Gert. Fr. Pilz

Dritter Abschnitt.

Algebra (Lehre von den Gleichungen, Progressionen, pp:) oder Regeln für die Auflösung ~~gemachter~~ gegebener Zahlenverbindungen.

Erstes Capitel.

Von den Gleichungen.

A,

Von den Gleichungen im Allgemeinen.

§. 92.

Verschiedene Arten der Gleichungen.

Erklaerung 1. Zwey durch das Gleichheitszeichen mit einander verbundene Formeln (vergl: §. 18.) nennt man eine <u>Gleichung</u> und unterscheidet solche:
1, in <u>analytische</u> oder <u>identische</u>, wenn die eine Formel durch Umformung der andern entwickelt werden kann, d.h: in welchen die Gleichheit beyder Theile lediglich durch Erklärung der Zeichen und der bezeichneten Begriffe entweder unmittelbar oder durch eine Folge von Schlüssen dargelegt werden kann; wo sich also alle Umformungen, welche nöthig sind, um der einen Seite die Form der andern Seite der Gleichung zu geben, blos aus der Erklärung der Zeichen und der bezeichneten Begriffe herleiten lassen, und beyde Theile einander gleich bleiben, man mag den dazu gebrauchten Zeichen (oder Buchstaben) einen Werth beylegen, welchen man will, nur muß man den für ein solches Zeichen einmal angenommenen Werth durchgängig beybehalten.
2, in <u>algebraische</u> oder <u>Bestimmungsgleichungen</u>, wenn dieß nicht der Fall ist, sondern beyde Formeln nur in so ferne zusammenhängen, als sie dieselben unbekannten Größen enthalten, welche sich aus den mit ihnen verbundenen bekannten Größen bestimmen lassen.

Anm: Letztere sind es, von denen hier die Rede ist, und es gehören hieher natürl: auch die Proportionen, wie schon daraus einleuchtet, daß auch bey ihnen 2 Formeln, nehml: 2 gleich große Differenzen oder 2 gleich große Quotienten einander gleich gesetzt werden.

Erklaerung 2. Die beyden Formeln, welche eine Gleichung bilden, heißen

 oder Theile
die Seiten der Gleichung, und die einzelnen Theile derselben, welche durch die Zeichen der Addition (+) und der Subtraction (−) unter sich verbunden sind, werden die Glieder der Gleichung genennt.

Die unbekannten Größen der Gleichungen werden gewöhnl. mit den letzten Buchstaben (u, v, w, x, y, z), die bekannten Größen aber entweder durch die Anfangsbuchstaben (a, b, c, d, ...) des Alphabeths, oder ~~durch~~ mit Ziffern und Zahlen bezeichnet. Man unterscheidet hiernach die Gleichung in:

1.) Buchstaben- oder allgemeine Gleichungen, in welchen man die unbekannten Größen nur durch die als bekannt angenommenen Größen a, b, c, ... mittelst Formeln zu bestimmen vermag, und

2.) Zahlen-Gleichungen, in denen sich die unbekannten Größen durch Zahlen, also bestimmt angeben lassen.

Anmerkung. Die Auflösung der ersteren, von denen hier zunächst die ~~Rede~~ seyn soll, giebt zugl. die nöthige Anweisung zu Auflösung der Zahlengleichungen, deren richtige Lösung sich dadurch sich prüfen lässt, daß sich aus einer Buchstabengleichung von gleicher Form mit einer Zahlengleichung der Werth der unbekannten Größe als derselbe ergiebt, wenn man in der für die unbekannte Größe entwickelten ~~Zahlen~~ Formel für alle als bekannt angenommene Größen a, b, c, ... die in der Zahlengleichung gegebenen correspondirenden Zahlen in Rechnung bringt.

Erklaerung 3. Die algebraischen Gleichungen unterscheidet man nach:

1.) nach der Zahl der zu bestimmenden unbekannten Größen in:

a.) Gleichungen mit 1. unbekannten Größe ~~und~~ oder einfache Gleichungen und

b.) " " mit 2. oder mehr unbekannten Größen, durch ~~verwickelte Gleichungen~~, und ~~diese~~ letztere nennt man wieder:

α.) bestimmte Gleichungen, in welchen sich der Werth der gesuchten Größen bestimmt und genau angeben lässt, welches nur dann möglich ist, wenn eben so viel algebraische Gleichungen, welche dieselben unbekannten Größen enthalten, aber nicht† aus ~~einer~~ der andern gegebenen Gleichungen abgeleitet werden können, gegeben sind, als unbekannte Größen in der Auf-

† ähnliche oder identische Gleichungen sind, und auch nicht

gabe enthalten sind, und

c, unbestimmte Gleichungen, aus denen der Werth der unbekannten Grössen nur bedingungsweise bestimmt und genau angegeben werden kann, welches denn nicht anders möglich ist, wenn eine oder mehrere Gleichungen weniger gegeben sind, als die Aufgabe unbekannte Grössen enthält. Ferner giebt es und nennt man ~~die~~ Gleichungen, welche Auflösungen geben, die einen Widerspruch enthalten, widersprechende/unmögliche endlich heissen, z. B. wenn man bey der Auflösung auf die Gleichung $7x =$ ~~...~~ kommt, oder wenn man zur Auflösung einen negativen Werth, oder einen Bruch etc. erhält, wo die Bedingungen der Aufgabe nur einen positiven Werth, oder nur eine ganze Zahl etc. gestattet.

2, nach der Potenz, zu welcher die unbekannte Grössen $x, y,$ etc. erhoben sind, in:

a, Gleichungen vom ersten Grade, wenn $x, y,$ etc. nicht potenzirt ist,

b, " vom 2ten Grade, quadratische Gleichungen, wenn $x, y,$ etc. zur 2ten Potenz,

c, Gleichungen vom 3ten Grade, cubische Gleichungen, wenn $x, y,$ etc. zur 3ten Potenz, und

d, Gleichungen vom 4ten, 5ten, ... nten Grade, höhere Gleichungen, wenn $x, y,$ etc. zur 4ten, 5ten, ... nten Potenz in der Aufgabe erhoben sind, oder in Folge der Auflösung zu dieser Potenz erhoben werden müssen.

Die quadratischen, cubischen und höheren Gleichungen endlich unterscheidet man wieder in:

α, ~~...~~ reine, wenn die unbekannte Grösse nur in einer einzigen Potenz (x^2 oder x^3 oder x^4 etc. oder x^n) vorkommt, und zwar: reine quadratische: $x^2 = a$, reine cubische: $x^3 = a^2 + b$, reine höhere $x^n = \frac{a+mb}{c}$, etc. und:

β, ~~...~~ gemischte oder unreine, wenn die unbekannten Grössen in zwey oder mehreren verschiedenen Potenzen vorkommen, z. B.:

$x^2 \pm ax = b$ ist eine unreine quadratische, $x^3 \pm ax^2 \pm bx = c$ oder $x^3 \pm ax = c$ sind unreine cubische und $x^n \pm ax^{n-1} \pm bx^{n-2} \pm \ldots\ldots = p$. ist eine unreine höhere Gleichung vom nten Grade, und man nennt letztere wieder: 1, geordnet, wenn die Exponenten der gesuchten Grösse in ihrer natürlichen Ordnung vom höchsten an auf einander folgen; endlich nennt man: 2, vollständig, wenn keiner dieser Exponenten vom höchsten an bis auf 0 herab fehlt, und 3, unvollständig, wenn einer oder mehrere dieser Exponenten fehlen.

d, Exponential-Gleichungen solche Gleichungen, in denen die unbekannte Grösse als Exponent einer bekannten oder unbekannten Grösse er-

Erklärung 4. ~~Zusatz~~. Wird eine Gleichung nach den im folgenden § [§ 98.] gegebenen Regeln so umgeändert, daß † [kommt, zB: $a^x = b + c$, $y^x = \frac{a-d}{b}$, etc:]

† die eine Seite derselben $= 0$ ist, so sagt man: man habe die Gleichung nullisirt, und nennt eine solche Gleichung dann eine nullisirte Gleichung. (die nullisirte)

Allgemeine Regeln zur Berechnung aller Gleichungen.

Erklaerung. Zu Bestimmung des Werthes einer unbekannten Größe durch Gleichungen sind zweyerley Operationen erforderlich:

1, die Formation oder der Ansatz der Gleichungen, nehmlich: aus den in Worten ausgedrückten Aufgaben, welche die Bedingungen oder Beziehungen der bekannten und unbekannten Größen oder Zahlen zu einander angeben, eine oder mehrere Gleichungen bilden, dieß heißt: die Gleichungen ansetzen oder formiren. Es lassen sich aber hierzu [außer dem Lehrsatz § 8. und § 93.] ~~keine~~ bestimmten Regeln geben, sondern es gehört dazu sehr oft ein heller, durch fleißige Uebung ausgebildeter Verstand.

2, die Solution oder Auflösung der Gleichungen, d.h. die Bestimmung der in den Gleichungen enthaltenen unbekannten Größen durch alle mit ihnen in Verbindung stehenden bekannte Größen oder Zahlen, wozu folgende Lehrsätze in Anwendung kommen.

Lehrsatz. Um eine Gleichung aufzulösen, wendet man namentlich den 4ten der in § 6. aufgestellten Grundsätze an. Aus diesem Grundsatze, welcher behauptet, daß man gleiche Resultate erhält, wenn man gleiche Dinge auf gleiche Weise verändert, also gleiche Operationen (Rechnungsarten) mit ihnen vornimmt, folgt: daß die Gleichheit zweyer Größen oder Formeln ungestört bleibt,

1, wenn man zu beyden gleiche Größen addirt, also aus: $x - a = b$ oder $x - 4 = 7$. folgt durch Addition der Größe $a\,(=4)$ zu beyden Seiten: $x = b + a$ oder $x = 7 + 4 = 11$.

2, wenn man von beyden gleiche Größen subtrahirt, oder sie beyde von gleichen Größen subtrahirt, also aus: $x + a = b$ oder $x + 5 = 9$ folgt durch Subtraction der Größe $a\,(=5)$ zu beyden Seiten: $x = b - a$ oder $x = 9 - 5 = 4$.

3, wenn man sie beyde mit einerley Größe multiplicirt, also aus:

$\frac{x}{a} = b$ oder $\frac{x}{4} = 24$. folgt, wenn man mit $a (= 4)$ multiplicirt: $x = ab$ oder $x = 4.24 = 96$;

4.) wenn man beyde Formeln durch oder in einerley Größe dividirt, also aus: $ax = b$ oder $6x = 42$ folgt durch Division mit $a (= 6)$, daß $x = \frac{b}{a}$ oder $x = \frac{42}{6} = 7$ ist;

5.) wenn man beyde Seiten der Gleichung zu einerley Potenz erhebt, also aus: $\sqrt[m]{x} = b$ oder $\sqrt[3]{x} = 4$ folgt, wenn man beyde Seiten zur m^{ten} $(= 3^{ten})$ Potenz erhebt: $x = b^m$ oder $x = 4^3 = 64$.

6.) wenn man aus beyden einerley Wurzel auszieht, also aus $x^n = b$, oder $x^4 = 81$ folgt, ~~folgt~~, aus beyden Seiten die n^{te} $(= 4^{te})$ Wurzel ausgezogen: $x = \sqrt[n]{b}$ oder $x = \sqrt[4]{81} = 3$.

7.) wenn man für beyde Seiten der Gleichung die Logarithmen für einerley Grundzahl bestimmt, also aus:

$$a^x = b. \qquad \text{oder} \qquad 2^x = 8.$$

folgt:
$$L a^x = L b. \qquad\qquad L 2^x = L 8.$$
$$x\, L a = L b \qquad\qquad x . L 2 = L 8.$$

also:
$$x = \frac{L b}{L a} \qquad\qquad x = \frac{L 8}{L 2} \text{ z.B.} = \frac{{}^2L 8}{{}^2L 2} = \frac{3}{1} = 3.$$

oder aus:

$$d = \sqrt[x]{a}. \qquad \text{oder} \qquad 2 = \sqrt[x]{16}.$$

folgt:
$$d^x = a. \qquad\qquad 2^x = 16$$
$$x . L d = L a. \qquad\qquad x\, L 2 = L 16$$

also:
$$x = \frac{L a}{L d} \qquad\qquad x = \frac{L 16}{L 2} \text{ z.B.} = \frac{{}^2L 16}{{}^2L 2} = \frac{4}{1} = 4. \text{ (vergl. §. 45)}$$

Man wendet diese 7^{te} ~~Regel~~ Art bei der Veränderung vorzügl: bey sogenannten Exponential-Gleichungen (S. §. 91. Erkl: 3.) zu deren Auflösung an.

Aus den hier aufgestellten 7. Lehrsätzen ergiebt sich ~~der~~ für alle Gleichungen der folgende von Dr. Hutton aufgestellte ~~Lehr~~ allgemeine

Lehrsatz: In jeder Gleichung wird die unbekannte Größe von allen bekannten dadurch befreyet, daß man auf beyden Seiten der Gleichung anstatt der Operationen, welche die Gleichung vorschreibt, die gerade entgegengesetzten Operationen vornimmt.

Dieser Satz umfaßt aber folgende 4. von andern Lehrern aufgestellten speciellen Lehrsaetze:

1., Jedes Glied einer Gleichung läßt sich, ohne dem Werthe der Gleichung zu schaden, dadurch von einer Seite auf die andere bringen, daß man ihm dort das entgegengesetzte Zeichen giebt;

2., Jeder Factor läßt sich als Divisor von einer Seite auf die andere setzen, also wird (nach den Regeln der Multiplication und Division) jeder eigentliche (ganze) Factor diesseits zum Divisor jenseits, und jeder Divisor (gebrochene Factor) diesseits zum Factor jenseits;

3., Ist die unbekannte Größe oder eine Seite der Gleichung zu einer ganzen oder Bruch-Potenz erhoben, so beseitigt man solche, wenn man beyde Seiten der Gleichung zu der dem Exponenten der Potenz vorgeschriebenen Bruchpotenz oder ganzen Potenz erhebt; — ist also ~~die~~ eine Seite potenzirt, so ziehe man aus der andern Seite die gleichhohe Wurzel aus, und ist diesseits die Wurzel auszuziehen, so erhebe man die andere Seite zu einer gleich hohen Potenz; endlich:

4., ist die unbekannte Größe ein Exponent, d. h. hat man eine Exponentialgleichung aufzulösen, so dividire man mit dem Logarithmus derjenigen Zahl, zu welcher ~~der~~ derselbe Exponent gehört, in den Logarithmus der andern Seite der Gleichung, verwandle aber, wenn der Exponent ein ~~gebrochener oder~~ Wurzel-Exponent ist, vorher die ganze Gleichung (nach der: 3ten: Regel) in eine solche Gleichung, in welcher der Exponent auf der andern Seite der Gleichung als Potenz-Exponent erscheint.

~~B. Von den bestimmten Gleichungen.~~

A. Von den ~~bestimmten~~ Gleichungen des ersten Grades.

§. 94.

1., Von den einfachen Gleichungen des ersten Grades. ~~mit 1 unbekannten Größe.~~

Da man eine Gleichung dann erst aufgelößt nennt, wenn auf der einen Seite der Gleichung die unbekannte Größe allein steht, und die an-der Seite der Gleichung nur die als bekannt angenommenen Größen a, b, c, ... oder nur Zahlen enthält; so kommt es blos darauf an, alle Glieder, welche die Unbekannte (x) enthalten auf die eine und alle bekannten Größen auf die andere Seite der Gleichung zu bringen. Hierzu bedarf es nur einer geschickten Anwendung der in §. 92. gegebenen allgemeinen Regeln z.B.:

$$1)\quad ax - b + cx = d - ex + f.$$

giebt:

$$ax + cx + ex = b + d + f$$

$$(a+c+e)x = b+d+f$$

also:

$$x = \frac{b+d+f}{a+c+e}$$

Aus diesen Regeln ergeben sich nun folgende specielle Regeln:

Lehrsatz 1. Enthalten einige oder alle Glieder einer Gleichung Brüche, so multiplicirt man, um diese wegzubringen, zuvörderst alle Glieder der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftl. Vielfachen (kleinsten Generalnenner) dieser Brüche, also bey Bruchgleichungen mit dem Producte aller vorhandenen Nenner, wobey jedoch diejenigen Nenner oder gemeinschaftl. Factoren derselben, welche mehrmals vorkommen, nur einmal anzusetzen sind; z.B.:

$$2)\quad \frac{ax}{b} - \frac{cx}{d} + \frac{fx}{g} = \frac{h}{d} + k \quad (\cdot bdg)$$

$$adgx - bcgx + bdfx = bgh + bdgk$$

$$(adg - bcg + bdf)x = bgh + bdgk$$

also:

$$x = \frac{bgh + bdgk}{adg - bcg + bdf} = \frac{bg(h+dk)}{adg - bcg + bdf}.$$

$$3)\quad \frac{ab}{x} + \frac{cd+ex}{gx} = h \quad (\cdot gx)$$

giebt:

$$abg + cd + ex = ghx$$

$$ex - ghx = -abg - cd$$

$$(e - gh)x = -(abg + cd)$$

also:

$$x = -\frac{abg+cd}{e-gh},$$

$$= \frac{abg+cd}{gh-e}.$$

Lehrsatz 2. Vortheilhaft ist es in diesem Falle oft, besonders dann, wenn die unbekannte Größe im Nenner steht, anstatt x den Werth $1/x$ zu bestimmen, worauf der Werth von x sich dadurch ergiebt, daß man in der Formel für $1/x$ den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler macht, also den Werth $1/x$ umkehrt; z.B.:

$$1)\quad \frac{ab}{x} + \frac{cd+eh}{gx} = h$$

giebt:

$$\frac{abg}{x} + \frac{cd}{x} + \frac{eh}{x} = gh \quad (\cdot g)$$

$$(abg+cd+eh)\tfrac{1}{x} = gh$$

$$\tfrac{1}{x} = \frac{gh}{abg+cd+eh}$$

also: $x = \dfrac{abg+cd+eh}{gh}$.

5.) $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{cx} = \dfrac{d}{e} \quad | \; ce$

giebt: $\dfrac{ace}{x} + \dfrac{be}{x} = cd$

$$(ace + be)\tfrac{1}{x} = cd$$

$$\tfrac{1}{x} = \frac{cd}{ace+be}$$

also: $x = \dfrac{ace+be}{cd} = \dfrac{ac+b}{cd}\cdot e$.

Lehrsatz 3. Kommen in einer Gleichung Parenthesen (in Klammern eingeschlossene Größen) vor, so muß man diese, wenn sie bekannte und unbekannte Größen zugleich enthalten, jedesmal auflösen, z.B.:

6.) $(a+x)b = (c-x)d$

giebt: $ab+bx = cd-dx$

$$bx+dx = cd-ab$$

$$(b+d)x = cd-ab$$

also: $x = \dfrac{cd-ab}{b+d}$

7.) $\dfrac{a+bx}{c+dx} = e$

giebt: $a+bx = (c+dx)e$

$$= ce+dex$$

$$bx-dex = ce-a$$

$$(b-de)x = ce-a$$

also: $x = \dfrac{ce-a}{b-de}$

Lehrsatz 4. Zuweilen ist es vortheilhaft, die Zeichen aller Glieder einer Gleichung umzuändern, indem, wenn 2 Größen einander gleich sind, auch ihre Gegengrößen oder Gegentheile gleich groß sind. Man thut dieß vorzüglich deshalb:

1., um die unbekannte Größe x, mit + bezeichnet, auf die linke Seite der Gleichung zu bringen, oder

2., wenn sich die unbekannte Größe x mit − bezeichnet auf der linken Seite ergiebt, oder

3., um die Formel ~~für~~ x, wenn solche sich als ein Quotient ergiebt, dessen Zähler und Nenner Differenzen sind, in einen positiven Werth dann umzuwandeln, wenn die Minuenden dieser Differenzen ~~größer~~ kleiner sind, als die Subtrahenden derselben; z.B.:

8.) $-ax + b = \frac{cx}{d} - x$

gibt: $-adx + bd = cx - dx$

$adx + cx - dx = bd$

$(ad + c - d)x = bd$

also: $x = \frac{bd}{ad + c - d}$

9.) $b - ax = cx + ex - g$

gibt: $ax + cx + ex = b + g$

$(a + c + e)x = b + g$

also: $x = \frac{b+g}{a+c+e}$.

10.) die Formel $x = \frac{ce - a}{b - de}$ im Beyspiel No. 7.

ist auch: $x = \frac{a - ce}{de - b}$ für $a > ce$ und $de > b$,

und ergiebt sich, wenn man Zähler und Nenner mit -1. multiplicirt, weil $\frac{+m}{+n}$ auch $= \frac{+m}{+n} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{-m}{-n}$ ist.

Lehrsatz 5. Steht die unbekannte Größe unterm Wurzelzeichen, so muß man sie von diesen dadurch befreyen, daß man zuvörderst die außer dem Wurzelzeichen stehenden Größen auf die andere Seite bringt, und dann beyde Seiten der Gleichung zu der Potenz erhebt, welche der höchste Wurzelexponent vorschreibt, wiewohl man dadurch in den meisten Fällen eine höhere Gleichung erhält; z.B.:

11.) $\sqrt[3]{x - a} = b$

gibt: $x - a = b^3$

also: $x = b^3 + a$

12.) $a + \sqrt[m]{x + b} = c$

gibt: $\sqrt[m]{x + b} = c - a$

$x + b = (c - a)^m$

also: $x = (c - a)^m - b$

13.) $\sqrt[m]{a + x} = \sqrt[2m]{x^2 + ax + b^2}$

gibt: $(a + x)^2 = x^2 + ax + b^2$

$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + ax + b^2$

$ax + a^2 = b^2$

$ax = b^2 - a^2$

also: $x = \frac{b^2 - a^2}{a}$

$= \frac{b^2}{a} - a$.

14.) $b + \sqrt{x - a} = \sqrt{cx - ac}$

$= \sqrt{c(x - a)}$

gibt: $\frac{b}{\sqrt{x - a}} + 1 = \sqrt{c}$

$\frac{b}{\sqrt{x - a}} = \sqrt{c} - 1$

$\frac{\sqrt{x - a}}{b} = \frac{1}{\sqrt{c} - 1}$

$\frac{x - a}{b^2} = \frac{1}{(\sqrt{c} - 1)^2}$

$= \frac{1}{c - 2\sqrt{c} + 1}$

$x - a = \frac{b^2}{c - 2\sqrt{c} + 1}$

also $x = a + \frac{b^2}{c - 2\sqrt{c} + 1}$

$= a + \left(\frac{b}{\sqrt{c} - 1}\right)^2$

NB. Siehe Zus: p. 234

Lehrsatz 6. Sind 2 Brüche einander gleichgesetzt, so daß die unbekannte Größe sowohl im Zähler, als auch im Nenner des einen dieser Brüche oder beyder Brüche steht, so löset man eine solche Gleichung am kürzesten dadurch, daß man den Zähler ungeändert beybehält, und unter jeden Bruch die Summe oder Differenz ~~des~~ seines Zählers und Nenners schreibt; z.B.:

$$15,\quad \frac{bx}{a-bx} = \frac{c}{d}$$

$$\text{giebt:}\quad \frac{bx}{a-bx+bx} = \frac{c}{d+c}$$

$$\frac{bx}{a} = \frac{c}{c+d}$$

$$bx = \frac{ac}{c+d}$$

$$\text{also:}\quad x = \frac{ac}{b(c+d)}$$

Bisweilen muß man aber, um in dem Bruche, welcher die gesuchte Größe enthält, den Zähler zum Nenner addiren oder davon subtrahiren zu können, die ganze Gleichung vorher mit der Größe multipliciren, die im Nenner als Factor oder Coefficient neben der gesuchten Größe steht; z.B.:

$$16,\quad \frac{x}{a+(b-c)x} = \frac{d+g}{(b-c)e} \qquad \cdot(b-c$$

$$\text{giebt:}\quad \frac{(b-c)x}{a+(b-c)x} = \frac{(b-c)(d+g)}{(b-c)e} = \frac{d+g}{e}$$

$$\frac{(b-c)x}{a+(b-c)x-(b-c)x} = \frac{d+g}{e-(d+g)}$$

$$\frac{(b-c)x}{a} = \frac{d+g}{e-(d+g)}$$

$$\text{also:}\quad x = \frac{a(d+g)}{(b-c)(e-d-g)}$$

Anmerkung. Der Beweis dieses Lehrsatzes beruht ebenfalls auf dem ganz allgemeinen Grundsatze, daß eine Gleichheit zweyer Größen nicht gestört wird, wenn man auf beyden Seiten der Gleichung einerley Operation vornimmt. Man hat also,

$$\text{wenn}\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ \text{ist,}$$

$$\text{auch:}\quad \frac{a}{a\pm b} = \frac{c}{c\pm d}, \qquad \text{(vergl: §. 48. Lehrs: 8.)}$$

$$\text{auch:}\quad \frac{a}{b\pm a} = \frac{c}{d\pm c},$$

§. 96.

2, Von den gemischten oder unreinen quadratischen Gleichungen.

Lehrsatz 1. Jede gemischte quadratische Gleichung hat die allgemeine Form: $x^2+bx=q$ oder $x^2+bx-q=0$, oder sie läßt sich, wenn das Quadrat der unbekannten Größe einen Coefficienten a enthält, die Gleichung also in der Form $ax^2+bx=q$ oder $ax^2+bx-q=0$ erscheint, (nach §. 92.) dadurch in diese allgemeine Form bringen, daß man die ganze Gleichung mit dem Coefficienten a dividirt.

Erklaerung. Eine ~~quadratische~~ Gleichung von der Form $x^2+bx-q=0$ oder $ax^2+bx-q=0$ nennt man eine annullirte oder annullisirte Gleichung und versteht darunter eine Gleichung, bey welcher alle Glieder auf eine Seite gebracht sind, so daß die eine Seite der Gleichung sich $=0$ ergiebt.

Aufgabe 1. Um eine unreine quadratische Gleichung von der Form $x^2+bx=q$ aufzulösen, macht man gewöhnlich das Binomium auf der linken Seite zu einem Quadrat, indem man die Größe $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$ dazu setzt, und, um den Werth der Gleichung nicht zu ändern, dieselbe auch auf der andern Seite thut, dann zieht man ~~aber~~ auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus; ~~und bringt endlich die~~ man erhält dadurch auf der linken Seite ein Binomium, das aus der unbekannten Größe x und der Quadratwurzel von $\frac{b^2}{4}$ $\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}}=\frac{b}{2}\right)$ besteht; bringt man die letzte Größe $\left(\frac{b}{2}\right)$ noch auf die andern Seite, so hat man den Werth von x, d.h. die gesuchte Wurzel der Gleichung gefunden. Also aus

$$x^2+bx=q$$

folgt: $$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=q+\frac{b^2}{4}$$

d. i. $$\left(x+b/2\right)^2=q+\frac{b^2}{4}$$

$$x+b/2=\pm\sqrt{q+\frac{b^2}{4}}$$

also: 1.) $$x=-b/2\pm\sqrt{q+\frac{b^2}{4}} \text{ oder } =-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{4q+b^2}{4}}$$
$$=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4q+b^2}$$

also: 2.) $$x=\frac{-b\pm\sqrt{4q+b^2}}{2},$$

so man den ersten oder zweyten Werth von x anwendet, je nachdem der Coefficient b in der gegebenen Gleichung eine gerade oder ungerade Zahl ist.

~~Lehrs: 1.~~

Jede höhere Gleichung kann in die Form $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots = Q$, erscheinen, weil aber der Werth der Gleichung ungeändert bleibt, wenn man beyde Seiten derselben mit einerley Größe (hier mit A) dividirt, so die Form $x^n + \frac{B}{A}x^{n-1} + \frac{C}{A}x^{n-2} + \dots = \frac{Q}{A}$ gebracht, oder setzt man $\frac{B}{A} = a$, $\frac{C}{A} = b$, etc. $\frac{Q}{A} = q$ setzt, die allgemeine Form: $x^n + ax^{n-1} + \dots = q$ (vergl. §. 91. Zus. 4)

oder annullirt (vergl. §. 91. Zus. 4) die allg. Form $x^n + ax^{n-1} + \dots - q = 0$.

Würden in dieser allgemeinen Form die Coeff. a, b, c etc. der Producte $ax^{n-1}, bx^{n-2}, cx^{n-2}, \dots =$ 0, so erhält diese Gleichung die Form $x^n = q$ oder annullirt $x^n - q = 0$, welches die allgemeine Form aller reinen höheren Gleichungen ist.

~~Wird nach~~ Zus:

~~Jede höhere Gleichung enthält ... annullirte Gleichung~~

Erklaerung. Jeder Werth, welcher für x ~~bey Auflösung einer~~ ~~angesetzt, der Gleichung Genüge leisten~~ so beschaffen ist, daß er an die Stelle von x in die Gleichung gesetzt, derselben Genüge leistet, wird eine Wurzel der Gleichung genennt. Sind diese Werthe $= a, b, c, d$, so nennt man die Gleichungen $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. die der Gleichung zugehörigen Wurzelgleichungen,

und " " $x - a = 0$, $x - b = 0$ etc. " " " " annullirt. " " .

$$\text{auch: } \frac{a-b}{a\pm b} = \frac{c-d}{c\pm d},$$

$$\text{auch: } \frac{ma\pm nb}{ma\mp nb} = \frac{mc\pm nd}{mc\mp nd},$$ denn es folgt zb: aus dieser letzten Gleichung:

$$(ma\pm nb)(mc\mp nd) = (ma\mp nb)(mc\pm nd)$$

$$\text{d.i.: } m^2ac \pm mnbc \mp mnad - n^2bd = m^2ac \mp mnbc \pm mnad - n^2bd \qquad \text{N. 3}$$

$$\text{oder: } \pm mnbc \mp mnad = \mp mnbc \pm mnad$$

$$\text{d.i.: } 0 = 0, \text{ weil aus } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ folgt: } ad = bc.$$

Lehrsatz 7. Sehr oft läßt sich die Auflösung einer Gleichung dadurch bedeutend abkürzen, daß man während der Auflösung anstatt der enthaltenen, mehrmals vorkommenden bekannten Summen, Differenzen, Producte, Quotienten oder Wurzelgrößen ~~eine~~ einfache Größen substituirt, und mit diesen die Rechnung so lange fortsetzt, bis man eine Formel für x gefunden hat, welche natürlich diese substituirten ~~..~~ Größen mit enthält, ~~dann~~ endlich ~~bringt~~ aber ~~man~~ in dieser Formel‡ statt der substituirten Größen die Summen, Differenzen, etc. wieder in Rechnung bringt, welche ~~dieselben~~ substituirten Größen ~~bezeichnen~~; zb:

‡ oder auch noch während der Auflösung in die letzte Gleichung

$$17.)\quad \frac{bx}{2b-a} - \frac{3bc+ad}{2ab(a+b)}x - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)} - \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$$

$$\text{giebt: } \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2} - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)} + \frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)} - \frac{bx}{2b-a}$$

$$5a\left(\frac{2b-a}{a^2-b^2} - \frac{b}{3c-d}\right) = \left[\frac{1}{2ab}\left(\frac{3bc-ad}{a-b} + \frac{3bc+ad}{a+b}\right) - \frac{b}{2b-a}\right]\cdot x,$$

oder: $3bc = A$ und $ad = B$ gesetzt,

$$= \left[\frac{1}{2ab}\cdot\left(\frac{A-B}{a-b} + \frac{A+B}{a+b}\right) - \frac{b}{2b-a}\right]\cdot x,$$

$$= \left(\frac{1}{2ab}\cdot\frac{Aa+Ab-aB-bB+Aa-Ab+aB-bB}{a^2-b^2} - \frac{b}{2b-a}\right)\cdot x;$$

$$= \left(\frac{1}{2ab}\cdot\frac{2Aa-2Bb}{a^2-b^2} - \frac{b}{2b-a}\right)\cdot x,$$

$$= \left(\frac{1}{ab}\cdot\frac{Aa-Bb}{a^2-b^2} - \frac{b}{2b-a}\right)\cdot x,$$

oder wieder: $A = 3bc$ und $B = ad$ gesetzt,

$$= \left(\frac{1}{ab}\cdot\frac{3abc-abd}{a^2-b^2} - \frac{b}{2b-a}\right)\cdot x,$$

$$= \left(\frac{3c-d}{a^2-b^2} - \frac{b}{2b-a}\right)\cdot x.$$

Wird nun //

in dieser Gleichung $2b-a=C$, und $a^2-b^2=D$, auch $3c-d=E$ gesetzt, so ist: $\left(\frac{C}{D}-\frac{b}{C}\right)\cdot x = 5a\left(\frac{C}{D}-\frac{b}{C}\right)$

also: $x = 5a\cdot\frac{C/D - b/C}{E/D - b/C} = 5a\cdot\frac{\frac{CE-bD}{DE}}{\frac{CE-bD}{CD}}$

$= 5a\cdot\frac{(CE-bD)\cdot CD}{DE(CE-bD)} = 5a\cdot\frac{C}{E}$,

und für C und E ihre vorige Werthe wieder eingesetzt,

also: $x = 5a\cdot\frac{2b-a}{3c-d}$.

Zusatz. Öfters sind gegebene Gleichungen nur scheinbar höher, denn wenn man sie gehörig umformt, verschwinden die Potenzen von x, z.B.:

18, $(a+x)(b+x) = c+x^2$

giebt: $x^2+ax+bx+ab = x^2+c$

$ax+bx+ab = c$

$(a+b)x = c-ab$

also: $x = \frac{c-ab}{a+b}$

19, $\frac{ax^3}{b+cx} = dx^2$

giebt: $\frac{ax}{b+cx} = d$

$ax = (b+cx)d$

$ax = bd+cdx$

$ax-cdx = bd$

$(a-cd)x = bd$

also: $x = \frac{bd}{a-cd}$

20, $\frac{(x+a)^2}{x-b} = \frac{c}{d}+x \quad (x-b)d$

giebt: $(x+a)^2 d = c(x-b)+d(x-b)x$

$dx^2+2adx+a^2d = cx-bc+dx^2-bdx$

$2adx+a^2d = cx-bc-bdx$

$2adx+bdx-cx = -a^2d-bc$

$(c-2ad-bd)x = a^2d+bc$

also: $x = \frac{a^2d+bc}{c-2ad-bd}$

$= \frac{a^2d+bc}{c-(2a+b)d}$

21, $a+x = \sqrt{a^2+x\sqrt{4b^2+x^2}}$

giebt: $(a+x)^2 = a^2+x\sqrt{4b^2+x^2}$

$a^2+2ax+x^2 = a^2+x\sqrt{4b^2+x^2}$

$2ax+x^2 = x\sqrt{4b^2+x^2}$

$x)\ \ 2a+x = \sqrt{4b^2+x^2}$

$(2a+x)^2 = 4b^2+x^2$

$4a^2+4ax+x^2 = 4b^2+x^2$

$4a^2+4ax = 4b^2$

$4)\ \ a^2+ax = b^2$

$ax = b^2-a^2$

also: $x = \frac{b^2-a^2}{a}$

$= \frac{b^2}{a}-a$.

22, $ac-\frac{ax}{d} = -\frac{a(d^2+x^2)}{dx} \quad dx$

giebt: $acdx-ax^2 = -ad^2-ax^2$

$acdx = -ad^2$

$ad)\ \ cx = -d$

also: $x = -\frac{d}{c}$.

Lehrsatz 8. Ist eine Aufgabe, aus der sich eine Gleichung formiren läßt, in Worten gegeben und von einer solchen Form, daß die unbekannte, also gesuchte Größe ein oder mehreremale mit andern bekannten Größen dividirt werden muß, dann thut man oft, diese Divisoren sogleich bey Formation der Gleichung dadurch zu berücksichtigen, daß man die gesuchte Größe nicht blos mit x bezeichnet, sondern einem Producte gleichsetzt, welches eine gesuchte Größe x und die bekannten Divisoren zu Factoren hat, (denn man gelangt dadurch viel einfacher zu dem gesuchten Resultat;) z.B: bey der Frage:

23, Es kaufte jemand ein Pferd ~~für a rh~~ und bezahlte darauf den m^{ten}, n^{ten}: und p^{ten}: Theil des Kaufpreises mit a rh:; wie theuer war das Pferd? und wie viel blieb er noch darauf schuldig?

Setze man den Preis des Pferdes

$$= m.n.p.x$$

also: $\frac{mnpx}{m} + \frac{mnpx}{n} + \frac{mnpx}{p} = a$ rh:

$$npx + mpx + mnx = \cancel{mnp}a$$

$$(np + mp + mn)\,x = a$$

also ist: $x = \frac{a}{np+mp+mn}$ rh:

und:

$mnpx = \frac{mnp.a}{np+mp+mn}$ rh: der Preis des Pferdes

~~$mnpx - a =$~~ ingl: $\frac{mnp.a}{np+mp+mn} - a$ rh: die Summe, die er darauf schuldig blieb.

anstatt: $= x$

" $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} = a$ rh: $(mnp.$

$$npx + mpx + mnx = mnpa$$

$$(np + mp + mn)\,x = mnp.a$$

also ist $x = \frac{mnp\,a}{np+mp+mn}$ rh: der Preis des Pferdes

Zusatz. Der Vortheil dieses Satzes fällt erst bey Zahlengleichungen in die Augen, denn man vermeidet dadurch die Brüche, und man ~~kann~~ wird sich bey diesen die Rechnung noch mehr erleichtern und abkürzen, wenn man die gesuchte Größe einem Producte gleich setzt, welches ~~eine~~ die gesuchte Größe x und das kleinste gemeinschaftl: Vielfache (den Generalnenner, vergl: §. 56. Zus: 2. ff) der gegebenen Divisoren zu Factoren hat; z.B:

24, Ist in vor: Aufgabe: $m = 3$, $n = 5$, ~~und~~ $p = 7$, und $a = 142$ rh so setze man den Preis des Pferdes $= 3.5.7.x = 105.x$ anstatt $= x$, also:

$35x + 21x + 15x = 142$ rh: anstatt $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 142$ rh. (105

$71x = 142$. $\qquad 35x + 21x + 15x = 14910$.

also: $x = \frac{142}{71} = 2$ rh. $\qquad 71x = 14910$

und $105x = 105.2 = 210$ rh: $\qquad$ also: $x = \frac{14910}{71} = 210$ rh:

der Preis des Pferdes, und

$210 - 142 = 68$ rh: der verbleibende Rest.

25, Ist dagegen in voriger Aufgabe: $m=3$, $n=6$, $p=9$ und $a=165$ rh. so setze man den Preis des Pferdes (weil 3, 6 u: 9 in der Zahl 18 ohne Rest aufgehen)

$= 18x$. $\qquad$ anstatt $= x$, also:

$6x + 3x + 2x = 165$ rh. $\qquad \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{9} = 165$ rh. (18

$11x = 165$ $\qquad 6x + 3x + 2x = 2970$

also: $x = \frac{165}{11} = 15$ rh. $\qquad 11x = 2970$

und $18x = 18.15 = 270$ rh: $\qquad$ also $x = \frac{2970}{11} = 270$ rh:

der Preis des Pferdes, und

$270 - 165 = 105$ rh: der verbleibende Rest.

Beyspiele ad §. 94.

M.H.N.1. 26, $ax \pm b = c$

giebt: $ax = c \mp b$

also: $x = \frac{c \mp b}{a}$

27, $ax + c = bx + d$

N. 20 giebt $ax - bx = d - c$

$(a-b)x = d - c$

also: $x = \frac{d-c}{a-b}$

28, $ax - c + bx = d - g$

$(a+b)x = d - g + c$

also: $x = \frac{c+d-g}{a+b}$.

29, $\frac{f^2x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)x$ $\quad$ (cfg

N. 22 $f^3x - a^2cg + c^2fgx = cfhx - c^2fg + acfgx + c^2fgx$

$f^3x - a^2cg = cfhx - c^2fg + acfgx$

$f^3x - cfhx - acfgx = a^2cg - c^2fg$

$(f^2 - ch - acg)fx = (a^2 - cf)cg$

also: $x = \frac{(a^2 - cf)cg}{(f^2 - ch - acg)f}$.

30, $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$ $\quad$ (de

N. 21 $dex = ade + bce + cfx$

$dex - cfx = (ad + bc)e$

$(de - cf)x = (ad + bc)e$

also: $x = \frac{(ad + bc)e}{de - cf}$.

N.22. 117.

31,) $\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f}-g=h$ $\quad bdf.$

$adfx+bcfx+bdex-bdfg=bdfh$

$(adf+bcf+bde)x=bdf(g+h)$

also: $x=\frac{bdf(g+h)}{adf+b(cf+de)}$

N.25.

32,) $\frac{ace}{d}-\frac{(a+b)^2x}{a}-bx=ac-3bx$ $\quad ad$

$a^2ce-(a+b)^2dx-abdx=a^2cd-3abdx$

$a^2ce-(a+b)^2dx=a^2cd-2abdx$

$2abdx-(a+b)^2dx=a^2cd-a^2ce$

$((a+b)^2-2ab)dx=a^2ce-a^2cd$

$(a^2+2ab+b^2-2ab)dx=a^2e(c-d)$

$(a^2+b^2)dx=a^2e(c-d)$

also: $x=\frac{a^2e(c-d)}{(a^2+b^2)d}$

N.29.

33,) $\frac{ab}{x}=bc+d+\frac{e}{x}$

giebt: $\frac{ab}{x}-\frac{e}{x}=bc+d$

$\frac{ab-e}{x}=bc+d$

$1/x=\frac{bc+d}{ab-e}$

also: $x=\frac{ab-e}{bc+d}$

N.31.

34,) $\frac{a^2x}{b-c}+dc=bx-ac$ $\quad b-c.$

$a^2x+(b-c)cd=b(b-c)x-a(b-c)c$

$a^2x-b(b-c)x=a(c-b)c-(b-c)cd$

$=ac^2-abc-bcd+c^2d$

$=(a+d)c^2-bc(a+d)$

$=(a+d)(c^2-bc)$

$(a^2-b(b-c))x=(a+d)(c-b)c$

also: $x=\frac{(a+d)(c-b)c}{a^2-b(b-c)}$

oder $=\frac{(a+d)(b-c)c}{b(b-c)-a^2}$.

N.32.

35,) $a+\frac{m(a-x)}{3a+x}=c$

giebt: $\frac{m(a-x)}{3a+x}=c-a$

$\frac{a-x}{3a+x}=\frac{c-a}{m}$

$\frac{a-x}{3a+x+a-x}=\frac{c-a}{m+c-a}$

$\frac{a-x}{4a}=\frac{c-a}{m+c-a}$

$a-x=\frac{4a(c-a)}{m+c-a}$

$x-a=\frac{4a(a-c)}{m+c-a}$

also: $x=a+\frac{4a(a-c)}{m+c-a}$

$=\frac{ma+ac-a^2+4a^2-4ac}{m+c-a}$

$=a\frac{m+3a-3c}{m+c-a}$

$=a\frac{m+3(a-c)}{m+c-a}$

oder $=a\frac{m-3(c-a)}{m+c-a}$

36,) $\frac{x}{a-x}=\frac{x+c}{b-x}$

$\frac{x}{a-x+x}=\frac{x+c}{b-x+x+c}$

$\frac{x}{a}=\frac{x+c}{b+c}$

$bx+cx=ax+ac$

$bx+cx-ax=ac$

$(b+c-a)x=ac$

also: $x=\frac{ac}{b+c-a}$.

N.21.

30,) $x=a+\frac{bc}{d}+\frac{cfx}{de}$ $\quad de$

$dex=ade+bce+cfx$

$dex-cfx=ade+bce$

$(de-cf)x=(ad+bc)e$

also: $x=\frac{(ad+bc)e}{de-cf}$

N.[illegible]
37, $\frac{a(d^2+x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$

giebt: $\frac{d^2+x^2}{dx} = c + \frac{x}{d}$ $\{dx$

$d^2+x^2 = cdx + x^2$

$d^2 = cdx$

also: $x = \frac{d^2}{cd} = \frac{d}{c}$.

N.38
38, $3cx + \frac{bx}{a} = \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}$

giebt: $3cx + \frac{bx}{a} - \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = \frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3}$

$\left(3c + \frac{b}{a} - \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}\right)x = \frac{ab}{a+b}\left(3c + \frac{ab}{(a+b)^2}\right)$

$\left(3c + \frac{b(a+b)^2 - (2a+b)b^2}{a(a+b)^2}\right)x =$ "

$\left(3c + \frac{a^2b+2ab^2+b^3-2ab^2-b^3}{a(a+b)^2}\right)x =$ "

$\left(3c + \frac{a^2b}{a(a+b)^2}\right)x =$ "

$\left(3c + \frac{ab}{(a+b)^2}\right)x = \left(3c + \frac{ab}{(a+b)^2}\right)\frac{ab}{a+b}$

also: $x = \frac{ab}{a+b}$.

N.40
39, $(a+x)(b+x) - a(b+c) = \frac{a^2c}{b} + x^2$

$ab+ax+bx+x^2-ab-ac = \frac{a^2c}{b}+x^2$

$ax+bx-ac = \frac{a^2c}{b}$ $\{b$

$abx+b^2x-abc = a^2c$

$(ab+b^2)x = a^2c+abc$

$a+b)$ $(a+b)bx = ac(a+b)$

$bx = ac$

also: $x = \frac{ac}{b}$

28, $ax - c + bx = d - g$

giebt: $(a+b)x = d-g+c$

also: $x = \frac{c+d-g}{a+b}$.

N.42
40, $\sqrt[m]{(ax+b)} = \sqrt[m]{(cx+d)}$

giebt: $ax+b = cx+d$

$ax-cx = d-b$

$(a-c)x = d-b$

also: $x = \frac{d-b}{a-c}$

oder $= \frac{b-d}{c-a}$

N.H.I. 26, $ax \pm b = c$

giebt: $ax = c \mp b$

also: $x = \frac{c \mp b}{a}$.

N.19. 27, $ax+c = bx+d$

giebt: $(a-b)x = d-c$

also: $x = \frac{d-c}{a-b}$ oder

$= \frac{c-d}{b-a}$.

N.43
41, $h\sqrt[3]{(ax-b)} = k\sqrt[3]{(cx+dx-f)}$

$h^3(ax-b) = k^3(cx+dx-f)$

$ah^3x - bh^3 = ck^3x + dk^3x - fk^3$

$ah^3x - ck^3x - dk^3x = bh^3 - fk^3$

$(ah^3-(c+d)k^3)x = bh^3 - fk^3$

also: $x = \frac{bh^3-fk^3}{ah^3-(c+d)k^3}$

An

das hohe Gesamt-Ministerium
des Koenigreichs Sachsen

zu

Dresden.

Koenigl: hohes Gesamt-Ministerium dürfte höchstgeneigtest entschul-
digen, daß ich der ehrerbietigst unterzeichnete Markscheider, seit 1/2 Jahr in [illegible]
[illegible] stehend, nachdem ich auf ~~die~~ öfters meist zum Theil wiederholten [illegible] des
Königl: Bergamt [illegible], des hohen Oberbergamt und des hohen Finanz-Ministeriums
[illegible] 1862 [illegible] 1862.
daß mir meine ~~[illegible]~~ die Gebühren bey der Bergamts-Reviercasse zu fordern haben
den ~~[illegible]~~ Beilagen ~~[illegible]~~ und
~~[illegible]~~ Gebühren ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~vollständig~~
~~ungekürzt~~ ausgezahlt werden möchten, immer abschläglich abgewiesen wurde
oder [illegible] ~~Abschlags~~zahlungen darauf erhalten konnte, es nunmehr wage,
Hochdasselbe ~~mich~~ deshalb mit einer unterthänigen Vorlage, mit [illegible]
devotesten Bitte mich zu wenden, zumal mir auch jetzt über eine solche [illegible] vom Königl.
Bergamte eine Berechnung ~~über meine Forderung~~ zugegangen ist, durch
welche mein Guthaben abermals ~~[illegible]~~ bedeutend niedriger gestellt ist, der
ich schon des Friedens wegen, ~~[illegible]~~ daß diese Berechnung zu Grunde gelegt ist, bei-
[illegible]

$$x+y : x^4+y^4 = x^3-x^2y+xy^2-y^3$$
$$x^4+x^3y$$
$$-x^3y$$
$$-x^3y-x^2y^2$$
$$+x^2y^2$$
$$+x^2y^2+xy^3$$
$$-xy^3+y^4$$
$$-xy^3-y^4$$
$$+2y^4$$

$$x+y : x^2+y^2 = x-y$$
$$x^2+xy$$
$$-xy$$
$$-xy-y^2$$
$$+2y^2$$

$$x-y : x^2+y^2 = x+y$$
$$x^2-xy$$
$$+xy+y^2$$
$$+xy-y^2$$
$$+2y^2$$

$$x+y : x^3+y^3 = x^2-xy+y^2$$
$$x^3+x^2y$$
$$-x^2y$$
$$-x^2y-xy^2$$
$$+xy^2+y^3$$
$$+xy^2+y^3$$
$$0.$$

$$x-y : x^3+y^3 = x^2+xy+y^2$$
$$x^3-x^2y$$
$$+x^2y$$
$$x^2y-xy^2$$
$$+xy^2+y^3$$
$$+xy^2-y^3$$
$$+2y^3$$

$$x-y : x^4+y^4 = x^3+x^2y+xy^2+y^3$$
$$x^4-x^3y$$
$$+x^3y$$
$$+x^3y-x^2y^2$$
$$+x^2y^2$$
$$+x^2y^2-xy^3$$
$$+xy^3+y^4$$
$$+xy^3-y^4$$
$$+2y^4$$

$$x+y : x^5+y^5 = x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$$
$$x^5+x^4y$$
$$-x^4y$$
$$-x^4y-x^3y^2$$
$$+x^3y^2$$
$$+x^3y^2+x^2y^3$$
$$-x^2y^3$$
$$-x^2y^3-xy^4$$
$$+xy^4+y^5$$
$$+xy^4+y^5$$
$$0$$

N. 44.

42.) $\sqrt[3]{a^2+c} = \sqrt[4]{\frac{a^2+c}{d(x+g)}}$

giebt: $\sqrt[3]{a^2+c}\cdot\sqrt[4]{d(x+g)} = \sqrt[4]{a^2+c}$

$\sqrt[4]{d(x+g)} = \frac{\sqrt[4]{a^2+c}}{\sqrt[3]{a^2+c}}$

$d(x+g) = \frac{a^2+c}{\sqrt[3]{(a^2+c)^4}}$

$= \frac{a^2+c}{(a^2+c)\cdot\sqrt[3]{a^2+c}}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2+c}}$

$x+g = \frac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}}$

also: $x = \frac{1}{d\sqrt[3]{a^2+c}} - g$

N. 45.

43.) $\sqrt[m]{a+x} = \sqrt[2m]{x^2+3ax+b^2}$

giebt: $(a+x)^2 = x^2+3ax+b^2$

$x^2+2ax+a^2 = x^2+3ax+b^2$

$a^2 = ax+b^2$

$ax = a^2-b^2$

also: $x = \frac{a^2-b^2}{a}$

oder $= a-\frac{b^2}{a}$

oder $= \frac{(a+b)(a-b)}{a}$.

N. 47.

44.) $\frac{ax}{b}\sqrt{f^2x^2+d^2} + \frac{afx^2}{b} = cx$ $\left(\frac{b}{ax}\right.$

giebt: $\sqrt{f^2x^2+d^2} + fx = \frac{bc}{a}$

$\sqrt{f^2x^2+d^2} = \frac{bc}{a} - fx$

$f^2x^2+d^2 = \left(\frac{bc}{a} - fx\right)^2$

$= \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bcfx}{a} + f^2x^2$

$d^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bcf}{a}x$

$\frac{2bcf}{a}x = \frac{b^2c^2}{a^2} - d^2$

$= \frac{b^2c^2-a^2d^2}{a^2}$

also: $x = \frac{b^2c^2-a^2d^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2bcf}$

$= \frac{b^2c^2-a^2d^2}{2abcf}$

$= \frac{(bc+ad)(bc-ad)}{2abcf}$.

N. 46.

45.) $b\sqrt[m]{x+d} = f-c$

giebt: $\sqrt[m]{x+d} = \frac{f-c}{b}$

$x+d = \left(\frac{f-c}{b}\right)^m$

also: $x = \left(\frac{f-c}{b}\right)^m - d$

N. 48.

46.) $a^x = b$

giebt: $x.\lg a = \lg b$

also: $x = \frac{\lg. b}{\lg. a}$

N. 49.

47.) $a^{mx}.b^{nx} = c$

giebt: $(a^m b^n)^x = c$

$x.\lg(a^m b^n) = \lg. c$

$x(m.\lg a + n.\lg b) = \lg. c$

also: $x = \frac{\lg c}{m.\lg. a + n.\lg b}$.

N. 50.

48.) $a^{mx+f}.b^{nx+g} = c^{px+h}.d^{qx+k}$

giebt: $a^{mx}b^{nx}a^f b^g = c^{px}d^{qx}c^h d^k$

$\frac{a^{mx}b^{nx}}{c^{px}d^{qx}} = \frac{c^h.d^k}{a^f.b^g}$

$\left(\frac{a^m.b^n}{c^p.d^q}\right)^x = \frac{c^h.d^k}{a^f.b^g}$

also: $x = \frac{\lg.\frac{c^h.d^k}{a^f.b^g}}{\lg.\frac{a^m.b^n}{c^p.d^q}}$

$= \frac{\lg. c^h + \lg d^k - \lg. a^f - \lg. b^g}{\lg. a^m + \lg. b^n - \lg. c^p - \lg d^q}$

$= \frac{h.\lg. c + k.\lg d - f.\lg. a - g.\lg. b}{m.\lg a + n.\lg b - p.\lg c - q.\lg d}$

N. 20.

29.) $\frac{f^3x}{cg} - \frac{a^2}{f} + cx = \frac{bx}{g} - c + (a+c)x$ $\left(cfg.\right.$

$f^3x - a^2cg + c^2fgx = cfbx - c^2fg + acfgx + c^2fgx$

$f^3x - a^2cg = cfbx - c^2fg + acfgx$

$f^3x - cfbx - acfgx = a^2cg - c^2fg$

$(f^2 - cb - acg)fx = (a^2-cf)cg$

also $x = \frac{(a^2-cf)cg}{(f^2-cb-acg)f}$.

N. 16.

1, $3x+5y = \frac{8b-2f}{b^2-f^2}\,bf.$ 2, $b^2x - \frac{bcf^2}{b+f} + (b+c+f)fy = f^2x + (b+2f)bf.$

giebt $3(b^2-f^2)x + 5(b^2-f^2)y = (8b-2f)bf$

$$b^2x - f^2x + (b+c+f)fy = (b+2f)bf + \frac{bcf^2}{b+f}.$$

$$(b^2-f^2)x + (b+c+f)fy = \left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf$$

$$3(b^2-f^2)x + 3(b+c+f)fy = 3\left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf. \quad (3$$

$3(b^2-f^2)x + 3(b+c+f)fy = 3\left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf$ abgezogen,

bleibt $(5b^2-5f^2-3bf-3cf-3f^2)y = \left(5b-8f-\frac{3cf}{b+f}\right)bf.$

$$(5b^2-8f^2-3bf-3cf)y = (5b^2+5bf-8bf-8f^2-3cf)\frac{bf}{b+f}.$$

$$= (5b^2-8f^2-3bf-3cf)\frac{bf}{b+f}$$

also: I, $y = \frac{bf}{b+f}.$

Aus der 1ᵗᵉⁿ Gleichung:

$$3x+5y = \frac{8b-2f}{b^2-f^2}\cdot bf$$

folgt $3x = \frac{8b-2f}{b^2-f^2}\,bf - 5y$

$$= \quad " \quad - 5\frac{bf}{b+f} \quad (b^2-f^2$$

$$3(b^2-f^2)x = (8b-2f)bf - 5(b-f)bf$$

$$= (8b-2f-5b+5f)bf$$

$$= (3b+3f)\,bf$$

$$= 3(b+f)\,bf$$

II, $x = \frac{3(b+f)}{3(b^2-f^2)}\,bf = \frac{(b+f)\,bf}{(b+f)(b-f)}$

$$= \frac{bf}{b-f}.$$

zu können, müssen 2. von einander unabhängige Gleichungen von Form all, zu können, müssen 2. von einander unabhängige Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$Ax + By = C \quad \text{und} \quad ax + by = c$$

gegeben seyn, oder beyde Gleichungen müssen auf diese Form gebracht werden können, ob dann aber auch eines dieser Glieder fehlen oder = 0 seyn sollte, der Bestimmtheit der Aufgabe ist es nicht schädlich.

Zur Auflösung solcher Aufgaben hat man vier, ihrem Wesen nach zwar völlig gleiche, in der Ausführung aber sehr verschiedene Verfahrungsarten, nehmlich:

1.) die Substitutions-Methode,
2.) " Combinations-Methode, und 4.) die Vergleichungs-Methode oder unbestimmte Multiplications-Methode
3.) " Summations-Methode, von denen die ~~letzte~~ dritte im allgemeinen wohl die bequemste seyn möchte, wiewohl in einigen Fällen, oder die eine, oder die andere vorzuziehen ist.

Aufgabe 1. Um eine solche Gleichungs-Aufgabe mittelst ~~nach~~ der Substitutions-Methode zu lösen, bestimmt man aus der einen Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe durch die andere und durch die mit ihr verbundenen bekannten Größen, worauf man diesen Werth für die unbekannte Größe anstatt derselben in die andere Gleichung setzt, ~~und so~~ dadurch aber diese Gleichung in eine Gleichung mit nur 1. unbekannten Größe verwandelt, welche man nach der Regel §. 92. auflöset. Erhält man auf diese Art eine Formel für die 2te unbek.

aus bekannten Größen bestehende

1.) aus $Ax + By = C$ und $ax + by = c$

folgt: $By = C - Ax$

also: $y = \dfrac{C - Ax}{B}$

$$ax + b \cdot \frac{C - Ax}{B} = c \quad | \cdot B$$
$$Bax + Cb - Abx = Bc$$
$$Bax - Abx = Bc - Cb$$
$$(Ba - Ab)x = Bc - Cb$$

bekannte Größe auch gefunden, so bestimmt man diese wieder in der für die erste unbekannte Größe gefundenen Formel nach deren Angabe in Rechnung, und bestimmt für dieselbe dadurch eine ebenfalls nur aus bekannten Größen bestehende Formel. Der Einfachheit wegen wählt man aber zu Bestimmung des ersten Werthes die Gleichung und in derselben die unbekannte Größe, welche den kleinsten Coefficienten hat, z.B.

alſo: I.) $x = \frac{Bc - Cb}{Ba - Ab}$ oder $= \frac{Cb - Bc}{Ab - Ba}$

und: II.) $y = \frac{C - A.x}{B} = \frac{C - A.\frac{Bc - Cb}{Ba - Ab}}{B}$

$$= \frac{BCa - ACb - ABc + ACb}{B(Ba - Ab)}$$

$$= \frac{BCa - ABc}{B.(Ba - Ab)}$$

$$= \frac{Ca - Ac}{Ba - Ab} \text{ oder } = \frac{Ac - Ca}{Ab - Ba}.$$

Aufgabe 2. Um eine solche Gleichungen aufgabe nach der Combinations Methode zu lösen, ~~bestimmt~~ entwickelt man aus beyden Gleichungen (nach §. 93) für ein und dieselbe unbekannte Größe, und zwar für diejenige, welche die kleinsten Coefficienten hat, ~~eine~~ Ausdrücke oder Formeln, setzt diese (nach §. 6. Grunds: 3.) einander gleich, und erhält dadurch eine neue Gleichung, welche neben bekannten Größen nur noch die andere unbekannte Größe enthält, ~~die~~ woraus man nun ebenfalls nach §. 93. ~~mit~~ eine bloß aus bekannten Größen bestehende Formel entwickelt; substituirt man nun diese letztere Formel in eine der beyden vorher für die erste unbekannte Größe gefundenen Formeln, (wozu man am liebsten der Einfachheit wegen ebenfalls die mit den kleinsten Coefficienten wählt,) so ~~[illegible]~~ ergiebt sich auch für diese erste unbekannte Größe der gesuchte Werth; z.B.:

2.) $Ax + By = C$ und $ax + by = c$

giebt: $By = C - Ax$ $\quad by = c - ax$

$y = \frac{C - Ax}{B}$ $\quad y = \frac{c - ax}{b}$

alſo: $\frac{C - Ax}{B} = \frac{c - ax}{b}$

$$Cb - Abx = Bc - Bax$$

$$Bax - Abx = Bc - Cb$$

$$(Ba - Ab)x = Bc - Cb$$

alſo: I.) $x = \frac{Bc - Cb}{Ba - Ab}$ oder $= \frac{Cb - Bc}{Ab - Ba}$

und II.) $y = \frac{c - ax}{b} = \frac{c - a.\frac{Bc - Cb}{Ba - Ab}}{b}$

$$= \frac{Bac - Abc - Bac + Cab}{b(Ba - Ab)}$$

$$= \frac{Cab - Abc}{b(Ba - Ab)}$$

$$= \frac{Ca - Ac}{Ba - Ab} \text{ oder } = \frac{Ac - Ca}{Ab - Ba}, \text{ wie in Aufg: 1.}$$

Aufgabe 3. Um ~~[illegible]~~ eine solche Aufgabe mittelst der Summations- Methode zu lösen, multiplicirt man eine oder (wenn es nöthig ist) auch beyde Gleichungen mit einer solchen Grösse, welche die Glieder mit einerley unbekannter Grösse in beyden Gleichungen gleich gross macht, und addirt ~~[illegible]~~ oder subtrahirt sodann die so umgeänderten Gleichungen ~~[illegible]~~ um nur dieselbe ~~[illegible]~~ die unbekannte Grösse, ~~mit~~ deren Coefficienten man auf diese Art einander gleich gemacht hat, ~~durch Addition oder Subtraction~~ wegzubringen; man wählt auch hierzu diejenige Unbekannte, welche in beyden Gleichungen die kleinsten Coefficienten hat; die dadurch erhaltene neue Gleichung, welche nun nur mehr eine Unbekannte neben bekannten Grössen enthält, behandelt man sodann ebenfalls nach §. 93, um den Werth dieser Unbekannten zu bestimmen, und verfährt übrigens zur Bestimmung des Werthes der andern Unbekannten wie in Aufgabe 1. u. 2; z.B:

3.) $Ax + By = C \quad (\cdot b)$ und $ax + by = c \quad (\cdot B)$

giebt: $Abx + Bby = Cb$ $\qquad Bax + Bby = Bc$

davon $Bax + Bby = Bc$ abgezogen

bleibt: $Abx - Bax = Cb - Bc$

$$(Ab - Ba)x = Cb - Bc$$

also: I.) $x = \dfrac{Cb - Bc}{Ab - Ba}$ oder $= \dfrac{Bc - Cb}{Ba - Ab}$,

und II.) $y = \dfrac{Ac - Ca}{Ab - Ba}$ " $= \dfrac{Ca - Ac}{Ba - Ab}$ (wie in Aufg. 1 u. 2. erhalten).

4.) $Ax + By = C \quad (\cdot b)$ und $ax - by = c \quad (\cdot B)$

giebt: $Abx + Bby = Cb$ $\qquad Bax - Bby = Bc$

hierzu $Bax - Bby = Bc$ addirt,

so: $Abx + Bax = Cb + Bc$

$$(Ab + Ba)x = Cb + Bc$$

also: I.) $x = \dfrac{Cb + Bc}{Ab + Ba}$

und II.) $y = \dfrac{C - Ax}{B} = \dfrac{C - A\,\dfrac{Cb + Bc}{Ab + Ba}}{B} = \dfrac{ACb + BCa - ACb - ABc}{B.(Ab + Ba)}$

$$= \frac{BCa - ABc}{B(Ab + Ba)} = \frac{Ca - Ac}{Ab + Ba}.$$

Zusatz. Gleichungen, welche Producte von unbekannten Größen enthalten, führen meistens auf eine Gleichung des zweyten Grades, wiewohl dieses zuweilen nur scheinbar der Fall ist; zB:

5.) $xy = ax + by$ und $xy = cx + dy$

giebt: $xy - by = ax$ $\quad$ $xy - dy = cx$

$(x-b)y = ax$ $\quad$ $(x-d)y = cx$

$y = \frac{ax}{x-b}$ $\quad$ $y = \frac{cx}{x-d}$

$ax(x-d) = cx(x-b)$ (scheinbar quadratisch)

x.) $a(x-d) = c(x-b)$

$ax - cx = ad - bc$

$(a-c)x = ad - bc$

also: I.) $x = \frac{ad-bc}{a-c}$ oder $= \frac{bc-ad}{c-a}$

und: II.) $y = \frac{ax}{x-b} = \frac{a\cdot\frac{bc-ad}{c-a}}{\frac{bc-ad}{c-a}-b} = \frac{abc-aad}{bc-ad-bc+ab} = \frac{a(bc-ad)}{\ldots}$

Aufgabe 1. Um endlich eine solche Aufgabe nach der ~~Vergleichungs~~ der unbestimmten Multiplications Methode zu lösen, multiplicirt man eine der Gleichungen mit einer beliebigen Grösse m, und ~~und~~ zieht dann die zweyte Gleichung davon ab; dadurch erhält man eine neue Gleichung, welche alle bekannten und zugleich beyde gesuchte Grössen x und y enthält. In dieser neuen Gleichung untersucht man ferner, wie gross m werden muss, je nachdem x oder y aus dieser Gleichung verschwinden soll, und substituirt dann ~~nach und nach~~ diese beyden Werthe von m in dieser Gleichung; so ergiebt sich der Werth von x, wenn man y, und der Werth von y, wenn man x durch diese Substitution aus der Gleichung verschwinden läßt; z.b.:

Ex., aus $Ax + By = C$, $(m$ und $ax + by = c$

folgt: $Amx + Bmy = Cm$

hiervon: $ax + by = c$

bleibt: $Amx - ax + Bmy - by = Cm - c$

$$(Am - a)x + (Bm - b)y = Cm - c$$

Soll in dieser Gleichung:

$(Am - a)x = 0$ oder $(Bm - b)y = 0$ werden,

so muss $Am - a = 0$ | $Bm - b = 0$

oder $Am = a$ | $Bm = b$

also: 1, $m = \frac{a}{A}$ | 2, $m = \frac{b}{B}$ werden;

folglich ist:

ad 1, $\left(\frac{Aa}{A} - a\right)x + \left(\frac{Ba}{A} - b\right)y = \frac{Ca}{A} - c$

d.i.: $\left(\frac{Ba}{A} - b\right)y = \frac{Ca}{A} - c$ $(A$

$(Ba - bA)y = Ca - cA$

also: I, $y = \frac{Ca - cA}{Ba - bA}$,

ad 2, $\left(\frac{A.b}{B} - a\right)x + \left(\frac{Bb}{B} - b\right)y = \frac{Cb}{B} - c.$

d.i.: $\left(\frac{Ab}{B} - a\right)x = \frac{Cb}{B} - c$ $(B.$

$(Ab - aB)x = Cb - cB$

also: II, $x = \frac{Cb - cB}{Ab - aB}$. (vergl: Zus: 1.2. §: 3.)

2427.

5^b/, Zur $Ax + By = C$ $(m$ und $ax - by = c$

folgt: $Amx + Bmy = Cm$

hiervon $ax - by = c$

bleibt: $(Am - a)x + (Bm + b)y = Cm - c$.

Soll in dieser Gleichung:

$(Am - a)x = 0$, oder $(Bm + b)y = 0$ werden,

so muß $Am - a = 0$; $Bm + b = 0$

$Am = a$; $Bm = -b$

also: 1, $m = \frac{a}{A}$; 2, $m = -\frac{b}{B}$ werden,

folglich: $\left(A\cdot\frac{a}{A} - a\right)x + \left(B\frac{a}{A} + b\right)y = C\cdot\frac{a}{A} - c$ $(A$

d. i. $(Ba + bA)y = Ca - cA$

also: I, $y = \frac{Ca - cA}{Ba + bA}$

und $\left(-A\frac{b}{B} - a\right)x + \left(b - B\frac{b}{B}\right)\cdot y = -C\frac{b}{B} - c$ $(B$

d. i. $(-Ab - aB)x = -Cb - cB$

oder $(Ab + aB)x = Cb + cB$

also: II, $x = \frac{Cb + cB}{Ba + bA}$. (Größe: B.)

$\left(b - B\frac{a}{A}\right)y = C\frac{a}{A} - c$ $(A$

$(Ab - Ba)y = Ca - Ac$

Zusatz. Gleichungen, welche Producte aus den unbekannten Größen enthalten, führen meistens auf Gleichungen vom zweyten Grade, wiewohl dieß zuweilen nur scheinbar der Fall ist; z.B.:

5.) $xy = ax + by$ und $xy = cx + dy$

giebt: $xy - by = ax$ $\quad xy - dy = cx$

$(x-b)y = ax$ $\quad (x-d)y = cx$

also: $y = \frac{ax}{x-b}$ also $y = \frac{cx}{x-d}$

$$\frac{ax}{x-b} = \frac{cx}{x-d}$$

$$(x-d)\,ax = (x-b)\,cx$$ (scheinbar quadratisch)

x.f

$$(x-d)a = (x-b)c$$

$$ax - ad = cx - bc$$

$$ax - cx = ad - bc$$

$$(a-c)x = ad - bc$$

also: I.) $x = \frac{ad-bc}{a-c}$ oder $= \frac{bc-ad}{c-a}$

und II.) $y = \frac{ax}{x-b} = \frac{a\frac{ad-bc}{a-c}}{\frac{ad-bc}{a-c} - b}$

$$= \frac{a(ad-bc)}{ad-bc-ab+bc} = \frac{a(ad-bc)}{ad-ab}$$

$$= \frac{ad-bc}{d-b} \text{ oder } = \frac{bc-ad}{b-d}$$

N. 19.

Beyspiele ad §. 95.

6.) $ax = by$ und $x + y = c$ $(b$

giebt: $bx + by = bc$

$by = bc - bx$

also: $ax = bc - bx$

$ax + bx = bc$

$(a+b)x = bc$

also: I.) $x = \frac{bc}{a+b}$

und II.) $y = \frac{ax}{b} = \frac{a}{b}\cdot\frac{bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$.

Oder:

6b.) $ax = by$ und $x + y = c$ (b

giebt: $ax - by = 0.$ $bx + by = bc$

hierzu $bx + by = bc$

Sa: $ax + bx = bc$

$(a+b)x = bc$

also: I.) $x = \frac{bc}{a+b}$ und aus $x + y = c$

folgt: II.) $y = c - x = c - \frac{bc}{a+b}$

$= \frac{ac + bc - bc}{a+b}$

$= \frac{ac}{a+b}$

N.14.

7.) $\frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x}$ und $ax + 2by = d$

giebt: $a(3a+x) = b(b+y)$

$3a^2 + ax = b^2 + by$

A.) $ax - by = b^2 - 3a^2$ (2

$2ax - 2by = 2b^2 - 6a^2$

hierzu $ax + 2by = d,$ hiervon $ax - by = b^2 - 3a^2$ (A.)

Sa: $3ax = 2b^2 - 6a^2 + d$ bleibt: $3by = d - b^2 + 3a^2$

also: I.) $x = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$ also: II.) $y = \frac{d - b^2 + 3a^2}{3b}$

N.15.

8.) $bcx = cy - 2b$ und $b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x$

giebt $bcx - cy = -2b$ (b² $b^2y - c^3x = \frac{2b^3}{c} - \frac{a(c^3-b^3)}{bc}$

$b^3cx - b^2cy = -2b^3$ $= \frac{2b^3}{c} + \frac{a}{bc}(b^3 - c^3).$ (c

$b^2cy - c^4x = 2b^3 + \frac{a}{b}(b^3 - c^3).$

hierzu: $-b^2cy + b^3cx = -2b^3$

$b^3cx - c^4x = \frac{a}{b}(b^3 - c^3)$

$b^3 - c^3$.) $(b^3 - c^3)cx = \frac{a}{b}.(b^3 - c^3)$

$cx = \frac{a}{b}$

also I.) $x = \frac{a}{bc}.$

und aus $cy - 2b = bcx$

folgt: $cy = bcx + 2b = bc \cdot \frac{a}{bc} + 2b = a + 2b$

also: II.) $y = \frac{a+2b}{c}.$

N. 16.

9) $3x+5y=\frac{8b-2f}{b^2-f^2}bf$ und $b^2x-\frac{bcf^2}{b+f}+(b+c+f)fy=f^2x+(b+2f)bf$.

giebt: $3(b^2-f^2)x+5(b^2-f^2)y=(8b-2f)bf$ ‖ $b^2x-f^2x+(b+c+f)fy=(b+2f)bf+\frac{bcf^2}{b+f}$

$$(b^2-f^2)x+(b+c+f)fy=\left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf$$

$$3(b^2-f^2)x+3(b+c+f)fy=3\left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf \quad \cdot 3$$

hiervon $3(b^2-f^2)x+3(b+c+f)fy=3\left(b+2f+\frac{cf}{b+f}\right)bf$

bleibt: $5(b^2-f^2)y-3(b+c+f)fy=\left(5b-8f-\frac{3cf}{b+f}\right)bf$

$$(5b^2-5f^2-3bf-3cf-3f^2)y=(5b^2+5bf-8bf-8f^2-3cf)\frac{bf}{b+f}$$

$$(5b^2-8f^2-3bf-3cf)y=(5b^2-8f^2-3bf-3cf)\cdot\frac{bf}{b+f}$$

also: I, $y=\frac{bf}{b+f}$.

Aus $3x+5y=\frac{8b-2f}{b^2-f^2}\cdot bf$

folgt: $3x=\frac{8b-2f}{b^2-f^2}\cdot bf-5y$

$= \quad " \quad " \quad -5\frac{bf}{b+f} \quad (b^2-f^2$

$$3(b^2-f^2)x=(8b-2f)\cdot bf-5(b-f)bf$$

$$=(8b-2f-5b+5f)bf$$

$$=(3b+3f)bf$$

$$=3(b+f)bf$$

also: II, $x=\frac{3(b+f)bf}{3(b^2-f^2)}=\frac{(b+f)\cdot bf}{(b+f)(b-f)}$

$$=\frac{bf}{b-f}.$$

$mx+y=p \qquad nx+y=p$

$nx+y=p$

$(m-n)x=0.$

$x=0$

$y=p-nx$

$=p-0=p$

$\frac{1}{x}=m-\frac{1}{y} \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{x}-n$

$\frac{1}{x}=m-\frac{1}{x}+n$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=m+n$

$\frac{2}{x}=\frac{m+n}{1}$

$\frac{1}{x}=\frac{m+n}{2}$

$x=\frac{2}{m+n}$

§ 96.

Von den bestimmten Gleichungen des 1sten Grades mit mehr als 2. unbekannten Groessen.

Lehrsatz: Zu Lösung bestimmter Gleichungen des ersten Grades mit 3, 4. und mehr unbekannten Größen müssen allemal eben so viel von einander unabhängige Gleichungen gegeben seyn, als die Aufgabe selbst unbekannte Größen enthält; diese Gleichungen z.B. für 3. unbekannte Größen haben die allgemeine Form:

~~§. 95.~~

~~Von den bestimmten Gleichungen des 1sten Grades mit mehr als 2. unbekannten Grössen~~

~~Lehrsatz~~.

$$Ax + By + Cz = D.$$
$$ax + by + cz = d.$$

und $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, wo aber auch eines dieser Glieder oder ein Coefficient in einem derselben $= 0$. seyn kann, ohne der Bestimmtheit der Gleichung zu schaden, und besonders dann die Berechnung bedeutend einfacher wird, wenn in jeder Gleichung ~~eine~~ und zwar in jeder eine ~~andere~~ der gesuchten Größen fehlt.

Aufgabe. Um Aufgaben mit mehr als 2. unbekannten Größen aufzulösen, d.h. um die Werthe der gesuchten Größen zu bestimmen, muß man aus den gegebenen Gleichungen alle unbekannten Größen bis auf 2. derselben ~~durch~~ Anwendung der in §. 94. gezeigten Substitutions-, Combinations-, oder Vergleichungs ~~oder~~ Summations-Methode zu eliminiren suchen, und behandelt hierauf die dadurch erhaltenen 2. Gleichungen, welche nur noch 2. der gesuchten Größen enthalten, nach Anweisung des §. 94. z.B. ~~Combinations~~ nach der ~~Vergleichungs~~-Methode:

$1,\ Ax + By + Cz = D.$ $\quad 2,\ ax + by + cz = d$ $\quad 3,\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$

giebt: $Cz = D - Ax - By$ $\quad cz = d - ax - by$ $\quad \gamma z = \delta - \alpha x - \beta y$

also: $4,\ z = \frac{D - Ax - By}{C}$ $\quad 5,\ z = \frac{d - ax - by}{c}$ $\quad 6,\ z = \frac{\delta - \alpha x - \beta y}{\gamma}$

folglich: $\frac{D - Ax - By}{C} = \frac{d - ax - by}{c}$ und $\frac{d - ax - by}{c} = \frac{\delta - \alpha x - \beta y}{\gamma}$

$cD - cAx - cBy = dC - aCx - bCy$ $\quad \gamma d - \gamma ax - \gamma by = \delta c - \alpha cx - \beta cy$

$bCy - cBy = dC - cD + cAx - aCx$ $\quad \beta cy - \gamma by = \delta c - \gamma d + \gamma ax - \alpha cx$

$(bC - cB)y = dC - cD + (cA - aC)x$ $\quad (\beta c - \gamma b)y = \delta c - \gamma d + (\gamma a - \alpha c)x$

also: $7,\ y = \frac{dC - cD + (cA - aC)x}{bC - cB}$ $\quad 8,\ y = \frac{\delta c - \gamma d + (\gamma a - \alpha c)x}{\beta c - \gamma b}$

folglich: $$\frac{dC - cD + (cA - aC)x}{bC - cB} = \frac{\delta c - \gamma d + (\gamma a - \alpha c)x}{\beta c - \gamma b}$$

$$(\beta c - \gamma b)\big(dC - cD + (cA - aC)x\big) = (bC - cB)\big(\delta c - \gamma d + (\gamma a - \alpha c)x\big)$$

$$(\beta c - \gamma b)(dC - cD) + (\beta c - \gamma b)(cA - aC)x = (bC - cB)(\delta c - \gamma d) + (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)x$$ //

$$\#\ (\beta c - \gamma b)(cA - aC)x - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)x = (bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (\beta c - \gamma b)(dC - cD')$$

$$[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]x = (bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (\beta c - \gamma b)(dC - cD')$$

also: $\text{I},\quad x = \dfrac{(bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\beta c - \gamma b)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)}.$

aus No. 7. folgt:

$$\text{II},\quad y = \frac{dC - cD' + (cA - aC)\cdot\dfrac{(bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\beta c - \gamma b)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)}}{bC - cB}$$

$$\# = \frac{(dC - cD')(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (dC - cD')(bC - cB)(\gamma a - \alpha c) + (cA - aC)(bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(cA - aC)(\beta c - \gamma b)}{(bC - cB)[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]}$$

$$= \frac{(bC - cB)[(cA - aC)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\gamma a - \alpha c)]}{(bC - cB)[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]}$$

$$= \frac{(cA - aC)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\gamma a - \alpha c)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)}$$

und aus No. 4. folgt:

$$\text{III},\quad z = \frac{D'}{C} - \frac{A}{C}\cdot\frac{(bC - cB)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\beta c - \gamma b)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)} - \frac{B}{C}\cdot\frac{(cA - aC)(\delta c - \gamma d) - (dC - cD')(\gamma a - \alpha c)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)}$$

$$= \frac{D'(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - D'(bC - cB)(\gamma a - \alpha c) - A(bC - cB)(\delta c - \gamma d) + A(dC - cD')(\beta c - \gamma b) - B(cA - aC)(\delta c - \gamma d) + B(dC - cD')(\gamma a - \alpha c)}{C[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]}$$

$$= \frac{(cAD' - aCD' + dAC - cAD')(\beta c - \gamma b) + (dBC - cBD' - bD'C + cBD')(\gamma a - \alpha c) - (bAC - cAB + cAB - aBC)(\delta c - \gamma d)}{C[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]}$$

$$= \frac{C(dA - aD')(\beta c - \gamma b) - C(bA - aB)(\delta c - \gamma d) - C(bD' - dB)(\gamma a - \alpha c)}{C[(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)]}$$

$$= \frac{(dA - aD')(\beta c - \gamma b) - (bA - aB)(\delta c - \gamma d) - (bD' - dB)(\gamma a - \alpha c)}{(cA - aC)(\beta c - \gamma b) - (bC - cB)(\gamma a - \alpha c)}.$$

= siehe weiter F. 251. ✓.

1, Nach der Substitutions-Methode:

1, $Ax + By + Cz = D'$ 2, $ax + by + cz = d$ 3, $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$.

giebt: $Cz = D' - Ax - By$

also: $4,\ z = \dfrac{D - Ax - By}{C}$

hieraus u: aus No. 2. folgt: $ax + by + c\,\dfrac{D - Ax - By}{C} = d$

$$aCx + bCy + cD - cAx - cBy = dC$$

$$aCx - cAx + bCy - cBy = dC - cD$$

$$(bC - cB)\,y = dC - cD - aCx + cAx$$

$$= dC - cD - (aC - cA)\,x$$

also: $5,\ y = \dfrac{dC - cD + (cA - aC)\,x}{bC - cB}$

hieraus und aus No. 4. folgt:

$$6,\ z = \frac{D - Ax - B.\dfrac{dC - cD + (cA - aC)\,x}{bC - cB}}{C}$$

$$= \frac{D(bC - cB) - (bC - cB)Ax - B(dC - cD) - B(cA - aC)\,x}{C(bC - cB)}$$

$$= \frac{bCD - cBD - dBC + cBD - (bAC - cAB + cAB - aBC)\,x}{C(bC - cB)}$$

$$= \frac{C(bD - dB) + C(aB - bA)\,x}{C(bC - cB)}$$

aus No. 3. 5. u: 6. nun: folgt:

$$\alpha x + \beta.\frac{dC - cD + (cA - aC)\,x}{bC - cB} + \gamma\,\frac{bD - dB + (aB - bA)\,x}{bC - cB} = \delta$$

$$\alpha(bC - cB)\,x + \beta(dC - cD) + \beta(cA - aC)\,x + \gamma(bD - dB) + \gamma(aB - bA)\,x = \delta(bC - cB)$$

$$(\alpha bC - \alpha cB + \beta cA - \beta aC + \gamma aB - \gamma bA)\,x = \delta bC - \delta cB - \gamma bD + \gamma dB - \beta dC + \beta cD$$

also: $\mathrm{I},\ x = \dfrac{\delta(bC - cB) + \gamma(dB - bD) + \beta(cD - dC)}{\alpha(bC - cB) + \beta(cA - aC) + \gamma(aB - bA)}$

hieraus und aus No. 5. folgt:

$$\mathrm{II},\ y = \frac{dC - cD + (cA - aC).\dfrac{\delta(bC - cB) + \gamma(dB - bD) + \beta(cD - dC)}{\alpha(bC - cB) + \beta(cA - aC) + \gamma(aB - bA)}}{bC - cB}$$

$$= \frac{\alpha(bC - cB)(dC - cD) + \beta.(cA - aC)(dC - cD) + \gamma(aB - bA)(dC - cD) + \delta(bC - cB)(cA - aC) + \gamma(dB - bD)(cA - aC) + \beta(cD - dC)(cA - aC)}{(bC - cB)[\alpha(bC - cB) + \beta(cA - aC) + \gamma(aB - bA)]}$$

$$= \frac{\delta(bC-cB)(cA-aC)+\gamma(adBC-bdAC-acBD'+bcAD'+cdAB-bdAC-adBC+abCD')+\beta(cA-aC)(dC-cD'+cD'-dC)+\alpha(bC-cB)(dC-cD')}{(bC-cB)[\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)]}$$

$$= \frac{\delta(bC-cB)(cA-aC)+\gamma(abCD'-acBD'-bdAC+cdAB)+\alpha(bC-cB)(dC-cD')}{(bC-cB)[\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)]}$$

$$= \frac{\delta(cA-aC)+\gamma(aD'-dA)+\alpha(dC-cD')}{\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)}.$$

$dCab - ACbd$
$-BDac + ABcd$

Endlich aus No. 4. I. u. II. folgt: $z = \frac{D'-Ax-By}{C}$

III, $z = \frac{D'}{C} - \frac{A}{C}.x - \frac{B}{C}.y$

$$= \frac{D'}{C} - \frac{A}{C}.\frac{\delta(bC-cB)+\gamma(dB-bD')+\beta(cD'-dC)}{\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)} - \frac{B}{C}.\frac{\delta(cA-aC)+\gamma(aD'-dA)+\alpha(dC-cD')}{\alpha(bC-cB)+\beta(cA-dC)+\gamma(aB-bA)}.$$

$$= \frac{D'[\gamma(aB-bA)+\beta(cA-aC)+\alpha(bC-cB)]-A[\delta(bC-cB)+\gamma(dB-bD')+\beta(cD'-dC)]-B[\delta(cA-aC)+\gamma(aD'-dA)+\alpha(dC-cD')]}{C.[\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)]}$$

$$= \frac{\delta cAB-\delta bAC+\delta aBC-\delta cAB+\gamma(aBD'-bAD'-dAB+bAD'-aBD'+dAB)+\beta(cAD'-aCD'-cAD'+dAC)+\alpha(bCD'-cBD'-dBC+cBD')}{C[\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)]}$$

$$= \frac{\delta(aB-bA)+\beta(dA-aD')+\alpha(bD'-dB)}{\alpha(bC-cB)+\beta(cA-aC)+\gamma(aB-bA)}.$$

2, Nach der Summativen Methode:

Aus 1, $Ax + By + Cz = D'$

2, $ax + by + cz = d$

3, $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

folgt, wenn man ~~die~~ No. 1. mit c und No. 2. mit C multiplicirt:

$$cAx + cBy + cC'z = cD'$$

$$\text{und } aC'x + bC'y + cC'z = dC'$$

also die Differenz: $4,)\ (cA - aC')x + (cB - bC')y = cD' - dC'$

dagegen, wenn man No. 1 mit γ und No. 3 mit C' multiplicirt, folgt:

$$\gamma Ax + \gamma By + \gamma C'z = \gamma D'$$

$$\alpha C'x + \beta C'y + \gamma C'z = \delta C'$$

also die Diff: $5,)\ (\gamma A - \alpha C')x + (\gamma B - \beta C')y = \gamma D' - \delta C'.$

Multiplicirt man ferner die Gleichung No. 4 mit $\gamma B - \beta C'$,

und " " " 5. " $cB - bC'$, so ergiebt

sich: $(cA - aC')(\gamma B - \beta C')x + (cB - bC')(\gamma B - \beta C')y = (\gamma B - \beta C')(cD' - dC')$

und $(\gamma A - \alpha C')(cB - bC')x + (\gamma B - \beta C')(cB - bC')y = (cB - bC')(\gamma D' - \delta C')$

also die Diff: $[(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')]x = (cD' - dC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma D' - \delta C')(cB - bC')$

folglich: $\text{I.})\ x = \dfrac{(cD' - dC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma D' - \delta C')(cB - bC')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')}$

Setzt man diesen Werth von x in eine der beyden Gleichungen No. 4. oder 5, so ergiebt sich z. B. mit No. 4:

$$\frac{(cA - aC')(cD' - dC')(\gamma B - \beta C') - (cA - aC')(\gamma D' - \delta C')(cB - bC')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')} + (cB - bC')y = cD' - dC'.$$

$$(cB - bC')y = cD' - dC' - \frac{(cA - aC')(cD' - dC')(\gamma B - \beta C') - (cA - aC')(\gamma D' - \delta C')(cB - bC')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')}$$

$$= \frac{(cA - aC')(cD' - dC')(\gamma B - \beta C') - (cB - bC')(cD' - dC')(\gamma A - \alpha C') - (cA - aC')(cD' - dC')(\gamma B - \beta C') + (cA - aC')(cB - bC')(\gamma D' - \delta C')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')}$$

$$= \frac{(cA - aC')(cB - bC')(\gamma D' - \delta C') - (cD' - dC')(cB - bC')(\gamma A - \alpha C')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')}$$

folglich: $\text{II.})\ y = \dfrac{(cA - aC')(cB - bC')(\gamma D' - \delta C') - (cD' - dC')(cB - bC')(\gamma A - \alpha C')}{(cA - aC')(cB - bC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')(cB - bC')}$

$$= \frac{(cA - aC')(\gamma D' - \delta C') - (\gamma A - \alpha C')(cD' - dC')}{(cA - aC')(\gamma B - \beta C') - (\gamma A - \alpha C')(cB - bC')}$$

s. weiter p. 251a:

Setzt man diese Werthe von x und y in eine der Gleichungen No. 1. 2. oder 3, so ergiebt sich z.B. aus No. 1.

$$A\cdot\frac{(cD'-dC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma D'-\delta C')(cB-bC')}{(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')}+B\cdot\frac{(cA-aC')(\gamma D'-\delta C')-(\gamma A-\alpha C')(cD'-dC')}{(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')}+C'z=D'$$

$$C'[(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')]z=D'[(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')]$$
$$-B[(cA-aC')(\gamma D'-\delta C')-(\gamma A-\alpha C')(cD'-dC')]$$
$$-A[(cD'-dC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma D'-\delta C')(cB-bC')]$$
$$=\gamma cABD'-\gamma aBC'D'-\beta cAC'D'+\beta aC'C'D'-\gamma cABD'+\alpha cBC'D'+\gamma bAC'D'-\alpha bC'C'D'$$
$$-\gamma cABD'+\gamma aBC'D'+\delta cABC'-\delta aBC'C'+\gamma cABD'-\cancel{\alpha cBC'D'}-\gamma dABC'+\alpha dBC'C'$$
$$-\gamma cABD'+\gamma dABC'+\beta cAC'D'-\beta dAC'C'+\gamma cABD'-\delta cABC'-\gamma bAC'D'+\delta bAC'C'$$
$$=C'(\beta aC'D'-\alpha bC'D'-\delta aBC'+\alpha dBC'-\beta dAC'+\delta bAC')$$

$$[(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')]z=\beta aC'D'-\alpha bC'D'+\alpha dBC'-\delta aBC'+\delta bAC'-\beta dAC'$$
$$=C'[A(\delta b-\beta d)+B(\alpha d-\delta a)+D'(\beta a-\alpha b)]$$

folglich: **III**, $z=C'\cdot\dfrac{A(\delta b-\beta d)+B(\alpha d-\delta a)+D'(\beta a-\alpha b)}{(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')}$

4, Nach der Vergleichungs-Methode s. p. 251 b.c.d:

Zusatz. Kommen die drey gesuchten Größen nicht zugleich in den gegebenen Gleichungen vor, so wird natürlich die Rechnung viel einfacher, z.B.:

$ABc\gamma-Ba\gamma-ACc\beta+Ca\beta$
$-ABc\gamma+BCc\alpha+ACb\gamma-Cb\alpha$
$=C(A(b\gamma-c\beta)+B(c\alpha-a\gamma)+C'(a\beta-b\alpha))$
$ACb\delta+ADd\alpha+CDa\beta$
$-ADd\beta-BDa\delta-CDb\alpha$

4,

1, $x+y=a.$ 2, $x+z=b.$ und 3, $y+z=c$

$y+z=c$ abgezogen,

giebt $x-y=b-c$

also: $x+y+(x-y)=a+(b-c)$ und $x+y-(x-y)=a-(b-c)$

$2x=a+b-c$ $\quad$ $2y=a-b+c$

also: **I**, $x=\dfrac{a+b-c}{2}$ $\quad$ also: **II**, $y=\dfrac{a-b+c}{2}$

ferner $y+z=c$

giebt: **III**, $z=c-y=c-\dfrac{a-b+c}{2}$
$=\dfrac{-a+b+c}{2}$

$ADc\beta-Dac\beta-ADb\gamma+Dab\gamma$
$Bad\gamma-Dab\gamma-BDc\alpha+Dbc\alpha$
$Bac\delta-ADc\delta-Bad\gamma+ABd\gamma$

Oder auch: $\dfrac{c}{C}\cdot\dfrac{A(d\beta-b\delta)+B(a\delta-d\alpha)+D(b\alpha-a\beta)}{A(b\gamma-c\beta)+B(c\alpha-a\gamma)+C(a\beta-b\alpha)}$

$$x + y = a.$$
$$x + z = b.$$
$$y + z = c.$$

also: $2x + 2y + 2z = a + b + c$

$$2(x+y+z) = a+b+c$$

also: $x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = \frac{s}{2}$ für $a+b+c = s.$

folglich: I, $x = \frac{s}{2} - (y+z)$

$= \frac{s}{2} - c$ oder $= \frac{s-2c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$

eben so: II, $y = \frac{s}{2} - b$ „ $= \frac{a+c-b}{2}$

und III, $z = \frac{s}{2} - a$ „ $= \frac{b+c-a}{2}$

Beyspiele ad §. 95.

5, N. 19.

$x + y + z = a.$ $my = nx.$ und $pz = qx$

giebt: $y = \frac{n}{m}.x$ $\quad z = \frac{q}{p}x$

also: $x + \frac{n}{m}x + \frac{q}{p}x = a$ $(mp.$

$$mpx + npx + mqx = mp.a$$
$$(mp + np + mq)x = mp.a$$

also: I, $x = \frac{mp.a}{mp+np+mq}$

$= mp.A$ für $\frac{a}{mp+np+mq} = A.$

II, $y = \frac{n}{m}x = \frac{n}{m}.mpA$

$= npA.$

und III, $z = mqA.$

6, N. 22.

1, $Ax + By = D.$ $(b$ 2, $ax + by = d$ $(B.$ 3, $\mathfrak{C}y + \gamma z = d$

giebt: $bAx + bBy = bD$ $aBx + bBy = dB$

ferner $aBx + bBy = dB$

bleibt $(bA - aB)x = bD - dB$

also: I, $x = \frac{bD - dB}{bA - aB}.$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

4, Nach der ~~Vergleichungs~~ Methode

folgt aus 1, $Ax + By + Cz = D'$

2, $ax + by + cz = d$

und 3, $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$,

wenn man das m fache der ersten und das n fache der zweiten Gleichung summirt und davon die dritte Gleichung abzieht:

$$Amx + Bmy + Cmz + anx + bny + cnz - (\alpha x + \beta y + \gamma z) = D'm + dn - \delta.$$

oder $(Am + an - \alpha)x + (Bm + bn - \beta)y + (Cm + cn - \gamma)z = D'm + dn - \delta$.

Soll in dieser Gleichung y und $z = 0$ werden, so muß:

$$Bm + bn - \beta = 0. \qquad \text{und} \quad Cm + cn - \gamma = 0$$

$$Bm = \beta - bn \qquad\qquad Cm = \gamma - cn$$

also: $m = \dfrac{\beta - bn}{B}$ $\qquad m = \dfrac{\gamma - cn}{C}$

folgt:

$$\frac{\beta - bn}{B} = \frac{\gamma - cn}{C}$$

$$C\beta - Cbn = B\gamma - Bcn$$

$$Bcn - Cbn = B\gamma - C\beta$$

$$(Bc - Cb)n = B\gamma - C\beta$$

also: 1, $n = \dfrac{B\gamma - C\beta}{Bc - Cb}$

und: 2, $m = \dfrac{\beta - bn}{B} = \dfrac{\beta - b.\dfrac{B\gamma - C\beta}{Bc - Cb}}{B}$

$$= \frac{Bc\beta - Cb\beta - Bb\gamma + Cb\beta}{B(Bc - Cb)}$$

$$= \frac{Bc\beta - Bb\gamma}{B(Bc - Cb)} = \frac{c\beta - b\gamma}{Bc - Cb} \text{ werden,}$$

wodurch sich:

$$(Am + an - \alpha)x = \left(A\frac{c\beta - b\gamma}{Bc - Cb} + a\frac{B\gamma - C\beta}{Bc - Cb} - \alpha\right)x$$

$$= \frac{Ac\beta - Ab\gamma + Ba\gamma - Ca\beta - Bc\alpha + Cb\alpha}{Bc - Cb}\, x$$

und:

$$D'm + dn - \delta = D'.\frac{c\beta - b\gamma}{Bc - Cb} + d.\frac{B\gamma - C\beta}{Bc - Cb} - \delta$$

$$= \frac{D'c\beta - D'b\gamma + Bd\gamma - Cd\beta - Bc\delta + Cb\delta}{Bc - Cb} \text{ ergiebt,}$$

folgt:

251c:

$$\text{I,}\ x = \frac{Dm + dn - \delta}{Am + an - \alpha} = \frac{Dc\beta - Db\gamma + Bd\gamma - Bc\delta + Cb\delta - Cd\beta}{Ac\beta - Ab\gamma + Ba\gamma - Bc\alpha + Cb\alpha - Ca\beta}$$

$$= \frac{D(c\beta - b\gamma) + B(d\gamma - c\delta) + C(b\delta - d\beta)}{A(c\beta - b\gamma) + B(a\gamma - c\alpha) + C(b\alpha - a\beta)}.$$

Soll dagegen in dieser Gleichung x und $z = 0$ werden, so muss:

$$Am + an - \alpha = 0 \quad \text{und} \quad Cm + cn - \gamma = 0,$$

$$Am = \alpha - an \qquad Cm = \gamma - cn$$

also: $$m = \frac{\alpha - an}{A} = \frac{\gamma - cn}{C}$$

$$C\alpha - Can = A\gamma - Acn$$

$$(Ac - Ca)n = A\gamma - C\alpha$$

also: $$\text{3,}\ n = \frac{A\gamma - C\alpha}{Ac - Ca}$$

und $$\text{4,}\ m = \frac{\alpha - an}{A} = \frac{\alpha - a\frac{A\gamma - C\alpha}{Ac - Ca}}{A}$$

$$= \frac{Ac\alpha - Ca\alpha - Aa\gamma + Ca\alpha}{A(Ac - Ca)}$$

$$= \frac{c\alpha - a\gamma}{Ac - Ca} \text{ werden,}$$

wodurch sich:

$$(Bm + bn - \beta)y = \left(\frac{Bc\alpha - Ba\gamma}{Ac - Ca} + \frac{Ab\gamma - Cb\alpha}{Ac - Ca} - \beta\right)\cdot y$$

$$= \frac{Bc\alpha - Ba\gamma + Ab\gamma - Cb\alpha - Ac\beta + Ca\beta}{Ac - Ca}\cdot y$$

und $$Dm + dn - \delta = \frac{Dc\alpha - Da\gamma}{Ac - Ca} + \frac{Ad\gamma - Cd\alpha}{Ac - Ca} - \delta$$

$$= \frac{Dc\alpha - Da\gamma + Ad\gamma - Cd\alpha - Ac\delta + Ca\delta}{Ac - Ca} \text{ ergiebt,}$$

folglich:

$$\text{II,}\ y = \frac{Dm + dn - \delta}{Bm + bn - \beta} = \frac{Dc\alpha - Da\gamma + Ad\gamma - Ac\delta + Ca\delta - Cd\alpha}{Bc\alpha - Ba\gamma + Ab\gamma - Ac\beta + Ca\beta - Cb\alpha}$$

$$= \frac{D(c\alpha - a\gamma) + A(d\gamma - c\delta) + C(a\delta - d\alpha)}{B(c\alpha - a\gamma) + A(b\gamma - c\beta) + C(a\beta - b\alpha)}$$

Soll endlich in dieser Gleichung x und $y = 0$ werden, so muss:

$$Am + an - \alpha = 0 \quad \text{und} \quad Bm + bn - \beta = 0,$$

$$Am = \alpha - an \qquad Bm = \beta - bn$$

also: $$m = \frac{\alpha - an}{A} = \frac{\beta - bn}{B}$$

||

$$B\alpha - Ban = A\beta - Abn$$
$$Abn - Ban = A\beta - B\alpha$$
$$(Ab - Ba)n = A\beta - B\alpha$$

also: 5, $n = \dfrac{A\beta - B\alpha}{Ab - Ba}$

und 6, $m = \dfrac{\alpha - an}{A} = \dfrac{\alpha - a \cdot \dfrac{A\beta - B\alpha}{Ab - Ba}}{A}$

$= \dfrac{Ab\alpha - Ba\alpha - Aa\beta + Ba\alpha}{A(Ab - Ba)}$

$= \dfrac{b\alpha - a\beta}{Ab - Ba}$ werden,

wodurch sich:

$(Cm + cn - \gamma)z = \left(\dfrac{Cb\alpha - Ca\beta}{Ab - Ba} + \dfrac{Ac\beta - Bc\alpha}{Ab - Ba} - \gamma\right)z$

$= \dfrac{Cb\alpha - Ca\beta + Ac\beta - Bc\alpha - Ab\gamma + Ba\gamma}{Ab - Ba} \cdot z$

und $Dm + dn - \delta = \dfrac{Db\alpha - Da\beta}{Ab - Ba} + \dfrac{Ad\beta - Bd\alpha}{Ab - Ba} - \delta$

$= \dfrac{Db\alpha - Da\beta + Ad\beta - Bd\alpha - Ab\delta + Ba\delta}{Ab - Ba}$ ergiebt,

folglich:

III, $z = \dfrac{Dm + dn - \delta}{Cm + cn - \gamma} = \dfrac{Db\alpha - Da\beta + Ad\beta - Ab\delta + Ba\delta - Bd\alpha}{Cb\alpha - Ca\beta + Ac\beta - Ab\gamma + Ba\gamma - Bc\alpha}$

$= \dfrac{D(b\alpha - a\beta) + A(d\beta - b\delta) + B(a\delta - d\alpha)}{C(b\alpha - a\beta) + A(c\beta - b\gamma) + B(a\gamma - c\alpha)}$.

Zusatz 1. Ähnliche Formeln entwickelt man auf gleiche Weise auch für 4, 5, und mehrere unbekannte Größen.

Anmerkung: Daß übrigens die durch vorstehende 4 verschiedenen Methoden für die unbekannten Größen x, y und z gefundenen Formeln identisch sind, also vollkommen gleiche Resultate geben, versteht sich von selbst.

(Fortsetzung ad p. 247 sub III.)

$$\# = \frac{\beta c d A - \beta a c D' - \gamma b d A + \gamma a b D' - \delta b c A + \delta a c B + \gamma b d A - \gamma a d B - \gamma a b D' + \gamma a d B + \alpha b c D' - \alpha c d B}{(cA - aC')(\beta c - \gamma b) - (bC' - cB)(\gamma a - \alpha c)}$$

$$= \frac{\beta c d A - \beta a c D' + \delta a c B - \delta b c A + \alpha b c D' - \alpha c d B}{(cA - aC')(\beta c - \gamma b) - (bC' - cB)(\gamma a - \alpha c)}$$

$$= c \cdot \frac{\alpha (bD' - dB) + \beta (dA - aD') + \delta (aB - bA)}{(cA - aC')(\beta c - \gamma b) - (bC' - cB)(\gamma a - \alpha c)}$$

Ad	$D'a$	$c\beta$	$b\gamma$
Ab	Ba	$c\delta$	$d\gamma$
$D\gamma$	C' Bd	$b\alpha$	$a\beta$
Ab	Ba	cC'	$d\beta$
		$c\alpha$	αc
$Ba - Ab$		$bD' - Bd$ / $c\delta - d\gamma$	

Aus No. 2. folgt: $by = d - ax$

$= d - a.\frac{bD - dB}{bA - aB}$

$= \frac{bdA - adB - abD + adB}{bA - aB}$

$= \frac{bdA - abD}{bA - aB}$

$= \frac{dA - aD}{bA - aB}.b.$

also: II.) $y = \frac{dA - aD}{bA - aB}$.

Aus No. 3. folgt: $\gamma z = \delta - Cy = \delta - C.\frac{dA - aD}{bA - aB}$

$= \frac{\delta(bA - aB) - C(dA - aD)}{bA - aB}.$

also: III.) $z = \frac{\delta(bA - aB) - C(dA - aD)}{\gamma(bA - aB)}$,

oder: $= \frac{A(\delta b - Cd) - a(\delta B - CD)}{\gamma(bA - aB)}.$

7.) N. 31.

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a.$ 2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b.$ und 3) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$

giebt wie im Beysp. N. 4: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a + b + c$

$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = a + b + c$

also: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{s}{2}$ für $a + b + c = s.$

folglich: $\frac{1}{x} = \frac{s}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$, also: I.) $x = \frac{2}{a+b-c}$

und auf gleiche Weise: II.) $y = \frac{2}{a+c-b}$

III.) $z = \frac{2}{b+c-a}$

8.) N. 34.

1) $ax + by = l$ 2) $cx + dv = m$ 3) $ex + fz = n$ (h und 4) $gy + hz = p$ (f

$afgx + bfgy = fgl$ (fg

giebt: $ehx + fhz = hn$

$fgy + fhz = fp$

hieraus: $fgy + fhz = fp$

$$4.\quad ehx - fgy = hn - fp.$$

$$\cancel{behx - bfgy = bhn - bfp} \quad b$$

hierzu $afgx + bfgy = fgl$

$$(afg + beh)x = fgl + bhn - bfp$$

also: $\quad \mathrm{I},\ x = \dfrac{fgl + bhn - bfp}{afg + beh}$

oder $\quad = \dfrac{bhn + f(gl - bp)}{afg + beh}$

Aus No. 2. folgt:

$$c\,\frac{bhn + f(gl - bp)}{afg + beh} + dv = m \qquad (afg + beh)$$

$$bchn + cf(gl - bp) + d(afg + beh)v = m(afg + beh)$$

$$\begin{aligned} d(afg + beh)v &= m(afg + beh) - bchn - cf(gl - bp) \\ &= afgm + behm - bchn - cfgl + bcfp. \\ &= bh(em - cn) + fg(am - cl) + bcfp. \end{aligned}$$

also: $\quad \mathrm{II},\ v = \dfrac{bh(em - cn) + fg(am - cl) + bcfp}{d(afg + beh)}$

Aus No. 1. folgt:

$$a\,\frac{bhn + f(gl - bp)}{afg + beh} + by = l \qquad (afg + beh)$$

$$abhn + afgl - abfp + b(afg + beh)y = afgl + behl$$

$$\begin{aligned} b(afg + beh)y &= afgl + behl - abhn - afgl + abfp \\ &= behl - abhn + abfp \\ &= b(el - an)h + abfp \end{aligned}$$

$$(afg + beh)y = (el - an)h + afp$$

also: $\quad \mathrm{III},\ y = \dfrac{afp + (el - an)h}{afg + beh}$

Endlich aus No. 4. ~~folgt~~

$$gy + hz = p$$

folgt: $\quad hz = p - gy$

$$= p - g\cdot\frac{afp + (el - an)h}{afg + beh}$$

$$(afg + beh)hz = (afg + beh)p - afgp \mp (el - an)gh \qquad (afg + beh)$$

// $(afg + beh)hz = afgp + behp - afgp - eghl + aghn$

$= behp + aghn - eghl$

$= (bep + (an - el)g)h$

also: IV, $z = \frac{bep + (an - el)g}{afg + beh}$.

9, N. 30.

1, $\frac{xy}{ay+bx} = l$. 2, $\frac{yz}{cz+dy} = m$ und 3, $\frac{xz}{ez+fx} = n$

$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{l}$ $\frac{cz+dy}{yz} = 1/m$ $\frac{ez+fx}{xz} = 1/n$

4, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1/l$ 5, $\frac{c}{y} + \frac{d}{z} = 1/m$ 6, $\frac{e}{x} + \frac{f}{z} = 1/n$

$\frac{cf}{y} + \frac{df}{z} = f/m$ ·f $\frac{ed}{x} + \frac{df}{z} = d/n$ ·d

hievon $\frac{ed}{x} + \frac{df}{z} = d/n$

bleibt: $\frac{cf}{y} - \frac{ed}{x} = \frac{f}{m} - \frac{d}{n}$ ·b

$\frac{bcf}{y} - \frac{bed}{x} = \frac{bf}{m} - \frac{bd}{n}$

$\frac{acf}{x} + \frac{bcf}{y} = \frac{cf}{l}$ ·cf

$\frac{bcf}{y} - \frac{bed}{x} = \frac{bf}{m} - \frac{bd}{n}$ abgezogen,

bleibt: $\frac{acf}{x} + \frac{bde}{x} = \frac{cf}{l} - \frac{bf}{m} + \frac{bd}{n}$

$\frac{acf + bde}{x} = \frac{cfmn - bfln + bdlm}{lmn}$

$= \frac{(cm - bl)fn + bdlm}{lmn}$

$\frac{1}{x} = \frac{(cm - bl)fn + bdlm}{lmn(acf + bde)}$

also: I, $x = \frac{(acf + bde)lmn}{(cm - bl)fn + bdlm}$.

Aus No. 4. folgt:

$\frac{b}{y} = 1/l - a/x$

$= 1/l - a \cdot \frac{(cm - bl)fn + bdlm}{(acf + bde)lmn}$

$= \frac{(acf + bde)mn - a((cm - bl)fn + bdlm)}{(acf + bde)lmn}$

$= \frac{acfmn + bdemn - acfmn + abfln - abdlm}{(acf + bde)lmn}$

$= \frac{bdemn + abfln - abdlm}{(acf + bde)lmn} = \frac{b((afl + dem)n - adlm)}{(acf + bde)lmn}$ //

$\frac{y}{c} + \frac{z}{d} = \frac{1}{m}$ ·cdm

$dy + cz = cdm$ ·e

$dey + cez = cdem$

$cfx + cez = cefn$

$-dey + cfx = -cdem + cefn$

$cfx - dey = -cdem + cefn$ ·a

$acfx - adey = acefn - acdem$

$\frac{x}{e} + \frac{z}{f} = \frac{1}{n}$ ·efn

$fx + ez = efn$ ·c

$cfx + cez = cefn$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1/l$ ·abl

$bx + ay = abl$ ·de

$bdex + adey = abdel$

$acfx - adey = acefn - acdem$

$acfx + bdex = abdel - acefn$

II $\quad \frac{1}{y} = \frac{(afl+dem)n - adlm}{(acf+bde).lmn}$

also: II, $y = \frac{(acf+bde)lmn}{(afl+dem)n - adlm}$.

Aus No. 6. folgt:

$$\frac{f}{z} = \frac{1}{n} - \frac{e}{x}$$
$$= \frac{1}{n} - e.\frac{(cm-bl)fn+bdlm}{(acf+bde)lmn}$$
$$= \frac{(acf+bde)lm - e(cm-bl)fn - bdlme}{(acf+bde)lmn}$$
$$= \frac{acflm + bdelm - ecfmn + befln - bdelm}{(acf+bde)lmn}$$
$$= \frac{acflm - ecfmn + befln}{(acf-bde)lmn}$$
$$= f.\frac{(al-en)cm+beln}{(acf+bde)lmn}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{(al-en)cm+beln}{(acf+bde)lmn}$$

also: III, $z = \frac{(acf+bde)lmn}{(al-en)cm+beln}$.

10.) N. 39.

1, $x+y+z+t+v = a$.
2, $x+y+z+t+w = b$.
3, $x+y+z+v+w = c$.
4, $x+y+t+v+w = d$.
5, $x+z+t+v+w = e$.
6, $y+z+t+v+w = f$.

giebt: $5(x+y+z+t+v+w) = a+b+c+d+e+f = s$ (vergl. Aufg. 4.)

also: $x+y+z+t+v+w = \frac{s}{5}$.

folglich:
I, $x = \frac{s}{5} - f$.
II, $y = \frac{s}{5} - e$.
III, $z = \frac{s}{5} - d$.
IV, $t = \frac{s}{5} - c$.
V, $v = \frac{s}{5} - b$.
und VI, $w = \frac{s}{5} - a$

für $a+b+c+d+e+f = s$.

II,

1, $xy = ax + by$ 2, $xz = cx + dz$ und 3, $yz = fy + gz$

giebt $xy - by = ax$ $xz - dz = cx$ $yz - gz = fy$

4, $(x-b)y = ax$ 5, $(x-d)z = cx$ 6, $(y-g)z = fy$

also: $y = \frac{ax}{x-b}$ $z = \frac{cx}{x-d}$ $z = \frac{fy}{y-g}$

$$(y-g)cx = (x-d)fy$$
$$cxy - cgx = fxy - dfy$$
$$cxy - fxy + dfy = cgx$$
$$(cx - fx + df)y = cgx$$

also: $y = \frac{cgx}{cx - fx + df}$

$$(cx - fx + df)ax = (x-b)cgx$$
$$(cx - fx + df)a = (x-b)cg$$
$$acx - afx + adf = cgx - bcg$$
$$\left(\underset{-}{ac} \underset{+}{-} af \underset{+}{-} cg\right)x = \underset{+}{-} adf \underset{+}{-} bcg$$

also: I, $x = \frac{adf + bcg}{af - ac + cg}$
$$= \frac{adf + bcg}{a(f-c) + cg}.$$

aus No. 4. folgt: $\left(\frac{adf + bcg}{af - ac + cg} - b\right)y = \frac{adf + bcg}{af - ac + cg} \cdot a$

$$(adf + bcg - abf + abc - bcg)y = a(adf + bcg)$$
$$a(df - bf + bc)y = a(adf + bcg)$$

also: II, $y = \frac{adf + bcg}{df - bf + bc}$
$$= \frac{adf + bcg}{f(d-b) + bc}.$$

aus No. 5. folgt:

$$\left(\frac{adf + bcg}{af - ac + cg} - d\right)z = c \cdot \frac{adf + bcg}{af - ac + cg}$$
$$(adf + bcg - adf + acd - cdg)z = c(adf + bcg)$$
$$(bcg + acd - cdg)z = c(adf + bcg) \;\|$$

$$\cancel{c(bg + ad - dg)\,z = c(adf + bcg)}$$

also: **III**, $z = \dfrac{adf + bcg}{bg + ad - dg} = \dfrac{adf + bcg}{g(b-d) + ad}$

§. 96.

~~b. Von den bestimmten quadratischen und hoehern Gleichungen.~~

~~Erklaerung. Eine quadratische und höhere Gleichung auflösen, heißt: alle Werthe von x finden, welche so beschaffen sind, daß sie, an die Stelle von x in die Gleichung gesetzt, derselben Genüge leisten. Man nennt diese Werthe die Wurzeln der Gleichungen, und die Gleichungen, welche entstehen, wenn man diese Wurzeln (welche a, b, c, d, ꝛc. seyn mögen) der unbekannten Größe gleich setzt, also $x = a$, $x = b$, $x = c$, ꝛc: die Wurzelgleichungen, woraus sich die genullirten oder annullisirten Wurzelgleichungen $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, ꝛc: ergeben.~~

§. 97.

b, Von den unbestimmten verwickelten Gleichungen des 1sten Grades.

Erklaerung. Da nach §. 94 und 95. aus m Gleichungen $m - 1$. unbekannte Größen eliminirt werden können, so muß natürlich eine Aufgabe, deren Bedingungen so gestellt sind, daß für m unbekannte Größen auch m Gleichungen gebildet werden können, genau bestimmt seyn, und es wird dagegen eine Aufgabe, in welcher für $n\,(> m)$ unbekannte Größen nur m Gleichungen angesetzt werden können zu den unbestimmten Aufgaben gehören, und um so unbestimmter seyn, je größer n im Vergleiche mit m ist, weil man dann durch Elimination von $m - 1$. gesuchten Größen auf eine Endgleichung trifft, welche neben bekannten noch $n - (m - 1) = n - m + 1$, also mehr als eine unbekannte Größe enthält, und weil man folglich: für $n - m + 1 = 2, 3, 4, \ldots$ zu dieser Endgleichung $1, 2, 3, \ldots$ unbekannte Größen beliebig als bekannt annehmen muß, um eine dieser unbekannten Größen durch bekannte Größen bestimmen zu können.

Hiernach enthält die Aufgabe: eine unbestimmte Gleichung aufzulösen, das Problem, eine Gleichung mit 2, 3, 4, etc. unbekannten Größen unter gewissen Bedingungen, die sich nicht in eine Gleichung bringen lassen, aufzulösen; — ein Problem, dessen Auflösung besonders dann seine Schwierigkeiten hat, wenn der Werth $n - m > 1$, ~~und~~ oder wenn die Gleichung eine höhere Gleichung ist, oder die Aufgabe noch neben Gleichungen vom ersten Grade höhere Gleichungen mit enthält.

Die Unbestimmtheit solcher Aufgabe liegt ~~lediglich und~~ vorzüglich darin, daß sich für die gesuchten unbekannten ~~Wert~~ Größen sehr viele und meistens eine unendliche Menge von Werthen annehmen lassen und angeben, daß also für jede Aufgabe eine eben so grosse ~~unzählige~~ Menge von Auflösungen statt findet; in der Regel schränkt man aber diese Menge von Auflösungen dadurch bis auf einige wenige ein, daß man nur ganze und positive Werthe verlangt ~~und auch~~ (wie ~~es~~ oft selbst die Natur der Gegenstände weder gebrochene ~~unzulässige~~, noch negative Werthe gestattet), und daß man auch diese Werthe noch durch Bestimmung gewisser Grenzen, innerhalb welchen die gesuchten Größen liegen sollen, beschränkt. Durch solche Einschränkungen wird eine unbestimmte Aufgabe öfters eine bestimmte, so daß eigentlich für jede unbekannte Größe nur ein Werth sich ergiebt und möglich ist; ja öfters ist dann sogar nicht eine Auflösung möglich; z.B. wenn das Product zweyer positiven ganzen Zahlen = 100 seyn soll, so können diese Zahlen nur seyn: 1·100 oder 2·50 oder 4·25 oder 6·20 oder 10·10; verlangt man aber noch, daß eine ~~dieser Zahlen~~ oder beyde Größen zwischen 40 und 60 liegen sollen, so ist die Aufgabe genau bestimmt, oder unmöglich, denn ~~dann können diese Zahlen nur~~ Product nur = 2·50 seyn.

Weil die gesuchten Größen in diesen Aufgaben meistens sehr viele Werthe haben, deshalb nennt man auch diese Größen selbst vieldeutige oder veränderliche Größen.

~~Aufgabe~~ 1. Um eine unbestimmte Aufgabe zu lösen, reducirt man die ~~gegebenen~~ für n unbekannte Größen gegebenen m Gleichungen durch Elimination (nach §. 94 u. 95.) bis auf eine Endgleichung, welche noch $n - (m - 1)$ unbekannte Größen enthält, von denen sich aber keine mehr eliminiren läßt, und entwickelt daraus für eine der darin enthaltenen unbekannten Größen eine Formel, welche diese Größe durch die nicht eliminirten unbekannten und durch die sonst mit gegebenen bekannten Größen bestimmt; hierauf nimmt man für die in dieser Formel enthaltenen unbekannten Größen ~~[illegible]~~ beliebige Werthe an und sagt bedingungsweise: „wenn u, v, w, „.... = A, B, C, ... sind, so haben x den Werth E, dann y den Werth F, fer-„ner z den Werth G, etc." z.B.:

1, aus $x + 3y = 20$

folgt: $x = 20 - 3y$,

also für: $y = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$

ist: $x = 17.\ 14.\ 11.\ 8.\ 5.\ 2.$

2, aus $x + y + z = 100.$ und $x + y = z$

folgt: $x + y = 100 - z$

also: $z = 100 - z$

$2z = 100$

folgt: $z = 50.$ allemal,

und $x + y = 100 - z = 100 - 50 = 50.$

folgt: $x = 50 - y$

also für $y = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ 48.\ 49.$

$x = 49.\ 48.\ 47\ \ldots\ldots\ 2.\ 1.$

3, aus $x + y + z = 20.$ und $5x + y/2 = 30$

folgt: $x = 6 - y/10$

also: $6 - y/10 + y + z = 20$

$z = 20 - 6 + y/10 - y$

$= 14 - \frac{9y}{10}$

also für $y = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 10.\ 15.\ \ldots$

$x = 6 - y/10 = 5{,}9\ \ 5{,}8.\ \ 5{,}7.\ \ 5{,}6.\ \ 5{,}5\ \ 5.\ \ 4{,}5.\ \ldots$

und $z = 14 - \frac{9y}{10} = 13{,}1.\ \ 12{,}2.\ \ 11{,}3.\ \ 10{,}4.\ \ 9{,}5\ \ 5.\ \ 0{,}5.\ \ldots$

64 . 23
128
192

4, aus $x + 2y - 5z = 60$

folgt: $x = 60 - 2y + 5z$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{also für } y = 1.\ 2.\ 3.\ 3.\ 4.\ 7.\ 10. \\ \text{und } z = 1.\ 2.\ 3.\ 7.\ 10.\ 3.\ 4. \\ \text{ist: } x = 60 - 2y + 5z = 63.\ 66.\ 69.\ 89.\ 102.\ 61.\ 60. \end{array}\right\} \text{etc.}$$

Anmerk: Hätte man in vorstehender Aufgabe für die erste der gesuchten Größe auch gebrochene und negative Zahlen angenommen, so würde man eine noch viel größere Anzahl Auflösungen erhalten haben. Da demnach durch diese erste Aufgabe die Anzahl der Auflösungen unbeschränkt ist, so sind noch allgemeine Regeln für die gewöhnlichen Beschränkungen der unbestimmten Aufgaben nöthig, welche die folgenden Aufgaben nachweisen.

Aufgabe 2. Sollen die unbekannten Größen nur in ganzen Zahlen gefunden werden, so sind 2. verschiedene Fälle möglich:

1, entweder enthält die aus der gefundenen Endgleichung für eine der gesuchten Größen entwickelte Formel keine Brüche, wie in der: Aufg: 1. 2. u. 4. und in diesem Falle braucht man nur für die in dieser Formel enthaltenen unbekannten Größen ganze Zahlen anzunehmen;

2, oder es ~~enthält~~ im Gegentheile ~~hält~~, die aus der gefundenen Endgleichung sich ergebende Formel einen Bruch, wie in der: 3. Aufg:, oder diese Formel ist (wenn in der Endgleichung alle unbekannte Größen Coefficienten haben, zB: $ax+by=c$, oder $ax+by+cz=d$) selbst ein Bruch (nehmlich: $x=\frac{c-by}{a}$, oder $x=\frac{d-by-cz}{a}$), und in diesem Falle bestimmt man durch wirkliche Division den Quotienten in ganzen Zahlen und einen Bruche, setzt ferner diesen Bruch einer neuen unbekannten Größe gleich, womit man eben so verfährt und wiederholt dieß Verfahren so oft, bis ein Quotient ohne Bruch erscheint, worauf man ~~endlich~~ die gesuchten Größen $x, y, z,$ etc: durch die letzte der angenommenen unbekannten Hülfsgrößen bestimmt, und endl: für diese die ganzen Zahlen: ...... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ ..... substituirt und in Rechnung bringt; zB:

5, das Beispiel No. 3. gab:

$$z = 14 - \frac{9y}{10} = 14 - p$$

aus $\frac{9y}{10} = p$ folgt: $y = \frac{10p}{9} = p + p/9 = p + q$;

aus $\frac{p}{9} = q$ " $p = 9q$;

also: ~~$z =$~~ $y = p + q = 10q$, $z = 14 - p = 14 - 9q$ und $x = 6 - \frac{y}{10} = 6 - q$

und für $q = 1$ ist: $y = 10$, $z = 14 - 9 = 5$ und $x = 6 - 1 = 5$. der einzige Fall, welcher positive ganze Zahlen giebt.

6, $3x + 4y = 96.$

giebt: $x = \frac{96-4y}{3} = 32 - y - y/3$

$= 32 - y - p.$

für $y/3 = p$ ist $y = 3p$,

und $x = 32 - 3p - p = 32 - 4p$

also für $p = 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.$

ist $y = 3p = 0.\ 3.\ 6.\ 9.\ 12.\ 15.\ 18.\ 21.\ 24.$

u: $x = 32 - 4p = 32.\ 28.\ 24.\ 20.\ 16.\ 12.\ 8.\ 4.\ 0.$

oder: $3x + 4y = 96$

giebt: $y = \frac{96-3x}{4} = 24 - \frac{3x}{4} = 24 - p$

für $\frac{3x}{4} = p$ ist $x = \frac{4p}{3} = p + p/3 = p + q$

" $p/3 = q$ " $p = 3q$

und $x = p + q = 3q + q = 4q$

u: $y = 24 - p = 24 - 3q.$

also für $q = 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.$

ist $x = 4q = 0.\ 4.\ 8.\ 12.\ 16.\ 20.\ 24.\ 28.\ 32$

u: $y = 24 - 3q = 24.\ 21.\ 18.\ 15.\ 12.\ 9.\ 6.\ 3.\ 0.$

so daß hier nur 7. Fälle möglich sind, denn die Werthe $y = 0$ u: $x = 0.$ können nicht gelten, wenn ganze, positive Zahlen statt finden sollen.

7, $5x + 8y = 71.$

giebt: $x = \frac{71-8y}{5} = 14 + 1/5 - y - \frac{3y}{5}$

$= 14 - y - \frac{3y-1}{5} = 14 - y - p.$

Für $\frac{3y-1}{5} = p$ folgt $y = \frac{5p+1}{3} = p + \frac{2p+1}{3}$

$= p + q$

" $\frac{2p+1}{3} = q$ " $p = \frac{3q-1}{2} = q + \frac{q-1}{2}$

$= q + r$

" $\frac{q-1}{2} = r$ " $q = 2r + 1$

also: $p = q + r = 3r + 1$

$y = p + q = 5r + 2$

u: $x = 14 - y - p = 11 - 8r$

also für $r = -1.\ 0.\ 1.\ 2.$

ist $x = 11 - 8r = 19.\ 11.\ 3.\ -5.$

u: $y = 5r + 2 = -3.\ 2.\ 7.\ 12.$

oder: $5x + 8y = 71.$

giebt: $y = \frac{71-5x}{8} = 8 + 7/8 - \frac{5x}{8}$

$= 8 - \frac{5x-7}{8} = 8 - p.$

Für $\frac{5x-7}{8} = p$ folgt: $x = \frac{8p+7}{5} = p + \frac{3p}{5} + 1 + 2/5 = p + 1 + \frac{3p+2}{5} = p + 1 + q.$

" $\frac{3p+2}{5} = q$ folgt: $p = \frac{5q-2}{3} = q + \frac{2q-2}{3}$

$= q + \frac{2(q-1)}{3} = q + 2r$

" $\frac{q-1}{3} = r$ folgt $q = 3r + 1$

also: $p = q + 2r = 5r + 1$

$x = p + 1 + q = 8r + 3$

und $y = 8 - p = 7 - 5r$

also für $r = -1.\ 0.\ 1.\ 2.$

ist $x = 8r + 3 = -5\ 3.\ 11.\ 19.$

u: $y = 7 - 5r = 12.\ 7.\ 2.\ -3.$

so daß hier nur 2. Fälle mögl: sind, da die negative Werthe: $y = -3$ u: $x = -5$ nicht gefordert sind.

8, $7x + 11y = 100.$

giebt: $x = \frac{100-11y}{7} = 14 + 2/7 - y - \frac{4y}{7}$

$= 14 - y - \frac{4y-2}{7} = 14 - y - 2\frac{2y-1}{7}$

$= 14 - y - 2p.$

oder: $7x + 11y = 100.$

giebt: $y = \frac{100-7x}{11} = 9 + 1/11 - \frac{7x}{11}$

$= 9 - \frac{7x-1}{11} = 9 - p.$

Aus $\frac{2y-1}{7}=p$ folgt: $y=\frac{7p+1}{2}=3p+\frac{p+1}{2}$
$=3p+q.$

" $\frac{p+1}{2}=q$ " $p=2q-1.$

also: $y=3p+q=7q-3$

und $x=14-y-2p=19-11q$

also für $q=-1.\quad 0.\quad +1.\quad 2.$

ist $x=19-11q=30.\quad 19.\quad 8.\quad -3.$

und $y=7q-3=-10.\quad -3.\quad 4.\quad 11.$

Aus $\frac{7x-1}{11}=p$ folgt: $x=\frac{11p+1}{7}=p+\frac{4p+1}{7}$
$=p+q$

" $\frac{4p+1}{7}=q$ " $p=\frac{7q-1}{4}=q+\frac{3q-1}{4}$
$=q+r$

" $\frac{3q-1}{4}=r$ " $q=\frac{4r+1}{3}=r+\frac{r+1}{3}$
$=r+s$

" $\frac{r+1}{3}=s$ " $r=3s-1.$

also: $q=r+s=\quad 4s-1.$

$p=q+r=\quad 7s-2.$

$x=p+q=\quad 11s-3.$

und $y=9-p=\quad 11-7s.$

also für $s=0.\quad 1.\quad 2.$

ist $y=11-7s=11.\quad 4.\quad -3.$

und $x=11s-3=-3.\quad 8.\quad 19.$

so dass hier die Aufgabe für ganze positive Zahlen bestimmt, nehmlich: $x=8$ und $y=4$ ist. ~~Siehe 9.)~~

9. siehe Anm: 2.

Anmerkung 1. Bey Anwendung dieser Regel kommt man gewöhnlich am kürzesten weg, wenn man aus der Endgleichung zunächst eine Formel für diejenige unbekannte Größe entwickelt, welche den kleinsten Coefficienten hat, wie sich diess aus der Vergleichung der doppelten Auflösungen zu Aufg: 6. 7. u: 8. ergiebt.

Anmerkung 2. Vortheilhaft ist es auch, und man kürzt dadurch die Rechnung bedeutend ab, wenn man aus den bey diesem Verfahren erhaltenen Brüchen, welche man einer neuen unbekannten Größe gleich zu setzen hat, sogleich die im Zähler der Brüche enthaltenen gemeinschaftlichen Factoren heraushebt, und folglich z.B: in Aufg: 8. Aufl: 1. nicht: $\frac{4y-2}{7}=p$, sondern 2. $\frac{2y-1}{7}=2p$. setzt.

9.) $8x+5y=17.$

giebt: $y=\frac{17-8x}{5}=3+2/5-x-\frac{3x}{5}$
$=3-x-\frac{3x-2}{5}=3-x-p$

Aus $\frac{3x-2}{5}=p$ folgt: $x=\frac{5p+2}{3}=p+\frac{2p+2}{3}$
$=p+2\frac{p+1}{3}=p+2q.$

Aus $\frac{p+1}{3}=q$ folgt: $p=3q-1.$

also: $x=p+2q=5q-1.$

und $y=3-x-p=5-8q.$

also:

für $q = -2. \quad -1. \quad 0. \quad 1. \quad 2.$

ist $x = 5q-1 = -11. \quad -6. \quad -1. \quad 4. \quad 9.$

u: $y = 5-8q = 21. \quad 13. \quad 5. \quad -3. \quad -11.$

so daß diese Aufgabe für ganze positive Zahlen unmöglich ist.

~~Aufgabe 2.~~

10, $\underline{x+3y+2z=50.}\,(2$ und $\underline{2x+5y-z=20.}$

giebt: $2x+6y+4z=100.$

hiervon $\underline{2x+5y-z=20.}$

bleibt: $\underline{y+5z=80.}$

also: $y=80-5z.$

und $x = 50-3y-2z = 50-3(80-5z)-2z = 50-240+15z-2z$

$= 13z-190.$

also für $z = 14. \quad 15. \quad 16.$

ist: $x = 13z-190 = -8. \quad 5. \quad 18.$

und $y = 80-5z = 10. \quad 5. \quad 0.$

so daß hier die Aufgabe bestimmt, nehml: $x=5$, $y=5$ und $z=15$ ist, wenn ganze Zahlen ~~und pos~~ statt finden sollen.

Aufgabe. 3. Um zu bestimmen, welche positive Werthe bey einer unbestimmten Aufgabe statt finden können, wenn die Bedingungen der Aufgabe negative Werthe für die unbekannten Größen nicht gestatten, löst man die Aufgabe nach Anweisung der vo: Aufg: auf und untersucht dann, zwischen welchen Grenzen die letzte der angenommenen unbekannten Hülfsgrößen liegen muß, wenn die durch die Aufgabe gesuchten unbekannten Größen $x, y, z, \ldots$ positiv bleiben sollen. Dieß ergiebt sich dadurch, daß man die für die gesuchten Größen $x, y, z, \ldots$ gefundenen und durch die letzte der angenommenen Hülfsgrößen ausgedrückten Werthe $=0$ setzt, und daraus bestimmt, wie groß diese Hülfsgröße seyn muß, wenn ~~die~~ die durch diesen Werth bestimmte unbekannte Größe $=0$ werden soll. Ob ~~nämlich~~ die gesuchte Größe $x, y, z, \ldots$ mit dem Wachsen der Hülfsgröße positiv wird ~~und~~ also zunimmt, oder negativ wird, also abnimmt, ob also der durch dieß Verfahren für die Hülfs-

grösste gefundene Werth die höchste oder die niedrigste Grenze sey; dieselbe stimmt sich auf folgende Art: wenn die letzte Hülfsgröße $= t$, und durch solche 3te / die gesuchte Größe $x = 5t - 80$.
und " " " $y = \cancel{185} - 6t$ bestimmt, so wird: $30\frac{5}{6}$

$x = 0$ für $t = \frac{80}{5} = 16$, und $y = 0$ für $t = \frac{185}{6} = \cancel{30\frac{5}{6}}$ und es muß folglich $t > 16$ seyn, weil sonst $x = 0$ oder negativ würde,
und $t < 30\frac{5}{6}$ " , " " $y = 0$ " " " .

Hat man endlich dadurch den kleinsten und größten Werth für diese letzte Hülfsgröße t bestimmt, so geben alle zwischen diesen beyden Werthen inne liegenden ganzen Zahlen, für t in Rechnung gebracht, für die gesuchten Größen x, y, z, ganze und positive Werthe, und es können dagegen letztere nicht statt finden, wenn ~~der Umfang~~ die gefundenen Grenzen für t keine ganzen Zahlen einschließen. Also ist z. B.:

in Aufgabe 5. $q < 6$ wegen $x = 6 - q$,
$q < 1\frac{5}{9}$ " $z = 14 - 9q$,
und $q > 0$. " $y = 10q$ zu nehmen, so daß ~~also~~ nur für $q = 1$ ~~ein~~ positive Werthe mögl. sind;

Zu Aufgabe 6. ist $p > 0$ wegen $y = 3p$,
und $p < 8$. " $x = 32 - 4p$. zu nehmen und sind folgl. 7. Fälle für $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und 7. mögl.;

Zu Aufgabe 7. ist $r < 1\frac{3}{8}$ wegen $x = 11 - 8r$,
und $r > (-\frac{2}{5})$ " $y = 5r + 2$ zu nehmen, so daß 2 Fälle für $r = 0$ und 1. möglich sind;

Zu Aufgabe 8. ist $q < 1\frac{8}{11}$ wegen $x = 19 - 11q$,
und $q > \frac{3}{7}$. " $y = 7q - 3$ zu nehmen, also nur 1 Fall für $q = 1$. möglich;

Zu Aufgabe 9 ist $q < \frac{5}{8}$. wegen $y = 5 - 8q$,
und $q > \frac{1}{5}$ " $x = 5q - 1$. zu nehmen, also kein Fall mögl.: weil zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{8}$. kein Ganzes inne liegt.

Zu Aufgabe 10. endlich ist: $z < 16$. wegen $y = 80 - 5z$,
und $z > 14\frac{8}{13}$. " $x = 13z - 190$ zu nehmen, also sind nur für $z = 15$ ganze und positive Zahlen möglich.

11, Aus $20x + 10y + 2z = 200.$ } folgt für gesuchte ganze und positive Werthe:
oder folgt: 2) $10x + 5y + z = 100.$ }

$$x = \frac{100 - 5y - z}{10} = 10 - \frac{y}{2} - \frac{z}{10} = 10 - \frac{5y+z}{10} = 10 - p.$$

für $\frac{5y+z}{10} = p$ ist $y = \frac{10p - z}{5} = 2p - z/5 = 2p - q$

" $z/5 = q$ " $z = 5q$

Hier sind 2 Hülfsgrößen p und q einzuschalten gewesen und folglich mit den für x, y und z gefundenen Werthen zu vergleichen; es ergiebt sich aber:

1, aus $z = 5q$, daß $z = 0$ wird für $q = 0$ und folglich $q > 0$ seyn muß,

2, " $x = 10 - p$, daß $x = 0$ " " $p = 10.$ " " $p < 10$ " ", und

3, " $y = 2p - q$, für deren $y = -q$ also negativ wird für $p \leqq 0$, daß also p weder negativ, noch $= 0$, sondern $p > 0$, ~~für~~ und wegen No. 2. $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ oder 9 seyn muß; aber so folgt:

4, aus $y = 2p - q$, daß

für $p = 1$ und $q = 2$ der Werth $y = 0$ würde, also für $p = 1$ nur $q = 1$.
" $p = 2$ " $q = 4$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 2$ " $q = 1.2.3.$
" $p = 3.$ " $q = 6.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 3.$ " $q = 1.2.3.4.5.$
" $p = 4.$ " $q = 8.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 4$ " $q = 1$ bis $7.$
" $p = 5.$ " $q = 10.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 5$ " $q = 1$ " $9.$
" $p = 6.$ " $q = 12.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 6.$ " $q = 1$ " $11.$
" $p = 7.$ " $q = 14.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 7.$ " $q = 1$ " $13.$
" $p = 8.$ " $q = 16.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 8.$ " $q = 1.$ " $15.$
u: " $p = 9$ " $q = 18.$ " " $y = 0.$ " , " " $p = 9$ " $q = 1$ " $17.$ angenommen werden kann, und es also für diese Aufgabe $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81.$ mögliche und verschiedene Auflösungen giebt, wenn ganze und positive Zahlen für x, y und z verlangt werden. Es ist auch wirklich: z.B.:

für p =	1.	2.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	9.	9.	etc:
und " q =	1.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	1.	10.	17.	"
$x = 10 - p$ =	9.	8.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	1.	1.	"
$y = 2p - q$ =	1.	3.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	17.	8.	1.	"
u: $z = 5.q$ =	5.	5.	15.	25.	35.	45.	55.	65.	75.	5.	50.	85.	"

12, Die Zahlen zu finden, welche durch 5 und 8. dividirt die Reste a und b geben; welche sind es?

Sind diese Zahlen $= x$, so muß $x - a$ durch 5 und $x - b$ durch 8. theilbar seyn, ist also: $\frac{x-a}{5} = p$ und $\frac{x-b}{8} = q$

so ist: $x = 5p + a = 8q + b$

$$5p = 8q + b - a$$

also: $p = \frac{8q+b-a}{5} = q + \frac{3q+b-a}{5} = q + r$

Aus $\frac{3q+b-a}{5} = r$ folgt: $q = \frac{5r+a-b}{3} = r + \frac{2r+a-b}{3} = r + s$

" $\frac{2r+a-b}{3} = s$ " $r = \frac{3s-a+b}{2} = s + \frac{s-a+b}{2} = s + t$

" $\frac{s+b-a}{2} = t$ " $s = 2t + a - b.$

Also ~~für~~ ist $r = s + t = 3t + a - b.$

$q = r + s = 5t + 2a - 2b.$

$p = q + r = 8t + 3a - 3b.$

und $x = 5p + a = 40t + 16a - 15b$; z.B.:

oder $= 8q + b$

für $a = 3$ und $b = 7$ ist: $x = 40t + 48 - 105 = 40t - 57.$

also für $t = 0$ ist $x = -57.$

" $t = 1$ " $x = -17.$

" $t = 2$ " $x = 23.$

" $t = 3$ " $x = 63.$

" $t = 4$ " $x = 103.$ etc:

13, Die Zahlen zu finden, welche durch 3. 5. und 7. dividirt die Reste a. b. und c. geben, welche sind es?

Sind die Zahlen $= x$, so muß $x - a$ durch 3, $x - b$ durch 5 und $x - c$ durch 7. theilbar seyn, also sey:

$\frac{x-a}{3} = p$, $\frac{x-b}{5} = q$ und $\frac{x-c}{7} = r$,

so ist: $x = 3p + a = 5q + b = 7r + c$

~~also~~ $3p = 5q + b - a$ und $3p = 7r + c - a$

$p = \frac{5q+b-a}{3} = \frac{7r+c-a}{3}$

$5q + b - a = 7r + c - a$

~~268~~

$5q = 7r + c - b.$

also: $q = \frac{7r+c-b}{5} = r + \frac{2r+c-b}{5} = r + s$

Aus $\frac{2r+c-b}{5} = s$ folgt $r = \frac{5s+b-c}{2} = 2s + \frac{s+b-c}{2} = 2s + t$

" $\frac{s+b-c}{2} = t$ " $s = 2t - b + c.$

also ist: $r = 2s + t = 5t - 2b + 2c$

$q = r + s = 7t - 3b + 3c$

$p \left\{ \begin{array}{l} = \frac{5q+b-a}{3} \\ = \frac{7r+c-a}{3} \end{array} \right\} = \frac{35t}{3} - \frac{a}{3}$ [illegible] $- \frac{11b}{3} + \dots c$

und: $3p + a = 5q + b.$ und $3p + a = 7r + c.$

folgt: $p = \frac{5q+b-a}{3} = q + \frac{2q+b-a}{3}$ $\quad p = \frac{7r+c-a}{3} = 2r + \frac{r+c-a}{3}$

$= q + s$ $\quad = 2r + t$

Aus $\frac{2q+b-a}{3} = s$ folgt: $q = \frac{3s-b+a}{2}$ $\quad$ Aus $\frac{r+c-a}{3} = t$ folgt: $r = 3t - c + a$

$= s + \frac{s-b+a}{2}$ $\quad$ also ist: $p = 2r + t = 7t - 2c + 2a.$

$= s + u$

Aus $\frac{s-b+a}{2} = u$ folgt $s = 2u + b - a$

also ist $q = s + u = 3u + b - a$

und $p = q + s = 5u + 2b - 2a$

folglich ist $5u + 2b - 2a = 7t - 2c + 2a$

$5u = 7t + 2a + 2a - 2b - 2c$

$= 7t + 4a - 2b - 2c$

also: $u = \frac{7t+4a-2b-2c}{5} = t + \frac{2t+4a-2b-2c}{5}$

$= t + 2\frac{t+2a-b-c}{5} = t + 2v,$

Aus $\frac{t+2a-b-c}{5} = v$ folgt: $t = 5v - 2a + b + c,$

also ist $u = t + 2v = 7v - 2a + b + c,$

$s = 2u + b - a = 14v - 5a + 3b + c,$

$r = 3t - c + a = 15v - 5a + 3b + 2c,$

$q = s + u = 21v - 7a + 4b + 2c,$

$p \left\{ \begin{array}{l} = 2r + t \\ = q + s \end{array} \right\} = 35v - 12a + 7b + 3c,$

also:

$$\cancel{x = 3p + a = 5q + b = 7.r + c}$$
$$\cancel{= 105.v - 35a + 21b + 15c}$$

12, Die Zahlen zu finden, welche durch 5 und 8. dividirt die Reste a und b geben; welche sind es?

Sind diese Zahlen $= x$, so muß $x - a$ durch 5, und $x - b$ durch 8. theilbar seyn, ist also: $\frac{x-a}{5} = p$. und $\frac{x-b}{8} = q$

so ist: $x = 5p + a = 8q + b$

also: $p = \frac{8q+b-a}{5} = q + \frac{3q+b-a}{5} = q + r$

Aus $\frac{3q+b-a}{5} = r$ folgt: $q = \frac{5r+a-b}{3} = r + \frac{2r+a-b}{3} = r + s$.

" $\frac{2r+a-b}{3} = s$ " $r = \frac{3s-a+b}{2} = s + \frac{s-a+b}{2} = s + t$

" $\frac{s-a+b}{2} = t$ " $s = 2t + a - b$.

also ist: $r = s + t = 3t + a - b$.

$q = r + s = 5t + 2a - 2b$.

$p = q + r = 8t + 3a - 3b$.

und $x = 5p + a$ oder $= 8q + b$

$= 40t + 16a - 15b$, wo t jede ganze Zahl bezeichnet; z.B.:

für $a = 3$ und $b = 7$. ist:

$x = 40.t + 48 - 105 = 40t - 57. = 0$ für $t = \frac{57}{40} = 1\frac{17}{40}$. also für ganze positive Zahlen $t > 1$, ~~[illegible]~~

~~also für~~ $t = 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.$ etc. ungerechnet

ist $x = 40t - 57 = (\cancel{-57.}\ \cancel{-17.})\ 23.\ 63.\ 103.$ etc. ..

nicht zulässig.

13, Die Zahlen zu finden, welche durch 3. 5. und 7. dividirt die Reste a. b. und c. geben; welche sind es?

Sind diese Zahlen $= x$, so muß $x - a$ durch 3, $x - b$ durch 5 und $x - c$ durch 7. theilbar seyn, also seyn:

$\frac{x-a}{3} = p.$, $\frac{x-b}{5} = q.$ und $\frac{x-c}{7} = r$

so ist $x = 3p + a.$ $x = 5q + b.$ $x = 7.r + c.$

Aus $3p + a = 7r + c$

folgt: $p = \frac{7r+c-a}{3} = 2.r + \frac{r+c-a}{3} = 2r + s.$

~~Also~~ Aus $\frac{r+c-a}{3} = s$ folgt: $r = 3.s + a - c$,

also ist auch $p = 2r + s = 7.s + 2a - 2c.$

Weil $3p+a=5q+b$

folgt: $p=\frac{5q-a+b}{3}=q+\frac{2q-a+b}{3}=q+t$

Weil $\frac{2q-a+b}{3}=t$ folgt $q=\frac{3t+a-b}{2}=t+\frac{t+a-b}{2}=t+u$

" $\frac{t+a-b}{2}=u$ " $t=2u-a+b.$

also ist: $q=t+u \quad =3u-a+b.$

und $p=q+t \quad =5u-2a+2b.$

Weil $p=5u-2a+2b=7s+2a-2c$

also $u=\frac{7s+4a-2b-2c}{5}=s+\frac{2s+4a-2b-2c}{5}$

$=s+2\frac{s+2a-b-c}{5}=s+2v$

Weil $\frac{s+2a-b-c}{5}=v$ folgt: $s=5v-2a+b+c$

also ist: $u=s+2v \quad = \quad 7v-2a+b+c$

$p\left\{\begin{matrix}=5u-2a+2b\\=7s+2a-2c\end{matrix}\right\}=35v-12a+7b+5c$

und $x=3p+a \quad =105v-35a+21b+15c$, wo v jede ganze Zahl bezeichnet; zB:

für $a=1$, $b=4$ und $c=6$ ist:

$x=105v-35+84+90=105v+139$, wo v jede ganze Zahl, auch $=0$, und sogar $=-1$ seyn kann,

also für $v=-1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots$

ist $x=105v+139=34.\ 139.\ 244.\ 349.\ 454.\ 559.\ \ldots\ldots$

Zusatz. Enthält eine unbestimmte Aufgabe noch die Nebenbedingung, daß die gesuchten Größen zwischen 2. Grenzen innebleiben sollen, so hat man, wenn diese Grenzen angegeben und so beschaffen sind, daß sie zum Ansetzen einer Gleichung sich nicht eignen, die in Aufgabe 3. angegebene Untersuchung auch auf diese Grenzen auszudehnen, um (die Hülfsgrößen zu bestimmen, [illegible]) ~~[illegible]~~ für alle in diesen Grenzen ~~[illegible]~~ möglichen Fälle in Rechnung zu bringen sind, zB:

14.) Sollten in dem Beyspiele zu Aufg: 13. die gesuchten Größen >0 und <200 seyn, so müßte wegen der niedrigen Grenze $(=0)$ die ~~Gleichung~~ Formel $x=105v+139=0$, also $105v=-139$. oder $v=-\frac{139}{105}=-1\frac{34}{105}$, ~~also~~ und wegen der höhern Grenze $(=200)$ die Formel $x=105v+139=200$, also:

$v = \frac{200 - 1\cancel{39}}{105} = \frac{61}{105}$ seyn, so daß ~~v~~ die möglichen Fälle dieser Aufgabe nur durch $v = -1$ und $v = 0$. bestimmt werden.

15.) Wäre die Aufgabe No. 11. durch die Bedingung beschränkt, daß keine der gesuchten ~~Größen~~ Größe(n) weder kleiner als 50 ~~und~~ noch größer als 60. seyn soll, so ergiebt sich bey Betrachtung der gefundenen ~~Endgleich~~ Werthe: $x = 10 - p$, $y = 2p - q$ und $z = 5q$, daß diese Beschränkung nur auf den Werth von q Einfluß hat, weil $p \gtrless {}^{0}_{10}$ genommen werden muß, um x und y positiv zu erhalten; soll nun:

$z \geq 50$ seyn, so muß $50 \leq 5.q$, also: $q \geq 10$ und für:

$z \leq 60$ muß $60 \geq 5q$, " $q \leq 12$ genommen werden, folglich können

1.) ~~für p~~ die Fälle für $p = 1. 2. 3. 4. 5.$ unter dieser Bedingung nicht gelten, weil ~~ohnedieß für diese Fälle nur $q \cancel{>} < 10$ möglich ist, dagegen ist~~ sind:

~~2.) für $p = 6.$ nur die ~~[illegible]~~ Werthe $q = 10. 11. 12.$ möglich, so daß~~

~~3.) unter dieser Bedingung nur die 4. Fälle $p = 6. 7. 8.$ und $9.$, und $q = 11$ gelten; ob ist auch wirklich:~~

~~für p~~ =	~~[illegible]~~	~~6.~~	~~6.~~	~~6.~~	~~7.~~	~~7.~~	~~7.~~	~~8.~~	~~8.~~	~~8.~~	~~9.~~	~~9.~~	~~9.~~
~~u. q~~ =	~~[illegible]~~	~~10.~~	~~11.~~	~~12.~~	~~10.~~	~~11.~~	~~12.~~	~~10.~~	~~11.~~	~~12.~~	~~10.~~	~~11.~~	~~12.~~
~~$x = 10 - p$~~ =	~~[illegible]~~	~~4.~~	~~4.~~	~~4.~~	~~3.~~	~~3.~~	~~3.~~	~~2.~~	~~2.~~	~~2.~~	~~1.~~	~~1.~~	~~1.~~
~~$y = 2p - q$~~ =	~~[illegible]~~	~~2.~~	~~1.~~										

2.) für $p = 6.$ nur die Werthe $q = 10.$ und $11.$ möglich, denn für $q = 12.$ würde $y = 2p - q = 2.6 - 12 = 0$ werden, ferner sind

3.) für $p = 7.$ 8. und 9. ~~nur~~ die Werthe $q = 10. 11.$ und $12.$ möglich (denn es darf ja $q > 12$ (wegen $z \gtrless {}^{50}_{60}$) nicht genommen werden;) ob ist auch wirklich:

für p =	6.	6.	7.	7.	7.	8.	8.	8.	9.	9.	9.
und q =	10.	11.	10.	11.	12.	10.	11.	12.	10.	11.	12.
$x = 10 - p$ =	4.	4.	3.	3.	3.	2.	2.	2.	1.	1.	1.
$y = 2p - q$ =	2.	1.	4.	3.	2.	6.	5.	4.	8.	7.	6.
u. $z = 5q$ =	50.	55.	50.	55.	60.	50.	55.	60.	50.	55.	60.,

so daß unter dieser Bedingung nur ~~11.~~ diese 11. Fälle gültig sind.)

16.) Wäre dagegen die Aufgabe No. 11. durch die Bedingung beschränkt, daß die Summe aller 3. Größen weder kleiner als 50, noch größer als 60 seyn soll, dann erfordert die Auflösung dieser Aufgabe einen ganz andern Ansatz, weil dann für 3. unbekannte Größen 2. Gleichungen er-mit werden können. Die Auflösung ist dann folgende:

Da $x+y+z$ ~~klein~~ zwischen 50 und 60. fallen soll, so setze $x+y+z=m$,

also ist: 1.) $20x+10y+2z=200$ und 2.) $x+y+z=m$

$$2)\quad 10x+5y+z=100.$$
$$x+y+z=m \text{ ab,}$$

bleibt: $9x+4y=100-m$

also: $y=\frac{100-m-9x}{4}=25-2x-\frac{x+m}{4}=25-2x-p.$

Aus $\frac{x+m}{4}=p$ folgt: $x=4p-m.$

p = 2x − 25.

also: $y=25-2x-p=25-(8p-2m)-p=25-9p+2m$

und $z=m-x-y=m-(4p-m)-(25-9p+2m)$
$$=m-4p+m-25+9p-2m$$
$$=5p-25=5(p-5).$$

Da nun für	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
$x=4p-m=$	$4p-50.$	$4p-51.$	$4p-52.$	$4p-53.$	$4p-54.$	$4p-55.$	$4p-56.$	$4p-57.$	$4p-58.$	$4p-59.$	$4p-60$
$y=25-2x-p=$	$125-9p.$	$127-9p.$	$129-9p.$	$131-9p.$	$133-9p.$	$135-9p.$	$137-9p.$	$139-9p.$	$141-9p.$	$143-9p.$	$145-9p.$

und $z=5(p-5)$ jedesmal wird, so wird:

für $x=0.$ $p=$	$12\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}.$	$13.$	$13\frac{1}{4}.$	$13\frac{1}{2}$	$13\frac{3}{4}$	$14.$	$14\frac{1}{4}.$	$14\frac{1}{2}.$	$14\frac{3}{4}.$	$15.$
~~und~~ " $y=0.$ $p=$	$13\frac{8}{9}.$	$14\frac{1}{9}.$	$14\frac{3}{9}.$	$14\frac{5}{9}.$	$14\frac{7}{9}.$	$15.$	$15\frac{2}{9}.$	$15\frac{4}{9}$	$15\frac{6}{9}$	$15\frac{8}{9}$	$16\frac{1}{9}.$

und " $z=0.$ $p=5.$ allemal, ~~also für alle möglichen Fälle~~ zu nehmen, also sind

nur für $p=$	13.	13. 14.	14.	14.	14.	14.	15	15.	15	15.	16.

ganze und positive Werthe für x, y und z möglich. Es ist auch wirklich

für $m=$ 50. 51. ~~5X~~ 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60.

und für ~~...~~ $p=$ 13. 13. 14. 13. 14. 14. 14. 14. 15. 15. 14. 15. 15. 15. 15. 16.

$x=4p-m=$ 2. 1. 5. 0. 4. 3. 2. 1. 5. 4. 0. 3. 2. 1. 0. 4.

$y=25-2x-p=$ 8. 10. 1. 12. 3. 5. 7. 9. 0. 2. 11. 4. 6. 8. 10. 1.

und $z=5(p-5)=$ 40. 40. 45. 40. 45. 45. 45. 45. 50. 50. 45. 50. 50. 50. 50. 55.

Aufgabe 4. Kommen in der Endformel für eine unbestimmte Gleichung ~~die veränderlichen Größen~~ nicht im Zähler, sondern im Nenner von Brüchen vor, so müssen ~~sie~~ man entweder für ~~jeden~~ sich den mit ihnen verbundenen ~~ihr~~ bekannten Größen zusammen, ~~...~~ in der

$$25-9p+m=0$$
$$25+m=9p$$
$$p=\frac{25+m}{9}.$$

Zählern des Bruches ohne Rest aufgehen, daß also dieser einfache oder zusammengesetzte Nenner ein Theiler des Zählers ist; z.B:

17.) $xy + 3 = 53$. für ganze und positive Zahlen zu finden,

giebt: $y = \frac{53-3}{x} = \frac{50}{x}$, also muß hier x in 50. ohne Rest dividirt werden können, und es kann also x nur $= 1.\ 2.\ 5.\ 10.\ 25.$ oder $50.$ seyn, denn es ist:

für $x = 1.\quad 2.\quad 5.\quad 10.\quad 25.\quad 50.$

$y = {}^{50}/_{x} = 50.\quad 25.\quad 10.\quad 5.\quad 2.\quad 1.$ } eine sämmtliche Aufgabe, für welche eigentl. nur 3. Fälle stattfinden. (vergl.: §. 98.)

und $xy+3$ allemal $= 53$

18.) $xy + 5y = 40$. für ganze und positive Werthe ~~giebt~~

giebt: $y(x+5) = 40$.

also $y = \frac{40}{x+5} = \frac{40}{p}$, wo p nur die Theiler von 40 (nehml.: 1. 2. 4. 5. 8. 10. 20. und 40.) seyn können, aber,

weil nun $x+5=p$ ist und $p>5$ seyn muß, wenn x nicht negativ werden soll,
$x = p-5$ folgt, von diesen Werthen nur die Werthe:

$p = 8.\quad 10.\quad 20.\quad 40.$ gelten, denn es ist dann:

$x = p-5 = 3.\quad 5.\quad 15.\quad 35.$

u. $y = \frac{40}{p} = 5.\quad 4.\quad 2.\quad 1.$

u. $xy + 5y = 40.$ allemal.

19.) $xy + 4y = 72$ für ganze und positive Zahlen

giebt: $y(x+4) = 72$

also: $y = \frac{72}{x+4} = \frac{72}{p}$, wo $p = 1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 18. 24. 36.$ u. $72.$ seyn könnte, aber,

weil $x+4 = p$

$x = p-4$ giebt, also $p > 4$ seyn muß, so gelten nur die Werthe:

$p = 6.\quad 8.\quad 9.\quad 12.\quad 18.\quad 24.\quad 36.$ und 72, und geben:

$x = p-4 = 2.\quad 4.\quad 5.\quad 8.\quad 14.\quad 20.\quad 32.\quad 68.$

$y = \frac{72}{p} = 12.\quad 9.\quad 8.\quad 6.\quad 4.\quad 3.\quad 2.\quad 1.$

und $xy+4y = 72.$ allemal.

Aufgabe 5. Ist endlich die Endformel einer unbestimmten Gleichung ~~mit veränderlichen Größen~~ ein Bruch, welcher eine veränderliche Größe im

Zähler und Nenner des Bruches zugleich enthält, so muss man diese zunächst durch wirkliche Division aus dem Zähler des Bruches entfernen‡; diess ist aber nur dann möglich, wenn der Coefficient der veränderlichen Grösse im ~~Zähl~~ Nenner ein Theiler vom Coefficienten derselben im Zähler ist; z.B.:

‡und dann mit den Brüchen, welche die veränderl. Grösse also nur noch im ~~Zähler~~ Nenner enthalten, nach Aufg. 4. verfahren;

20.) Aus $xy + 5(x+y) = 75.$ für ganze und positive Werthe

folgt: $xy + 5x + 5y = 75$

$y(x+5) = 75 - 5x$

$$y = \frac{75-5x}{x+5} = \frac{-5x+75}{x+5} = -5 + \frac{100}{x+5} = 5\left(-1+\frac{20}{x+5}\right)$$

$= 5\left(-1+\frac{20}{p}\right)$, so dass $p = x+5$ ein Theiler von 20. seyn muss, also $p = 1.\ 2.\ 4.\ 5.\ 10.$ oder $20.$ seyn könnte, aber,

weil aus $x + 5 = p$

$x = p - 5$ folgt, und weil $p > 5$ seyn muss, wenn x nicht $= 0$ oder negativ werden soll, deshalb nur $p = 10$ oder $20.$ seyn kann, und endlich,

weil aus $y = 5\left(-1+\frac{20}{p}\right) = 5\left(\frac{20}{p}-1\right) = 5\cdot\frac{20-p}{p}$ folgt,

$\cancel{= 5\cdot\frac{20-p}{p}}$ ~~folgt~~ und also $p < 20$ seyn muss, wenn y nicht $= 0$ oder negativ werden soll, deshalb nur $p = 10$ seyn kann.

Es ist auch wirklich für

$$\begin{array}{lcccc} p & = & 5. & 10. & 20. \\ x = p - 5 & = & 0. & 5. & 15. \\ y = 5\left(\frac{20}{p}-1\right) & = & 15. & 5. & 0. \\ & & \text{ungültig} & & \text{ungültig} \end{array}$$

und $xy + 5(x+y) = 75.$ in allen 3. Fällen.

21.) Aus $(3x - y + 2)x = 4(y+1)$ für ganze und positive Werthe

folgt: $3x^2 - xy + 2x = 4y + 4$

$3x^2 - xy + 2x - 4y = 4.$

$-xy - 4y = -3x^2 \cancel{- xy}\, 2x + 4$

$y(x+4) = 3x^2 + 2x - 4$

also: $y = \frac{3x^2+2x-4}{x+4} = 3x - 10 + \frac{36}{x+4}$

$= 3x - 10 + \frac{36}{p}$, so dass $p = x + 4$ ein Theiler von 36 seyn muß, also $p = 1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18$ oder 36. seyn könnte, aber,

weil nur $x+4 = p$

$x = p - 4$ folgt, und weil $p > 4$ seyn muß, wenn x nicht $= 0$ oder negativ werden soll, deshalb nur $p = 6. 9. 12. 18$ oder 36 seyn kann, und diese Zahlen geben, weil $y = 3x - 10 + \frac{36}{p}$ auch wirklich alle positive und ganze Zahlen für die gesuchten Größen, denn es ist:

	für p =	6.	9.	12.	18.	36.
	$x = p-4$ =	2.	5.	8.	14.	32.
	$y = 3x-10+\frac{36}{p}$ =	2.	9.	17.	34.	87.
und	$(3x-y+2)x$ =	12.	40.	72.	140.	352.
auch	$4(y+1)$ =					

Zusatz. Ist ~~der veränderlich~~ bey Aufgaben dieser Art der Coefficient der veränderlichen Größe im Nenner nicht ein Theiler vom Coefficienten derselben im Zähler, so daß man beyde Größen nicht ohne Rest dividiren kann, so muß man die End~~gleichung~~formel vorher mit dem Coefficienten der veränderl: Größe im Nenner multipliciren, und dann erst nach Aufgabe 5. verfahren z.B.:

22, $(3y+4)x = y+68$ für ganze und positive Werthe

giebt: $3xy+4x-y = 68$

$3xy - y = 68 - 4x$

$(3x-1)y = 68-4x$

also: $y = \frac{68-4x}{3x-1} = \frac{-4x+68}{3x-1}$

oder: $3y = \frac{-12x+204}{3x-1} = -4 + \frac{200}{3x-1}$

folgt: $3y+4 = \frac{200}{3x-1}$

oder $(3y+4)(3x-1) = 200$, woraus folgt, daß man die Zahl 200 in 2 ~~solche~~ Factoren oder Theiler ~~zerlegen~~ von solcher Beschaffenheit zerlegen muß, daß, wenn man zu dem einen 1 addirt, diese

Summe, und, wenn man von dem andern 4 abzieht, dieser Rest auch durch 3. theilbar ist. Bezeichnet man nun für die Zahl 200. die einzelnen correspondirenden Factoren mit p und q,

~~die einzelnen Factoren = 1. 2. 4. 5. 8. 10. 20. 25. 40. 50. 100. 200.~~
~~sind von diesen aber nur die Zahlen —. 2. —. 5. 8. —. 20. —. —. 50. —. 200~~
~~diese erste, und die Zahlen 1. —. 4. —. —. 10. —. 25. —. 40. 100. —~~
~~diese zweyte Eigenschaft haben~~

so sind solche und zwar $p = 1.\ 2.\ 4.\ 5.\ 8.\ 10.\ 20.\ 25.\ 40.\ 50.\ 100.\ 200.$

und $q = 200.\ 100.\ 50.\ 40.\ 25.\ 20.\ 10.\ 8.\ 5.\ 4.\ 2.\ 1.$

von ihnen haben aber die Eigenschaften:

$x = \frac{p+1}{3}$ nur die Zahlen $p = 2.\ 5.\ 8.\ 20.\ 50.\ 200.$

und $y = \frac{q-4}{3}$ " " " $q = 100.\ 40.\ 25.\ 10.\ 4.\ 1.$

da nun aus den ersten $x = \frac{p+1}{3} = 1.\ 2.\ 3.\ 7.\ 17.\ 67.$

und " " andern $y = \frac{q-4}{3} = 32.\ 12.\ 7.\ 2.\ \underbrace{0.\ -1.}_{\text{ungültig}}$ folgt, ~~und~~

und $\left.\begin{array}{l}(3y+4)x = \\ \text{auch } y+68. = \end{array}\right\}$ 100. 80. 75. 70. giebt, so sind diese

4. correspondirenden Werthe von x und y die gesuchten Größen.

:/ s. weiter pag: 311. /:

C. Von den quadratischen und ~~reinen~~ höhern Gleichungen.

§. 93.

Erklaerung 1. Jede ~~gemischte~~, vollständige, höhere Gleichung hat, geordnet, die allgemeine Form:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + px = q \text{, oder nullisirt:}$$

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + px - q = 0 \text{,}$$

oder sie läßt sich, wenn das erste dieser Glieder, welches die unbekannte ~~veränderliche~~ Größe in der höchsten (n^{ten}) Potenz enthält, noch einen Coefficienten enthält, nach §. 92. dadurch in diese allgemeine Form bringen, daß man die ganze Gleichung (also alle Glieder derselben) mit diesem Coefficienten dividirt.

Zusatz. Da für eine quadratische Gleichung $n = 2$ und für eine cubische Gleichung $n = 3$. ist, so ist also die allgemeine Form:

jeder quadratischen Gleichung: $x^2 + ax = q$ oder $x^2 + ax - q = 0$, und

jeder cubischen Gleichung: $x^3+ax^2+bx=q$ oder $x^3+ax^2+bx-q=0$, etc.
Erklaerung 2. ~~Verschwinden~~ fehlen in einer höhern Gleichung eines oder einige dieser Glieder, so nennt man eine solche Gleichung ~~u~~ eine unvollständige, fehlen aber alle Glieder außer dem ersten und letzten, so nennt man eine solche Gleichung eine reine, und es ist folglich ~~Zusatz~~. $x^n=q$ oder $x^n-q=0$ die allgemeine Form einer jeden höhern reinen Gleichung.
Zusatz. Da eine reine quadratische Gleichung außer dem ersten und letzten Gliede ~~und~~ ~~noch~~ kein Glied mehr enthält, so ist folgl: jede reine quadratische Gleichung zugleich eine gemischte unvollständige quadratische Gleichung, und ihre allgemeine Form $x^2=q$ oder $x^2-q=0$.
Erklaerung 3. Jeder Werth von x, welcher so beschaffen ist, daß er, an die Stelle von x in die höhere Gleichung gesetzt, derselben Genüge leistet, wird eine Wurzel der Gleichung genannt. Sind diese Werthe $=a, b, c, d$, etc., so nennt man die Gleichungen $x=a$, $x=b$, $x=c$, etc. die der höhern Gleichung zugehörigen Wurzelgleichungen, und die Gleichungen $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, etc. die zugehörigen annullirten Wurzelgleichungen.
Erklaerung 4. Eine höhere Gleichung auflösen, heißt: ~~die~~ alle Wurzeln derselben auffinden, ~~und~~ denn es ergeben sich für jede höhere Gleichung so viel Wurzeln, als der Exponent n der Gleichung Einheiten enthält, wie solches sich jedoch erst später allgemein ~~erweisen~~ erweisen läßt.

§. 99.

1, Von den reinen quadratischen und hoehern Gleichungen.

Aufgabe 1. Um ~~die~~ einfache ~~einfache~~ reine quadratische oder höhere Gleichungen von der ~~Form~~ allgemeinen Form $x^n=a$ aufzulösen, hat man bloß den 6ten Satz im Lehrsatze §. 92. anzuwenden, man zieht nemlich aus beyden Seiten der Gleichung die $n$te Wurzel aus, und erhält dadurch $x=\sqrt[n]{a}$, wo aber, wenn n eine gerade Zahl ist, allemal $x=\pm\sqrt[n]{a}$ ist, also wenigstens 2 Werthe hat, nemlich einen positiven und einen negativen (vergl: §. 37. Lehrs: 1). Ist die Aufgabe in einer andern, als der Form $x^n=a$ gegeben, so hat man die Gleichung natürlich vorher nach den Regeln §. 93. auf diese Form zu bringen, z.b.:

1, $ax^2=b$
giebt $x^2=\frac{b}{a}$
also $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

2, $(x+a)(x-a)=b$
$x^2-a^2=b$
$x^2=a^2+b$
also: $x=\pm\sqrt{a^2+b}$

3, $\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}=c$
$\frac{x^2}{ab}=c$
$x^2=abc$
also: $x=\pm\sqrt{abc}$

4, $\frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}\cdot\frac{x}{c}=d$
$\frac{x^3}{abc}=d$
$x^3=abcd$
also: $x=\sqrt[3]{abcd}$

5, $5x-\frac{24}{x^2}=2x$. $(x^2$
$5x^3-24=2x^3$
$(5-2)x^3=24$.
$3x^3=24$
$x^3=\frac{24}{3}=8$.
also: $x=\sqrt[3]{8}=2$

6, $a=b-\frac{1}{3}\sqrt{x^3-18ab}$
$3(a-b)=-\sqrt{x^3-18ab}$
$3(b-a)=\sqrt{x^3-18ab}$
$9(b-a)^2=x^3-18ab$
$9(b^2-2ab+a^2)=x^3-18ab$
$9(a^2+b^2)=x^3$
also: $x=\sqrt[3]{9(a^2+b^2)}$

Zusatz. Daß in einer reinen quadratischen Gleichung $x^2=a$ die gesuchte Größe 2 Werthe, nehmlich einen positiven und einen negativen hat, leuchtet auch aus Folgendem ein:

Aus $x^2=a$
folgt: $x^2-a=0$

d.i.: $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$, eine Gleichung, welcher vollkommen Genüge geleistet wird, wenn man einen von beyden Factoren $=0$ setzt. Man kann also $x-\sqrt{a}=0$ setzen, und dieß giebt: $x=\sqrt{a}$,
und auch $x+\sqrt{a}=0$ " , " " " $x=-\sqrt{a}$ als die beyden Wurzeln der Gleichung. Welche von beyden Wurzeln zu nehmen sey, darüber entscheiden die Umstände der Aufgabe; gewöhnlich gelten beyde, es hat aber jede ihre eigne Bedeutung.

Erklaerung. Zu den reinen quadratischen und höhern Gleichungen gehören auch noch diejenigen, in welchen der Theil, welcher die unbekannte Größe (auf ähnl: Art, wie in den vermischten quadratischen und höhern Gleichungen) in mehreren Gliedern enthält, eine vollkommne Potenz ist, z.b.: $x^2\pm 2ax+a^2=b$,† oder (für jede ganze Zahl $=n$) allgemein:

$$x^n+n.x^{n-1}a+\frac{n.(n-1)}{1.2}.x^{n-2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3+\ldots\ldots+a^n=b,$$ d.i.:

† d.i.: $(x\pm a)^2=b$, wo sich $x=\mp a\pm\sqrt{b}=\mp(a\mp\sqrt{b})$ ergiebt,

Setzt man diese Werthe von x und y in einer der Gleichungen so ergiebt sich z.B. aus No. 1.

$$A.\frac{(cD'-\delta C')(\gamma B-\beta C')-(\gamma D'-\delta C')(cB-bC')}{(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')}+B.\frac{(cA-aC')(\gamma D'-\delta C')-\ldots}{(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-\ldots}$$

$$A.(cD'-\delta C')(\gamma B-\beta C')-A(\gamma D'-\delta C')(cB-bC')+B(cA-aC')(\gamma D'-\delta C')-\ldots$$
$$+C(cA-aC')(\gamma B-\beta C')z-C(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')z=D'(cA-aC')(\gamma B-\beta C')\ldots$$

$$\cancel{C'[(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')]z=\gamma cABD'-\gamma\delta ABC'-\beta cA\ldots}$$
$$\cancel{+(\gamma cABD'-\delta cABC'-\gamma bACD'+\delta bACC')-(\gamma cABD'-\gamma a\ldots}$$
$$\cancel{+\delta aBCC')+(\gamma cABD'-\gamma\delta ABC'-\alpha cBCD'+\alpha\delta BCC')+\ldots}$$
$$\cancel{-\beta cACD'+\beta\ldots CC')=(\gamma cABD'-\alpha cBCD'-\gamma bACD'+\alpha\ldots}$$
$$\cancel{=\alpha bCCD'+\beta cACD'-\beta\delta ACC'-\ldots}$$
$$\cancel{-\delta cABC'+\delta aBCC'+\gamma cABD'-\alpha\ldots}$$

$$C'[(cA-aC')(\gamma B-\beta C')-(\gamma A-\alpha C')(cB-bC')]=\gamma cABD'-\gamma aBCD'-\beta cACD'+\beta aCC\ldots$$
$$(\gamma cABD'+\alpha cBCD'+\gamma bACD'+\alpha bCCD')-(\gamma cABD'+\gamma\delta ABC'+\beta cA\ldots$$
$$+(\gamma cABD'-\delta cABC'-\gamma bACD'+\delta bACC')-(\gamma cABD'+\gamma aBCD'+\delta cABC\ldots$$
$$+(\gamma cABD'-\beta cBCD'-\gamma\delta ABC'+\alpha\delta BCC').$$
$$=\beta aCCD'-\alpha bCCD'-\beta\delta ACC'+\delta bACC'-\delta a\ldots$$

$$\cancel{\delta a\ \beta c}\quad \delta C'(bA-aB)-\gamma D'(bA-aB)\qquad \alpha C'+(\beta D'-\delta B)-cA$$

$$Ax+By+\cancel{Cz}=\cancel{D'}$$
$$ax+by+\cancel{cz}=\cancel{\delta}$$
$$\alpha x+\beta y+\cancel{\gamma z}=\cancel{\delta}$$

$$x=\begin{matrix} cD'-\delta C' & \gamma B & \beta C' \\ \gamma D' & \delta C' & cB & bC'\end{matrix}$$

$$y=\begin{matrix} cA & aC' & \gamma D' & \delta C' \\ \gamma A & \alpha C' & cD' & \delta C'\end{matrix}$$

$$z=\begin{matrix} cB & bC' & \gamma A & \gamma\alpha C' \\ \gamma B & \beta C' & \gamma A & \alpha C'.\end{matrix}$$

$$\gamma cBD'-\gamma\delta BC'-\beta cCD'+\beta\delta CC'-\gamma cBD'+\delta cBC'+\gamma bCD'-\delta bCC'$$
$$\gamma cAD'-\gamma aCD'-\delta cAC'+\delta aCC'-\gamma cAD'+\alpha cCD'+\gamma\delta AC'-\alpha\delta CC'.$$

$$\cancel{\beta cC'}\qquad \beta bAD'$$
$$\beta bA\cancel{B}-\beta aB$$
$$D'cB-bC'\qquad \gamma B-\beta C'$$

$\delta a \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \gamma c \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \alpha c \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \gamma b \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \alpha b \mathfrak{C}\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A}\alpha$ | $\mathfrak{A}\, a\mathfrak{A}.$

$+ \beta d \mathfrak{C}\mathfrak{C} - \gamma c \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \delta c \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \gamma b \mathfrak{D}\mathfrak{C} - \delta b \mathfrak{C}\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A} a \alpha$

$+ \delta a \mathfrak{C}\mathfrak{C} - \gamma c \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \alpha c \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \gamma d \mathfrak{A}\mathfrak{D} - \alpha d \mathfrak{C}\mathfrak{C}$ $\mathfrak{B} b \beta$ | $\mathfrak{B} b\, \beta\mathfrak{B}.$

$\mathfrak{C} c \gamma$ | $\mathfrak{C} c\ \gamma\mathfrak{C}.$ $c\mathfrak{C}\ \gamma c$

$\mathfrak{A}\alpha$ $a\mathfrak{A}$ | $ab\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ $\alpha\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$

$\mathfrak{B}\beta$ $b\mathfrak{B}$ | $ab\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$ $\alpha\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$\mathfrak{C}\gamma$ $c\mathfrak{C}$ |

$\mathfrak{B})$ $(\beta\mathfrak{D} - \delta\mathfrak{B})$ $\cancel{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}$

$\mathfrak{C}\mathfrak{A} - \alpha\mathfrak{B}$

$\mathfrak{D} - \delta b\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \delta a\mathfrak{B}\mathfrak{B} - \beta b\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \beta d\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \alpha b\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \alpha d\mathfrak{B}\mathfrak{B}.$

$- c\mathfrak{A})(\beta\mathfrak{D} - \delta\mathfrak{B})$ $\qquad$ $z \times$ fehlt $b\, \alpha d.$ $\quad ad\ \beta$

$\mathfrak{D} - \beta c\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \delta a\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \delta c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ $\qquad$ $z\, y.$ $\quad b d \alpha$ $\quad a\ \beta d$

β

βc $a\mathfrak{B}$ $\beta\mathfrak{D}$ $a\mathfrak{D}$ | $a\mathfrak{D}$ $\beta\mathfrak{D}$

$-\gamma\mathfrak{B}$ $c\mathfrak{A}$ $\delta\mathfrak{B}$ $\delta\mathfrak{A}$ | $-\delta\mathfrak{A} - \delta\mathfrak{B}$

$\cancel{\mathfrak{A}a}$

$(a\mathfrak{C} - c\mathfrak{A})(\beta\mathfrak{D} - \delta\mathfrak{B})$

$\beta a\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \beta c\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \delta a\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \delta c\mathfrak{A}\mathfrak{B}$

$\frac{\beta a}{\alpha b}$

$\beta a\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \alpha b\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \delta a\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \alpha d\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \beta d\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \delta b\mathfrak{A}\mathfrak{C}.$

$$z.\ \frac{(d\mathfrak{A} - a\mathfrak{D})(\beta c - \gamma b) - (b\mathfrak{A} - a\mathfrak{B})(\delta c - \gamma d)}{(c\mathfrak{A} - a\mathfrak{C})(\beta c - \gamma b) - (b\mathfrak{C} - c\mathfrak{B})(\gamma a - \alpha c)}$$

$$x\ (b\mathfrak{C} - c\mathfrak{B})(\delta c - \gamma d) - (d\mathfrak{C} - c\mathfrak{D})(\beta c - \gamma b)$$

$$y\ (c\mathfrak{A} - a\mathfrak{C})(\delta c - \gamma d) - (d\mathfrak{C} - c\mathfrak{D})(\gamma a - \alpha c)$$

$(x+a)^n = b$, wo sich $x = -a \pm \sqrt[n]{b}$ oder (wenn n eine gerade Zahl ist) $x = -a \pm \sqrt[n]{b}$ ergiebt. Man nennt solche Gleichungen vollständige oder ergänzbare reine Gleichungen, denn wenn auch das Zahlenglied a^n im ersten Theile solcher Gleichungen nicht vollständig zu der n^{ten} Potenz von $(x+a)^n$ passen sollte, so läßt sich doch solches aus dem Zahlengliede b, ~~dadu~~ oder dadurch ergänzen, daß man zu beyden Seiten der Gleichung gleiche Werthe addirt oder davon abzieht; z.B. $x^3 - 15x^2 + 75x - 168 = 300$ ist zwar keine vollständige 3^{te} Potenz, läßt sich aber dadurch zu einer solchen ergänzen, daß man auf beyden Seiten 43 dazu ~~abzieht~~ addirt, wodurch sich $x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 343$ oder $(x-5)^3 = 343$, also: $x - 5 = \sqrt[3]{343} = 7$, oder $x = 7 + 5 = 12$ ergiebt.

Anmerkung. Solche Gleichungen kommen für höhere Grade, als für den zweyten, höchst selten vor, daher auch aber ihre Auflösung hier nicht weiter bemerkt wird, zumal sich solches auch nach den Regeln ~~in~~ zu Auflösung der gemischten oder unreinen Gleichungen ergiebt.

Aufgabe 2. Um ~~aus~~ mehreren reinen höhern Gleichungen, welche eben so viel unbekannte Größen enthalten, als Gleichungen gegeben sind, also um aus vereinbaren und bestimmten höhern Gleichungen die unbekannten Größen zu bestimmen, muß ~~m~~ man zuvörderst alle unbekannten Größen weniger einer (nach den Regeln §. 93. und 94.) zu eliminiren suchen; z.B.:

$$1,\quad ax^2 - y^3 = c \quad \text{und} \quad bx^2 + y^3 = d$$

$$bx^2 + y^3 = d \text{ addirt}$$

$$\text{giebt } (a+b)x^2 = c+d$$

$$x^2 = \frac{c+d}{a+b}, \quad \text{also } bx^2 = b \cdot \frac{c+d}{a+b}$$

$$\text{und } y^3 = d - b\frac{c+d}{a+b} = \frac{ad+bd-bc-bd}{a+b} = \frac{ad-bc}{a+b}$$

$$\text{also: I,}\quad x = \pm\sqrt{\frac{c+d}{a+b}}$$

$$\text{also: II,}\quad y = \sqrt[3]{\frac{ad-bc}{a+b}}$$

$$\mp y^3 = c \mp ax^2$$

$$y^3 = a\frac{c+d}{a+b} - c = \frac{ac+ad-ac-bc}{a+b} = \frac{ad-bc}{a+b}$$

$$y^3 = d - b\frac{c+d}{a+b} = \frac{ad+bd-bc-bd}{a+b} = \frac{ad-bc}{a+b}$$

8, $x^2+y^2=a$ und $x^2-y^2=b$

$$\underline{x^2-y^2=b} \text{ abgezogen} \qquad \underline{x^2+y^2=a} \text{ addirt}$$

giebt: $2y^2=a-b$ $\qquad$ $2x^2=a+b$

$$y^2=\frac{a-b}{2} \qquad x^2=\frac{a+b}{2}$$

also: I, $y=\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$ und II, $x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$. (mit 2 Unbekannten Größen

Erklaerung 2. Oft ergeben sich aus den Bedingungen der Aufgabe Gleichungen, in denen man die Unbekannten (x und y) gegenseitig vertauschen kann ohne die Gleichungen selbst dadurch im Geringsten zu verändern; Gleichungen dieser Art nennt man symmetrische, z.B: $x+y=a$ und $xy=b$; oder $x+y=a$ und $x^2+y^2=b$; etc: und es ergeben sich aus ihnen die Werthe von x und y vollkommen gleich, z.B:

9, $x+y=a.$ und $xy=b.$ (4

giebt: $(x+y)^2=a^2.$ $\qquad$ $4xy=4b.$

$$(x+y)^2-4xy=a^2-4b.$$

$$x^2+2xy+y^2-4xy=a^2-4b.$$

$$x^2-2xy+y^2=a^2-4b.$$

$$(x-y)^2=a^2-4b.$$

also: $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$ und weil $x+y=a$,

$$\underline{x+y=a} \text{ addirt} \qquad \text{abgezogen: } \underline{x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}}$$

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b} \qquad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b}$$

also: I, $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ u: II, $y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}$

oder, wie man in diesem Falle gewöhnlich schreibt:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}, \text{ d.h: } x=y, \text{ und zwar:}$$

$$x=\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right) \text{ für } y=\tfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right)$$

$$\text{und } x=\tfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right) \quad " \quad y=\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)$$

Oder: setzt man hier $x-y=v$, so erhält man:

zu $x + y = a$ und von $x + y = a$

$x - y = v$ addirt, $x - y = v$ abgezogen,

$2x = a + v$ $2y = a - v$

also: $x = \frac{a+v}{2}$ also: $y = \frac{a-v}{2}$

folgl.: $xy = \frac{a+v}{2} \cdot \frac{a-v}{2}$

d. i.: $b = \frac{a^2 - v^2}{4}$

$v^2 = a^2 - 4b$

also: $v = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$

folgl.: 1, $x = \frac{a+v}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

und 2, $y = \frac{a-v}{2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2-4b}}{2}$

10, $x + y = a$ und $x^2 + y^2 = b$ (symmetr. Gleichung)

$(x+y)^2 = a^2$

$x^2 + y^2 - (x+y)^2 = b - a^2$

$x^2 + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = b - a^2$

$-2xy = b - a^2$

hierzu $x^2 + y^2 = b$

$x^2 - 2xy + y^2 = 2b - a^2$

$(x-y)^2 = 2b - a^2$

also: $x - y = \pm\sqrt{2b - a^2}$

hierzu: $x + y = a$ und von $x + y = a$

$2x = a \pm \sqrt{2b - a^2}$ $x - y = \pm\sqrt{(2b - a^2)}$ ab,

bleibt: $2y = a \mp \sqrt{2b - a^2}$

folgl.: $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$.

Oder: setzt man $x - y = v$, so erhält man wie in No. 9:

$x = \frac{a+v}{2}$ und $y = \frac{a-v}{2}$

also: $x^2 + y^2 = \left(\frac{a+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-v}{2}\right)^2$

d. i.: $b = \frac{a^2}{4} + av + \frac{v^2}{4} + \frac{a^2}{4} - av + \frac{v^2}{4}$

$= \frac{a^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{a^2 + v^2}{2}$ //

$$v^2 = 2b - a^2$$

also: $v = \pm\sqrt{2b-a^2}$

und: $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \frac{a \pm v}{2} = \frac{a \pm \sqrt{2b-a^2}}{2}$.

reinen

Anmerkung: Die meisten der quadratischen und höhern Gleichungen mit 2 od. mehreren unbekannten Größen führen bey Auflösung derselben auf die Form ~~vermischter~~ gemischter Gleichungen, ~~daher~~ die können sowohl als reine, als auch als gemischte Gleichungen behandelt werden, daher es nicht ohne Nutzen seyn wird, ~~jetzt~~ im folgenden zuvörderst, ehe wir mehrere Beyspiele zu vorstehenden Regeln aufstellen, von den gemischten quadratischen und höhern Gleichungen zu sprechen.

§. ~~99~~. 100

2.) Von den gemischten oder unreinen quadratischen ~~und höhern~~ Gleichungen.

a.) Von den einfachen unreinen ~~gemischten~~ quadratischen Gleichungen.

~~#0~~ ~~a.) Von den einfachen unreinen gemischten quadratischen Gleichungen~~

~~#0~~ **Lehrsatz. 1.** Alle ~~Jede~~ quadratische Gleichungen werden gebracht ~~ist~~ an die ~~Auflösung auf~~ die ~~allgemeine~~ Form $x^2 + ax = b$ ~~aller~~ der Z. unreinen ~~vermischten~~ quadratischen Gleichungen, in welcher das erste Glied das Quadrat der unbekannten Größe ohne Coefficienten oder vielmehr mit dem Coefficienten +1 enthält, das zweyte Glied aus der ersten ~~Radius~~ Potenz der unbekannten Größe und ~~einem~~ d. positiven oder negativen Coefficienten a besteht, und das 3te Glied b aus lauter bekannten Größen besteht, und eben so, wie der Coefficient a ~~aus~~ eine einfache Größe seyn, oder auch aus mehreren Gliedern bestehen kann; z.B.:

1.) $\frac{a}{x-1} + m = \frac{b}{ax} - c$ (ax

giebt: $\frac{a^2x}{x-1} + amx = b - acx$ (x−1

$$a^2x + amx^2 - amx = bx - b - acx^2 + acx$$

$$(am+ac)x^2 + (a^2 - am - b - ac)x = -b$$

also: $x^2 + \frac{a^2-b}{am+ac}x - \frac{am+ac}{am+ac}x = -\frac{b}{am+ac}$

oder: $x^2 + \left(\frac{a^2-b}{a(m+c)} - 1\right)x = -\frac{b}{a(m+c)}$.

12, $m + a\sqrt{x+b} = cx - 1.$

giebt: $a\sqrt{x+b} = cx - (m+1)$

$$a^2(x+b) = (cx-(m+1))^2$$
$$= c^2x^2 - 2c(m+1)x + (m+1)^2$$
$$a^2x + a^2b = c^2x^2 - (2cm+2c)x + (m+1)^2$$
$$a^2b - (m+1)^2 = c^2x^2 - (2cm+2c+a^2)x$$

also: $x^2 - \frac{2cm+2c+a^2}{c^2}x = \frac{a^2b-(m+1)^2}{c^2}$.

Anm: Es lassen sich aber auch die Wurzeln der quadrat: Gleichungen von der Form $ax^2+bx=c$ finden, ohne daß man vorher den Coef„ficienten a des ersten Gliedes durch Division ~~mit~~ der ganzen Gleichung mit dieser Größe a von dem ersten Gliede entfernt; vergl: ~~Lehrs:~~ Zus: 6.

Aufgabe ~~Lehrsatz~~ 1. Die gewöhnliche und allgemeine Regel zu Auflösung einfacher unreiner quadratischer Gleichungen von der Form $x^2+ax=b$ ist in der Formel: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+(\frac{a}{2})^2}$ enthalten, d. h.: man findet die bey„den Wurzeln oder Werthe der Unbekannten x, wenn man zur Hälfte der ~~Gegengröße~~ des Coefficienten a (also zu $\frac{1}{2}a$) die Quadratwurzel aus der Summe des 3ten Gliedes (b) und des Quadrats von selben Coefficienten a (also $(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$) addirt oder davon subtrahirt.

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes beruht darauf, daß das Qua„drat eines Binomiums $x+y$, also ~~x^2~~ $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ ist, also, wenn man die Gleichung $x^2+ax=b$ damit vergleicht, ~~sich 2y~~

$$2yx = ax$$

also: $y = \frac{a}{2}$ und $y^2 = \frac{a^2}{4}$ sich ergiebt, und man folgl: den Werth $y^2 = \frac{a^2}{4}$ auf beyden Seiten der Gleichung zusetzen muß, um die erste Seite derselben rational zu machen; es ergiebt sich dadurch

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

d. i. $(x+\frac{a}{2})^2 = b + \frac{a^2}{4}$

~~also~~ $x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$

also: 1, $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$

Zusatz * Aus diesem ~~Gleichung~~ Werthe:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$$

folgt auch $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b+a^2}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}$

also: 2, $x = \frac{-a \pm \sqrt{4b+a^2}}{2}$, und aus dem Werthe:

282.

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4b+a^2}$$

folgt auch $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \cdot \frac{4b+a^2}{a^2}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b}{a^2}+1}$

also: 3.) $x = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{4b}{a^2}+1}\right)$.

Man findet nach diesen Formeln z.B. nach der ersten in Aufgabe 11.

$$x = -\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b}{a(m+c)} - 1\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a^2-b}{a(m+c)} - 1\right)^2 - \frac{b}{a(m+c)}\right]}$$

und in Aufgabe 12.

$$x = \frac{cm+c+\frac{1}{2}\cdot a^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{a^2b-(m+1)^2}{c^2} + \left(\frac{cm+c+\frac{1}{2}\cdot a^2}{c^2}\right)^2}$$, und es ist

~~gewählt~~ bey Zahlen, Gleichungen

die erste Formel für x besonders dann anwendbar, wenn a eine gerade

„ 2te: „ „ x „ „ „ , „ a „ ungerade

Zahl, und die 3te: „ „ x „ „ „ , „ die größte ~~4b~~

durch a^2 ohne Rest theilbar ist.

~~Lehrsatz~~ Aufgabe 2. Eine zweyte Regel zu Auflösung solcher Gleichungen braucht auf der Richtigkeit der identischen Gleichung:

$$a.b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$, und ist bey Zahlen, Gleichungen anwendbar, welche durch solche in einen quadratische Gleichungen verwandelt werden.

Da man nehmlich die erste ~~Theil~~ Seite jeder unreinen quadratischen Gleichung $x^2+ax=b$ in die Factoren x und $x+a$ zerlegen, also $x^2+ax = (x+a)x$ schon kann, so ist nach ~~die~~ obiger identischer Gleichung:

$$x^2+ax = (x+a)x = \left(\frac{x+a+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2x+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$$

d.i. $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

also: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$ (die in Aufg: 1. ~~...~~)

~~Ist z.B. $x^2+8x=48$, so ist die Probrechnung dieses Verfahrens:~~

~~$(x+8)x = \left(\frac{2x+8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = (x+4)^2 - 16 = 48.$~~

~~$(x+4)^2 = 48+16 = 64$~~

~~$x+4 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$~~

~~also $x = \pm 8 - 4 = \begin{Bmatrix}+4\\-12\end{Bmatrix}$~~

$-4\left(1 \mp \sqrt{\frac{4.48}{64}+1}\right)$

$-4\left(1 \mp \sqrt{3+1}\right)$

$-4\left(1 \mp 2\right)$

$-4\left(\begin{smallmatrix}-1\\+3\end{smallmatrix}\right)$

$= 4$ oder -12

$a+b$

$\frac{a^2}{4} + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{4}$

„ − „ + „

$+ab.$

d.h.: man findet ~~die~~ Wurzeln einer gemischten quadrat: Gleichung, wenn man von dem Quadrate der halben Summe der beyden Factoren $x+a$ und x das Quadrat der halben Differenz derselben abzieht, und diese Differenz $= b$ setzt, z.B.:

13) $x^2+8x = 48$ giebt: $(x+8)x = (x+4)^2 - 4^2 = 48$

$$(x+4)^2 = 48+16 = 64$$

$$x+4 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

also: $x = \pm 8 - 4 = \left\{ {+4 \atop -12} \right\}$

Aufgabe 3.

~~Lehrsatz~~ Eine dritte Regel zur Auflösung einer quadratischen Gleichungen $x^2+ax = b$ besteht darin, daß man die Gleichung in eine andere reine umwandelt, in welcher x ein Binomium ist ~~und aus einer angenommenen unbekannten und bekannten Größe besteht~~; setzt man nehmlich $x = y+z$, so wird:

$$x^2+ax = (y+z)^2 + a(y+z) = b$$

d.i.: $y^2+2yz+z^2 + ay+az = b$

oder: $y^2+(2z+a)y + (z+a)z = b$. Um nun diese Gleichung möglichst zu vereinfachen und auflösbar zu machen, macht man den Coefficienten von y, nehmlich $2z+a = 0$, damit die Größe $(2z+a)y = 0$ wird und aus der Gleichung verschwindet; da nun $2z+a = 0$ nur dann wird,

wenn $2z = -a$,

also: $z = -\frac{a}{2}$ gesetzt wird, und da dann

$y^2+(2z+a)y+(z+a)z = y^2+0\cdot y+\left(-\frac{a}{2}+a\right)\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) = b$ wird,

also: $y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right) = b$

$$y^2 - \frac{a^2}{4} = b$$

$$y^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

also: $y = \pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$

und $x = z+y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$ sich ergiebt, so folgt hieraus, daß man die zweyte Größe z des Binomii $y+z$ bey diesem Verfahren der Hälfte der Gegengröße von a gleich setzen muß, um dadurch die reine quadratische Gleichung $y^2 = b+\frac{a^2}{4}$ zu erhalten, aus welcher sich der Werth von y, und somit der Werth von $x = y+z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$ wie in Lehrsatz 2 ergiebt, z.B.: aus Aufgabe 13: ~~folgt~~

Aufgabe

$$x^2+8x=48.$$

folgt für $x=y-4$: $$(y-4)^2+8(y-4)=48.$$
$$y^2-8y+16+8y-32=48.$$
$$y^2-16=48$$
$$y^2=48+16=64$$
also: $$y=\pm\sqrt{64}=\pm 8$$
folglich: $$x=y-4=\pm 8-4=\left\{\begin{matrix}+4\\-12\end{matrix}\right\}.$$

Aufgabe ~~Lehrsatz~~ **4.** Eine vierte Regel zu Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen von der Form $x^2+ax=b$ ist nur bey Zahlengleichungen von dieser Form anwendbar und besteht darin, daß man beyde Seiten dieser Gleichung in 2. Factoren einander ähnlicher Form zu zerlegen sucht. Da nehmlich in der Gleichung: $x^2+8x=48$

$$x(x+8)=4.12$$
$$=4.(4+8)$$ ist, so ist offenbar $x=4$ der eine Werth (eine Wurzel), und folglich die annullirte Wurzelgleichung $x-4=0$. ein Factor von der annullirten quadratischen Gleichung $x^2+8x-48=0$. Da nun $\frac{x^2+8x-48}{x-4}=x+12$ ist, so ist auch $x+12=0$, also auch $x=-12$ der andere Werth (die zweyte Wurzel) dieser Gleichung.

Aufgabe ~~Lehrsatz~~ **5.** Eine fünfte Regel zu Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen von der Form $x^2+ax=b$ ist ebenfalls nur bey Zahlengleichungen anwendbar, und ist folgende: man annullire die gegebene Gleichung und theile den Coefficienten des zweyten Gliedes in zwey Theile so, daß das Product dieser beyden Theile das dritte Glied ~~giebt~~ und zwar zugleich mit Rücksicht auf dessen Zeichen giebt,‡ z. B. in der Gleichung $x^2+8x=48$. oder $x^2+8x-48=0$. ist der Coefficient $8=12-4$, weil $12\cdot(-4)=-48$ ist, folglich giebt: $$x^2+8x-48=0.$$
$$x^2+12x-4x-48=0.$$
oder $$x(x+12)-4(x+12)=0.$$
also: $$(x-4)(x+12)=0.$$

‡ dann sind die Gegengrößen ~~diese beyden Theile~~ die gesuchten Wurzeln,

so daß sowohl: $x - 4 = 0$, also $x = 4$,
als auch $x + 12 = 0$, " $x = -12$ ist.)

Aufgabe ~~Lehrsatz~~ 6. Um unreine quadratische Gleichungen von der Form $ax^2+bx = c$, ohne durch den Coefficienten a des Quadrats von x zu dividiren, also ohne dadurch Brüche in die Rechnung einzuführen, zu lösen, multiplicirt man die ganze Gleichung mit dem 4fachen dieses Coefficienten $(=4a)$ und addirt zu beyden Seiten der so veränderten Gleichung das Quadrat des Coefficienten b $(=b^2)$, wodurch sich die Wurzeln:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac+b^2}}{2ac}$$ ergeben; denn aus:

$$ax^2 + bx = c \quad (4a$$

folgt:
$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$$
d. i.:
$$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{4ac+b^2}$$
also:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac+b^2}}{2a}.$$

Anm: Diese Formel ist besonders dann am vortheilhaftesten anzuwenden, wenn der Coefficient a nicht ein gemeinschaftl. Theiler von den Größen b und c ist und folglich, um eine der in ~~Lehrsatz~~ Aufgabe 1 bis 5 enthaltenen Regeln anzuwenden, durch die vorher dazu nach ~~Aufgabe~~ Lehrsatz 1. nöthige Division der ganzen Gleichung mit der Größe a Brüche erscheinen; z. B.:

14, $3x^2 - 2x = 65$

giebt:
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{4.3.65+4}}{2.3} = \frac{+2 \pm \sqrt{784}}{6} = \frac{2 \pm 28}{6}$$
$$= \frac{30 \text{ oder } -26}{6} = \begin{cases} 5 \\ -4\tfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\cancel{x = +1(1 \mp \sqrt{\tfrac{4.65}{x^2}+1}}$

oder nach Aufgabe 4:
$$3x^2 - 2x = 65$$
$$x(3x-2) = 5.13 = 5.(3.5-2)$$
folglich: $x = 5$ die eine Wurzel,
und weil $\frac{3x^2 - 2x - 65}{x - 5} = 3x + 13$ giebt,
so ist: $3x + 13 = 0$, also $x = -\frac{13}{3} = -4\tfrac{1}{3}$ die andere Wurzel.

~~Lehr~~ Aufgabe 7. Alle höheren ~~[illegible]~~ Gleichungen von der Form: $x^{2n}+ax^{n}=b$ oder $x^{n}+ax^{n/2}=b$, (welche also nur 2 Glieder ~~enthalten~~ und in diesen die Unbekannte zu Potenzen erhoben enthalten, ~~deren Exponent in dem einen Gliede~~ wovon die eine doppelt so groß ist, als die andere) lassen sich eben so wie quadratische Gleichungen behandeln. Setzt man nehmlich in $x^{2n}+ax^{n}=b$ statt $x^{n}=y$, so ist $x=\sqrt[n]{y}$ und $x^{2n}=y^{2}$, also erhält man statt der gegebenen Gleichung:

15, $x^{2n}+ax^{n}=b$

$y^{2}+ay=b$

also: $y=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}$

und: $x=\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}}$

16, Aus $x^{n}+ax^{n/2}=b$

folgt: $x^{n}+ax^{n/2}+\frac{a^{2}}{4}=b+\frac{a^{2}}{4}$

$\sqrt{\left(x^{n}+ax^{n/2}+\frac{a^{2}}{4}\right)}=\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}$

d. i. $x^{n/2}+a/2=\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}$

also: $x^{n/2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}$

und: $x=\sqrt[n/2]{-a/2\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}}$

$=\sqrt[n]{\left(-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}\right)^{2}}$

~~Zuerst~~ 17, $x^{6}+ax^{3}=b$, für $x^{3}=y$ gesetzt,

giebt: $y^{2}+ay=b$

also: $y=-a/2\pm\sqrt{b+\frac{a^{2}}{4}}$

und $x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{-a/2\pm\sqrt{b+a^{2}/4}}$

18, Aus $(x^{2}+ax+b)^{2}+x^{2}+ax+b=c$,

für $x^{2}+ax+b=y$ gesetzt,

folgt: $y^{2}+y=c$

also: $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{c+\frac{1}{4}}$

Da nun aus $x^2+ax+b=y$

oder $x^2+ax=y-b$

$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{y-b+\frac{a^2}{4}}$ folgt,

so ist: $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{c+\frac{1}{4}}-b+\frac{a^2}{4}}$

$=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2-4b-2}{4}\pm\sqrt{c+\frac{1}{4}}}$

19.) Aus $(x^{2n}-x^n)^2+x^{2n}-x^n=b$

folgt $x^{2n}-x^n=y$ gesetzt,

folgt: $y^2+y=b$

also: $y=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}}$

Da nun aus $x^{2n}-x^n=y$

$x^n=+\frac{1}{2}\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}$

also: $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}}$ folgt,

so ist: $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}}}}$

$=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}}}}$

20.) Aus $x^2+2x+4\sqrt{x^2+2x+1}=44.$

folgt: $x^2+2x+1+4\sqrt{x^2+2x+1}=45.$

oder $x^2+2x+1+4\sqrt{x^2+2x+1}+4=49.$

oder $\sqrt{(x^2+2x+1+4\sqrt{(x^2+2x+1)}+4)}=\pm\sqrt{49}$

d.i. $\sqrt{(x^2+2x+1)}+2=\pm7$

$\sqrt{x^2+2x+1}=\pm7-2=5.$

d.i. $\pm(x+1)=5.$

also: $x=\{\pm5-1\}=\begin{cases}+4\\-6.\end{cases}$

Zusatz. Aus der Gleichung $x^4+ax^2=b.$

folgt: $x^2=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$

also: $x=\pm\sqrt{-\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}}$. Dieser leitet auf den

Ausdruck: $x=\sqrt{a\pm\sqrt{c}}$, welcher sich auch durch die Form:

(vergl: §. 43. Lehrsatz 5.) $x=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$ darstellen läßt und dadurch denn bedeutend abgekürzt wird, wenn zufällig a^2-c ein reines Quadrat ist. Ist nehmlich: $\sqrt{a\pm\sqrt{c}}=\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$,

so ist: $a\pm\sqrt{c}=(\sqrt{y}\pm\sqrt{z})^2$

$=y\pm 2\sqrt{yz}+z$, und weil Irrationalgrößen nicht Rationalgrößen gleich seyn können, so muß:

$$a=y+z \quad \text{und} \quad \sqrt{c}=2\sqrt{yz}$$

also: $a^2=y^2+2yz+z^2$ " $c=4yz$

ferner $a^2-c=y^2+2yz+z^2-4yz$

$=y^2-2yz+z^2=(y-z)^2$

also: $\sqrt{a^2-c}=y-z$

und weil $a=y+z$ ist,

so ist: 1, $y=\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}$ und $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}}$

und 2, $z=\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}$ " $\sqrt{z}=\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$

folglich: $\sqrt{a\pm\sqrt{c}}=\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$

$$=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$$

zB:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}}$$
$$=\sqrt{2+1}+\sqrt{2-1}=\sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{3+\frac{\sqrt{36-20}}{2}}-\sqrt{3-\frac{\sqrt{36-20}}{2}}$$
$$=\sqrt{3+2}-\sqrt{3-2}=\sqrt{5}-1.$$

$$\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{11-\sqrt{112}}=\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{121-112}}{2}}-\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{\sqrt{9}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{3}{2}}=\sqrt{7}-2.$$

Anmerk: daß die beyden Werthe $\sqrt{a\pm\sqrt{c}}$ und $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$ vollkommen gleich (identisch) sind, ergiebt sich sogleich, wenn man dieselben wie die beyden Seiten einer zu reducirenden Gleichung behandelt und durch Anwendung der §. 92. gegebenen allgemeinen Regeln auf einfachere Werthe reducirt; so folgt zB: aus:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-c}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}} \pm \sqrt{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}}$$

folgt: $$a\pm\sqrt{c} = \left(\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}} \pm \sqrt{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}}\right)^2$$
$$= \frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c} \pm 2\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}(a^2-c)} + \frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}$$
$$= a \pm 2\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{c}{4}}$$
$$= a \pm 2\sqrt{\frac{c}{4}}$$
$$= a \pm \sqrt{c}$$

also ist auch $\sqrt{a\pm\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}} - \sqrt{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-c}}$, weil die Quadrate dieser beyden Größen gleich groß sind.

Dieß Verfahren dient zugleich dazu, zu untersuchen, ob verschiedene Zahlenwerthe gleich groß sind; wäre ~~...~~ z.B. ~~zu wissen~~

$$2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1.$$

so müßte $(2\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 1^2$

d.i. $4(2-\sqrt{3}) = 1$

oder: $8-4\sqrt{3} = 1$. seyn,

hierzu $-1+4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ addirt,

müßte $8-1 = 4\sqrt{3}$

d.i. $7 = 4\sqrt{3}$

also: $7^2 = 16.3$

d.i. $49 = 48$ seyn,

da aber $49 > 48$ ist,

so ist folglich auch $2\sqrt{2-\sqrt{3}} > 1$.

$x\pm y : x^4+y^4 = x^3 \mp x^2y + xy^2 \mp y^3$

$$\begin{array}{l} -x^4 \pm x^3y \\ \hline -\mp x^3y \\ -\mp x^3y \pm x^2y^2 \\ \hline -+x^2y^2 \\ +x^2y^2 \pm xy^3 \\ \hline \mp xy^3 \\ \mp xy^3 \mp y^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

§. ~~100~~ 101.

b, Von den ~~bestimmten~~ verwickelten unreinen quadrat. Gleichungen.

c, Von den bestimmten verwickelten unreinen quadrat. Gleichungen.

Zur Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen mit 2 und mehr unbekannten ~~Gleichung~~ Größen lassen sich allgemeine Regeln nicht aufstellen, zumal solche häufig auf höheren Gleichungen führen, deren Auflösung in den meisten Fällen große Schwierigkeiten darbietet. Dieß so viel als möglich zu vermeiden, gelingt auch bisweilen durch eine (auch bey gegebenen höhern Gleichungen anwendbare) mittelbare Auflösung, indem man zunächst einfache Verbindungen der unbekannten Größen, z.B. ihre Summe, Differenz, Product, die Summe oder Differenz ihrer Quadrate einschließl. pp. und daraus dann die unbekannten Größen selbst bestimmt, oder indem man zusammengesetzte Gleichungen auf einfachere zurückzuführen sucht, vergl: Beyspiel 31. das Verfahren dabey läßt sich nur durch Uebung erlernen und ergiebt sich aus folgenden Beyspielen:

21, $x + y = a$ und $xy = b$ (vergl: Beyspiel 9.)

giebt: $y = a - x$

also: $x(a - x) = b$

$xa - xx = b$

oder $x^2 - ax + b = 0$

also: 1, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

und 2, $y = a - x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

22, $x + y = a$ und $x^2 + y^2 = b$ (vergl: Beyspiel 10.)

$\cancel{(x+y)^2 = a^2}$

giebt: $y = a - x$

$y^2 = (a - x)^2 \cancel{\mp x\, x}$

also: $x^2 + (a - x)^2 = b$

d. i. $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b$

$2x^2 - 2ax = b - a^2$

2, $\cancel{2x^2 - 2a.x = b + x^2}$

~~also~~ oder $x^2 - ax = \frac{b - a^2}{2}$

also: 1, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{2b - a^2}{4}}$

$= \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2} = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$

und 2, $y = a - x = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2} = \frac{a \mp \sqrt{2b - a^2}}{2}$.

23, $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

giebt: $y = \frac{a}{x}$ also: $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = b$

$x^4 + a^2 = bx^2$

$x^4 - bx^2 = -a^2$ //

also 1, $x = \pm\sqrt{\frac{b}{2} \pm \sqrt{-a^2 + \frac{b^2}{4}}}$

$= \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$

~~und 2, $y = \pm\sqrt{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$~~

und $y^2 = b - x^2$

$= b - \left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}\right)$

$= \frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}$

also: 2, $y = \pm\sqrt{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$

Oder: 2, $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

giebt: $x^2y^2 = a^2$ $\quad y^2 = b - x^2$

also: $x^2y^2 = x^2(b - x^2) = a^2$

d. i. $x^2b - x^4 = a^2$

oder $x^4 - bx^2 = -a^2$

ist wie in Aufg: 1.

Oder: 3, $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

giebt: $\pm 2xy = \pm 2a$

also: $x^2 \pm 2xy + y^2 = b \pm 2a$

d. i. $(x \pm y)^2 = b \pm 2a$

also: $x + y = \pm\sqrt{b + 2a}$

und $x - y = \pm\sqrt{b - 2a}$

folglich: 1, $x = \frac{\pm\sqrt{b+2a} \pm \sqrt{b-2a}}{2}$

und 2, $y = \frac{\pm\sqrt{b+2a} \mp \sqrt{b-2a}}{2}$. Daß diese beyden Formeln mit den durch Aufg: 1. u. 2. gefundenen identisch sind, ergiebt sich daraus, daß:

$x^2 = \left(\frac{\pm\sqrt{b+2a} \pm \sqrt{b-2a}}{2}\right)^2$

$= \frac{b + 2a \pm 2\sqrt{(b+2a)(b-2a)} + b - 2a}{4}$

$= \frac{2b \pm 2\sqrt{(b+2a)(b-2a)}}{4}$

$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$, also $x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$

und eben so:

$y^2 = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$, u. $y = \pm\sqrt{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}$ ist, Oder: 4.) $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

giebt: $y = a/x$

$y^2 = \frac{a^2}{x^2}$

also: $x^2 + \frac{a^2}{x^2} = b$

für $x + \frac{a}{x} = u$ ist $\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 = u^2$

d.i.: $x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2} = u^2$

$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = u^2 - 2a$

also: $u^2 - 2a = b$

$u^2 = b + 2a$

und $u = \pm\sqrt{b+2a}$

$x + \frac{a}{x} \cdot x + \frac{a}{x}$

$x^2 + a$

$+ a + \frac{a^2}{x^2}$

Aus $x + \frac{a}{x} = u$

folgt: $x^2 + a = ux$

oder: $x^2 - ux = -a$

also: $x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - a} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4a}}{2}$

folglich: $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\pm\sqrt{b+2a} \pm \sqrt{b-2a}}{2}$ wie in Aufg: 3.

Anm: Die durch Aufg: 3 u 4. gefundenen Formeln sind bequemer, als die in Aufg: 1 u. 2. gefundenen, weil man in ihnen nur 2, in den letzteren aber 3 Wurzelausziehungen bedarf.

24.) $x + y = a$ und $x^3 + y^3 = b$

giebt $y = a - x$

also: $x^3 + (a - x)^3 = b$

$x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = b$

$3ax^2 - 3a^2x + a^3 = b$

$3ax^2 - 3a^2x = b - a^3$

$x^2 - ax = \frac{b - a^3}{3a}$

also: 1.) $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b - a^3}{3a}}$

$= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{3a^3 + 4b - 4a^3}{12a}}$

$= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} = \frac{a \pm \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}}{2}$

u. 2.) $y = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{4b - a^3}{12a}} = \frac{a \mp \sqrt{\frac{4b - a^3}{3a}}}{2}$

Oder: $x + y = a$ und $x^3 + y^3 = b$

giebt für $x - y = u$ als Hülfsgröße,

$$x = \frac{a+u}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a-u}{2}$$

also: $x^3 + y^3 = \left(\frac{a+u}{2}\right)^3 + \left(\frac{a-u}{2}\right)^3 = b$

d. i.: $\frac{a^3+3a^2u+3au^2+u^3}{8} + \frac{a^3-3a^2u+3au^2-u^3}{8} = b$

oder $2a^3 + 6au^2 = 8b$

$$a^3 + 3au^2 = 4b$$

$$u^2 = \frac{4b-a^3}{3a}$$

also: $u = \pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}$

folglich: $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}.$

25,) $x + y = a$ und $x^4 + y^4 = b$

giebt: $y = a - x$

also: $x^4 + (a-x)^4 = b$

oder $x^4 + a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 = b$

d. i.: $2x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x = b - a^4$

25,) $x + y = a$ und $x^4 + y^4 = b$

giebt für $x - y = u$ als Hülfsgröße,

$$x = \frac{a+u}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a-u}{2}$$

also: $x^4 + y^4 = \left(\frac{a+u}{2}\right)^4 + \left(\frac{a-u}{2}\right)^4 = b$

d. i.: $\frac{a^4+4a^3u+6a^2u^2+4au^3+u^4}{16} + \frac{a^4-4a^3u+6a^2u^2-4au^3+u^4}{16} = b$

oder $2a^4 + 12a^2u^2 + 2u^4 = 16 \cdot b$

$$u^4 + 6a^2u^2 + a^4 = 8b$$

$$u^4 + 6a^2u^2 = 8b - a^4$$

also: $u^2 = -3a^2 \pm \sqrt{8b - a^4 + 9a^4}$

$$= -3a^2 \pm \sqrt{8(a^4+b)}.$$

und $u = \pm\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8(a^4+b)}}$

folglich: 1,) $x = \frac{a+u}{2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8(a^4+b)}}.$

und 2,) $y = \frac{a-u}{2} = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8(a^4+b)}}.$

26, $x+y=a$ und $x^5+y^5=b$

giebt für $xy=p$

$y=\frac{p}{x}$

also $x+\frac{p}{x}=a$

und $x^2+p=ax$

$x^2-ax=-p$

also: $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-p}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4p}}{2}$

und $\frac{p}{x}=\frac{2p}{a\pm\sqrt{a^2-4p}}=\frac{2p(a\mp\sqrt{a^2-4p})}{(a\pm\sqrt{a^2-4p})(a\mp\sqrt{a^2-4p})}$

$=\frac{2p(a\mp\sqrt{a^2-4p})}{a^2-(a^2-4p)}=\frac{2p(a\mp\sqrt{a^2-4p})}{4p}$

$=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4p}}{2}$

folglich: $x^5+y^5=x^5+\left(\frac{p}{x}\right)^5$

$=\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2-4p}}{2}\right)^5+\left(\frac{a\mp\sqrt{a^2-4p}}{2}\right)^5=b$

d.i.: $(a\pm\sqrt{a^2-4p})^5+(a\mp\sqrt{a^2-4p})^5=32.b$

oder: $a^5\pm5a^4.\sqrt{a^2-4p}+10a^3.(a^2-4p)\pm10a^2.\sqrt{(a^2-4p)^3}+5a(a^2-4p)^2\pm$
$\sqrt{(a^2-4p)^5}+a^5\mp5.a^4.\sqrt{(a^2-4p)}+10a^3(a^2-4p)\mp10a^2\sqrt{(a^2-4p)^3}+$
$5a(a^2-4p)^2\mp\sqrt{(a^2-4p)^5}=32.b$

d.i. $2a^5+20.a^3(a^2-4p)+10.a(a^2-4p)^2=32b$

$a^5+10.a^3(a^2-4p)+5a(a^2-4p)^2=16.b.$

$5a(a^2-4p)^2+10a^3(a^2-4p)=16b-a^5$

$(a^2-4p)^2+2a^2(a^2-4p)=\frac{16b-a^5}{5a}$

also: $a^2-4p=-a^2\pm\sqrt{\frac{16b-a^5}{5a}+a^4}=-a^2\pm\sqrt{\frac{16b-a^5+5a^5}{5a}}$

$=-a^2\pm\sqrt{\frac{4(4b+a^5)}{5a}}=-a^2\pm2\sqrt{\frac{4b+a^5}{5a}}$

$4p=2a^2\pm2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}$

also: $p=\frac{1}{2}\left(a^2\pm\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right)$

Aus $x^2-ax=-p$ endlich

folgt: $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-p}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4p}}{2}$

und $y=a-x=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4p}}{2}$

folglich: ist 1, $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 \mp 2\sqrt{\frac{a^3+4b}{5a}}}}{2}$

$= \dfrac{a \pm \sqrt{-a^2 \mp 2\sqrt{\frac{a^3+4b}{5a}}}}{2}$

und 2, $y = \dfrac{a \mp \sqrt{-a^2 \mp 2\sqrt{\frac{a^3+4b}{5a}}}}{2}$

27, $ax + by = h$ und $cx^2 + dy^2 = k$ giebt nach der Substitution

welche $y = \dfrac{h - ax}{b}$, also: $cx^2 + d\left(\dfrac{h-ax}{b}\right)^2 = k$

d. i. $b^2cx^2 + dh^2 - 2adhx + a^2dx^2 = b^2k$

$(a^2d + b^2c)x^2 - 2adhx = b^2k - dh^2$ $(a^2d + b^2c)$

$(a^2d + b^2c)^2x^2 - 2adh(a^2d + b^2c)x = a^2b^2dk - a^2d^2h^2 - b^2dch^2 + b^4ck$

$(a^2d + b^2c)x = adh \pm \sqrt{(a^2b^2dk + b^4ck - b^2dch^2)}$

also: 1, $x = \dfrac{adh \pm b\sqrt{(a^2dk + b^2ck - cdh^2)}}{a^2d + b^2c}$

und 2, $y = \dfrac{h - ax}{b} = \dfrac{a^2dh + b^2ch - a^2dh \mp ab\sqrt{(a^2dh + b^2ck - cdh^2)}}{a^2bd + b^3c}$

$= \dfrac{bch \mp a\sqrt{(a^2dh + b^2ck - cdh^2)}}{a^2d + b^2c}$

28, $x^2 - y^2 = h$ und $(x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = k$

giebt: $x^2 + 2xy + 2ax + y^2 + 2ay + a^2 + x^2 - 2xy + 2ax$
$+ y^2 - 2ay + a^2 = k$

$2x^2 + 4ax + 2a^2 + 2y^2 = k$

$2(x^2 + 2ax + a^2 + y^2) = k$

also: $(x+a)^2 + y^2 = \frac{k}{2}$

oder $x^2 + y^2 + 2ax + a^2 = \frac{k}{2}$

hierzu $x^2 - y^2 = h$

giebt: $2x^2 + 2ax + a^2 = \frac{k}{2} + h$
$= \dfrac{2h + k}{2}$

oder: $4x^2 + 2a \cdot 2x + a^2 = 2h + k$

mithin: $2x = -a \pm \sqrt{2h + k - a^2}$

also: 1, $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{2h + k - a^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{2h + k - a^2}\right)$

folglich: $y^2 = x^2 - h = \dfrac{2h + k \mp 2a\sqrt{2h + k - a^2}}{4} - h$

$4x^2 + 4ax + a^2 = 2h + k - a^2$

Nebenrechnung (links):

$x \pm y + a$
$x^2 \pm xy + ax$
$\mp xy + y^2 \pm ay$
$+ ax \pm ay + a^2$

Nebenrechnung (rechts):

$2x + a \cdot 2x + a$
$4x^2 + 2ax$
$+ 2ax + a^2$
$\sqrt{4x^2 + 4ax + a^2} = 2x + a$
$2x + a = \pm\sqrt{2h + k - a^2}$

oder $y^2 = \frac{K - 2h \mp 2a\sqrt{2h+K-a^2}}{4}$

$= \frac{\frac{1}{2}K - h \mp a\sqrt{2h+K-a^2}}{2}$

folglich: 2, $y = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2}K - h \mp a\sqrt{2h+K-a^2}}{2}}$

29, $\frac{ax}{y} = \frac{by}{x}$ und $cxy + dx + ey = h$

giebt $ax^2 = by^2$

also: $y = \pm\sqrt{\frac{ax^2}{b}} = \pm x\sqrt{a/b} = \pm\frac{x}{b}\sqrt{ab}$

I, für $y = +\frac{x}{b}\sqrt{ab}$ ist also: $\frac{cx^2}{b}\sqrt{ab} + dx + \frac{ex}{b}\sqrt{ab} = h$ (b

oder: $cx^2\sqrt{ab} + bdx + ex\sqrt{ab} = bh$

$c\sqrt{ab}\,x^2 + (bd + e\sqrt{ab})x = bh$ (c√ab

$abc^2x^2 + (bd + e\sqrt{ab})c\sqrt{ab}\,x = bch\sqrt{ab}$

also: $c\sqrt{ab}\,x = -\frac{bd + e\sqrt{ab}}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{bd+e\sqrt{ab}}{2}\right)^2 + bch\sqrt{ab}}$

$= -\frac{bd + e\sqrt{ab}}{2} \pm\frac{1}{2}\sqrt{(bd+e\sqrt{ab})^2 + 4bch\sqrt{ab}}$

folglich: 1, $x = \frac{-(bd + e\sqrt{ab}) \pm\sqrt{(bd+e\sqrt{ab})^2 + 4bch\sqrt{ab}}}{2.c.\sqrt{a}.\sqrt{b}}$

$= \frac{-(d\sqrt{b} + e\sqrt{a}) \pm\sqrt{(d\sqrt{b}+e\sqrt{a})^2 + 4ch\sqrt{ab}}}{2.c.\sqrt{a}}$

und 2, $y = + x.\sqrt{\frac{a}{b}}$

$= \frac{-(d\sqrt{b} + e\sqrt{a}) \pm\sqrt{(d\sqrt{b}+e\sqrt{a})^2 + 4ch\sqrt{ab}}}{2.c.\sqrt{b}}$

II, für $y = -\frac{x}{b}.\sqrt{ab}$ ist ferner:

$-\frac{cx^2}{b}.\sqrt{ab} + dx - \frac{ex}{b}\sqrt{ab} = h$ (b

oder $-cx^2\sqrt{ab} + bdx - ex\sqrt{ab} = bh$

$c\sqrt{ab}\,x^2 - (bd - e\sqrt{ab})x = -bh$ (c√ab

$abc^2x^2 - (bd - e\sqrt{ab})c\sqrt{ab}.\,x = -bch\sqrt{ab}$

also $c\sqrt{ab}\,x = \frac{bd - e\sqrt{ab}}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{bd-e\sqrt{ab}}{2}\right)^2 - bch\sqrt{ab}}$

$= \frac{bd - e\sqrt{ab}}{2} \pm\frac{1}{2}\sqrt{(bd-e\sqrt{ab})^2 - 4bch\sqrt{ab}}$

folglich: 1, $x = \frac{bd - e\sqrt{ab} \pm\sqrt{(bd-e\sqrt{ab})^2 - 4bch\sqrt{ab}}}{2.c.\sqrt{a}.\sqrt{b}}$

$$= \frac{d\sqrt{b} - e\sqrt{a} \pm \sqrt{(d\sqrt{b} - e\sqrt{a})^2 - 4ch\sqrt{ab}}}{2.\,c.\,\sqrt{a}}$$

oder $\cancel{= \frac{-(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \pm \sqrt{(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}}}{2c.\,\sqrt{a}}}$

und 2, $y = -x\sqrt{a/b}$

$$= \frac{-(d\sqrt{b} - e\sqrt{a}) \mp \sqrt{(d\sqrt{b} - e\sqrt{a})^2 - 4ch\sqrt{ab}}}{2.\,c.\,\sqrt{b}.}$$

oder $\cancel{= \frac{+(e\sqrt{a} - d\sqrt{b}) \mp \sqrt{(e\sqrt{a} - d\sqrt{b})^2 - 4ch\sqrt{ab}}}{2.\,c.\,\sqrt{b}.}}$

30, $x + y + x^2 + y^2 = a$ und $x - y + x^2 - y^2 = b$

giebt: $x - y + x^2 - y^2 = b$ abgezogen | $x + y + x^2 + y^2 = a$ addirt:

$2y + 2y^2 = a - b$ (2 | $2x + 2x^2 = a + b$ (2

$4y^2 + 4y = 2a - 2b$ | $4x^2 + 4x = 2a + 2b$

also: $2y = -1 \pm \sqrt{2a - 2b + 1}$ | also: $2x = -1 \pm \sqrt{2a + 2b + 1}$

folglich: 1, $y = \frac{-1 \pm \sqrt{2a - 2b + 1}}{2}$ | d.i. 2, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2a + 2b + 1}}{2.}$

31, $x + y + x^2 + y^2 = a$ und $x + y = xy$

giebt: $xy + x^2 + y^2 = a$

$2xy + x^2 + y^2 - xy = a$

d.i. $(x+y)^2 - (x+y) = a$

oder $u^2 - u = a$ für $x + y = u$

also: $u = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}.$

Weil nun $u = x + y = xy$, so ist in der Auflös: der Gleichung No. 21. $a = b = u$ zu setzen, folgl:

1, $x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4u}}{2}$

und 2, $y = \frac{u \mp \sqrt{u^2 - 4u}}{2}$ ~~oder umgekehrt~~ zu nehmen, wenn man

$u = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$ setzt.

Setzt man diesen letzten Werth von u in die Gleichungen für x und y, so ergiebt sich:

$$u^2 = \frac{1 \pm 2\sqrt{4a+1} + 4a + 1}{4} = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$$

und $4u = \frac{4 \pm 4\sqrt{4a+1}}{2}$, folglich:

$$u^2 - 4u = \frac{2a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2} - \frac{4\pm4\sqrt{4a+1}}{2} = \frac{2a-3\mp3\sqrt{4a+1}}{2}$$

also ist:

1, $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2} \pm \sqrt{\frac{2a-3\mp3\sqrt{4a+1}}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\sqrt{4a+1}\pm\sqrt{4a-6\mp6\sqrt{4a+1}}}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{4a+1}\pm\sqrt{4a-6\mp6\sqrt{4a+1}}\right)$ und

2, $y = \frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{4a+1}\mp\sqrt{4a-6\mp6\sqrt{4a+1}}\right)$.

Oder: 2,

$x+y+x^2+y^2 = a$ und $x+y = xy$

giebt für $x+y$ ~~[illegible]~~ $= u$

$u + x^2 + y^2 = a$ und $(x+y)^2 = u^2$

also: $x^2 + y^2 = a - u$ also $(x+y)^2 - (x+y) = u^2 - u$

d.i. $x^2 + 2xy + y^2 - (x+y) = u^2 - u$

oder $x^2 + 2(x+y) + y^2 - (x+y) = u^2 - u$

~~[illegible]~~

oder $x^2 + y^2 + x + y = u^2 - u$

d.i. $a = u^2 - u$

also auch: $x^2 + y^2 = a - u$

$= (u^2 - u) - u = u^2 - 2u$,

Setzt man also in der Aufg: der Gleichung №. 22.

$a = x + y = u$

und $b = x^2 + y^2 = u^2 - 2u$, so ist:

1, $x = \frac{u\pm\sqrt{2u^2-4u-u^2}}{2} = \frac{u\pm\sqrt{u^2-4u}}{2}$

und 2, $y = \frac{u\mp\sqrt{u^2-4u}}{2}$, wo sich auch hier

aus $u^2 - u = a$

$u = \frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$ wie in vor: Aufg: ergiebt.

Oder 3, ~~[illegible]~~

$x+y+x^2+y^2 = a$ und $x+y = xy$.

giebt für $xy = u$ nach denselben Schlüssen wie in Aufg: N. 2,

$$x^2+y^2 = u^2-2u$$

Setzt man also in der Aufl: der Gleichung No. 23.

$$a = xy = u$$

mithin $a^2 = x^2y^2 = u^2$

und $b = x^2+y^2 = u^2-2u$, so ist:

1, $x = \pm\sqrt{\frac{b\pm\sqrt{b^2-4a^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{u^2-2u\pm\sqrt{(u^2-2u)^2-4u^2}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{u^2-2u\pm\sqrt{(u^4-4u^3+4u^2-4u^2)}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{u^2-2u\pm\sqrt{u^4-4u^3}}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{u^2-2u\pm u\sqrt{u^2-4u}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2u^2-4u\pm 2u\sqrt{u^2-4u}}{4}}$

$= \pm\sqrt{\frac{u^2\pm 2u\sqrt{u^2-4u}+u^2-4u}{4}} = \pm\frac{\sqrt{u^2\pm 2u\sqrt{u^2-4u}+u^2-4u}}{2.}$

$= \frac{u\pm\sqrt{u^2-4u}}{2}$

$$\begin{array}{r} u^2-2u \\ \hline u^4-2u^3 \\ -2u^3+4u^2 \end{array}$$

und 2, $y = \frac{u\mp\sqrt{u^2-4u}}{2}$, wo ebenfalls

$u = \frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$ wie in der Aufl: sich ergiebt.

Oder: 4,

$x+y+x^2+y^2 = a$ und $x+y = xy$

giebt für $x+y = u$

3, $x+y = u = \frac{1\pm\sqrt{4a-1}}{2}$ wie in Aufl: 1.

Weil nun $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

$= x^2+2xy+y^2-4xy$

$= (x+y)^2-4(x+y)$

$= u^2-4u$

also: 4, $x-y = \pm\sqrt{u^2-4u}$ ist:

so ist: 1, $x = \frac{u\pm\sqrt{u^2-4u}}{2}$

und 2, $y = \frac{u\mp\sqrt{u^2-4u}}{2}$, wie vorher.

Dagegen 5,

$x+y+x^2+y^2 = a$ und $x+y = xy$

giebt: $y-xy = -x$

$y(1-x) = -x$

also: $y = -\frac{x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$

folgl: $x + \frac{x}{x-1} + x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = a$

d.i.: $x(x-1)^2 + x(x-1) + x^2(x-1)^2 + x^2 = a(x-1)^2$

oder $x(x^2-2x+1) + x(x-1) + x^2(x^2-2x+1) + x^2 = a(x^2-2x+1)$

d.i.: $x^3-2x^2+x+x^2-x+x^4-2x^3+x^2+x^2 = ax^2-2ax+a$

oder $x^4 - x^3 + x^2 - ax^2 + 2ax - a = 0$

also: $x^4 - x^3 - (a-1)x^2 + 2ax - a = 0$. eine bis ~~jetzt~~ hieher noch nicht, ja sondern erst später (nach der Lehre von den höheren Gleichungen) zu lösende Gleichung vom 4ten Grade.

32, $ax - by = g$ und $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$

giebt: $x = \frac{g+by}{a}$ also: $(g+by)^3 - b^3y^3 = hxy$

$g^3 + 3bg^2y + 3b^2gy^2 + b^3y^3 - b^3y^3 = \frac{hy}{a}(g+by)$

$3b^2gy^2 + 3bg^2y + g^3 = \frac{ghy}{a} + \frac{bhy^2}{a}$

$3ab^2gy^2 - bhy^2 + 3abg^2y - ghy = -ag^3$

$(3ab^2g - bh)y^2 + (3abg^2 - gh)y = -ag^3$

$y^2 + \frac{g}{b}\cdot y = \frac{-ag^3}{3ab^2g - bh}$ oder $= +\frac{ag^3}{bh - 3ab^2g}$

also: 1, $y = -\frac{g}{2b} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4b^2} - \frac{ag^3}{3ab^2g - bh}}$

$= -\frac{g}{2b} \pm \sqrt{\frac{3ab^2g^3 - bg^2h - 4ab^2g^3}{4b^2(3ab^2g - bh)}}$

$= -\frac{g}{2b} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4b^2}\cdot\frac{-bh - ab^2g}{3ab^2g - bh}}$

$= -\frac{g}{2b} \pm \frac{g}{2b}\cdot\sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}$

$= \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$

und 2, $x = \frac{g+by}{a} = \frac{g}{a} + \frac{b}{a}\cdot y$

$= \frac{g}{a} + \frac{g}{2a}\cdot\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$

$= \frac{g}{a} - \frac{g}{2a} \pm \frac{g}{2a}\sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}} = \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$

Oder: 2) $ax - by = g$ und $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$

giebt: $(ax-by)^3 = g^3$

d.i.: $a^3x^3 - 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 - b^3y^3 = g^3$

hievon $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$

giebt: $\cancel{+3ab^2xy^2}$

$$-3a^2x^2\cdot by + 3axb^2y^2 = g^3 - hxy$$

d.i.: $-3abxy(ax-by) = g^3 - hxy$

oder $-3abxy\cdot g = g^3 - hxy$

$$hxy - 3abg\cdot xy = g^3$$

also: $xy = \frac{g^3}{h-3abg}$

Da nun aus $ax - by = g$

$x = \frac{g+by}{a} = \frac{b}{a}y + \frac{g}{a}$ folgt,

so ist: $xy = \frac{b}{a}y^2 + \frac{g}{a}y = \frac{g^3}{h-3abg}$ (a

$$by^2 + gy = \frac{ag^3}{h-3abg}$$

$$y^2 + \frac{g}{b}y = \frac{ag^3}{bh-3ab^2g}$$

Rest wie in Aufl: 1.

Oder 3) $ax - by = g$ und $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$

giebt: $\frac{a^3x^3 - b^3y^3}{ax - by} = \frac{hxy}{g}$

d.i.: $a^2x^2 + abxy + b^2y^2 = \frac{hxy}{g}$

S: $(ax-by)^2 = a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = g^2$ abgezogen

giebt: $3abxy = \frac{hxy}{g} - g^2$ (g

$$3abgxy = hxy - g^3$$

$$(3abg-h)xy = -g^3$$

also $xy = \frac{-g^3}{3abg-h} = \frac{g^3}{h-3abg}$

Rest wie in Aufl: 2.

33, $(x-y)(x^2-y^2)=a$ und $(x+y)(x^2+y^2)=b$

giebt: $x^3-x^2y-xy^2+y^3=a$ | $x^3+x^2y+xy^2+y^3=b$

d.i.: $x^3+y^3-(x^2y+xy^2)=a$ | $x^3+y^3+(x^2y+xy^2)=b$

oder: $x^3+y^3-(x+y)xy=a$ | $x^3+y^3+(x+y)xy=b$

$x^3+3(x+y)xy+y^3-4(x+y)xy=a$ | $x^3+3(x+y)xy+y^3+(x+y)xy-3(x+y)xy=b$

d.i.: $(x+y)^3-4(x+y)xy=a$ | d.i.: $(x+y)^3-2(x+y)xy=b$

oder für $x+y=A$ und $xy=B$.

ist: $A^3-4AB=a$ und $A^3-2AB=b$

also: $2(A^3-2AB)-(A^3-4AB)=2b-a$ u. $A^3-2AB-(A^3-4AB)=b-a$

d.i.: $2A^3-4AB-A^3+4AB=2b-a$ | $A^3-2AB-A^3+4AB=b-a$

oder $A^3=2b-a$ | d.i.: $2AB=b-a$

also: 1, $A=\sqrt[3]{2b-a}$ | folglich $B=\frac{b-a}{2A}$

also: 2, $B=\frac{b-a}{2\sqrt[3]{2b-a}}$

Da hiernach:

$$x+y=\sqrt[3]{2b-a}=A \text{ und } xy=\frac{b-a}{2\sqrt[3]{2b-a}}=B. \text{ ist,}$$

so ist nach der Aufl. der Gleichung No. 21.

$$3,\ x=\frac{A\pm\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

$$\text{und } 4,\ y=\frac{A\mp\sqrt{A^2-4B}}{2}.$$

Setzt man in diese Werthe für x u. y die Werthe No. 1 u. 2. für A u. B, so ist:

$$5,\ \left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt[3]{2b-a}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{(2b-a)^2}-\frac{2b-2a}{\sqrt[3]{2b-a}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[6]{(2b-a)^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b-a-(2b-2a)}{\sqrt[3]{(2b-a)}}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[6]{(2b-a)^2}\pm\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(2b-a)^3}\pm\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}=\frac{\sqrt{2b-a}\pm\sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}$$

34, $x^2+y^2+z^2 = a$, $y^2 = 2xz+b$ und $cx = dz$

giebt: $x^2+2xz+z^2 = a - b$

d. i. $(x+z)^2 = a - b$

und $x+z = \pm\sqrt{a-b}$ $\qquad z = \frac{c}{d}x$

also: $x + \frac{c}{d}x = \pm\sqrt{a-b}$) d

$dx + cx = \pm d\sqrt{a-b}$

$(c+d)x = \pm d\sqrt{a-b}$

folgt: 1, $x = \pm\frac{d\sqrt{a-b}}{c+d}$ und 2, $z = \pm\frac{c\sqrt{a-b}}{c+d}$

aus $y^2 = 2xz + b$

folgt: $y^2 = 2\cdot\frac{cd(a-b)}{(c+d)^2} + b$

$= \frac{2cd(a-b)+b(c+d)^2}{(c+d)^2}$

folgt: 3, $y = \pm\sqrt{\frac{2cd(a-b)+b(c+d)^2}{(c+d)^2}}$

$= \pm\frac{\sqrt{2cd(a-b)+b(c+d)^2}}{c+d}$

35, $x(y+z) = a$, $y(x+z) = b$ und $z(x+y) = c$

giebt $xy + xz = a$ $\qquad xy + yz = b$ $\qquad xz + yz = c$

Sa: $2xy + 2xz + 2yz = a + b + c$

also: 1, $xy + xz + yz = \frac{a+b+c}{2} = s$ für $s = \frac{a+b+c}{2}$

2, $yz = s - x(y+z) = s - a$

3, $xz = s - y(x+z) = s - b$

4, $xy = s - z(x+y) = s - c$

folgt: $x^2y^2z^2 = yz\cdot xz\cdot xy = (s-a)(s-b)(s-c)$

also: 5, $xyz = \pm\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} = \pm m$ für $m = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$

folgt: I, $x = \frac{xyz}{yz} = \pm\frac{m}{s-a} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s-a}}$

II, $y = \frac{xyz}{xz} = \pm\frac{m}{s-b} = \pm\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s-b}}$

III, $z = \frac{xyz}{xy} = \pm\frac{m}{s-c} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-b)}{s-c}}$

Formeln, von denen namentlich die ersten für Zahlenbeyspiele sehr bequem sind.

Oder weil: $s - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$

$s - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2}$ und

$$s-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} \text{ ist,}$$

so ist auch:

$$\text{IV, } x = \pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c-a)}}$$

$$\text{V, } y = \pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(a+c-b)}}$$

$$\text{und VI, } z = \pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c)}}$$

36, $\frac{xyz}{x+y} = a$, $\frac{xyz}{y+z} = b$ und $\frac{xyz}{x+z} = c$

giebt: $\frac{1}{\frac{xyz}{x+y}} = \frac{1}{a}$ $\quad \frac{1}{\frac{xyz}{y+z}} = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{1}{\frac{xyz}{x+z}} = \frac{1}{c}$

d. i.: $\frac{x}{xyz} + \frac{y}{xyz} = \frac{1}{a}$ $\quad \frac{y}{xyz} + \frac{z}{xyz} = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{x}{xyz} + \frac{z}{xyz} = \frac{1}{c}$

oder $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{a}$ $\quad \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{b}$ $\quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{c}$

Sa: $2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc}$

also: 1, $\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{bc+ac+ab}{2abc} = s$

für $s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

also: 2, $\frac{1}{xy} = s - \frac{1}{a}$

3, $\frac{1}{yz} = s - \frac{1}{b}$

4, $\frac{1}{xz} = s - \frac{1}{c}$

folglich: $\frac{1}{x^2y^2z^2} = \left(s-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(s-\frac{1}{b}\right)\cdot\left(s-\frac{1}{c}\right)$

also 5, $\frac{1}{xyz} = \pm\sqrt{\left(s-\frac{1}{a}\right)\left(s-\frac{1}{b}\right)\left(s-\frac{1}{c}\right)} = \pm m$ für $m = \sqrt{}$ ꝛc.

folglich: I, $z = \frac{1/xy}{1/xyz} = \pm\frac{s-\frac{1}{a}}{m} = \pm\sqrt{\frac{s-1/a}{(s-1/b)(s-1/c)}}$

II, $x = \frac{1/yz}{1/xyz} = \pm\frac{s-\frac{1}{b}}{m} = \pm\sqrt{\frac{s-1/b}{(s-1/a)(s-1/c)}}$

und III, $y = \frac{1/xz}{1/xyz} = \pm\frac{s-1/c}{m} = \pm\sqrt{\frac{s-1/c}{(s-1/a)(s-1/b)}}$

Da weil auch: $s - \frac{1}{a} = \frac{ab+ac+bc}{2abc} - \frac{1}{a} = \frac{ab+ac+bc-2bc}{2abc}$

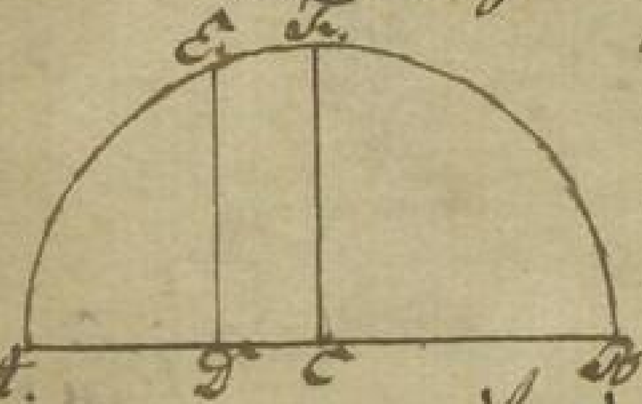
$$= \frac{ab+ac-bc}{2abc},$$

I.) Ueber die Differentialrechnung.

§. 1.

Erklaerung. Eine veränderliche Größe nennt man die, die nach den Gesetzen der Stetigkeit immer zu= oder immer abnimmt; dagegen Größen, welche weder zu= noch abnehmen, oder ihren einmal erhaltenen Werth unter allen Umständen stets beybehalten, beständige oder unveränderliche Größen heißen.

Zusatz. So ist z. B. im Halbkreise ADB der Durchmesser AB eine beständige Größe, dagegen sind die recht=winklichen Coordinaten AD und DE veränderliche



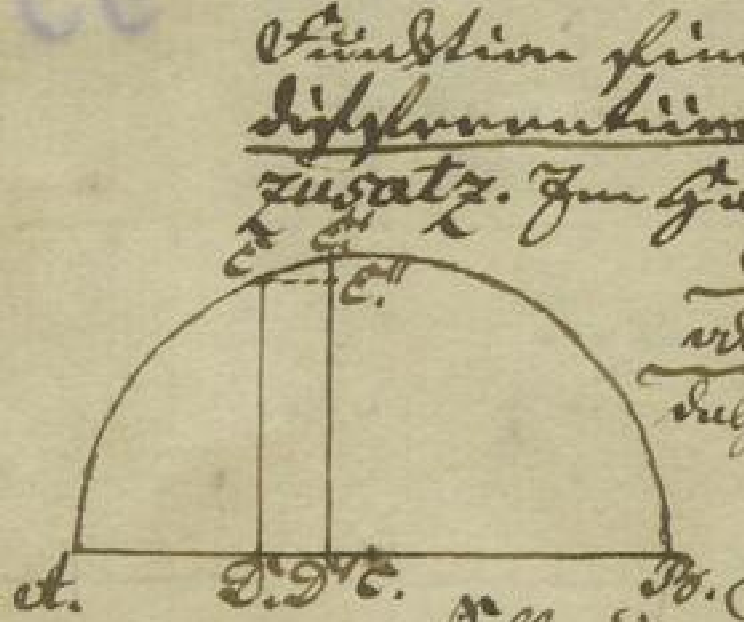
Größen; denn ist die Abscisse AD = 0, so ist es auch die zugehörige Ordi=nate DE; wenn hingegen AD zu wach=sen anfängt so wächst auch die Ordi=nate DE bis zu einer gewissen Grenze mit, indem nehmlich, wenn AD = AC = ½ AB würde auch ED = CF = CA würde; für AD = AB würde aber wieder DE = 0. Das Wachsen der Abscisse AD aber muß man sich nicht ab=satz oder sprungweise denken, sondern es er=folgt, indem immer fort AD von 0 an um ei=nen unendlich kleinen Theil, dessen Werth der 0 beynahe gleich zu setzen ist, stetig zunimmt, so wie etwa das immer und immer länger Werden eines von einem Punkt weg auf einer voll=kommen glatten schiefen Fläche stetig fort=fließenden Wassers. Und auf diese Weise er=folgt nun das Wachsen und Abnehmen der

Ordinate D^xE^x mit, so daß demnach der Unterschied zwischen irgend einer Ordinate und ihrer nächsten ebenfalls begreiflich $= 0$ zu setzen ist, und in Fällen $= 0$ gesetzt werden kann.

§. 2.

Erklaerung. Die Differenz einer veränderlichen Größe zwischen irgend einem Zustand und ihrem nächsten nennt man das Differential oder auch das Element der veränderlichen Größe, und das Differential einer veränderlichen Größe oder einer algebraischen Function finden heißt: die Größe oder Function differentiiren.

Zusatz. Im Halbkreis AEB ist bekanntlich:



$$AD^x : D^xE^x = D^xE^x : D^xB.$$

$$\text{oder } AD^x : D^xE^x = D^xE^x : (AB - AD^x)$$

$$\text{daher: I.)} \quad D^xE^{x\,2} = AD^x \cdot (AB - AD^x).$$

Für eine zweyte Ordinate aber gilt:

$$\text{II.)} \quad D^{x+1}E^{x+1\,2} = AD^{x+1} \cdot (AB - AD^{x+1}).$$

Soll nun $D^{x+1}E^{x+1}$ die nächste Ordinate nach D^xE^x seyn, so ist $D^{x+1}E^{x+1} - D^xE^x = E^{x+1}E''$, das Differential der Ordinate D^xE^x, und hat man nun für dieses Diff. seinen Werth gefunden, so hat man die Function differentiirt; daß nun das Diff. sowohl von D^xE^x, d. i. $E^{x+1}E''$, als das Diff. von AD^x, d. i. $AD^{x+1} - AD^x = D^xD^{x+1}$ eine verschwindende Größe seyn muß, ergiebt sich aus §. 1. Zusatz.

§. 3.

Grundsatz. Nennt man wie gewöhnlich eine veränderliche Größe $= x$, ihren nächst größern Werth $= x'$, und die Diff. zwischen diesen 2 nächsten Werthen x und x' oder das Diff. der Größe $x = dx$, so muß seyn:

$$\text{I.)} \quad x' - x = dx.$$

II.) $x' = x + dx$ d. h. der nächste Zustand einer veränderlichen Grösse ist die Summe aus dem Werthe und der veränderlichen Grösse und ihrem Differential.

Zusatz. Gehört demnach in einem Halbkreis zur Abscisse x die rechtwinkliche Ordinate y, und sind x' und y' die nächsten Coordinaten, so wird, weil $x' = x + dx$ nun $y' = y + dy$ weil auch hier $y' - y = dy$ ist. Eben dieß gilt von jeder andern Function, in welcher die veränderlichen Grössen x, y und mehrere vorkommen.

§. 4.

Grundsatz. ~~Die~~ Nur veränderliche Grössen haben Differentiale, oder können differentiirt werden; das Diff. einer beständigen Grösse dagegen ist $= 0$, indem unveränderliche oder beständige Grössen weder des Wachsthums noch der Abnahme fähig sind (§. 1.).

Zusatz. Bezeichnet man also auch hier beständige Grössen mit ~~den~~ Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c, &c., so ist daher allemal $da = 0$, $db = 0$ &c.

§. 5.

Aufgabe. Das Diff. einer Summe von 2 veränderlichen Argumenten, das Diff. der Function $X = x + y$ zu finden.

Aufloesung. Da die nächst höheren Zustände von X, x und y die Werthe $X + dX$, $x + dx$, $y + dy$ sind (§. 3) so muß seyn: $X' = x' + y'$ (§. 3 Zus.) d. i.:

$X + dX = x + dx + y + dy$. Nun ist aber:

$X = x + y$, daher durch Subtraktion:

$dX = dx + dy$ gefunden.

Zusatz. Ist I.) $X = a + x$

so ist $dX = 0 + dx$ weil das Diff. von a oder $da = 0$ ist. (§. 4. Zus.)

oder ist III.) $X = a^2 + x + m + z$ oder $X = x + m - y$

so ist $dX = 0 + dx + 0 + dz = dx + dz$. so ist $dX = dx - dy$.

§. 6.

Aufgabe. Das Diff: eines aus 2 veränderlichen Factoren bestehenden Products zu finden, oder die Function $X = x \cdot y$ zu differentiiren.

Auflösung. Nach §. 3 und Zusatz ist:

$$X + dX = (x + dx) \cdot (y + dy)$$

d. i. $X + dX = x \cdot y + x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy$.

Es ist aber $X = x \cdot y$

folglich I.) $dX = x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy$.

Weil aber dx, dy unendlich klein oder verschwindende Größen sind (§. 2 Zus.), so ist demnach das Product $dx \cdot dy$ um so mehr unendlich klein, und verschwindet in Hinsicht der Producte $x \cdot dy$ und $y \cdot dx$, und man kann daher $dx \cdot dy$ in dieser Hinsicht $= 0$ setzen. Wenn demnach:

$$X = x \cdot y \text{ ist}$$

so ist II.) $dX = x \cdot dy + y \cdot dx$.

Zusatz 1. Ist demnach:

$$X = ax + by$$

so wäre $dX = a \cdot dx + x \cdot da + b \cdot dy + y \cdot db$

d. i. $dX = a \cdot dx + 0 + b \cdot dy + 0 = a \cdot dx + b \cdot dy$. (§. 4 Zus.)

Zusatz 2. Aus der Aufgabe §6 folgt unmittelbar das Diff: von $x \cdot y \cdot z$:

$d(x \cdot y \cdot z) = \cancel{d(xy) \cdot z} = (xy) \cdot dz + z \cdot d(xy) + d(xy) \cdot dz$ es ist aber: $d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx$

daher ist $d(x \cdot y \cdot z) = \cancel{x \cdot dy + y \cdot dx + zx \cdot dy + zy \cdot dx + xy \cdot dz + z \cdot x \cdot dy + z \cdot y \cdot dx} = x \cdot y \cdot dz + x \cdot z \cdot dy + y \cdot z \cdot dx + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot dz$

$\cancel{= x \cdot y \cdot dz + x \cdot z \cdot dy + z \cdot y \cdot dx}$

Eben so findet man das Diff: von $v \cdot x \cdot y \cdot z$:

$$d(v \cdot x \cdot y \cdot z) = v \cdot x \cdot y \cdot dz + x \cdot y \cdot z \cdot dv + y \cdot z \cdot v \cdot dx + z \cdot v \cdot x \cdot dy.$$

Zusatz 3. Auf gleiche Weise findet man:

$$dx^2 = d(x \cdot x) = x \cdot dx + x \cdot dx = 2 \cdot x \cdot dx.$$

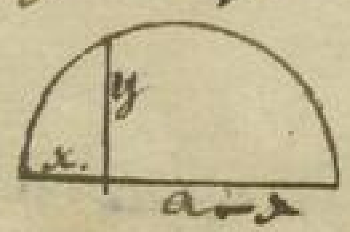
$dx^3 = d(x\cdot x\cdot x) = x\cdot x\cdot dx + x\cdot x\cdot dx + x\cdot x\cdot dx = 3x^2\cdot dx$

$dx^4 = d(x\cdot x\cdot x\cdot x) = x\cdot x\cdot x\cdot dx + x\cdot x\cdot x\cdot dx + x\cdot x\cdot x\cdot dx + x\cdot x\cdot x\cdot dx = 4\cdot x^3\cdot dx = 4x^{4-1}\cdot dx$.

$dx^5 = 5x^4\cdot dx = 5x^{5-1}\cdot dx$; also findet man allgemein:

$dx^n = n\cdot x^{n-1}\cdot dx$, als Hauptgleichung oder Fundamentalformel in der Differentialrechnung.

Anmerk: die Kreisfunktion ist: $y^2 = ax - x^2$ für den ~~halbmesser~~ Durchmesser $= a$ (nach d. 1. Zusatz)



Ist $y^2 = x(a-x) = ax - x^2$

so ist $dy^2 = d(ax) - dx^2$

d.i. $2y\cdot dy = a\cdot dx - 2x\cdot dx$

folgl: $dy = \frac{(a-2x)\cdot dx}{2y}$, d.h. wächst die Abscissen x um das Differential dx, so wächst die Ordinate um den Werth $dy = \frac{(a-2x)\cdot dx}{2y}$ (§. 1. d. 2)

§. 7.

Aufgabe. Das Differential eines veränderlichen Quotienten ~~oder~~ zu finden oder die Function $X = \frac{x}{y}$ zu differentiiren.

Auflösung. Ist $X = \frac{x}{y}$

so ist $X\cdot y = x$

daher $d(X\cdot y) = dx$

d.i. $dx = X\cdot dy + y\cdot dX$.

d.i. $dx = \frac{x}{y}\cdot dy + y\cdot dX$.

also $y\cdot dX = dx - \frac{x}{y}\cdot dy = \frac{y}{y}\cdot dx - \frac{x}{y}\cdot dy = \frac{y\cdot dx - x\cdot dy}{y}$

folgl: $dX = \frac{y\cdot dx - x\cdot dy}{y^2}$.

Anmerkung. Bezeichnet man den Nenner y mit N und den Zähler x mit Z, so findet man das Differ. eines Quotienten durch folgende Gleichung:

$$\frac{N\cdot dZ - Z\cdot dN}{N^2}$$

Zusatz. 1. Ist $x = \frac{a}{y}$

so ist $dx = \frac{y\cdot da - a\cdot dy}{y^2} = \frac{-a\cdot dy}{y^2}$.

Zusatz. 2. Die ~~bisher~~ entwickelten Sätze enthalten bezeugen die ganze Grundlage der Differenzialrechnung, und die bisher ~~enthaltenen~~ entwickelten Differenzial-Hauptgleichungen sind folgende:

$$1.)\ d(x+y) = dx + dy$$

$$2.)\ d(x\cdot y) = x\cdot dy + y\cdot dx$$

$$3.)\ d\,x^n = n x^{n-1} dx,$$ d.h. man findet das Diff. einer Potenz, wenn man die um 1 Grad verminderte Potenz mit dem vorhergehenden Exponenten, und der Differenz der veränderlichen Größe multiplicirt.

$$4.)\ d\frac{x}{y} = \frac{y\cdot dx - x\cdot dy}{y^2}.$$

Zusatz 3. Nach vorigem Zusatz 2 ergeben sich daher für nachstehende Functionen nachstehende Differenzialgleichungen:

$$1.)\ d(ax+by^2+4z^5) = d(ax)+d(by^2)+d(4z^5)$$
$$= a\cdot dx + x\cdot da + 2by\cdot dy + 5\cdot 4\cdot z^4\cdot dz.$$
$$= a\cdot dx + 2by\cdot dy + 20\cdot z^4\cdot dz.$$

$$2.)\ d.a(x^m\cdot y^n) = a[x^m\cdot dy^n + y^n\cdot dx^m]$$
$$= a[x^m\cdot n\cdot y^{n-1}\cdot dy + y^n\cdot m\cdot x^{m-1}\cdot dx.$$
$$= a[n\cdot x^m\cdot y^{n-1}\cdot dy + m\cdot y^n\cdot x^{m-1}\cdot dx.$$

$$3.)\ d\sqrt[m]{x} = d x^{\frac{1}{m}}$$
$$= \tfrac{1}{m}\cdot x^{\frac{1}{m}-1}\cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{m}\cdot x^{\frac{1-m}{m}}\cdot dx$$
$$= \frac{x^{\frac{1-m}{m}}\cdot dx}{m}$$
$$= \frac{\sqrt[m]{x^{1-m}}\cdot dx}{m}$$

$$4.)\ d\sqrt[n]{ax^m} = d(a x^{\frac{m}{n}})$$
$$= a\cdot d x^{\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{m}{n}\cdot a\cdot x^{\frac{m}{n}-1}\cdot dx.$$
$$= \frac{m}{n}\cdot a\cdot x^{\frac{m-n}{n}}\cdot dx.$$
$$= \frac{m\cdot a\sqrt[n]{x^{m-n}}}{n}\cdot dx.$$
$$= \frac{m\cdot a\cdot dx\cdot\sqrt[n]{x^{m-n}}}{n}.$$

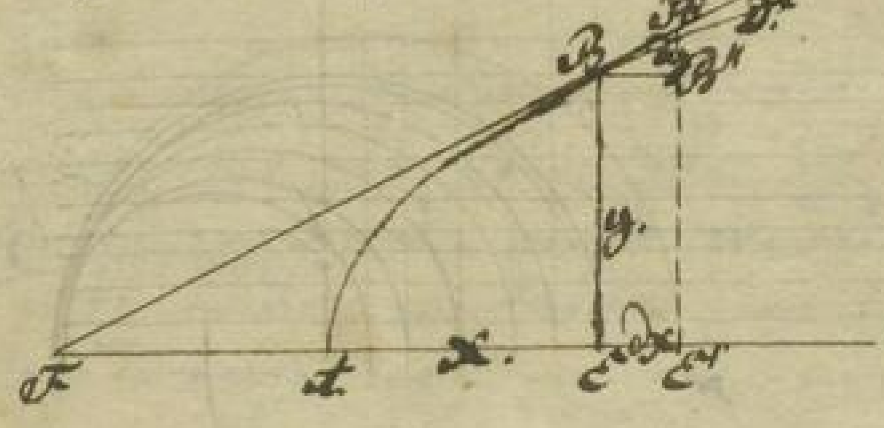
5.) $$d.\frac{a\cdot y^3}{x^2} = \frac{x^2\cdot d(ay^3) - ay^3\cdot dx^2}{x^4}$$
$$= \frac{x^2\cdot 3a\cdot y^2\cdot dy - a\cdot y^3\cdot 2x\cdot dx}{x^4}$$
$$= \frac{3a\cdot x^2\cdot y^2\cdot dy - \cancel{ay^3}\ 2\cdot a\cdot x\cdot y^3\cdot dx}{x^4}$$
$$= \frac{3a\cdot x\cdot y^2\cdot dy - 2a\cdot y^3\cdot dx}{x^3}$$

6.) $$d.\frac{a^2\cdot b}{xy} = \frac{-a^2\cdot b\cdot d(xy)}{x^2\cdot y^2}$$
$$= \frac{-a^2\cdot b\cdot(y\cdot dx + x\cdot dy)}{x^2\cdot y^2}.$$

7.) $$d.\frac{x+y}{z} = \frac{z\cdot d(x+y) - (x+y)\cdot dz}{z^2}$$
$$= \frac{z\cdot(dx+dy) - (x\cdot dz + y\cdot dz)}{z^2}$$

8.) $$d.\frac{a^2+bx}{a-x} = \frac{(a-x)\cdot d(a^2+bx) - (a^2+bx)\cdot d(a-x)}{(a-x)^2}$$
$$= \frac{(a-x)\cdot b\cdot dx + (a^2+bx)\cdot dx}{(a-x)^2}$$
$$= \frac{ab\cdot dx - bx\cdot dx + a^2\cdot dx + bx\cdot dx}{(a-x)^2}$$
$$= \frac{(ab+a^2)\,dx}{(a-x)^2}$$

Zusatz 4. Um eine Anwendung von der Nützlichkeit der Differenzialrechnung zu zeigen, so wird sich dieses in der Aufgabe: „die Subtangente einer Parabel zu finden" vorzüglich zeigen.



Es sey $AE = x$
$BE = y$
$EE' = BB'' = dx$
$B'B'' = B'E' - BE = dy.$

so ist für die Parabel $y^2 = p\cdot x$
daher $2y\cdot dy = p\cdot dx$
$\frac{2y}{p} = \frac{dx}{dy}$ folglich: $dy = \frac{p\cdot dx}{2y}$.

Ist nun $y^2 = px$, $EE' = BB'' = dx$ u. $B'B'' = dy$

so ist $FE : EB = BB'' : B'B''$

d. i. $FE : y = dx : dy$

folgl. $FE = y \cdot \frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{2y}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x =$

$2\,AE$, folglich ist die Subtangente FE noch einmal so groß als die zugehörige Abscisse.

II. Lehre vom Groesten und Kleinsten.

§. 8.

Erklaerung. Wenn zwey veränderliche Größen x und y, welche man sich als die rechtwinkl. Coordinaten irgend einer krummen Linie denken kann, so von einander abhängen, daß bey einer stetigen Zunahme der ersten Größe x die zweyte Größe y größer oder kleiner wird, dann aber beym stetigen Fortwachsen der Größe x die Größe y nun kleiner oder größer wird, so heißt im ersten Falle die zweyte Größe y ein Größtes (maximum pretium), im zweyten Falle aber ein Kleinstes (minimum pretium) unter den Werthen und Zuständen, die ihr vor und nach ihrem Größer- oder Kleinerwerden zukommen. Den Werth von x finden, bey welchem y ein Größtes oder Kleinstes wird, nennt man nun die Lehre vom Größten oder Kleinsten.

§. 9.

Erklaerung. Da das Größte oder Kleinste einer Größe der Wendepunkt ist, in welchem 2 entgegengesetzte Zustände der Größe, nehmlich ihr Größer- ~~oder~~ Kleiner-Werden, oder ihr Kleiner- und Größer-Werden einander berühren, so ist daher das Kleinste oder Größte einer

Größe etwas unveränderliches oder beständiges; die unzähligen kleinern oder größern Werthe der Größe aber vor und nach dem Eintritt in den größten oder kleinsten Werth sind veränderliche oder unbeständige ~~Größen~~ Werthe.

§. 10.

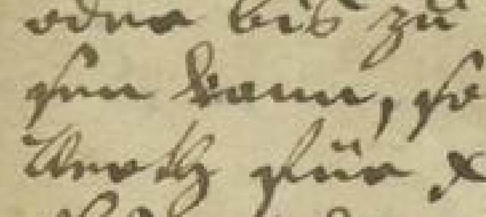
Aufgabe. Den Werth oder Zustand einer veränderl. Größe x im allgemeinen anzugeben, bey welchem eine zweyte von x abhängige und ebenfalls veränderl. Größe y ein Größtes oder Kleinstes werden muß.

Auflösung und Beweis. Da das Größte oder Kleinste der veränderl. Größe y ein einziger und bestimmter Zustand ist, und für diesen Zustand dann die Größe x nur bis zu einer einzigen bestimmten Grenze, oder bis zu einem einzigen bestimmten Werth wachsen kann, so findet man daher diesen Zustand oder Werth für x, bey welchem y ein Größtes oder Kleinstes wird; wenn man das Diff. von y oder das Diff. der Function, in welcher die Größe x vorkommt, $= 0$ setzt, und aus der erhaltenen entwickelten Gleichung den Werth von x aufsucht, indem ja für beständige Größen, folglich auch für Functionen, die man als unveränderliche annimmt, das Diff. $= 0$ ist (§. 4. Zusatz)

§. 11.

Aufgabe. Im Halbkreise anzugeben, bey welchem Werthe der Abscisse eine rechtwinkl. Ordinate eine Größte werden muß.

Auflösung. Für den Durchmesser des Halbkreises $AB = a$ ist $x : y = y : (a - x)$, folglich die Kreisfunction von einem der Endpunkte A des Durchmessers a aus $=$



$$y^2 = (a-x)x$$

d. i. $y^2 = ax - x^2$.

Setzt man nun $d(ax - x^2) = a \cdot dx - 2x \cdot dx = 0$ (§. 10.)

so wird $a \cdot dx = 2x \cdot dx$

oder $a = 2x$

daher $a/2 = x$, d. h.: die rechtwinklichte Semi=ordinate wird eine Größte, wenn die Abscisse x zum Halbmesser des Kreises angenommen ist.

Zusatz. Die vorige Function $ax - x^2$ gilt auch für den Fall, wenn man eine Zahl a in 2 ~~gleiche~~ Theile so theilen soll, daß das Product dieser Theile ein Größtes werden soll: denn nimmt man einen Theil $= x$, so ist der andere Theil $= a - x$, und es ist daher das Product beyder Theile $= x(a-x) = ax - x^2$. Diese Function giebt aber ein größtes Product nur für den Fall, wenn man $x = a/2$ setzt, d. h.: man muß die gegebene Zahl halbiren, um ein größtes Product zu erhalten.

§. 12.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl a in 2 Theile zu theilen, so daß die Summe der Quadrate dieser Theile ein Kleinstes ist.

Auflösung. Nimmt man wieder den einen Theil $= x$, so ist der andere $= a - x$, und daher die Summe der Quadrate dieser Theile $= x^2$ und $\cancel{x^2}$ $(a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$. Setzt man nun $d(2x^2 - 2ax + a^2) = 4x \cdot dx - 2a \cdot dx = 0$. so ist $4x \cdot dx = 2a \cdot dx$

oder $4x = 2a$

d. i. $2x = a$

also $x = a/2$, d. h. man muß auch hier die gegebene Zahl halbiren, wenn die Summe der Quadrate beyder Theile ein Kleinstes geben soll z. B. es sey die Zahl $a = 8$, so sind folgende

Theilen möglich: $1+7,\ 2+6,\ 3+5,\ 4+4,\ 5+3$, &c:
und ihren Quadrate sind: $1+49,\ 4+36,\ 9+25,\ 16+16,\ 25+9$, u.
d. i. $50,\ 40,\ 34,\ 32,\ 34$, u.

Zusatz. Aus den in §. 11 und 12 aufgestellten Aufgaben läßt sich zwar bald einsehen, daß in selbigen ein größter oder kleinster Werth vorkommen kann, und wie man dieses finden soll, ist §. 10 gezeigt. Nicht stets aber läßt sich aus einer gegebenen Function sogleich bestimmen, ob in selbiger auch ein Größtes oder ein Kleinstes vorkommen kann. Um nun zu erfahren, ob der nach §. 10 gefundene Werth für x, welcher $= a$ heißen mag, ein Größtes oder ein Kleinstes in der vorgelegten Function sey, indem nicht beydes zugl. vorkommen kann, so verfahren man also: man setze in der vorgelegten Function $x = a$ und bestimme nun daraus den Werth der Function, welcher $= A$ heißen mag; nun setze man $x < a$ sowohl, als auch $x > a$ und bestimme wieder die Werthe der Function, welche für $x < a = B$ und für $x > a = D$ heißen mögen. Findet man nun $A \gtrless B$ oder $A \gtrless D$, so ist im ersten Falle a ein Größtes und im zweyten Falle a ein Kleinstes; z. B. es sey: $y = x^2 - 10x + 60$ und man sucht den Werth von x bey welchem y ein Größtes oder Kleinstes wird, so findet man durch differentiiren:

$$d(x^2 - 10x + 60) = 2x - 10 = 0$$

$$\text{also } x = \tfrac{10}{2} = 5 = a.$$

Nun ist für $x = 5:\ y = 25 - 50 + 60 = +35 = A.$
" $x = 4:\ y = 16 - 40 + 60 = +36 = B.$
" $x = 6:\ y = 36 - 60 + 60 = +36 = D.$

Weil also $A < B$ und eben so $A < D$ ist, so findet daher in der Function für y nur ein kleinster Werth, und zwar für $x = 6$ statt, aber noch unzählig viel größere Werthe.

II.) Es sey $y = 12x - x^2 + 30$, man sucht den Werth von x, bey welchem y ein Größtes oder Kleinstes wird, so ist: $d(12x - x^2 + 30) = 12 \cdot dx - 2x \cdot dx = 0.$

$$\text{also } 12 \cdot dx = 2x \cdot dx$$
$$\text{d.i. } 12 = 2x$$
$$\text{folgl: } x = 12/2 = 6 = a.$$

Nun ist für $x=6: y = 72 - 36 + 30 = 66 = A$

" $x=5: y = 60 - 25 + 30 = 65 = B$

" $x=7: y = 84 - 49 + 30 = 65 = D.$

Weil also $A > B$ und auch $> D$ ist, so findet für $x = 6$ in der Function für y nur ein größter aber noch unzählig viel kleinere Werthe statt.

III.) Ueber die Integralrechnung.

§. 13.

Lehrsatz. Aus einer gegebenen Differentialgleichung die Gleichung wiederfinden, aus der das gegebene Diff: entstanden ist, nennt man die Differentialgröße integriren. Die gefundene Function nennt man nun das Integral, und wenn für eine gegebene Differentialgleichung das Int: gefunden werden soll, so wird dieses gewöhnlich durch den Buchstaben $\int$ angezeigt, indem das Diff: einer Function als ein Element der Function, das Int: aber als die Summe dieser Elemente angesehen werden kann, welche nun die Function ausmachen.

Anmerkung. Daher nennen auch einige die Integralrechnung: die Summirungsrechnung.

Zusatz 1. Ob man gleich Regeln hat, alle Größen oder Functionen zu differentiiren, so ist man

doch noch nicht so weit gekommen, alle Differ=
gleichungen integriren zu können. Da jedoch
die meisten Differ.gleichungen unter der Form:
$x^n \cdot dx$ vorkommen, so ist es schon genug zu
wissen, wie man den Werth des Integrals aus
$x^n \cdot dx$, d. i. den Werth von $\int x^n \cdot dx$ anzugeben habe.

Zusatz 2. Wenn man weiß, daß:

von $X = x^2$ die Differ.gleichung $dX = 2x \cdot dx$

" $X = x^3$ " " " $dX = 3x^2 \cdot dx$

" $X = x^n$ " " " $dX = nx^{n-1} \cdot dx$ ist,

so wird man leicht, wenn jene Differ.gleichungen
vorgelegt werden, anzugeben wissen, daß nur
in diesen Fällen:

$$\int dX = \int(2x \cdot dx).\quad X = \frac{2x^{1+1} \cdot dx}{(1+1) \cdot dx} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

$$\int dX = \int(3x^2 \cdot dx).\quad X = \frac{3x^{2+1} \cdot dx}{(2+1) \cdot dx} = \frac{3x^3}{3} = x^3$$

$$\int dX = \int(n \cdot x^{n-1} \cdot dx.\quad X = \frac{n \cdot x^{n-1+1} \cdot dx}{(n-1+1) \cdot dx} = \frac{n \cdot x^n}{n} = x^n$$

seyn kann, und man wird in diesem Falle das
Int. gefunden haben.

Für die Auffindung der Integrale dieser
eben aufgestellten Gleichungen ergiebt sich
daher folgende Regel: man vermehre den Ex=
ponenten der veränderlichen Größe um die
Einheit, und dividire dann alles mit dem Pro=
ducte aus dem neuen Exponenten und der Differ=
enz der veränderl. Größe.

Allgemein ist also:

$$\int(ax^n \cdot dx) = a\int(x^n \cdot dx) = \frac{an \cdot x^{n\cancel{-1}-1+1} \cdot dx}{(n-1+1) \cdot dx} = a \cdot x^n.$$

$$\text{z. B. } \int(5x^4 \cdot dx = \cancel{5\int x^4 dx =} \frac{5 \cdot x^{4+1} \cdot dx}{(4+1) \cdot dx} = x^5 = X.$$

denn: $dX = dx^5 = 5x^{5-1} \cdot dx = 5x^4 \cdot dx$

$$\int(a \cdot dx) = \int(a \cdot x^0 \cdot dx) = a\int x^0 \cdot dx = \frac{a \cdot x^{0+1}}{0+1} = ax$$ denn:

$d \cdot ax = a \cdot dx.$

$\int[1/m \cdot \sqrt[m]{x^{1-m}} \cdot dx] = 1/m \cdot \int(x^{\frac{1-m}{m}} \cdot dx = 1/m \cdot \int(x^{1/m-1} \cdot dx) = \frac{1/m \cdot x^{1/m}}{1/m} = x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$. Denn: $d\sqrt[m]{x} = dx^{1/m} = 1/m \cdot x^{1/m-1} \cdot dx = 1/m \cdot x^{\frac{1-m}{m}} \cdot dx = 1/m \cdot \sqrt[m]{x^{1-m}} \cdot dx$

i) $\int \frac{a}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{a}{2x^{1/2}} \cdot dx = \int \frac{a}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot dx = a \cdot \int 1/2\, x^{-1/2} \cdot dx = a/2 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot x^{1/2} = a \cdot \sqrt{x}$ denn $d(a\sqrt{x}) = d(a x^{1/2}) = 1/2\, a x^{1/2-1} \cdot dx = 1/2\, a x^{-1/2} \cdot dx = 1/2 \cdot \frac{a}{x^{1/2}} \cdot dx = \frac{a}{2\sqrt{x}} \cdot dx$.

Zusatz 3. Es ist $\int dx = x$ sowohl, als auch $= a + x$, weil a eine constanten Grösse ~~nicht~~ ist, also kein Differential hat, und weil ~~also~~ sowohl von $X = x$ als auch von $X = a + x$ die Differenzgleichung $= dX = dx$ ist (§. 5 Zus.). Da also bey einem nach vorhergehender Regel gefundenen Integ: noch beständige Grössen seyn können, welche durch die Bestimmung ~~des Integrals~~ seines Differ: verschwanden, so bemerke man folgende 2te Hauptregel: man setze in dem gefundenen Integral die veränderl: Grösse $= 0$, ~~oder~~ für die veränderl: Grösse einen Werth, bey welchem man einsieht, ~~daß~~ dass das gefundene Int: $= 0$ werden oder verschwinden muß. Wenn nun hierdurch das ganze Int: $= 0$ wird, so ist dasselbe vollständig, bleibt dagegen eine beständige Grösse übrig, so muß dieselbe mit dem entgegengesetzten Zeichen dem erhaltenen Int: beygefügt werden.

Man integrirt daher im Allgemeinen so: wenn $dX = dx$ ist

so ist $\int dX = \int dx = X = x + C$ (constant), wo C die der Integrirung zuzusetzende beständige Grösse ist.

Zusatz IV. Die allgemeinsten und einfachsten Integralformeln, woraus sich die übrigen stützen, sind:

1.) $\int dx = x + C$

2.) $\int a \cdot dx = ax + C$

3.) $\int (a \cdot dx + b \cdot dy) = ax + by + C$

4.) $\int (x \cdot dy + y \cdot dx) = x \cdot y + C$

5.) $\int ax^n \cdot dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

6.) $\int \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2} = \frac{x}{y} + C$; also ist z. B.:

1.) $\int (14x \cdot dx + 9y^2 \cdot dy - 16z^3 \cdot dz) = \cancel{\frac{14x^2}{2}} \int 14x \cdot dx + \int 9y^2 \cdot dy - \int 16z^3 \cdot dz = \frac{14x^2}{2} + \frac{9y^3}{3} - \frac{16z^4}{4} = 7x^2 + 3y^3 - 4z^4 + C.$

2.) $\int (3x^2 \cdot y^2 \cdot dy + 2x \cdot y^3 \cdot dx) = \int x^2 \cdot \partial y^3 + y^3 \cdot \partial(x^2) = x^2 \cdot y^3 + C.$

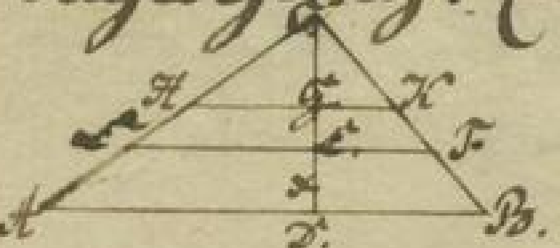
3.) $\int 9x^6 \cdot dx = \frac{9x^7}{7} + C$

4.) $\int \frac{3x^2 \cdot y \cdot dx - 2x^3 \cdot dy}{y^3} = \int \frac{3x^2 \cdot y^2 \cdot dx - 2x^3 \cdot y \cdot dy}{y^4} = \int \frac{y^2 \cdot dx^3 - x^3 \cdot dy^2}{(y^2)^2} = \frac{x^3}{y^2} + C.$

IV.) Aufgaben ueber Anwendung dieser Rechnungsarten auf die Geometrie.

§. 14.

Aufgabe 1. Den Inhalt eines geradlinigen Δ ABC aus seiner Höhe CD und Grundlinie AB zu finden.



Aufloesung. Es sey die Grundlinie AB = a, die Höhe des Triangels CD = h, die Höhe eines veränderl. Trapezes ABFL = x, so ist das Trapez ABFL = X, zieht man nun der FL parallel und unendl. nahe die Linie HK so ist HKFL ein Element von ABFL also = ~~dx~~ GF. ~~dx~~ EG = LF. dx. Nun verhält sich aber in den gegebenen Triangeln:

$CD : AB = CE : FL$

d. i. $h : a = h-x : FL$.

also ist $FL = \frac{a\cdot(h-x)}{h} = \frac{a}{h}\cdot(h-x)$.

Es ist folglich $dX = \frac{a}{h}\cdot(h-x)\cdot dx$

und daher $\int(dX) = X = ABFL = \int\left(\frac{a}{h}\cdot(h-x)\cdot dx\right) = a/h\cdot \int(h-x)\cdot dx = a/h\cdot\int h\cdot dx - a/h\cdot\int x\cdot dx = a/h\cdot h\cdot x - a/h\cdot\frac{x^2}{2} + C$.

Setzt man nun hier $x = 0$

so ist $X = 0 - 0 + C$

also $C = 0$

daher ist $X = a/h\cdot \cancel{h}\cdot x - a/h\cdot\frac{x^2}{2} = a\cdot x - a/h\cdot\frac{x^2}{2}$

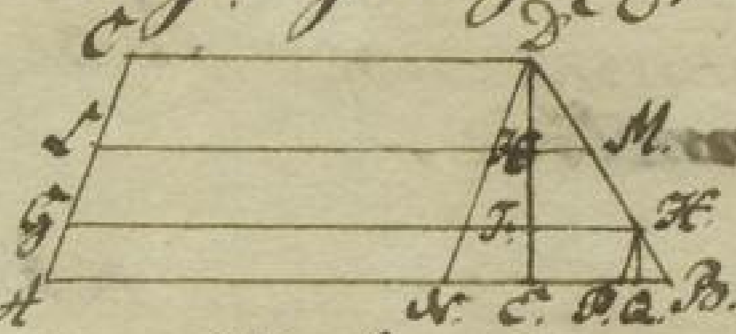
Setzt man ferner $x = h$

so ist nun $X = ABCD = a\cdot h - a/h\cdot\frac{h^2}{2} = a\cdot h - \frac{a}{2}\cdot h = a\cdot h - \frac{a\cdot h}{2} = \frac{ah}{2}$

§. 15.

Aufgabe z. den Inhalt eines Trapezes ABDC zu finden, wenn seine Parallelen $AB = A$, $DC = a$ und seine Höhe $DE = h$ gegeben ist.

Auflösung. Ist hier $AB = A$, $CD = a$, $DE = h$



und man nimmt in dem Trapez ABDC beliebig ein veränderliches Trapez AGHB an, in welchem man $EK = x$ und $GH = y$ setzt, und man zieht mit GH parallel und unendlich nahe die LM, so ist $FK = dx$ und GLMH ein Element von dem Trapez AGHB also $= dX = GH\cdot dx = y\cdot dx$. Zieht man nun mit AC parallel die Linien DN und HP, so ist:

$HQ : DE = PB : NB$

d. i. $EK : DE = (AB - GH) : (AB - CD)$

oder $x : h = (A - y) : (A - a)$

folglich $(A-a)x = (A-y)h$.

also $d[(A-a)x] = d[(A-y)\cdot h] = d(A\cdot h) - d(h\cdot y) = \cancel{A} - h\cdot dy$

d. i. $dx(A-a) = -h\cdot dy$

folglich $dx = \frac{-h\cdot dy}{A-a}$.

Nun war aber $dX = y \cdot dx$

folgl. ist $dX = y \cdot \frac{-h \cdot dy}{A-a} = \frac{-h \cdot y \cdot dy}{A-a} = \frac{-h}{A-a} \cdot y \cdot dy$

und daher $\int dX = X = \int\left(\frac{-h}{A-a} \cdot y \cdot dy\right) = \frac{-h}{A-a} \cdot \int y \cdot dy = \frac{-h}{A-a} \cdot \frac{y^2}{2} + C$

da nun hier y nicht $= 0$ gesetzt werden kann, so nehme man an, dass $GA = y$ wachse, bis es $= AB = A$ werde, und setze nun $y = A$ in die Gleichung, so wird

$$X = 0 = \frac{-h}{A-a} \cdot \frac{A^2}{2} + C$$

folgl. $C = \frac{+h}{A-a} \cdot \frac{A^2}{2}$; und es wird daher:

$$X = \frac{-h}{A-a} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{h}{A-a} \cdot \frac{A^2}{2} = \frac{h}{A-a} \cdot \frac{A^2}{2} - \frac{h}{A-a} \cdot \frac{y^2}{2}$$ das vollständige Int.

Setzt man nun $y = CD = a$

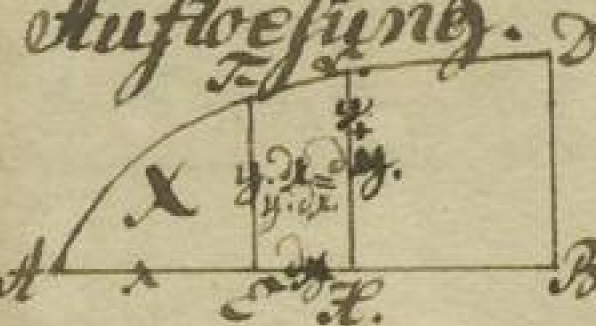
so wird das Ganze $ABDC = \frac{h}{A-a} \cdot \frac{A^2}{2} - \frac{h}{A-a} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{A^2 - a^2}{A-a}$

folgl. ist $ABDC = \frac{h}{2} \cdot \frac{A^2 - a^2}{A-a} = \frac{h}{2}(A+a)$

§. 16.

Aufgabe 3. Den Inhalt einer Parabelfläche, d. i. eines parabolischen Triangels ABD zu finden.

Auflösung.



Es sey $AE = x$
$EF = y$
$EH = dx$

so ist $AEF = X$
und $EFLH$ ein Element von $X = EF \cdot EH = EF \cdot dx = y \cdot dx = dX$.

Nun setze man die Function der Parabelfläche: $y^2 = p \cdot x$

so ist $y = \sqrt{p \cdot x} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{x} = p^{1/2} \cdot x^{1/2}$

folglich ist $dX = p^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot dx$

also $\int dX = X = p^{1/2} \cdot \int x^{1/2} \cdot dx = p^{1/2} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$.

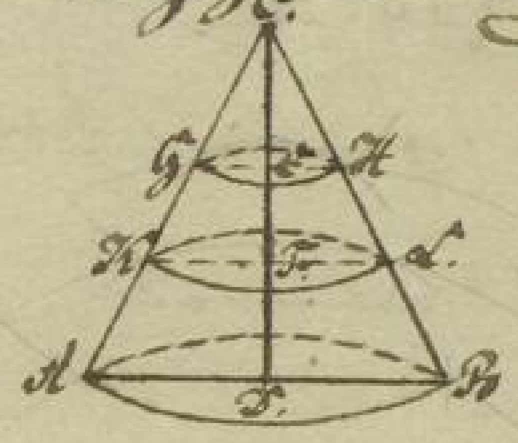
Da nun hier $C = 0$ ist

so ist $AEF = X = 2/3 \cdot p^{1/2} \cdot x^{3/2} = 2/3 \cdot p^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot x = 2/3 \cdot x \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{x} = 2/3 \cdot x \cdot \sqrt{p x} = 2/3 \cdot x \cdot y$. Also für $x = AB$ und $y = BD$ folgl. ist

$$\triangle ABD = 2/3 \cdot AB \cdot BD.$$

§. 17.

Aufgabe. Den körperlichen Innhalt eines geraden Kegels ACB zu finden aus seiner Grundflächen Halbmesser und seiner Höhe.



Auflösung. Es sey $DB = r$, $CD = h$, $CE = x$ und $EF = dx$, ferner $GH = X$, so ist $KGHL = dX = EH^2 \cdot \pi \cdot dx = y^2 \cdot \pi \cdot dx$

Nun ist $CD : DB = CE : EH$

d. i. $h : r = x : y$

also $y = \frac{r \cdot x}{h} = \frac{r}{h} \cdot x$

oder $y^2 = \frac{r^2 \cdot x^2}{h^2} = \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2$

folglich ist $dX = \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot \pi \cdot dx$

daher $\int dX = X = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \frac{x^3}{3} + C$

da aber hier C kein Abzug statt findet, also $C = 0$ ist,

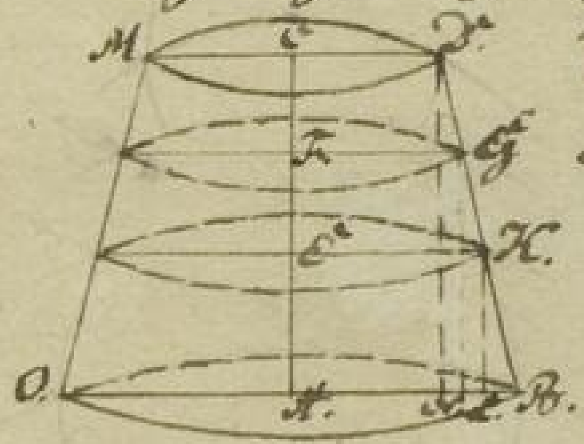
und wenn man nun $x = h$ setzt

so ist $X = ACB = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{h}{3} \cdot r^2 \cdot \pi$ der Innhalt des Kegels.

§. 18.

Aufgabe. Den Innhalt eines abgestumpften Kegels ~~aus dem ge~~ zu finden, wenn seine Höhe und die Halbmesser seiner Grundflächen gegeben sind.

Auflösung. Es sey $AB = R$, $CD = r$, $CA = h$, $AE = x$ und $EF = dx$, so ist das Kegelelement $dX = EK^2 \cdot \pi \cdot dx = y^2 \cdot \pi \cdot dx$.



Nun verhält sich aber:

$KL : LB = DN : NB$

d. i. $x : R-y = h : R-r$

also ist $(R-r)x = h(R-y) = R.h - h.y$

folglich ist $d(R-r)x = d(R.h) - d(h.y) = -h.dy$

folglich $(R-r)dx = -h.dy$

d. i. $dx = \frac{-h \cdot dy}{R-r}$

Nun ist aber $dX = y^2 \cdot \pi \cdot dx$

daher ist $dX = \frac{-h \cdot dy}{R-r} \cdot y^2 \cdot \pi = \frac{-h\pi}{R-r} \cdot y^2 dy$

folglich $\int dX = X = \frac{-\pi \cdot h}{R-r} \cdot \int y^2 \cdot dy = \frac{-\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{y^3}{3} + C$

Setzt man also $y = AB = R$

so wird $X = 0 = \frac{-\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{R^3}{3} + C$

und also C das Entgegengesetzte $= \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{R^3}{3}$

Es ist daher nun $X = \frac{-\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{R^3}{3} - \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{y^3}{3}$;

und für $y = CD = r$

wird $X = \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{R^3}{3} - \frac{\pi \cdot h}{R-r} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$