Da nun m möglicherweise alle rationalen Werthe zwischen o und ∞, und diese Gränzwerthe selbst erhalten kann, so ist ein zahlloser Inbegriff von dergleichen Pyramiden möglich, welcher sich unter dem Schema folgender Reihe darstellen lässt:

$$oP \;...\; \pm mP \;...\; \pm P \;...\; \pm mP \;...\; \infty P$$

in welcher die Glieder linker Hand insgesammt niedriger, die Glieder rechter Hand höher als die Grundgestalt $\pm$ P sind.

Anmerkung. Diese Reihe heisst wiederum die Hauptreihe des Systemes, ist aber eigentlich eine Doppelreihe, indem die positiven und negativen Theilgestalten in gegenseitiger Unabhängigkeit neben einander fortlaufen, und jedes + mP keinesweges an sein − P so gebunden ist, dass beyde jederzeit zugleich auftreten müssten. Nur in den Gränzgliedern der Reihe verschwindet diese Zweydeutigkeit, indem oP, wie in allen Systemen, die Basis, oder jede mit ihr parallele Fläche (§. 125) und ∞P das verticale Prisma der Hauptreihe bedeutet, welches immer auf dieselbe Weise erscheint, man mag es nun als + ∞P oder als − ∞P oder auch als eine Combination von beyden betrachten. Die Combination oP. ∞P stellt daher ein Rhombenprisma mit schief angesetzter Endfläche, ein Hendyoeder dar.

§. 192.

Reihen der klinodiagonalen und orthodiagonalen klinometrischen Pyramiden.

Aus jedem Gliede der Haupteihe lassen sich zwey Reihen von Pyramiden ableiten, in welchen einerseits die Klinodiagonale, anderseits die Orthodiagonale der Grundgestalt unverändert enthalten ist.

Man setze in irgend einem Gliede der Hauptreihe $\pm mP$ die Klinodiagonale constant, die Orthodiagonale dagegen veränderlich, so dass sie nach einander alle möglichen Werthe von c bis ∞ annehmen kann. Legt man darauf für jeden bestimmten dergleichen Werth nc Ebenen durch die klinodiagonalen Polkanten der Pyramide und durch die Endpuncte ihrer verlängerten Diagonale 2nc, so wird eine klinorhombische Pyramide zwar von derselben Axe und Klinodiagonale wie $\pm mP$, allein von grösserer Orthodiagonale, daher auch von verschiedener Basis und verschiedenen Querschnitten zum Vorschein kommen, deren Zeichen ungefähr $\pm mPn$ zu schreiben seyn würde. Um jedoch im Zeichen wie im Namen das sehr wesentliche Verhältniss auszudrücken, dass nicht die Orthodiagonale, sondern die Klinodiagonale der Grundgestalt noch unverändert in der neuen Gestalt enthalten sey, so nennen wir jede dergleichen Pyramide eine *klinodiagonale Pyramide*, und geben ihr ausschliesslich das Zeichen $\pm mPn$. Da nun n alle möglichen rationalen Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so ergiebt sich aus jedem Gliede der Hauptreihe ein sehr zahlreicher Inbegriff von klinodiagonalen Pyramiden, welcher unter dem Schema folgender Reihe vorgestellt werden kann:

$$\underline{+}mP \ldots \underline{+}mPn \ldots \underline{+}mP\infty$$

Anmerkung. 1. Das letzte Glied dieser Reihe oder Doppelreihe stellt ein horizontales Prisma von rhomboidischen Querschnitten dar, in welchem, wie in allen übrigen Gliedern der Reihe der Unterschied eines $+mP\infty$ und eines $-mP\infty$ gegeben ist, indem es in zwey horizontale Hemiprismen zerfällt, die in Bezug auf ihre Erscheinung ganz unabhängig von einander sind.

§. 193.

Fortsetzung.

Ganz auf gleiche Weise erhält man aus jedem Gliede der Hauptreihe $\underline{+}mP$, indem man die Orthodiagonale constant, und die Klinodiagonale von b bis ∞ veränderlich setzt, eine Reihe von Pyramiden, in welchen die Orthodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten iht. Wir nennen daher jede dergleichen Pyramide eine orthodiagonale Pyramide, und geben ihr das allgemeine Zeichen $\underline{+}(mPn)$. Da aber wiederum die Mannichfaltigkeit der möglichen Werthe von n einen zahllosen Inbegriff möglicher orthodiagonaler Pyramiden begründet, so ordnen wir denselben in das Schema folgender Reihe:

$$\underline{+}mP \ldots \underline{+}(mPn) \ldots (mP\infty)$$

in welcher alle mögliche dergleichen Pyramiden enthalten sind.

Anmerkung. 1. Das Gränzglied dieser Reihe ist ein geneigtes Prisma von rhombischen Querschnitten, in welchem die Zweydeutigkeit der Bezeichnung + und - wegfällt, da $+(\mathrm{mP}\infty) = -(\mathrm{mP}\infty)$.

§. 194.

Fortsetzung.

Wenn wir die Ableitungen der beyden vorhergehenden §§. auf $\infty\mathrm{P}$ oder das verticale Prisma der Hauptreihe anwenden, so erhalten wir zwey Reihen klinorhombischer Prismen, in welchen einerseits die Klinodiagonale, anderseits die Orthodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist, weshalb wir sie in Uebereinstimmung mit den entsprechenden Reihen der Pyramiden die Reihen der klinodiagonalen und orthodiagonalen Prismen nennen. Ihre schematische Form ist folgende

$$\infty\mathrm{P} \ldots \infty\mathrm{Pn} \ldots \infty\mathrm{P}\infty$$
$$\infty\mathrm{P} \ldots (\infty\mathrm{Pn}) \ldots (\infty\mathrm{P}\infty)$$

und ihre beyderseitigen Gränzglieder stellen parallele Flächenpaare vor, von welchen das eine $\infty\mathrm{P}\infty$ dem orthodiagonalem, das andere $(\infty\mathrm{P}\infty)$ dem klinodiagonalem Hauptschnitte der Grundgestalt parallel ist.

§. 195.

Uebersicht.

Durch die bisherigen Ableitungen haben wir den ganzen möglichen Inbegriff der Gestalten des klinorhombischen Systemes erschöpft; vereinigen wir also sämmtliche Reihen der vorherigen §§. in ein einziges Schema, so erhalten wir in demselben eine vollständige Uebersicht des Systemes und seiner Gliederung, wie folgt:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
oP\infty & \ldots & \pm mP\infty & \ldots & \pm P\infty & \ldots & \pm mP\infty & \ldots & \infty P\infty \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oPn & \ldots & \pm mPn & \ldots & \pm Pn & \ldots & \pm mPn & \ldots & \infty Pn \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & \pm mP & \ldots & \pm P & \ldots & \pm mP & \ldots & \infty P \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(oPn) & \ldots & \pm(mPn) & \ldots & \pm(Pn) & \ldots & \pm(mPn) & \ldots & (\infty Pn) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(oP\infty) & \ldots & (mP\infty) & \ldots & (P\infty) & \ldots & (mP\infty) & \ldots & (\infty P\infty)
\end{array}
$$

Aus der Betrachtung dieses Schema's ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften desselben:

1) Die mittelste horizontale Reihe, welche wir die Hauptreihe des Systemes nannten, enthält lauter klinometrische Pyramiden, so wie das klinometrische Prisma von gleicher Basis und Stellung mit der Grundgestalt $\pm P$. Jedes ihrer Glieder mit endlichem Werthe von m zerfällt in zwey Theilgestalten.

2) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die klinodiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, enthält sämmtliche Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Klinodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist, deren Flächen aber der Orthodiagonale derselben

parallel laufen; oder sämmtliche klinodiagonalen, horizontalen Prismen und das klinodiagonale Flächenpaar. Jedes ihrer Glieder mit endlichem Werthe von m zerfällt in zwey Theilgestalten.

3) Die unterste horizontale Reihe, welche wir die orthodiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, begreift sämmtliche Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Orthodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist, deren Flächen aber der Klinodiagonale derselben parallel laufen; oder, sämmtliche orthodiagonalen, geneigten Prismen, so wie das orthodiagonale Flächenpaar. Keines ihrer Glieder zerfällt in Theilgestalten.

4) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, die wir die klinodiagonalen Zwischenreihen nennen, enthalten alle diejenigen klinorhombischen Pyramiden und gleichnamigen verticalen Prismen von unähnlichen Basen mit der Grundgestalt, in welchen die Klinodiagonale derselben unverändert enthalten ist, oder, alle klinodiagonalen Pyramiden und Prismen des Systemes. Jedes ihrer Glieder mit endlichem Werthe von m zerfällt in zwey Theilgestalten.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, die wir die orthodiagonalen Zwischenreihen nennen wollen, enthalten alle diejenigen klinorhombischen Pyramiden und gleichnamigen verticalen Prismen von unähnlichen Basen mit der Grundgestalt, in welchen die Orthodiagonale derselben unverändert enthalten ist; oder, alle orthodiagonalen Pyramiden und Prismen des

Systemes. Jedes ihrer Glieder mit endlichen Werthen von m zerfällt in zwey Theilgestalten.

6) Jede horizontale Reihe, welcher Ordnung sie auch sey, enthält lauter Gestalten von ähnlichen basischen Schnitten und congruenten Basen.

7) Die verticalen Reihen zerfallen in eine obere oder klinodiagonale, und eine untere oder orthodiagonale Hälfte; die obere Hälfte jeder verticalen Reihe enthält lauter Gestalten, in welchen die Kantenlinien der klinodiagonalen, die untere Hälfte dagegen lauter Gestalten, in welchen die Kantenlinien der orthodiagonalen Polkanten des Gliedes der Hauptreihe noch hervortreten.

8) Die äusserste verticale Reihe rechter Hand enthält alle verticalen Prismen des Systemes.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der Kanten der Gestalten des klinorhombischen Systemes.

§. 196.

Allgemeine Formeln für sämmtliche Gestalten.

Wir legen der Berechnung zuvörderst eine vollständige Pyramide von dem allgemeinem Coordinaten-Verhältnisse ma : nb : rc : md zu Grunde, ohne ihr vorläufig einen bestimmten Platz weder in einer der klinodiagonalen, noch in einer der orthodiagonalen Zwischenreihen anzuweisen.

Es sey nun wie oben der Neigungswinkel von a gegen b $= \alpha$, der Winkel einer Fläche der positiven Hemipyramide

1) mit dem orthodiagonalem Hauptschnitte $= x$
2) mit dem klinodiagonalem Hauptschnitte $= y$
3) mit dem basischem Hauptschnitte $= z$

und dieselben Winkel einer Fläche der negativen Hemipyramide $= x'$, y' und z', so ist allgemein:

$$\text{tang.}y = \frac{rc\sqrt{m^2a^2 + n^2b^2 - 2manb\cos.\alpha}}{manb\sin.\alpha}$$

$$\text{tang.}x = \frac{nb\sin.\alpha\sqrt{m^2a^2 + r^2c^2}}{marc - nbrc\cos.\alpha}$$

$$\text{tang.}z = \frac{ma\sin.\alpha\sqrt{n^2b^2 + r^2c^2}}{nbrc - marc\cos.\alpha}$$

Für tang.y', tang.x' und tang.z' gelten ganz und gar dieselben Formeln mit negativem Cosinus, so dass nur die Zeichen derjenigen Producte zu ändern sind, in welchen cos.α als Factor auftritt. Führen wir in diese Gleichungen statt cos.α und sin.α deren Werthe $\frac{d}{a}$ und $\frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{a}$ ein, so erhalten wir für die Cosinus x, y und z folgende Werthe:

$$\cos.y = \frac{mnb\sqrt{a^2 - d^2}}{N}$$

$$\cos.x = \frac{(ma^2 \mp nbd)\,rc}{aN}$$

$$\cos.z = \frac{(nb \mp md)\,rc}{N}$$

in welchen

$$N = \sqrt{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2+2mdnbr^2c^2}$$

Die unteren Zeichen in diesen und allen folgenden Formeln gelten für x', y' und z'. Nennen wir nun

die positiven Polkanten	=	Y
die negativen - -	=	Y'
die neutralen - -	=	X
die Mittelkanten	=	Z

so ist klar, dass

$$Y = 2y$$
$$Y' = 2y'$$
$$X = x + x'$$
$$Z = z + z'$$

und folglich

$$\cos.Y = \frac{1 - \text{tang.}^2 y}{1 + \text{tang.}^2 y}$$

$$\cos.Y' = \frac{1 - \text{tang.}^2 y'}{1 + \text{tang.}^2 y'}$$

$$\cos.X = \frac{1 - \text{tang.}x\ \text{tang.}x'}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 x)(1 + \text{tang.}^2 x')}}$$

$$\cos.Z = \frac{1 - \text{tang.}z\ \text{tang.}z'}{\sqrt{(1 + \text{tang}^2 z)(1 + \text{tang.}^2 z')}}$$

Bringt man in diese Formeln die entsprechenden Werthe von tang. x, tang. y u. s. w. und d statt $a\cos.\alpha$, so folgt:

$$\cos.Y = \frac{m^2(a^2-d^2)n^2b^2-(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2+2mdnbr^2c^2}{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2-2mdnbr^2c^2}$$

$$\cos.Y' = \frac{m^2(a^2-d^2)n^2b^2-(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2-2mdnbr^2c^2}{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2+2mdnbr^2c^2}$$

$$\cos.X = \frac{(m^2a^2-n^2b^2)r^2c^2 - m^2(a^2-d^2)n^2b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2]^2-4m^2d^2n^2b^2r^4c^4}}$$

$$\cos.Z = -\frac{(m^2a^2-n^2b^2)r^2c^2+m^2(a^2-d^2)n^2b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)r^2c^2]^2-4m^2d^2n^2b^2r^4c^4}}$$

welches die allgemeinsten Formeln für die Kantenwinkel sämmtlicher klinometrischen Pyramiden sind.

---

§. 197.

Besondere Formeln für die Pyramiden der Hauptreihe.

Setzen wir in den Formeln des vorigen §. $n = r = 1$, so verwandeln sie sich in die entsprechenden Formeln für die Glieder der Hauptreihe, und es wird:

I) Für den Winkel der Flächen von $\pm$ mP:

1) mit dem klinodiagonalem Hauptschnitte, oder, mit einer Fläche des orthodiagonalen Flächenpaares ($\infty P \infty$),

$$\cos.y = \frac{mb\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)c^2 \mp 2mdbc^2}}$$

$$= \frac{mb\sqrt{a^2-d^2}}{N}$$

2) mit dem orthodiagonalem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des klinodiagonalen Flächenpaares $\infty P \infty$,

$$\cos.x = \pm \frac{(ma^2 \mp bd)c}{aN}$$

3) mit dem basischem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des basischen Flächenpaares oP,

$$\cos.z = \frac{(b \mp md)c\,^{*)}}{N'}$$

II) Für die Polkantenwinkel der vollständigen klinometrischen Pyramide $\pm$ mP,

$$\cos.Y = \frac{m^2(a^2-d^2)b^2-(m^2a^2+b^2)c^2+2mdbc^2}{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)c^2-2mdbc^2}$$

$$\cos.Y' = \frac{m^2(a^2-d^2)b^2-(m^2a^2+b^2)c^2-2mdbc^2}{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)c^2+2mdbc^2}$$

$$\cos.X = \frac{(m^2a^2-b^2)c^2-m^2(a^2-d^2)b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)c^2]^2-4m^2d^2b^2c^4}}$$

$$\cos.Z = -\frac{(m^2a^2-b^2)c^2+m^2(a^2-d^2)b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)c^2]^2-4m^2d^2b^2c^4}}$$

Zusatz 1. Für $m = \infty$ verwandeln sich die Formeln des §. in diejenigen für das Prisma der Hauptreihe:

$$\cos.y = \frac{b\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{(a^2-d^2)b^2+a^2c^2}}$$

$$\cos.x = \frac{ac}{\sqrt{(a^2-d^2)b^2+a^2c^2}}$$

$$\cos.z = \frac{cd}{\mp\sqrt{(a^2-d^2)b^2+a^2c^2}}$$

---

*) Diese Formeln für die drey Winkel x, y z sind für die Berechnung der Grund-Dimensionen von der grössten Wichtigkeit, indem sie weit häufiger ihre Anwendung finden, als die Formeln für Y, Y′, X und Z. Ihre Nebenwinkel sind sehr oft die gemessenen Winkel, welche der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

$$\cos.Y = \cos.Y' = \frac{(a^2-d^2)b^2-a^2c^2}{(a^2-d^2)b^2+a^2c^2}$$

$$\cos.X = -\cos.Y$$

$$\cos.Z = -1$$

Anmerkung. Aus den obigen Gleichungen für cos.y, cos.x u. s. w. folgen für $\pm mP$ die Verhältnisse:

$$\cos.x : \cos.y = (ma^2 \mp bd)c : amb\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = mb\sqrt{a^2-d^2} : (b \mp md)c$$

$$\cos.x : \cos.z = ma^2 \mp bd : (b \mp md)a$$

und für ∞P:

$$\cos.x : \cos.y = ac : b\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = b\sqrt{a^2-d^2} : cd$$

$$\cos.x : \cos.z = a : d$$

§. 198.

Besondere Formeln für die Pyramiden der klinodiagonalen Zwischenreihen.

Setzen wir in den Formeln des §. 196 $n = 1$ und nachher $r = n$, so verwandeln sie sich in die entsprechenden Formeln für die Glieder der klinodiagonalen Zwischenreihen, und es wird:

I) Für den Winkel der Flächen von $\pm mPn$,

1) mit dem klinodiagonalem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des orthodiagonalen Flächenpaares ($\infty P \infty$),

$$\cos.y = \frac{mb\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)n^2c^2 \mp 2mdbn^2c^2}}$$

$$= \frac{mb\sqrt{a^2-d^2}}{N''}$$

2) mit dem orthodiagonalem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des klinodiagonalen Flächenpaares $\infty P \infty$,

$$\cos.x = \frac{(ma^2 \mp bd)\,nc}{aN''}$$

3) mit dem basischem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des basischen Flächenpaares oP,

$$\cos.z = \frac{(b \mp md)\,nc}{N''}$$

II) Für die Polkanten der vollständigen klinodiagonalen Pyramide $\pm mPn$;

$$\cos.Y = \frac{m^2(a^2-d^2)b^2-(m^2a^2+b^2)n^2c^2+2mdbn^2c^2}{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)n^2c^2-2mdbn^2c^2}$$

$$\cos.Y' = \frac{m^2(a^2-d^2)b^2-(m^2a^2+b^2)\,n^2c^2-2mdbn^2c^2}{m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)\,n^2c^2+2mdbn^2c^2}$$

$$\cos.X = \frac{(m^2a^2-b^2)\,n^2c^2-m^2\,(a^2-d^2)\,b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)n^2c^2]^2-4m^2d^2b^2n^4c^4}}$$

$$\cos.Z = -\frac{(m^2a^2-b^2)\,n^2c^2+m^2\,(a^2-d^2)\,b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)b^2+(m^2a^2+b^2)n^2c^2]^2-4m^2d^2b^2n^4c^4}}$$

Zusatz 1. Für $m = \infty$ erhalten wir aus diesen Formeln diejenigen für die verticalen Prismen ∞Pn der klinodiagonalen Zwischenreihen:

$$\cos.y = \frac{b\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{(a^2-d^2)b^2+a^2n^2c^2}}$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2-d^2}}{N''}$$

$$\cos.x = \frac{anc}{N''}$$

$$\cos.z = \mp\frac{dnc}{N''}$$

$$\cos.Y = \cos Y' = \frac{(a^2-d^2)\,b^2 - a^2n^2c^2}{(a^2-d^2)\,b^2 + a^2n^2c^2}$$

$$\cos.X = -\cos.Y$$

$$\cos.Z = -1$$

Zusatz. 2. Für $n = \infty$ leiten sich dagegen aus den Formeln des §. diejenigen für die horizontalen Prismen, oder für die Glieder der klinodiagonalen Nebenreihen ab:

$$\cos.y = 0$$

$$\cos.x = \frac{ma^2 \mp bd}{a\sqrt{m^2a^2+b^2 \mp 2mdb}}$$

$$\cos.z = \frac{b \mp md}{\sqrt{m^2a^2+b^2 \mp 2mdb}}$$

$$\cos.Y = \cos.Y' = -1$$

$$\cos.X = \frac{m^2a^2 - b^2}{\sqrt{(m^2a^2+b^2)^2 - 4m^2d^2b^2}}$$

$$\cos.Z = -\cos.X$$

Anmerkung. Aus obigen Gleichungen für cos.y, cos.x u. s. w. ergeben sich folgende Proportionen:

1) für $\pm mPn$,

$$\cos.x : \cos.y = (ma^2 \mp bd)\,nc : amb\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = mb\sqrt{a^2-d^2} : (b \mp md)\,nc$$

$$\cos.x : \cos.z = ma^2 \mp bd : (b \mp md)\,a$$

2) für ∞Pn,

$$\cos.x : \cos.y = anc : b\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = b\sqrt{a^2-d^2} : dnc$$

$$\cos.x : \cos.z = a : d$$

3) für $\pm mP\infty$

$$\cos.x : \cos.z = ma^2 \mp bd : (b \mp md)\,a$$

§. 199.

Besondere Formeln für die Pyramiden der der orthoidagonalen Zwischenreihen.

Setzen wir endlich in den Formeln des §. 196. $r = 1$, so verwandeln sich dieselben in die entsprechenden Formeln für die Glieder der orthodiagonalen Nebenreihen, und wir erhalten:

I) Für die Winkel der Flächen von $\pm$ (mPn),

1) mit dem klinodiagonalem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des orthodiagonalen Flächenpaars $\infty P \infty$),

$$\cos. y = \frac{mnb\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)c^2+2mdnbc^2}}$$

$$= \frac{mnb\sqrt{a^2-d^2}}{N'''}$$

2) mit dem orthodiagonalem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des klinodiagonalen Flächenpaars $\infty P \infty$),

$$\cos. x = -\frac{(ma^2 \mp nbd)c}{aN'''}$$

3) mit dem basischem Hauptschnitte, oder mit einer Fläche des basischen Flächenpaars oP,

$$\cos. z = \frac{(nb \mp md)c}{N'''}$$

II. Für die Polkantenwinkel der vollständigen orthodiagonalen Pyramide $\pm$ (mPn),

$$\cos. Y = \frac{m^2(a^2-d^2)n^2b^2-(m^2a^2+n^2b^2)c^2+2mdnbc^2}{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)c^2-2mdnbc^2}$$

$$\cos. Y' = \frac{m^2(a^2-d^2)n^2b^2-(m^2a^2+n^2b^2)c^2-2mdnbc^2}{m^2(a^2-d^2)n^2b^2+(m^2a^2+n^2b^2)c^2+2mdnbc^2}$$

$$\cos.X = \frac{(m^2a^2 - n^2b^2)c^2 - m^2(a^2 - d^2)n^2b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)n^2b^2 + (m^2a^2 + n^2b^2)c^2]^2 - 4m^2d^2n^2b^2c^4}}$$

$$\cos.Z = -\frac{(m^2a^2 - n^2b^2)c^2 + m^2(a^2 - d^2)n^2b^2}{\sqrt{[m^2(a^2-d^2)n^2b^2 + (m^2a^2 + n^2b^2)c^2]^2 - 4m^2d^2n^2b^2c^4}}$$

Zusatz 1. Für $m = \infty$ ergeben sich aus diesen Formeln die entsprechenden Formeln für die verticalen Prismen (∞Pn) der orthodiagonalen Zwischenreihen:

$$\cos.y = \frac{nb\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{(a^2-d^2)n^2b^2 + m^2a^2c^2}}$$

$$= \frac{nb\sqrt{a^2-d^2}}{N'''}$$

$$\cos.x = \frac{ac}{N'''}$$

$$\cos.z = \mp \frac{dc}{N'''}$$

$$\cos.Y = \cos Y' = \frac{(a^2-d^2)n^2b^2 - a^2c^2}{(a^2-d^2)n^2b^2 + a^2c^2}$$

$$\cos.X = -\cos.Y.$$

$$\cos.Z = -1.$$

Zusatz 2. Für $n = \infty$ folgen dagegen aus den Formeln des gegenwärtigen §. diejenigen für die geneigten Prismen, oder für die Glieder der orthodiagonalen Nebenreihe:

$$\cos.y = \frac{m\sqrt{a^2-d^2}}{\sqrt{m^2(a^2-d^2)+c^2}}$$

$$= \frac{m\sqrt{a^2-d^2}}{N'''}$$

$$\cos.x = \mp \frac{dc}{aN'''}$$

$$\cos.z = \frac{c}{N'''}$$

$$\cos.Y. = \cos.Y' = \frac{m^2(a^2-d^2)-c^2}{m^2(a^2-d^2)+c^2}$$

$$\cos.X = -1$$

$$\cos.Z = -\cos.Y$$

Anmerkung. Aus den in diesem §. enthaltenen Gleichungen für $\cos x$, $\cos.y$ und $\cos.z$ ergeben sich folgende Proportionen:

1) für $\pm(mPn)$,

$$\cos.x : \cos.y = (ma^2 \mp nbd)c : manb\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = mnb\sqrt{a^2-d^2} : (nb \mp md)c$$

$$\cos.x : \cos.z = ma^2 \mp nbd : nb \mp md$$

2) für (∞Pn),

$$\cos.x : \cos.y = ac : nb\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = nb\sqrt{a^2-d^2} : dc$$

$$\cos.x : \cos.z = a : d$$

3) für $(mP\infty)$,

$$\cos.x : \cos.y = dc : am\sqrt{a^2-d^2}$$

$$\cos.y : \cos.z = m\sqrt{a^2-d^2} : c$$

$$\cos.x : \cos.z = d : a$$

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des klinorhombischen Systemes.

§. 200.

Wahl der Grundgestalt.

Rücksichtlich der Wahl der Grundgestalt gelten für die Krystallreihen des klinorhombischen Systemes dieselben Regeln, wie für die Krystallreihen des rhombischen Systemes. Wie in diesem hat auch im klinorhombischem Systeme eine jede Pyramide nach §. 23. das Recht auf die Erwählung zur Grundgestalt, sobald sich die Verhältnisse der übrigen Gestalten damit vertragen. Da aber die beyden Theilgestalten einer klinorhombischen Pyramide, ohne doch in einer sonstigen Abhängigkeit von einander zu stehen, durch die Identität ihrer Dimensionen so unmittelbar mit einander verbunden sind, dass mit e i n e r derselben zugleich die andere bekannt ist, so bedarf es auch nur des Auftretens e i n e r der Theilgestalten der Grundgestalt, um diese, und somit die Krystallreihe selbst vollständig bestimmen zu können. Sind keine, oder keine zur Grundgestalt geeigneten Pyramidenflächen vorhanden, so schliesst man entweder auf die vortheilhafteste Grundgestalt, oder suspendirt einstweilen die Bestimmung derselben. Die Wahl der aufrechten Stellung hängt zum grossem

Theile von dem Charakter der Combinationen ab, und einige Uebung, so wie ein gewisser Tact für Symmetrie lassen bald dahin gelangen, in dieser Hinsicht das Zweckmässigste zu ergreifen.

Alle übrigen Verhältnisse werden ganz so beurtheilt, wie in den vorhergehenden Systemen. Die Zähligkeit der Combinationen ist in diesem Systeme eben so leicht zu bestimmen, als in jenen, nur darf man nicht vergessen, dass zunächst die Zahl der Theilgestalten gezählt werden muss.

§. 201.

Allgemeine Combinationsgesetze.

Nach Bestimmung der Grundgestalt und ihrer aufrechten Stellung ergeben sich unmittelbar aus den Resultaten der Ableitung die vorläufigen Bestimmungen: — welche Gestalten Pyramiden und Prismen sind; — welche Gestalten der Hauptreihe, welche den klinodiagonalen oder den orthodiagonalen Zwischenreihen, welche den gleichnamigen Nebenreihen angehören. — Zur ferneren Bestimmung dienen dann folgende Gesetze, welche sich ebenfalls unmittelbar aus der Ableitung ergeben:

1) Die Flächen je zweyer gleichliegender (d. h. positiver oder negativer) Theilgestalten einer und derselben horizontalen Reihe des allgemeinen Schemas in §. 195 bringen mit einander Combinationskanten hervor, welche den Mittelkanten des mittelsten Gliedes derselben Reihe parallel laufen, auf jeden Fall aber in der Ebene der Basis liegen. Wenn also zwey Ge-

stalten $\pm mPn$ und $\pm m'Pn'$ oder $\pm(mPn)$ und $\pm(m'Pn')$ in dergleichen Combinationskanten zusammenstossen, so ist $n = n'$.

2) Die Flächen je zweyer gleichnamiger (d. h. makrodiagonaler oder brachydiagonaler) und gleichliegender Theilgestalten einer und derselben verticalen Reihe des Schemas bringen mit einander Combinationskanten hervor, welche den gleichnamigen Polkanten des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe parallel sind. Wenn also zwey Gestalten von der angegebenen Beschaffenheit in dergleichen Combinationskanten zusammentreffen, so ist $m' = m$.

Zusatz. Die Flächen eines Gliedes der klinodiagonalen Nebenreihe $\pm mP\infty$ werden daher die klinodiagonalen Polkanten von $\pm mPn$, die Flächen eines Gliedes der orthodiagonalen Nebenreihe $(mP\infty)$ die neutralen oder orthodiagonalen Polkanten von $\pm(mPn)$ regelmässig abstumpfen.

§. 202.

Combinationsgleichungen.

Für den sehr häufigen Fall, da die Flächen einer unbekannten Gestalt $m''Pn''$ zwischen den Flächen zweyer bekannter Gestalten mPn und $m'Pn'$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen, sind auch in gegenwärtigem Systeme einige besondere Verhältnisse zu berücksichtigen, vermöge welcher die Combinationsgleichungen des §. 43 verschiedene Modificationen erfahren. Jedoch können die Hauptfälle, welchen sich alle diese Modificationen unterordnen, auf dieselben beyden zurückgeführt werden, welche bereits im rhombischem Systeme unterschieden wurden.

1) Die beyden bekannten Gestalten sind gleichnamige, d. h. entweder mPn und $m'Pn'$, oder (mPn) und $(m'Pn')$; dann gilt für die dritte Gestalt $m''Pn''$ oder $(m''Pn'')$ ganz und gar dieselbe Formel A, wie oben in §. 178, nämlich:

$$\text{A)}\quad m'' = \frac{n''(n'-n)mm'}{n''(mn'-m'n)+(m'-m)nn'}$$

2) Die beyden bekannten Gestalten sind ungleichnamige, d. h. die eine ist mPn, die andere $(m'Pn')$; dann ist die dritte Gestalt entweder eine $m''Pn''$, und

$$\text{A')}\quad m'' = \frac{n''(nn'-1)mm'}{n''(m'n-m)n'+(mn'-m')n}$$

oder eine $(m''Pn'')$, und

$$\text{A'')}\quad m'' = \frac{n''(nn'-1)mm'}{n''(mn'-m')n+(m'n-m)n'}$$

ganz wie im rhombischem Systeme.

Ueber die verschiedene Lage der zum Durchschnitte kommenden Flächen, und über die davon abhängigen verschiedenen Zeichen ihrer respectiven Coordinaten, wodurch gegenwärtige Gleichungen mannichfachen Modificationen unterworfen werden, lassen sich im Allgemeinem keine näheren Bestimmungen geben, indem die eigenthümlichen Verhältnisse jeder besonderen Combination die besondere Regel der vorzunehmenden Umgestaltung an die Hand geben. Allerdings könnte man die Gesammtheit der möglichen besonderen Fälle und die ihnen entsprechenden Formen der Combinationsgleichungen aufzählen; allein diess würde eben so nutzlos als ermüdend seyn, zumal da der folgende §. über alle bey jenen Umgestaltungen zu berücksichtigenden Verhältnisse hinlängliche Auskunft giebt.

§. 203.

Vorsicht beym Gebrauche der Combinationsgleichungen.

Da im klinometrischem Systeme vermöge des Auftretens einzeler Theilgestalten die verschiedenartigsten Flächen mit einander zum Durschnitte kommen können, und solchergestalt eine weit grössere Mannichfaltigkeit von Combinations-Verhältnissen möglich wird, als diess in den bisherigen Systemen der Fall war, so muss man beym Gebrauche der Gleichungen des vorigen §. in jedem gegebenem Falle die grösste Aufmerksamkeit darauf wenden, die der Lage der zum Durchschnitte kommenden Flächen entsprechenden Zeichen ihrer Coefficienten m, n, r, m', n', r' in die angemessene Gleichung einzuführen, bevor man für dieselben ihre numerischen Werthe substituirt. Denn da die Combinationsgleichungen in derjenigen Form, in welcher sie die Propädeutik darstellt, lauter positive Werthe der Coordinaten voraussetzen, so passen sie auch zunächst nur auf den Fall, da beyde bekannte Flächen in einem und demselben Raum-Oktanten gelegen sind, und müssen einige Modificationen erleiden, wenn sie für andere Fälle, da beyde Flächen in verschiedenen Raum-Oktanten liegen, brauchbare Resultate liefern sollen. Diese Modificationen laufen darauf hinaus, dass, wenn man z. B. der vorderen, oberen, rechten Fläche irgend einer klinometrischen Pyramide lauter positive Coordinaten ertheilt, die Zeichen der Coordinaten ihrer sämmtlichen Flächen folgende werden *).

Flächen.	*a*	*b*	*c*
v. o. r.	+	+	+
v. o. l.	+	+	−
v. u. r.	−	+	+
v. u. l.	−	+	−
h. o. r.	+	−	+
h. o. l.	+	−	−
h. u. r.	−	−	+
h. u. l.	−	−	−

Da sich nun aus der Betrachtung der Combinationen von selbst ergiebt, welche drey Buchstaben die Lage jeder einzelen Fläche bestimmen, so kann die Unterordung irgend eines besondern Falles unter die allgemeinen Regeln der Combinationsgleichungen keine Schwierigkeit mehr haben.

§. 204.

Entwicklung einer Combination des klinorhombischen Glaubersalzes **).

In der tab. III fig. 9 dargestellten Combination des klinometrischen Glaubersalzes, welche wir sogleich für eine 12zählige Combination erkennen, und so aufrecht stellen, dass die Flächen *o* eine verticale Lage erhalten, wählen wir diejenige klinometrische Pyra-

*) Es bedarf wohl keiner Erwähnung, dass die Buchstaben v. o. r. h. u. l. statt der Adjectiven vordere, obere, rechte, hintere, untere, linke gebraucht sind.

**) Da diese Combination vorzüglich lehrreich ist, so gebe ich deren Entwicklung mit einiger Ausführlichkeit.

mide, deren positive Theilgestalt von den Flächen n gebildet wird, zur Grundgestalt P, indem uns T das basische Flächenpaar darstellt. Nach diesen Bestimmungen wird es uns mit leichter Mühe gelingen, die vorliegende Combination ohne Beyhülfe irgend einer Messung durch alleinige Anwendung der allgemeinen Combinations-Regeln und Combinations-Gleichungen vollständig zu entwickeln. — Zuvörderst ist klar, dass sich sämmtliche in ihr enthaltene Gestalten folgenderweise ordnen; es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen T
- - - - - - - - y
- - - - - - - - n
- - - - - - - - o
- - - - - - - - d

2) Gl. d. klinodiagonalen Nebenreihe d. F. t
- - - - - - - - r
- - - - - - - - M
- - - - - - - - u

3) Gl. d. orthodiagonalen Nebenreihe d. F. z
- - - - - - - - v
- - - - - - - - p

Da nun $n = +\text{P}$, und $T = o\text{P}$, so ist

$$o = \infty\text{P}$$
$$M = \infty\text{P}\infty$$
$$P = (\infty\text{P}\infty)$$

und weil das horizontale Hemiprisma r die Polkanten von P regelmässig abstumpft, so ist:

$$r = \text{P}\infty$$

§. 205.

Fortsetzung.

Um die Pyramide *d* zu bestimmen, schliessen wir folgenderweise. $M = \infty P \infty$ erscheint zwischen $n = P$ und $d = xP$ so, dass es zwischen einem rechtem oberem *n* und linkem unterem *d* parallele Combinationskanten hervorbringt. Alle drey Flächen lassen sich übrigens als klinodiagonale betrachten, und es gilt daher die Gleichung A, in welcher

$$mPn = P, \text{ also } m = n = 1$$
$$m'Pn' = xP, \text{ also } m' = x, \; n' = 1$$
$$m''Pn'' = \infty P \infty, \text{ also } m'' = n'' = \infty$$

Dividirt man auf beyden Seiten mit ∞, so wird

$$1 = \frac{(n' - n)\, mm'}{\infty\,(mn' - m'n) + (m' - m)\, nn'}$$

und folglich $o = mn' - m'n$

Da jedoch für ein oberes rechtes *n* ein unteres linkes *d* gefordert wird, so müssen, wenn m und n positiv sind, m' und n' negativ genommen werden, was jedoch im gegenwärtigem Falle nichts ändert; es wird nämlich

$$o = m'n - mn'$$
$$= x - 1$$

und daher $d = -P$

§. 206.

Fortsetzung.

Wenn aber $d = -P$, so ist das geneigte Prisma, welches mit parallelen Combinationskanten zwischen den Flächen $n = +P$ und $d = -p$ erscheint, oder

das Prisma $z = (P\infty)$

Da nun $y = m''P$ zwischen $r = P\infty$ und $z = (P\infty)$ mit parallelen Combinationskanten erscheint, so kömmt zu seiner Bestimmung die Combinationsgleichung A' in Anwendung, indem man

$$mPn = P\infty, \text{ also } m = 1, n = \infty$$
$$m'Pn' = (P\infty), \text{also } m' = 1, n' = \infty$$
$$m''Pn'' = m''P, \text{ also } n'' = 1$$

setzt, und die so bestimmten Werthe, von m, n u. s. w. in die genannte Gleichung einführt; man findet dann

$$m'' = \tfrac{1}{2}$$
$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}P$$
$$\text{folglich } t = \tfrac{1}{2}P\infty$$

weil es die klinodiagonalen Polkanten von y regelmässig abstumpft. Da $v = (m''P\infty)$ mit parallelen Combinationskanten zwischen $n = P$ und $o = \infty P$ dergestalt erscheint, dass einem vorderem oberem n ein hinteres o entspricht, so kommt die Formel A in Anwendung, erleidet aber eine von der verschiedenen Lage der beyden bekannten Flächen abhängige Modification, indem wenn n' für die Fläche P positiv gilt; n für die Fläche ∞P negativ einzuführen ist, so dass

$$m'' = \frac{n''(n'+n)mm'}{n''(mn'+m'n)-(m'-m)nn'}$$

Da nun aber $m''Pn'' = m''P\infty$, so wird zuvörderst

$$m'' = \frac{(n'+n)mm'}{mn'+m'n}$$

und wiederum, weil $mPn'' = \infty P$

$$m'' = \frac{(n'+1)m'}{n'}$$

woraus endlich, weil $m'Pn' = P$,

$$m'' = 2$$
und v $= (2P\infty)$ folgt.

§. 207.

Fortsetzung.

Was endlich das horizontale Hemiprisma $w = -m''P\infty$ betrifft, so erscheint es dergestalt mit parallelen Combinationskanten zwischen $d = -P$ und $z = (P\infty)$, dass die diesem Parallelismus entsprechenden Flächen beyder Gestalten in benachbarten Raum-Oktanten liegen. Da nun beyde Gestalten überdiess ungleichnamige sind, die gesuchte Gestalt aber mit d gleichen Namen führt, so kommt für sie die Formel A' in Anwendung, nachdem für $d = mPn$ n'' negativ eingeführt worden, weil r' für $z = m'Pn'$ positiv genommen wurde; also

$$m'' = \frac{n''(nn'+1)\,mm'}{n''(m'n+m)\,n' + (mn'-m')\,n}$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Werthe von m, n, m', n' und n'', so ergiebt sich

$$m'' = \tfrac{1}{2}$$
und w $= -\tfrac{1}{2}P\infty$

Und so wären denn sämmtliche zwölf Gestalten der gegebenen Combination bestimmt, mithin diese selbst vollständig entwickelt, und die Uebersicht der in ihr enthaltenen Gestalten folgende:

1) Aus der Hauptreihe $T = 0P$
- - - - $y = \tfrac{1}{2}P$
- - - - $n = P$
- - - - $o = \infty P$
- - - - $d = -P$

2) Aus der klinod. Nebenreihe $t = \frac{1}{2}P\infty$

\- - - - - $r = P\infty$

\- - - - - $M = \infty P\infty$

\- - - - - $w = -\frac{1}{2}P\infty$

3) Aus der orthod. Nebenreihe $z = (P\infty)$

\- - - - - $v = (2P\infty)$

\- - - - - $P = (\infty P\infty)$

§. 208.

Entwicklung einer Combination des paratomen Augitspathes.

Man schliesst unmittelbar aus dem Bilde dieser Combination (tab. III fig. 10), dass sie eine siebenzählige sey. Stellen wir dieselbe nach dem Prisma M aufrecht, so erhalten wir für die Basis $t = 0P$ zwey positive Hemipyramiden s und o, von welchen wir die erstere zur Grundgestalt wählen; dann ordnen sich die übrigen Gestalten wie folgt; es gehören zu

1) Gliedern der Haupreihe die Flächen t

\- - - - - - - - s

\- - - - - - - - o

\- - - - - - - - M

2) Gl. d. klinodiag. Nebenreihe d. Fl. P

\- - - - - - - - r

3) Gl. d. orthodiagonalen Nebenreihe d. Fl. z

Weil nun $s = P$ und $t = 0P$, so folgt unmittelbar

$$P = P\infty$$
$$M = \infty P$$
$$r = \infty P\infty$$

und es bleibt nur noch die Bestimmung der Flächen z und o übrig. Da nun $z = m''P\infty$ zwischen der vorderen

Fläche der Pyramide P und der hinteren Fläche des Prismas ∞P mit parallelen Combinationskanten erscheint, so findet zwischen den Flächen *z*, *s* und *M* des paratomen Augitspathes ganz und gar dasselbe Verhältniss Statt, wie zwischen den Flächen *v*, *n* und *o* des klinorhombischen Glaubersalzes; folglich ist $m'' = 2$ und

$$z = (2P\infty)$$

Nun erscheint $o = m''P$ mit parallelen Combinationskanten zwischen $r = \infty P\infty$ und $z = (2P\infty)$; deshalb also, und weil beyde letztere Flächen ungleichnamige sind, findet die Gleichung A' Statt, aus welcher nach Einführung der Werthe $m = n = n' = \infty$, $m' = 2$ und $n'' = 1$ folgt:

$$m'' = 2$$
$$\text{und } o = 2P$$

Somit wären alle Gestalten der gegebenen Combination bestimmt, und diese selbst etwa folgenderweise zu schreiben:

$$\infty P.2P.0P.\infty P\infty.P.(P\infty).P\infty.$$

Diese beyden Beyspiele werden hinreichen, um die Methode der Entwicklung klinometrischer Combinationen überhaupt, so wie die dabey Statt findenden Anwendungen der Combinations-Gleichungen insbesondere zu erläutern, und den Leser zur Entwicklung schwierigerer Combinationen vorzubereiten.

FUENFTER ABSCHNITT.

VOM DIKLINOMETRISCHEM ODER KLINORHOMBOIDISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des diklinometrischen Systemes.

§. 209.

Rechtfertigung der Annahme eines solchen Systemes.

Zur Rechtfertigung der Annahme dieses Systemes möge einstweilen Folgendes dienen. Da alle Verschiedenheit der ungleichaxigen trimetrischen Systeme von den Winkeln α, β und γ abhängt, unter welchen sich die Dimensionen a, b und c schneiden, so sind die beyden Extreme in durchgängiger Rechtwinkligkeit und in durchgängiger Schiefwinkligkeit gegeben. Zwischen diesen Extremen aber können in Bezug auf das sie bedingende Verhältniss nur zwey mittlere Fälle liegen, welche dadurch bestimmt werden, dass sich unter den drey Winkeln α, β und γ entweder zwey, oder nur ein rechter befinden. Da nun die Natur den ersteren dieser Fälle in den zahlreichen Krystallreihen des klinometrischen Systemes so häufig verwirklicht hat, so ist kein Grund vorhanden, die Verwirklichung des zweyten Falles zu bezweifeln. Was unter dem Gesetze dreyer rechtwinkliger Dimensionen möglicherweise dargestellt werden konnte, hat die Natur in den drey Systemen der tesseralen, tetragonalen und rhombischen Gestalten erschöpfend dargestellt; warum sollte sie in den Darstellungen dessen, was unter dem Gesetze schiefwinkliger Dimensionen möglich ist, eine Stufe übersprungen, und sich selbst in der Verwirklichung der möglichen Mannichfaltigkeit Schranken gesetzt haben? — Auch ist es nicht unwahrscheinlich, dass diese scheinbare Lücke bereits ausgefüllt wurde, indem eine der interessantesten Species des Mineralreiches, der gemeine Feldspath (Breithaupts Orthoklas), als diklinometrischer Feldspath im Systeme aufgeführt werden muss, wenn sich die bisherige Annahme bewährt, dass die Combinationskante der Flächen *P* und *x* (nach unserer Bezeichnung oP und P∞) bey aufrechter Stellung nach dem aus zwey Theilgestalten zusammengesetztem Prisma *T*, *l* (∞P. ∞P′) horizontal liegt; eine Annahme, welche zumal in den Verhältnissen der Zwillingskrystalle dieser Species grosse Bestätigung zu finden scheint. Aus diesen und anderen Gründen hielten wir es für angemessen, dem diklinometrischem Systeme vorläufig einen Platz in der Reihe der klinobasischen Systeme anzuweisen.

§. 210.

Name und Umfang des Systemes.

Das diklinometrische oder klinorhomboidische System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Ungleichheit, und Schiefwinkligkeit zweyer rechtwinckliger Dimensionen gegen die dritte ausgesprochen ist, begreift alle trimetrichen, klinobasischen Gestalten, deren basische Schnitte einfach geneigte Rhomboide *) sind, und keine andern.

Dieses System steht mitten inne zwischen dem klinometrischem und dem triklinometrischem Systeme, denn noch sind zwey Dimensionen rechtwinklig, jedoch die dritte, welche im klinometrischem Systeme nur gegen eine derselben geneigt war, hier gegen beyde geneigt, während sich im triklinometrischem Systeme alle drey Dimensionen unter schiefen Winkeln schneiden. Man kann dieses Verhältniss auch so aussprechen: von den drey Winkeln α, β und γ, welche im rhombischem Systeme alle rechte waren, sind in klinometrischem Systeme einer, im diklinometrischem zwey, und im triklinometrichem alle drey schiefe Winkel.

§. 211.

Normale Stellung der Gestalten.

Die Gestalten und Combinationen des diklinometrischen Systemes befinden sich in normaler Stellung, wenn eine der beyden rechtwinkligen Dimensionen aufrecht ist, während die dritte in die Verticalebene durch die Augenaxe des Beobachters fällt. Es giebt daher mög-

*) Einfach geneigte Rhomboide unterscheiden sich von doppelt geneigten Rhomboiden dadurch, dass in jenen eine, in diesen beyde Diagonalen geneigt sind, oder, dass in jenen eine, in diesen keine der Diagonalen horizontal ist.

licherweise nur zwey aufrechte und normale Stellungen, von denen jedoch die einmal gewählte unabänderlich als solche gilt. Die Axe ist aus demselben Grunde eine zweyfach - relative, nach einmal getroffener Wahl aber eben so wenig als die normale Stellung beliebig zu vertauschen. Die drey Dimensionen werden, wie im klinometrischem Systeme, durch die Namen der Axe, der Orthodiagonale und der Klinodiagonale unterschieden.

§. 212.

Geschlossene und vollständige Gestalten des Systemes.

Die geschlossenen Gestalten des diklinometrischen Systemes sind keine einfachen sondern zusammengesetzte Gestalten, indem eine jede derselben in vier Theilgestalten zerfällt, deren jede ein paralleles Flächenpaar darstellt. Der wesentliche Charakter einer vollständigen geschlossenen Gestalt ist nämlich darin gegeben, dass ihren sämmtlichen Flächen ein gemeinschaftliches endliches Verhältniss der Dimensionen a, b und c zu Grunde liegt, so dass sie nur durch die Lage in verschiedenen Raum - Oktanten und die dadurch bedingten verschiedenen Beziehungen zu den Winkeln α, β und γ und deren Nebenwinkeln verschiedene Gestalt und Grösse erhalten. Dergleichen vollständige Gestalten dürften aber höchst selten als solche ein Gegenstand der Beobachtung werden, weil eben in der Verschiedenheit der Flächen ihrer Theilgestalten eine Prädisposition zur Zerfällung ihrer selbst vorhanden ist, welche sich selbst dann, wenn sämmtliche Flächen einer und derselben Gestalt erscheinen, noch dadurch verräth, dass diese Flächen fast niemals eine ihrem gegenseitigem Gleichgewichte angemessene Ausdehnung zeigen. Demungeachtet müssen wir zu der Annahme eines solchen Gleichgewichtes, als zu dem sicherstem Leitfaden durch dieses System unsre Zuflucht nehmen, in welchem der Begriff der Theilgestalt der einzige ist, welcher noch Realität hat. Zu den geschlossenen Gestalten desselben können aber einzig und allein die vollständigen, d. h. mit ihren sämmtlichen, in vollkommenem Gleichgewichte befindlichen Theilgestalten erscheinenden diklinometrischen Pyramiden gerechnet werden, indem alle übrigen Gestalten theils verticale, theils horizontale, theils geneigte Prismen, also offene, wenn gleich vollständige Gestalten darstellen.

§. 213.

Diklinometrische oder klinorhomboidische Pyramiden.

Syn. Ungleichschenklige vierseitige Pyramiden mit doppelter Abweichung. Mohs.
Octaedra pyramidibus obliquis? Weiss.

Die diklinometrischen Pyramiden (oder Dipyramiden) sind von 8 viererley ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, deren Mittelquerschnitt jedoch kein Hauptschnitt ist. Sie haben also 12 Kanten und 6 Ecke.

Die Flächen zerfallen in 4 Flächenpaare, so dass je zwey gleiche und ähnliche sich wie Fläche und Gegenfläche verhalten. Die vollständige Pyramide hat daher 4 Theilgestalten, von denen jede nur ein paralleles Flächenpaar darstellt.

Die Kanten sind sechserley, nämlich:

a) 2 längere Polkanten über der Klinodiagonale;

b) 2 kürzere dergleichen;

c) 2 und 2 gleichlange aber nicht gleichgrosse (§. 3) Polkanten über der Orthodiagonale;

d) 2 kürzere Mittelkanten;

e) 2 längere dergleichen.

Die Ecke sind insgesammt viererleykantig aber dreyerley, nämlich:

a) 2 Polecke;

b) 2 Mittelecke an den Endpuncten der Orthodiagonale;

c) 2 Mittelecke an den Endpuncten der Klinodiagonale.

Die Hauptschnitte sind gleichfalls dreyerley, nämlich:

a) der Hauptschnitt durch Axe und Klinodiagonale ein Rhomboid;

b) der Hauptschnitt durch Axe und Orthodiagonale ein Rhombus;

c) der Hauptschnitt durch beyde Diagonalen, oder der basische Hauptschnitt ein Rhomboid.

§. 214.

Benennung und Bezeichnung der Theilgestalten und ihrer Elemente.

Wir nennen wie im klinometrischem Systeme die Kanten a des vorigen §. die negativen, die Kanten b die positiven klinodiagonalen, die Kanten c die positiven und und negativen orthodiagonalen Polkanten; eben so die Kanten d die positiven, die Kanten e die negativen Mittelkanten. Die Ecke unterscheiden wir durch die Namen der Polecke, der klinodiagonalen und orthodiagonalen Mittel-Ecke; die Theilgestalten nach ihren bey normaler Stellung in der vorderen Pyramidenhälfte erscheinenden Flächen, in eine obere rechte und obere linke, eine untere rechte und untere linke Theilgestalt, und bezeichnen sie in der Folge wie sie hier genannt sind, mit +P, +P', -P und -P'. *).

§. 215.

Prismen des Systemes.

Wie im klinometrischem Systeme kommen auch hier dreyerley, nämlich verticale, horizontale und geneigte Prismen vor.

1) Die verticalen Prismen, deren Axe in die Axe der Grundgestalt fällt, haben rhomboidische Querschnitte und zerfallen in zwey Hemiprismen als ihre Theilgestalten, wodurch sie sich wesentlich von den gleichnamigen Prismen des klinometrichen Systemes unterscheiden, in welchem eine dergleichen Zerfällbarkeit nicht vorhanden ist.

2) Die horizontalen Prismen, deren Axe in die Orthodiagonale der Grundgestalt fällt, haben gleichfalls

---

*) Vielleicht dürfte es noch zweckmässiger seyn, die Theilgestalten dieses und des folgenden Systemes mit +P', +'P, -P' und -'P zu bezeichnen, weil dann jede einzele Gestalt derselben schon durch ihr Zeichen von den Gestalten des vorigen Systemes unterschieden, und das allgemeine Zeichen ±'P' ein vollständiges Symbol seyn würde.

rhomboidische Querschnitte, und zerfallen deshalb wie die vorhergehenden in zwey Theilgestalten; eine Eigenschaft, welche sie übrigens mit den gleichnamigen Prismen des klinometrischen Systemes gemein haben.

3) Die geneigten Prismen, deren Axe in die Klinodiagonale der Grundgestalt fällt, haben rhombische Querschnitte und folglich lauter gleichwerthige Flächen; sie sind daher eben so wenig aus Theilgestalten zusammengesetzt, als die gleichnamigen Prismen des klinometrischen Systemes.

ZWEITES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des diklinometrischen Systemes.

§. 216.

Grundgestalt.

Der Hülfsvorstellung gemäss, welche wir in §. 212. für die Gestalten dieses Systemes postulirten, wählen wir irgend eine vollzählige diklinometrische Pyramide, deren Theilgestalten sich in vollkommenem Gleichgewichte befinden zur Grundgestalt, und bezeichnen sie mit $\pm P'$ *), ohne uns jedoch auf irgend eine nähere Be-

---

*) Der Kürze wegen vereinige ich die Zeichen aller vier Theilgestalten in dieses einzige, so dass der oben rechter Hand vom Grundelemente des Zeichens befindliche Strich wegbleibt, sobald von rechten Theilgestalten die Rede ist.

stimmung weder des Grössenverhältnisses noch der Neigungswinkel ihrer Dimensionen einzulassen, welche wir vielmehr der Allgemeinheit wegen ganz unbestimmt zu lassen haben. Dagegen müssen die aufrechte Stellung sowohl als die Axe bestimmt werden, bevor wir zur Ableitung selbst schreiten können.

Es sey nun

die aufrechte Halbaxe $= a$
die halbe Klinodiagonale $= b$
die halbe Orthodiagonale $= c$
der Winkel von a und b $= \alpha$
der Winkel von b und c $= \beta$
ferner $a \cos.\alpha = d$
$b \cos.\beta = e$

so drückt ganz allgemein $a : b : c : d : e$ das Verhältniss der Grund - Dimensionen irgend einer Krystallreihe des diklinometrischen Systemes aus, indem wir jederzeit statt der Winkel α und β die Grössen d und e als Hülfs - Dimensionen einführen.

§. 217,

Hauptreihe des Systemes.

Aus der Grundgestalt $\underline{+}\,P'$ lässt sich eine Reihe diklinometrischer Pyramiden ableiten, welche von ihr selbst bey gleicher und ähnlicher Basis durch andre Axenwerthe unterschieden sind.

Da die Methode der Ableitung einer Hauptreihe in den vorhergehenden Systemen so häufig in Anwendung kam, so scheint es überflüssig, sie für gegenwärtiges System abermals zu entwickeln. Die Axe 2a wird nach einem unbestimmtem Coefficienten m veränderlich gesetzt, während b und c ihre anfänglichen Werthe unverändert erhalten. Legt man nun für jeden willkührlich gewählten Werth von m Ebenen durch die Mittelkanten der Grundgestalt und die Endpuncte der neuen Axe $2ma$, so erhält man je nachdem $m > 1$ oder < 1 eine diklinometrische Pyramide, welche bey gleicher und ähnlicher Basis mit der Grundgestalt, entweder spitzer oder flacher als dieselbe ist. Bezeichnen wir allgemein jede dergleichen Pyramide mit $\pm mP'$, so erhalten wir, weil für m alle möglichen Werthe von o bis ∞ gewählt werden können eine Reihe von folgender Form

$$oP \ldots . \pm mP' \ldots . \pm P' \ldots . \pm mP' \ldots . \infty P'.$$

Zusatz. Diese Reihe, welche die Hauptreihe des Systemes genannt wird, ist eigentlich eine vierfach zusammengesetzte Reihe, indem ihr allgemeines Glied $\pm mP'$ in die vier, rücksichtlich ihres Erscheinens von einander ganz unabhängigen Theilgestalten $+mP$, $-mP$, $+mP'$ und $-mP'$ zerfällt. Das Gränzglied linker Hand bedeutet hier wie überall die basische oder jede ihr parallele Fläche; das Gränzglied rechter Hand ein verticales Prisma, welches in diesem Systeme aus zwey Theilgestalten ∞P und $\infty P'$ zusammengesetzt ist; (§. 215).

§. 218.

Klinodiagonale und orthodiagonale Zwischen- und Neben-Reihen.

Die Ableitung der klinodiagonalen und orthodiagonalen Pyramiden und Prismen dieses Systemes stimmt mit der Ableitung der gleichnamigen Gestalten des klinometrichen Systemes so vollkommen überein, dass wir um Wiederholungen zu vermeiden unmittelbar auf die §§. 192, 193 und 194 verweisen können, indem das dort Gesagte buchstäblich auf gegenwärtigen Fall anzuwenden ist. Auch werden wir die daselbst gebrauchte Bezeichnung für die diklinometrischen Gestalten beybehalten, so dass $\pm mP'n$ eine klinodiagonale, $\pm(mP'n)$ eine orthodiagonale Pyramide, $\pm mP\infty$ ein klinodiagonales, $(mP'\infty)$ ein orthodiagonales geneigtes Prisma aus gegenwärtigem Systeme bedeutet. Dabey darf man jedoch nicht vergessen, dass alle dergleichen Pyramiden in diesem Systeme von vier Theilgestalten gebildet werden, während sie im klinometrischem Systeme nur aus zwey Theilgestalten zusammengesetzt sind, dass also jedes Zeichen $\pm mP'n$ eigentlich in die vier Zeichen $+mPn$, $-mPn$, $+mP'n$ und $-mP'n$ zerfällt, und jede der abzuleitenden Reihen als eine vierfach zusammengesetzte Reihe betrachtet werden muss.

Zusatz. Wie die Pyramiden in vier, so zerfallen die verticalen Prismen in zwey Theilgestalten, von denen die eine mit ∞Pn oder (∞Pn), die andere mit $\infty P'n$ oder $(\infty P'n)$ zu bezeichnen ist.

§. 219.

Uebersicht.

Vereinigen wir die Reihen, welche aus den Ableitungen der vorhergehenden §§. folgen, in ein allgemeines Schema, so erhalten wir folgende Uebersicht sämmtlicher Gestalten des klinometrischen Systemes:

$oP\infty$	$\pm mP\infty$	$\pm P\infty$	$\pm mP\infty$	$\infty P\infty$
oPn	$\pm mP'n$	$\pm P'n$	$\pm mP'n$	$\infty P'n$
oP	$\pm mP'$	$\pm P'$	$\pm mP'$	$\infty P'$
(oPn)	$\pm(mP'n)$	$\pm(P'n)$	$\pm(mP'n)$	$(\infty P'n)$
$(oP\infty)$	$(mP\infty)$	$(P\infty)$	$(mP\infty)$	$(\infty P\infty)$

Die aus der Betrachtung dieses Schemas sich ergebenden Folgerungen lauten buchstäblich so, wie in §. 195, weshalb wir dorthin verweisen, indem wir nur noch bemerken, dass der letzte Satz in no. 1, 4 und 5 daselbst für gegenwärtiges System folgendermaassen lauten muss: jedes ihrer Glieder mit endlichem Werthe von m zerfällt in vier Theilgestalten.

DRITTES CAPITEL.

Berechnung der Gestalten des diklinometrischen Systemes.

§. 220.

Neigungswinkel der Flächen von $\pm P'$ gegen die Ebenen der Hauptschnitte.

Da allgemein a : b : c : d : e das Verhältniss ausdrückt, durch welches jede diklinometrische Pyramide vollständig bestimmt wird, so setzt die Berechnung einer solchen Pyramide vier Data der Beobachtung voraus. — Um indess die dazu erforderlichen Formeln nicht mit noch mehren Buchstaben zu überladen, so werden wir sie zunächst für die Grundgestalt berechnen, worauf sich dieselben durch Einführung der entsprechenden Coefficienten von a, b, c, d und e in die jeder beliebigen Gestalt angemessenen Formeln verwandeln lassen. Vor allen Dingen sind aber die Functionen für die Neigungswinkel der vier Theilgestalten gegen die Ebenen der Hauptschnitte zu suchen; zu dem Ende sey allgemein der Neigungswinkel jeder Theilgestalt

gegen den klinodiagonalen Hauptschnitt $= y$
- - orthodiagonalen - - $= x$
- - basischen - - $= z$

und zwar seyen diese Winkel für diejenigen Flächen, deren Coordinaten a, b und c die spitzen Winkel α und β einschliessen, oder

für die Theilgestalt $+P = y,\ x,\ z,$
- - - - $+P' = y',\ x',\ z',$
- - - - $-P = y'',\ x'',\ z'',$
- - - - $-P' = y''',\ x''',\ z''',$

so ist, wenn $M = a^2b^2 - b^2d^2 - a^2c^2$,

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}\right. = \frac{c\sqrt{(a^2+b^2-2bd)\,M}}{b^2(a^2-d^2) \mp ce(a^2-bd)}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix} y'' \\ y''' \end{matrix}\right. = \frac{c\sqrt{(a^2+b^2+2bd)\,M}}{b^2(a^2-d^2) \mp ce(a^2+bd)}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix}\right. = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)\,M}}{a^2(c \mp e) - bcd}$$

$$\text{tang.}\begin{cases} x'' \\ x''' \end{cases} = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)\,M}}{a^2(c \pm e) + bcd}$$

$$\text{tang.}\begin{cases} z \\ z' \end{cases} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 \mp 2ce)\,M}}{c(b^2 - e^2) - bd\,(c \mp e)}$$

$$\text{tang.}\begin{cases} z'' \\ z''' \end{cases} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 \mp 2ce)\,M}}{c\,(b^2 - e^2) + bd\,(c \mp e)}$$

in welchen Formeln die oberen Zeichen dem oberem, die unteren Zeichen dem unterem der beyden Winkel gelten, deren Buchstaben auf der linken Seite jeder Gleichung unter einander geschrieben sind.

§. 221.

Fortsetzung.

Da man häufig in den Fall kommt, die Cosinus der Winkel y, y′, y″ u. s. w. zu gebrauchen, so mögen die Werthe derselben hier folgen; wenn

$$\sqrt{b^2(a^2-d^2)+(a^2+b^2-e^2-2bd)\,c^2 \mp 2ce\,(a^2-bd)} = Q$$

und

$$\sqrt{b^2(a^2-d^2)+(a^2+b^2-e^2+2bd)c^2 \mp 2ce(a^2+bd)} = Q'$$

so wird

$$\cos.\begin{cases} y \\ y' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2) \mp ce\,(a^2-bd)}{b\sqrt{a^2-d^2}\;Q}$$

$$\cos.\begin{cases} y'' \\ y''' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2) \mp ce\,(a^2+bd)}{b\sqrt{a^2-d^2}\;Q'}$$

$$\cos.\begin{cases} x \\ x' \end{cases} = \frac{a^2(c \mp e) - bcd}{aQ}$$

$$\cos.\begin{cases} x'' \\ x''' \end{cases} = \frac{a^2(c \mp e) + bcd}{aQ'}$$

$$\cos.\begin{cases} z \\ z' \end{cases} = \frac{c(b^2-e^2)-bd(c\mp e)}{\sqrt{b^2-e^2}\,Q}$$

$$\cos.\begin{cases} z'' \\ z''' \end{cases} = \frac{c(b^2-e^2)+bd(c\mp e)}{\sqrt{b^2-e^2}\,Q'}$$

in welchen Formeln wiederum die oberen Zeichen für die oben, die unteren Zeichen für die unten stehenden Winkel linker Hand gelten.

§. 222.

Kantenwinkel einer vollständigen diklinometrischen Pyramide.

Je zwey der in den beyden vorhergehenden §§. betrachteten Winkel vereinigen sich zu einer Kante der vollständig mit allen ihren Theilgestalten erscheinenden diklinometrischen Pyramide; es sey

$$\begin{aligned} y + y' &= Y \\ y'' + y''' &= Y' \\ x + x''' &= X \\ x' + x'' &= X' \\ z + z'' &= Z \\ z' + z''' &= Z' \end{aligned}$$

Da nun von je zweyen solchergestalt verbundenen Winkeln $y\ y'$, $y''\ y'''$, $x\ x'''$ u. s. w. der eine w durch

$$\text{tang.}w = \frac{A}{B-C}$$

der andere w' durch

$$\text{tang.}w' = \frac{A}{B+C}$$

bestimmt ist *), so wird allgemein:

*) So ist z. B. für x und x''' $A = \sqrt{(a^2+c^2)M}$, $B = a^2c$ und $C = a^2e + bcd$; u. s. w.

$$\text{tang.}(w+w') = \text{tang.}W = \frac{2AB}{B^2-C^2-A^2}$$

$$\text{und } \cos.W = \frac{B^2-C^2-A^2}{\sqrt{(B^2-C^2-A^2)^2+4A^2B^2}}$$

$$= \frac{N}{\sqrt{N^2+4A^2B^2}}$$

wenn $N = B^2-C^2-A^2$.

Setzt man statt w, w', W, A, B und C nach und nach die den gesuchten Kantenwinkeln entsprechenden Werthe, (z. B. $w=y$, $w'=y'$, $A = c\sqrt{(a^2+b^2-2bd)M}$, $B = b^2(a^2-d^2)$, $C = ce\,(a^2-bd)$ für $Y = W$,) so erhält man: *)

$$\cos.\begin{cases} Y \\ Y' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2)-c^2(a^2+b^2\pm 2bd-e^2)}{\sqrt{N^2+4c^2(a^2+b^2\mp 2bd)M}}$$

$$\cos.\begin{cases} X \\ X' \end{cases} = -\frac{b^2(a^2-d^2)-c^2(a^2-b^2+e^2)\pm 2bcde}{\sqrt{N^2+4c^2(a^2+c^2)M}}$$

$$\cos.\begin{cases} Z \\ Z' \end{cases} = -\frac{b^2(a^2-d^2)+c^2(a^2-b^2+e^2)\mp 2a^2ce}{\sqrt{N^2+4c^2(b^2+c^2\mp 2ce)M}}$$

in welchen Gleichungen die oberen Zeichen für den oben, die unteren Zeichen für den unten stehenden Winkel linker Hand vom Gleichheitszeichen gelten, der Buchstabe N aber durchgängig den Zähler desselben Bruches bedeutet, in welchem er als ein Glied des Nenners auftritt.

---

*) Es sind hier, wie überall, die Cosinus der gesuchten Winkel angegeben; jedoch scheinen für die klinobasischen Systeme nicht selten die Cotangenten in der Anwendung vortheilhafter zu seyn.

§. 223.

Kantenwinkel der verschiedenen Prismen.

Aus den Gleichungen des vorigen §. lassen sich die Cosinus für die Kantenwinkel der verschiedenen Prismen mit Leichtigkeit ableiten, wenn man erwägt, dass für die verticalen Prismen die Axe $a' = \infty a$, für die horizontalen die Orthodiagonale $c' = \infty c$, für die geneigten die Klinodiagonale $b' = \infty b$ werden muss, und dabey nicht vergisst, dass $d' = a' \cos\alpha$, $e' = b' \cos\beta$, und folglich für $a' = \infty a$ auch d, für $b' = \infty b$ auch e unendlich gross zu nehmen ist. Dann findet man:

1) für die verticalen Prismen oder die Glieder der äussersten verticalen Reihe des Systemes, §. 219:

$$\cos.Y = \cos.Y' = \frac{b^2(a^2-d^2)-a^2c^2}{\sqrt{[b^2(a^2-d^2)+a^2c^2]^2-4a^4c^2e^2}}$$

$$\cos.X = \cos X' = -\cos.Y$$

$$\cos.Z = \cos Z' = -1$$

2) für die horizontalen Prismen, oder die Glieder der klinodiagonalen Nebenreihe:

$$\cos.Y = \cos.Y' = -1$$

$$\cos.X = \cos X' = \frac{a^2-b^2+e^2}{\sqrt{(a^2+b^2-e^2)^2-4b^2d^2}}$$

$$\cos.Z = \cos Z' = -\cos.X$$

3) für die geneigten Prismen, oder die Glieder der orthodiagonalen Nebenreihe:

$$\cos.Y = \cos.Y' = \frac{b^2(a^2-d^2)-c^2(b^2-e^2)}{\sqrt{[b^2(a^2-d^2)+c^2(b^2-e^2)]^2-4b^2c^2d^2e^2}}$$

$$\cos.X = \cos X' = -1$$

$$\cos.Z = \cos Z' = -\cos.Y$$

§. 224.

Allgemeine Brauchbarkeit der gefundenen Formeln.

Für alle klinodiagonalen Pyramiden von der Form $\pm$ mP'n hat man statt a und c ma und nc, so wie für alle orthodiagonalen Pyramiden von der Form $\pm$ (mP'n) statt a und b ma und nb in die Formeln der vorhergehenden §§. einzuführen. Die Formeln für die Neigungswinkel der einzelen Theilgestalten der horizontalen und verticalen Prismen gegen die Hauptschnitte der Grundgestalt, oder gegen das basische, das orthodiagonale und das klinodiagonale Flächenpaar, welche sich, da diese Winkel häufig gemessen werden können, zur leichteren Berechnung der Grund-Dimensionen der Krystallreihen ganz vorzüglich eignen, so wie andre Formeln, die *in praxi* von öfterem Gebrauche seyn dürften, lassen sich ohne Mühe aus den bereits gegebenen entwickeln, zu welchen sie sich eben so, wie besondere Fälle überhaupt zu einer allgemeinen Regel verhalten.

VIERTES CAPITEL

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des diklinometrischen Systemes.

§. 225.

Uebereinstimmung mit dem vorigem Systeme.

Was die Bestimmung der Grundgestalt, die allgemeinen Combinationsgesetze, und die Combinationsgleichungen dieses Systemes betrifft, so können wir auf die §§. 200 — 203 verweisen, indem das dort Gesagte wörtlich auf die Combinationen des diklinometrischen Systemes anzuwenden ist.

Da aber noch für keine der wenigen Species, von welchen sich vermuthen lässt, dass ihre Gestalten gegenwärtigem Systeme angehören, die zur Berechnung ihrer Grundgestalt erforderlichen Messungs - Resultate hinlänglich begründet sind, indem selbst die neuesten Bestimmungen für eine der bekanntesten dieser Species bedeutend differiren, so bleibt uns nichts weiter übrig, als eine Combination dieses Systemes beyspielsweise zu entwickeln.

§. 226.

Entwicklung einer Combination des diklinometrischen Feldspathes.

Dass die tab. III Fig. 11. dargestellte Combination des diklinometrischen Feldspathes eine 11zählige sey, folgt daraus weil sich wirklich 11 verschiedenwerthige Flächen an ihr unterscheiden lassen. Es sey uns *P* die basische Fläche oP, und *s* die obere, rechte Theilgestalt P *), *s'* die obere, linke Theilgestalt P', so folgt unmittelbar, dass

---

*) Wenn man, in Voraussetzung eines klinometrischen Systemes, nach den von Mohs mitgetheilten Messungen das Verhältniss a : b : c : d für diese Grundgestalt berechnet, so findet man 859 : 1530 : 1000 : 369 also $b = a + \frac{2}{3}c$ und $d = \frac{a+c}{5}$; für Augit und Hornblende dagegen gilt $b = a + \frac{4}{3}c$.

$$l = \infty P$$
$$T = \infty P'$$
$$M = (\infty P \infty)$$

die Flächen *z* gehören einem verticalem Prisma aus irgend einer der orthodiagonalen Zwischenreihen, und ihr allgemeines Zeichen ist demnach $= (\infty Pn)$; jedoch reichen die in der Combination wahrzunehmenden Verhältnisse zur unmittelbaren Bestimmung des Coefficienten n nicht hin, weshalb wir zu einer Messung unsre Zuflucht zu nehmen genöthigt sind; aus ihr folgt:

$$z = (\infty P3)$$
$$z' = (\infty P'3)$$

Da nun die Fläche $s = P$ zwischen den Flächen $q = xP\infty$ und $z = (\infty P3)$ mit parallelen Combinationskanten erscheint, und letztere beyde Gestalten ungleichnamige sind, während die erstere mit *q* gleichen Namen führt, so kommt zur Bestimmung von *q* die Formel A' des §. 202 in Anwendung; setzt man in derselben

$$m'' = n'' = 1$$
$$m = n' = \infty$$
$$n = 3$$
$$\text{und } m' = x$$

so erhält man

$$1 = \frac{nx}{n-1} = \frac{3x}{2}$$

und $xP\infty = \frac{2}{3}P\infty$

Da die Fläche *x* mit parallelen Combinationskanten zwischen $s = P$ und $s' = P'$ erscheint, und ein Glied der klinodiagonalen Nebenreihe ist, so folgt

$$x = P\infty$$

Zur unmittelbaren Bestimmung der Flächen y reichen die Verhältnisse der Gestalt nicht aus, indem sie uns nur belehren, dass dieselben ebenfalls einem Gliede der klinodiagonalen Nebenreihe angehören. Mittels Messungen findet sich indess

$$y = 2P\infty$$

Somit wären sämmtliche in der Combination enthaltene Theilgestalten bestimmt, und ihre systematische Uebersicht folgende: es sind

1) Glieder der Hauptreihe	P	$= 0P$
- - - - -	s	$= P$
- - - - -	s'	$= P'$
- - - - -	l	$= \overline{\infty}P$
- - - - -	T	$= \infty P'$
2) Gl. d. orthod. Zwischenreihen	z	$= (\infty P3)$
- - - - - -	z'	$= (\infty P'3)$
3) Gl. der klinod. Nebenreihe	q	$= \frac{2}{3}P\infty$
- - - - -	x	$= P\infty$
- - - - -	y	$= 2P\infty$
4) Gl. der orthod. Nebenreihe	M	$= (\infty P\infty)$

Zusatz. Wenn wir die von Weiss *) bestimmten Gestalten des diklinometrischen Feldspathes in der Voraussetzung einer klinometrischen oder klinorhombischen Krystallreihe nach unsrer Methode bezeichnen, so erhalten wir folgende Uebersicht: es sind

1) Glieder der Hauptreihe	P	$= 0P$
- - - - -	g	$= \frac{1}{2}P$
- - - - -	o	$= P$
- - - - -	u	$= 2P$

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1820, S. 145 ff.

Glieder der Hauptreihe	$T = \infty P$
- - - - -	$m = -P$
2) Gl. d. orthod. Zwischenreihen	$s = (3P3)$
- - - - -	$v = (4P2)$
- - - - -	$z = (\infty P3)$
3) Glieder der klinod. Nebenreihe	$q = \frac{2}{3}P\infty$
- - - - - -	$x = P\infty$
- - - - - -	$r = \frac{4}{3}P\infty$
- - - - - -	$y = 2P\infty$
- - - - - -	$k = \infty P\infty$
- - - - - -	$t = -2P\infty$
4) Glieder der orthod. Nebenreihe	$h = (\frac{2}{3}P\infty)$
- - - - - -	$n = (2P\infty)$
- - - - - -	$i = (6P\infty)$
- - - - - -	$M = (\infty P\infty)$

SECHSTER ABSCHNITT.

VOM TRIKLINOMETRISCHEM ODER DIKLINORHOMBOIDISCHEM SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

§. 227.

Umfang und Name des Systemes.

Das triklinometrische oder diklinorhomboidische System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Dreyzahl, Schiefwinkligkeit und Ungleichheit seiner Dimensionen ausgesprochen ist, begreift alle trimetrischen, klinobasischen Gestalten, deren basische Schnitte doppelt geneigte Rhomboide *) sind, und keine anderen.

Dieses System repräsentirt gewissermaassen den allgemeinsten Typus sämmtlicher trimetrischen Systeme, indem in seinen Bedingungen alle möglichen Verschiedenheiten zwischen den Elementen des geometrischen Grundcharakters eines solchen Systemes erschöpft sind. Es ist daher dasjenige System, welches einer allgemein durchgeführten mathematischen Entwicklung der trimetrischen Systeme zu Grunde gelegt werden müsste, weil die durch den Calcul auszumittelnden Verhältnisse des-

*) Vergl. oben §. 210.

selben die Verhältnisse aller trimetrischen Systeme dergestalt involviren, dass diese aus jenen durch zweckmässige Substitution gewisser Elemente unmittelbar abgeleitet werden könnten.

Indess schien es dem Zwecke gegenwärtiger Anleitung angemessener, die übrigen trimetrischen Systeme den Bedingungen ihrer respectiven Grundcharaktere gemäss unabhängig von gegenwärtigem Systeme in besonderer Darstellung zu entwickeln, und dabey von dem einfachstem und regelmässigstem Systeme auszugehen, weil nur auf diese Weise ein allmäliges Fortschreiten von regelmässigeren zu unregelmässigeren Gestalten, von leichteren zu schwierigeren Verhältnissen möglich war.

Der Name triklinometrisches System bezieht sich darauf, dass alle drey Dimensionen gegen einander unter schiefen Winkeln geneigt sind, während sich der Name diklinorhomboidisches System auf die Figur und Lage der Basis oder der basischen Schnitte seiner Gestalten bezieht. Es ist das ein- und-ein-gliedrige System von Weiss, das tetartoprismatische System von Mohs.

§. 228.

Normale Stellung der Gestalten.

Die Gestalten des triklinometrischen Systemes befinden sich in normaler Stellung, wenn eine ihrer Dimensionen aufrecht ist, während eine andere derselben in eine durch diese aufrechte Dimension und die Augenaxe des Beobachters gelegte Verticalebene fällt. Es giebt also möglicherweise dreyerley aufrechte, und sechserley normale Stellungen, von welchen jedoch die eine in der Regel den anderen vorzuziehen, die einmal gewählte aber jederzeit unveränderlich als solche beyzubehalten ist. Daher wird auch die Axe eine dreyfach relative, indem zwischen allen dreyen Dimensionen die Wahl gestattet, die einmal gewählte aber gleichfalls durchgängig als einzige Axe zu betrachten ist, von welcher dann die beyden übrigen Dimensionen durch den Namen der Diagonalen unterschieden werden. Da nun vermöge des geometrischen Grundcharakters des Systemes beyde Diagonalen geneigt, jedoch von ungleicher Länge sind, so müssen wir uns zu der Unterscheidung derselben wiederum der bereits im rhombischem Systeme gebrauchten Ausdrücke der Makrodiagonale und Brachydiagonale bedienen.

§. 229.

Geschlossene Gestalten des Systemes.

In Bezug auf die geschlossenen Gestalten des triklinometrischen Systemes verweisen wir auf die für das diklinometrische System in §. 212 gegebenen Bemerkungen, weil sie ihre vollkommene Anwendung auf gegenwärtigen Fall finden. Jede vollständige geschlossene Gestalt ist eine triklinometrische Pyramide, und zerfällt in vier Theilgestalten, deren jede ein paralleles Flächenpaar darstellt. Da aber dergleichen Pyramiden in der Natur wohl niemals oder höchst selten vollständig, sondern in der Regel nur mit einzelen Theilgestalten erscheinen, und die verschiedenen Prismen des Systemes ebenfalls in zwey Theilgestalten zerfallen, so treten uns in diesem Systeme nur solche Gestalten entgegen, welche aus lauter ungleichwerthigen Flächenpaaren zusammengesetzt sind, indem für jede Fläche einzig und allein in ihrer Gegenfläche eine gleichwerthige vorhanden ist.

Demungeachtet aber müssen wir bey unserer allgemeinen Darstellung sowohl, als bey der besonderen Entwicklung einer gegebenen Combination von triklinometrischen Gestalten, die einzelen Theilgestalten immer auf ihre Zusammensetzungen zu vollständigen triklinometrischen Pyramiden und Prismen zurückführen, weil ausserdem kein klarer Zusammenhang in die systematische Darstellung dieses Systemes kommen würde, dessen Symmetrie-Verhältnisse durch das fast immer isolirte Auftreten der Theilgestalten so verhüllt und entstellt erscheinen, dass man in der vorhandenen Mannichfaltigkeit und scheinbaren Regellosigkeit kaum eine Regel zu erkennen vermöchte, wenn uns nicht jenes natürliche Hülfsmittel der Zusammenfassung der Theilgestalten zu Gebote stände.

§. 230.

Triklinometrische Pyramiden.

Syn. Dreyfache Rhomboidaloktaeder, Bernhardi.
Octaedra pyramidibus obliquis? Weiss.

Die triklinometrischen Pyramiden (oder Dipyramiden) sind von 8 viererley ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, deren Mittelquerschnitt jedoch kein Hauptschnitt ist. Sie haben 12 Kanten und 6 Ecke.

Von den Flächen sind je zwey, in den Verhältnissen von Fläche und Gegenfläche stehende einander gleich und ähnlich, so dass es überhaupt viererley Flächen giebt, welche sich in vier Theilgestalten gruppiren, deren jede nur ein paralleles Flächenpaar darstellt.

Die Kanten zerfallen in sechs durch ihre Länge und ihr Winkelmaass verschiedene Kantenpaare, nämlich

a) 2 längere Polkanten über der Makrodiagonale,
b) 2 kürzere dergleichen,
c) 2 längere Polkanten über der Brachydiagonale,
d) 2 kürzere dergleichen,
e) 2 längere Mittelkanten,
f) 2 kürzere dergleichen.

Die Ecke sind insgesammt viererleykantig und dreyerley, nämlich:

a) 2 Polecke,
b) 2 Mittelecke an den Endpuncten der Makrodiagnale,
c) 2 dergl. an den Endpuncten der Brachydiagonale.

Die Querschnitte sind meistentheils Trapezoide; die Hauptschnitte, und alle ihnen parallelen Schnitte Rhomboide.

§. 231.

Benennung der Theilgestalten und ihrer Elemente.

Wir nennen die Kanten a im vorigen §. die negativen, die Kanten b die positiven makrodiagonalen, die Kanten c die negativen, die Kanten d die positiven brachydiagonalen Polkanten, die Kanten e und f die negativen und positiven Mittelkanten; eben so die Ecke b und c die makrodiagonalen und brachydiagonalen Mittelecke. Bey normaler Stellung präsentirt sich jede triklinometrische Pyramide dem Beobachter mit den vorderen Flächen ihrer vier Theilgestalten, welche letztere nach der Lage dieser ihrer vorderen Glieder folgende Benennung und Bezeichnung erhalten:

1) die obere rechte Theilgestalt = $+P$
2) die obere linke - - = $+P'$
3) die untere rechte - - = $-P$
4) die untere linke - - = $-P'$ *)

Wenn es nöthig wird, alle einzelen Flächen der Theilgestalten, oder die hinteren Glieder derselben von ihren vorderen Gliedern zu unterscheiden, da bedient man sich für erstere des Buchstabens p, während für die letzteren das Zeichen der ganzen Theilgestalt gilt. Gewöhnlich aber, und wo es nicht ausdrücklich angezeigt wird, ist unter P die vollständige Theilgestalt zu verstehen, da wir zunächst nicht die einzelen Flächen oder Glieder der Theilgestalten, sondern diese selbst zu betrachten haben.

§. 232.

Prismen des Systemes.

Neben den Pyramiden lassen sich noch drey verschiedene Arten von Prismen im triklinometrischem Systeme unterscheiden, welche insgesammt dem eigenthümlichem Charakter desselben gemäss in zwey Hemiprismen als Theilgestalten zerfallen, und rhomboidische Querschnitte haben, nämlich:

1) Verticale Prismen, deren Axe in die Axe der Grundgestalt fällt,
2) Geneigte Prismen, deren Axe in die Makrodiagonale der Grundgestalt fällt,
3) Geneigte Prismen, deren Axe in die Brachydiagonale der Grundgestalt fällt.

---

*) Vergl. die Anmerkung zu §. 214.

Der Zusammenhang dieser Prismen mit den Pyramiden wird in dem folgendem Capitel nachgewiesen werden, welches von der Ableitung der verschiedenen Gestalten und Theilgestalten des triklinometrischen Systemes auf eine mit der oben gebrauchten Methode ganz übereinstimmende Art handelt.

ZWEYTES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des triklinometrischen Systemes.

§. 233.

Grundgestalt.

Ausgehend von der bereits in den beyden vorhergehenden Systemen gebrauchten Hülfsvorstellung, vermöge welcher wir die Pyramiden vollständig mit allen ihren Theilgestalten voraussetzen, wählen wir eine dergleichen triklinometrische Pyramide von ganz unbestimmten Verhältnissen ihrer Dimensionen und unbestimmten Neigungswinkeln derselben zur Grundgestalt, bezeichnen sie mit $\pm P'$ und bestimmen ihre normale Stellung. Es sey nun

die aufrechte Halbaxe	=	a
die halbe Makrodiagonale	=	b
die halbe Brachydiagonale	=	c
der Winkel von a und b	=	α
der Winkel von b und c	=	β
der Winkel von c und a	=	γ

ferner sey $a \cos.\alpha = d$

$b \cos.\beta = e$

$c \cos.\gamma = f$

so drückt allgemein $a : b : c : d : e : f$ das Verhältniss der Elemente aus, durch welche die Grundgestalt einer triklinometrischen Krystallreihe bestimmt wird, indem wir auch hier die Linien d, e und f statt der Winkel α, β und γ in Rechnung bringen.

Anmerkung. Da jedes Verhältniss als solches eine arbiträre Grösse gestattet, so begreift man, dass zur vollständigen Bestimmung jeder triklinometrischen Pyramide, und also auch jeder triklinometrischen Krystallreihe fünf Beobachtungselemente, z. B. fünf verschiedne Kanten, erfordert werden.

§. 234.

Hauptreihe des Systemes.

Vermittels der Anwendung der bereits in den vorigen Systemen so häufig gebrauchten Ableitung erster Art auf die gewählte Grundgestalt ergiebt sich, dass auch aus ihr eine Reihe triklinometrischer Pyramiden von derselben Basis und Stellung abgeleitet werden kann. Man setze nämlich a veränderlich von o bis ∞, b und c constant, so erhält man folgende Reihe:

$$oP' \ldots \pm mP' \ldots \pm P' \ldots \pm mP' \ldots \infty P'$$

in welcher, wie immer, die Glieder rechter Hand spitzer oder höher, die Glieder linker Hand flacher oder niedriger als $\pm P'$ sind, weil in jenen $m > 1$ in diesen $m < 1$.

Zusatz. Diese Reihe, welche wir die Hauptreihe des Systemes nennen, ist eigentlich eine vierfach zusammengesetzte Reihe, indem jedes ihrer Glieder in vier Theilgestalten $+ mP$, $+ mP'$, $- mP$ und $- mP'$ zerfällt werden kann, welche selbständig in aller Unabhängigkeit von einander auftreten. Ie nachdem man also das Zeichen $+$ oder das Zeichen — unterdrückt, und den Strich rechter Hand beyfügt oder weglässt, verwandelt sich das alle vier Theilgestalten vereinigende Zeichen $\pm mP'$ der vollständigen Pyramide in das Zeichen einer ihrer Theilgestalten.

Anmerkung. Die Gränzglieder dieser Reihe werden deshalb, weil die Ambiguität der oberen und unteren Flächen in ihnen aufgehoben ist, von dem Zeichen $\pm$ befreyt; das eine, oP, ist wie immer die basische, oder jede mit ihr parallele Fläche (§. 125 Anm. 2) das andere $\infty P'$, ein indefinites Prisma, welches jedoch in ein rechtes und ein linkes Hemiprisma zerfällt.

§. 235.

Reihen der makrodiagonalen und brachydiagonalen triklinometrischen Pyramiden.

Aus jedem Gliede $\pm mP'$ der Hauptreihe lassen sich zwey Reihen triklinometrischer Pyramiden ableiten, in welchen einerseits die Makrodiagonale, anderseits die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

Man verfahre mit $\pm mP'$ auf ähnliche Art, wie mit mP im rhombischem oder mit $\pm mP$ im klinometrischem Systeme, d. h. man setze einmal die Brachydiagonale bey constanter Makrodiagonale, das andre

Mal die Makrodiagonale bey constanter Brachydiagonale nach einem Coefficienten n veränderlich, welcher alle Werthe von 1 bis ∞ annehmen kann, so erhält man nach der bekannten Construction für jeden besondern Werth von n in jenem Falle eine triklinometrische Pyramide, in welcher die Makrodiagonale, in diesem Falle eine dergleichen Pyramide, in welcher die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist. Bezeichnen wir nun jene Pyramiden allgemein mit $\pm m\breve{P}'n$, diese mit $\pm m\bar{P}'n$, so wird sich der schematiche Inbegriff aller möglichen Pyramiden dieser Art in zwey Reihen von folgender Form ordnen:

1) $\pm m\breve{P}'$ . . . . . $\pm m\breve{P}'n$ . . . . . $\pm m\breve{P}'\infty$

2) $\pm m\bar{P}'$ . . . . . $\pm m\bar{P}'n$ . . . . . $\pm m\bar{P}'\infty$

Nennen wir ferner von beyderley Pyramiden diejenige mit unveränderter Makrodiagonale eine makrodiagonale, diejenige mit unveränderter Brachydiagonale eine brachydiagonale Pyramide, so können die ihnen entsprechenden Reihen durch dieselben Namen unterschieden werden.

Zusatz. Auch von diesen Reihen ist jede eine vierfach zusammengesetzte, indem sich ihre einzelen Glieder in vier Theilgestalten zerfällen lassen, die ganz unabhängig von einander erscheinen.

Anmerkung. Die Gränzen dieser Reihen sind geneigte Prismen, von welchen die Flächen des einen $\pm m\breve{P}\infty$ der Brachydiagonale, die Flächen des anderen $\pm m\bar{P}\infty$ der Makrodiagonale der Grundgestalt parallel laufen. Indem wir beyde durch den Namen der brachydiagonalen und makrodiagonalen geneigten Prismen unterscheiden, vergessen wir nicht, dass ein jedes derselben in zwey Theilgestalten, in ein positives und in ein negatives Hemiprisma zerfällt.

§. 236.

Fortsetzung.

Die Ableitung des vorigen §. muss, wie für alle Glieder der Hauptreihe, so auch für $\infty P'$ gelten, und führt somit auf eine doppelte Reihe von rhomboidischen Prismen, in welchen einerseits die Makrodiagonale anderseits die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist. Die Ambiguität der Lage in Bezug auf oben und unten, und das ihr entsprechende Doppelzeichen $\pm$ fällt weg, während die Ambiguität der rechten und linken Theilgestalten nicht aufgehoben ist. Daher erhalten beyde Reihen folgende Gestalt:

$$1)\ \infty\breve{P}' \ldots\ldots \infty\breve{P}'n \ldots\ldots \infty\breve{P}\infty$$

$$2)\ \infty\bar{P}' \ldots\ldots \infty\bar{P}'n \ldots\ldots \infty\bar{P}\infty$$

Wir nennen die erstere dieser Reihen die Reihe der makrodiagonalen, die zweyte derselben die Reihe der brachydiagonalen verticalen Prismen, ohne jedoch zu vergessen, wie jede derselben eigentlich eine Doppelreihe sey, indem ihre einzelen Glieder in zwey von einander ganz unabhängige Theilgestalten zerfallen.

Zusatz. Die Gränzglieder dieser Reihen sind $\infty\breve{P}\infty$ und $\infty\bar{P}\infty$, oder das makrodiagonale und brachydiagonale Flächenpaar.

§. 237.

Uebersicht.

Durch die Ableitungen der vorhergehenden §§. ist die mögliche Mannichfaltigkeit aller Gestalten und Theilgestalten des triklinometrischen Systemes erschöpft. Vereinigen wir also die verschiedenen Reihen in ein Ganzes, so erhalten wir folgendes vollständige Schema des Systemes:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
oP & \ldots & \pm m\breve{P}\infty & \ldots & \pm\breve{P}\infty & \ldots & \pm m\breve{P}\infty & \ldots & \infty\breve{P}\infty \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & \pm m\breve{P}'n & \ldots & \pm\breve{P}'n & \ldots & \pm m\breve{P}'n & \ldots & \infty\breve{P}'n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & \pm mP' & \ldots & \pm P' & \ldots & \pm mP' & \ldots & \infty P' \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & \pm m\bar{P}'n & \ldots & \pm\bar{P}'n & \ldots & \pm m\bar{P}'n & \ldots & \infty\bar{P}'n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oP & \ldots & \pm m\bar{P}\infty & \ldots & \pm\bar{P}\infty & \ldots & \pm m\bar{P}\infty & \ldots & \infty\bar{P}\infty
\end{array}
$$

Aus der Betrachtung dieses Schemas ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften desselben:

1) Die mittelste horizontale Reihe, welche wir die Hauptreihe nannten, begreift alle triklinometrischen Pyramiden, so wie das verticale Prisma von gleicher und ähnlicher Basis mit der Grundgestalt $\pm P'$.

2) Die oberste horizontale Reihe, welche wir die makrodiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, enthält sämmtliche geneigte Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Makrodiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

3) Die unterste horizontale Reihe, welche wir die brachydiagonale Nebenreihe des Systemes nennen, begreift alle diejenigen geneigten Prismen, so wie dasjenige laterale Flächenpaar, in welchen die Brachydiagonale der Grundgestalt noch unverändert enthalten ist.

4) Die mittleren horizontalen Reihen der oberen Hälfte des Schemas, welche wir die makrodiagonalen Zwischenreihen des Systemes nennen, begreifen alle diejenigen triklinometrischen Pyramiden und verticalen Prismen von unähnlicher Basis mit der Grundgestalt, in welchen die Makrodiagonale derselben noch unverändert enthalten ist.

5) Die mittleren horizontalen Reihen der unteren Hälfte des Schemas, welche wir die brachydiagonalen Zwischenreihen nennen, enthalten alle diejenigen triklinometrischen Pyramiden und verticalen Prismen von unähnlicher Basis mit der Grundgestalt, in welchen die Brachydiagonale derselben noch unverändert enthalten ist.

6) Iede horizontale Reihe überhaupt begreift nur solche Gestalten von gleichen und ähnlichen Basen.

7) Die verticalen Reihen zerfallen in eine makrodiagonale und eine brachydiagonale Hälfte,

von denen jene Gestalten begreift, in welchen die Kantenlinien der makrodiagonalen, diese dagegen Gestalten, in welchen die Kantenlinien der brachydiagonalen Polkanten des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe noch hervortreten.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

§. 238.

Winkel der Fläche $+P$ mit den Ebenen der Hauptschnitte.

Seyen a, b, c die unter beliebigen spitzen Winkeln geneigten Coordinaten der Fläche $+P$; a und b bilden den Winkel α, b und c den Winkel β, c und a den Winkel γ. Man sucht Ausdrücke für die Neigungswinkel der gegebenen Fläche gegen die Ebenen je zweyer ihrer Coordinaten oder gegen die Ebenen der Hauptschnitte von $\underline{+}P'$.

Es sey der Winkel mit Ebene ab $= y$

- - - ac $= x$

- - - bc $= z$

Richten wir die Formeln so ein, dass sie nur die Cosinus der Winkel α, β und γ enthalten, so können wir der Kürze wegen diese Buchstaben selbst die Cosinus ihrer Winkel bedeuten lassen, so dass $\alpha = \cos.\alpha$ u. s. w. Man setze nun

$$\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma} = \mathrm{M}, \text{ so ist}$$

$$\text{tang.y} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2-2ab\alpha}\ \mathrm{M}}{ab(1-\alpha^2)-c[(\beta-\alpha\gamma)a+(\gamma-a\beta)b]}$$

$$\text{tang.x} = \frac{b\sqrt{a^2+c^2-2ac\gamma}\ \mathrm{M}}{ac(1-\gamma^2)-b[(\alpha-\beta\gamma)c+(\beta-\alpha\gamma)a]}$$

$$\text{tang.z} = \frac{a\sqrt{b^2+c^2-2bc\beta}\ \mathrm{M}}{bc(1-\beta^2)-a[(\gamma-\alpha\beta)b+(\alpha-\beta\gamma)c]}$$

§. 239.

Winkel aller Flächen von ±P′ mit den Ebenen der Hauptschnitte.

Man denke sich nun die a, b und c jenseits ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes verlängert, bis die Verlängerungen der einzelen ihnen selbst gleich geworden, und lege Ebenen durch je drey Endpuncte des solchergestalt construirten Dimensions-Systemes, so resultirt eine vollständige triklinometrische Pyramide. Nennt man nun die Winkel, welche die vorderen Flächen der vier Theilgestalten +P, +P′, −P und −P′ mit dem Hauptschnitte durch ab bilden y, y′, y″ und y‴; die Winkel mit dem Hauptschnitte durch ac, x, x′, x″ und x‴, und die Winkel mit dem Hauptschnitte durch bc, z, z′, z″ und z‴, so gelten für y, x und z die Gleichungen des vorigen §., während sich dieselben für die übrigen Neigungswinkel etwas modificiren. Da nämlich für

Theilgestalt.	+P	+P′	−P	−P′
das Zeichen v. α	+	+	−	−
- - - - β	+	−	+	−
- - - - γ	+	−	−	+

so erhalten wir aus den Formeln des vorigen §. folgende allgemeinen Gleichungen:

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} y \\ y' \end{cases} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2-2ab\alpha}\;M}{ab(1-\alpha^2)\mp c[(\beta-\alpha\gamma)a+(\gamma-\alpha\beta)b]}$$

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} y'' \\ y''' \end{cases} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2+2ab\alpha}\;M}{ab(1-\alpha^2)\mp c[(\beta-\alpha\gamma)a-(\gamma-\alpha\beta)b]}$$

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} x \\ x''' \end{cases} = \frac{b\sqrt{a^2+c^2-2ac\gamma}\;M}{ac(1-\gamma^2)\mp b[(\alpha-\beta\gamma)c+(\beta-\alpha\gamma)a]}$$

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} x' \\ x'' \end{cases} = \frac{b\sqrt{a^2+c^2+2ac\gamma}\;M}{ac(1-\gamma^2)\mp b[(\alpha-\beta\gamma)c-(\beta-\alpha\gamma)a]}$$

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} z \\ z'' \end{cases} = \frac{a\sqrt{b^2+c^2-2bc\beta}\;M}{bc(1-\beta^2)\pm a[(\gamma-\alpha\beta)b+(\alpha-\beta\gamma)c]}$$

$$\operatorname{tang.}\begin{cases} z' \\ z''' \end{cases} = \frac{a\sqrt{(b^2+c^2+2bc\beta}\;M}{bc(1-\beta^2)\pm a[(\gamma-\alpha\beta)b-(\alpha-\beta\gamma)c]}$$

in welchen die oberen Zeichen dem oberem, die unteren Zeichen dem unterem der beyden Winkel gelten, deren Buchstaben auf der linken Seite der Gleichung unter einander geschrieben sind.

§. 240.

Kantenwinkel der vollständigen triklinometrischen Pyramide.

Mittels der Gleichungen des vorigen §. bestimmen sich die Neigungswinkel je zweyer Flächen der triklinometrischen Pyramide, wenn wir dieselbe vollständig ausgebildet denken, so dass sich alle ihre Theilgestalten in einem gewissem Gleichgewichte befinden. Es seyen nämlich

Y und Y′ die makrodiagonalen Polkanten,
X und X′ die brachydiagonalen Polkanten,
Z und Z′ die Mittelkanten,

so ist einleuchtend, dass

$$Y = y + y'$$
$$Y' = y'' + y'''$$
$$X = x + x'''$$
$$X' = x' + x''$$
$$Z = z + z''$$
$$Z' = z' + z'''$$

Da nun auch hier, wie in §. 222, die Tangenten je zweyer zu summirender Winkel w und w′ unter der allgemeinen Form

$$\text{tang.}w = \frac{A}{B-C}$$
$$\text{tang.}w' = \frac{A}{B+C}$$

begriffen sind, so dass A der Zähler, B das erste Glied und C das zweyte Glied des Nenners ihrer entsprechenden Werthe bedeutet, so erhalten wir wiederum

$$\cos.(w+w') = \frac{B^2 - C^2 - A^2}{\sqrt{(B^2-C^2-A^2)^2 + 4A^2B^2}}$$

und demnach folgende Werthe der cos. Y, cos. Y′ u. s. w.

$$\cos.\begin{cases}Y\\Y'\end{cases} = \frac{a^2b^2(1-\alpha^2) - a^2c^2(1-\gamma^2) - b^2c^2(1-\beta^2) \pm 2abc^2(\alpha-\beta\gamma)}{\sqrt{N^2 + 4a^2b^2c^2\,(a^2+b^2 \pm 2ab\alpha)\,M^2}}$$

$$\cos.\begin{cases}X\\X'\end{cases} = \frac{a^2c^2(1-\gamma^2) - a^2b^2(1-\alpha^2) - b^2c^2(1-\beta^2) \pm 2acb^2(\gamma-\alpha\beta)}{\sqrt{N^2 + 4a^2b^2c^2(a^2+c^2 \pm 2ac\gamma)\,M^2}}$$

$$\cos.\begin{cases}Z\\Z'\end{cases} = \frac{b^2c^2(1-\beta^2) - a^2b^2(1-\alpha^2) - a^2c^2(1-\gamma^2) \pm 2bca^2(\beta-\alpha\gamma)}{\sqrt{N^2 + 4a^2b^2c^2\,(b^2+c^2 \pm 2bc\beta)\,M^2}}$$

in welchen Gleichungen die oberen Zeichen dem oberem, die unteren Zeichen dem unterem Winkel linker Hand gelten, der Buchstabe N aber durchgängig den Zähler desselben Bruches bedeutet, in welchem er als ein Glied des Nenners auftritt.

Anmerkung. Wir haben diese Gleichungen nicht sowohl wegen ihrer unmittelbaren Brauchbarkeit, als wegen ihrer Symmetrie und deshalb mitgetheilt, weil sie zugleich mit den Gleichungen des vorigen §. die allgemeine Basis bilden, auf welche sich die Berechnung aller trimetrischen Gestalten gründen lässt. Man liest unmittelbar aus ihnen heraus, in welcher Abhängigkeit die Kantenwinkel von den Dimensionen sowohl, als von den Neigungswinkeln derselben stehen, und wie sich durch successive Einführung von $\gamma = 0$, $\beta = 0$ und $\alpha = 0$ diese Gleichungen in die entsprechenden der vorhergehenden Systeme verwandeln.

§. 241.

Umwandlung der gefundenen Gleichungen.

Für die besondere Berechnung einer triklinometrischen Pyramide werden wir der Consequenz wegen in die gefundenen Gleichungen statt der Grössen α, β und γ deren Werthe $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{b}$ und $\frac{f}{c}$ einzuführen haben. Dann wird, wenn

$$b^2c^2(a^2 - d^2) - a^2(c^2e^2 - b^2f^2) + 2abcdef = L$$

$$\cot. \begin{cases} y \\ y' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2) \mp [a(ace-bdf) + b(abf-cde)]}{\sqrt{(a^2+b^2-2bd)L}}$$

$$\cot. \begin{cases} y'' \\ y''' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2) \mp [a(ace-bdf) - b(abf-cde)]}{\sqrt{(a^2+b^2+2bd)L}}$$

$$\cot.\begin{cases} x \\ x''' \end{cases} = \frac{a^2(c^2-f^2) \mp [c(bcd-aef) + a(ace-bdf)]}{\sqrt{(a^2+c^2-2af)L}}$$

$$\cot.\begin{cases} x' \\ x'' \end{cases} = \frac{a^2(c^2-f^2) \mp [c(bcd-aef) - a(ace-bdf)]}{\sqrt{(a^2+c^2+2af)L}}$$

$$\cot.\begin{cases} z \\ z'' \end{cases} = \frac{c^2(b^2-e^2) \mp [b(abf-cde) + c(bcd-aef)]}{\sqrt{(b^2+c^2-2ce)L}}$$

$$\cot.\begin{cases} z' \\ z''' \end{cases} = \frac{c^2(b^2-e^2) \pm [b(abf-cde) - c(bcd-aef)]}{\sqrt{(b^2+c^2+2ce)L}}$$

$$\cos.\begin{cases} Y \\ Y' \end{cases} = \frac{b^2(a^2-d^2) - a^2(c^2-f^2) - c^2(b^2-e^2) \pm 2c(bcd-aef)}{\sqrt{N^2+4(a^2+b^2 \mp 2bd)L}}$$

$$\cos.\begin{cases} X \\ X' \end{cases} = \frac{a^2(c^2-f^2) - b^2(a^2-d^2) - c^2(b^2-e^2) \pm 2b(abf-cde)}{\sqrt{N^2+4(a^2+c^2 \mp 2af)L}}$$

$$\cos.\begin{cases} Z \\ Z' \end{cases} = \frac{c^2(b^2-e^2) - b^2(a^2-d^2) - a^2(c^2-f^2) \pm 2a(ace-bdf)}{\sqrt{N^2+4(b^2+c^2 \mp 2ce)L}}$$

in welchen letzteren drey Gleichungen der Buchstabe N wiederum den Zähler desselben Bruches bedeutet, in welchem er als ein Glied des Nenners auftritt.

§. 242.

Brauchbarkeit dieser Gleichungen.

Diese zunächst für die Grundgestalt berechneten Gleichungen sind allgemeingültig für alle übrigen Gestalten des triklinometrischen Systemes, indem man nur die entsprechenden Coefficienten von a, b, c, d, e und f einzuführen braucht, um die ihnen angemessene Umwandlung der Formeln zu bewerkstelligen. So hat man z. B. für $\pm mP'$ oder das allgemeine Glied der Hauptreihe ma und md statt a und d zu setzen, um die Gleichungen für jedes Glied der Hauptreihe gültig zu machen. Bringt man darauf in die so verwandelten Gleichungen die Werthe nc und nf, oder nb und ne statt c und f, oder b und e, so erhält man im ersterem Falle die Gleichungen für die makrodiagonalen, im zweytem Falle die Gleichungen für die brachydiagonalen Zwischen- und Neben-Reihen.

Die Gleichungen für cot.x, cot.y u. s. w. sind *in praxi* bey weitem von grösserer Wichtigkeit und von häufigerem Gebrauche als die Gleichungen für cos.Y, cos.Y′ u. s. w., indem sie uns unmittelbar die Supplemente der Winkel angeben, welche irgend eine Theilgestalt mit dem basischem, dem makrodiagonalem und dem brachydiagonalem Flächenpaare bildet; Winkel, die sehr häufig gemessen werden können, und zur Berechnung der Elemente der Grundgestalt ganz vorzüglich geeignet sind.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des triklinometrischen Systemes.

§. 243.

Grundgestalt.

Obgleich die Combinationen dieses und des vorigen Systemes wegen des nicht selten anscheinenden Mangels an Symmetrie etwas schwieriger zu entwickeln sind, so werden diese Schwierigkeiten dennoch gröstentheils gehoben, sobald man sich die Resultate der Ableitung und die derselben zu Grunde liegende Hülfsvorstellung vergegenwärtigt. Die Wahl der Stellung sowohl als der Grundgestalt ist auch hier das wichtigste Element, dessen Bestimmung um so mehr Aufmerksamkeit erfordert, je weniger Andeutungen dazu in den Verhältnissen der Combinationen selbst gegeben zu seyn pflegen. Denn Polyeder, welche aus lauter geometrisch und physikalisch ungleichwerthigen Flächenpaaren zusammengesetzt sind, in welchen sich der Begriff der einzelen Theilgestalt auf den der blossen Fläche und Gegenfläche reducirt, werden nicht selten sogar die Frage unentschieden lassen, welche Flächen zu geschlossenen oder endlichen, welche zu offenen oder unendlichen Gestalten zu rechnen sind, so dass die Entscheidung über die Grundgestalt noch weit mehr der Willkühr überlassen bleibt.

§. 244.

Allgemeine Combinationsregeln.

Ist aber die aufrechte Stellung, die Grundgestalt und die Basis derselben bestimmt, so ergeben sich ohne Weiteres aus der Ableitung für die vorläufige Entwicklung der Combinationen die Entcheidungen, welche Flächen der Hauptreihe, welche den makrodiagonalen, welche den brachydiagonalen Zwischen- und Neben-Reihen angehören. Ferner führt uns die Ableitung zu folgenden Regeln:

1) Die Flächen je zweyer gleichnamiger Theilgestalten einer und derselben horizontalen Reihe des allgemeinen Schemas in §. 237 bringen mit einander

Combinationskanten hervor, deren Kantenlinien in Parallelebenen der Basis liegen.

2) Die Flächen je zweyer gleichnamiger Theilgestalten einer und derselben verticalen Reihe bringen mit einander Combinationskanten hervor, welche den gleichnamigen Polkanten des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe parallel laufen.

§. 245.

Gebrauch der Combinationsgleichungen.

Für den sehr häufigen Fall, da die Flächen einer unbekannten Gestalt zwischen den Flächen zweyer bekannten Gestalten mit parallelen Combinationskanten erscheinen, gelten in diesem Systeme ganz und gar dieselben Combinationsgleichungen wie in dem klinometrischem Systeme. Nur sind die daselbst in §. 203 angedeuteten Vorsichtsregeln ganz vorzüglich zu berücksichtigen, indem man jederzeit die Lage der beyden gegebenen Flächen und die dieser Lage entsprechenden positiven oder negativen Werthe ihrer Coordinaten genau bestimmen muss, bevor man die Coefficienten dieser Coordinaten in die Combinationsgleichungen einführt.

§. 246.

Entwicklung zweyer Combinationen des triklinometrischen Feldspathes oder Albites.

Als ein leichtes Beyspiel der Entwicklung triklinometrischer Combinationen wähle ich ein Paar Combinationen des triklinometrischen Feldspathes tab. III. fig. 12 und 13.

Wir stellen beyde Combinationen so aufrecht, dass die Flächen T, l, z u. s. w. verticalen Prismen angehören, bestimmen die Flächen s, s' in fig. 13 als die beyden oberen Theilgestalten der Grundgestalt, und die Flächen P als das basische Flächenpaar. Beyde Combinationen sind 11zählig und in beyden erscheinen mit Ausnahme von s und g dieselben Theilgestalten, welche sich vorläufig folgenderweise bestimmen: es gehören

1) Gestalten der Hauptreihe die Flächen P
- - - - - - - - g
- - - - - - - - s
- - - - - - - - l
- - - - - - - - s'
- - - - - - - - T

2) G. der makrod. Zwischenreihe d. Fl. z
- - - - - - - - z'

3) G. der brachyd. Nebenreihe d. Fl. x
- - - - - - - - y

4) G. der makrod. Nebenreihe d. Fl. n
- - - - - - - - M

Da nun $P = 0\mathrm{P}$, $s = \mathrm{P}$ und $s' = \mathrm{P}'$, so ist

$$l = \infty\mathrm{P}$$
$$T = \infty\mathrm{P}'$$
$$M = \infty\breve{\mathrm{P}}\infty$$
$$x = \bar{\mathrm{P}}\infty$$

Da ferner y als ein geneigtes brachydiagonales Hemiprisma mit parallelen Combinationskanten zwischen $s = \mathrm{P}$ und $T = \infty\mathrm{P}'$ erscheint, so ergiebt sich mittels der Combinationsgleichung A §. 202 mit Berücksichtigung der Lage beyder bekannter Flächen, dass

$$y = 2\bar{\mathrm{P}}\infty$$

§. 247.

F o r t s e t z u n g.

Weil g die rechte obere Theilgestalt einer Pyramide der Hauptreihe ist, welche flacher als P, so wird für $g = xP$, $x < 1$; es erscheint aber $x = \bar{P}\infty$ mit parallelen Combinationskanten zwischen $g = xP$ und $T = \infty P'$; also wird vermöge Formel A a. a. O.

$$1 = \frac{\infty^2 (1+1) x}{\infty^2}$$

$$x = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{und } g = xP = \tfrac{1}{2}P$$

Die Flächen n, welche einem geneigtem makrodiagonalem Hemiprisma $x\breve{P}\infty$ angehören, erscheinen mit parallelen Combinationskanten zwischen $s = P$ und $T = \infty p'$ (§. 231) folglich gilt zuvörderst

$$x = \frac{\infty (n'+n) mm'}{\infty (mn'+m'n)}$$

Da aber auch $m' = \infty$, so wird

$$x = \frac{(n'+n) m}{n'}$$

und weil $m = n = n' = 1$

$$x = 2 \text{ und } n = 2\breve{P}\infty$$

Endlich erscheinen die Flächen $n = 2\breve{P}\infty$ mit parallelen Combinationskanten zwischen $g = \frac{1}{2}P$ und $z' = \infty\breve{P}x$; es gilt also wiederum die Gleichung A, welche jetzt folgende Gestalt erhält:

$$2 = \frac{\infty (n'+n) mm'}{\infty (mn'+m'n)}$$

Da nun auch $m = \infty$ und $n = x$,

so wird $2 = \frac{(n' + x)m'}{n'}$

und endlich, weil $m' = \frac{1}{2}$, $n' = 1$

$$x = 3$$

$$z' = \infty\breve{P}'3$$

$$z = \infty\breve{P}3$$

Somit wären die sämmtlichen Gestalten beyder Combinationen bestimmt, und ihre Uebersicht folgende:

1) Aus der Hauptreihe, rechts	$P = 0P$
- - - - -	$g = \frac{1}{2}P$
- - - - -	$s = P$
- - - - -	$l = \infty P$
- - - - links	$s' = P'$
- - - - -	$T = \infty P'$
2) a. d. makrod. Zwischenreihe rechts	$z = \infty\breve{P}3$
- - - - - - links	$z' = \infty\breve{P}'3$
3) aus der brachyd. Nebenreihe	$x = \bar{P}\infty$
- - - - - -	$y = 2\bar{P}\infty$
4) aus der makrod. Nebenreihe	$n = 2\breve{P}\infty$
- - - - - -	$M = \infty\breve{P}\infty$

SIEBENTER ABSCHNITT.

VOM HEXAGONAL - SYSTEME.

ERSTES CAPITEL.

Von den einzelen Gestalten des Hexagonal - Systemes.

§. 248.

Name und Umfang des Systemes.

Das Hexagonal-System, dessen geometrischer Grundcharakter durch Gleichheit dreyer, in einer Ebene gegen einander gleich geneigter Dimensionen gegen eine ungleiche, auf ihnen senkrechte Dimension ausgesprochen ist, begreift alle einaxigen Gestalten von hexagonalen Querschnitten, und keine anderen.

Dieses System isolirt sich auf eine merkwürdige Weise gegen die bisher betrachteten Systeme, indem die Verhältnisse seiner Gestalten eine Zurückführung derselben auf drey Dimensionen nicht wohl gestatten, ohne der Natur Gewalt anzuthuen, und die Symmetrie aufzuopfern. Gegen drey gleiche, horizontale Dimensionen als Diagonalen hebt sich eine ungleiche, verticale Dimension als Axe hervor, und diese Dreyzahl der horizontalen Dimensionen ist eben die Bedingung, durch welche der eigenthümliche Charakter der Gestalten dieses Systemes vermittelt wird, welches ausserdem im Gange seiner Entwicklungen und in der Entfaltung seines

Gestalten-Reichthumes eine grosse Uebereinstimmung mit dem Tetragonal-Systeme offenbart. — Der Name, unter welchem wir dieses System aufführen, ist von der Figur der Querschnitte seiner Gestalten entlehnt, und von Breithaupt vorgeschlagen worden. Mohs nennt es das rhomboedrische, Weiss das sechsgliedrige System, Hausmann, mit einem sehr treffend gewähltem, und den geometrischen Grundcharakter unmittelbar ausdrückendem Namen das monotrimetrische System.

§. 249.

Wichtigkeit der Hemiedrie in diesem Systeme.

Ausgezeichnet ist dieses System auch durch die Wichtigkeit und Selbstständigkeit mehrer seiner hemiedrischen Gestalten, indem bey weitem die meisten derjenigen Minerale, deren Krystallbildung seinen Gesetzen unterworfen ist, keinesweges in homoedrischen, sondern in hemiedrischen Gestalten erscheinen, und eines dieser Minerale einen solchen Gestalten-Reichthum, eine solche Mannichfaltigkeit der Combinationen offenbart, dass sich keine andere Substanz in dieser Hinsicht mit ihm messen kann. Der Inbegriff hemiedrischer Gestalten, welche in dieser Menge und Selbstständigkeit auftreten, ist dadurch charakterisirt, dass er nur diejenigen parallelflächig-hemiedrischen Gestalten begreift, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, und deren Mittelquerschnitte folglich keine Hauptschnitte sind. Alle übrigen hemiedrischen Gestalten dagegen erscheinen nur untergeordnet in Combinationen, und gleichsam im Gefolge der homoedrischen Gestalten, während die Gestalten jenes Inbegriffes in vollkommener Unabhängigkeit, und in der Regel **ausser aller Gemeinschaft** mit homoedrischen Gestalten auftreten. Deshalb, und wegen des ganz eigenthümlichen Habitus dieser Gestalten scheint es sehr zweckmässig zu seyn, ihren Inbegriff mit Weiss *) und Hausmann **), wo nicht als ein eignes System, doch als eine selbstständige Abtheilung des Hexagonal-Systemes zu betrachten, welche wir durch den nach ihrer einfachsten Gestalt gewählten Namen der **rhomboedrischen Gruppe** so wie durch eine besondere Bezeichnung ihrer Gestalten von dem eigentlichem **Hexagonal-Systeme** unterscheiden werden.

§. 250.

Einzele Gestalten des Systemes.

Die einzelen Gestalten des Hexagonal-Systemes erhalten ihren allgemeinsten Namen von der Figur ihrer Flächen, oder von andern allgemeineren Gestalt-Verhältnissen, während sie ihren Zunamen entweder vom Namen des Systemes oder von der Figur ihres Mittelquerschnittes entlehnen. Die bis jetzt beobachteten Gestalten sind folgende:

1) Pyramiden, und zwar
   a) trigonale
   b) hexagonale
   c) dihexagonale P.
2) Rhomboeder;
3) Trapezoeder, und zwar

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1814—1815. S. 325.
**) Hausmann a. a. O. S. 478 ff.

a) ditrigonale

b) dihexagonale T.

4) Skalenoeder.

Ausser diesen geschlossenen Gestalten erscheinen noch dreyerley, nämlich trigonale, hexagonale und dihexagonale Prismen, welche jedoch, wie die Prismen aller Systeme, nur als die Gränzgestalten der gleichnamigen Pyramiden oder der Rhomboeder zu betrachten sind.

§. 251.

Trigonale Pyramiden.

Mohs, a. a. O. S. 212.

Die trigonalen Pyramiden (*tab. I. fig.* 9) sind von 6 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, und haben 9 Kanten und 5 Ecke.

Die Kanten sind zweyerley: a) 6 Polkanten, und b) 3 symmetrische Mittelkanten.

Die Ecke sind gleichfalls zweyerley: a) 2 trigonale Polecke, und b) 3 rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind insgesammt gleichseitige Dreyecke, und der Mittelquerschnitt der einzige Hauptschnitt der Gestalt.

§. 252.

Hexagonale Pyramiden. (Breithaupt.)

Syn. Sechsgliedrige Doppelpyramiden, Dihexaeder, auch Quarzoide, Weiss.
Gleichschenklige sechsseitige Pyramiden, auch Dirhomboeder, Mohs.
Achtseitige Dodekaeder zum Theil, Bernhardi.
Bipyramidaldodekaeder, Hausmann.

Die hexagonalen Pyramiden (*tab. I. fig.* 10) sind von 12 gleichschenkligen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, und haben 18 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind zweyerley: a) 12 Polkanten, und b) 6 symmetrische Mittelkanten.

Die Ecke ebenfalls zweyerley: a) 2 hexagonale Polecke, und b) 6 rhombische Mittelecke.

Die Querschnitte sind insgesammt regelmässige Sechsecke, der Mittelquerschnitt ein Hauptschnitt; die Axenhauptschnitte sind Rhomben.

Anmerkung. Von diesen Pyramiden sind dreyerley durch ihre Stellung und die Grösse ihrer basischen Hauptschnitte wesentlich verschiedene Arten zu unterscheiden, indem sich bey normaler Lage ihrer Dimensionen die einen in Bezug auf eine willkührlich angenommene Grundgestalt in paralleler, die anderen in diagonaler, die dritten in keiner von beyden, sondern in irgend einer mittleren abnormen Stellung befinden, so dass die Diagonalen des Dimensions-Systemes in den einen je zwey gegenüberliegende Mittelecke, und in den anderen die Mitttelpuncte je zweyer gegenüberliegender Mittelkanten verbinden, während sie in den dritten diese Kanten in irgend anderen Puncten schneiden.

§. 253.

Dihexagonale Pyramiden. (*Breithaupt.*)

Syn. 6 und 6kantige Doppelpyramide, auch Didodekaeder, auch Sechs- und Sechskantner, Weiss. Ungleichschenklige 12seitige Pyramide, auch Dipyramide, Mohs *).
Doppelt zwölfseitige Pyramide, Hausmann.

Die dihexagonalen Pyramiden (*tab. I. fig. 11.*) sind von 24 ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Ge-

*) Mohs a. a. O. I. S. 210.

stalten, deren Mittelkanten in einer Ebene liegen, und haben 36 Kanten und 14 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: a) 12 kürzere, stumpfere, b) 12 längere, schärfere Polkanten und c) 12 Mittelkanten.

Die Ecke sind ebenfalls dreyerley: a) 2 dihexagonale Polecke, b) 6 spitzere Mittelecke, in welchen die schärferen und c) 6 stumpfere Mittelecke, in welchen die stumpferen Polkanten zusammenlaufen.

Die Querschnitte sind insgesammt gleichseitige aber nur abwechselnd-gleichwinklige Zwölfecke oder dihexagonale Figuren, und der Mittelquerschnitt ein Hauptschnitt; die 12 Axenhauptschnitte sind zweyerley Rhomben.

Die Flächen dieser Gestalten gruppiren sich in 12 zweyzählige Flächensysteme.

Anmerkung. Diejenigen Polkanten und Mittelecke, welche in den Hauptschnitten durch die Diagonalen der beliebig gewählten Grundgestalt liegen, nennen wir die normalen, die übrigen die diagonalen Polkanten und Mittelecke.

§. 254.

Rhomboeder.

Syn. Rhomboide der Franzosen.
Rautenflach, von Raumer.
Achteckige Hexaeder zum Theil, Bernhardi.

Die Rhomboeder (*tab. I. fig. 13.*) sind von 6 Rhomben umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und ab-steigend rund um die Gestalt laufen, und haben 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind zweyerley: a) 6 Polkanten und b) 6 mit ihnen parallele Mittelkanten.

Die Ecke sind ebenfalls zweyerley: a) 2 trigonale Polecke und b) 6 zweyerleykantige unregelmässige Mittelecke.

Die Querschnitte sind theils gleichseitige Dreyecke, theils gleichwinklige Sechsecke; der Mittelquerschnitt ein regelmässiges Sechseck aber kein Hauptschnitt; die Hauptschnitte sind Rhomboide.

Anmerkung. Von den Rhomboedern sind rücksichtlich der Stellung zwey Arten zu merken, indem sich diejenigen in normaler von denjenigen in diagonaler Stellung wesentlich unterscheiden.

§. 255.

Ditrigonale Trapezoeder. (*Breithaupt.*)

Mohs, a. a. O. S. 211.

Die ditrigonalen Trapezoeder sind von 6 Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und ab- steigend rund um die Gestalt laufen, und haben 12 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: a) 6 Polecke, b) 3 längere, stumpfere und c) drey kürzere, schärfere Mittelecke.

Die Ecke sind zweyerley: a) 2 trigonale Polecke, und b) 6 dreyerleykantige unregelmässige Mittelecke.

Die Querschnitte sind theils trigonal, theils ditrigonal, der Mittelquerschnitt ein Ditrigon; Hauptschnitte fehlen.

Anmerkung. Von jeder dieser Gestalten giebt es zwey, in Bezug auf ihre einzelen Begränzungselemente vollkommen gleiche und ähnliche, allein rücksichtlich der Verknüpfung und Lage derselben wie ein Rechtes und Linkes unterschiedene Varietäten. (vergl. §§. 61 und 120).

§. 256.

Dihexagonale Trapezoeder. (*Breithaupt.*)

Mohs, a. a. O. S. 213.

Die dihexagonalen Trapezoeder (*tab. I. fig. 12.*) sind von 12 Trapezoiden umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und ab-steigend rund um die Gestalt laufen, und haben 24 Kanten und 14 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: a) 12 Polkanten, b) 6 längere, stumpfere, und c) 6 kürzere, schärfere Mittelkanten.

Die Ecke sind zweyerley: a) 2 hexagonale Polecke, und b) 12 dreyerleykantige unregelmässige Mittelecke.

Die Querschnitte sind theils hexagonal, theils dihexagonal, der Mittelquerschnitt ein Dihexagon, aber kein Hauptschnitt. Die Hauptschnitte sind symmetrische Trapezoide.

Anmerkung. Auch von jeder dieser Gestalten giebt es zwey in Bezug auf die Figur und Grösse ihrer einzelen Begränzungselemente vollkommen gleiche und ähnliche, aber rücksichtlich der Verknüpfung und Lage derselben wie ein Rechtes und Linkes unterschiedene Varietäten.

§. 257.

Hexagonale Skalenoeder. (*Breithaupt.*)

Syn. Drey- und Drey-Kantner, auch drey- und dreykantige Dodekaeder, Weiss.
Ungleichschenklige sechsseitige Pyramiden, Mohs.
Bipyramoide, Hausmann.
Kalkpyramiden, v. Raumer.

Die hexagonalen Skalenoeder (*tab. I. fig. 14.*) sind von 12 ungleichseitigen Dreyecken umschlossene Gestalten, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern im Zickzack abwechselnd auf- und ab-steigend rund um die Gestalt laufen, und haben 18 Kanten und 8 Ecke.

Die Kanten sind dreyerley: a) 6 längere, stumpfere, und b) 6 kürzere, schärfere Polkanten, c) 6 gleiche Mittelkanten.

Die Ecke sind zweyerley: a) 2 ditrigonale Polecke, und b) 6 vierkantige, dreyerleykantige Mittelecke.

Die Querschnitte sind ditrigonal und dihexagonal, der Mittelquerschnitt ein Dihexagon aber kein Hauptschnitt. Die Hauptschnitte sind Rhomboide.

Die Flächen dieser Gestalten gruppiren sich in 6 zweyzählige Flächensysteme.

Anmerkung. Von jeder dieser Gestalten giebt es zwey nur durch ihre Stellung verschiedene Ebenbilder, von denen sich das eine gegen das andere in verwendeter Stellung befindet. Ausserdem aber sind noch durch ihre diagonale Stellung wesentlich verschiedene Skalenoeder zu unterscheiden.

§. 258.

Symmetrie der Gestalten.

Hinsichtlich der grösseren oder geringeren Symmetrie lassen sich diese Gestalten in verschiedene Gruppen sondern, welche mit den auf die Verhältnisse der Homoedrie und Hemiedrie gegründeten Eintheilungen im innigsten Zusammenhange stehen. Da zunächst jede homoedrische Gestalt eine parallelflächige seyn muss, so sind alle diejenigen Gestalten, welchen dieser Flächen-Parallelismus abgeht, als hemiedrische, und zwar als geneigtflächig-hemiedrische (oder tetartoedrische) Gestalten zu betrachten. Mustern wir nach diesem Verhältnisse die in den vorhergehenden §§. aufgezählten Gestalten, so ergiebt sich, dass die trigonalen Pyramiden, die ditrigonalen und dihexagonalen Trapezoeder hierher zu rechnen sind. — Da ferner alle homoedrischen Gestalten derjenigen orthobasischen Systeme, deren horizontale Dimensionen unter einander gleich sind, in ordentlicher und verwendeter Normal-Stellung eine vollkommen gleichmässige Vertheilung und Verknüpfung ihrer Begränzungselemente, und folglich in beyden Normal-Stellungen ein- und dasselbe Bild gewähren müssen, so werden diejenigen der parallelflächigen Gestalten, welche diesem Merkmale nicht entsprechen, gleichfalls für hemiedrische, und zwar für parallelflächig-hemiedrische Gestalten anzusehen seyn. Prüfen wir eingedenk des Begriffes der verwendeten Stellung für die einaxigen Gestalten mit einer Axe zweyter Art (§ 15) die noch übrigen Gestalten nach diesem Kriterium, so ergeben sich die Rhomboeder und hexagonalen Skalenoeder gleichfalls als hemiedrische Gestalten. Da endlich alle homoedrischen Gestalten in normaler Stellung eine gleichmässige Vertheilung ihrer Begränzungselemente nach oben und unten, nach rechts und links zeigen müssen, so werden auch die hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung zu den hemiedrischen Gestalten zu rechnen seyn, weil ihnen dieser Charakter mangelt.

§. 259.

Uebersicht.

Zufolge der Bestimmungen des vorigen §. sind daher nur die hexagonalen Pyramiden von paralleler und diagonaler Stellung mit der Grundgestalt, so wie die dihexagonalen Pyramiden homoedrisch-hexagonale oder hexagonale Gestalten schlechthin, alle übrigen hemiedrisch-hexagonale oder hemihexagonale Gestalten, von welchen letzteren jedoch diejenigen parallelflächigen, deren Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, den oben §. 249 angeführten Gründen gemäss als eine selbstständige Abtheilung unter dem Namen der rhomboedrischen Gruppe abzusondern sind. Demnach erhalten wir folgende Uebersicht sämmtlicher Gestalten des Hexagonal-Systemes nach den Verhältnissen der Homoedrie und Hemiedrie:

A) HEXAGONALE GRUPPE.

a) HOMOEDRISCHE GESTALTEN,

1) Hexagonale Pyramiden in normaler und diagonaler Stellung.

2) Dihexagonale Pyramiden.

b) HEMIEDRISCHE (UND TETARTOEDRISCHE) GESTALTEN,

α) Parallelflächige,

1) Hexagonale Pyramiden in abnormer Stellung,

β) Geneigtflächige,

1) Trigonale Pyramiden,
2) Ditrigonale Trapezoeder,
3) Dihexagonale Trapezoeder.

B) RHOMBOEDRISCHE GRUPPE.

1) Rhomboeder,
2) Hexagonale Skalenoeder,
3) Hexagonale Pyramiden, als Gränzgestalten der Skalenoeder, und somit als hemiedrische Gestalten zu beurtheilen.

Anmerkung. In den nächstfolgenden zwey Capiteln werden wir beyde Gruppen abgesondert betrachten, so dass jedes Capitel in zwey Abtheilungen zerfällt, von denen die erste die Verhältnisse der hexagonalen, die zweyte jene der rhomboedrischen Gruppe zum Gegenstande haben wird.

ZWEYTES CAPITEL.

Von der Ableitung der Gestalten des Hexagonal-Systemes.

A) HEXAGONALE GRUPPE.

§. 260.

Grundgestalt.

Zur Grundgestalt des Hexagonal-Systemes kann und darf nur eine der hexagonalen Pyramiden erwählt werden, indem diese die einzigen Gestalten sind, welche den Grundcharakter des Systemes unmittelbar repräsentiren (§. 23). Wir legen daher irgend eine beliebige dergleichen Pyramide der Ableitung zu Grunde, bezeichnen sie mit P und setzen das Verhältniss ihrer Halbaxe zu der Halb-Diagonale = a : b. Was die *in praxi* bey dieser Wahl zu berücksichtigenden Verhältnisse betrifft, so gelten in dieser Hinsicht die bey der Darstellung des rhombischen Systemes §. 165 gegebenen Bemerkungen, da es wohl geometrisch, aber nicht krystallographisch gleichgültig seyn kann, welche von den verschiedenen hexagonalen Pyramiden einer Krystallreihe als Grundgestalt angenommen wird.

Anmerkung. Als eine für alle Systeme durchgängig gültige, und nicht genug zu beachtende Regel will ich nochmals bemerken, dass Prismen niemals Grundgestalten seyn können, weil sie stets von indefiniter Länge gedacht werden müssen, und uns solcherweise nur die Diagonalen bestimmen, über die Axe dagegen in Ungewissheit lassen. Will man aber der Länge oder Höhe der Prismen ein bestimmtes Verhältniss zu ihren Diagonalen zuschreiben, so bleibt diess jederzeit eine eben so willkührliche als widernatürliche Fiction, da sich in der Natur selbst der indefinite Charakter ihrer Axenlängen auf alle Weise bestätigt findet *). Schon aus diesem Grunde, und abgesehen davon, dass ein durch basische Flächen terminirtes Prisma jederzeit als eine Combination zweyer Gränzgestalten zu betrachten ist, hätte die zuerst von Bernhardi **) ausgesprochene Forderung

*) Vergleiche: Isis 1824, X S. 1088, auch Hausmann a. a. O. S. 255, und über die Bedeutung des Zeichens ∞P meine *Dissertatio de hexagonali systemate p. 15.*

**) Gehlens Journal V. S. 183 und 184.

geschlossener Grundgestalten mehr Beachtung verdient, als sie im Ganzen gefunden zu haben scheint, da sie erst neulich von Hausmann und Mohs wieder geltend gemacht werden musste.)

a) HOMOEDRISCHE GESTALTEN.

§. 261.

Hauptreihe des Systemes.

Aus der Grundgestalt P lässt sich eine Reihe hexagonaler Pyramiden von derselben Basis und Stellung ableiten.

Während b constant bleibt, lassen wir a unbestimmt alle möglichen Werthe annehmen, bezeichnen jeden solchen Werth allgemein mit ma, die ihm entsprechende Pyramide mit mP, und erhalten solchergestalt folgende Reihe:

$$oP \ldots mP \ldots P \ldots mP \ldots \infty P$$

in welcher die Coefficienten für die Glieder der linken Seite < 1, für die Glieder der rechten Seite > 1 sind. Diese Reihe von Pyramiden nennen wir die Hauptreihe des Systemes; ihr mittelstes Glied ist die Grundgestalt P; die Glieder rechter Hand sind insgesammt spitzere, die Glieder linker Hand flachere Pyramiden als P. Die Gränze ist hier wie in allen Systemen einerseits die Pyramide ∞P mit unendlich grosser Axe, oder ein unbegränztes (indefinites) hexagonales Prisma, anderseits die Pyramide oP mit unendlich kleiner Axe, oder die Basis der Grundgestalt, welche beyde natürlich nie allein, sondern nur entweder in Combination mit einander, als ein durch zwey basische Flächen begränztes hexagonales

Prisma oP. ∞P, oder in Combination mit andern Gestalten erscheinen können.

Anmerkung 1. Das, was diese Pyramiden in eine Reihe vereinigt, ist nicht irgend ein Gesetz der Zunahme oder Abnahme ihrer Axenlängen, sondern die Congruenz ihrer Grundflächen und die Gleichheit ihrer Stellung.

Anmerkung 2. Die Beobachtung hat gezeigt, dass die Axenlängen der verschiedenen Pyramiden auch in diesem Systeme jederzeit Multipla oder Submultipla von a nach rationalen, ganzen oder gebrochenen Zahlen sind.

§. 262.

Reihen der dihexagonalen Pyramiden.

Aus jedem Gliede der Hauptreihe lässt sich, indem man seine Halbaxe constant, seine Diagonalen veränderlich setzt, eine Reihe dihexagonaler Pyramiden ableiten. Wir legen allgemein mP der Ableitung zu Grunde. Man vervielfache jede Halbdiagonale b nach einem unbestimmtem Coefficienten n, und ziehe von jedem Eckpuncte der Basis von mP nach den Endpuncten der beyden zunächst gelegenen verlängerten Halbdiagonalen gerade Linien, so geben diese Linien ein gleichseitiges Zwölfeck, das nur in einem Falle gleichwinklig, ausserdem jederzeit abwechselnd gleichwinklig, folglich in der Regel eine dihexagonale Figur seyn wird. Legt man nun Ebenen durch die Seiten dieser Figur, als der Basis der neuen Gestalt, und die Endpuncte der Axe 2ma, so resultirt in jedem Falle eine zwölfseitige Pyramide, welche nur in einem Falle lauter gleiche, ausserdem abwechselnd gleiche Polkanten haben, und nur in jenem einem Falle von gleichschenkligen, ausserdem von lauter ungleichseitigen Dreyecken umschlossen seyn wird. Wir bezeichnen sie allgemein mit mPn. Da nun Winkel, welche grösser sind als zwey rechte, an einfachen Krystallgestalten nicht vorkommen, so ist klar, dass das Maximum des Coefficienten n = 2 seyn müsse, wie denn sein Minimum = 1 ist. Demgemäss erhalten wir aus jedem Gliede mP der Hauptreihe eine Reihe von folgender Gestalt:

mP . . . mPn . . . mP2

deren Gränze einerseits das Glied der Hauptreihe selbst, anderseits wiederum eine hexagonale Pyramide von gleicher Axe mit mP, aber in diagonaler Stellung zu ihr ist, (so dass die Flächen der einen über die Polkanten der anderen fallen) und mit einer Basis, welche sich zu jener von mP verhält wie 4 : 3. Alle Zwischenglieder sind dihexagonale Pyramiden von verschiedenen Grundflächen nach Maasgabe des Werthes von n.

Anmerkung 1. Die Beobachtung zeigt, dass auch in diesem Systeme die Werthe von n in der Natur jederzeit rationale unächte Brüche von ziemlich einfachem Zähler und Nenner sind, als $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$ u. dergl. Da nun für den Fall, dass die Pyramiden eine gleichwinklige Basis erhalten, und somit regelmässige zwölfseitige Pyramide werden könnten, n einen irrationalen Werth erhalten müsste, so ist es sehr unwahrscheinlich, dass dergleichen Pyramiden Realität haben.

Anmerkung 2. Unterwirft man die Pyramide ∞P oder das hexagonale Prisma der Hauptreihe der Ableitung des §., so begreift sich leicht, dass für die verschiedenen Werthe von n eben so viel verschiedene dihexagonale Prismen resultiren müssen, deren Gränzgestalt für n = 2 wiederum ein hexagonales Prisma seyn wird, welches sich gegen das Prisma ∞P in diagonaler Stellung befindet, so dass seine Flächen die Kanten desselben regelmässig abstumpfen. Die Combination oP. ∞P. ∞P2 ist daher ein gleichwinkliges, zwölfseitiges Prisma, durch eine basische Fläche an jedem Ende terminirt.

§. 263.

Uebersicht.

Mit diesen beyden Ableitungen ist der ganze Inbegriff der Gestalten des Hexagonal-Systemes erschöpft, indem keine anderen homoedrischen Gestalten innerhalb desselben auftreten, als hexagonale und dihexagonale Pyramiden und dergleichen Prismen: Vereinigt man daher die Reihen der §§. 261 und 262 in ein allgemeines Schema, so enthält dasselbe den ganzen möglichen Inbegriff hexagonaler Gestalten.

oP	. . . .	mP	. . . .	P	. . . .	mP	. . . .	∞P
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
oPn	. . .	mPn	. . .	Pn	. . .	mPn	. . .	∞Pn
⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
oP2	. . .	mP2	. . .	P2	. . .	mP2	. . .	∞P2

Für dieses eben so vollständige als übersichtliche Schema ergeben sich unmittelbar aus dem Vorigem folgende Sätze;

1) Die oberste horizontale Reihe enthält alle hexagonalen Pyramiden, so wie das hexagonale Prisma von paralleler Stellung und gleicher Basis mit der Grundgestalt. Wir nannten sie die Hauptreihe des Systemes.

2) Die unterste horizontale Reihe enthält alle hexagonalen Pyramiden, so wie das hexagonale Prisma, welche sich in diagonaler Stellung gegen die Grundgestalt befinden, und eine Basis haben, die sich zu jener von P wie 4 : 3 verhält. Wir nennen sie die Nebenreihe des Systemes.

3) Alle mittleren horizontalen Reihen, deren es begreiflich so viele geben kann, als rationale Werthe von n zwischen 1 und 2 möglich sind, enthalten lauter dihexagonale Pyramiden und Prismen, so dass alle Gestalten innerhalb einer und derselben Reihe gleiche und ähnliche Querschnitte haben. Wir nennen sie die Zwischenreihen des Systemes.

4) Jede verticale Reihe enthält Gestalten von gleicher Axenlänge, in denen die Polkantenlinien des entsprechenden Gliedes der Hauptreihe noch hervortreten.

b) HEMIEDRISCHE GESTALTEN.

§. 264.

Ableitung der hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung.

Satz. Die hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung sind die parallelflächig hemiedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren.

Beweis. Die Sache ist beynahe von selbst einleuchtend. Sey $BCB'C'B''C''$ ab I. fig. 8. die Basis der Grundgestalt P; seyen ferner BE, EC, CD, DB', B'E', E'C' sechs der Mittelkanten irgend einer dihexagonalen Pyramide mPn, so müssen wir entweder die Flächenpaare über BE, CD, B'E' u. s. w., oder jene über EC; DB', E'C', u. s. w. wachsen lassen, um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen. Es mag das Erstere Statt finden. Verlängere die BE, CD, B'E' bis zu ihren Durchschnitten in F, F', so ist FF' eine Mittelkante der neuen Gestalt, und die Linien von F und F' nach den Endpuncte der oberen Halbaxe der Pyramide werden zwey neue obere Polkanten darstellen. Die Linien FF', FF'' und alle ähnlichen sind einander natürlich gleich, und eben so die Winkel BFC, CF'B' u. s. w. weil alle Dreyecke wie BFC congruent sind. Folglich ist die Basis der neuen Gestalt ein regelmässiges Sechseck, und alle Linien wie FM, F'M werden einander gleich. Daher sind auch alle Polkanten der neuen Gestalt einander gleich, und die neuen Flächen insgesammt congruente gleichschenklige Dreyecke, somit die neue Gestalt selbst eine hexagonale Pyramide, deren Basis sich zu jener der Hauptreihe verhält wie $FM^2 : BM^2$, deren Stellung aber weder die normale noch die diagonale sondern irgend eine abnorme mittlere zwischen beyden ist.

§. 265.

Fortsetzung.

Da wir eben so gut die Flächen über den Mittelkanten EC, DB', E'C' wachsen lassen konnten, so werden sich überhaupt aus jeder dihexagonalen Pyramide zwey abnorme hexagonale Pyramiden von völlig gleichen Dimensionen, aber von verschiedener Stellung ableiten lassen. Wenn wir die dihexagonale Muttergestalt erst in ordentlicher und dann in umgekehrter Normal-Stellung denken, so würde von den um jedes Eck gelegenen vier Flächen derselben jede wachsende in dem einem Falle erst eine obere linke, und dann eine untere rechte, in dem anderem Falle erst eine obere rechte, und dann eine untere linke seyn. Demnach bezeichnen wir die beyden aus der dihexagonalen Pyramide mPn abzuleitenden hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung mit $\frac{l}{r}\left(\frac{mPn}{2}\right)$ und $\frac{r}{l}\left(\frac{mPn}{2}\right)$.

Anmerkung. Für $n = 2$ wird die abnorme hexagonale Pyramide mit dem entsprechendem Gliede aus der Nebenreihe des hexagonalen Systemes zusammenfallen, somit das hemiedrische Auftreten in Nichts von dem homoedrischem verschieden seyn; ein Beweis, dass die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe nur als Gränzgestalten der dihexagonalen Pyramiden zu beurtheilen sind, wofür wir weiter unten noch mehre Belege finden werden.

Wofern es also Minerale giebt, in welchen Flächen von der Form $\frac{l}{r}\left(\frac{mPn}{2}\right)$ erscheinen, so werden wir annehmen müssen, dass auch ihre hexagonalen Pyramiden aus der Nebenreihe eigentlich als $\frac{l}{r}\left(\frac{mP2}{2}\right)$ zu beurtheilen sind, wiewohl sie sich in der Erscheinung durch Nichts von mP2 unterscheiden; diess ist z. B.

der Fall mit dem hexagonalem Flusshaloide oder Apatite. Für ∞Pn werden $\frac{l}{r}\left(\frac{\infty Pn}{2}\right)$ und $\frac{r}{l}\left(\frac{\infty Pn}{2}\right)$ hexagonale Prismen in abnormer Stellung.

§. 266.

Ableitung der trigonalen Pyramiden.

Satz. Die trigonalen Pyramiden sind die geneigtflächig hemiedrischen Gestalten der hexagonalen Pyramiden nach den an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaaren, oder die geneigtflächig hemiedrischen Gestalten der hexagonalen Pyramiden schlechthin.

Diesen Satz zu beweisen halte ich für überflüssig, da seine Wahrheit unmittelbar einleuchtet. Die oberen Polkanten jeder trigonalen Pyramide werden völlig dieselbe Grösse und Lage haben, als die Polkanten des aus derselben hexagonalen Pyramide abzuleitenden Rhomboeders (vergl. unten §. 269); die Mittelkanten dieselbe Grösse als die abwechselnden Mittelkanten der Muttergestalt. Aus jeder hexagonalen Pyramide lassen sich zwey in verwendeter Stellung befindliche trigonale Pyramiden ableiten, deren Zeichen $+\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$, $+\frac{mP2}{4}$ und $-\frac{mP2}{4}$ seyn werden.

§. 267.

Ableitung der dihexagonalen Trapezoeder.

Satz. Die dihexagonalen Trapezoeder sind die geneigtflächig hemiedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach einzelen Flächen.

Beweis. Die oberen Flächen über BE, CD, B′E′ u. s. w. tab. I. fig. 8, die unteren über CE, B′D, C′E′

u. s. w. müssen wachsen, um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen; die Polkanten der neuen Gestalt werden also in der oberen Hälfte völlig dieselbe Lage und Grösse haben, wie die einer hexagonalen Pyramide in abnormer Stellung. Weil aber die obere Fläche über CD nicht mehr mit der unteren über CD, als welche verschwindet, sondern mit den beyden unteren über CE und B'D zum Durchschnitte kommt, so wird sie eine vierseitige Figur werden müssen, und weil, was von einer Fläche gilt, gleichmässig auf alle anwendbar ist, so wird die neue Gestalt von zwölf vierseitigen Figuren umschlossen seyn, und zwölf im Zickzack herumlaufende Mittel-Kanten haben. Dass aber die einzelen Flächen wirklich Trapezoide werden müssen, ist aus der Lage der vier Flächen, mit welchen jede einzele zum Durchschnitte kommt, leicht zu beweisen; folglich wird die neue Gestalt ein dihexagonales Trapezoeder seyn; (§. 255).

Zusatz. Ganz aus denselben Gründen, welche wir bey der Ableitung der hexagonalen Pyramiden von abnormer Stellung anführten, werden wir auch durch diese Ableitung aus jeder dihexagonalen Pyramide zwey völlig gleiche, aber in verschiedenen Stellungen befindliche, und sich hinsichtlich ihres Habitus wie ein Rechtes zu einem Linken verhaltende Trapezoeder ableiten können. Denken wir nun die Muttergestalt erst in ordentlicher und dann in umgekehrter Normal-Stellung vor uns, so ist der ganze Unterschied der Ableitung dieses §. und des §. 264 eben darin begründet, dass hier von je vier um ein und dasselbe Eck gelegenen Flächen jede wachsende in dem einem Falle erst die obere rechte und dann die untere rechte, in dem anderem Falle erst die obere linke und dann die untere linke ist, während sie dort in dem einem Falle die obere rechte und untere linke, im anderem Falle die obere linke und untere rechte Fläche war. Demnach werden auch in der Bezeichnung beyde Trapezoeder sehr treffend und bestimmt durch $\frac{l}{l}\left(\frac{mPn}{2}\right)$ und $\frac{r}{r}\left(\frac{mPn}{2}\right)$ sowohl von einander als von den hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung unterschieden werden.

Anmerkung. Für $n = 2$ ist wiederum das Trapezoeder identisch mit dem entsprechendem Gliede aus der Nebenreihe des hexagonalen Systemes.

§. 268.

Ableitung der ditrigonalen Trapezoeder.

Die ditrigonalen Trapezoeder sind die geneigtflächig tetartoedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach einzelen Flächen, oder die hemiedrischen Gestalten der hexagonalen Skalenoeder.

Wenn in einer dihexagonalen Pyramide von den in den abwechselnden normalen Ecken zusammenstossenden vier Flächen die obere rechte, (oder obere linke), und dagegen von den in den dazwischen gelegenen normalen Ecken zusammenstossenden Flächen die untere linke (oder untere rechte) wachsen, bis zum Verschwinden aller übrigen, so entsteht ein ditrigonales Trapezoeder als tetartoedrische Gestalt.

Der Beweis ist leicht zu führen, zumal wenn man alle Kanten und Ecke der Gestalten in der Ebene des Mittelquerschnittes projicirt, und an dieser Projection den Beweis entwickelt; noch leichter jedoch, wenn man die hexagonalen Skalenoeder abermals der Hemiedrie unterwirft. Als Consectarium aus dem Satze selbst folgt unmittelbar, dass sich für $n = 2$ das ditrigonale Trapezoeder in ein Rhomboeder verwandelt, welches sich in diagonaler Stellung gegen die Rhomboeder der eigentlichen rhomboedrischen Gruppe befindet. Dieses Rhomboeder ist demnach eigentlich eine tetartoedrische Gestalt, wiewohl es, wofern man mP2 als eine ursprüngliche hexagonale Pyramide betrachten könnte, nur eine Hälfte derselben seyn würde; es ist somit ein nochmaliger Beweis dafür, dass die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe nur als Gränzgestalten der dihexagonalen Pyramiden anzusehen sind. Die ditrigonalen Trapezoeder würden etwa die Bezeichnung $\pm \frac{1}{1}\left(\frac{mPn}{4}\right)$ und $\pm \frac{r}{r}\left(\frac{mPn}{4}\right)$, so wie die Rhomboeder in diagonaler Stellung das Zeichen $\pm\left(\frac{mP2}{4}\right)$ oder $\pm$ (mR) erhalten müssen.

B) RHOMBOEDRISCHE GRUPPE.

§. 269.

Ableitung der Rhomboeder.

Satz. Die Rhomboeder sind die parallelflächig hemiedrischen Gestalten der hexagonalen Pyramiden nach den abwechselnden einzelen Flächen.

Beweis. Sey 1 2 3 4 5 6 tab. I. fig. 7 die Basis der Pyramide mP, (die Zahlen sollen zugleich die Mittelpuncte der Seiten bezeichnen) OU ihre Axe, M ihr

Mittelpunct. Da es willkührlich ist, welche drey abwechselnde obere Flächen wir wachsen lassen, sobald wir nur von den unteren wiederum die abwechselnden vergrössern, so mögen die drey oberen Flächen O1, O3, O5 wachsen, bis zum Verschwinden der zwischenliegenden. Da nun keine der anderen parallel ist, so werden sich je zwey in einer neuen Kante schneiden, und demnach drey neue Kanten als obere Polkanten der neuen Gestalt entstehen. Man verlängere die Seiten 1, 3, 5, bis sie sich in den Puncten D, D′, D″ schneiden, und ziehe OD, OD′, OD″, so stellen diese Linien die neuen Kanten dar. Es sind aber auch der Voraussetzung gemäss die unteren abwechselnden Flächen U2, U4, U6 bis zum Verschwinden der zwischenliegenden gewachsen, und in den neuen Kanten UE, UE′, UE″, als den unteren Polkanten der hemiedrischen Gestalt zusammengetroffen. Weil nun die Fläche O1 schon vor der Vergrösserung mit jeder der Flächen U2 und U6 einen Punct gemeinschaftlich hatte, so wird sie nach der Vergrösserung mit jeder derselben eine Kante bilden müssen; was aber von O1 gilt, das gilt auf gleiche Weise von jeder andern Fläche; folglich wird jede Fläche mit zwey oberen und zwey unteren zum Durchschnitte kommen, woraus sich ergiebt, dass die Flächen der hemiedrischen Gestalt vierseitige Figuren werden.

Allein in jeder hexagonalen Pyramide ist:

O1 parallel U4
O3 - - U6
O5 - - U2

Da nun z. B. O1 sowohl mit O3 und O5, als auch mit U6 und U2 zum Durchschnitte kommt, so werden je zwey Durchschnitte einander parallel laufen, und folglich die neuen Flächen Parallelogramme seyn.

Man ziehe nun die Linien U6 und U2; sie werden gehörig verlängert mit OD und OD′ in F und F′ zum Durchschnitte kommen, weil der Punct 6 in die Linie DM, der Punct 2 in die Linie D′M fällt, und O, M, U Puncte einer und derselben geraden Linie sind. OF und OF′ werden also die Kantenlinien zweyer oberer Polkanten der hemiedrischen Gestalt, und zwar derjenigen, welche die Fläche O1 mit O3 und O5 hervorbringt. Da nun, wie sich sehr leicht ergiebt:

$$\triangle.\ OFU \cong \triangle.\ OF'U$$

indem $W.\ MOD = W.\ MOD'$

$W.\ MU6 = W.\ MU2$

so folgt $OF = OF'$

Weil also von den vier Seiten des Parallelogramms, welches die Fläche O1 nach ihrer Vergrösserung darstellt, zwey nicht parallele OF, OF′ gleich sind, so muss diess Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat seyn, und weil, was von einer Fläche O1 gilt, auf alle anwendbar ist, so wird die hemiedrische Gestalt in einem Falle von sechs Quadraten, in allen übrigen Fällen von sechs Rhomben umschlossen, also, abgesehen von jenem einem Falle, jederzeit ein Rhomboeder seyn müssen; (§. 254).

Zusatz 1. Hätten wir an der oberen Hälfte der Pyramide statt der Flächen O1, O3, O5 die Flächen

O2, O4 und O6, so wie die unteren Gegenflächen derselben wachsen lassen, so würden wir völlig dasselbe Rhomboeder, nur in verwendeter Stellung erhalten haben.

Bezeichnen wir nun das aus der Pyramide mP abgeleitete Rhomboeder mit mR und sein in verwendeter Stellung befindliches Ebenbild mit −mR, so erhält die Hauptreihe der rhomboedrischen Gruppe folgende Gestalt:

$\pm oR \ldots \pm mR \ldots \pm R \ldots \pm mR \ldots \pm \infty R$

Für oR und ∞R verliert das Zeichen $\pm$ seinen Werth, indem für beyde Fälle dieselbe Gestalt in derselben Stellung resultirt, so dass $+\infty R = -\infty R \cong \infty P$ ist.

Zusatz 2. Ziehe die MH; ferner die FN parallel der MO, so ist:

$$\begin{array}{rcl}
MU : M6 & = & NF : N6 \\
MD : MO & = & ND : NF \\
\hline
\text{also } MD : M6 & = & ND : N6 \\
\text{weil nun } \Delta\ DG6 & \backsim & \Delta\ DHM \\
\text{und } DG & = & GH \\
\text{so ist auch } D6 & = & M6 \\
\text{demnach } MD & = & 2M6 \\
\text{folglich } ND & = & 2N6 = \tfrac{1}{3}MD \\
\hline
\text{Nun ist } ND : NF & = & MD : MO \\
\text{also auch } NF & = & \tfrac{1}{3}MO
\end{array}$$

F ist aber der Eckpunct eines der Mittelecke des Rhomboeders, und FN ein Perpendikel von diesem Puncte auf den Mittelquerschnitt; demnach liegen die Ecke des Rhomboeders um $\tfrac{1}{3}$ seiner Halbaxe über oder unter der Ebene des Mittel-Querschnittes.

Anmerkung. Hätten wir aus der Pyramide von der Halbaxe $MO' = \tfrac{1}{2}MO$ ein Rhomboeder in verwendeter Stellung gegen das aus der Pyramide von der

Halbaxe MO abgeleitet, so würde dessen geneigte Diagonale O′6 der Polkante OD parallel laufen müssen, weil MD : MO = M6 : MO′. Wenn also ein paar dergleichen Rhomboeder in Combination vorkämen, so würden die Flächen des einen die Polkanten des andern regelmässig abstumpfen, und die Combinationskanten den Polkanten des spitzeren, den geneigten Diagonalen des flacheren Rhomboeders parallel laufen.

§. 270.

Ableitung der hexagonalen Skalenoeder überhaupt.

Die hexagonalen Skalenoeder sind die parallelflächig hemiedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach ihren an den abwechselnden gleichnamigen Polkanten gelegenen Flächenpaaren.

Da die zu vergrössernden Flächenpaare entweder an den abwechselnden diagonalen oder an den abwechselnden normalen Polkanten liegen sollen, so sind mit dieser Alternative zugleich zwey wesentlich verschiedene Fälle gegeben, von denen ein jeder seine besondere Betrachtung erfordert. Jedoch auch ohne diese begreift man leicht, dass in denjenigen Fällen, da die an den abwechselnden diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaare wachsen, eine Gestalt zum Vorschein kommen muss, welche sich gegen die Rhomboeder der Hauptreihe in paralleler Stellung befindet, weil ihre Flächen oder Flächensysteme bey normaler Stellung eine den Flächen der Grundgestalt entsprechende Lage haben; dass dagegen in denjenigen Fällen, da die an den abwechselnden normalen Polkanten gelegenen Flächenpaare wachsen, eine Gestalt resultiren muss, welche sich gegen die Rhomboeder der Hauptreihe oder gegen die Grundgestalt in diagonaler Stellung befindet, weil ihre Flächen oder Flächensysteme bey normaler Stellung eine den Flächen der Grundgestalt nicht entsprechende Lage haben, welche man bey genauerer Vergleichung für keine andere, als die diagonale erkennt.

Anmerkung. Die durch Vergrösserung der an den diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaare abgeleiteten Skalenoeder nennen wir Skalenoeder der ersten, die anderen, Skalenoeder der zweyten Art *).

§. 271.

Ableitung der hexagonalen Skalenoeder ertser Art.

Satz. Die hexagonalen Skalenoeder der ersten Art sind die parallelflächig hemiedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach ihren an den abwechselnden diagonalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren.

Beweis. Es mögen z. B. die oberen Flächenpaare an den diagonalen Polkanten (vergl. §. 253. Anm.) OD, OD′ tab. I. fig. 6 wachsen, so wächst dagegen das untere Flächenpaar an der diagonalen Polkante UE. Weil die Flächen jedes Paares, z. B. die Flächen OCD, OB′D schon ursprünglich in der diagonalen Polkante OD zusammen stossen, so wird ihrem Wachsthume in dem Hauptschnitte OUD eine Gränze gesetzt seyn. Man verlängere die CD und BD′, bis sie in F zusammentref-

*) Diese beyden Arten entsprechen den beyden „nothwendig „zu unterscheidenden Classen von Dreyunddreykant- „nern," welche Weiss in seiner Theorie dieser Gestalten aufstellt; Abhandlungen der Berliner Akademie 1822 — 1823.

fen, welches natürlich erfolgen muss, da sie in einer Ebene, und nicht parallel sind. Zieht man also die OF, so stellt sie die neue Kante dar, in welcher die OCD und OB'D als Flächen zweyer benachbarter oberer Paare zusammentreffen. Da nun

W. CBF = W. BCF, so ist
BF = CF

Da aber auch BE = CE
und BM = CM

so liegen die drey Puncte F, E und M in einer geraden Linie FM, welche auf BC senkrecht ist. Die Ebene durch FM, OM (und OF) ist demnach die Ebene des Hauptschnittes der gegebenen dihexagonalen Pyramide durch die diagonale Kante OE, und zugleich die Gränze des gegenseitigen horizontalen Wachsthums der Flächen OCD und OBD'. Indem nun diese beyden oberen Flächen wachsen, vergrössern sich auch die unteren Flächen UCE, UB'E' und treffen aus denselben Gründen in der Kante UF' zusammen, während die diagonalen Polkanten UE, UE' unverändert bleiben. Die Gränzen des seitlichen Wachsthumes der unteren Fläche UCE sind also die beyden Hauptschnitte OUD und OUE; allein dieselben Hauptschnitte waren die Gränzen des seitlichen Wachsthumes der oberen Fläche OCD; folglich werden nur diese zwey Flächen und keine anderen innerhalb beyder Hauptschnitte erscheinen, und in einer neuen Kante, einer der Mittelkanten der neuen Gestalt zusammentreffen, also ebenfalls Dreyecke seyn. Ganz auf gleiche Weise werden nur die Flächen OB'D und UB'E' innerhalb der beyden diagonalen Hauptschnitte OUD und OUE' erscheinen, und eine zweyte Mittelkante der neuen Gestalt bilden, u. s. w. Folglich wird diese neue Gestalt von zwölf Dreyecken umschlossen seyn und sechs Mittelkanten haben.

Da nun der Durchschnitt einer jeden von zwey innerhalb derselben Hauptschnitte gelegenen Flächen (z. B. der Durchschnitt der OCD) mit der Basis der Muttergestalt, und der Durchschnitt der andern Fläche (UCE) mit eben dieser Basis jederzeit einen Winkel bilden, so folgt, dass der gegenseitige Durchschnitt beyder Flächen, also die Mittelkante der neuen Gestalt nur einen Punct mit dieser Basis gemeinschaftlich hat. Folglich erscheinen die Mittelkanten der neuen Gestalt nicht horizontal, sondern gegen die Horizontalebene geneigt, und der Mittelquerschnitt derselben wird kein Hauptschnitt. Demnach ist die neue Gestalt selbst ein hexagonales Skalenoeder, (§. 257).

Zusatz. Ganz aus demselben Grunde, aus welchem wir für jede hexagonale Pyramide mP ein Rhomboeder mR, und ein in verwendeter Stellung befindliches Rhomboeder − mR erhielten, erhalten wir auch für jede dihexagonale Pyramide mPn zwey völlig gleiche Skalenoeder, von welchen sich nur das eine gegen das andere in verwendeter Stellung befindet. Bezeichnen wir sie vorläufig mit $\pm\frac{mPn}{2}$, so erhalten wir aus jeder der Zwischenreihen des hexagonalen Systemes eine Reihe von der Form:

$$\pm\frac{oPn}{2} \ldots \pm\frac{mPn}{2} \ldots \pm\frac{Pn}{2} \ldots \pm\frac{mPn}{2} \ldots \pm\frac{\infty Pn}{2}.$$

Dass $\pm\frac{\infty Pn}{2} = \infty Pn$, ist einleuchtend.

Anmerkung. Für $n = 2$ verwandelt sich das Skalenoeder in eine hexagonale Pyramide der Nebenreihe, welche in nichts von der gleichnamigen homoedrischen Gestalt zu unterscheiden ist. Ueberhaupt muss man diess immer im Auge behalten, dass die Pyramiden der Nebenreihe des hexagonalen Systemes nur als Gränzgestalten der dihexagonalen Pyramiden zu beurtheilen sind. Von diesem Gesichtspuncte aus hat es dann nichts Auffallendes mehr, dass ihre hemiedrische Erscheinung in Nichts von ihrer homoedrischen abweicht. Wenn daher ein Rhomboeder vorkommt, dessen Flächen die Lage von Flächen einer Pyramide aus der Nebenreihe haben, so ist diess eigentlich keine hemiedrische, sondern eine tetartoedrische Gestalt.

§. 272.

Ableitung der hexagonalen Skalenoeder zweyter Art.

Satz. Die hexagonalen Skalenoeder der zweyten Art sind die parallelflächig hemiedrischen Gestalten der dihexagonalen Pyramiden nach ihren an den abwechselnden normalen Polkanten gelegenen Flächenpaaren.

Man setze die beyden Kanten OD, OD′ in fig. 6 tab. I. seyen normale obere, die beyden Kanten UE, UE′ normale untere Polkanten einer dihexagonalen Pyramide, so wird durch Verlängerung der in ihnen zusammentreffenden Flächen ebenfalls ein Skalenoeder entstehen, indem sowohl die Construction als die Beweisführung des vorigen §. auch auf gegenwärtigen Fall ihre Anwendung findet. Nur werden die Begränzungselemente des so abgeleiteten Skalenoeders eine ganz andere Lage und Grösse haben, als jene des vorher abgeleiteten Skalenoeders, so dass beyderley Gestalten nicht nur durch ihre Stellung, sondern auch durch ihre Dimensionen als wesentlich verschiedene charakterisirt sind.

Zusatz. Dass von diesen Skalenoedern aus jeder dihexagonalen Pyramide ebenfalls zwey gegen die Grundgestalt in diagonaler Stellung befindliche, und nur durch die Zweydeutigkeit der ordentlichen und verwendeten Stellung verschiedene Ebenbilder abgeleitet werden können, ist einleuchtend. Bezeichnen wir dieselben mit $\pm\left(\frac{mPn}{2}\right)$, so erhalten wir aus jeder der Zwischenreihen des hexagonalen Systemes eine Reihe von der Form:

$$\pm\left(\frac{oPn}{2}\right).\pm\left(\frac{mPn}{2}\right).\pm\left(\frac{Pn}{2}\right).\pm\left(\frac{mPn}{2}\right).\pm\left(\frac{\infty Pn}{2}\right)$$

Anmerkung. Für $n = 2$ verwandeln sich diese Skalenoeder in Rhomboeder, welche sich gegen die Rhomboeder der Hauptreihe in diagonaler Stellung befinden. Dieser Umstand beurkundet es ganz vorzüglich, wie wesentlich der Unterschied der beyderley Skalenoeder überhaupt sey, indem die Gränzgestalt $\frac{mP2}{2}$ eine hexagonale Pyramide, die Gränzgestalt $\left(\frac{mP2}{2}\right)$ dagegen ein Rhomboeder ist. Man vergleiche das ähnliche Verhältniss, welches im Tetragonal-Systeme Statt findet.

§. 273.

Lage der Mittelkanten der Skalenoeder.

Satz. Die Kantenlinien der Mittelkanten jedes Skalenoeders fallen mit denen der gleichnamigen Kanten irgend eines Rhomboeders zusammen.

Beweis. Da die untere Polkante UE und die obere OF in einem Hauptschnitte liegen, so werden sie irgend einen Durchschnittspunct P, und eben so die Polkanten UF′, OD einen Durchschnittspunct P′ geben. Die Linie PCP′ wird die Lage der neuen Mittelkante darstellen, so dass das Eck P eben so weit über der Ebene des Mittelquerschnittes liegt, als das Eck P′ unter derselben, wie sich leicht daraus ergiebt, dass:

$$\begin{array}{rl} & \triangle\ BCF \cong \triangle\ B'CF' \\ & \triangle\ BCE \cong \triangle\ B'CD \\ \hline \text{also} & FE = F'D \\ \text{Da nun auch} & W.PEF = W.P'DF' \\ & W.EFP = W.DF'P' \\ \text{so ist} & \triangle\ EFP \cong \triangle\ DF'P' \end{array}$$

und folglich das Perpendikel von P′ auf F′D gleich dem Perpendikel von P auf FE. Die Mittelkante zwischen den Hauptschnitten OUF′, OUF″ wird auf gleiche Weise von P′ aufsteigend durch B′ nach P″ laufen, so dass P″ wiederum eben so hoch über dem Mittelquerschnitte liegt als P, oder als P′ unter demselben. So werden drey abwechselnde Ecke des Skalenoeders in einer und derselben Horizontalebene über, die drey dazwischenfallenden in einer und derselben Horizontalebene unter dem Mittelquerschnitte liegen, und die Mittelkanten selbst im Zickzack zwischen diesen sechs Ecken hinlaufen. Weil es aber für jedes Flächenpaar innerhalb zweyer Hauptschnitte des Skalenoeders ein anderes Flächenpaar innerhalb der jenseits der Axe gelegenen Theile derselben Hauptschnitte giebt, dessen Flächen jenen parallel laufen, so werden je zwey gegenüberliegende Mittelkanten des Skalenoeders parallel seyn. Mit einem

Worte, die Mittelkanten jedes Skalenoeders werden ganz und gar dieselbe Lage haben, wie die irgend eines Rhomboeders.

§. 274.

Reduction der Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$ *auf ihre Rhomboeder.*

Da in jedem Rhomboeder der Abstand jedes seiner Ecke von der Ebene des Mittelquerschnittes gleich ist dem drittem Theile seiner Halbaxe, so wird die Halbaxe desjenigen Rhomboeders, dessen Mittelkanten mit denen eines gegebenen Skalenoeders $\pm\frac{mPn}{2}$ zusammenfallen, dem dreyfachem Perpendikel von P auf FE, oder von P′ auf F′D gleich seyn müssen. (§. 269. Zus. 2.)

Um diesen Werth, und somit das entsprechende Rhomboeder aus der Reihe §. 269, Zus. 1 für jedes gegebene Skalenoeder $\pm\frac{mPn}{2}$ zu bestimmen, dazu dient Folgendes. Verlängere die B′E und MC bis zu ihrem Durchschnitte in S; die BD″ und MC″ bis zu ihrem Durchschnitte in T, so ist, wenn in der Grundgestalt $b : a = 1 : m$

$$MS = MT = n$$
$$\text{ferner } MO = MU = m$$
$$MC = MB = 1$$

Ziehe die MF; sie geht durch E und halbirt die BC in G, so dass $MG = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ziehe von P nach EF das Perpendikel PQ, und PN der MF parallel, so wird

$PQ = MN = z =$ dem dritten Theile der Halbaxe des gesuchten Rhomboeders. Man setze $MF = \alpha$, $ME = \beta$, so ist:

$$\begin{array}{rcl} MU : \beta & = & NU : NP \\ \alpha \ : MO & = & NP : NO \\ \hline \text{also } \alpha : \beta & = & NU : NO \\ & = & m+z : m-z \\ \hline \end{array}$$

$$\text{daher } z = m\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

Ziehe nun die CH parallel mit ME; weil BG parallel mit MT, so ist:

$$\begin{array}{rcl} MT : MF & = & BG : MF - MG \\ \text{oder } n : \alpha & = & \tfrac{1}{2} : \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{daher } \alpha = \frac{n\sqrt{3}}{2n-1}$$

Ferner, weil ME parallel CH, so ist

$$\begin{array}{rcl} MS : ME & = & CS : CH \\ \text{oder } n : \beta & = & n-1 : 2\beta - \sqrt{3} \end{array}$$

indem $CH = 2GE = 2(\beta - \sqrt{\tfrac{3}{2}})$, weil $BC = 2BG$,

$$\text{also } \beta = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$$

$$\text{Daraus folgt } \alpha \mp \beta = n\sqrt{3}\left(\frac{1}{2n-1} \mp \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{und } \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{2-n}{3n}$$

$$\text{folglich } z = \frac{m(2-n)}{3n}$$

Demnach $3z$, oder die Halbaxe des gesuchten Rhomboeders $= \frac{m(2-n)}{n}$

§. 275.

Fortsetzung.

Wenn also ein Skalenoeder $\pm\frac{mPn}{2}$ gegeben ist, so haben seine Mittelkanten genau dieselbe Lage, wie die Mittelkanten des Rhomboeders $\pm\frac{m(2-n)}{n}$ R. Man kann daher auch jedes Skalenoeder aus diesem ihm entsprechendem Rhomboeder ableiten, und dieser Ableitung gemäss bezeichnen, indem man die Axe des Rhomboeders gehörig verlängert, oder vervielfacht, und die Endpuncte der so verlängerten Axe mit den Eckpuncten des Rhomboeders verbindet. Gesetzt, der Coefficient der Vervielfachung seiner Axe sey $= q$, so würde m $= \frac{qm(2-n)}{n}$, also $q = \frac{n}{2-n}$ seyn müssen, und das entsprechende Zeichen etwa die Gestalt erhalten: $\frac{m(2-n)}{n}$ R $\frac{n}{2-n}$. Wofern es sich nun in der Anwendung ergeben sollte, dass die numerischen Werthe von $\frac{m(2-n)}{n}$ und $\frac{n}{2-n}$ meistentheils einfacher wären, als die von m und n, so würde auch die Uebersetzung der Zeichen $\pm\frac{mPn}{2}$ in die Zeichen $\pm\frac{m(2-n)}{n}$ R $\frac{n}{2-n}$ für die krystallographische Symbolik vorgezogen werden müssen; um so mehr, da nicht zu läugnen ist, dass sich der individuelle Charakter und die wahre Physiognomie der Gestalt $\pm\frac{mPn}{2}$ weit leichter, anschaulicher und bestimmter der Phantasie repräsentirt, wenn wir sie auf ihr Rhomboeder reducirt denken. Deshalb hat Mohs sowohl diese Ableitung als diese Bezeichnung für die Skalenoeder gebraucht; der Consequenz wegen mussten wir allerdings die Ableitung aus der dihexagonalen Pyramide zu Grunde legen, allein für die Anwendung können wir nichts Besseres thuen, als jene secundäre oder Hülfs-Ableitung aus dem Rhomboeder zu adoptiren.

Anmerkung. Für q = ∞ verwandelt sich jedes Skalenoeder mRq in ein hexagonales Prisma R∞, und zwar in dasjenige, welches dem Prisma ∞P2 entspricht, und dessen Flächen als Abstumpfungsflächen der Mittelkanten der Rhomboeder ± mR und der Skalenoeder ± mRq erscheinen, während die Flächen von ∞R die Abstumpfungsflächen der Mittelecke derselben Gestalten bilden.

§. 276.

Reduction der Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ *auf ihre Rhomboeder.*

Um auf gleiche Weise die in diagonaler Stellung befindlichen Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ auf ihre respectiven Rhomboeder zu reduciren, müssen wir die gemäss §. 272 veränderte Bedeutung der Hülfslinien in fig. 6 in Erwähnung ziehen.

Die MD = ME ist jetzt = b

die MF = nb

die OM = UM = ma wie im vorigen §.

und PQ = z

Ferner ist:

$$
\begin{aligned}
nb : ma &= NP : OM - MN \\
&= NP : OM - PQ \\
ma : b &= UM + MN : NP \\
&= OM + PQ : NP \\
\hline
\text{also } n : 1 &= OM + PQ : OM - PQ \\
&= m + z : m - z
\end{aligned}
$$

$$\text{und daher } z = PQ = m\frac{n-1}{n+1}$$

$$\text{und } 3z = 3m\frac{n-1}{n+1}$$

Allein die so bestimmte Halbaxe 3z ist noch nicht auf denjenigen Werth zurückgeführt, welchen die Ableitung erfordert. Sollen wir nämlich das Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ wirklich auf ein Rhomboeder des Systemes reduciren, so kann dieses Rhomboeder nur als die hemiedrische Gestalt einer hexagonalen Pyramide $xP2$ betrachtet werden; dann können aber seine Mittelkanten die Ebene des Mittelquerschnittes nicht in den Puncten $BCB'C'$ u. s. w., sondern nur in denjenigen, zwar in denselben Durchmessern, aber vom Mittelpuncte weiter weg gelegenen Puncten schneiden, welche den Winkelpuncten der Basis von $xP2$ entsprechen. Da nun gegenwärtig

$$MC = \frac{n\sqrt{3}}{n+n}$$

und der grösste Halbmesser der Basis von $xP2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

so werden wir aus den Verhältnissen des construirten Rhomboeders die Verhältnisse des gesuchten Rhomboeders leicht ableiten, da für jenes,

$$\text{Halbdiagonale : Halbaxe} = \frac{n\sqrt{3}}{n+1} : 3m\frac{n-1}{n+1}$$

für dieses dagegen die Halbdiagonale $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ und folglich

$$x = \frac{2m(n-1)}{n}$$

welches die Halbaxe des Rhomboeders (xR), zu welchem das Skalenoeder $\left(\frac{mPn}{2}\right)$ gehört.

§. 277.

Fortsetzung.

Die Mittelkanten des Skalenoeders $\pm\left(\frac{mPn}{2}\right)$ haben also genau dieselbe Lage, wie die Mittelkanten des Rhomboeders $\pm\left(\frac{2m(n-1)}{n}R\right)$, und man kann jedes Skalenoeder der zweyten Art aus diesem seinem Rhomboeder durch entsprechende Vervielfachung der Axe desselben ableiten, indem man durch die Mittelkanten des Rhomboeders und die Endpuncte seiner vervielfachten Axe Ebenen legt. Hierauf liesse sich auch eine ähnliche Bezeichnung gründen, wie für die Skalenoeder der ersten Art; da jedoch diese Skalenoeder der zweyten Art nur höchst selten in der Natur vorzukommen scheinen, und hier mehr der Vollständigkeit wegen, so wie deshalb erwähnt worden sind, weil sich von manchen ihrer Verhältnisse bey der Entwicklung der hexagonalen Combinationen einiger Gebrauch machen lässt, so halten wir es für überflüssig, diese zweyte Bezeichnung für sie geltend zu machen, wie wir denn auch in der allgemeinen

Uebersicht der rhomboedrischen Gruppe an gegenwärtigem Orte auf sie keine Rücksicht nehmen werden.

§. 278.

Uebersicht der rhomboedrischen Gruppe.

Demnach entspricht der rhomboedrischen Gruppe, oder dem Inbegriffe derjenigen parallelflächig hemiedrischen Gestalten des Hexagonal-Systemes, welche in völliger Selbstständigkeit auftreten, folgendes allgemeine Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
oR & \ldots & \pm mR & \ldots & \pm R & \ldots & \pm mR & \ldots & \infty R \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
oRq & \ldots & \pm mRq & \ldots & \pm Rq & \ldots & \pm mRq & \ldots & \infty Rq \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\multicolumn{9}{c}{\underbrace{oR\infty \;\ldots\; \pm mR\infty \;\ldots\; \pm R\infty \;\ldots\; \pm mR\infty \;\ldots\; \infty R\infty}_{mR\infty \,=\, R\infty \,=\, \infty P2}} \\
oP2 & \ldots & mP2 & \ldots & P2 & \ldots & mP2 & \ldots & \infty P2
\end{array}$$

Die oberste horizontale Reihe ist die Reihe der Rhomboeder; wir nennen sie die Hauptreihe.

Die unterste horizontale Reihe ist die Reihe der hexagonalen Pyramiden, welche hier streng genommen als hemiedrische Gestalten zu betrachten sind, deren hemiedrische Erscheinung jedoch in nichts von ihrer homoedrischen Erscheinung verschieden ist; wir lassen ihr den Namen der Nebenreihe.

Alle Zwischenreihen, mit Ausnahme der eingeklammerten, enthalten Skalenoeder, und zwar begreift jede einzele Reihe nur solche Glieder, welche bey gleichnamiger Stellung horizontale Combinationskanten hervorbringen, oder, was dasselbe sagen will, nur solche Glieder von ähnlichen Querschnitten; was sich unmittelbar daraus ergiebt, dass $q = \frac{n}{2-n}$ also eine nur von n abhängige Grösse ist, so dass ein und derselbe Werth von q auch einen und denselben Werth von n voraussezt, woraus die Aehnlichkeit der Querschnitte folgt.

Iede verticale Reihe mit Ausnahme des Gliedes der Nebenreihe enthält lauter Gestalten mit coincidirenden Mittelkanten - Linien.

DRITTES CAPITEL.

Von der Berechnung der einzelen Gestalten des Hexagonal - Systemes.

§. 279.

Berechnung der Kanten der dihexagonalen Pyramiden.

Da sich alle homoedrische Gestalten der hexagonalen Gruppe auf die Form mPn zurückführen lassen, so werden wir die Berechnung ihrer Kanten auf die Berechnung der dihexagonalen Pyramiden zu gründen haben. Es seyen in jeder dergleichen Pyramide mPn

die normalen Polkanten $= x$
die diagonalen - - - $= y$
die Mittelkanten $= z$

so ist

$$\cot.\frac{x}{2} = \frac{ma(2-n)}{n\sqrt{3(b^2+m^2a^2)}}$$

$$\cot.\frac{y}{2} = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{\sqrt{3n^2b^2+m^2a^2(n+1)^2}}$$

$$\cot.\frac{z}{2} = \frac{nb\sqrt{3}}{2ma\sqrt{n^2-n+1}}$$

Hieraus findet sich unmittelbar:

$$\cos.x = -\frac{3n^2b^2+2m^2a^2(n^2+2n-2)}{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.y = -\frac{3n^2b^2-2m^2a^2(n^2-4n+1)}{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.z = \frac{3n^2b^2-4m^2a^2(n^2-n+1)}{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

§. 280.

Sinus und Cosinus der halben Kantenwinkel von mPn.

Da man häufig die Sinus und Cosinus der halben Kantenwinkel einer dihexagonalen Pyramide mPn bedarf, so folgen hier die ihnen entsprechenden Gleichungen; wenn

$$\sqrt{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)} = M$$

so ist:

$$\sin.\frac{x}{2} = \frac{n\sqrt{3(b^2+m^2a^2)}}{M}$$

$$\sin.\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3n^2b^2+m^2a^2(n+1)^2}}{M}$$

$$\sin.\frac{z}{2} = \frac{2ma\sqrt{n^2-n+1}}{M}$$

$$\cos.\frac{x}{2} = \frac{ma(2-n)}{M}$$

$$\cos.\frac{y}{2} = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{M}$$

$$\cos.\frac{z}{2} = \frac{nb\sqrt{3}}{M}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende Proportionen:

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2} = 2-n : (n-1)\sqrt{3}$$

$$\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma(2-n) : nb\sqrt{3}$$

$$\cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma(n-1) : nb$$

welche zur leichteren Berechnung von m und n dienen.

Anmerkung. Sind z. B. die beyden Polkanten x und y bekannt, so findet man sogleich:

$$n = \frac{2\cos.\frac{y}{2} + \cos.\frac{x}{2}\sqrt{3}}{\cos.\frac{y}{2} + \cos.\frac{x}{2}\sqrt{3}}$$

und bringt man diesen Werth von n in die Gleichung für $\cos.\frac{y}{2}$ oder $\cos.\frac{x}{2}$, so bestimmt sich auch m. Uebrigens vereinfachen sich gewöhnlich diese und ähnliche Berechnungen in der Anwendung um ein bedeutendes, weil die Verhältnisse der vorkommenden dihexagonalen

Pyramiden gewöhnlich n als eine Function von m bestimmen; z. B. $n = \frac{m}{m-1}$ oder $= \frac{2m}{m+1}$ u. s. w.

§. 281.

Kantenwinkel der hexagonalen Pyramiden.

Setzt man in den Formeln der beyden vorhergehenden §§. $n = 1$, so erhält man die Formeln für die Kantenwinkel der Pyramiden mP aus der Hauptreihe:

$$\cos.x = -\frac{3b^2 + 2m^2a^2}{3b^2 + 4m^2a^2}$$

$$\cos.y = -1$$

$$\cos.z = \frac{3b^2 - 4m^2a^2}{3b^2 + 4m^2a^2}$$

$$\text{und } \cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma : b\sqrt{3}$$

Setzt man dagegen $n = 2$, so erhält man die Formeln für die Pyramiden der Nebenreihe:

$$\cos.x = -1$$

$$\cos.y = -\frac{2b^2 + m^2a^2}{2b^2 + 2m^2a^2}$$

$$\cos.z = \frac{b^2 - m^2a^2}{b^2 + m^2a^2}$$

$$\text{und } \cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{z}{2} = ma : 2b$$

§. 282.

Kantenwinkel der Prismen.

Für $m = \infty$ verwandeln sich die Formeln von §. 279.

und §. 280. in die den dihexagonalen und hexagonalen Prismen entsprechenden Werthe:

1) Für ∞P oder das Prisma der Hauptreihe:

$$\cos.x = -\tfrac{1}{2},\ x = 120^\circ$$

$$\cos.z = -1$$

2) Für ∞P2 oder das Prisma der Nebenreihe:

$$\cos.y = -\tfrac{1}{2},\ y = 120^\circ.$$

$$\cos.z = -1$$

3) Für ∞Pn oder die Prismen der Zwischenreihen:

$$\cos.x = -\frac{n^2+2(n-1)}{2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.y = \frac{n^2-4n+1}{2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.z = -1$$

Anmerkung. Für den Fall, da in einer der Zwischenreihen $x = y$, würden sich sämmtliche Glieder dieser Reihe in gleichwinklig - zwölfseitige oder dodekagonale Pyramiden und das Gränzglied derselben in ein dodekagonales Prisma verwandeln; dann wäre also

$$n^2-4n+1 = -n^2-2n+2$$

$$n^2-n = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{und } n = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{*)}$$

weil n jederzeit positiv gefordert wird. Da nun in der Natur für n bis jetzt keine andern als rationale Werthe beobachtet worden sind, so wird es sehr unwahrscheinlich, dass gleichwinklige zwölfseitige Pyramiden über-

*) Dasselbe folgt noch leichter aus den Gleichungen für $\cos.\frac{y}{2}$ und $\cos.\frac{x}{2}$, indem sie unmittelbar $n = \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ geben.

haupt Realität haben. Das gleichwinklig zwölfseitige Prisma, welches häufig erscheint, ist nicht die einfache Gestalt $\infty P \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, sondern die Combination $\infty P . \infty P2$, deren Flächen eine ganz andere Lage haben, als die ist, welche die Flächen jenes einfachen Prismas annehmen würden.

§. 283.

Kantenwinkel der hexagonalen Pyramiden in abnormer Stellung.

Die Mittelkanten z sind, wie die Ableitung lehrt, identisch mit jenen der Muttergestalt mPn, und die Winkel der Basis $= 120°$; nennen wir also die Polkanten $= x'$, so ist

$$\cos.\frac{x'}{2} = \tfrac{1}{2}\sin.\frac{z}{2}$$

$$= \frac{ma\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}}$$

$$\text{und } \cos.x' = -\frac{3n^2b^2+2m^2a^2(n^2-n+1)}{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

§. 284.

Kantenwinkel der trigonalen Pyramiden.

Dass die Mittelkanten z jeder trigonalen Pyramide den gleichnamigen Kanten ihrer Muttergestalt gleich seyn müssen, folgt unmittelbar aus der Ableitung; da nun die Winkel der Basis $= 60°$ sind, so ergiebt sich für die Polkanten x' allgemein

$$\cos.\frac{x'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin.\frac{z}{2}$$

Weil aber z in den Pyramiden der Nebenreihe einen ganz anderen Werth hat, als in den Pyramiden der Hauptreihe, so wird:

1) Für die trigonalen Pyramiden $\pm\frac{mP}{2}$

$$\cos.\frac{x'}{2} = \frac{ma\sqrt{3}}{\sqrt{3b^2+4m^2a^2}}$$

$$\text{und } \cos.x' = \frac{2m^2a^2-3b^2}{4m^2a^2+3b^2}$$

2) Für die trigonalen Pyramiden $\pm\frac{mP2}{4}$

$$\cos.\frac{x'}{2} = \frac{ma\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2+m^2a^2}}$$

$$\cos.x' = \frac{m^2a^2-2b^2}{2m^4a^2+2b^2}$$

§. 285.

Kantenwinkel der Skalenoeder erster Art.

Es seyen die längeren stumpferen Polkanten $= y$
die kürzeren schärferen - - $= x$
die Mittelkanten $= z$

so ist, wenn $\sqrt{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)} = M$

$$\sin.\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3n^2b^2+m^2a^2(2n-1)^2}}{M}$$

$$\sin.\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3n^2b^2+m^2a^2(n+1)^2}}{M} = \sin.\frac{y}{2} \text{ in §. 280}$$

$$\sin.\frac{z}{2} = \frac{man\sqrt{5}}{M}$$

$$\cos.\frac{x}{2} = \frac{ma\sqrt{3}}{M}$$

$$\cos.\frac{y}{2} = \frac{ma(n-1)\sqrt{3}}{M} = \cos.\frac{y}{2}\ \S.\ 280$$

$$\cos.\frac{z}{2} = \frac{\sqrt{3n^2b^2 + m^2a^2(n-2)^2}}{M}$$

und

$$\cos.x = -\frac{3n^2b^2 + 2m^2a^2(2n^2-2n-1)}{3n^2b^2 + 4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.y = -\frac{3n^2b^2 - 2m^2a^2(n^2-4n+1)}{3n^2b^2 + 4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.z = \frac{3n^2b^2 - 2m^2a^2(n^2+2n-2)}{3n^2b^2 + 4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

Zusatz. Für $n = 2$ verwandeln sich diese Formeln in jene für die Pyramiden der Nebenreihe $mP2$; ein Beweis, dass diese Pyramiden als Gränzgestalten der Skalenoeder und als Gränzgestalten der dihexagonalen Pyramiden, also hemiedrisch und homoedrisch völlig dieselbe Erscheinung gewähren. Für $m = \infty$ verwandeln sich die Formeln von cos.x, cos.y und cos.z in die eines ditrigonalen Doppelprismas mit einspringenden Winkeln, welches entsteht, wenn man erst die abwechselnden Flächenpaare des dihexagonalen Prismas ∞Pn, und darauf auch die zwischenliegenden Flächenpaare desselben vergrössert. Cos.z′ wird gleich dem Cosinus des Supplementwinkels zur Kante x des dihexagonalen Prismas in §. 282, und cosx′ giebt die neue Kante des ditrigonalen Prismas. Da aber Gestalten mit einspringenden Winkeln nicht vorkommen, so verwandelt sich dieses ditrigonale Doppelprisma, wenn es erscheint, in das dihexagonale Prisma ∞Pn.

Anmerkung 1. Aus vorstehenden Gleichungen folgt:

1) $\cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2} = 1 : n-1$

und daher $n = \dfrac{\cos.\frac{y}{2} + \cos.\frac{x}{2}}{\cos.\frac{x}{2}}$

$= \dfrac{2\cos.\frac{y+x}{4}\ \cos.\frac{y-x}{4}}{\cos.\frac{x}{2}}$

2) $\sin.\frac{z}{2} : \cos.\frac{x}{2} = n : 1$

und folglich $n = \dfrac{\sin.\frac{z}{2}}{\cos.\frac{x}{2}}$

3) $\cos.\frac{y}{2} : \sin.\frac{z}{2} = n-1 : n$

und $n = \dfrac{\sin.\frac{z}{2}}{\sin.\frac{z}{2} - \cos.\frac{y}{2}}$

endlich aus 2 und 3

$$\sin.\frac{z}{2} = \cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}$$

Also ist in jedem Skalenoeder $\frac{mPn}{2}$ der Sinus der halben Mittelkante gleich der Summe der Cosinus der beyden halben Polkanten.

Anmerkung 2. Ferner ergiebt sich:

$$\sin.\frac{z}{2} : \cos.\frac{x}{2} : \cos.\frac{y}{2} = n : 1 : n-1$$

Da nun in der Natur dem Werthe von n jederzeit ein rationaler, und meist sehr einfacher Bruch entspricht, welcher $\geqq 1$ und $\leqq 2$, so werden die Cosinus von $\frac{y}{2}$ und $\frac{x}{2}$ und der Sinus von $\frac{z}{2}$ jederzeit in einem sehr einfachem rationalem Verhältnisse zu einander stehen.

§. 286.

Kantenwinkel der Skalenoeder zweyter Art.

Es seyen die längeren stumpferen Polkanten $= x$
die kürzeren schärferen - - $= y$
die Mittelkanten - $= z$

so ist:

$$\sin.\frac{x}{2} = \frac{n\sqrt{3\sqrt{b^2+m^2a^2}}}{M}$$

$$\sin.\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{n^2b^2+m^2a^2}}}{M}$$

$$\sin.\frac{z}{2} = \frac{ma(n+1)}{M}$$

$$\cos.\frac{x}{2} = \frac{ma(2-n)}{M}$$

$$\cos.\frac{y}{2} = \frac{ma(2n-1)}{M}$$

$$\cos.\frac{z}{2} = \frac{\sqrt{3n^2b^2+m^2a^2(n-1)^2}}{M}$$

$$\cos.x = -\frac{3n^2b^2+2m^2a^2(n^2+2n-2)}{3n^2b^2+4m^2a^2(n^2-n+1)}$$

$$\cos.y = - \frac{3n^2b^2 - 2m^2a^2(2n^2 - 2n - 1)}{3n^2b^2 + 4m^2a^2(n^2 - n + 1)}$$

$$\cos.z = \frac{3n^2b^2 + 2m^2a^2(n^2 - 4n + 1)}{3n^2b^2 + 4m^2a^2(n^2 - n + 1)}$$

Zusatz. Für $n = 2$ wird

$$\cos.x = - 1$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2 - 2b^2}{2m^2a^2 + 2b}$$

$$\cos.z = - \cos.y$$

welches die Cosinus für die Kanten der Rhomboeder als hemiedrischer Gestalten der hexagonalen Pyramiden der Nebenreihe sind.

Anmerkung 1. Aus vorstehenden Gleichungen folgt:

1) $\cos.\frac{y}{2} : \cos.\frac{x}{2} = 2n - 1 : 2 - n$

und daher $n = \dfrac{2\cos.\frac{y}{2} + \cos.\frac{x}{2}}{2\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}}$

2) $\sin.\frac{z}{2} : \cos.\frac{x}{2} = n + 1 : 2 - n$

und folglich $n = \dfrac{2\sin.\frac{z}{2} - \cos.\frac{x}{2}}{\sin.\frac{z}{2} + \cos.\frac{x}{2}}$

3) $\sin.\frac{z}{2} : \cos.\frac{y}{2} = n + 1 : 2n - 1$

und $n = \dfrac{\sin.\frac{z}{2} + \cos.\frac{y}{2}}{2\sin.\frac{z}{2} - \cos.\frac{y}{2}}$

Anmerkung. 2. Für den sehr häufigen Fall, da $n = \frac{m}{m-1}$, wird

$$\cos.z = \frac{3b^2 - 2a^2(2m^2 - 2m - 1)}{3b^2 + 4a^2(m^2 - m + 1)}$$

$$\text{und } m = \frac{a \pm \text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)}}{2a}$$

$$= 0{,}5 + \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{3\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

welche Gleichung bey der Entwicklung mancher Combinationen von grossem Nutzen ist.

§. 287.

Kantenwinkel der auf ihre Rhomboeder reducirten Skalenoeder erster Art.

Die für die Skalenoeder erster Art in §. 285. entwickelten Formeln haben nur Gültigkeit, so lange man die Skalenoeder unmittelbar als hemiedrische dihexagonale Pyramiden betrachtet; reducirt man sie dagegen auf ihre Rhomboeder, so müssen jene Formeln einer dieser Reduction angemessenen Umgestaltung unterworfen werden, bevor sie die gehörige Brauchbarkeit erhalten.

Für $\frac{mPn}{2} = m'Rn'$ ist nach §. 285.

$$m' = \frac{m(2-n)}{n}$$

$$n' = \frac{n}{2-n}$$

und folglich $m = m'n'$

$$n = \frac{2n'}{n'+1}$$

Bringt man diese Werthe von m und n in die Gleichungen des §. 285, so erhält man die Formeln für das Skalenoeder mRn wie folgt:

$$\cos.x = -\frac{6b^2 + m^2a^2(3n^2 - 6n - 1)}{6b^2 + 2m^2a^2(3n^2 + 1)}$$

$$\cos.y = -\frac{6b^2 + m^2a^2(3n^2 + 6n - 1)}{6b^2 + 2m^2a^2(3n^2 + 1)}$$

$$\cos.z = \frac{3b^2 - m^2a^2(3n^2 - 1)}{3b^2 + m^2a^2(3n^2 + 1)}$$

Anmerkung. Weil $n = \frac{2n'}{n'+1}$ so wird für das Skalenoeder mRn

$$1)\ n = \frac{\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{y}{2}}{\cos.\frac{x}{2} - \cos.\frac{y}{2}}$$

$$= \cot.\frac{x-y}{4}\ \cot.\frac{x+y}{4}$$

$$2)\ n = \frac{\sin.\frac{z}{2}}{2\cos.\frac{x}{2} - \sin.\frac{z}{2}}$$

$$3)\ n = \frac{\sin.\frac{z}{2}}{\sin.\frac{z}{2} - 2\cos.\frac{y}{2}}$$

§. 288.

Kantenwinkel der Rhomboeder.

Setzt man in den Formeln von §. 287, oder auch in jenen von §. 285. $n = 1$, so erhält man die den Rhomboedern der Hauptreihe entsprechenden Gleichungen; es wird nämlich für $\pm$ mR

$$\cos.y = -1$$

$$\cos.x = \frac{2m^2a^2 - 3b^2}{4m^2a^2 + 3b^2}$$

$$\cos.z = -\cos.x$$

Dagegen verwandeln sich, wie wir schon oben sahen, die Formeln von §. 286. für den Werth $n = 2$ in die entsprechenden der Rhomboeder der Nebenreihe, indem für $\pm \frac{mP2}{4}$ oder $\pm$ (mR)

$$\cos.x = -1$$

$$\cos.y = \frac{m^2a^2 - 2b^2}{2m^2a^2 + 2b^2}$$

$$\cos.z = -\cos.y$$

§. 289.

Kanten der dihexagonalen Trapezoeder.

Die Kanten der dihexagonalen Trapezoeder sind bereits berechnet worden. Setzen wir nämlich die Polkanten des Trapezoeders $\frac{1}{1}\frac{mPn}{2}$ oder $\frac{r}{r}\frac{mPn}{2} = x'$, die längeren Mittelkanten $= z'$ die kürzeren $= z''$, so folgt unmittelbar aus der Ableitung, dass

$x' = x'$ in §. 283
$z' = z$ in §. 285
$z'' = z$ in §. 286

Es bedarf daher keiner besondern Berechnung.

VIERTES CAPITEL.

Von den Combinationen der einzelen Gestalten des Hexagonal - Systemes.

§. 290.

Hexagonale und rhomboedrische Combinationen.

In den Combinationen der verschiedenen Gestalten des Hexagonal - Systemes tritt der wesentliche Unterschied recht auffallend hervor, welcher zwischen den Gestalten beyder Gruppen dieses Systemes Statt findet, indem die Rhomboeder und Skalenoeder in inniger Verbindung mit einander, aber in steter Absonderung von den übrigen Gestalten auftreten, die sich wiederum nur mit einander zu combiniren scheinen. Die hexagonalen Pyramiden der Nebenreihen bilden allein eine scheinbare Ausnahme von dieser Regel, da sie an den Combinationen beyder Gruppen Theil nehmen; jedoch verschwindet diese Anomalie, wenn man den eigenthümlichen Charakter dieser Gestalten berücksichtigt, vermöge dessen sie als Gränzgestalten der Skalenoeder und als Gränzgestalten der dihexagonalen Pyramiden völlig dieselben Pyramiden darstellen, so dass die hemiedrischen Gestalten in der That die Ebenbilder ihrer homoedrischen Gestalten werden; weshalb denn auch diejenigen hexagonalen Pyramiden, welche an den Combinationen der rhomboedrischen Gruppe Theil nehmen, nur als dergleichen hemiedrische Ebenbilder ihrer Muttergestalten zu beurtheilen sind *).

§. 291.

Grundgestalt und vorläufige Bestimmungen.

Zur Grundgestalt muss jederzeit irgend eine der hexagonalen Pyramiden erwählt werden, als welche allein die Merkmale an sich tragen, welche der Begriff der Grundgestalt für dieses System postulirt. Ist keine dergleichen Pyramide in der Combination enthalten, so schliesst man aus den Verhältnissen der vorhandenen Gestalten auf diejenige hexagonale Pyramide, welche als Grundgestalt die leichtesten Entwicklungen gewähren würde, oder lässt sie auch bis auf Weiteres ganz unbestimmt; (vergl. §. 153). Ist aber die Grundgestalt gewählt, so hat die vorläufige Entwicklung keine Schwierigkeiten, und die blosse Betrachtung der Combination lässt uns unmittelbar auf die Beantwortung der Fragen gelangen, wie vielzählig sie sey, ob sie eine hemiedrische oder eine homoedrische sey, welche Gestalten Pyramiden und welche Prismen seyen, welche der Hauptreihe, welche der Nebenreihe, welche den Zwischenreihen angehören. Für die näheren Bestimmungen gelten übrigens hier buchstäblich die in §. 154 für die Combinationen des Tetragonal - Systemes angegebenen Regeln.

---

*) Vergl. Weiss Grundzüge der Theorie der Drey- und Drey-Kantner, S. 42.

§. 292.

Combinationsgleichungen.

Was die Bestimmung für den besonderen Fall betrifft, da die Flächen einer unbekannten Gestalt $m''Pn''$ zwischen den Flächen zweyer bekannten Gestalten mPn und $m'Pn'$ mit parallelen Combinationskanten erscheinen, so sind dabey für dieses System ganz eigenthümliche Verhältnisse zu berücksichtigen, welche die Entwicklung mehrer besonderer Combinationsgleichungen nothwendig machen.

Für alle trimetrischen Systeme war es möglich, die Verschiedenheit der Lage der Flächen in verschiedenen Raum-Oktanten durch angemessene positive und negative Bezeichnung ihrer respectiven Coordinaten zu bestimmen; auf das tetrametrische System dagegen lässt sich diese Bestimmungsweise nicht anwenden, weil in ihm drey Diagonalen auftreten, und somit die Verschiedenheit der Lage nicht auf das Verhältniss von Winkel, Nebenwinkel, und Scheitelwinkel der Diagonalen reducirt werden kann, wie diess in jenen Systemen eigentlich der Fall ist, indem man eine der Halbdiagonalen oder beyde bald positiv, bald negativ einführt. Wiewohl daher die allgemeinen Combinationsgleichungen in §. 43 für den Fall, da beyde bekannte Flächen über einem Sextanten der Basis liegen, auch in diesem Systeme brauchbar sind, so müssen wir doch für alle übrigen, zumal in den Combinationen der rhomboedrischen Gruppe so häufigen Fälle besondere Regeln auffinden.

§. 293.

Fortsetzung.

Nennen wir je zwey neben einander liegende Sextanten oder Eckpuncte der Basis von P, Neben-Sextanten oder **Neben - Eckpuncte**, und je zwey durch einen zwischenliegenden Sextanten oder Eckpunct getrennte Sextanten und Eckpuncte **Nachbar-Sextanten** und **Nachbar-Eckpuncte**, so lassen sich die wichtigsten vorkommenden Fälle, und die ihnen entsprechenden Gleichungen in folgenden sechs Formeln darstellen:

1) Beyde bekannte Flächen mPn und m'Pn' liegen über einem und demselben Sextanten und an einem und demselben Eck; dann gilt die schon bekannte Gleichung:

$$\text{A)}\quad m'' = \frac{n''(n'-n)\,mm'}{n''(mn'-m'n)-(m-m')nn'}$$

2) Beyde bekannte Flächen liegen über einem und demselben Sextanten aber an Neben - Eckpuncten, dann ist:

$$\text{B)}\quad m'' = \frac{n''(nn'-1)\,mm'}{n''(m'n-m)n'+(mn'-m')n}$$

3) Die bekannten Flächen liegen über Neben-Sextanten, aber an einem und demselben Eckpunct; dann ist:

$$\text{C)}\quad m'' = \frac{n''(n-nn'+n')\,mm'}{n''(mn'-m'nn'+m'n)-(m-m')nn'}$$

4) Die bekannten Flächen liegen über Neben-Sextanten und an Neben-Eckpuncten; dann ist:

$$\text{D)}\quad m'' = \frac{n''(nn'-n+1)\,mm'}{n''(m-mn+m'n)\,n'+(mn'-m')\,n}$$

5) Die bekannten Flächen liegen über Neben-Sextanten aber an Nachbar-Eckpuncten: dann ist:

$$\text{E)}\quad m'' = \frac{n''(n+n'-1)\,mm'}{n''(m'n'+mn'-m')\,n+m'n-mn'}$$

6) Die bekanten Flächen liegen über Nachbar-Sextanten und an Neben-Eckpuncten; dann ist:

$$\text{F)}\quad m'' = \frac{n''(n+n'-1)mm'}{n''(mn'-m'n'+m')n+(m'n-mn+m)n'}$$

§. 294.

Einige besondere Regeln für rhomboedrische Combinationen.

Mit Hülfe der oben erwähnten Regeln und dieser Gleichungen werden sich die hexagonalen Combinationen jederzeit ohne Schwierigkeit entwickeln lassen. Die Ableitung einiger sehr einfachen Regeln aus den vorhergehenden Gleichungen für mehre besonders häufig vorkommende Fälle mag in Bezug auf hexagonale Combinationen den unten folgenden Anwendungen auf einige Beyspiele vorbehalten bleiben; für die rhomboedrischen Combinationen dagegen dürften einige dergleichen Regeln wegen ihres besonders häufigen Gebrauches hier nicht am unrechtem Orte stehen:

1) Dasjenige Rhomboeder, welches die Polkanten des Rhomboeders $\pm mR$ regelmässig abstumpft, ist $= \mp\frac{1}{2}mR$.
2) Dasjenige Rhomboeder, welches die kürzeren Polkanten des Skalenoeders $\pm mRn$ oder $\pm\frac{mPn}{2}$ regelmässig abstumpft, ist $\mp\frac{m(3n-1)}{4}R$ oder $\mp\frac{m(2n-1)}{2n}R$.
3) Dasjenige Rhomboeder, welches die längeren Polkanten desselben Skalenoeders abstumpft, ist $\mp\frac{m(3n+1)}{4}R$ oder $\pm\frac{m(n+1)}{2n}R$.

4) Dasjenige Rhomdoeder, welches die längeren Polkanten des Skalenoeders $\pm$ mRn oder $\pm \frac{mPn}{2}$ so abstumpft, dass die Combinationskanten den kürzeren Polkanten desselben parallel laufen ist $\pm \frac{m(3n-1)}{2}$ R oder $\pm \frac{m(2n-1)}{n}$ R.

5) Dasjenige Rhomboeder, welches die kürzeren Polkanten desselben Skalenoeders so abstumpft, dass die Combinationskanten den längeren Polkanten desselben parallel werden ist $\mp \frac{m(3n+1)}{2}$ R oder $\mp \frac{m(n+1)}{n}$ R

§. 295.

Entwicklung zweyer Combinationen des hexagonalen Quarzes.

Bey genauerer Betrachtung dieser beyden Combinationen (tab. III. Fig. 14 und 15) ergiebt sich sogleich ihr hemiedrischer oder tetartoedrischer Charakter, indem sowohl die Flächen *s*, als die Flächen *x*, *y*, *u* und *v* wegen der fehlenden Gegenflächen geneigtflächig - hemiedrischen oder tetartoedrischen Gestalten angehören müssen. Erwählen wir die hexagonale Pyramide *Pz* zur Grundgestalt P′, so ist

$$b : a = 19 : 21$$

Polkante $x = 133° \; 38' \; 43''$

und das Verhältniss der übrigen Gestalten folgendermaassen bestimmt. es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen P
- - - - - - - - - - - r
2) Gl. der Zwischenreihen die Flächen x
- - - - - - - - y
- - - - - - - - u
- - - - - - - - v
3) Gl. der Nebenreihe die Flächen s

Von allen diesen Gestalten sind nur diejenigen aus der Hauptreihe homoedrisch, alle übrigen hemiedrisch, oder eigentlich tetartoedrisch, da nun

$$P, z = \mathrm{P}$$
$$\text{so ist } r = \infty\mathrm{P}$$

Die Flächen s in fig. 14 gehören einer trigonalen Pyramide in diagonaler Stellung, da von der ihnen entsprechenden hexagonalen Pyramide der Nebenreihe nur die an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaare erscheinen; die Flächen s in fig. 15 dagegen gehören einem Rhomboeder in diagonaler Stellung, da von derselben Pyramide die abwechselnden einzelen Flächen erscheinen. Die Flächen x, y, u und v würden gehörig vergrössert ditrigonale Trapezoeder darstellen, da sie insgesammt dihexagonalen Pyramiden angehören, welche mit dem viertem Theile ihrer Flächen so erscheinen, wie es in §. 268 gefordert wurde.

Es sey nun die hexagonale Pyramide, von welcher einerseits die trigonale Pyramide s anderseits das Rhomboeder s erscheint $= x\mathrm{P}2$; da ihre Flächen zwischen $P = \mathrm{P}$ und $r = \infty\mathrm{P}$ parallele Combinationskanten hervorbringen, die diesem Parallelismus entsprechenden Flächen P und r jedoch über Nebensextanten liegen, so kommt zur Bestimmung von x die Formel C §. 293. in Anwendung, indem man die Werthe

$$m = \infty \quad n = 1$$
$$m' = 1 \quad n' = 1$$
$$n'' = 2$$

in dieselbe einführt. Man findet $x = 2$, und demnach das Zeichen

für die vollständige Pyramide $s = 2P2$

für die trigonale Pyramide $s = \frac{2P2}{4}$

für das Rhomboeder $s = \left(\frac{2P2}{4}\right)$

Zur vollständigen Bestimmung der ditrigonalen Trapezoeder *x*, *y*, *u* und *v* sind die nöthigen Elemente nicht vorhanden; da aber die Flächen derselben mit parallelen Combinationskanten zwischen *P* und *r* erscheinen, so bestimmt sich in dem allgemeinem Zeichen $m''Pn''$ ihrer Muttergestalten n'' als eine Function von m'', wobey wiederum die Formel C ihre Anwendung findet; man erhält nämlich

$$n'' = \frac{m''}{m'' - 1}$$

Da wir aber diese Trapezoeder insgesammt als hemiedrische Skalenoeder der zweyten Art betrachten können, so gilt für sie die Gleichung

$$m'' = 0,5\left[1 + \text{tang.}\frac{z}{2}\sqrt{3\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}\right]$$

$$= 0,5 + 1,1679 \text{ tang.}\frac{z}{2}$$

welche eine leichte Methode zur Bestimmung von m'' gewährt, da sich die verschiedenen Werthe des Winkels $\frac{z}{2}$ aus den gemessenen Combinationskanten zwischen ∞P und x, y, u, v unmittelbar ergeben; es ist nämlich, wenn diese Combinationskante $= k$,

$$\frac{z}{2} = k - 90^\circ$$

Hiernach findet man

$$\frac{z}{2} \text{ für } x = 71^\circ\ 33'$$
$$\text{- - } y = 75^\circ\ 27'$$
$$\text{- - } u = 78^\circ\ 1'$$
$$\text{- - } v = 81^\circ\ 9'$$

und durch successive Einführung der Tangenten dieser Winkel in obigen Werth für m''

$$x = 4P\tfrac{4}{3}$$
$$y = 5P\tfrac{5}{4}$$
$$u = 6P\tfrac{6}{5}$$
$$v = 8P\tfrac{8}{7}$$

Demnach sind beyde Combinationen vollständig entwickelt, und die Uebersicht der in ihnen enthaltenen Gestalten ist folgende:

1) Aus der Hauptreihe, homoedrisch $P = P$

- - - - - - - - $r = \infty P$

2) Aus den Zwischenreihen, tetartoedrisch $x = \frac{r}{r}\frac{4P\frac{4}{3}}{4}$

- - - - - - - - - - $y = \frac{r}{r}\frac{5P\frac{5}{4}}{4}$

- - - - - - - - - $u = \frac{r}{r}\frac{6P\frac{6}{5}}{4}$

- - - - - - $v = \frac{r}{r}\frac{8P\frac{8}{7}}{4}$

3) Aus der Nebenreihe, tetartoedrisch $s = \frac{2P2}{4}$.

- - - - - - $s = \left(\frac{2P2}{4}\right)$

§. 296.

Entwicklung einer Combination des hexagonalen Flusshaloides.

Dass diese Combination (tab. III. fig. 16) eine 10 zählige hemiedrische sey, ergiebt sich unmittelbar aus dem Anblicke derselben. Erwählt man die Pyramide x zur Grundgestalt P, so wird

$$b : a = 41 : 30$$

die Mittelkante z = 80° 24′

und das Verhältniss der übrigen Gestalten folgendermaassen bestimmt: es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen P
- - - - - - - - r
- - - - - - - - x
- - - - - - - - z
- - - - - - - - M

2) Gliedern der Nebenreihe die Flächen a
- - - - - - - - s
- - - - - - - - e

3) Gliedern der Zwischenreihen die Flächen u
- - - - - - - - b

Von diesen Gestalten bestimmen sich sogleich folgende:

Weil $x = P$

so ist $P = oP$

$$M = \infty P$$
$$a = P2$$
$$e = \infty P2$$

Da nun *s* zwischen $x = P$ und $M = \infty P$ parallele Combinationskanten hervorbringt, die entsprechenden Flächen *x* und *M* aber über Nebensextanten liegen, so hat diese Fläche *s* in Bezug auf die Grundgestalt und das Prisma des Apatites völlig denselben Werth, als die Fläche *s* des vorigen §. in Bezug auf die Grundgestalt und das Prisma des Quarzes, d. h. es ist

$$s = 2P2$$

Da nun die Combinationskanten zwischen *s* und *z* in Verticalebenen durch die Axe fallen, so ist:

$$z = 2P$$

Die Flächen der Pyramide $r = xP$ endlich erscheinen so, dass eine jede derselben zwischen ihrer Nebenfläche und einer Fläche der Pyramide $a = P2$ parallele Combinationskanten hervorbringt; da nun je zwey diesem Parallelismus entsprechende Flächen nicht nur als in Neben-, sondern auch als in Nachbar-Sextanten gelegen betrachtet werden können, so muss sowohl die Formel E als die Formel F in §. 293 der Bestimmung von *r* Genüge leisten, indem man in beyden Formeln

$$m = 1, \ n = 2$$
$$m'' = m' = x, \ n'' = n' = 1$$

setzt. Aus E folgt dann

$$x = \frac{2x}{2x + 1}$$

aus F dagegen

$$x = \frac{2x}{2 + \overline{2x - 2 + 1}}$$

und folglich aus jeder derselben $x = \frac{1}{2}$

$$\text{und } r = \tfrac{1}{2}P$$

Noch sind die Glieder der Zwischenreihen übrig, welche gleichfalls ohne Messungen vollständig bestimmt werden können. Die Fläche $u = m''Pn''$ bringt einmal parallele Combinationskanten zwischen den Flächen $x = P$ und $e = \infty P2$ hervor; da beyde Flächen als über einem und demselben Sextanten liegend betrachtet werden können, so kommt die Formel A oder B in Anwendung, welche nach Einführung der Werthe

$$m = \infty$$
$$n = 2$$
$$m' = n' = 1$$
$$n'' = \frac{2m''}{m'' + 1} \text{ giebt.}$$

Nun bringt u auch zwischen s oder x und M parallele Combinationskanten hervor; da $x = P$ und $M = \infty P$, und je zwey dem Parallelismus entsprechende Flächen über Neben-Sextanten liegen, so wird die Formel C anzuwenden seyn, um eine zweyte Gleichung für n'' zu erhalten; man findet

$$n'' = \frac{m''}{m'' - 1}$$

$$\text{demnach } m'' + 1 = 2(m'' - 1)$$
$$m'' = 3 \qquad n'' = \tfrac{3}{2}$$
$$\text{und } u = 3P\tfrac{3}{2}$$

Was die Flächen b betrifft, so gilt für dieselben wegen des Kanten-Parallelismus zwischen x und M wiederum

$$n'' = \frac{m''}{m'' - 1}$$

Da sie aber auch ausserdem zwischen $z = 2P$ und $e = \infty P2$ parallele Combinationskanten hervorbringt, so folgt aus der Formel A oder B

$$n'' = \frac{2m''}{m''+2}$$

$$m''+2 = 2(m''-1)$$

$$m''=4 \quad n'' = \tfrac{4}{3}$$

$$\text{und } b = 4P\tfrac{4}{3}$$

Die beyden zuletzt berechneten Flächen ergeben sich offenbar als Flächen hemiedrischer Gestalten, denn sie erscheinen nur zu je 12, da sie doch eigentlich als zu dihexagonalen Pyramiden gehörig zu je 24 erscheinen müssten; auch begreift man leicht, dass sie, gehörig vergrössert, hexagonale Pyramiden in abnormer Stellung hervorbringen würden, da sie die an den abwechselnden Mittelkanten der dihexagonalen Pyramiden gelegenen Flächenpaare bilden. Die Krystallreihe des Apatites oder hexagonalen Flusshaloides scheint daher den eigenthümlichen Charakter zu besitzen, dass zwar die Glieder der Hauptreihe und Nebenreihe homoedrisch, die Glieder der Zwischenreihen dagegen parallelflächig hemiedrisch erscheinen; die entwickelte Combination aber zeigt folgenden Inbegriff von Gestalten:

1) Aus der Hauptreihe $P = 0P$
- - - - $r = \frac{1}{2}P$
- - - - $x = P$
- - - - $z = 2P$
- - - - $M = \infty P$

2) Aus der Nebenreihe $a = P2$
- - - - $s = 2P2$
- - - - $e = \infty P2$

3) A. den Zwischenreihen $u = \frac{1}{r} \frac{3P\frac{3}{2}}{2}$

- - - - - $b = \frac{1}{r} \frac{4P\frac{4}{3}}{2}$

§. 297.

Entwicklung einer Combination des rhomboedrischen Turmalines.

Diese Combination (*tab. III. fig. 17.*) ist eine 5-zählige rhomboedrische, deren einzele Gestalten sich für das Rhomboeder *P* als Grundgestalt vorläufig folgendermaassen bestimmen: es gehören

1) Gliedern der Hauptreihe die Flächen *k*
- - - - - - - - - *n*
- - - - - - - - - *P*
- - - - - - - - - *l*

2) Gliedern der Nebenreihe die Flächen *s*

Da nun $P = R$, so ist $k = 0R$, und da das Rhomboeder *n* die Polkanten von *P* regelmässig abstumpft, so ist

$$n = -\tfrac{1}{2}R$$

Weil ferner das Prisma *l* mit *n* horizontale Combinationskanten hervorbringt, so ist

$$l = \infty R$$

Da endlich die Flächen *s*, welche gleichfalls einem hexagonalem Prisma angehören, keine horizontalen Combinationskanten mit einem der Rhomboeder der Hauptreihe hervorbringen, so ist

$$s = \infty P2 = R\infty$$

Von diesen Gestalten erscheinen aber nur $0R$, $-\tfrac{1}{2}R$ und $\infty P2$ mit der ganzen, die übrigen mit der halben

Anzahl ihrer Flächen, und zwar so, dass diese Halbirung nicht sowohl dem Begriffe der Hemiedrie, als dem von Breithaupt recht passend benanntem der Hemimorphie entspricht. Bezeichnen wir dieses Verhältniss durch Einschliessung der Zeichen hemimorphischer Gestalten in Klammern, so wäre die entwickelte Combination etwa so zu schreiben:

$$\infty P2 . 0R [\infty R] . [R] . -\tfrac{1}{2}R$$

§. 298.

Entwicklung einer Combination des rhomboedrischen Eisenerzes.

Diese tab. III. fig. 18 dargestellte Combination ist eine dreyzählige, und besteht aus zwey Rhomboedern der Hauptreihe und einer hexagonalen Pyramide der Nebenreihe. Es sey nun *P* die Grundgestalt R, so bestimmt sich die Pyramide *n* unmittelbar daraus, dass R ihre Polkanten regelmässig abstumpft; denn da sie als ein Skalenoeder von der Form $\frac{m''P2}{2}$ betrachtet werden kann, so gilt die Regel no. 2 oder no. 3 in §. 294, nach welcher in gegenwärtigem Falle

$$1 = \frac{m''(4-1)}{4}$$

$$m'' = \tfrac{4}{3}$$

$$\text{und } n = \tfrac{4}{3}P2$$

Die Verhältnisse des Rhomboeders *s* gestatten keine unmittelbare Bestimmung desselben, indem der dazu erforderliche Kantenparallelismus nicht vorhanden ist;

messen wir jedoch die Polkante $s:s$ oder die Combinationskante $s:P$, so finden wir

$$s = \tfrac{1}{4}R$$

und die vollständig entwickelte Combination erhält das Zeichen:

$$\tfrac{4}{3}P2.\tfrac{1}{4}R.R$$

§. 299.

Entwicklung einer Combination der rhomboedrischen Mercurblende.

Diese tab. III. fig. 19 dargestellte Combination ist eine 7zählige rhomboedrische Combination, deren Gestalten insgesammt Glieder der Hauptreihe sind, indem ausser dem basischem Flächenpaare und dem Prisma der Hauptreihe fünf verschiedene Rhomboeder auftreten, von welchen sich nur eines gegen die übrigen in verwendeter Stellung befindet. Wählt man *P* zur Grundgestalt R, so wird

$$l = \infty R$$
$$o = 0R.$$

a ist ein Rhomboeder von der Form $-xR$, erfordert jedoch eine Messung zu seiner Bestimmung, da der nöthige Kantenparallelismus zu bekannten Gestalten mangelt; man findet durch Messung der Combinationskante $a:o$

$$a = -\tfrac{1}{2}R$$

Da nun die schmalen Flächen *u* mit parallelen Combinationskanten zwischen je zwey gleichgelegenen Flächen des Rhomboeders $-\tfrac{1}{2}R$ erscheinen, so ist

$$u = \tfrac{1}{4}R$$

Wenn ferner $k = xR$ mit parallelen Combinationskanten zwischen den Flächen von $a = -\tfrac{1}{2}R$ und *l*

$= \infty$R erschiene, so würde, weil die diesem Parallelismus entsprechenden Flächen in Nachbar-Sextanten liegen, zur Bestimmung von x die Formel F in Anwendung kommen, und $k = \frac{1}{2}$R seyn; allein eine genauere Prüfung der Lage jener Kanten zeigt, dass sie keinesweges parallel sind, das folglich das Rhomboeder k so wie das Rhomboeder z eine Messung zu ihrer Bestimmung erfordern, wodurch man findet:

$$k = \frac{2}{5}R$$
$$z = \frac{1}{3}R$$

Die entwickelte Combination erhält demnach folgendes Zeichen:

$$\infty R . oR . R . -\frac{1}{2}R . \frac{2}{5}R . \frac{1}{3}R . \frac{1}{4}R$$

§. 300.

Entwicklung einer Combination des rhomboedrischen Kalkhaloides.

Fig. 20 tab. III stellt eine fünfzählige, aus zwey Rhomboedern, einem hexagonalem Prisma und zwey Skalenoedern gebildete rhomboedrische Combination dar. Die beyden Skalenoeder r und y gehören zu dem Rhomboeder P, da ihre Mittelkanten den gleichnamigen Kanten dieses Rhomboeders parallel laufen; ihre Zeichen sind daher für $P = R$ von der Form Rn, und leicht zu bestimmen, sobald nur das Rhomboeder m bekannt ist. Gesetzt, man hätte sich mittels einer Messung überzeugt, dass

$$m = 4R$$

so gilt für das Skalenoeder $r =$ Rn die Regel no. 4. §. 294, da seine längeren Polkanten von dem Rhomboeder 4R so abgestumpft werden, dass die Combinationskanten seinen kürzeren Polkanten parallel laufen; folglich ist

$$4 = \frac{3n - 1}{2}$$

$$n = 3 \text{ und } r = R3$$

Für das Skalenoeder $y = Rn$ gilt dagegen die Regel no. 3. a. a. O., da das Rhomboeder 4R seine längeren Polkanten regelmässig abstumpft, weshalb

$$4 = \frac{3n + 1}{4}$$

$$n = 5 \text{ und } y = R5$$

Das Prisma *c* endlich ist das Prisma der Hauptreihe, also ∞R, da seine Flächen mit denen des Rhomboeders 4R horizontale Combinationskanten hervorbringen. Somit wären sämmtliche in der gegebenen Combination enthaltene Gestalten bestimmt, und die Combination selbst folgenderweise zu bezeichnen:

R5. R3. R. ∞R. 4R.

Tab. I

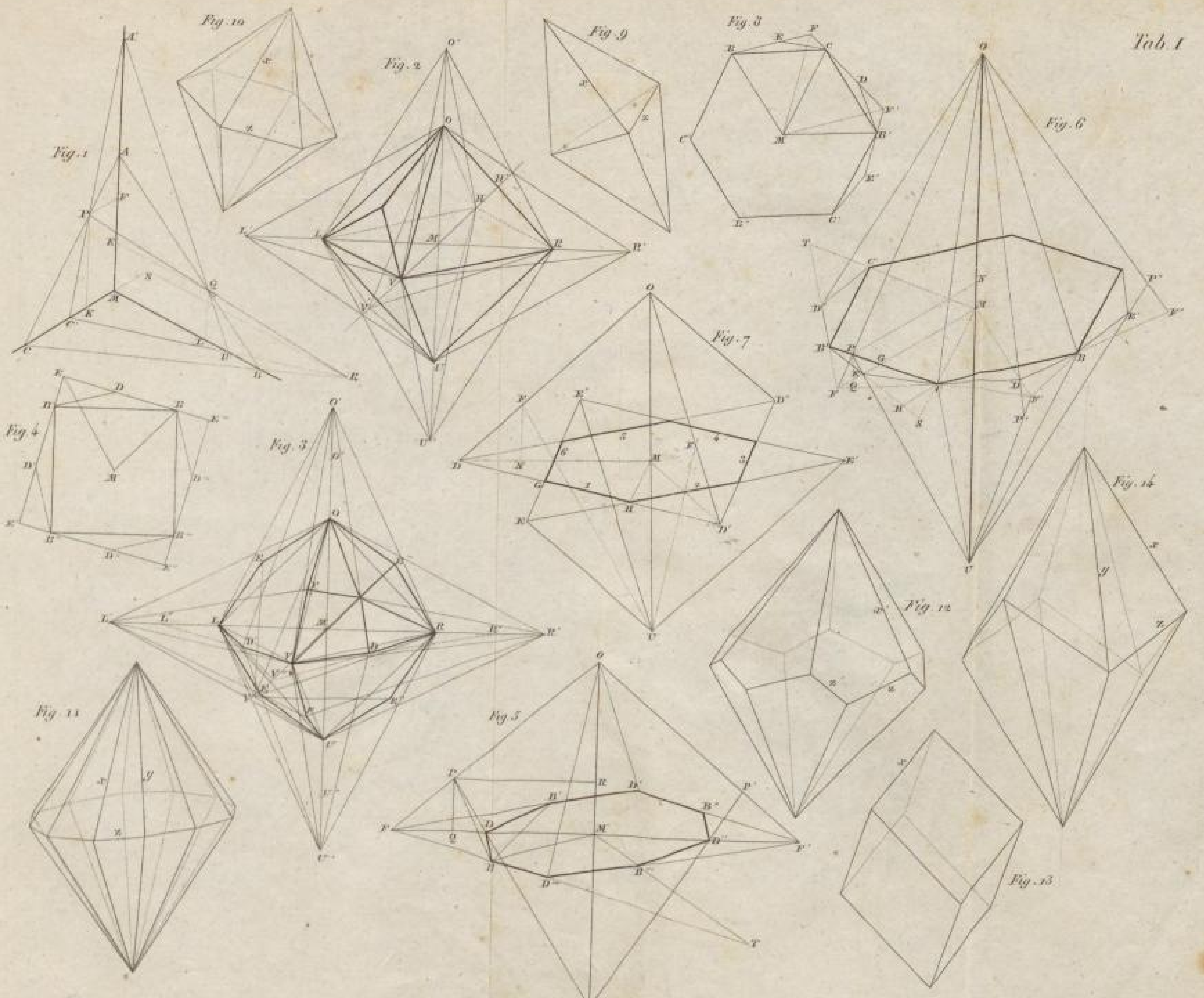
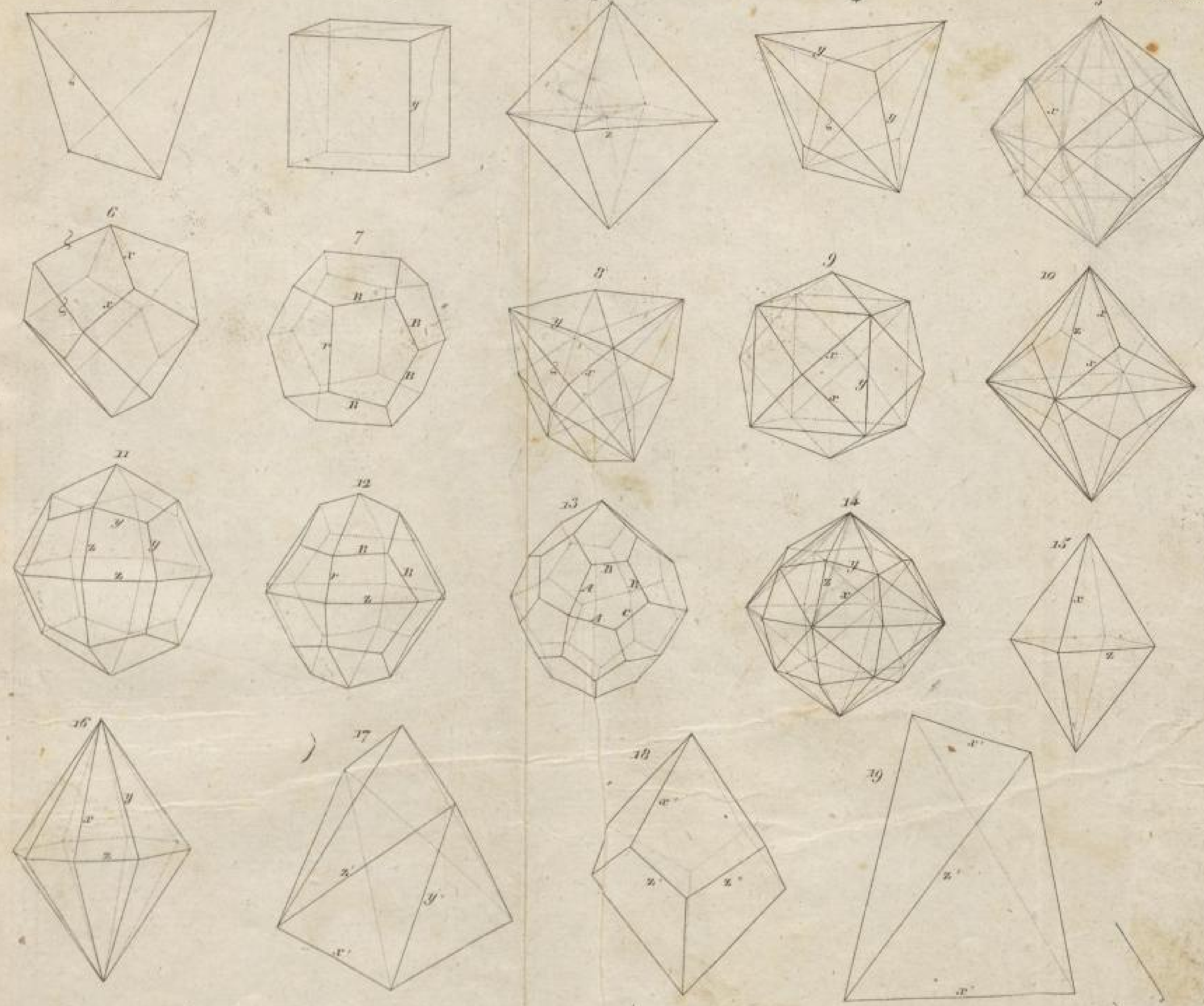


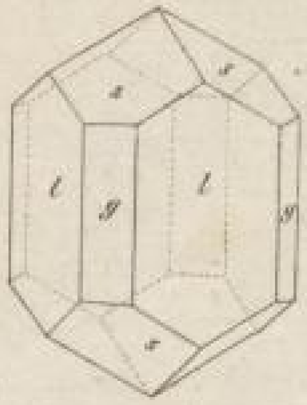
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14

Tab. II

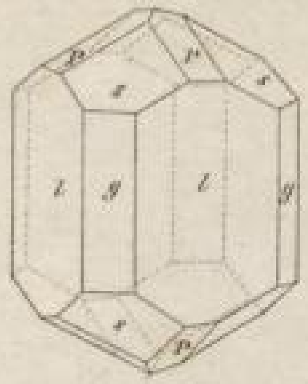


Tab. III

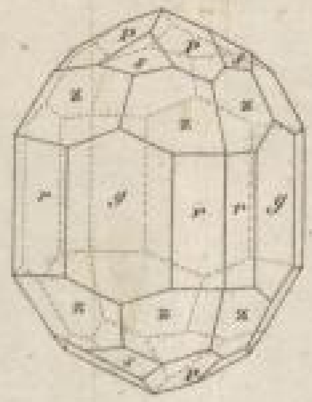
Fig. 1



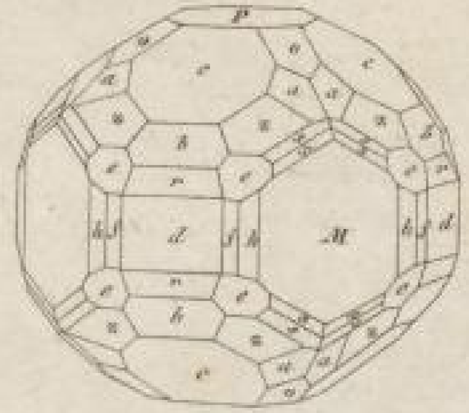
2



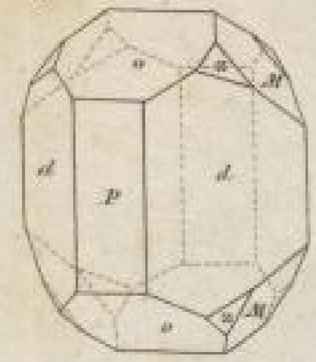
3



4



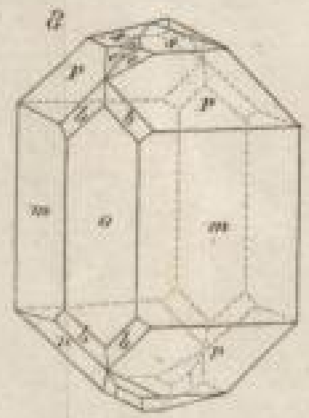
5



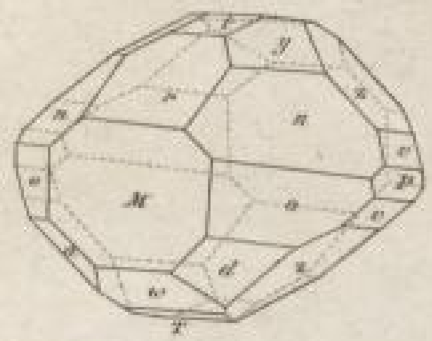
6

7

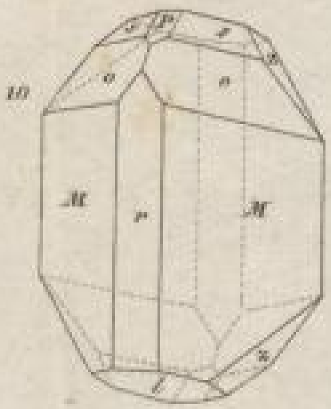
8



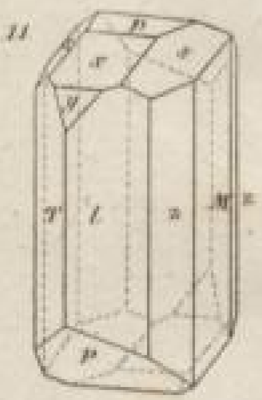
9



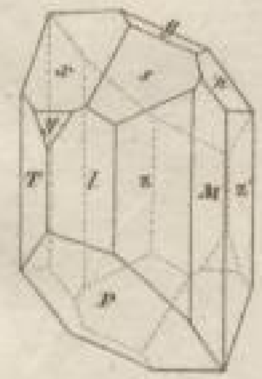
10



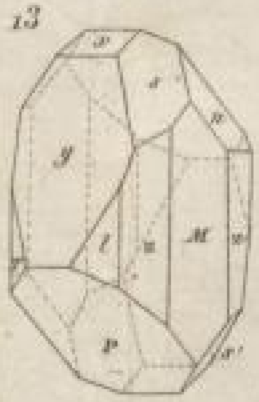
11



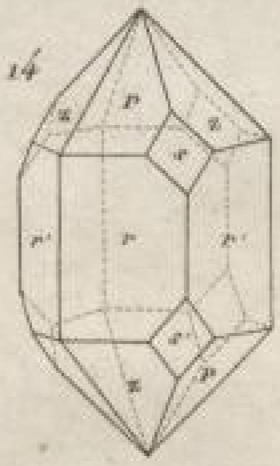
12



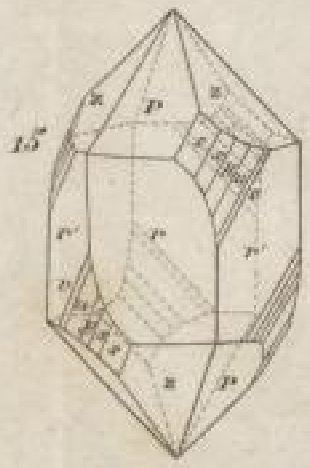
13



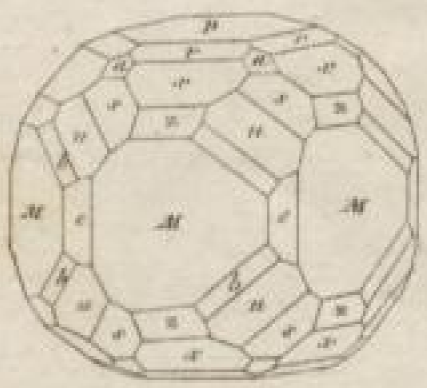
14



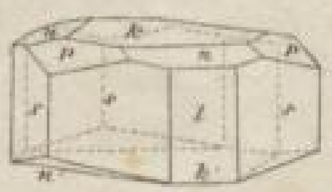
15



16

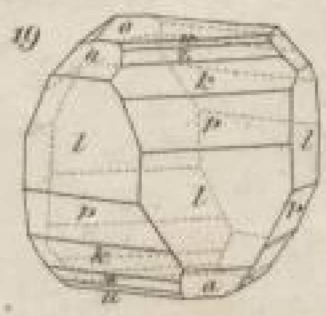


17

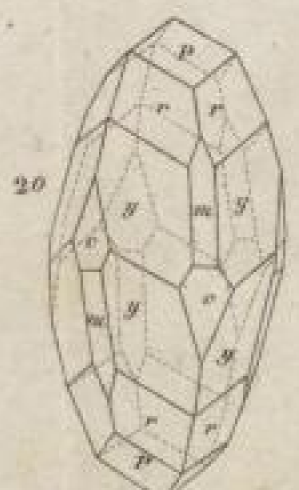


18

19



20



3 15
1 17
13
11
9 26