

FREIBERGER
FORSCHUNGSHEFTE

C 67

GEOPHYSIK

ROLF RÖSLER

**Die galvanisch induzierte Polarisation
an Dispersionen
rotationsellipsoidischer Teilchen**



FFH
C 67_h

BERGAKADEMIE · VERLAG · BERLIN

1959

~~Deutsches
Brennstoffinstitut
Hauptwäscherei~~

~~3666~~

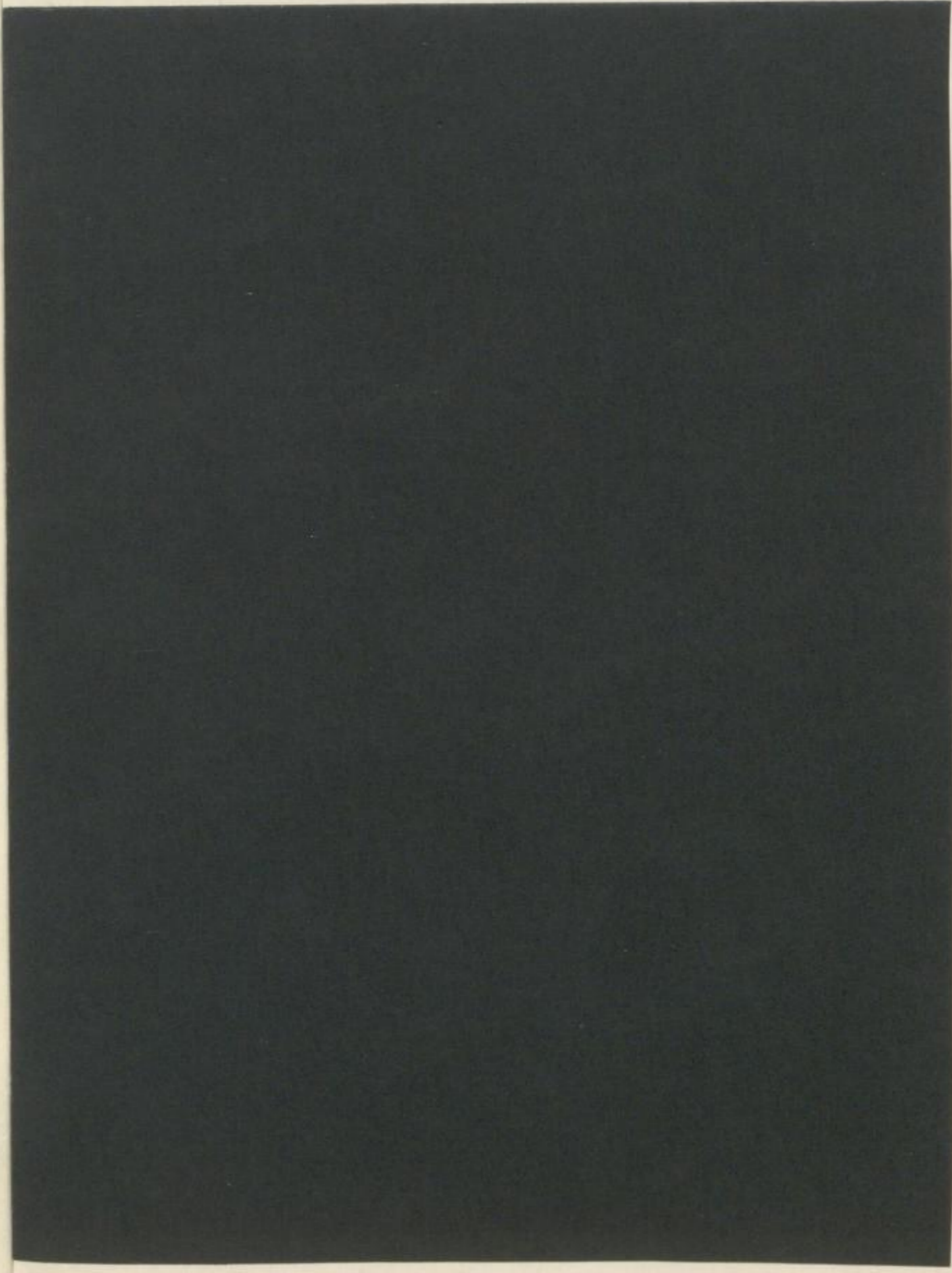


FREIBERGER FORSCH
C 67

TU BERGAKADEMIE FREIBERG



XVI 1142 . C67H 7 h



UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der Bergakademie Freiberg

C 67

GEOPHYSIK

Die galvanisch induzierte Polarisation an Dispersionen rotationsellipsoidischer Teilchen

Von

ROLF RÖSLER



Akademie - Verlag · Berlin

Freib. Forsch.-H.

C 67

S. 1—88

10 Bilder

6 Tab.

Berlin, Mai 1959

Von der Bergakademie Freiberg genehmigte Dissertation
zur Erlangung der Würde eines Dr. rer. nat.

Referent: Prof. Dr. phil. W. BUCHHEIM

Korreferent: Dr. rer. nat. habil. F. RÜHS

Tag der Einreichung: 5. 8. 1958

Tag der mündlichen Prüfung: 20. 12. 1958



XVI 1142 h
C 67

„Freiberger Forschungshefte“, Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften. Herausgeber: Der Rektor der Bergakademie Freiberg, Prof. Dr.-Ing. H. Härtig. — Chefredakteur: Dipl.-Ing. Rolf Wendler, Freiberg, Klubhaus der Bergakademie, Aug.-Bebel-Str. 5 (Fernruf 2497). — Verlag: Akademie-Verlag, GmbH, Berlin W 8, Mohrenstr. 39 (Fernruf 200386), Postscheckkonto 35021. — Die Freiberger Forschungshefte erscheinen in zwangloser Folge in den Reihen A, B, C und D. Preis dieses Heftes: 8,— DM. Bestell- und Verlags-Nr. 2062/251/C 67. Vertrieb: Für das Gebiet der Deutschen Demokratischen Republik durch den Buchhandel, für das Gebiet der Deutschen Bundesrepublik durch die Buchhandlung Kunst und Wissen, Inhaber Erich Bieber, Stuttgart 8, Wilhelmstraße 4—6; für das gesamte Ausland über den Buchhandel bei der Deutschen Buch-Export und -Import GmbH, Leipzig C 1, Leninstraße 16. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 202 • 100/504/59 des Ministeriums für Kultur, HV Verlagswesen, der Deutschen Demokratischen Republik. — Printed in Germany.
Alle Rechte vorbehalten.

INHALT

Einleitung	7
Erläuterung verschiedener Symbole	9
Teil A. Das gestreckte Rotationsellipsoid	11
1. Die ellipsoidische Einlagerung im homogenen Feld	13
2. Die ellipsoidische Einlagerung mit induzierter Polarisierung im homogenen Feld	18
3. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{C}_{n,v}(\xi_0)$	22
4. Eine Abschätzung der Größenordnung der Koeffizienten A'_n	26
5. Zusammenhang mit der Lösung von DIRICHLET	31
6. Die Berechnung der Koeffizienten A'_n und B'_n	34
7. Außenfeld senkrecht zur großen Achse des gestreckten Rotationsellipsoides	38
8. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{D}_{n,v}(\xi_0)$	40
9. Die Berechnung der Koeffizienten a'_n und b'_n	43
Teil B. Das abgeplattete Rotationsellipsoid	47
10. Das abgeplattete Rotationsellipsoid im homogenen Feld	49
11. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{C}_{n,v}(\xi_0)$	52
12. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{D}_{n,v}(\xi_0)$	56
13. Die Bestimmung der Konstanten A'_n , B'_n , a'_n und b'_n für das abgeplattete Rotationsellipsoid	58
14. Zusammenstellung einiger Zahlenwerte	62
Teil C. Anwendung auf Dispersionen von Rotationsellipsoiden	63
15. Der spezifische Widerstand einer Dispersion von Rotationsellipsoiden	65
16. Anwendung auf Dispersionen galvanisch polarisierbarer Ellipsoide	69
17. Die Grenzfälle nadelförmiger und scheibenförmiger Ellipsoide	72
18. Regellos gelagerte Ellipsoide	75
19. Die Bestimmung des Volumengehaltes von Imprägnationserzen	79
20. Berechnung der Polarisations susceptibilität	81
21. Ein Vergleich der äquivalenten Kugelradien	82
22. Das Rotationsellipsoid im elektrischen Feld einer Punktquelle	84
Zusammenfassung	87
Literatur	88

Einleitung

Teil A. Das erste Buch (1871)

1. Die allgemeine Einleitung

2. Die allgemeine Einleitung

3. Die allgemeine Einleitung

4. Die allgemeine Einleitung

5. Die allgemeine Einleitung

6. Die allgemeine Einleitung

7. Die allgemeine Einleitung

8. Die allgemeine Einleitung

9. Die allgemeine Einleitung

10. Die allgemeine Einleitung

11. Die allgemeine Einleitung

12. Die allgemeine Einleitung

13. Die allgemeine Einleitung

14. Die allgemeine Einleitung

15. Die allgemeine Einleitung

16. Die allgemeine Einleitung

17. Die allgemeine Einleitung

18. Die allgemeine Einleitung

19. Die allgemeine Einleitung

20. Die allgemeine Einleitung

21. Die allgemeine Einleitung

22. Die allgemeine Einleitung

23. Die allgemeine Einleitung

24. Die allgemeine Einleitung

25. Die allgemeine Einleitung

26. Die allgemeine Einleitung

27. Die allgemeine Einleitung

28. Die allgemeine Einleitung

29. Die allgemeine Einleitung

30. Die allgemeine Einleitung

31. Die allgemeine Einleitung

32. Die allgemeine Einleitung

33. Die allgemeine Einleitung

34. Die allgemeine Einleitung

35. Die allgemeine Einleitung

36. Die allgemeine Einleitung

37. Die allgemeine Einleitung

38. Die allgemeine Einleitung

39. Die allgemeine Einleitung

40. Die allgemeine Einleitung

41. Die allgemeine Einleitung

42. Die allgemeine Einleitung

43. Die allgemeine Einleitung

44. Die allgemeine Einleitung

45. Die allgemeine Einleitung

46. Die allgemeine Einleitung

47. Die allgemeine Einleitung

48. Die allgemeine Einleitung

49. Die allgemeine Einleitung

50. Die allgemeine Einleitung

51. Die allgemeine Einleitung

52. Die allgemeine Einleitung

53. Die allgemeine Einleitung

54. Die allgemeine Einleitung

55. Die allgemeine Einleitung

56. Die allgemeine Einleitung

57. Die allgemeine Einleitung

58. Die allgemeine Einleitung

59. Die allgemeine Einleitung

60. Die allgemeine Einleitung

61. Die allgemeine Einleitung

62. Die allgemeine Einleitung

63. Die allgemeine Einleitung

64. Die allgemeine Einleitung

65. Die allgemeine Einleitung

66. Die allgemeine Einleitung

67. Die allgemeine Einleitung

68. Die allgemeine Einleitung

69. Die allgemeine Einleitung

70. Die allgemeine Einleitung

71. Die allgemeine Einleitung

72. Die allgemeine Einleitung

73. Die allgemeine Einleitung

74. Die allgemeine Einleitung

75. Die allgemeine Einleitung

76. Die allgemeine Einleitung

77. Die allgemeine Einleitung

78. Die allgemeine Einleitung

79. Die allgemeine Einleitung

80. Die allgemeine Einleitung

81. Die allgemeine Einleitung

82. Die allgemeine Einleitung

83. Die allgemeine Einleitung

84. Die allgemeine Einleitung

85. Die allgemeine Einleitung

86. Die allgemeine Einleitung

87. Die allgemeine Einleitung

88. Die allgemeine Einleitung

89. Die allgemeine Einleitung

90. Die allgemeine Einleitung

91. Die allgemeine Einleitung

92. Die allgemeine Einleitung

93. Die allgemeine Einleitung

94. Die allgemeine Einleitung

95. Die allgemeine Einleitung

96. Die allgemeine Einleitung

97. Die allgemeine Einleitung

98. Die allgemeine Einleitung

99. Die allgemeine Einleitung

100. Die allgemeine Einleitung

EINLEITUNG

In der geoelektrischen Prospektion auf sulfidische Erzlagerstätten ist es von großem wirtschaftlichem Interesse, nähere Einzelheiten über die Ursache von Leitfähigkeitsanomalien zu erfahren, da es eine ganze Reihe von wirtschaftlich unbedeutenden Leitern gibt, die die gleiche Leitfähigkeit wie Sulfiderze besitzen. Zwar besitzen die Sulfiderze als solche eine sehr hohe Leitfähigkeit, doch wird diese z. B. bei Imprägnationserzen infolge der Einlagerung in ein schlechter leitendes Nebengestein oft so weit erniedrigt, daß kaum noch ein Unterschied zu den störenden Leitern vorhanden ist. Da die meisten geoelektrischen Verfahren auf Leitfähigkeitsunterschiede ansprechen, erwachsen aus den geschilderten Umständen für die Deutung erhebliche Schwierigkeiten. Die Störleiter können sowohl elektrolythaltige Verwitterungszonen als auch graphithaltige Gesteine sein. Eine gewisse Unterscheidungsmöglichkeit erlaubt die Eigenpotentialmethode, jedoch ist auch diese nicht notwendig an Sulfiderze gebunden, da sie einmal auch bei graphithaltigen Gesteinen auftreten kann und da zum anderen stets ein starkes Konzentrationsgefälle in der Gesteinsfeuchtigkeit vorhanden sein muß. Wie W. BUCHHEIM [6] hierzu bemerkt, scheint z. Z. nur das Elektrolytpotential der Erzminerale eine Möglichkeit zu bieten, die Sulfiderzprospektion von den genannten Störleitereinflüssen zu befreien.

Anknüpfend an frühere Versuche von SCHLUMBERGER, MÜLLER, WEISS, BELLUIGI [4] [6] und anderen, die auf Grund des damaligen Standes der Meßtechnik wenig erfolgversprechend waren, wurde von W. BUCHHEIM [4] und D. F. BLEIL [3] unabhängig voneinander ein Verfahren entwickelt, das die elektrochemischen Vorgänge an Phasengrenzflächen ausnutzt. Schon SCHLUMBERGER beobachtete, daß sich Sulfiderzkörper durch Stromdurchgang künstlich polarisieren lassen (induzierte Polarisation). Neuere experimentelle Untersuchungen [3] [20] zeigten, daß diese künstliche Polarisation an den Grenzflächen metallischer Leiter gegen Elektrolyt wesentlich größer ist als zwischen verschiedenen Elektrolyten. Wenn auch damit auf eine Unterscheidungsmöglichkeit zwischen metallisch und elektrolytisch leitenden Gesteinen hingewiesen wird, so ist doch noch keine Differenzierung zwischen Sulfiderzen und graphithaltigen Gesteinen gegeben.

W. BUCHHEIM [5] konnte aber in einer theoretischen Untersuchung zeigen, daß dies bei Vorhandensein von Elektrolyt und einer verschiedenen Größe von Erz- und Graphitteilchen im Gestein mit Hilfe der induzierten Polarisation möglich sein muß. Bei dem von W. BUCHHEIM entwickelten Verfahren werden dem Erdboden Wechselströme variabler Frequenz zugeführt, während die gleichzeitig von D. F. BLEIL [3] durchgeführte Untersuchung mit Gleichstromimpulsen bei gleicher Problemstellung arbeitet. Die Erscheinungen an den Phasengrenzflächen lassen sich rein

phänomenologisch durch ein Nachwirkungsgesetz für die dort auftretende Potentialdifferenz beschreiben, wobei die Nachwirkungsfunktion näherungsweise durch eine Exponentialfunktion dargestellt werden kann. Experimente von I. SCHRAGE [20], M. SCHNEIDER [19] und W. ANDERS [1] zeigten aber, daß die Nachwirkungsfunktion eine kompliziertere Gestalt besitzen muß. Trotz zahlreicher Versuche ist es noch nicht gelungen, völlige Klarheit über die Nachwirkungsfunktion zu erhalten.

Während von W. BUCHHEIM [5] die Erscheinungen der induzierten Polarisation nur an Kugeln und Kugeldispersionen diskutiert wurden und bei bisherigen Behandlungen von geoelektrischen Problemen, bei denen sich Ellipsoide in einer andersleitenden Umgebung befinden (A. P. KRAJEW [13], T. KOLBENHEYER [11] [12]), stets die Stetigkeit des Potentials an der Ellipsoidoberfläche vorausgesetzt wird, sollen in dieser Arbeit die oben genannten Berechnungen von W. BUCHHEIM [5] für Rotationsellipsoide und Dispersionen rotationsellipsoidischer Einlagerungen verallgemeinert werden. Es können dadurch die Einflüsse überblickt werden, die darauf zurückgehen, daß die in einem Imprägnationserz tatsächlich enthaltenen Erzpartikel keine ideale Kugelgestalt besitzen, sondern im Gegenteil oft in einer mathematisch nicht erfaßbaren Form gestaltet sind. Die Betrachtung ellipsoidischer Partikel gestattet aber, einen recht großen Spielraum unterschiedlicher Formen zu erfassen — es seien die Grenzfälle nadelförmiger und scheibenförmiger Einlagerungen erwähnt —, und ermöglicht zugleich den Übergang zur Kugelgestalt bei verschwindender Exzentrizität.

Das Problem wird gelöst durch Entwicklung der Potentiale nach den harmonischen Funktionen des gestreckten (Teil A) bzw. abgeplatteten (Teil B) Rotationsellipsoids. Da über die Form der Nachwirkungsfunktion außer einigen prinzipiellen Eigenschaften noch keine endgültige Klarheit herrscht, wird die Rechnung ohne spezielle Annahmen durchgeführt, lediglich in einigen Zahlenbeispielen wird für sie die Exponentialfunktion eingesetzt (Teil A und Teil B). Die bei den Reihenentwicklungen in den Teilen A und B auftretenden Funktionen werden berechnet und näher untersucht, wobei es sogar gelingt, diese durch bekannte Funktionen darzustellen.

Im Teil C werden die Ergebnisse der vorangehenden Teile auf Dispersionen parallel ausgerichteter und regellos gelagerter Rotationsellipsoide übertragen. Weiterhin wird unter Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung der eingelagerten Teilchen der wirksame spezifische Widerstand einer Dispersion von Rotationsellipsoiden berechnet. Die erhaltenen Ergebnisse werden für zu Nadeln oder Scheiben entartete Rotationsellipsoide spezialisiert.

ERLÄUTERUNG VERSCHIEDENER SYMBOLE

Index '	bedeutet bei Konstanten, daß sie zeitunabhängig sind, z. B.:
	$A_n(t) = A'_n e^{i \omega t}$
Index '	bedeutet bei Funktionen Differentiation nach ξ oder η , z. B.:
	$\mathfrak{P}_3^{1'}(i \xi_0) = \left(\frac{d\mathfrak{P}_3^1(i \xi)}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_0}$
c	Brennpunktabstand
c_p	Polarisationskapazität pro Flächeneinheit in F cm ⁻²
$c(\omega)$	Polarisationssuszeptibilität
ε	numerische Exzentrizität
\mathcal{E}	elektrische Feldstärke
${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z)$	hypergeometrische Reihe
$f(x) = O(x^r)$	bedeutet, daß sich $f(x)$ für $x \gg 1$ wie x^r verhält.
$\mathfrak{P}_n^m(z), P_n^m(x)$	zugeordnete LEGENDRESche Funktion erster Art
$Q_n^m(z), Q_n^m(x)$	zugeordnete LEGENDRESche Funktion zweiter Art
x, y, z	kartesische Koordinaten
ξ, η, φ	Koordinaten des gestreckten bzw. abgeplatteten Rotationsellipsoids
z	komplexe Zahl

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

3. Die dipolartige Erzeugung im unendlichen Fall

Das Problem wurde zuerst von Laplace in der Vorlesung über die Theorie der Schwerkraft behandelt. Er hat die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter untersucht. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

TEIL A

DAS GESTRECKTE ROTATIONSELLIPSOID

Es geht um die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter. Das negative Bild ist die Erzeugung des Magnetfeldes durch die Bewegung der Ladungen in einem Leiter.

III

BARBERISCHER NOTATIONEN

1. Die ellipsoidische Einlagerung im homogenen Feld

Betrachtet werde eine rotationsellipsoidische Einlagerung (gestrecktes Rotationsellipsoid) der Leitfähigkeit σ_1 , die in ein homogen-isotropes Material der Leitfähigkeit σ_2 eingebettet ist. Das ungestörte Außenfeld der elektrischen Feldstärke sei homogen. Gesucht ist das Feld im Innern des Ellipsoids und das im Außenraum entstehende Zusatzfeld. Wegen der Quellfreiheit des Stromes müssen sowohl das Potential ψ_1 im Innenraum als auch das im Außenraum der LAPLACESchen Gleichung genügen.

$$\Delta\psi_1 = 0. \quad \Delta\psi_2 = 0.$$

Führt man die Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoid ξ, η, φ ein,

$$\left. \begin{aligned} x &= c [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y &= c [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z &= c \xi \eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

so gelten für die ξ, η, φ folgende Wertbereiche:

$$1 \leq \xi < \infty; \quad -1 \leq \eta \leq +1; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für $\xi = \xi_0 = \text{const}$ erhält man ein gestrecktes Rotationsellipsoid, dessen Brennpunkte bei $z = \pm c$ liegen und das für $\xi_0 = 1$ zur Brennpunktlinie entartet. $\eta = \eta_0 = \text{const}$ stellt ein hierzu konfokales zweischaliges Rotationshyperboloid dar.

Die LAPLACESche Gleichung lautet in diesen Koordinaten nach [15]:

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\} = 0.$$

Mit dem Separationsansatz

$$\psi = f_1(\xi) f_2(\eta) f_3(\varphi)$$

erhält man drei Differentialgleichungen, wobei μ und ν ($\nu + 1$) als Separationsparameter auftreten. Die Lösungen lauten [15]:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= A_\nu^{(\mu)} \mathfrak{P}_\nu^\mu(\xi) + B_\nu^{(\mu)} Q_\nu^\mu(\xi), \\ f_2(\eta) &= a_\nu^{(\mu)} P_\nu^\mu(\eta) + b_\nu^{(\mu)} Q_\nu^\mu(\eta), \\ f_3(\varphi) &= \alpha_\mu e^{i\mu\varphi} + \beta_\mu e^{-i\mu\varphi}. \end{aligned}$$

Die Produkte $f_1 f_2 f_3$ sind als die harmonischen Funktionen der gestreckten Rotationsellipsoide bekannt. Für die darin auftretenden LEGENDRESchen Funktionen erster und zweiter Art gilt in der Bezeichnungsweise von LENSE [14]

$$\mathfrak{P}_n(z) = P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!} z^n {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2} - n; z^{-2}\right)$$

für beliebiges z .

Für reelles $z = x$ und $-1 \leq x \leq +1$ gilt:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

Für alle anderen Werte von z gilt:

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} \mathfrak{P}_n(z).$$

Die LEGENDRESCHEN Funktionen zweiter Art sind für reelles x zwischen -1 und $+1$ definiert durch

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x)$$

und für alle Werte z , die nicht auf der Strecke zwischen -1 und $+1$ liegen:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z).$$

Dabei stellt W_{n-1} ein Polynom vom Grade $n-1$ dar. Für die zugeordneten LEGENDRESCHEN Funktionen zweiter Art gilt:

$$Q_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x).$$

$$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z).$$

Die Potentiale ψ_1 und ψ_2 müssen folgenden Bedingungen genügen bzw. folgende Eigenschaften besitzen:

- „1.“ Für $\xi \gg \xi_0$ soll $\psi_2 = \psi_0$ sein, wobei ψ_0 das Potential des homogenen Feldes ist.
 „2.“ Beide Potentiale müssen in ihrem Geltungsbereich singularitätenfrei sein.

$Q_\nu^\mu(z)$ bzw. $Q_\nu^\mu(z)$ besitzt, wenn ν ganz ist, nur für $z = \pm 1$ Singularitäten, während $P_\nu^\mu(z)$ in $z = \infty$ singularär ist.

Wenn sich die Indizes 1 und 2 auf Innen- bzw. Außenraum beziehen, muß aus diesem Grunde gelten:

$$B_{\nu 1}^{(\mu)} = 0; \quad b_{\nu 1}^{(\mu)} = 0; \quad b_{\nu 2}^{(\mu)} = 0.$$

Für alle ν und $A_{\nu 2}^{(\mu)} = 0$ für $\nu > 1$ wegen „1.“, wie später gezeigt werden wird.

- „3.“ Wenn auf der Oberfläche des Ellipsoids $\xi = \xi_0$ kein Potentialsprung vorhanden sein soll, so muß sein:

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \text{für} \quad \xi = \xi_0 \quad \text{und alle} \quad \eta \quad \text{und} \quad \varphi.$$

- „4.“ Auch die Normalkomponenten der Stromdichte müssen sich für $\xi = \xi_0$ stetig verhalten:

$$\sigma_1 \bar{n} \cdot \nabla \psi_1 = \sigma_2 \bar{n} \cdot \nabla \psi_2.$$

\bar{n} bedeutet den Normaleneinheitsvektor auf der Ellipsoidoberfläche in Richtung auf den Außenraum.

In den Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoids lautet die ξ -Komponente des Gradienten [15]:

$$\text{grad}_\xi \psi = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Bezüglich der Orientierung des homogenen Außenfeldes zur Rotationsachse des Ellipsoids lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

- a) homogenes Feld im Außenraum parallel zur Rotationsachse,
- b) homogenes Feld im Außenraum senkrecht zur Rotationsachse.

Durch Kombination von a) und b) können beliebige Orientierungen des homogenen Außenfeldes zum Ellipsoid realisiert werden.

Fall a. Das homogene Außenfeld hat die Richtung der z -Achse für $\xi \gg \xi_0$, also lautet das Potential wegen „1.“:

$$\psi_0 = -E_0 z = -c E_0 P_1(\xi) P_1(\eta).$$

Folglich ist $A_{1,2}^{(0)} = -c E_0$ mit $a_{1,2}^{(0)} (\alpha_{0,2} + \beta_{0,2}) = 1$.

Unter Berücksichtigung von „2.“ lauten die Potentiale, da aus Symmetriegründen eine Abhängigkeit von φ nicht vorhanden sein darf:

$$\psi_1 = \sum_{v=0}^{\infty} A_v P_v(\xi) P_v(\eta) \quad \text{für } 1 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (1.2)$$

$$\psi_2 = \sum_{v=0}^{\infty} B_v Q_v(\xi) P_v(\eta) - c E_0 \xi \eta \quad \text{für } \xi_0 \leq \xi_1, \quad (1.3)$$

wobei jetzt neue Konstanten

$$A_v = A_{v1}^{(0)} a_{v1}^{(0)} (\alpha_{01} + \beta_{01}) \quad \text{und} \quad B_v = B_{v2}^{(0)} a_{v2}^{(0)} (\alpha_{02} + \beta_{02})$$

eingeführt worden sind.

Die Bedingungen „3.“ und „4.“ lauten:

$$\text{„3.“} \quad \psi_1 = \psi_2.$$

$$\text{„4.“} \quad \sigma_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \sigma_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \quad \text{für } \xi = \xi_0 \text{ und alle } \eta.$$

$$\text{„3.“} \quad \sum_{v=0}^{\infty} A_v P_v(\xi_0) P_v(\eta) = \sum_{v=0}^{\infty} B_v Q_v(\xi_0) P_v(\eta) - c \xi_0 \eta E_0.$$

Koeffizientenvergleich:

$$v = 0: \quad A_0 = B_0 Q_0(\xi_0) = \frac{1}{2} B_0 \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1}.$$

$$v = 1: \quad A_1 \xi_0 = B_1 Q_1(\xi_0) - c \xi_0 E_0.$$

$$v > 1: \quad A_v P_v(\xi_0) = B_v Q_v(\xi_0).$$

$$„4.“ \quad \sigma_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} P_{\nu}(\eta) P'_{\nu}(\xi_0) = \sigma_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} P_{\nu}(\eta) Q'_{\nu}(\xi_0) - \sigma_2 c \eta E_0.$$

$$\begin{aligned} \nu = 0: & \quad 0 = B_0 \sigma_2 Q_0(\xi_0). \\ \nu = 1: & \quad \sigma_1 A_1 = \sigma_2 B_2 Q'_1(\xi_0) - \sigma_2 c E_0. \\ \nu > 1: & \quad \sigma_1 A_{\nu} P'_{\nu}(\xi_0) = \sigma_2 B_{\nu} Q'_{\nu}(\xi_0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Die Gleichungen für A_{ν} und B_{ν} mit $\nu \neq 1$ bilden für jedes $\nu \neq 1$ zwei lineare homogene Gleichungen mit nichtverschwindender Koeffizientendeterminante. Folglich ist

$$A_{\nu} = B_{\nu} = 0 \quad \text{für } \nu \neq 1.$$

Aus den beiden Gleichungen für $\nu = 1$ erhält man:

$$A_1 = - \frac{\left[\xi_0 - \frac{Q_1(\xi_0)}{Q'_1(\xi_0)} \right]}{\xi_0 - \frac{\sigma_1 Q_1(\xi_0)}{\sigma_2 Q'_1(\xi_0)}} c E_0. \quad (1.5)$$

$$B_1 = \frac{c E_0}{Q'_1(\xi_0)} \frac{\xi_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)}{\xi_0 - \frac{\sigma_1 Q_1(\xi_0)}{\sigma_2 Q'_1(\xi_0)}}. \quad (1.6)$$

Es ist:

$$Q_1(\xi_0) = \frac{\xi_0}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 1. \quad (1.7)$$

$$Q'_1(\xi_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0 - 1}. \quad (1.8)$$

Damit wird schließlich:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{-\sigma_2 c E_0 \eta \xi}{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \xi_0 (\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \xi_0^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_1} \\ \psi_2 &= -c E_0 \xi \eta + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) c E_0 \left[\frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1 \right] \eta}{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0^2 (\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_1}{\xi_0 (\xi_0^2 - 1)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Fall b. Das homogene Außenfeld ist senkrecht zur z -Achse gerichtet, z. B., ohne Einschränkung der Allgemeinheit, in Richtung der x -Achse:

$$\psi_0 = -x E_0.$$

$$\psi_0 = -c E_0 [(1 - \eta^2) (\xi^2 - 1)]^{1/2} \cos \varphi.$$

In diesem Falle müssen die Potentiale auch von φ abhängig sein:

$$\psi_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu}^{(\mu)} \mathfrak{P}_{\nu}^{\mu}(\xi) P_{\nu}^{\mu}(\eta) [\alpha_{\mu,1} e^{i\mu\varphi} + \beta_{\mu,1} e^{-i\mu\varphi}], \quad (1.10)$$

$$\psi_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{\nu}^{(\mu)} Q_{\nu}^{\mu}(\xi) P_{\nu}^{\mu}(\eta) [\alpha_{\mu,2} e^{i\mu\varphi} + \beta_{\mu,2} e^{-i\mu\varphi}] + c E_0 \mathfrak{P}_1^1(\xi) P_1^1(\eta) \cos \varphi, \quad (1.11)$$

wegen

$$\mathfrak{P}_1^1(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}$$

und

$$P_1^1(\eta) = -\sqrt{1 - \eta^2}.$$

Die Bedingungen für „3.“ und „4.“ sind jetzt für alle η und φ zu erfüllen. Sie verlangen, daß alle $a_v^{(\mu)}$ und $b_v^{(\mu)}$ außer $a_1^{(1)}$ und $b_1^{(1)}$ verschwinden müssen. Es ist:

$$Q_1^1 = \sqrt{\xi^2 - 1} Q_1'(\xi).$$

$$Q_1'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} Q_1'(\xi) + \frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}^3}.$$

Man erhält schließlich mit $\alpha_{11} = \beta_{11} = \alpha_{12} = \beta_{12} = \frac{1}{2}$

$$a_1^{(1)} = \frac{\mathfrak{P}_1^1(\xi_0) Q_1'(\xi_0) - Q_1^1(\xi_0) \mathfrak{P}_1^{1'}(\xi_0)}{\mathfrak{P}_1^1(\xi_0) Q_1'(\xi_0) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} Q_1^1(\xi_0) \mathfrak{P}_1^{1'}(\xi_0)} c E_0,$$

$$b_1^{(1)} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \xi_0 c E_0}{\sigma_2 \mathfrak{P}_1^1(\xi_0) Q_1'(\xi_0) - \sigma_1 Q_1^1(\xi_0) \mathfrak{P}_1^{1'}(\xi_0)}$$

und damit:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2 \sigma_2 c E_0}{(\sigma_2 - \sigma_1) \xi_0 \left[\frac{1}{2} (\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \xi_0 \right] - 2 \sigma_1} [(1 - \eta^2) (\xi^2 - 1)]^{1/2} \cos \varphi, \\ \psi_2 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) c E_0 \sqrt{1 - \eta^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right]}{(\sigma_2 - \sigma_1) \xi_0 \left[\frac{1}{2} (\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \xi_0 \right] - 2 \sigma_1} \cos \varphi \\ &\quad - c E_0 [(1 - \eta^2) (\xi^2 - 1)]^{1/2} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Folglich herrscht sowohl im Fall a) als auch im Fall b) im Innern des Ellipsoids ein homogenes Feld. Da aber die Überlagerung zweier homogener Felder wieder ein homogenes Feld ergibt, so entsteht auch bei beliebiger Orientierung des homogenen Außenfeldes zur Ellipsoidachse im Innern des Ellipsoids stets ein homogenes Feld.

2. Die ellipsoidische Einlagerung mit induzierter Polarisation im homogenen Feld

Zwischen der elektrolytisch leitenden Umgebung und der Einlagerung möge beim Auftreten induzierter galvanischer Polarisation folgende Potentialdifferenz nach W. BUCHHEIM [4] an der Oberfläche bestehen:

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = V_0 - r_0 \sigma_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - \frac{\sigma_1}{c_p} \int_{-\infty}^t dt' N(t-t') \frac{\partial \psi_1(t')}{\partial n}.$$

Dabei müssen die Normalkomponenten der Stromdichte auch hier stetig sein.

Es bedeuten: $r_0 =$ Übergangswiderstand der Flächeneinheit der Oberfläche in Ohm cm^2

$V_0 =$ stationäre elektrolytische Potentialdifferenz

$c_p =$ Polarisationskapazität der Einheit der Oberfläche in $F \cdot \text{cm}^{-2}$

$N(t-t') =$ Nachwirkungsfunktion der induzierten Polarisation mit den Eigenschaften:

$$N(0) = 1; \quad \frac{dN(\tau)}{d\tau} < 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} N(\tau) = 0.$$

Für sinusförmige Zeitabhängigkeit der Spannungen und Ströme läßt sich diese Randbedingung vereinfachen:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t) &= \psi'_{1,2} e^{i\omega t}. \\ \int_{-\infty}^t N(t-t') \frac{\partial \psi_1(t')}{\partial n} dt' &= \frac{\partial \psi'_1}{\partial n} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t N(t-t') e^{i\omega(t'-t)} dt'. \end{aligned}$$

Setzt man

$$g(\omega) = \frac{\sigma_1}{c} \left[r_0 + \frac{1}{c_p} I(i\omega) \right],$$

so erhält man schließlich:

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = V_0 - c g(\omega) \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial n}. \quad (2.1)$$

Dabei bedeutet:

$$I(i\omega) = \int_{-\infty}^t N(t-t') e^{i\omega(t'-t)} dt' = \int_0^{\infty} N(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

die LAPLACETRANSFORMIERTE der Nachwirkungsfunktion.

Bei einer kugelförmigen Einlagerung mit dem gleichen Verhalten des Potentials an der Oberfläche entsteht im Kugelinneren ein homogenes Feld [4] [5]; bei stetigem Verhalten des Potentials für $\xi = \xi_0$ herrscht auch im Inneren eines Ellipsoids ein homogenes Feld, wenn das ungestörte Außenfeld homogen ist. Deshalb soll auch hier versucht werden, die Randbedingungen mit dem Ansatz eines homogenen Innenfeldes zu erfüllen (homogenes Außenfeld parallel zu Rotationsachse des gestreckten Ellipsoids):

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= A_0 + A_1 \xi \eta; & \frac{\partial \psi_1}{\partial n} &= \frac{A_1}{c} \eta \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}}; \\ \psi_2 &= B_0 Q_0(\xi) + B_1 \eta Q_1(\xi) - c E_0 \xi \eta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Damit gilt für einen Wechselstrom der Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ mit $\xi = \xi_0$ für alle η :

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 \eta \xi_0 - B_0 Q_0(\xi_0) - B_1 \eta Q_1(\xi_0) + c E_0 \eta \xi_0 \\ = V_0 - \eta \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} A_1 g(\omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da V_0 nur von den elektrochemischen Eigenschaften des Elektrolyten und der Einlagerung abhängt, ist $B_0 = 0$ und $A_0 = V_0$.

Ferner gilt:

$$B_1 = \frac{1}{Q_2'(\xi_0)} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} A_1 + c E_0 \right]. \quad (2.4)$$

Mit $A_1 = A_1' e^{i\omega t}$ und $E_0 = E_0' e^{i\omega t}$ wird:

$$A_1' \left[\xi_0 - \frac{Q_1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0)} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + g(\omega) \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \right] = -c E_0' \left[\xi_0 - \frac{Q_1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0)} \right].$$

Mit konstantem A_1' läßt sich diese Gleichung nicht für alle η erfüllen. Damit ist bewiesen, daß der für das Innenfeld gemachte Ansatz nicht geeignet ist, die Randbedingungen zu erfüllen. Im Inneren des Ellipsoids herrscht also kein homogenes Feld.

Verwendet man an Stelle von (2.2) den allgemeineren Ansatz für die Potentiale (1.2) und (1.3), so erhält man:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} P_v(\eta) \frac{\partial \mathfrak{P}_v(\xi)}{\partial \xi} A_v = \frac{1}{c} (\xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \sum_{v=0}^{\infty} P_v(\eta) \mathfrak{P}_v^1(\xi) A_v. \quad (2.5)$$

Da stets $|\eta| \leq 1 \leq \xi_0$ ist, kann folgende Reihenentwicklung durchgeführt werden:

$$(\xi_0^2 - \eta^2)^{-1/2} P_v(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,v}(\xi_0) P_n(\eta). \quad (2.6)$$

Damit wird aus (2.5):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\eta) \sum_{v=1}^{\infty} A_v C_{n,v}(\xi_0) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0).$$

Wird dieser Wert in die Randbedingung (2.1) eingesetzt, so erhält man mit $A_n = A'_n e^{i\omega t}$ usw.

$$\begin{aligned} c E'_0 \xi_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n P_n(\xi_0) - B'_n Q_n(\xi_0)] P_n(\eta) \\ = -g(\omega) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\eta) \sum_{v=1}^{\infty} C_{n,v}(\xi_0) A'_v \mathfrak{P}_v^1(\xi_0), \end{aligned}$$

wobei schon berücksichtigt wurde, daß $A_0 = V_0$ und $B_0 = 0$ ist. Zwischen A'_1 und B'_1 besteht der Zusammenhang (2.4) und zwischen A'_n und B'_n gilt für $n > 1$:

$$B'_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\mathfrak{P}'_n(\xi_0)}{Q'_n(\xi_0)} A'_n.$$

Die Funktionen

$$f_{n,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = \mathfrak{P}_n(\xi_0) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{Q_n(\xi_0)}{Q'_n(\xi_0)} \mathfrak{P}'_n(\xi_0), \quad (2.7)$$

$$f_{n,b} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = \mathfrak{P}_n^1(\xi_0) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{Q_n^1(\xi_0)}{Q_n^1(\xi_0)} \mathfrak{P}_n^1(\xi_0) \quad (2.8)$$

sollen als Abkürzungen eingeführt werden.

Da die Randbedingungen (2.1) für alle η erfüllt sein müssen, kann folgender Koeffizientenvergleich durchgeführt werden:

$$c E'_0 f_{1,a}(\xi_0, 1) + A'_1 f_{1,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = -g(\omega) \sum_{v=1}^{\infty} A'_v C_{1,v}(\xi_0) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0) \quad (2.9)$$

und für $n > 1$:

$$A'_n f_{n,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = -g(\omega) \sum_{v=1}^{\infty} A'_v C_{n,v}(\xi_0) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0). \quad (2.10)$$

Diese Gleichungen können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ g(\omega) C_{n,v}(\xi_0) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0) + \delta_{v,n} f_{n,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right\} A'_v = 0. \\ \delta_{v,a} = \begin{cases} 1 & v = n \\ 0 & v \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Die Symmetrie der Einlagerung bezüglich der Ebene $\eta = 0$ (Äquatorebene des Rotationsellipsoids) bedingt, daß ψ_1 und ψ_2 ungerade Funktionen von η sind. Folglich ist

$$A_{2\mu} = B_{2\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots,$$

da $P_{2\mu}(\eta)$ gerade und $P_{2\mu+1}(\eta)$ ungerade Funktionen von η sind.

Die Gleichungen (2.9) und (2.10) bilden ein System unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten A'_n . Die Lösung dieses Gleichungssystems muß aber die Eigenschaft besitzen, daß sie die in (2.9) und (2.10) auftretenden unendlichen Summen konvergent macht. Wir können also ein k_0 angeben, so daß für jedes $k > k_0$ ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ existiert, für das

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_{m,2i+1} A'_{2i+1} \right| < \varepsilon \quad \text{mit } m = 1, 3, 5, \dots$$

ist, wobei

$$\alpha_{m,2i+1} = g(\omega) C_{m,2i+1}(\xi_0) \mathfrak{P}_{2i+1}^1(\xi_0) + \delta_{m,2i+1} f_{m,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

gesetzt worden ist. Aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) erhalten wir damit:

$$\left| \sum_{i=0}^k \alpha_{1,2i+1} A'_{2i+1} - c E'_0 f_{1,a}(\xi_0, 1) \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \sum_{i=0}^k \alpha_{n,2i+1} A'_{2i+1} \right| < \varepsilon.$$

Alle Gleichungen dieser Art mit $n \leq 2k+1$ bilden ein System von $k+1$ linearen Gleichungen für die $k+1$ Unbekannten

$$A'_1; A'_3 \dots; A'_{2k-1}; A'_{2k+1}.$$

Dieses Gleichungssystem lautet nach Einführung der Größen

$$|\delta_m| < \varepsilon, \quad m = 1, 3, 5, \dots, 2k+1$$

folgendermaßen:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_{1,2i+1} A'_{2i+1} = c E'_0 f_{1,a}(\xi_0, 1) + \delta_1;$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha'_{n,2i+1} A'_{2i+1} = \delta_n; \quad n = 3, 5, \dots, 2k+1.$$

Die Lösungen dieses endlichen Gleichungssystems können aber sofort angegeben werden. Wir erhalten z. B. für A'_1 :

$$A'_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{35} & \dots & \alpha_{3,2k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2k+1,3} & \alpha_{2k+1,5} & \dots & \alpha_{2k+1,2k+1} \end{vmatrix}}{\|\alpha_{m,2i+1}\|} c E'_0 f_{1,a}(\xi_0, 1) + \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1,2k+1} \\ \delta_3 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3,2k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{2k+1} & \alpha_{2k+1,3} & \dots & \alpha_{2k+1,2k+1} \end{vmatrix}}{\|\alpha_{m,2i+1}\|}.$$

Es verschwindet der zweite Term für $\varepsilon \rightarrow 0$ wegen $|\delta_m| < \varepsilon$. Die allgemeine Lösung lautet also für $j < k$:

$$A'_{2j+1} = (-1)^j \times \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{31} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3,2j-1} & \alpha_{3,2j+3} & \dots & \alpha_{3,2k+1} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \dots & \alpha_{5,2j-1} & \alpha_{5,2j+3} & \dots & \alpha_{5,2k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2k+1,1} & \alpha_{2k+1,2} & \dots & \alpha_{2k+1,2j-1} & \alpha_{2k+1,2j+3} & \dots & \alpha_{2k+1,2k+1} \end{vmatrix}}{\|\alpha_{m,2i+1}\|} c E'_0 f_{1,a}(\xi_0, 1) \pm \bar{\varepsilon}.$$

wobei $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ geht für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Bei Beschränkung auf endlich viele Gleichungen des unendlichen Gleichungssystems kann also die Lösung des unendlichen Gleichungssystems beliebig genau angegeben werden.

3. Die Bestimmung der Funktionen $C_{n,v}(\xi_0)$

In der Reihenentwicklung (2.6) treten als Koeffizienten der LEGENDRESCHEN Polynome die Funktionen $C_{n,v}(\xi_0)$ auf:

$$(\xi_0^2 - \eta^2)^{-1/2} P_v(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,v}(\xi_0) P_n(\eta). \quad (3.1)$$

Da die Kugelfunktionen $P_n(\eta)$ nur geradzahlige oder nur ungeradzahlige Potenzen von η enthalten, d. h. entweder gerade oder ungerade Polynome sind, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist und $(\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2}$ eine gerade Funktion ist, muß die Reihe eine gerade bzw. ungerade Funktion von η sein, wenn v eine gerade bzw. ungerade Zahl ist.

Folglich ist $C_{n,v}(\xi_0) = 0$, wenn $n + v$ ungerade ist.

Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der $P_n(\eta)$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\eta) P_v(\eta) d\eta = \frac{2 \delta_{n,v}}{2n+1}$$

ist

$$C_{n,v}(\xi_0) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} (\xi_0^2 - \eta^2)^{-1/2} P_v(\eta) P_n(\eta) d\eta.$$

Da $\xi_0 > 1$ und $|\eta| \leq 1$ ist, kann folgende binomische Reihe entwickelt werden:

$$\xi_0^{-1} \left(1 - \frac{\eta^2}{\xi_0^2}\right)^{-1/2} = \xi_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{\eta^{2k}}{\xi_0^{2k}}. \quad (3.2)$$

Es läßt sich nach [14] [21] $\eta^{2k} P_v(\eta)$ durch ein Polynom in η ausdrücken:

$$\eta^{2k} P_v(\eta) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2v-2m)!}{2^v m! (v-m)! (v-2m)!} \eta^{2k+v-m}. \quad (3.3)$$

Dabei bedeutet $\left[\frac{v}{2}\right]$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{v}{2}$. Andererseits läßt sich jede Potenz von η durch eine Linearkombination LEGENDRESCHER Funktionen erster Art ausdrücken [14] [21]:

$$\eta^p = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \frac{p! (2p-4\mu+1)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-2\mu+1) 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2\mu} P_{p-2\mu}(\eta). \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \eta^{2k} P_v(\eta) &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{v}{2}\right]} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\mu=0}^{\left[k-m+\frac{v}{2}\right]} \\ &\times \frac{(2v-2m)! (2k+v-2m)! (4k+2v-4m-4\mu+1) P_{2k+v-2m+2\mu}(\eta)}{2^v (v-m)! (v-2m)! 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4k+2v-4m+2\mu+1) 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2\mu)}. \end{aligned}$$

Führt man nunmehr die Integration

$$\int_{-1}^{+1} P_{2k+\nu-2m-2\mu}(\eta) P_n(\eta) d\eta$$

aus, so erkennt man, daß von der letzten Summe nur der Summand nicht verschwindet, für den $2k + \nu - 2m - 2\mu = n$ ist, d. h., $\mu = k - m + \frac{\nu - n}{2}$. Es ist aber $\frac{\nu - n}{2}$ stets eine ganze Zahl, da mit $\frac{n + \nu}{2}$ auch $\frac{\nu - n}{2}$ ganz ist. Damit wird

$$C_{n,\nu}(\xi_0) = \frac{2n+1}{2^\nu \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2\nu - 2m)!}{m! (\nu - m)! (\nu - 2m)!} \dots$$

$$\dots \frac{(2k - 2m + \nu - n + 2)(2k - 2m + \nu - n + 4) \dots (2k - 2m + \nu - 1)}{(2k - 2m + \nu + 2)(2k - 2m + \nu + 4) \dots (2k - 2m + \nu + n + 1)}$$

Die Zahl der Faktoren des zweiten Bruches der zweiten Summe beträgt stets

$$\text{im Zähler: } \leq \frac{n-1}{2},$$

$$\text{im Nenner: } = \frac{n+1}{2},$$

wobei negative und verschwindende Klammern durch 1 zu ersetzen sind. Es folgen einige spezielle Ausdrücke für ungerade ν , da aus den am Ende des 2. Kapitels genannten Gründen nur solche bei unserer Problemstellung auftreten können:

$$C_{n,1}(\xi_0) = \frac{2n+1}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \frac{(2k)(2k-2)\dots(2k-n+3)}{(2k+3)(2k+5)\dots(2k+n+2)},$$

$$C_{n,3}(\xi_0) = \frac{2n+1}{2^3 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \left\{ \frac{6!}{3!3!} \frac{(2k+2)(2k)\dots(2k-n+5)}{(2k+5)(2k+7)\dots(2k+n+4)} \right.$$

$$\left. - \frac{4!}{2!} \frac{(2k)(2k-2)\dots(2k-n+3)}{(2k+3)(2k+5)\dots(2k+n+2)} \right\},$$

$$C_{n,5}(\xi_0) = \frac{2n+1}{2^5 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \left\{ \frac{10!}{5!5!} \frac{(2k+4)(2k+2)\dots(2k-n+7)}{(2k+7)(2k+9)\dots(2k+n+6)} \right.$$

$$- \frac{8!}{4!3!} \frac{(2k+2)(2k)\dots(2k+5-n)}{(2k+5)(2k+7)\dots(2k+n+4)}$$

$$\left. + \frac{6!}{2!3!} \frac{(2k)(2k-2)\dots(2k-n+3)}{(2k+3)(2k+5)\dots(2k+n+2)} \right\}.$$

$C_{n,\nu}(\xi_0)$ läßt sich als Summe von $\frac{\nu+1}{2}$ absolut konvergenten Reihen darstellen. Jede dieser Reihen besitzt die absolut konvergente Reihe (3.2) für $\eta = 1$ als Majorante.

Man erhält speziell:

$$C_{1,1}(\xi_0) = \frac{3}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{1}{2k+3},$$

$$C_{3,1}(\xi_0) = \frac{7}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{\langle 2k \rangle}{(2k+3)(2k+5)},$$

$$C_{5,1}(\xi_0) = \frac{11}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{\langle 2k \rangle \langle 2k-2 \rangle}{(2k+3)(2k+5)(2k+7)}.$$

Dabei bedeutet $\langle 2k \rangle = 1$ für $k = 0$ und $\langle 2k-2 \rangle = 1$ für $k-1 \leq 0$.

$$\left. \begin{aligned} C_{1,3}(\xi_0) &= \frac{3 \cdot 5}{2 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{1}{2k+5} - \frac{3}{2} C_{1,1}(\xi_0), \\ C_{3,3}(\xi_0) &= \frac{5 \cdot 7}{2 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{2k+2}{(2k+5)(2k+7)} - \frac{3}{2} C_{3,1}(\xi_0), \\ C_{5,3}(\xi_0) &= \frac{5 \cdot 11}{2 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{(2k+2) \langle 2k \rangle}{(2k+5)(2k+7)(2k+9)} - \frac{3}{2} C_{5,1}(\xi_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$C_{1,5}(\xi_0) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 9}{8 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{1}{2k+7} - \gamma_1,$$

$$C_{3,5}(\xi_0) = \frac{7 \cdot 7 \cdot 9}{8 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{2k+4}{(2k+7)(2k+9)} - \gamma_3,$$

$$C_{5,5}(\xi_0) = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} U_k \frac{(2k+4)(2k+2)}{(2k+7)(2k+9)(2k+11)} - \gamma_5.$$

Dabei wurden zur Vereinfachung folgende Abkürzungen eingeführt:

$$U_k = \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k},$$

$$\gamma_i = \frac{7}{2} C_{i,3}(\xi_0) + \frac{27}{8} C_{i,1}(\xi_0).$$

Die Funktionen $C_{n,v}$ lassen sich durch einfache Umformung der einzelnen Glieder als hypergeometrische Reihen darstellen:

$$\left. \begin{aligned} C_{1,1}(\xi_0) &= \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \xi_0^{-2} \right), \\ C_{3,1}(\xi_0) &= \frac{7}{\xi_0} \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{35 \xi_0^2} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) \right], \\ C_{1,3}(\xi_0) &= \frac{3}{2 \xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} C_{1,1}(\xi_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$C_{3,3}(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0} {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}; 1, \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} C_{3,1}(\xi_0), \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) + \frac{5}{18 \xi_0^3} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} C_{3,1}(\xi_0). \quad (3.8)$$

Die hier verwendete verallgemeinerte hypergeometrische Reihe ist nach BARNES wie folgt definiert [15]:

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k \dots (\beta_q)_k k!} z^k$$

mit

$$(\alpha)_n = \alpha (\alpha + 1) (\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)$$

und

$$(\alpha)_0 = 1.$$

Die in (3.7) auftretende verallgemeinerte hypergeometrische Reihe läßt sich durch gliedweise Integration von (3.5) in zwei hypergeometrische Reihen ${}_2F_1$ umformen, die in (3.8) angegeben sind. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 7}{2 \xi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{\xi_0^{2k}} \frac{2k+2}{(2k+5)(2k+7)} &= -\frac{5 \cdot 7}{2} \xi_0^2 \frac{d}{d\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k+2}} \frac{1}{(2k+5)(2k+7)} \\ &= -\frac{\xi_0^2}{2} \frac{d}{d\xi_0} \frac{1}{\xi_0^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2}\right) \\ &= \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2}\right) + \frac{5}{18 \xi_0^3} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}; \frac{11}{2}; \xi_0^{-2}\right). \end{aligned}$$

4. Eine Abschätzung der Größenordnung der Koeffizienten A'_ν

Es soll an Hand der Gleichung (2.9) abgeschätzt werden, in welcher Weise sich die Konstanten A'_ν in Abhängigkeit von der Ordnung ν verhalten. Hierzu benötigen wir einen allgemeinen Ausdruck für

$$C_{1,\nu}(\xi_0) = \frac{3}{2^\nu \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \xi_0^{2k}} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2\nu - 2m)!}{m! (\nu - m)! (\nu - 2m)! (2k - 2m + \nu + 2)}.$$

Aus (3.3) erhalten wir sofort durch Integration und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß ν stets ungerade ist, mit $\nu = 2\mu + 1$:

$$2^{2\mu+1} \int_0^1 \eta^{2k+1} P_{2\mu+1}(\eta) d\eta = \begin{cases} = 0 & \text{für } k < \mu. \\ = \sum_{m=0}^{\mu} \frac{(-1)^m (4\mu - 2m + 2)!}{m! (2\mu - m + 1)! (2\mu - 2m + 1)! (2k + 2\mu - 2m + 3)} & \text{für } k \geq \mu. \end{cases}$$

Also:

$$C_{1,2\mu+1}(\xi_0) = \frac{3}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \xi_0^{2k}} \int_0^1 \eta^{2k+1} P_{2\mu+1}(\eta) d\eta. \quad (4.1)$$

Auf Grund der Orthogonalitätsrelationen und der Darstellbarkeit von η^{2k+1} durch eine Linearkombination LEGENDRESCHER Polynome, deren Ordnung höchstens $2k+1$ betragen kann und ungerade ist, verschwindet das Integral in (4.1) für $k < \mu$; die Reihe für $C_{1,\nu}$ beginnt also mit $\xi_0^{-\nu}$. Für $k \geq \mu$ erhält man wegen [21]:

$$\int_0^1 [P_{2\mu+1}(\eta)]^2 d\eta = \frac{1}{4\mu + 3}$$

unter Berücksichtigung von (3.4):

$$\int_0^1 \eta^{2k+1} P_{2\mu+1}(\eta) d\eta = \frac{(2k+1)! 2^{\mu-k}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2k+2\mu+3) (k-\mu)!}.$$

Schließlich erhalten wir folgende Reihe:

$$C_{1,\nu}(\xi_0) = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (\nu - 2)}{\xi_0^\nu (\nu + 2) (\nu + 4) \cdot \dots \cdot (2\nu + 1)} \times \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu (\nu + 2)^2 (\nu + 4)^2 \dots (\nu + 2i - 2)^2 (\nu + 2i)}{2^i i! \xi_0^{2i} (2\nu + 3) (2\nu + 5) \dots (2\nu + 2i + 1)} \right\}. \quad (4.2)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \nu(\nu+2)(\nu+4)\dots(\nu+2i-2) &= 2^i \frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2}+1\right)\dots\left(\frac{\nu}{2}+i-1\right) \\ &= 2^i \left(\frac{\nu}{2}\right)_i \\ (2\nu+3)(2\nu+5)\dots(2\nu+2i+1) &= 2^i \left(\nu+\frac{3}{2}\right)_i \end{aligned}$$

kann (4.2) auf eine GAUSSSCHE hypergeometrische Reihe zurückgeführt werden:

$$C_{1,\nu}(\xi_0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (\nu-2)}{(\nu+2)(\nu+4)\dots(2\nu+1)} \frac{3}{\xi_0^\nu} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}+1; \frac{2\nu+3}{2}; \xi_0^{-2}\right). \quad (4.3)$$

Der Konvergenzradius der hypergeometrischen Reihe ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ist der Einheitskreis $|z|=1$. Nach [15] gelten folgende Konvergenzbedingungen:

$\Re(a+b-c) \geq 1$: Divergenz auf dem ganzen Einheitskreis

$1 > \Re(a+b-c) \geq 0$: Konvergenz auf dem ganzen Einheitskreis außer $z=1$

$\Re(a+b-c) < 0$: Konvergenz auf dem ganzen Einheitskreis

Wie man sieht, ist die letzte Bedingung sowohl für (4.3) als auch für (3.6) usw. erfüllt.

Die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2.9) lautet bis auf einen Faktor:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{1,\nu}(\xi_0) P'_\nu(\xi_0) A'_\nu. \quad (4.4)$$

$P'_\nu(\xi_0)$ läßt sich als hypergeometrische Reihe nach fallenden Potenzen von ξ_0 darstellen [15]:

$$P'_\nu(\xi_0) = \frac{(2\nu)!}{2^\nu (\nu-1)! \nu!} \xi_0^{\nu-1} {}_2F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, 1-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}-\nu; \xi_0^{-2}\right). \quad (4.5)$$

Für große Werte $\xi_0 \gg 1$ wollen wir uns in (4.3) und (4.5) jeweils auf das erste Glied beschränken und erhalten damit

$$C_{1,\nu}(\xi_0) P'_\nu(\xi_0) |A'_\nu| > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (\nu-2) (2\nu)!}{2^\nu \nu! (\nu-1)! (\nu+2)(\nu+4)\dots(2\nu+1)} \frac{3}{\xi_0} |A'_\nu|$$

oder, da $C_{1,\nu}$ nur für ungerade ν von Null verschieden ist, mit $\nu = 2\mu + 1$ und $|A'_\nu| = |A'_1| \mu^{-\alpha}$ mit noch unbekanntem α :

$$C_{1,2\mu+1}(\xi_0) P'_{2\mu+1}(\xi_0) |A'_{2\mu+1}| > \frac{3 [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\mu-3)(2\mu-1)]^2 (2\mu+1) |A'_1|}{\xi_0 (2\mu)! (4\mu+3) \mu^\alpha}.$$

Betrachten wir nun eine Reihe, deren μ -tes Glied a_μ durch den rechts stehenden Ausdruck angegeben wird, und wenden wir das RAABESCHE Konvergenzkriterium [10] an, nach dem eine Reihe absolut konvergiert, wenn zwar nach dem Quotienten- und Wurzelkriterium keine Entscheidung gefällt, aber eine Zahl $c > 0$ angegeben werden kann:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left| \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \right| - 1 \right\} = -1 - c,$$

so gelingt es, eine untere Grenze für α zu finden:

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_{\mu}} = \frac{(2\mu+3)(4\mu+3)}{(2\mu+2)(4\mu+7)} \left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{-\alpha}.$$

Setzt man

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + \dots,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \left\{ \frac{a_{\mu+1}}{a_{\mu}} - 1 \right\} &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{-(8\alpha+4)\mu^2 - (18\alpha+5)\mu - \dots}{8\mu^2 + 22\mu + 14} \\ &= -\frac{1}{2} - \alpha \end{aligned}$$

Verlangt man also, daß $\alpha > \frac{1}{2}$ ist, dann ist die Reihe $\sum a_{\mu}$ absolut konvergent. Damit aber auch die Reihe (4.4) absolut konvergiert, die zu dieser Reihe eine Majorante darstellt, darf α keinesfalls kleiner sein, als soeben bestimmt.

Eine noch schärfere Abschätzung erhalten wir für $\xi_0 = 1$, da sich hier die exakten Werte $C_{1,\nu}(1)$ und $P'_{\nu}(1)$ angeben lassen. Für eine auf dem ganzen Einheitskreis konvergente hypergeometrische Reihe gilt nach GAUSS [8] [15]:

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)};$$

dabei bedeutet $\Gamma(z)$ die Gammafunktion mit $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$.

Für $\xi_0 = 1$ tritt in (4.3) mit $\nu = 2\mu + 1$ folgender Ausdruck auf:

$${}_2F_1\left(\mu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{3}{2}; 2\mu + \frac{5}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma\left(2\mu + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+2) \Gamma(\mu+1)}.$$

Wegen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1) 2^{-\mu} \sqrt{\pi}$$

und

$$\Gamma(\mu+1) = \mu!$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} C_{1,2\mu+1}(1) &= 3 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1)}{(2\mu+3)(2\mu+5) \dots (4\mu+3)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4\mu+3)}{\mu! (\mu+1)! 2^{2\mu+2}} \pi \\ &= \frac{3\pi}{4} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2\mu)} \right]^2 \frac{2\mu+1}{\mu+1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

In (4.5) erhält man mit $\xi_0 = 1$ und $\nu = 2\mu + 1$:

$${}_2F_1\left(-\mu, \frac{1}{2} - \mu; -2\mu - \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma\left(-2\mu - \frac{1}{2}\right) \Gamma(-1)}{\Gamma\left(-\mu - \frac{1}{2}\right) \Gamma(-\mu - 1)}.$$

Die Gammafunktion $\Gamma(z)$ ist eine meromorphe Funktion und besitzt an den Stellen $z = -m$ einfache Pole mit dem Residuum $\frac{(-1)^m}{m!}$, d. h., es ist nach einem bekannten Satz aus der Funktionentheorie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \Gamma(x - m) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Also:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x - 1)}{\Gamma(x - \mu - 1)} = (-1)^\mu (\mu + 1)!.$$

Ferner gilt nach [8] [15]:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \cos \pi z}$$

Mit den letztgenannten Ausdrücken wird

$${}_2F_1\left(-\mu, \frac{1}{2} - \mu; -2\mu - \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{2^\mu (\mu + 1)!}{(2\mu + 3)(2\mu + 5) \dots (4\mu + 1)}$$

und

$$P'_{2\mu+1}(1) = (\mu + 1)(2\mu + 1). \quad (4.7)$$

Aus (4.6) und (4.7) erhalten wir schließlich:

$$C_{1, 2\mu+1}(1) P'_{2\mu+1}(1) = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\mu - 1)(2\mu + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2\mu - 2)(2\mu)} \right]^2.$$

Auf gleichem Wege wie für große Werte ξ_0 kann auch für $\xi_0 = 1$ eine untere Grenze für α gefunden werden:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left| \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \right| - 1 \right\} &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left[\frac{2\mu + 3}{2\mu + 2} \right]^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) - 1 \right\}; \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Reihe (4.4) erfordert also, daß für $\xi_0 = 1$ $\alpha > 2$ ist.

Folgende Überlegungen führen uns zu einer Aussage über das Verhalten der unteren Schranke von α für alle anderen Werte $\xi_0 > 1$. Nach (4.3) ist

$$C_{1,r} = O(\xi_0^{-r}),$$

wenn $\xi_0 \gg 1$, für kleinere Werte von ξ_0 nimmt $C_{1,r}$ stärker als ξ_0^{-r} ab, da (4.3) nur positive Glieder enthält. Aus (4.5) folgt dagegen

$$P'_r(\xi_0) = O(\xi_0^{r-1}),$$

wobei P'_r schwächer als ξ_0^{r-1} wächst, wenn ξ_0 nicht sehr groß gegen 1 ist, da (4.5) eine alternierende Reihe ist. Es gilt also

$$C_{1,r}(\xi_0) P'_r(\xi_0) = O(\xi_0^{-1}), \quad (4.8)$$

wobei die Abnahme stärker als ξ_0^{-1} ist, wenn ξ_0 nicht sehr groß gegen 1 ist. Wir sehen daraus, daß das Produkt (4.8) eine monoton abnehmende, stets positive Funktion von ξ_0 ist, und schließen daraus, daß auch die untere Schranke für α eine monotone Funktion von ξ_0 sein muß, von der wir wissen, daß

$$\begin{aligned} &\text{für } \xi_0 = 1 \quad \alpha > 2 \quad \text{und} \\ &\text{für } \xi_0 \gg 1 \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Damit ist das Ziel dieses Paragraphen erreicht, denn es wurde bewiesen, daß die $|A'_\nu|$ eine mit wachsendem ν abnehmende Folge bilden. Im Kapitel 6 wird an einem den praktischen Verhältnissen entsprechenden Beispiel gezeigt, daß die Koeffizienten A'_ν viel stärker abnehmen, als durch diese groben Abschätzungen festgestellt wurde.

5. Zusammenhang mit der Lösung von DIRICHLET

Es soll an dieser Stelle noch auf einen anderen Weg hingewiesen werden, die Potentialverteilung in und außerhalb eines homogenen Ellipsoids zu berechnen, das sich in einem Feld befindet, das in großer Entfernung vom Ellipsoid homogen ist. Man könnte versucht sein, zu glauben, daß sich die Schwierigkeiten, die sich durch die Inhomogenitäten des Feldes im Ellipsoid ergeben, auf diese Weise umgehen lassen.

Von G. L. DIRICHLET [7] wurde 1846 das Gravitationspotential eines homogenen mit Masse gefüllten, dreiachsigen Ellipsoids angegeben. Wie z. B. von BECKER [2] gezeigt wurde, läßt sich die DIRICHLETSche Lösung leicht auf polarisierte Ellipsoide übertragen. Diese Lösung besitzt eine große Bedeutung für die Berechnung der Entmagnetisierungsfaktoren homogener Ellipsoide aus magnetisierbarer Materie.

Es möge sich ein homogen-isotropes, dreiachsiges Ellipsoid der Leitfähigkeit σ_1 in einem homogenen elektrischen Felde befinden, das parallel zu einer Achse des Ellipsoids gerichtet sei. Dann lautet das äußere Gesamtpotential (KRAJEW [13])

$$\psi_2 = -E_0 x_k + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \Theta_k(\chi_1) x_k E_0}{\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \Theta_k(0)}, \quad (5.1)$$

wobei $k = 1, 2$ oder 3 ist und die Koordinatenrichtung angibt, der das äußere Feld parallel ist. Die elliptische Koordinate χ_1 ist die größte der reellen Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{a_k^2 + \chi} = 1. \quad \begin{array}{l} x_1 = x. \\ x_2 = y. \\ x_3 = z. \end{array} \quad (5.2)$$

$$\Theta_k(\chi_1) = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_{\chi_1}^{\infty} \frac{ds}{(s + a_k^2) [(s + a_1^2)(s + a_2^2)(s + a_3^2)]^{1/2}}. \quad (5.3)$$

Für ein verlängertes Rotationsellipsoid muß man $a_1 = a_2 < a_3$ setzen, mit $\varepsilon = \left[1 - \frac{a_1^2}{a_3^2}\right]^{1/2}$ und der Substitution $s = a_3(u^2 - 1)$ erhält man, wenn das äußere Feld parallel der großen Achse des Ellipsoids ist:

$$\Theta_3(u) = (1 - \varepsilon^2) \int_u^{\infty} \frac{du}{u^2(u^2 - \varepsilon^2)} = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \int_{u/\varepsilon}^{\infty} \frac{du}{u^2(u^2 - 1)}.$$

Nach [15] gilt für die LEGENDRESchen Funktionen zweiter Art für ganze n :

$$Q_n(z) = 2^n \int_z^{\infty} \frac{(t - z)^n dt}{(t^2 - 1)^{n+1}}.$$

Also ist z. B.

$$Q_1(z) = 2 \int_z^\infty \frac{t-z}{(t^2-1)^2} dt;$$

durch partielle Integration erhält man hieraus:

$$Q_1(z) = z \int_z^\infty \frac{dt}{t^2(t^2-1)}.$$

Es ist also:

$$\Theta_3(u) = \frac{1-\varepsilon^2}{u\varepsilon^2} Q_1\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

$$\Theta_3(\chi_1) = \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 \sqrt{\frac{\chi_1}{a_3^2} + 1}} Q_1\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\chi_1}{a_3^2} + 1}\right).$$

Es soll nun die Gleichheit der Lösung (1.9) mit der DIRICHLETSchen Lösung gezeigt werden.

Aus (1.9) erhält man für das Störpotential im Außenraum:

$$\psi_{st} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) E_0}{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0^2 (\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_1}{\xi_0 (\xi_0^2 - 1)}} \frac{z}{\xi} Q_1(\xi) \quad (5.4)$$

mit $z = c \xi \eta$,

wenn das homogene Außenfeld parallel der z-Achse ist. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den elliptischen Koordinaten ξ und χ_1 . Es stellen $\xi = \text{const}$ und $\chi_1 = \text{const}$ je ein Ellipsoid dar. Verlangt man, daß beide das gleiche darstellen sollen, so erhält man aus (5.2) und (1.1) nach [15]:

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2 + \chi_1} + \frac{z^2}{a_3^2 + \chi_1} = 1.$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2 (\xi^2 - 1)} + \frac{z^2}{c^2 \xi^2} = 1.$$

Also:

$$\xi = \frac{\varepsilon}{1} \sqrt{1 + \frac{\chi_1}{a_3^2}} = \frac{u}{\varepsilon}; \quad \xi_0 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Es gilt

$$\frac{1}{\xi} Q_1(\xi) = \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon^2} \Theta_3(\chi_1),$$

$$\frac{1}{\xi_0} Q_1(\xi_0) = \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon^2} \Theta_3(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon,$$

so daß wir (5.4) in folgender Weise umformen können:

$$\psi_{St} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) E_0 z \Theta_3(\chi_1)}{\frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_1 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \varepsilon \right]} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) E_0 z \Theta_3(\chi_1)}{\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \Theta_3(0)}.$$

Damit ist die Übereinstimmung des als „Fall a“ gekennzeichneten Ergebnisses mit der DIRICHLETSchen Lösung nachgewiesen. Nun ist noch das Entsprechende für den Fall nachzuweisen, daß die große Achse des gestreckten Rotationsellipsoids und das Außenfeld senkrecht zueinander stehen (Fall b).

Aus (5.3) erhält man

$$\Theta_2(\chi_1) = \frac{a_1^2 a_3}{2} \int_{z_1}^{\infty} \frac{ds}{(s + a_1^2)^2 \sqrt{s + a_3^2}} = \xi_0 (\xi_0^2 - 1) \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{du}{(u^2 - 1)^2}$$

mit der Substitution $s = a_3^2 \left(\frac{u^2}{\xi_0^2} - 1 \right)$. Partielle Integration liefert:

$$\Theta_2(\chi_1) = \frac{1}{2} \xi_0 (\xi_0^2 - 1) \left[\frac{1}{\xi} Q_1(\xi) - \frac{1}{\xi (\xi^2 - 1)} \right] = \frac{1}{2} \xi_0 (\xi_0^2 - 1) \frac{d}{d\xi} Q_1(\xi). \quad (5.5)$$

[Siehe (1.7) und (1.8)].

Die Gegenüberstellung von (5.1) und (5.5) mit (1.12) zeigt wiederum die Gleichheit mit der DIRICHLETSchen Lösung.

6. Die Berechnung der Koeffizienten A'_n und B'_n

Die Konstanten A'_n lassen sich aus den Gleichungen (2.9) und (2.10) berechnen; B'_n ist mit A'_n durch die Beziehung (1.4) bzw. (2.4) verknüpft. Setzt man zur Berechnung von A'_1 zunächst willkürlich $A'_n = 0$ für $n \geq 3$, so erhält man aus (2.9)

$$A'_1 = - \frac{c f_{1,a}(\xi_0, 1) E'_0}{f_{1,a}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + g(\omega) C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)} \quad (6.1)$$

und mit (2.4)

$$B'_1 = \frac{c E'_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \xi_0 + g(\omega) C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0) \xi_0 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{Q_1(\xi_0)}{Q_1(\xi_0)} + g(\omega) C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}.$$

Durch Vergleich mit (1.6) und Einführung des spezifischen Widerstandes $\varrho_1 = \frac{1}{\sigma_1}$ erhält man einen effektiven, komplexen, spezifischen Widerstand für das galvanisch polarisierbare Ellipsoid:

$$\varrho_a^* = \varrho_1 \left[1 + \frac{1}{\xi_0} g(\omega) C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0) \right] = \varrho_1 + \left[r_0 + \frac{1}{c_p} I(i \omega) \right] \frac{C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}{c \xi_0}. \quad (6.2)$$

Der Vergleich von (6.2) mit dem effektiven spezifischen Widerstand einer homogenen, galvanisch polarisierbaren Kugel, wie er von W. BUCHHEIM [5] angegeben worden ist, legt es nahe, für das Ellipsoid einen äquivalenten Kugelradius e_a einzuführen:

$$\varrho_a^* = \varrho_1 + \frac{1}{e_a} \left[r_0 + \frac{1}{c_p} I(i \omega) \right]. \quad (6.3)$$

$$e_a = \frac{c \xi_0}{C_{1,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}. \quad (6.4)$$

Für $\xi_0 \gg 1$ erhält man den asymptotischen Wert

$$e_a = c \xi_0 [1 + O(\xi_0^{-2})].$$

Der äquivalente Kugelradius wird also bei Übergang zur Kugelgestalt der großen Halbachse des Ellipsoids und damit dem tatsächlichen Kugelradius gleich.

Es soll nun die Veränderung von A'_1 untersucht werden, die dadurch entsteht, daß auch Koeffizienten A'_n mit $n > 1$ berücksichtigt werden. Setzt man $A'_3 \neq 0$, aber $A'_n = 0$ für $n \geq 5$, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Phi_{n,a} &= f_{n,a}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + g(\omega) C_{n,n}(\xi_0) \mathfrak{P}_n^1(\xi_0), \\ \{I\} &= \frac{g^2(\omega) C_{1,3} C_{1,3} \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_3^1}{\Phi_{3,a}} \end{aligned}$$

folgende Ausdrücke:

$$\frac{A'_1}{c E'_0} = \frac{-f_{1,a}(\xi_0, 1)}{\Phi_{1,a} - \{I\}}, \quad (6.5)$$

$$\frac{B'_1}{c E'_0} = \frac{1}{Q'_1(\xi_0)} \frac{\left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \xi_0 + g(\omega) C_{1,1} \mathfrak{P}_1^1 - \{I\}}{\Phi_{1,a} - \{I\}}.$$

Schließlich sollen auch noch die Konstanten A'_n angegeben werden, wie man sie erhält, wenn $A'_n = 0$ für $n \geq 7$ gesetzt wird:

$$\frac{A'_1}{c E'_0} = \frac{-f_{1,a}(\xi_0, 1)}{\Phi_{1,a} + \frac{g^3(\omega) \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_5^1 \{IV\} - g^2(\omega) \{II\}}{\{III\}}}. \quad (6.6)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \{II\} &= C_{1,5} C_{5,1} \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_5^1 \Phi_{3,a} + C_{1,3} C_{3,1} \mathfrak{P}_1^1 \mathfrak{P}_3^1 \Phi_{5,a}, \\ \{III\} &= \Phi_{3,a} \Phi_{5,a} - g^2(\omega) C_{3,5} C_{5,3} \mathfrak{P}_3^1 \mathfrak{P}_5^1, \\ \{IV\} &= C_{3,1} C_{1,5} C_{5,3} + C_{1,3} C_{3,5} C_{5,1}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhält man für $A'_n = 0$ ($n \geq 5$)

$$\frac{A'_3}{A'_1} = - \frac{g(\omega) C_{3,1}(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}{\Phi_{3,a}} \quad (6.7)$$

und für $A'_n = 0$ ($n \geq 7$)

$$\frac{A'_3}{A'_1} = \frac{g(\omega) \mathfrak{P}_1^1 \{g(\omega) C_{3,5} C_{5,1} \mathfrak{P}_5^1 - C_{3,1} \Phi_{5,a}\}}{\{III\}}, \quad (6.8)$$

$$\frac{A'_5}{A'_1} = \frac{g(\omega) \mathfrak{P}_1^1 \{g(\omega) C_{3,1} C_{5,3} \mathfrak{P}_3^1 - C_{5,1} \Phi_{3,a}\}}{\{III\}}. \quad (6.9)$$

Unter der Annahme, daß die Nachwirkungsfunktion N eine Exponentialfunktion ist, erhält man mit

$$N(\tau) = e^{-\lambda \tau}$$

$$g(\omega) = \frac{\sigma_1}{c} \left[r_0 + \frac{1}{c_p} \frac{1}{\lambda + i \omega} \right].$$

Es ist also stets $\Re(g) > 0$ und $\Im(g) < 0$. Aus Labormessungen von W. ANDERS [1] ergeben sich folgende Näherungswerte für Grenzflächen Blei beziehungsweise Bleiglanz gegen verdünnte Schwefelsäure:

$$\lambda = 40 \text{ s}^{-1}.$$

$$\rho_2 c_p = 2 \Omega \text{ cm F cm}^{-2} = 2 \text{ s cm}^{-1}.$$

Es möge nun ein gestrecktes Rotationsellipsoid betrachtet werden, das die hundertfache Leitfähigkeit des umgebenden Materials besitzt ($\rho_2/\rho_1 = 100$) und von folgender Größe und Gestalt sein soll:

$$c = 0,05 \text{ cm}; \quad \xi_0 = 1,4.$$

Messungen an Gesteinsmodellen führten ANDERS [1] zu dem Ergebnis, daß

$$r_0 \ll \Re \left(\frac{1}{c_p \lambda + i \omega} \right)$$

gesetzt werden kann. Für $g(\omega)$ ergibt sich somit

$$g(\omega) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{\varrho_2 c_p c} \frac{1}{\lambda + i \omega}$$

unter Benutzung der angegebenen Werte wird

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{\varrho_2 c_p c} = \frac{\sigma_1}{c_p c} = 1000 \text{ s}^{-1}.$$

In den folgenden Tabellen 1 und 2 sind die unter Verwendung der angegebenen Zahlenwerte berechneten Konstanten (nach den Gleichungen 6.1, 6.5—6.9) für verschiedene Frequenzen f zusammengefaßt. Die nach den Formeln (6.6), (6.8) und (6.9) bestimmten Konstanten wurden unter Vernachlässigung des Imaginärteils von $g(\omega)$ berechnet, die nach den übrigen drei Formeln berechneten sowohl unter Berücksichtigung als auch unter Vernachlässigung des Imaginärteils von $g(\omega)$.

Aus den Tabellen 1 und 2 kann man für ein spezielles, den praktisch vorkommenden Verhältnissen entsprechendes Beispiel entnehmen, wie gering die Fehler sind, die dadurch entstehen, daß entweder höhere Potentialanteile oder der Imaginärteil von g oder auch beide vernachlässigt worden sind. So erhält man eine prozentuale Abweichung des kleinsten vom größten Wert von $A'_1/c E'_0$ von maximal 2% bei 10 Hz. Größere Unterschiede treten erst bei den höheren Potentialanteilen auf, doch sind diese selbst mehr als eine Größenordnung kleiner als das homogene Grundfeld, es erreicht der Koeffizient A'_3 , der die Inhomogenitäten der niedrigsten Ordnung repräsentiert, nur maximal 3% des homogenen Innenfeldes. Die Abnahme der Koeffizienten ist also viel stärker, als man nach der groben Abschätzung im 4. Kapitel zu erwarten hatte.

Tabelle 1

f Hz	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	φ	$\frac{A'_1}{c E}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$	φ
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,1	-0,027272	-0,027269	+ 0° 17'	-0,027457	-0,026219	-0,026221	- 0° 40'
1	-0,027477	-0,027444	+ 2° 46'	-0,027657	-0,025754	-0,026050	- 6° 23'
3	-0,028918	-0,028683	+ 7° 18'	-0,029064	-0,022540	-0,024775	-20° 16'
10	-0,035096	-0,034524	+10° 21'	-0,035127	-0,009320	-0,017168	-49° 6'
100	-0,039643	-0,039626	+ 1° 39'	-0,039643	-0,000144	-0,002263	-85° 3'

Tabelle 2

f Hz	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$
	(8)	(9)	(10)
0,1	-0,027457	-0,025092	-0,00028759
1	-0,027658	-0,024657	-0,00028541
3	-0,029065	-0,021640	-0,00026721
10	-0,035128	-0,009127	-0,00013900
100	-0,039643	-0,000144	-0,00000244

Erläuterungen: In den Spalten (1), (4), (5), (8), (9) und (10) wurde $\Im m(g)$ vernachlässigt. (3) ist die zu (2) gehörende Phasenverschiebung, (7) die zu (6) gehörende.

(1)–(3) Ergebnisse für $A'_n = 0$ mit $n \geq 3$

(4)–(7) Ergebnisse für $A'_n = 0$ mit $n \geq 5$

(8)–(10) Ergebnisse für $A'_n = 0$ mit $n \geq 7$

Die Berechnung der Koeffizienten A'_n und E'_n

7. Außenfeld senkrecht zur Rotationsachse des gestreckten Ellipsoids

Zur Behandlung eines gestreckten Rotationsellipsoids, das sich in einem zur Rotationsachse senkrechten Feld befindet, werden entsprechend (1.10) und (1.11) für die Potentiale im Innen- und Außenraum folgende Ansätze gemacht und gleich von Anfang an die Glieder mit $\cos m\varphi$ ($m \neq 1$) und $\sin m\varphi$ beiseitegelassen, da sie bei Einführung der Randbedingungen sowieso verschwinden (siehe Kapitel 1, Fall b):

$$\psi_1 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \mathfrak{P}_v^1(\xi) P_v^1(\eta) \cos \varphi + V_0.$$

$$\psi_2 = \sum_{v=1}^{\infty} b_v Q_v^1(\xi) P_v^1(\eta) \cos \varphi + c E_0 \mathfrak{P}_1^1(\xi) P_1^1(\eta) \cos \varphi.$$

Auch hier wurde das homogene Außenfeld parallel zur x -Achse gerichtet angenommen. Bei Berücksichtigung der durch (2.1) angegebenen Potentialdifferenz zwischen der Einlagerung und der elektrolytisch leitenden Umgebung tritt u. a. das folgende Glied auf:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \cos \varphi \sum_{v=1}^{\infty} a_v P_v^1(\eta) \mathfrak{P}_v^1(\xi).$$

Um die Randbedingung (2.1) für alle η auf der Oberfläche des Ellipsoids $\xi = \xi_0$ erfüllen zu können, wird eine (2.4) entsprechende Reihenentwicklung durchgeführt:

$$(\xi_0^2 - \eta^2)^{-1/2} P_v^1(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{n,v}(\xi_0) P_n^1(\eta). \quad (7.1)$$

Die Randbedingung (2.1) geht damit über in:

$$-c E_0 \mathfrak{P}_1^1(\xi_0) P_1^1(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \mathfrak{P}_n^1(\xi_0) + b'_n Q_n^1(\xi_0)] P_n^1(\eta)$$

$$= -g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\eta) \sum_{v=1}^{\infty} a'_v D_{n,v}(\xi_0) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0).$$

Die Gleichheit der Normalkomponenten der Stromdichte auf der Oberfläche des Ellipsoids liefert eine Verknüpfung zwischen den a'_n und b'_n .

$$b'_1 = \frac{\mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}{Q_1^1(\xi_0)} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} a'_1 - c E_0 \right], \quad (7.2)$$

$$b'_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\mathfrak{P}_n^1(\xi_0)}{Q_n^1(\xi_0)} a'_n. \quad (7.3)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man mit (2.8) aus den letzten drei Gleichungen ein Gleichungssystem für die Konstanten a'_n :

$$-c E'_0 f_{1,b}(\xi_0, 1) + a'_1 f_{1,b}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = -g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} \sum_{r=1}^{\infty} D_{1,r}(\xi_0) a'_r \mathfrak{P}'_r(\xi_0). \quad (7.4)$$

$$a'_n f_{n,b}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) = -g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} \sum_{r=1}^{\infty} D_{n,r}(\xi_0) a'_r \mathfrak{P}'_r(\xi_0). \quad (7.5)$$

Da das homogene Außenfeld parallel zur Äquatorebene des Rotationsellipsoids gerichtet ist, müssen die Potentiale ψ_1 und ψ_2 symmetrisch zur Äquatorebene sein, das heißt, sie müssen im Gegensatz zum „Fall a“ gerade Funktionen in η sein. Diese Forderung wird von den Funktionen $P_{2\mu+1}^1(\eta)$ erfüllt. Folglich verschwinden auch hier die Konstanten mit geradzahligem Index:

$$a'_{2\mu} = b'_{2\mu} = 0. \quad \mu = 1, 2, 3, \dots$$

8. Die Bestimmung der Funktionen $D_{n,\nu}(\xi_0)$

In der Reihenentwicklung (7.1) treten als Faktoren der zugeordneten LEGENDRE-
schen Funktionen erster Art die Funktionen $D_{n,\nu}(\xi_0)$ auf:

$$(\xi_0^2 - \eta^2)^{-1/2} P_\nu^1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\nu}(\xi_0) P_n^1(\eta).$$

Aus den schon im Anschluß an (3.1) dargelegten Gründen gilt ebenso wie für $C_{n,\nu}$
die Bedingung:

$$D_{n,\nu} = 0,$$

wenn $n + \nu$ ungerade ist. Zur Berechnung von $D_{n,\nu}$ benötigt man die Orthogonali-
tätseigenschaften von $P_n^m(\eta)$:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\eta) P_{n'}^{m'}(\eta) d\eta = \frac{2(n+m)! \delta_{n,n'}}{(2n+1)(n-m)!}.$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^1(\eta)]^2 d\eta = \int_{-1}^{+1} (1-\eta^2) [P_n'(\eta)]^2 d\eta = \frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

Damit wird:

$$D_{n,\nu}(\xi_0) = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_{-1}^{+1} \frac{1-\eta^2}{\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}} P_\nu'(\eta) P_n'(\eta) d\eta. \quad (8.1)$$

Durch Differentiation des Polynoms $P_\nu(\eta)$ und Multiplikation mit η^{2k} erhält man

$$\eta^{2k} P_\nu'(\eta) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(2\nu-2m)! \eta^{\nu-2m-1+2k}}{2^\nu m! (\nu-m)! (\nu-2m-1)!} \quad (8.2)$$

und durch die Differentiation von (3.4)

$$\eta^{p-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \frac{(p-1)! (2p-4i+1)}{3 \cdot 5 \cdots [2p-2i+1] 2 \cdot 4 \cdots 2i} P_{p-2i}'(\eta). \quad (8.3)$$

Die letzten beiden Gleichungen ergeben:

$$\eta^{2k} P_\nu'(\eta) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i=0}^{\lfloor k-m + \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \frac{(2\nu-2m)! (2k+\nu-2m-1)! \cdots}{2^\nu (\nu-m)! (\nu-2m-1)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{(4k+2\nu-4m+1-4i)}{3 \cdot 5 \cdots (4k+2\nu-4m+1-2i) 2 \cdot 4 \cdots 2i} P_{2k+\nu-2m-2i}'(\eta).$$

Das Integral in (8.1) liefert nur dann einen von Null verschiedenen Beitrag, wenn $n = 2k + \nu - 2m - 2i$ ist, so daß man mit (3.2) erhält:

$$D_{n,\nu} = \frac{2n+1}{2^\nu \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2\nu - 2m)!}{m! (\nu - m)! (\nu - 2m - 1)!} \cdots \\ \cdots \frac{(2k + \nu - 2m - 1)!}{3 \cdot 5 \cdots (2k + n + \nu - 2m + 1) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2k + \nu - 2m - n)} ;$$

oder nach einigen Umformungen:

$$D_{n,\nu} = \frac{2n+1}{2^\nu \xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2\nu - 2m)!}{m! (\nu - m)! (\nu - 2m - 1)!} \cdots \\ \cdots \frac{(2k + \nu - 2m - n + 1) (2k + \nu - 2m - n + 3) \cdots (2k + \nu - 2m - 1)}{(2k + \nu - 2m) (2k + \nu - 2m + 2) \cdots (2k + \nu + n - 2m + 1)} .$$

Der zweite Bruch unter der zweiten Summe enthält, wie man leicht zeigen kann, im Zähler $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ und im Nenner $\left[\frac{n+3}{2} \right]$ Faktoren, wobei negative und verschwindende Faktoren durch $+1$ zu ersetzen sind. Die Reihen für $C_{n,\nu}$ sind also stets Majoranten zu $D_{n,\nu}$, womit die absolute Konvergenz aller $D_{n,\nu}$ bewiesen ist.

Ausdrücke für spezielle Werte von n und ν :

$$D_{1,1}(\xi_0) = \frac{3}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} .$$

$$D_{3,1}(\xi_0) = \frac{7}{\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \frac{\langle 2k \rangle}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} ,$$

$$D_{1,3}(\xi_0) = \frac{45}{2\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} - \frac{3}{2} D_{1,1} .$$

$$D_{3,3}(\xi_0) = \frac{105}{2\xi_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\xi_0^{2k}} \binom{-1/2}{k} \frac{2k+2}{(2k+3)(2k+5)(2k+7)} - \frac{3}{2} D_{3,1} ,$$

Ebenso wie die Funktionen $C_{n,\nu}$, lassen sich auch die Funktionen $D_{n,\nu}$ durch hypergeometrische Reihen darstellen. So erhält man z. B.:

$$D_{1,1}(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \xi_0^{-2} \right) .$$

$$D_{3,1}(\xi_0) = \frac{7}{\xi_0} \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{105 \xi_0^2} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) \right] .$$

$$D_{1,3}(\xi_0) = \frac{3}{2\xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{7}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} D_{1,1} .$$

$$D_{3,3}(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0} {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2; 1, \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} D_{3,1} ;$$

$$= \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{9}{2}; \xi_0^{-2} \right) + \frac{1}{6 \xi_0^3} {}_2F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{11}{2}; \xi_0^{-2} \right) - \frac{3}{2} D_{3,1} .$$

Mit Hilfe der Rekursionsformeln von GAUSS und der Differentiationsformeln für die hypergeometrischen Reihen können die Funktionen $C_{n,\nu}$ und $D_{n,\nu}$ auf die hypergeometrischen Reihen $F(a; b; c; z)$ zurückgeführt und durch elementare Funktionen dargestellt werden. Nach [15] ist

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 x\right) = \frac{x}{\sin x}, \quad (8.4)$$

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 x\right) = \frac{1}{\cos x}, \quad (8.5)$$

so daß man mit $\xi_0 = \frac{1}{\sin x}$ erhält:

$$C_{11}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{3}{2} \left[\frac{x}{\sin^2 x} - \cot x \right].$$

$$C_{31}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{7}{15} \sin x + \frac{35}{8 \sin^2 x} [C_{11} - x] - \frac{7}{12} C_{11}.$$

$$C_{13}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{15}{8 \sin^2 x} [C_{11} - x] - \frac{1}{4} C_{11}.$$

$$C_{33}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{7}{18} C_{13} + \frac{7}{12} C_{11} + \left[\frac{25}{12 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \right] C_{31} - \frac{35}{36 \sin x}.$$

$$D_{11}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} C_{11}.$$

$$D_{31}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{35}{48} C_{11} - \frac{7}{12} D_{11} + \frac{7}{15} \sin x - \frac{35}{32 \sin^2 x} [C_{11} - x].$$

$$D_{13}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{3}{2} [C_{11} - C_{13} - D_{11}].$$

$$D_{33}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{7}{18} D_{13} + \frac{7}{12} D_{11} + \left[\frac{25}{4 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \right] D_{31} - \frac{35}{12 \sin x}.$$

Diese Umformungen mögen an einem Beispiel vorgeführt werden:

Es gilt folgende Rekursionsformel:

$$c [c - 1 - (2c - a - b - 1)z] {}_2F_1(a, b; c; z) + (c - a)(c - b)z {}_2F_1(a, b; c + 1; z) + c(c - 1)(z - 1) {}_2F_1(a, b; c - 1; z) = 0.$$

Mit $a = b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{3}{2}$; $z = \sin^2 x = \xi_0^{-2}$

erhält man unter Berücksichtigung von (8.4) und (8.5):

$$\frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} - \sin^2 x \right] \frac{x}{\sin x} + \sin^2 x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \sin^2 x\right) - \frac{3}{4} \cos x = 0,$$

woraus wegen

$$D_{11} = \sin x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \sin^2 x\right)$$

sofort der angegebene Ausdruck folgt.

9. Die Berechnung der Koeffizienten a'_n und b'_n

Während die a'_n durch das Gleichungssystem (7.4) und (7.5) bestimmt sind, besteht zwischen a'_n und b'_n die Beziehung (7.2) bzw. (7.3). Dem Vorgehen in Kapitel 6 entsprechend soll zunächst a'_1 unter Vernachlässigung aller a'_n mit $n \geq 3$ angegeben werden, wie es sich aus (7.4) mit $a'_n = 0$ für $n \geq 3$ ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a'_1}{c E'_0} &= \frac{f_{1,b}(\xi_0, 1)}{f_{1,b}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} D_{11}(\xi_0) \mathfrak{P}_1'(\xi_0)}, \\ \frac{b'_1}{c E'_0} &= \frac{\mathfrak{P}_1'(\xi_0) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0) - g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} D_{11}(\xi_0) \mathfrak{P}_1'(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0) f_{1,b}\left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} D_{11}(\xi_0) \mathfrak{P}_1'(\xi_0)}, \\ &= - \frac{\mathfrak{P}_1'(\xi_0) \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0)} \frac{\varrho_2 - \varrho_b^*}{\varrho_2 \frac{Q_1^1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0)} \mathfrak{P}_1'(\xi_0) - \varrho_b^* \mathfrak{P}_1^1(\xi_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Auch hier läßt sich wieder ein effektiver komplexer spezifischer Widerstand für das galvanisch polarisierbare Ellipsoid angeben, der mit ϱ_b^* bezeichnet wurde. Der Index b soll darauf hinweisen, daß ϱ_b^* von dem in Gleichung (6.2) angegebenen Wert verschieden ist.

$$\varrho_b^* = \varrho_1 \left[1 + g(\omega) \sqrt{\xi_0^2 - 1} D_{1,1}(\xi_0) \frac{\mathfrak{P}_1'(\xi_0)}{\mathfrak{P}_1^1(\xi_0)} \right]. \quad (9.2)$$

Der effektive, komplexe spezifische Widerstand des homogenen, galvanisch polarisierbaren Ellipsoids ist von der Orientierung des eingelagerten gestreckten Rotationsellipsoids zum erregenden homogenen Außenfeld abhängig, wie die Gegenüberstellung (6.2) (Fall a) mit (9.2) (Fall b) lehrt. Einem gestreckten Rotationsellipsoid läßt sich also bei galvanischer Polarisierbarkeit folgender symmetrischer Tensor R^* des effektiven komplexen spezifischen Widerstandes zuordnen:

$$R^* = \begin{pmatrix} \varrho_a^* & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_b^* & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_b^* \end{pmatrix}$$

Dabei sind ϱ_a^* durch Formel (6.2) und ϱ_b^* durch (9.2) gegeben, und die Hauptachsen von R^* wurden mit denen des Ellipsoids parallel angenommen.

Eine wie im Kapitel 6 ausgeführte Gegenüberstellung von (9.2) mit dem für die Kugel von W. BUCHHEIM [5] gefundenen Wert für ϱ_k^* führt zu einem äquivalenten Kugelradius des Ellipsoids für den „Fall b“:

$$e_b = \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0 D_{1,1}(\xi_0)} c. \quad (9.3)$$

Tabelle 3

f Hz	$\frac{a'_1}{c E_0}$ (1)	$\frac{a'_1}{c E_1}$ (2)	φ (3)	$\frac{a'_1}{c E_0}$ (4)	$\frac{a'_3}{a'_1}$ (5)	$\frac{a'_3}{a'_1}$ (6)	φ (7)
0,1	0,018094	0,018093	+ 0° 16'	0,018237	-0,0076152	-0,0076168	- 0° 24'
1	0,018226	0,018206	+ 2° 20'	0,018366	-0,0075341	-0,0075976	- 3° 58'
3	0,019155	0,019008	+ 7° 6'	0,019274	-0,0069349	-0,0074553	-11° 46'
10	0,023108	0,022757	+10° 0'	0,023140	-0,006432	-0,0062558	-34° 46'
100	0,025988	0,025982	+ 1° 36'	0,025988	-0,0000692	-0,0010906	-81° 50'

Erläuterungen: In den Spalten (1), (4), (5) wurde $\Im\{g(\omega)\}$ vernachlässigt; (3) ist die zu (2),

(7) die zu (6) gehörende Phasenverschiebung.

(1) bis (3) Ergebnisse für $a_n = 0$ mit $n \cong 3$.

(4) bis (7) Ergebnisse für $a_n = 0$ mit $n \cong 5$.

Wie man leicht zeigen kann, geht auch e_b beim Übergang zur Kugelgestalt $\xi_0 \rightarrow \infty$ in den Kugelradius über. Auch der äquivalente Kugelradius ist von der Orientierung des Rotationsellipsoids zum erregenden homogenen Außenfeld \mathcal{E}_0 abhängig.

Wie im Kapitel 6 kann man auch hier untersuchen, wie die Berücksichtigung weiterer Koeffizienten das homogene Innenfeld nach Gleichung (9.1) beeinflusst und welche Größe die Feldinhomogenitäten im Innern des Ellipsoids besitzen. In der Tabelle 3 sind die Größen $a'_1/c E'_0$ und a'_3/a'_1 und ihre Phasenverschiebungen gegen das erregende homogene Außenfeld unter Verwendung der gleichen Zahlenwerte wie in Kapitel 6 zusammengestellt. Dabei zeigt sich, daß der Betrag des Koeffizienten a'_3 nur maximal 0,76% des Betrages von a'_1 erreicht. Die Inhomogenitäten des Feldes im Innern des Ellipsoids sind also kleiner, wenn das erregende Außenfeld senkrecht zur Rotationsachse des gestreckten Ellipsoids gerichtet ist, als wenn es dieser parallel ist.

Bild 1 zeigt e_a/c und e_b/c als Funktion der Exzentrizität ε . Ferner wird durch die Kurve $1/\varepsilon$ das Verhältnis a/c der großen Achse zum Brennpunkt Abstand des Rotationsellipsoids dargestellt. Wie man sieht, ist stets

$$e_b < a < e_a$$

für gestreckte Rotationsellipsoide. Für die gleichen Materialkonstanten, für die die Tabellen 1—3 berechnet wurden, ist für ein gestrecktes Rotationsellipsoid mit $\xi_0 = 1,4$ die Stromdichte j_1 im Innern im Verhältnis zur Stromdichte j_2 im ungestörten Außenraum als Funktion des Leitfähigkeitsverhältnisses σ_1/σ_2 im Bild 2 dargestellt.

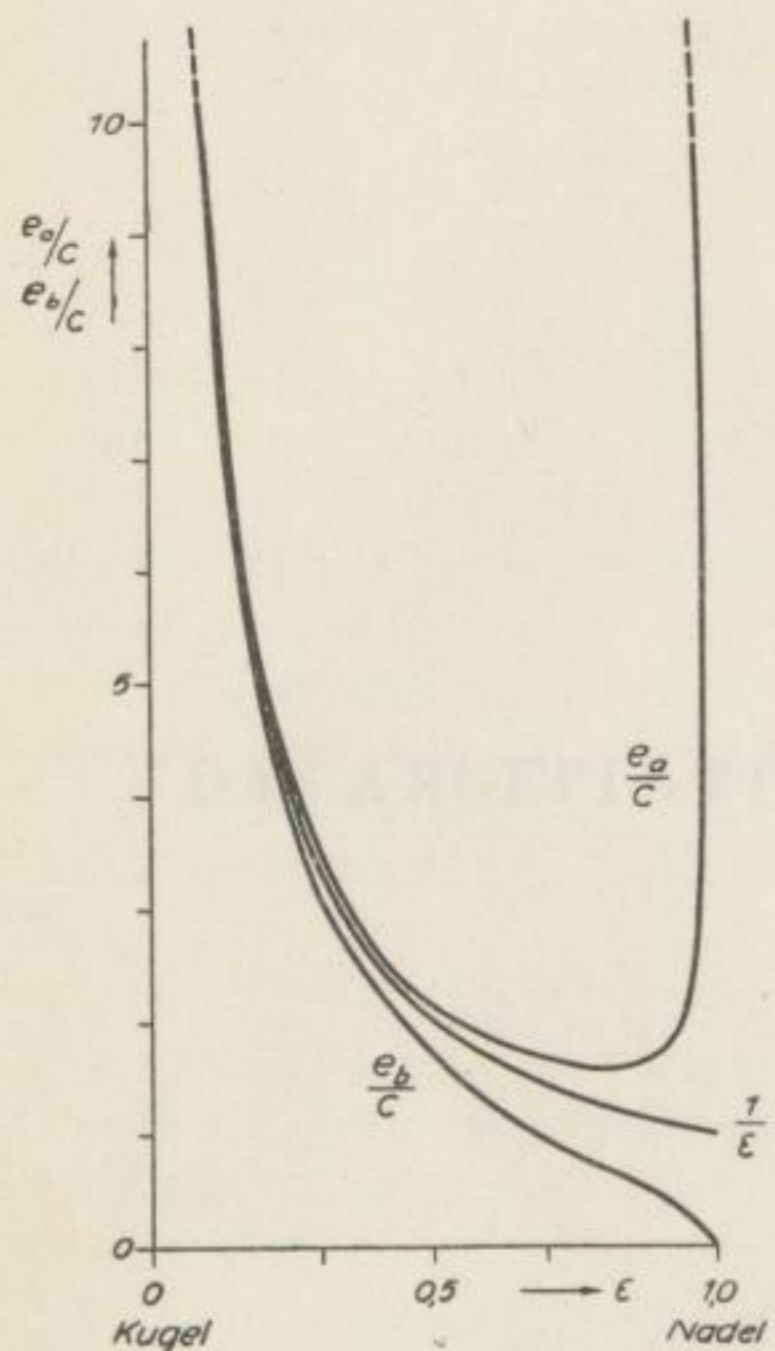


Bild 1. Die äquivalenten Kugelradien im Verhältnis zum Brennpunkt Abstand für gestreckte Rotationsellipsoide als Funktion der Exzentrizität

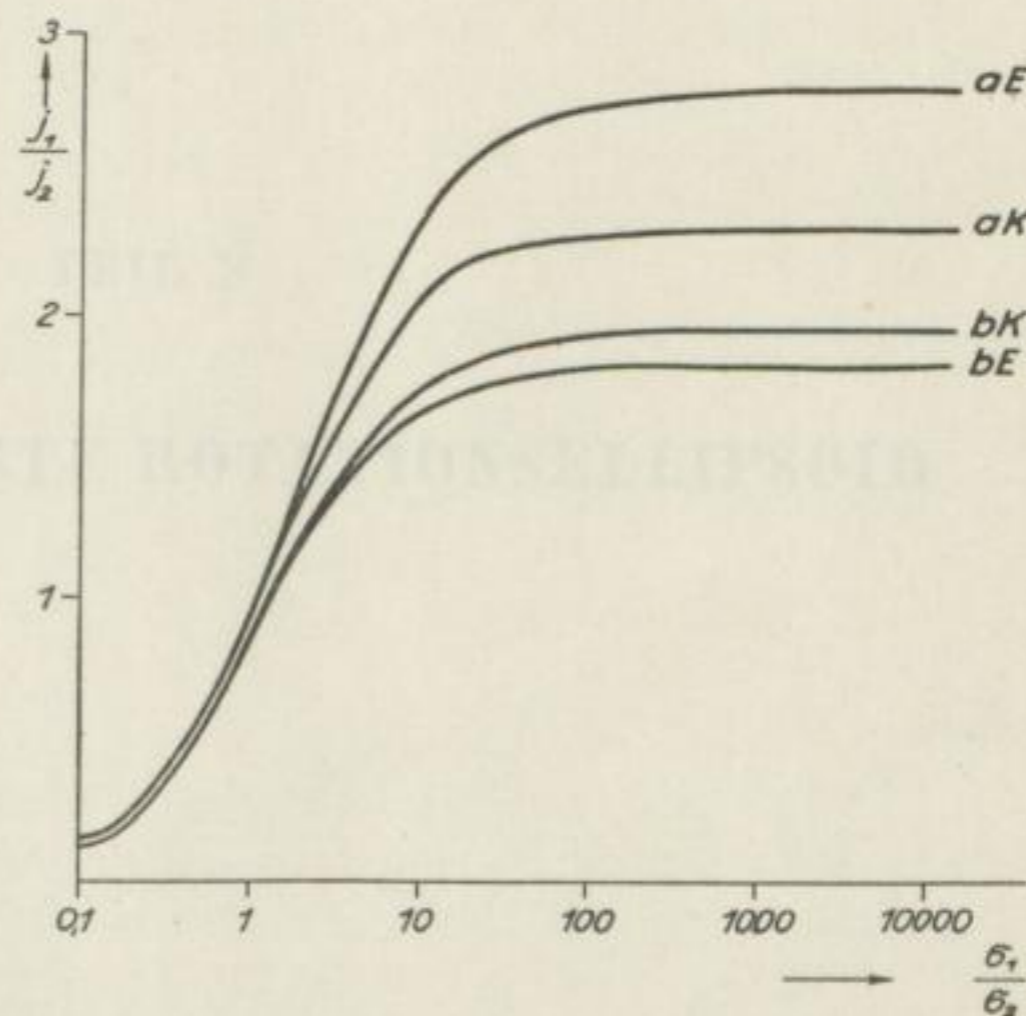


Bild 2. Verhältnisse der Stromdichten des homogenen Innenfeldes zur Stromdichte im Außenraum für gestreckte Rotationsellipsoide (E) und äquivalente Kugeln (K) gleichen Materials als Funktion des Leitfähigkeitsverhältnisses für Fall a und b

$$\begin{aligned}
 f &= 1 \text{ Hz} & \lambda &= 40 \text{ s} \\
 \xi &= 1,4 & \rho_2 c c_p &= 0,1 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.



Faint, illegible text located below the first graph, likely serving as a caption or description.

Additional faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a conclusion or further notes.

TEIL B

DAS ABGEPLATTETE ROTATIONSELLIPSOID

THE 2

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

10. Das abgeplattete Rotationsellipsoid im homogenen Feld

Bringt man ein abgeplattetes Rotationsellipsoid der Leitfähigkeit σ_1 in ein homogenes elektrisches Feld \mathcal{E}_0 , das in einem Medium der Leitfähigkeit σ_2 herrscht, so muß man, wie in Kapitel 1 für das gestreckte Rotationsellipsoid gezeigt wurde, zur Berechnung der Potentialverteilung die singularitätenfreien Lösungen der LAPLACEschen Differentialgleichung aufsuchen, die die in Kapitel 1 unter „1“ bis „4“ angegebenen Bedingungen erfüllen, wobei die Randbedingung „3“ durch die Potentialdifferenz (2.1) zu ersetzen ist, wenn galvanisch induzierte Polarisierung auftreten kann.

In den Koordinaten ξ, η, φ des abgeplatteten Rotationsellipsoids, die in folgendem Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z stehen,

$$\begin{aligned}x &= c [(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\y &= c [(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\z &= c \xi \eta,\end{aligned}$$

(Wertbereich für die ξ, η, φ : $0 \leq \xi \leq \infty$, $-1 \leq \eta \leq +1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) bedeutet $\xi = \xi_0 = \text{const}$ ein abgeplattetes Rotationsellipsoid und $\eta = \eta_0 = \text{const}$ ein einschaliges Rotationshyperboloid. Eine beliebige, die z -Achse enthaltende Ebene schneidet diese Flächen in einer Ellipse und einer Hyperbel, deren gemeinsame Brennpunkte vom Ursprung die Abstände $\pm c$ haben und in der $x - y$ -Ebene liegen.

Die LAPLACESche Gleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{1}{1 - \eta^2} - \frac{1}{1 + \xi^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (10.1)$$

Auch hier gelingt die Separation der Differentialgleichung mit einem Produktansatz, so daß die Potentiale unter Berücksichtigung der Bedingungen „1“ und „2“ des Kapitels 1 folgende Gestalt annehmen:

Fall a) Außenfeld parallel zur Rotationsachse (z -Achse):

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^n} A_n \mathfrak{P}_n(i \xi) P_n(\eta) \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (10.2)$$

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n Q_n(i \xi) P_n(\eta) - \frac{c}{i} E_0 \mathfrak{P}_1(i \xi) P_1(\eta) \quad \xi \geq \xi_0. \quad (10.3)$$

Fall b) Außenfeld senkrecht zur Rotationsachse, parallel zur x -Achse:

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{i^n} \mathfrak{P}_n^1(i \xi) P_n^1(\eta) \cos \varphi + V_0 \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (10.4)$$

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n^1(i \xi) P_n^1(\eta) \cos \varphi + \frac{c}{i} E_0 \mathfrak{P}_1^1(i \xi) P_1^1(\eta) \cos \varphi \quad \xi \geq \xi_0. \quad (10.5)$$

In (10.4) und (10.5) wurde bereits berücksichtigt, daß die in der Lösung von (10.1) noch vorhandenen Glieder mit $\cos m \varphi$ ($m = 0, 2, 3, 4, \dots$) und mit $\sin m' \varphi$ ($m' = 1, 2, 3, \dots$) bei Einführung der Randbedingungen zu homogenen Gleichungssystemen für die Konstanten a_n^m und b_n^m führen, deren Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist. Folglich existiert nur die triviale Lösung, die erwähnten Glieder dürfen in den Potentialen nicht auftreten. Entsprechendes gilt bei (10.2) und (10.3) für den von φ abhängigen Teil der Lösung (10.1).

In den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids lautet die ξ -Komponente des Gradienten:

$$\text{grad}_\xi \psi = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Nach Bedingung „4“ des Kapitels I müssen die Normalkomponenten der Stromdichte auf der Ellipsoidoberfläche $\xi = \xi_0$ stetig sein.

Das bedingt im Fall a $B_0 = 0$,

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 [B_1 Q_1'(i \xi_0) - c E_0], \quad (10.6)$$

$$\mathfrak{P}_n'(i \xi_0) \frac{1}{i} \sigma_1 A_n = \sigma_2 B_n Q_n'(i \xi_0) \quad \text{für } n > 1, \quad (10.7)$$

und im Fall b

$$\sigma_1 a_1 \mathfrak{P}_1'(i \xi_0) = \sigma_2 [i b_1 Q_1'(i \xi_0) + c E_0 \mathfrak{P}_1'(i \xi_0)],$$

$$\sigma_1 a \mathfrak{P}_n'(i \xi_0) = \sigma_2 i b_n Q_n'(i \xi_0) \quad \text{für } n > 1.$$

Das Auftreten einer Potentialdifferenz nach (2.1) auf der Ellipsoidoberfläche führt zu folgenden Gleichungen:

Im Fall a) gilt mit

$$\xi = \xi_0$$

$$A_0 = V_0,$$

$$\begin{aligned} c E_0' \xi_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i} A_n' \mathfrak{P}_n(i \xi_0) - B_n' Q_n(i \xi_0) \right] P_n(\eta) \\ = -g(\omega) \sqrt{\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} A_v' P_v(\eta) \mathfrak{P}_v'(i \xi_0), \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (10.6) und (10.7) erhält man mit der in (2.7) eingeführten Funktion $f_{n,a} \left(\xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$

$$\begin{aligned} c E_0' \eta f_{1,a}(i \xi_0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' f_{n,a} \left(i \xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) P_n(\eta) \\ = -i g(\omega) \sqrt{\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} A_v' P_v(\eta) \mathfrak{P}_v'(i \xi_0), \end{aligned} \quad (10.8)$$

(2.01)

(2.04)

und entsprechend im Fall b)

$$\begin{aligned}
 & -c E_0' P_1^1(\eta) f_{1,b}(i \xi_0, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' f_{n,b} \left(i \xi_0, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) P_n^1(\eta) \\
 & = -i g(\omega) \sqrt{\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} a_v' P_v^1(\eta) \mathfrak{P}_v^1(\xi_0 i). \quad (10.9)
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der linken und der rechten Seiten von (10.8) und (10.9) wird möglich, wenn die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen in Reihen nach $P_n(\eta)$ bzw. nach $P_n^1(\eta)$ entwickelt werden:

$$\sqrt{\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} A_v' P_v(\eta) \mathfrak{P}_v(i \xi_0) = \sum_{v=1}^{\infty} A_v' \mathfrak{P}_v(i \xi_0) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{n,v}(\xi_0) P_n(\eta), \quad (10.10)$$

$$\sqrt{\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2}} \sum_{v=1}^{\infty} a_v' P_v^1(\eta) \mathfrak{P}_v^1(i \xi_0) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v' \mathfrak{P}_v^1(i \xi_0) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_{n,v}(\xi_0) P_n^1(\eta). \quad (10.11)$$

11. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{C}_{n,\nu}(\xi_0)$

Die Funktionen $\bar{C}_{n,\nu}(\xi_0)$ treten als Entwicklungskoeffizienten folgender Reihe nach LEGENDRESchen Polynomen auf:

$$\left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P_\nu(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{n,\nu}(\xi_0) P_n(\eta).$$

Aus den schon in Kapitel 3 dargelegten Gründen kann man zwei Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P_{2\nu}(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{2n,2\nu}(\xi_0) P_{2n}(\eta), \\ \left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P_{2\nu+1}(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{2n+1,2\nu+1}(\xi_0) P_{2n+1}(\eta). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Es treten also auch hier nur solche Funktionen $\bar{C}_{n,\nu}$ auf, bei denen die Summe ihrer Indizes $n + \nu$ eine gerade Zahl ist.

Es ist

$$\left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} = \left[1 + \frac{\eta^2 - 1}{\xi_0^2 + 1} \right]^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\eta^2 - 1}{\xi_0^2 + 1} \right)^k, \quad (11.2)$$

da wegen $\xi_0 > 0$ und $|\eta| \leq 1$ stets $|\eta^2 - 1| \leq 1 + \xi_0^2$. Die Reihe (11.2) ist absolut konvergent für $\left| \frac{\eta^2 - 1}{1 + \xi_0^2} \right| < 1$. Auf Grund der am Ende der Kapitel 2 und 7 angestellten Betrachtungen, die auch für das abgeplattete Rotationsellipsoid gelten, treten sowohl im „Fall a“ als auch im „Fall b“ nur LEGENDRESche Funktionen ungerader Ordnung auf; es wird also im Fall a nur die Entwicklung (11.1) benötigt.

$$\left. \begin{aligned} P_{2\nu+1}(\eta) &= \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \frac{(4\nu + 2 - 2i)! \eta^{2\nu+1-2i}}{2^{2\nu+1} i! (2\nu + 1 - i)! (2\nu + 1 - 2i)!}, \\ (\eta^2 - 1)^k &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \eta^{2(k-m)}, \\ (\eta^2 - 1)^k P_{2\nu+1}(\eta) &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(-1)^i (4\nu + 2 - 2i)! \eta^{2(\nu+k-i-m)+1}}{2^{2\nu+1} i! (2\nu + 1 - i)! (2\nu + 1 - 2i)!}. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Mit $w = i + m$ wird

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\eta^2 - 1}{\xi_0^2 + 1} \right)^k P_{2\nu+1}(\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{1}{(1 + \xi_0^2)^k} \dots \\ \dots \sum_{w=0}^{k+\nu} \eta^{2(k+\nu-w)+1} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(-1)^w (4\nu - 2i + 2)! \binom{k}{w-i}}{2^{2\nu+1} i! (2\nu + 1 - i)! (2\nu + 1 - 2i)!}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

und mit (3.4) für $p = 2(\nu + k - w) + 1$ entsteht, wenn man $n = \nu + k - w - \mu$ setzt:

$$\left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P_{2\nu+1}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2^{2\nu+1}} P_{2n+1}(\eta) \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \\ \times \frac{(-1)^w \binom{-1/2}{n+\mu-\nu+w} (4\nu-2i+2)! (2n+2\mu+1)! \binom{n+\mu-\nu+w}{w-i}}{(1+\xi_0^2)^{n+\mu-\nu+w} i! (2\nu+1-i)! (2\nu+1-2i)! 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n+2\mu+3) 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2\mu}. \quad (11.5)$$

Nach einigen weiteren Umformungen erhält man:

$$\bar{C}_{2n+1,2\nu+1}(\xi_0) = \frac{4n+3}{2^{2\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(-1)^i (4\nu-2i+2)!}{i! (2\nu+1-i)! (2\nu+1-2i)!} \\ \times \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^{\sigma} \binom{k}{\sigma} (2\sigma+2\nu-2i+1)!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+2\sigma+2\nu-2i+3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2\sigma+2\nu-2n-2i)}.$$

Mit $n = 0; 1$ und $\nu = 0; 1$ erhält man für $\bar{C}_{2n+1,2\nu+1}$:

$$\bar{C}_{1,1}(\xi_0) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w}}{2w+3}; \quad (11.6)$$

$$\bar{C}_{3,1}(\xi_0) = 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \langle 2w \rangle \binom{k}{w}}{(2w+3)(2w+5)}; \quad (11.7)$$

dabei ist $\langle 2w \rangle = 1$ für $w = 0$ zu setzen.

$$\bar{C}_{1,3}(\xi_0) = \frac{15}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w}}{2w+5} - \frac{3}{2} \bar{C}_{1,1}. \quad (11.8)$$

$$\bar{C}_{3,3}(\xi_0) = 35 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w (w+1) \binom{k}{w}}{(2w+5)(2w+7)} - \frac{3}{2} \bar{C}_{3,1}. \quad (11.9)$$

usw.

Die in (11.6) bis (11.9) auftretenden von $w = 0$ bis $w = k$ laufenden Summen lassen sich noch wesentlich vereinfachen, was an (11.6) im folgenden gezeigt werden soll:

$$\sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w}}{2w+3} = \sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w k(k-1)\dots(k-w+1)}{w!(2w+3)} = \frac{1}{3} {}_2F_1\left(-k, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right).$$

Nach [8] [15] gilt aber für die hypergeometrische Reihe

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)};$$

also erhält man

$$\sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w}}{2w+3} = \frac{2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+3)};$$

ferner

$$\sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w} \langle 2w \rangle}{(2w+3)(2w+5)} = \frac{1}{15} - \frac{3k 2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+5)};$$

$$\sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w \binom{k}{w}}{2w+5} = \frac{3 \cdot 2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+5)};$$

$$\sum_{w=0}^k \frac{(-1)^w (w+1) \binom{k}{w}}{(2w+5)(2w+7)} = \frac{3(2-3k) 2^k k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+7)}.$$

Nun lassen sich auch die Reihen (11.6) bis (11.9) auf hypergeometrische Reihen zurückführen:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11}(\xi_0) &= 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\xi_0^2)^k (2k+1)(2k+3)}; \\ &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{5}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right); \end{aligned}$$

ferner

$$\bar{C}_{3,1}(\xi_0) = \frac{7}{15 \xi_0} \sqrt{1+\xi_0^2} - \frac{1}{5(1+\xi_0^2)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{9}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right);$$

$$\bar{C}_{1,3}(\xi_0) = \frac{3}{10} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{7}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) - \frac{3}{2} \bar{C}_{1,1}(\xi_0);$$

$$\bar{C}_{3,3}(\xi_0) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{9}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) - \frac{1}{2(1+\xi_0^2)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 2; \frac{11}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) - \frac{3}{2} \bar{C}_{3,1}(\xi_0).$$

usw.

Diese hypergeometrischen Reihen lassen sich mit der Beziehung

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu}{2}+1; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) \\ &= \frac{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right) [1+\xi_0^2]^{\frac{\nu+\mu+1}{2}}}{e^{-i\mu\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \xi_0^\mu (\nu-\mu)!} Q_\nu^{-\mu}(\sqrt{1+\xi_0^2}) \end{aligned}$$

auf zugeordnete LEGENDRESche Funktionen zweiter Art und damit auf elementare Funktionen zurückzuführen.

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{1,1}(\xi_0) &= -\frac{3}{2} \xi_0 (\sqrt{1+\xi_0^2}) Q_1^1(\sqrt{1+\xi_0^2}), \\ \bar{C}_{3,1}(\xi_0) &= \frac{7}{15} \xi_0 (\sqrt{1+\xi_0^2}) + \frac{7}{8} \xi_0 (\sqrt{1+\xi_0^2}) Q_3^1(\sqrt{1+\xi_0^2}), \\ \bar{C}_{1,3}(\xi_0) &= \frac{15}{16} \xi_0^2 (\sqrt{1+\xi_0^2}) Q_2^2(\sqrt{1+\xi_0^2}) - \frac{3}{2} \bar{C}_{1,1}(\xi_0), \\ \bar{C}_{3,3}(\xi_0) &= -\frac{7}{48} \xi_0^3 \sqrt{1+\xi_0^2} Q_3^3(\sqrt{1+\xi_0^2}) \\ &\quad - \frac{21}{32} \xi_0^2 \sqrt{1+\xi_0^2} Q_4^2(\sqrt{1+\xi_0^2}) - \frac{3}{2} \bar{C}_{3,1}(\xi_0). \end{aligned} \right\} \quad (110.1)$$

Mit der Umformung der Reihen (11.6...9) in hypergeometrische Reihen ist zugleich ihre Konvergenz bewiesen. Der Konvergenzradius der Reihe ${}_2F_1(a, b; c; z)$ beträgt 1; also konvergieren die Reihen für alle $\xi_0 \neq 0$, die Reihen für $\bar{C}_{1,1}$ und $\bar{C}_{1,3}$ auch für $\xi_0 = 0$.

12. Die Bestimmung der Funktionen $\bar{D}_{n,v}(\xi_0)$

Auf dem gleichen Wege wie im Kapitel 11 werden die Funktionen $\bar{D}_{n,v}(\xi_0)$ abgeleitet, die in folgender Reihenentwicklung als Koeffizienten auftreten:

$$\left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P'_v(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{D}_{n,v}(\xi_0) P'_n(\xi_0);$$

oder wegen $P'_v(\eta) = -\sqrt{1 - \eta^2} P'_v(\eta)$ und da in den Potentialen ψ_1 und ψ_2 nur LEGENDRESche Polynome ungerader Ordnung auftreten können:

$$\left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P'_{2v+1}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{D}_{2n+1,2v+1}(\xi_0) P'_{2n+1}(\xi_0).$$

Verwendet man die Ausdrücke (8.2) und (8.3) an Stelle von (11.3) beim Übergang von (11.4) zu (11.5), so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \left[\frac{1 + \xi_0^2}{\xi_0^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P'_{2v+1}(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2^{2v+1}} P'_{2n+1}(\eta) \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{i=0}^v \sum_{\mu=0}^{\infty} \\ &\quad (-1)^w \binom{-1/2}{n+\mu-v+w} (4v+2-2i)! (2n+2\mu)! \binom{n+\mu-v+w}{w-i} \\ &\times \frac{1}{(1+\xi_0)^{n+\mu-v+w} i! (2v+1-i)! (2v-2i)! 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n+2\mu+3) 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2\mu)} \end{aligned}$$

und nach einigen Umformungen für $\bar{D}_{2n+1,2v+1}(\xi_0)$:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{2n+1,2v+1}(\xi_0) &= \frac{4n+3}{2^{2v+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0)^k} \sum_{i=0}^v \frac{(-1)^i (4v+2-2i)!}{i! (2v+1-i)! (2v-2i)!} \dots \\ &\dots \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2v+2\sigma-2i-2n+2) (\dots + 4) \dots (2v+2\sigma-2i)}{(2v+2\sigma-2i+1) (2v+2\sigma-2i+3) \dots (2v+2\sigma+2n-2i+3)}. \end{aligned}$$

Für spezielle Werte von n und v erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{1,1}(\xi_0) &= 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}}{(2\sigma+1)(2\sigma+3)}, \\ \bar{D}_{3,1}(\xi_0) &= 7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} \langle 2\sigma \rangle}{(2\sigma+1)(2\sigma+3)(2\sigma+5)}, \\ \bar{D}_{1,3}(\xi_0) &= \frac{45}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}}{(2\sigma+3)(2\sigma+5)} - \frac{3}{2} \bar{D}_{1,1}, \\ \bar{D}_{3,3}(\xi_0) &= \frac{105}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}{(1+\xi_0^2)^k} \sum_{\sigma=0}^k \frac{(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma} (2\sigma+2)}{(2\sigma+3)(2\sigma+5)(2\sigma+7)} - \frac{3}{2} \bar{D}_{3,1}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise, wie es in Kapitel 11 für die Funktionen $\bar{C}_{n,\nu}(\xi_0)$ gezeigt wurde, lassen sich auch die Funktionen $\bar{D}_{n,\nu}(\xi_0)$ auf hypergeometrische Reihen und unter Verwendung der GAUSSSchen Rekursionsformeln auf zugeordnete LEGENDRESche Funktionen zweiter Art zurückführen:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{1,1}(\xi_0) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{5}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right), \\ \bar{D}_{3,1}(\xi_0) &= \frac{7}{15\xi_0} \sqrt{1+\xi_0^2} - \frac{1}{15(1+\xi_0^2)} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 3; \frac{9}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right), \\ \bar{D}_{1,3}(\xi_0) &= \frac{3}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2; \frac{7}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) - \frac{3}{2} \bar{D}_{1,1}(\xi_0), \\ \bar{D}_{3,3}(\xi_0) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3; \frac{9}{2}; \frac{1}{1+\xi_0^2}\right) - \frac{3}{2} \bar{D}_{3,1}(\xi_0).\end{aligned}$$

Und schließlich:

$$\left. \begin{aligned}\bar{D}_{1,1}(\xi_0) &= \frac{3}{2} \sqrt{1+\xi_0^2} Q_0(\sqrt{1+\xi_0^2}) - \frac{1}{2} \bar{C}_{1,1}(\xi_0), \\ \bar{D}_{3,1}(\xi_0) &= \frac{7}{15\xi_0} \sqrt{1+\xi_0^2} - \frac{7}{8} \sqrt{1+\xi_0^2} \left[Q_2(\sqrt{1+\xi_0^2}) + \frac{\xi_0}{4} Q_3^1(\sqrt{1+\xi_0^2}) \right], \\ \bar{D}_{1,3}(\xi_0) &= \frac{15}{4} \bar{C}_{1,1}(\xi_0) - \frac{15}{2} \bar{C}_{1,3}(\xi_0) - \frac{3}{2} \bar{D}_{1,1}(\xi_0). \\ \bar{D}_{3,3}(\xi_0) &= \frac{7}{3} \bar{D}_{1,3}(\xi_0) + \frac{7}{2} \bar{D}_{1,1}(\xi_0) + \frac{1}{2} (5\xi_0^2 - 3) \bar{D}_{3,1}(\xi_0) - \frac{7}{6} \xi_0 \sqrt{1+\xi_0^2}.\end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

usw.

13. Die Bestimmung der Konstanten A'_n, B'_n, a'_n und b'_n für das abgeplattete Rotationsellipsoid

Es sollen die Konstanten A'_1, B'_1, a'_1 und b'_1 für das abgeplattete Rotationsellipsoid unter den gleichen Bedingungen wie in den Kapiteln 6 und 9 für das verlängerte Rotationsellipsoid berechnet werden. Auch hier soll, um eine Näherungslösung zu erhalten, nur das homogene Innenfeld betrachtet werden. Alle höheren Koeffizienten sollen vernachlässigt werden.

Aus Gleichung (10.8) und (10.10) erhält man mit den eben genannten Vernachlässigungen:

$$A'_1 = \frac{c E'_0 \varrho_1 \left[\xi_0 - \frac{Q_1(i \xi_0)}{Q_1(i \xi_0)} \right]}{\varrho_2 \frac{Q_1(i \xi_0)}{Q_1(i \xi_0)} - \varrho_1 (\xi_0 + g(\omega) \bar{C}_{1,1}(\xi_0))}. \quad (13.1)$$

Führt man auch für das abgeplattete Rotationsellipsoid einen effektiven, komplexen spezifischen Widerstand ein, der im „Fall a“ mit ϱ_a^* bezeichnet werden möge

$$\varrho_a^* = \varrho_1 \left(1 + \frac{1}{\xi_0} g(\omega) \bar{C}_{1,1}(\xi_0) \right), \quad (13.2)$$

so erhält man

$$A'_1 = \frac{\varrho_1 c E'_0 \left(\xi_0 - \frac{Q_1(i \xi_0)}{Q_1(i_0 \xi)} \right)}{\varrho_2 \frac{Q_1(i \xi_0)}{Q_1(i \xi_0)} - \xi_0 \varrho_a^*},$$

$$B'_1 = \frac{c E'_0}{Q_1(i \xi_0)} \frac{\xi_0 (\varrho_2 - \varrho_a^*)}{\varrho_2 \frac{Q_1(i \xi_0)}{Q_1(i \xi_0)} - \xi_0 \varrho_a^*},$$

und im „Fall b“ mit

$$\varrho_b^* = \varrho_1 \left(1 + g(\omega) \frac{\mathbb{P}_1'(i \xi_0)}{\mathbb{P}_1^1(i \xi_0)} \bar{D}_{1,1}(\xi_0) \right)$$

$$= \varrho_1 \left(1 + g(\omega) \frac{\xi_0}{1 + \xi_0^2} \bar{D}_{1,1}(\xi_0) \right) \quad (13.3)$$

erhält man

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= \frac{\varrho_1 c E'_0 [Q_1^1(i \xi_0) \mathbb{P}_1'(i \xi_0) - Q_1'(i \xi_0) \mathbb{P}_1^1(i \xi_0)]}{\varrho_2 Q_1^1(i \xi_0) \mathbb{P}_1'(i \xi_0) - \varrho_b^* Q_1'(i \xi_0) \mathbb{P}_1^1(i \xi_0)}; \\ b'_1 &= - \frac{c E'_0 (\varrho_2 - \varrho_b^*) \mathbb{P}_1^1(i \xi_0) \mathbb{P}_1'(i \xi_0)}{\varrho_2 Q_1^1(i \xi_0) \mathbb{P}_1'(i \xi_0) - \varrho_b^* Q_1'(i \xi_0) \mathbb{P}_1^1(i \xi_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Aus den Formeln (13.2) und (13.3) erhält man wieder wie in den Kapiteln 6 und 9 äquivalente Kugelradien, die für die Fälle „a“ und „b“ gelten:

$$e_a = \frac{c \xi_0}{\bar{C}_{1,1}(\xi_0)} \quad (13.5)$$

$$e_b = \frac{(1 + \xi_0^2) c}{\xi_0 \bar{D}_{1,1}(\xi_0)} \quad (13.6)$$

In Bild 3 sind e_a/c und e_b/c als Funktion der Exzentrizität ε dargestellt. Die Kurve $1/\varepsilon$ stellt das Verhältnis der großen Achse zum Brennpunkt Abstand des Rotationsellipsoids a/c dar. Man erkennt, daß sich die Kurven für $\varepsilon \rightarrow 0$ aneinander nähern, jedoch ist stets

$$e_a < a < e_b.$$

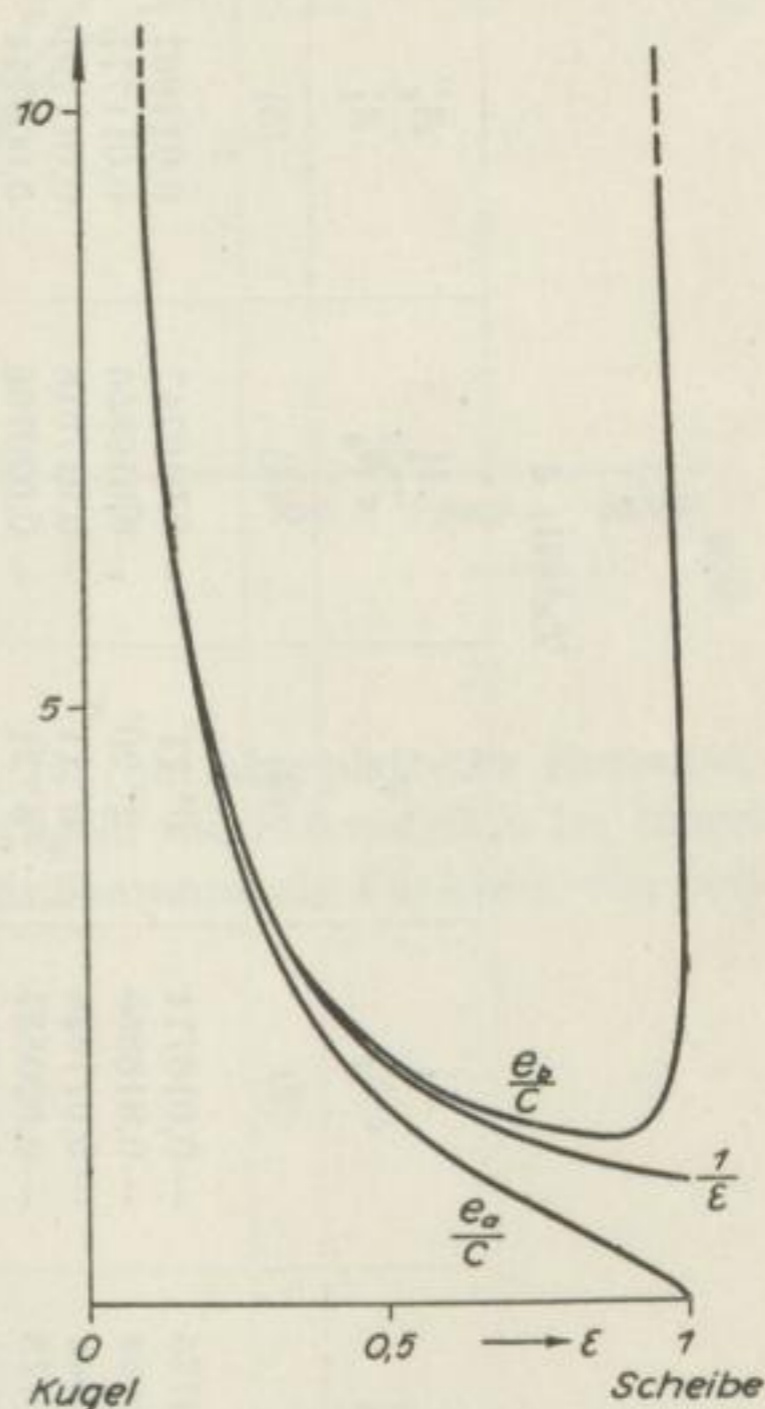


Bild 3. Die äquivalenten Kugelradien im Verhältnis zum Brennpunkt Abstand für abgeplattete Rotationsellipsoide als Funktion der Exzentrizität

In den Tabellen 4 und 5 sind die Koeffizienten des homogenen Feldes und des inhomogenen Feldes niedrigster Ordnung für ein Ellipsoid mit $\xi_0 = 1$ ($\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{2}$) zusammengestellt. Es wurden die gleichen Materialkonstanten wie im Kapitel 6 benutzt. Wie in den Kapiteln 6 und 9 wurden auch hier unter Berücksichtigung einer weiteren Gleichung, die sich aus den Gleichungen (10.8) bzw. (10.9) ergibt,

Tabelle 4

f Hz	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	φ	$\frac{A'_1}{c E'_0}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$	$\frac{A'_3}{A'_1}$	φ
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,1	-0,016775	-0,016774	0° 11'	-0,016747	0,011867	0,011868	- 0° 17'
1	-0,016884	-0,016869	2° 20'	-0,016856	0,011777	0,011854	- 2° 48'
3	-0,017649	-0,017536	6° 11'	-0,017618	0,011101	0,011742	- 8° 20'
10	-0,020773	-0,020537	8° 31'	-0,020766	0,006717	0,010665	-26° 2'
100	-0,022961	-0,022954	1° 20'	-0,022961	0,001528	0,000753	-78° 25'

Tabelle 5

f Hz	$\frac{a'_1}{c E'_0}$	$\frac{a'_1}{c E'_0}$	φ	$\frac{a'_1}{c E'_0}$	$\frac{a'_3}{a'_1}$	$\frac{a'_3}{a'_1}$	φ
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0,1	0,024447	0,024447	+0° 15'	0,024534	0,0015049	0,0015049	- 0° 1'
1	0,024614	0,024589	+2° 31'	0,024700	0,0015042	0,0015049	- 0° 10'
3	0,025780	0,025608	+6° 36'	0,025859	0,0014990	0,0015048	- 0° 29'
10	0,030659	0,030264	+9° 13'	0,030697	0,0014414	0,0015042	- 1° 36'
100	0,034126	0,034115	+1° 27'	0,034126	0,0002784	0,0014409	-15° 33'

die Inhomogenitäten der niedrigsten Ordnung, also die Koeffizienten A'_3 und a'_3 berechnet und in die Tabellen 4 und 5 mit aufgenommen. Wie man sieht, beträgt A'_3 nur ca. 1% von A'_1 und a'_3 nur ca. 0,15% von a'_1 ; das inhomogene Feld ist also im abgeplatteten Rotationsellipsoid wesentlich kleiner als im gestreckten gleicher Exzentrizität.

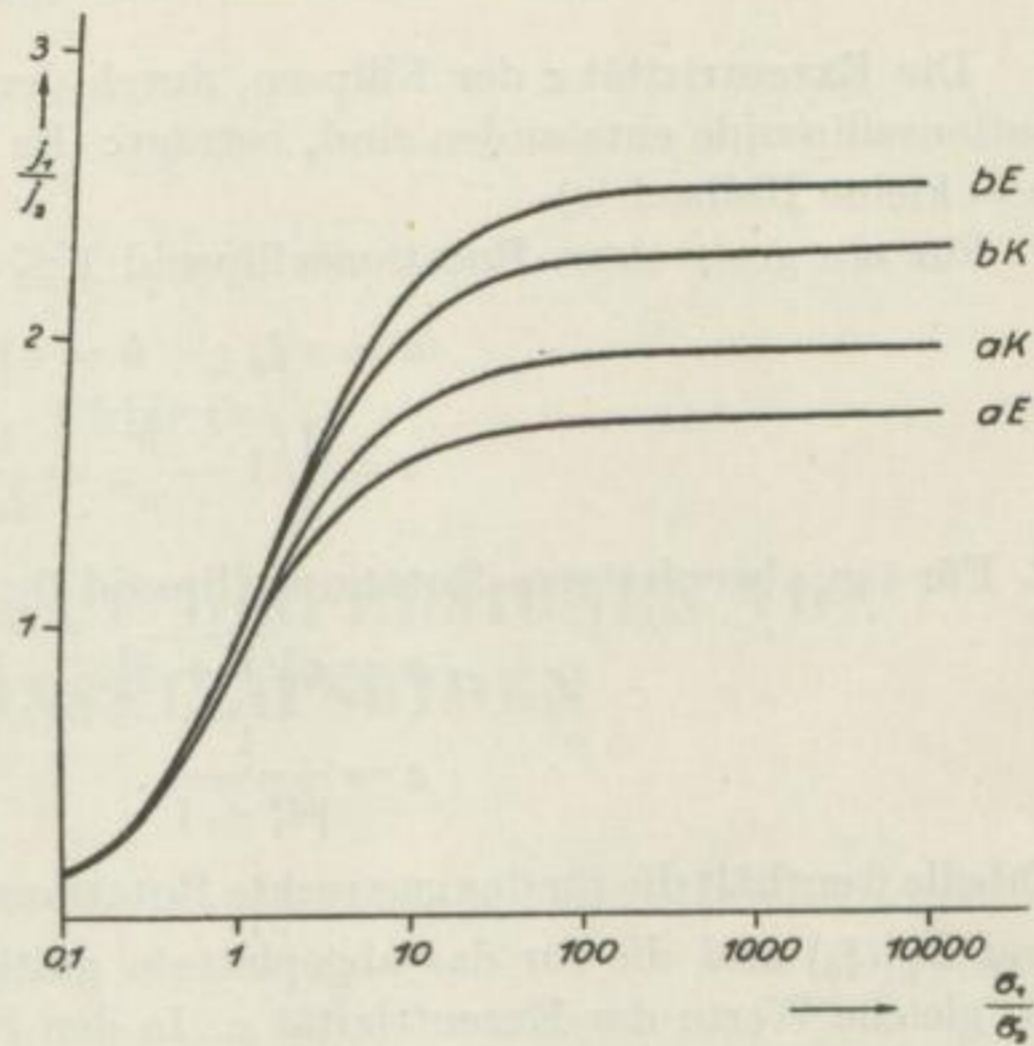


Bild 4. Verhältnisse der Stromdichten des homogenen Innenfeldes zur Stromdichte im Außenraum für abgeplattete Rotationsellipsoide (E) und äquivalente Kugeln (K) gleichen Materials als Funktion des Leitfähigkeitsverhältnisses für Fall a und b

$$f = 1 \text{ Hz} \quad \lambda = 40 \text{ s}$$

$$\xi = 1,4 \quad \varrho_2 c c_p = 0,1 \text{ s}$$

Für gleiche Materialkonstanten zeigt Bild 4 für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit $\xi_0 = 1$ und für die äquivalenten Kugeln die Stromdichte im Innern im Verhältnis zur Stromdichte im ungestörten Außenraum als Funktion des Leitfähigkeitsverhältnisses.

14. Zusammenstellung einiger Zahlenwerte

Die Exzentrizität ε der Ellipsen, durch deren Rotation um eine Achse die Rotationsellipsoide entstanden sind, beträgt: (Es bedeuten: a = große Halbachse und b = kleine Halbachse)

1. Für ein gestrecktes Rotationsellipsoid $1 \leq \xi_0 \leq \infty$;

$$a = c \xi_0; \quad b = c \sqrt{\xi_0^2 - 1};$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{\xi_0}.$$

2. Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid $0 \leq \xi_1 \leq \infty$;

$$a = c \sqrt{1 + \xi_1^2}; \quad b = c \xi_1;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + 1}}.$$

Tabelle 6 enthält die für das gestreckte Rotationsellipsoid gültigen Funktionen $C_{1,1}(\xi_0)$ und $D_{1,1}(\xi_0)$ und die für das abgeplattete gültigen Funktionen $\bar{C}_{1,1}(\xi_1)$ und $\bar{D}_{1,1}(\xi_1)$ für gleiche Werte der Exzentrizität ε . In den Beispielen der Kapitel 6, 9, 13 treten außerdem folgende Werte auf:

	$C_{13} = 0,054154$	$D_{13} = 0,093021$
$\xi_0 = 1,4$	$C_{31} = 0,45920$	$D_{31} = 0,44527$
	$C_{33} = 0,35170$	$D_{33} = 1,18204$
	$\bar{C}_{13} = -0,064898$	$\bar{D}_{13} = 2,76887$
$\xi_1 = 1$	$\bar{C}_{31} = 0,50864$	$\bar{D}_{31} = 0,59593$
	$\bar{C}_{33} = 3,28168$	$\bar{D}_{33} = 9,97235$

Tabelle 6

ε	ξ_0	$C_{11}(\xi_0)$	$D_{11}(\xi_0)$	ξ_1	$\bar{C}_{11}(\xi_1)$	$\bar{D}_{11}(\xi_1)$
1,00000	1,00000	2,35619	1,17810	0,00000	1,50000	∞
0,90909	1,10000	1,38371	1,01979	0,45826	1,28754	1,86796
0,83333	1,20000	1,13285	0,91124	0,66332	1,21043	1,55290
0,71429	1,40000	0,86938	0,75872	0,97980	1,13391	1,31439
0,70711	1,41421	0,85619	0,75000	1,00000	1,13034	1,30449
0,58824	1,70000	0,66401	0,61131	1,37477	1,08201	1,18015
0,50000	2,00000	0,54352	0,51364	1,73205	1,05625	1,11980
0,33333	3,00000	0,34516	0,33718	2,82843	1,02335	1,04791
0,20000	5,00000	0,20246	0,20081	4,89898	1,00815	1,01642
0,10000	10,00000	0,10030	0,10010	9,94988	1,00201	1,00403

TEIL C

**ANWENDUNGEN AUF DISPERSIONEN VON
ROTATIONSELLIPSOIDEN**

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen über die Wirkung von Licht auf die Keimungsrate von Samen.

Die Untersuchungen wurden im Institut für Botanik der Universität zu Köln durchgeführt.

2. Material

VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE WIRKUNG VON LICHT AUF DIE KEIMUNGSRATE VON SAMEN

Die Untersuchungen wurden im Institut für Botanik der Universität zu Köln durchgeführt. Die Samen wurden in einer Schicht von feinem Sand in einer Petri-Schale ausgelegt und unter verschiedenen Lichtbedingungen gehalten.

Die Keimungsrate wurde durch die Anzahl der keimenden Samen bestimmt. Die Keimungsrate wurde in Prozent angegeben. Die Keimungsrate wurde über einen Zeitraum von 14 Tagen beobachtet. Die Keimungsrate wurde täglich bestimmt.

Samenart	Keimungsrate (%)
1. Weizen	85
2. Gerste	75
3. Hafer	65
4. Roggen	55
5. Dinkel	45
6. Triticale	35
7. Weizen	85
8. Gerste	75
9. Hafer	65
10. Roggen	55
11. Dinkel	45
12. Triticale	35

15. Der spezifische Widerstand einer Dispersion von Rotationsellipsoiden

Um das Zusammenwirken mehrerer, in einem Medium der Leitfähigkeit σ_2 eingelagerter und untereinander parallel ausgerichteter Rotationsellipsoide beschreiben zu können, wird die von MAXWELL [16] für eine Dispersion von Kugeln angewandte Methode zur Berechnung des spezifischen Widerstandes in abgewandelter Form auf die hier vorliegenden Verhältnisse übertragen. Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Methode ist, daß der Volumenanteil der dispergierten Teilchen am Gesamtvolumen so klein ist, daß die gegenseitige Beeinflussung der Teilchen vernachlässigt werden darf. W. ANDERS [1] prüfte die Ergebnisse von MAXWELL experimentell und stellte fest, daß die Abweichung des mittleren spezifischen Widerstandes einer solchen Dispersion vom theoretisch vorausgesagten Wert für praktisch interessierende Volumenanteile vernachlässigbar ist. Für größere Volumengehalte ist die Wechselwirkung der Dipole nicht mehr vernachlässigbar, denn auf ein einzelnes Teilchen wirkt eine vom äußeren Feld \mathcal{E}_0 abweichende Feldstärke \mathcal{E} . Um sie zu berechnen, entfernen wir das Teilchen, indem wir uns eine Kugel aus dem Material herausgeschnitten und die Teilchen in ihr beseitigt und durch Außenmaterial ersetzt denken. Auf der Oberfläche dieser Kugel tritt nun eine Flächenladung auf, die das Feld infolge der Polarisation \mathfrak{P} um $\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$ erhöht, so daß auf jedes Teilchen die Feldstärke

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \quad (15.1)$$

einwirkt, da nach H. A. LORENTZ [9] der Einfluß der in der Kugel enthaltenen Teilchen verschwindet, wenn sie entweder völlig ungeordnet verteilt oder in den Gitterpunkten eines regulären Kristallgitters angeordnet sind. Zur Berechnung der Polarisation \mathfrak{P} (sie möge wie die dielektrische Polariation mit \mathfrak{P} bezeichnet werden, obwohl sie durch den Stromdurchgang hervorgerufen wird) beachten wir, daß durch sie das Innenfeld eines Ellipsoids \mathcal{E}_i vom äußeren Feld abweicht. Bekanntlich ist

$$\left. \begin{aligned} E_{ia} &= E_{oa} - 4\pi N_a P_a, \\ E_{ib} &= E_{ob} - 4\pi N_b P_b, \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

wobei N_a und N_b die Entelektrisierungsfaktoren parallel bzw. senkrecht zur Rotationsachse eines Rotationsellipsoids (Fall a bzw. Fall b) bedeuten und bei den Feldgrößen ebenfalls durch die Indizes auf die entsprechenden Komponenten hingewiesen wird. Die Entelektrisierungsfaktoren eines gestreckten Rotationsellipsoids betragen [2] [13]:

$$\left. \begin{aligned} N_a &= (\xi_0^2 - 1) Q_1(\xi_0); \\ N_b &= -\frac{1}{2} \xi_2 (\xi_0^2 - 1) Q(\xi_0); \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

mit (1.7) und (1.8) sieht man sofort, daß

$$N_a + 2 N_b = 1$$

ist. Ferner erhält man wegen

$$Q_1(\xi_0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1) \xi_0^{2r}} \quad \xi_0 > 1$$

den Entelektrisierungsfaktor der Kugel:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} N_a = \lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} N_b = \frac{1}{3}.$$

Ersetzt man ξ_0 durch $i \xi_0$, so erhält man aus (15.3) die Entelektrisierungsfaktoren des abgeplatteten Rotationsellipsoids.

Mit der Einführung der Entelektrisierungsfaktoren lassen sich wesentliche Vereinfachungen in der Schreibweise früherer Gleichungen erreichen:

Wegen:

$$\xi Q_1' = Q_1(\xi) + \frac{1}{1 - \xi^2}$$

ist

$$\frac{\mathfrak{P}_1(\xi) Q_1'(\xi)}{\mathfrak{P}_1'(\xi) Q_1(\xi)} = 1 - \frac{1}{N_a},$$

und

$$\frac{\mathfrak{P}_1^1(\xi) Q_1^{1'}(\xi)}{\mathfrak{P}_1^{1'}(\xi) Q_1^1(\xi)} = 1 - \frac{1}{N_b}$$

wegen

$$\mathfrak{P}_1^1(\xi) Q_1^{1'}(\xi) = \xi Q_1(\xi) + \frac{2}{\xi^2 - 1}.$$

(15.4)

Das homogene Innenfeld eines Rotationsellipsoids beträgt nach (6.1) und (9.1) bzw. (10.2) und (10.4)

$$E_{ia} = -\frac{A_1}{c} \text{ im Fall a}$$

$$\text{und } E_{ib} = \frac{a_1}{c} \text{ im Fall b}$$

(15.5)

sowohl beim gestreckten als auch beim abgeplatteten Rotationsellipsoid. Für ein galvanisch nicht induzierbares Rotationsellipsoid (keine Potentialdifferenz auf der Oberfläche) erhält man nach (6.1), (9.1), (13.1) und (13.4) mit (15.4) und (15.5):

$$E_{ia} = \frac{\varrho_1 E_0}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1) \varrho_1}.$$

$$E_{ib} = \frac{\varrho_1 E_0}{\varrho_2 N_b - (N_b - 1) \varrho_1}.$$

Damit erhalten wir aus (15.2) für die Polarisation:

$$P_{a,b} = \frac{1}{4\pi N_{a,b}} (E_{0a,b} - E_{ia,b}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 N_{a,b} - (N_{a,b} - 1) \varrho_1} E_{0a,b}$$

im Fall a und b. Befinden sich in der Raumeinheit n_e Ellipsoide, so beträgt die Polarisation z. B. im Fall a

$$\bar{P}_a = v_e P_a = \frac{v_e}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1) \varrho_1} E_{0a}, \quad (15.6)$$

wobei v_e den Volumenanteil der Ellipsoide je Raumeinheit angibt:

$$v_e = \frac{4\pi}{3} n c^3 \xi_0 (\xi_0^2 - 1).$$

In dieser Gleichung ist aber bei Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung das tatsächlich am Ort der Teilchen herrschende Feld \mathcal{E} für E_{0a} einzusetzen, wie es durch Gleichung (15.1) angegeben wird, so daß wir im Fall a

$$\begin{aligned} \bar{P}_a &= \frac{v_e}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 N_a - \varrho_1 (N_a - 1)} \left(E_{0a} + \frac{4\pi}{3} \bar{P}_a \right) \\ &= \frac{v_e}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1) \varrho_1 - \frac{v_e}{3} (\varrho_2 - \varrho_1)} E_{0a} \end{aligned} \quad (15.7)$$

und eine entsprechende Gleichung im Fall b erhalten.

Um den mittleren spezifischen Widerstand der Dispersion parallel ausgerichteter Rotationsellipsoide berechnen zu können, betrachten wir ein großes, sehr viele Teilchen enthaltendes Rotationsellipsoid gleicher Exzentrizität und gleicher Orientierung wie die dispergierten Rotationsellipsoide und setzen, entsprechend der bereits zitierten Methode von MAXWELL, dessen Polarisation gleich der Polarisation der Dispersion. Auf diese Weise erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den mittleren spezifischen Widerstand $\bar{\varrho}$ der Dispersion:

$$\frac{v_e}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1) \varrho_1 - \frac{v_e}{3} (\varrho_2 - \varrho_1)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \bar{\varrho}_a}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1) \bar{\varrho}_a}. \quad (15.8)$$

Die Auflösung nach $\bar{\varrho}_a$ ergibt:

$$\bar{\varrho}_a = \frac{\left[N_a (1 - v_e) - \frac{1}{3} v_e \right] \varrho_2 + \left[1 + N_a (v_e - 1) + \frac{1}{3} v_e \right] \varrho_1}{\left[N_a (1 - v_e) + \frac{2}{3} v_e \right] \varrho_2 + \left[1 + N_a (v_e - 1) - \frac{2}{3} v_e \right] \varrho_1}. \quad (15.9)$$

Diese Gleichung gilt im Fall a. Ersetzt man $\bar{\varrho}_a$ durch $\bar{\varrho}_b$ und N_a durch N_b , dann erhält man die im Fall b gültige Formel. Bei KRAJEV [13] findet man eine (15.9) entsprechende Formel, bei deren Ableitung die Dipolwechselwirkung nicht berücksichtigt wurde. Man erhält sie aus (15.9), wenn man die Glieder $\frac{1}{3} v_e$ durch Null und $\frac{2}{3} v_e$ durch v_e ersetzt. Mit $N_a = N_b = \frac{1}{3}$ erhält man aus (15.9) den mittleren spezifischen Widerstand $\bar{\varrho}_k$ einer Kugeldispersion ($\xi_0 \rightarrow \infty$) unter Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung:

$$\frac{\bar{\varrho}_k}{\varrho_2} = \frac{(1 - 2v_k) \varrho_2 + 2(1 + v_k) \varrho_1}{(1 + v_k) \varrho_2 + (2 - v_k) \varrho_1}. \quad (15.10)$$

Es bedeutet $v_k = \frac{4\pi}{3} n_k R^3$ den Volumenanteil der dispergierten Kugeln.

Ein Gestein mit nadelförmigen Einlagerungen vom spezifischen Widerstand ϱ_1 ergibt mit $\xi_0 \rightarrow 1$

$$N_a = 0, \quad N_b = \frac{1}{2}$$

parallel zu den Nadeln:

$$\frac{\bar{\varrho}_a}{\varrho_2} = \frac{(3 + v_e) \varrho_1 - v_e \varrho_2}{(3 - 2v_e) \varrho_1 + 2v_e \varrho_2};$$

senkrecht zu den Nadeln:

$$\frac{\bar{\varrho}_b}{\varrho_2} = \frac{(3 + 5v_e) \varrho_1 + (3 - 5v_e) \varrho_2}{(3 - v_e) \varrho_1 + v_e \varrho_2}.$$

Für ein Gestein mit scheibenförmigen Einlagerungen erhalten wir als Grenzfall eines extrem abgeplatteten Rotationsellipsoids mit $i \xi_0 \rightarrow 0$:

$$N_a = 1, \quad N_b = 0$$

senkrecht zu den Scheiben:

$$\frac{\bar{\varrho}_a}{\varrho_2} = \frac{4v_e \varrho_1 + (3 - 4v_e) \varrho_2}{v_e \varrho_1 + (3 - v_e) \varrho_2};$$

und parallel zu den Scheiben:

$$\frac{\bar{\varrho}_b}{\varrho_2} = \frac{(3 + v_e) \varrho_1 - v_e \varrho_2}{(3 - 2v_e) \varrho_1 + 2v_e \varrho_2}.$$

16. Anwendung auf Dispersionen galvanisch polarisierbarer Ellipsoide

Wenn auch im Innern eines galvanisch polarisierbaren Ellipsoids kein exakt homogenes Feld herrscht (siehe Kapitel 2), so konnte doch gezeigt werden, daß unter den in der Praxis vorliegenden Verhältnissen die Abweichungen vom homogenen Feld nur gering sind, da die Koeffizienten der inhomogenen Feldanteile nur wenige Prozente des homogenen Feldes betragen und ihre Vernachlässigung sich praktisch nicht im homogenen Innenfeldanteil bemerkbar macht. Eine Kugel mit dem äquivalenten Kugelradius e_a bzw. e_b besitzt nach den Kapiteln 6, 9 und 13 den gleichen komplexen spezifischen Widerstand ϱ_a^* bzw. ϱ_b^* wie ein Ellipsoid aus gleichem Material. Aus diesem Grunde kann man den mittleren spezifischen Widerstand einer Dispersion parallel ausgerichteter Rotationsellipsoide auch deuten als den mittleren spezifischen Widerstand einer Dispersion äquivalenter Kugeln, deren Anzahl pro Raumeinheit n_{ka} bzw. n_{kb} von der Anzahl der Ellipsoide pro Raumeinheit n_e abweichen wird. Für Kugeln erhält man aus (15.7) mit $N_a = \frac{1}{3}$

$$\bar{P}_{k,a} = \frac{3V_{k,a}}{4\pi} \frac{\varrho_2 - \varrho_a^*}{\varrho_2 + 2\varrho_a^* - V_{k,a}(\varrho_2 - \varrho_a^*)} E_{0,a}. \quad (16.1)$$

Ist das elektrische Moment pro Volumeneinheit (die Polarisation) dieser Kugeldispersion dem einer Dispersion von Ellipsoiden gleich, so muß sein

$$\bar{P}_{k,a} = \bar{P}_a \quad \text{bzw.} \quad \bar{P}_{k,b} = \bar{P}_b,$$

und wir erhalten ohne Spezialisierung auf die Fälle a oder b aus (15.7) und (16.1)

$$3 v_k \frac{\varrho_2 - \varrho^*}{\varrho_2 + 2\varrho^* - v_k(\varrho_2 - \varrho^*)} = v_e \frac{\varrho_2 - \varrho^*}{\varrho_2 N - (N-1)\varrho^* - \frac{v_e}{3}(\varrho_2 - \varrho^*)}.$$

und daraus läßt sich angeben, bei welcher Konzentration v_k dispergierter Kugeln wir die gleiche Polarisation der Materie wie bei einer Dispersion von Ellipsoiden erhalten. Diese beiden Dispersionen besitzen dann den gleichen mittleren, komplexen Widerstand $\bar{\varrho}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{ka}}{v_e} &= \frac{1}{3} \frac{\varrho_2 + 2\varrho_a^*}{\varrho_2 N_a - (N_a - 1)\varrho_a^*}, \\ \frac{v_{kb}}{v_e} &= \frac{1}{3} \frac{\varrho_2 + 2\varrho_b^*}{\varrho_2 N_b - (N_b - 1)\varrho_b^*}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Beim Übergang der Ellipsoide in Kugeln ($\xi_0 \rightarrow \infty$) wird wegen

$$N_a = N_b = \frac{1}{3}, \quad v_{k,a} = v_{k,b} = v_e.$$

Da $\varrho_{a,b}^*$ komplex ist, besitzen diese beiden Größen nur dann einen physikalischen Sinn, wenn $\omega \ll \lambda$ ist, so daß der Imaginärteil von $\varrho_{a,b}^*$ vernachlässigt werden kann, wenn nicht $\varrho_{a,b}^*$ selbst vernachlässigbar ist.

Unter bestimmten Voraussetzungen ist bei im Verhältnis zur Umgebung gutleitenden Einlagerungen

$$|\varrho_a^*| \ll \varrho_2 \quad \text{und} \quad |\varrho_b^*| \ll \varrho_2,$$

wenn nämlich die Ellipsoide eine gewisse Mindestgröße nicht unterschreiten, sonst kann auch bei gutleitenden Einlagerungen

$$|\varrho_{a,b}^*| \geq \varrho_2$$

werden. Nach (4.1) und (4.7) gilt für $\omega \ll \lambda$:

$$|\varrho_{a,b}^*| = \varrho_1 \left[1 + \frac{c}{e_{a,b}} g(\omega) \right] = \varrho_1 + \frac{1}{e_{a,b} \lambda c_p}.$$

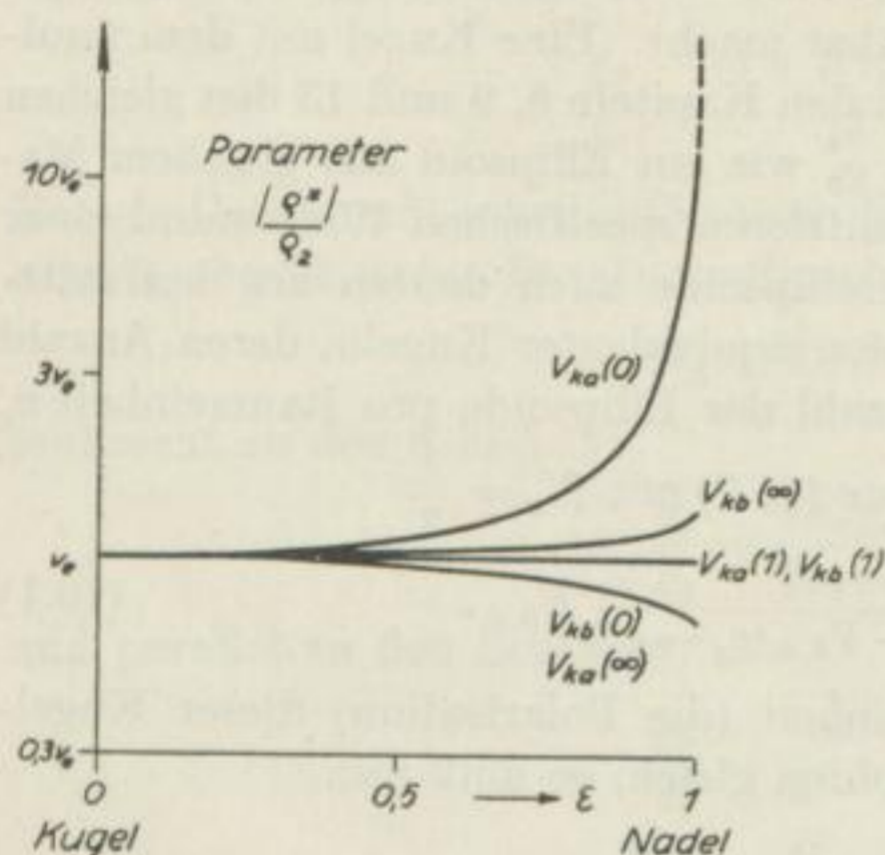


Bild 5. Die Volumenanteile der äquivalenten Kugeln des gestreckten Rotationsellipsoids für

$$|\varrho^*| \ll \varrho_2, \quad |\varrho^*| = \varrho_2, \quad |\varrho^*| \gg \varrho_2$$

Setzen wir $|\varrho_{a,b}^*| = \varrho_2$, so können wir angeben, bei welchem äquivalenten Kugelradius dies eintritt. Für die Materialkonstanten mögen die in dem Zahlenbeispiel des Kapitels 6 verwendeten eingesetzt werden:

$$e_a = e_b = 0,1266 \text{ mm};$$

und daraus:

$$c = 0,077 \text{ mm im Fall a und}$$

$$c = 0,135 \text{ mm im Fall b}$$

für ein gestrecktes Rotationsellipsoid mit $\xi_0 = 1,4$;

und:

$$c = 0,143 \text{ mm im Fall a,}$$

$$c = 0,083 \text{ mm im Fall b}$$

für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit $\xi_0 = 1$. Aus (16.2) erhalten wir für $|\varrho_{a,b}^*| \ll \varrho_2$ für alle ω :

$$\frac{v_{ka}}{v_e} = \frac{1}{3 N_a}, \quad \frac{v_{kb}}{v_e} = \frac{1}{3 N_b};$$

und für $\omega \ll \lambda$ durch Vernachlässigung von $\Im(\varrho_{a,b}^*)$ mit $\varrho_a^* = \varrho_2$ bzw. $\varrho_b^* = \varrho_2$:

$$v_{ka} = v_{kb} = v_e;$$

und schließlich für sehr kleine Teilchen für $|\varrho_{a,b}^*| \gg \varrho_2$:

$$\frac{v_{ka}}{v_e} = -\frac{2}{3(N_a-1)} = \frac{1}{3N_b}$$

$$\frac{v_{kb}}{v_e} = -\frac{2}{3(N_b-1)} = \frac{2}{3(N_a+N_b)}$$

v_{ka} und v_{kb} sind für diese drei Sonderfälle als Funktion der Exzentrizität in Bild 5 für gestreckte und in Bild 6 für abgeplattete Rotationsellipsoide dargestellt.

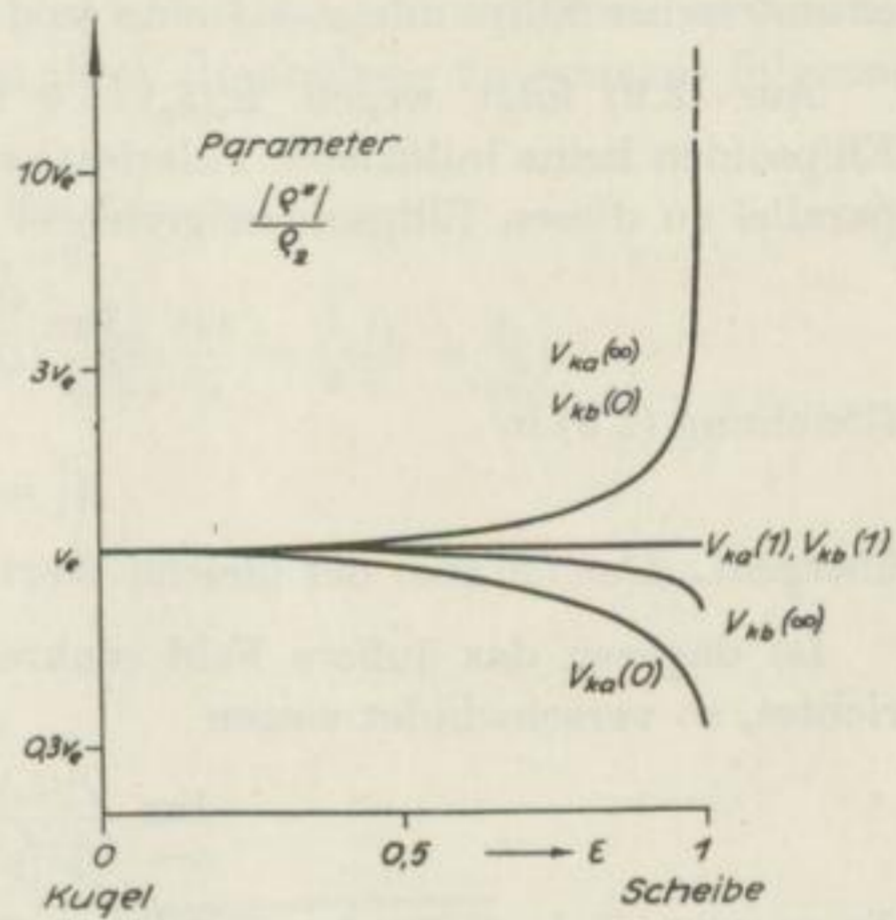


Bild 6.
Die Volumenanteile der äquivalenten Kugeln
des abgeplatteten Rotationsellipsoids für
 $|\varrho^*| \ll \varrho_2$, $|\varrho^*| = \varrho_2$, $|\varrho^*| \gg \varrho_2$

17. Die Grenzfälle nadelförmiger und scheibenförmiger Ellipsoide

Während der Grenzfall $\xi_0 \rightarrow \infty$, der Übergang von der ellipsoidischen zur Kugelgestalt, bereits in Kapitel 16 behandelt worden ist, erfordert der Grenzfall extrem exzentrischer Ellipsoide $\varepsilon \rightarrow 1$ eine ausführliche Betrachtung.

Aus (2.9) folgt wegen $\mathfrak{P}_v^1(\xi_0) = 0$ für $\xi_0 = 1$, daß an extrem nadelförmigen Ellipsoiden keine induzierte Polarisation auftreten kann, wenn das erregende Feld parallel zu diesen Ellipsoiden gerichtet ist, da wegen

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \frac{Q_1(\xi_0)}{Q_1'(\xi_0)} = 0$$

Gleichung (2.9) in

$$A_1' = -c E_0'$$

übergeht. Das ist aber der gleiche Wert, den man auch aus (1.5) für $\xi_0 = 1$ erhält.

Ist dagegen das äußere Feld senkrecht zu den nadelförmigen Ellipsoiden gerichtet, so verschwindet wegen

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \frac{Q_1^1(\xi_0)}{Q_1^1'(\xi_0)} \mathfrak{P}_1^{1'}(\xi_0) = 0$$

die gesamte linke Seite der Gleichung (7.4), und wegen

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \sqrt{\xi_0^2 - 1} \mathfrak{P}_v^{1'}(\xi_0) = \lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \{ \xi_0 \mathfrak{P}_v'(\xi_0) + (\xi_0^2 - 1) \mathfrak{P}_v^*(\xi_0) \} = \frac{v}{2}$$

ergibt die rechte Seite

$$-g(\omega) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{2} a_v' D_{n,v}(1) = 0; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Es verschwinden also alle a_v' ($v = 1, 3, 5, \dots$), da als vom Außenfeld \mathcal{E}_0 unabhängige Lösung dieses homogenen Gleichungssystems nur die triviale physikalisch sinnvoll ist, selbst wenn die Koeffizientendeterminante verschwinden sollte, was hier aber nicht näher untersucht werden soll.

Im „Fall a“ verschwindet also bei nadelförmigen Ellipsoiden die Auswirkung der induzierten Polarisation, das Innenfeld wird gleich dem Außenfeld, und im „Fall b“ macht sich das Vorhandensein der Einlagerungen überhaupt nicht bemerkbar. Der Einfluß der induzierten Polarisation nimmt aber auch dann ab, wenn die Einlagerungen sehr große Abmessungen besitzen, da $g(\omega)$ verschwindet, wenn c gegen Unendlich geht (siehe Kapitel 2). Einlagerungen von extrem nadelförmiger Gestalt verhalten sich also wie Einlagerungen sehr großer Abmessungen (Kugeln oder Ellipsoide), wenn das erregende Feld parallel zu den Nadeln ausgerichtet ist, oder die Dispersion verhält sich wie ein von polarisierbarer Materie völlig freies Medium, wenn

das erregende Feld senkrecht dazu gerichtet ist. Diese Erscheinung wirkt sich auch darin aus, daß für die äquivalenten Kugelradien folgende Grenzwerte gelten:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 1} e_a = \infty; \quad \lim_{\xi_0 \rightarrow 1} e_b = 0;$$

und für die Volumenanteile der äquivalenten Kugeldispersion:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \frac{v_{ka}}{v_e} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\varrho_2}{\varrho_a^*} \right); \quad \lim_{\xi_0 \rightarrow 1} \frac{v_{kb}}{v_e} = \frac{2}{3} \frac{\varrho_2 + 2\varrho_b^*}{\varrho_2 + \varrho_b^*}.$$

Für abgeplattete Ellipsoide liegen im Falle ihrer Entartung zu Scheiben verschwindender Dicke (die Ellipsoide ziehen sich zu ihrer Brennebene zusammen) folgende Verhältnisse vor:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} e_a = 0; \quad \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} e_b = \infty;$$

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{v_{ka}}{v_e} = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \frac{\varrho_a^*}{\varrho_2} \right); \quad \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{v_{kb}}{v_e} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\varrho_2}{\varrho_b^*} \right).$$

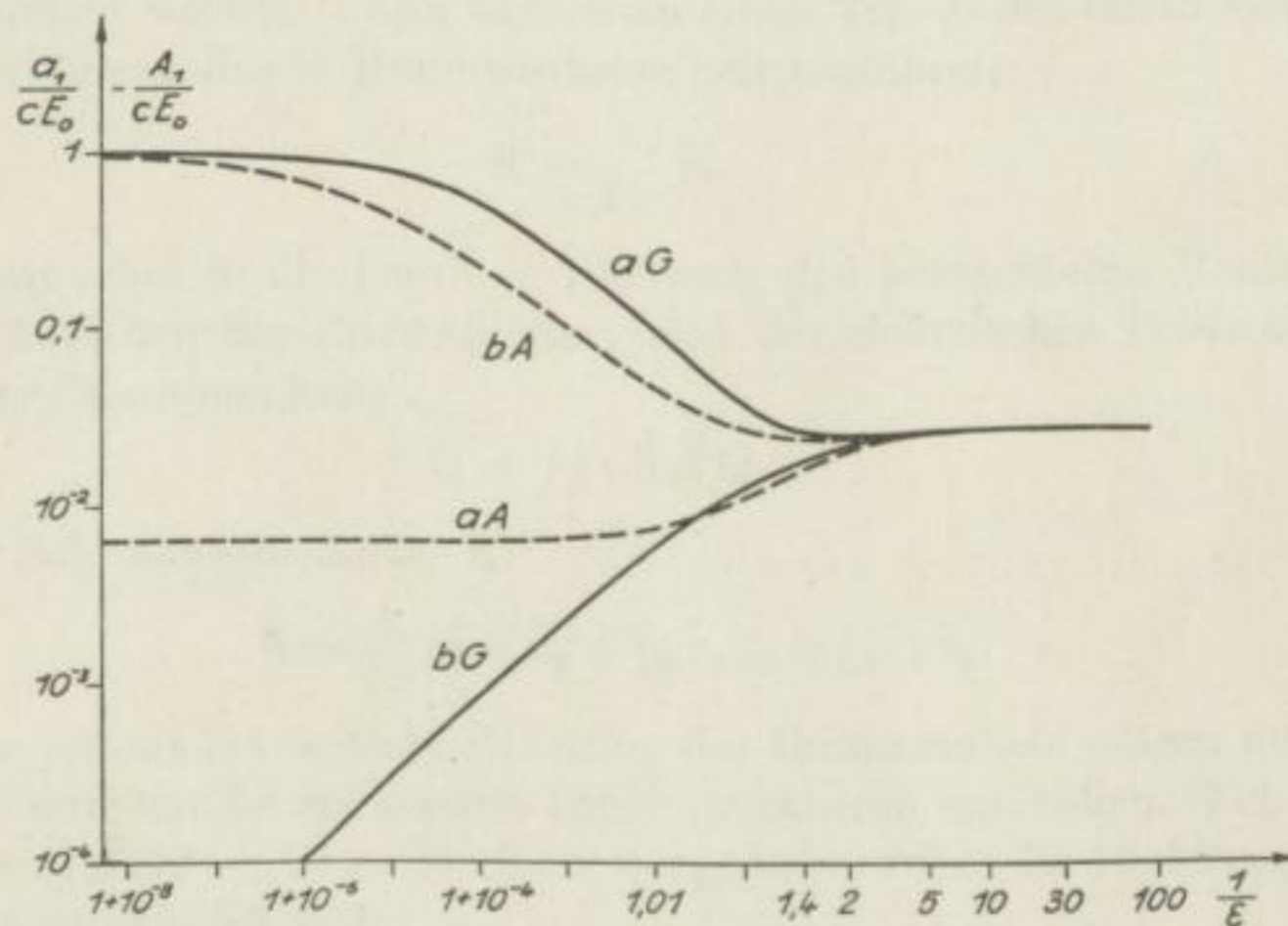


Bild 7. Amplitude des homogenen Innenfeldes eines gestreckten (G) und eines abgeplatteten (A) Rotationsellipsoids für Fall a und b, bezogen auf das homogene Außenfeld als Funktion der reziproken Exzentrizität

$$f = 1 \text{ Hz} \quad \sigma_1/\sigma_2 = 100 \quad \lambda = 40 \text{ s}^{-1} \quad \varrho_2 c c_p = 0,1 \text{ s}$$

In Bild 7 ist das homogene Innenfeld eines gestreckten und eines abgeplatteten Rotationsellipsoids im Falle a und b als Funktion der reziproken Exzentrizität dargestellt. Auch hier wurden die gleichen Zahlenwerte wie in früheren Zahlenbeispielen für die Materialkonstanten benutzt. Das Innenfeld wird bei Nadeln im Falle a und bei Scheiben im Falle b gleich dem homogenen Außenfeld. Während bei Nadeln im Falle b das Innenfeld verschwindet, besitzt es bei Scheiben im Falle a einen endlichen Grenzwert.

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß sich zu Nadeln entartete Ellipsoide im Fall a wie zu Scheiben entartete im Fall b verhalten. Umgekehrt gilt jedoch nicht das gleiche, da sich die Scheiben anders als die Nadeln verhalten, wenn sie ganz auf einer Äquipotentialfläche des erregenden Feldes liegen (Fall a für Scheiben, Fall b für Nadeln). Dieses unterschiedliche Verhalten kommt auch in den Bildern 5 und 6 zum Ausdruck.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Koeffizienten der inhomogenen Felder niedrigster Ordnung (A'_3 und a'_3) als Funktion der Exzentrizität ε ein Extremum durchlaufen. Dieses liegt zum Beispiel bei gestreckten Rotationsellipsoiden im Fall a bei $1/\varepsilon = 1,00005$ ($\varepsilon = 0,99995$) und im Fall b bei $1/\varepsilon = 1,03$ ($\varepsilon = 0,971$). Für $\varepsilon \rightarrow 1$ und für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwinden diese Koeffizienten.



18. Regellos gelagerte Ellipsoide

Nach (15.9) kann man einem Gestein, das parallel ausgerichtete Rotationsellipsoide von abweichender Leitfähigkeit in einer Anzahl von n_e pro Raumeinheit enthält, einen Tensor des effektiven, mittleren spezifischen Widerstandes zuordnen:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \bar{\varrho}_a & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varrho}_b & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varrho}_b \end{pmatrix}$$

Es möge nun ein Medium betrachtet werden, das wiederum n_e Ellipsoide pro Raumeinheit enthält, die aber diesmal völlig regellos angeordnet sein sollen, so daß in jede Richtung pro Einheit des Raumwinkels die Rotationsachsen von $n_e/4\pi$ Ellipsoiden pro Volumeneinheit weisen. Dann kann man einen Tensor des effektiven, mittleren spezifischen Widerstandes je Raumwinkeleinheit einführen:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi} \bar{\mathbf{R}};$$

dessen 1. Hauptachse in die jeweilige Richtung des betrachteten Raumwinkels Ω weisen soll. Zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und der elektrischen Feldstärke besteht dann folgender Zusammenhang:

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{R}} d\Omega.$$

In dyadischer Schreibweise lautet \mathbf{R} :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi} (\bar{\varrho}_a \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\varrho}_b \bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\varrho}_b \bar{\mathbf{e}}_3 \bar{\mathbf{e}}_3),$$

wobei $\bar{\mathbf{e}}_1$ in die jeweils betrachtete Richtung des Raumwinkels weisen und \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 zwei dazu und aufeinander senkrechte Einheitsvektoren sein sollen. Führt man nun ein materiefestes rechtwinkliges Dreibein $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ ein, wobei die Richtung von \mathbf{e}_1 mit der von \mathbf{j} zusammenfallen soll

$$\mathbf{j} = e_1 |\mathbf{j}|$$

und über die der Einheitsvektoren \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 nichts weiteres ausgesagt werden soll, so gilt unter Verwendung der Transformationsgleichung für Vektoren in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= e_1 \cos \vartheta + e_2 \sin \vartheta \cos \varphi + e_3 \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 &= -e_1 \sin \vartheta + e_2 \cos \vartheta \cos \varphi + e_3 \cos \vartheta \sin \varphi, \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= -e_2 \sin \varphi + e_3 \cos \varphi \end{aligned}$$

folgender Ausdruck für $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{4\pi} \{ [e_1 e_1 \cos^2 \vartheta + e_1 e_2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + e_1 e_3 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi + \dots] \bar{\varrho}_a \\ &\quad + [e_1 e_1 \sin^2 \vartheta - e_1 e_2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi - e_1 e_3 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi + \dots] \bar{\varrho}_b \}. \end{aligned}$$

Dabei wurden alle die Glieder weggelassen, die zu dem Produkt $e_1 \cdot \hat{R}$ nichts beitragen.

$$e_1 \cdot \hat{R} = \frac{1}{4\pi} \{ [e_1 \cos^2 \vartheta + e_2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + e_3 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi] \bar{\varrho}_a \\ + [e_1 \sin^2 \vartheta - e_2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi - e_3 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi] \bar{\varrho}_b \}.$$

Bildet man nun mit $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$

$$\mathcal{E} = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\mathbf{j}| e_1 \cdot \hat{R} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta,$$

so sieht man sofort, daß die Feldstärke \mathcal{E} keine e_2 - und e_3 -Komponenten besitzt, da diese Anteile bei der Integration über φ verschwinden.

Wegen

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} \quad \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$$

erhält man:

$$\mathcal{E} = \frac{\bar{\varrho}_a + 2\bar{\varrho}_b}{3} \mathbf{j}.$$

Das Material mit n_e regellos eingelagerten Ellipsoiden je Raumeinheit besitzt also folgenden wirksamen spezifischen Widerstand:

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{3} (\bar{\varrho}_a + 2\bar{\varrho}_b). \quad (18.1)$$

Da das Material keine Vorzugsrichtung besitzt, kann $\bar{\varrho}$ durch eine skalare Größe dargestellt werden.

Aus (15.10) erhalten wir durch binomische Entwicklung für $v_k \ll 1$ und $|\varrho^*| \ll \varrho_2$:

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_2} = 1 - 3 v_k \left(1 - \frac{3\varrho^*}{\varrho_2} \right).$$

Setzt man für $\bar{\varrho}$, v_k und ϱ^* die für die Fälle a und b geltenden Größen ein, dann geht (18.1) über in

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_2} = 1 - (v_{ka} + 2v_{kb}) \left[1 - \frac{3}{\varrho_2} \frac{v_{ka}\varrho_a^* + 2v_{kb}\varrho_b^*}{v_{ka} + 2v_{kb}} \right].$$

Eine Dispersion regellos gelagerter Rotationsellipsoide verhält sich also wie eine Dispersion von n_k Kugeln mit dem Radius R , deren Volumenanteil durch

$$v_k = \frac{1}{3} (v_{ka} + v_{kb}) = \frac{3}{4\pi} n_k R^3 \quad (18.2)$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck ist in Bild 8 für gestreckte und in Bild 9 für abgeplattete Rotationsellipsoide als Funktion der Exzentrizität dargestellt. Erst bei sehr hohen Exzentrizitäten weicht v_k wesentlich von v_e ab. Den Einzelpartikeln ist der effektive komplexe Widerstand

$$\varrho_k^* = \frac{v_{ka}\varrho_a^* + 2v_{kb}\varrho_b^*}{v_{ka} + 2v_{kb}} \quad (18.3)$$

zuzuordnen. Hieraus erhält man mit (2.8), (6.3) und (9.2) oder den entsprechenden für das abgeplattete Rotationsellipsoid geltenden Formeln:

$$(v_{ka} + 2 v_{kb}) \varrho_1 \left[1 + \frac{c}{R} g(\omega) \right] = \varrho_1 \left[v_{ka} \left(1 + \frac{c}{e_a} g(\omega) \right) + 2 v_{kb} \left(1 + \frac{c}{e_b} g(\omega) \right) \right];$$

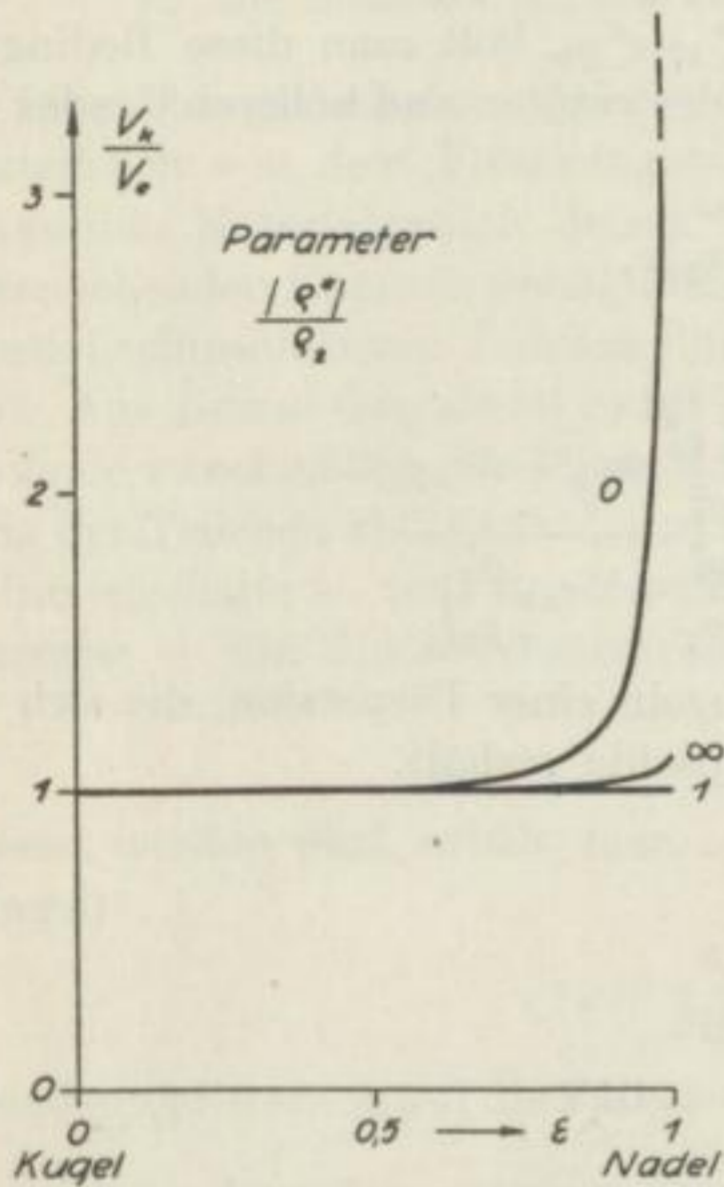


Bild 8. Die Volumenanteile der äquivalenten Kugeln bei regellos gelagerten gestreckten Rotationsellipsoiden im Verhältnis zum Volumenanteil der Ellipsoide

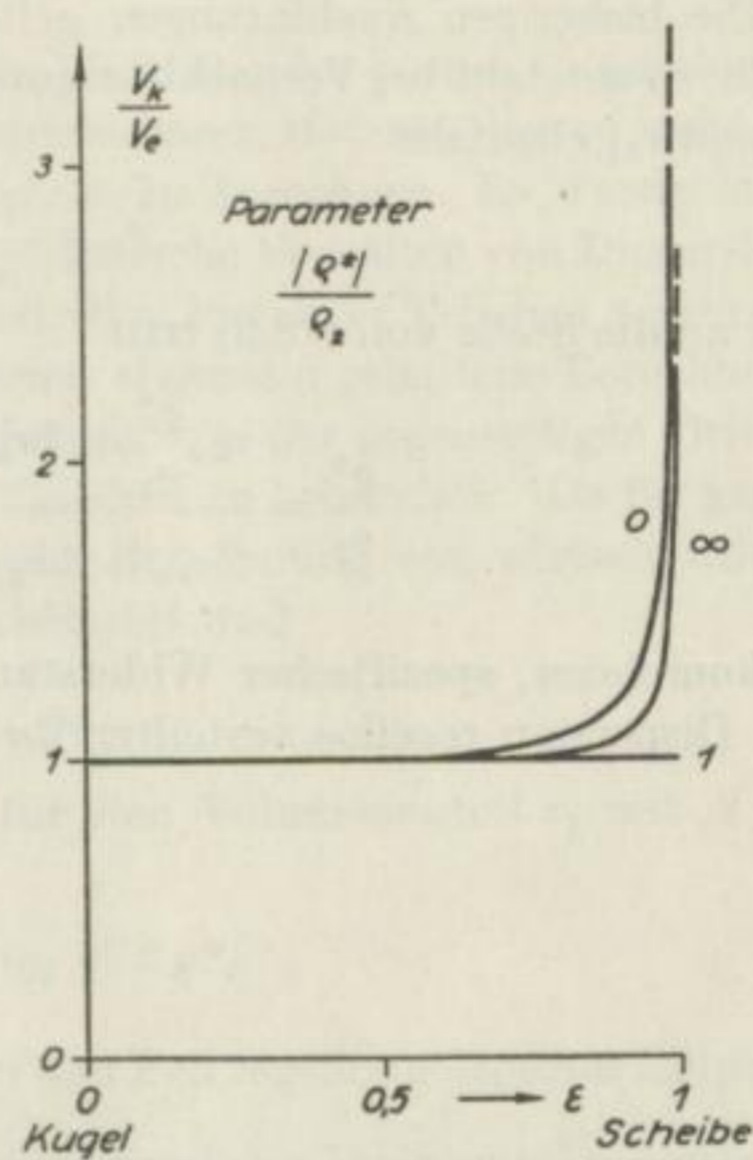


Bild 9. Die Volumenanteile der äquivalenten Kugeln bei regellos gelagerten abgeplatteten Rotationsellipsoiden im Verhältnis zum Volumenanteil der Ellipsoide

also:

$$R = \frac{v_{ka} + 2 v_{kb}}{\frac{v_{ka}}{e_a} + 2 \frac{v_{kb}}{e_b}};$$

wegen

$$v_k = \frac{1}{3} (v_{ka} + 2 v_{kb}) = \frac{4\pi}{9} (n_{ka} e_a^3 + 2 n_{kb} e_b^3)$$

ist

$$O_k = \frac{1}{3} (O_{ka} + 2 O_{kb}) = \frac{4\pi}{3} (n_{ka} e_a^2 + 2 n_{kb} e_b^2)$$

der Gesamtoberflächenanteil der äquivalenten Kugeln pro Volumeneinheit, also

$$R = 3 \frac{v_{ka} + 2 v_{kb}}{O_{ka} + 2 O_{kb}} = 3 \frac{v_k}{O_k}$$

und schließlich

$$O_k = 4\pi n_k R^2.$$

Die zu $1/3$ durch Kugeln des Radius e_a und zu $2/3$ durch Kugeln des Radius e_b ersetzten n_e regellos gelagerter Ellipsoide pro Volumeneinheit verhalten sich wie n_k Kugeln pro Volumeneinheit vom Radius R , wobei sich n_k und R so ergeben, daß ihr Gesamtvolumen und ihre Gesamtoberfläche je Raumeinheit genau so groß sind wie die aller Kugeln der Radien e_a und e_b zusammengenommen.

Die bisherigen Ausführungen gelten für $|\varrho_{a,b}^*| \ll \varrho_2$, läßt man diese Bedingung fallen, so entsteht bei Vernachlässigung der Glieder zweiten und höheren Grades von v_{ka} und v_{kb} ebenfalls

$$v_k = \frac{1}{3} (v_{ka} + 2 v_{kb}),$$

aber an die Stelle von (18.3) tritt

$$\frac{\varrho^*}{\varrho_2} = \frac{v_{ka} \frac{\varrho_a^*}{\varrho_2} + 2 v_{kb} \frac{\varrho_b^*}{\varrho_2} + 2 \frac{\varrho_a^* \varrho_b^*}{\varrho_2^2} (v_{ka} + 2 v_{kb})}{v_{ka} + 2 v_{kb} + 2 \left(v_{ka} \frac{\varrho_b^*}{\varrho_2} + 2 v_{kb} \frac{\varrho_a^*}{\varrho_2} \right)}$$

als komplexer, spezifischer Widerstand der Kugeln einer Dispersion, die sich wie eine Dispersion regellos verteilter Rotationsellipsoide verhält.

19. Die Bestimmung des Volumengehaltes von Imprägnationserzen

Die Abhängigkeit des mittleren spezifischen Widerstandes $\bar{\varrho}$ einer Dispersion von Erzteilchen von dem Volumengehalt an polarisierbarer Materie legt es nahe, aus bekannten Materialgrößen diesen Volumengehalt zu berechnen. Es wurde in den vorangehenden Kapiteln gezeigt, daß sich das elektrische Verhalten von Dispersionen rotationsellipsoidischer Teilchen durch das Verhalten kugeligter Teilchen beschreiben läßt. Aus diesem Grunde ist es für eine möglichst allgemein gehaltene Berechnungsmethode zweckmäßig, die Dispersionen unabhängig von der gegenseitigen Orientierung der Teilchen als Dispersionen kugeligter Teilchen zu behandeln. Da für geringe Volumengehalte — und für diese ist eine solche Berechnung von wirtschaftlichem Interesse — die Dipolwechselwirkung vernachlässigt und

$$|\varrho_2 - \bar{\varrho}| \ll \varrho_2$$

gesetzt werden darf, erhält man aus (15.8) für den Volumenanteil v_k mit $N = \frac{1}{3}$ (Kugel)

$$v_k = \frac{1}{3} \frac{\bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}^*}{\varrho_2 - \varrho^*} (\varrho_2 + 2 \varrho^*)$$

ohne Spezialisierung auf die Fälle a oder b oder den Fall regellos gelagerter Ellipsoide.

$\bar{\varrho}$ ist der komplexe mittlere spezifische Widerstand des Imprägnationserzes, wie er etwa durch ein Vierpunktverfahren ermittelt werden kann. Dabei sind je nach dem meßtechnischen Aufwand $|\varrho|$, $\Re(\bar{\varrho})$ oder $\Im(\bar{\varrho})$ oder auch mehrere von diesen Größen erfaßbar. Da jedoch außer der Beziehung

$$|\bar{\varrho}|^2 = \bar{\varrho}_r^2 + \bar{\varrho}_i^2$$

mit $\bar{\varrho}_r = \Re(\bar{\varrho})$ und $\bar{\varrho}_i = \Im(\bar{\varrho})$ auch die Gleichung

$$\Im(v_k) = 0$$

eine Verknüpfung von $\bar{\varrho}_r$ und $\bar{\varrho}_i$ herstellt, genügt die Kenntnis einer dieser drei Größen zur Berechnung von v_k . Die Größe ϱ^* bezeichnet den komplexen effektiven spezifischen Widerstand der Einlagerungen in einer für das Imprägnationserz charakteristischen Umgebung. Sie ist aus Probenmessungen an Bohrkernen entweder direkt zugänglich oder aber für Dispersionen regellos gelagerter Ellipsoide aus Gleichung (18.3) unter Berücksichtigung von (16.2) berechenbar. Bezeichnen wir mit ϱ_r^* und ϱ_i^* Real- und Imaginärteil von ϱ^* , so folgt aus $\Im(v_k) = 0$

$$3 \varrho_i^* \varrho_2 (\varrho_2 - \bar{\varrho}_r) = \bar{\varrho}_i P$$

mit der Abkürzung

$$P = (\varrho_2 - \varrho_r^*) (\varrho_2 + 2 \varrho_r^*) - 2 \varrho_i^{*2}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung erhalten wir schließlich für den Volumenanteil der äquivalenten Kugeln:

$$v_k = \frac{(\varrho_2 - \bar{\varrho}_r) (P^2 + 9 \varrho_2^{*2} \varrho_2^2)}{3 \varrho_2 [(\varrho_2 - \varrho_r^*)^2 + \varrho_2^*] P}$$

Der in (16.2) für parallel ausgerichtete Rotationsellipsoide und der in (18.2) für regellos gelagerte Rotationsellipsoide angegebene Zusammenhang zwischen dem Volumenanteil der äquivalenten Kugeln und dem tatsächlichen Volumengehalt v_e polarisierbarer Materie, die in Form rotationsellipsoidischer Teilchen dispergiert ist, erlauben nun die Berechnung von v_e , wenn man über die Exzentrizität und Größe der Erzpartikel aus mikroskopischen Untersuchungen an Bohrkernen Kenntnis besitzt. Ist nun weiterhin auf Grund anderer geophysikalischer Verfahren die Gestalt der Lagerstätte bekannt, so ist es möglich, angenäherte Angaben über den Erzvorrat zu machen.

20. Berechnung der Polarisations susceptibilität

Der Begriff der Polarisations susceptibilität wurde erstmalig von BLEIL [3] definiert. Er versteht darunter das Verhältnis des Momentes pro Volumeneinheit P_p , das in einem Gleichstromfeld nur infolge der induzierten Polarisation hervorgerufen wird, zur erregenden Feldstärke E_0 .

$$c = -\frac{\bar{P}_p}{E_0}.$$

BUCHHEIM [5] berechnete diese Größe für eine Kugeldispersion geringen Volumenanteils und verallgemeinerte sie für eine Erregung mit Wechselstrom. Enthält die Kugeldispersion nur Kugeln vom Radius R , so gilt, wenn für die betreffende Frequenz und Teilchengröße $|\varrho^*| \ll \varrho_2$ ist, angenähert nach BUCHHEIM:

$$c(\omega) = 3 \frac{n_k R^2 I(i\omega)}{\varrho_2 c_p}. \quad (20.1)$$

Für eine Dispersion parallel ausgerichteter Rotationsellipsoide erhält man beispielsweise für ein parallel zu den Rotationsachsen gerichtetes Wechselfeld unter Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung:

$$c_a(\omega) = -\frac{v_e}{4\pi} \left\{ \frac{\varrho_2 - \varrho_a^*}{\left(N_a - \frac{v_e}{3}\right)\varrho_2 + \left(1 + \frac{v_e}{3} - N_a\right)\varrho_a^*} - \frac{\varrho_2 - \varrho_1 - \frac{r_0}{e_a}}{\left(N_a - \frac{v_e}{3}\right)\varrho_2 + \left(1 + \frac{v_e}{3} - N_a\right)\left(\varrho_1 + \frac{r_0}{e_a}\right)} \right\},$$

da die Polarisation $\bar{P}_{p,a}(\omega)$ aus \bar{P}_a (siehe (15.2)) mit $\varrho_1 = \varrho_a^*$ durch Subtraktion des Wertes von \bar{P}_a für $N(\tau) \equiv 0$ entsteht. Näherungsweise gilt für $|\varrho_{a,b}^*| \ll \varrho_2$

$$c_a(\omega) = \frac{v_e}{4\pi \left(N_a - \frac{v_e}{3}\right)^2 \varrho_2 e_a c_p} I(i\omega), \quad c_b(\omega) = \frac{v_e}{4\pi \left(N_b - \frac{v_e}{3}\right)^2 \varrho_2 e_b c_p} I(i\omega)$$

sowohl für die Dispersion gestreckter als auch für die Dispersion abgeplatteter Rotationsellipsoide, wenn für N_a und e_a bzw. N_b und e_b die jeweils geltenden Werte eingesetzt werden. Mit $N_a = N_b = \frac{1}{3}$ und $v_e = v_k$ erhält man speziell für Kugeldispersionen mit Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung an Stelle von (20.1):

$$c_k(\omega) = \frac{3 n_k R^2}{(1 - v_k)^2 \varrho_2 c_p} I(i\omega).$$

Für Dispersionen regellos gelagerter Ellipsoide erhalten wir auf gleichem Wege aus (18.2) und (18.3) für kleine Volumengehalte und $|\varrho_{a,b}^*| \ll \varrho_2$:

$$\bar{c}(\omega) = \frac{n_{ka} e_a^2 + 2 n_{kb} e_b^2}{(1 - v_k)^2 \varrho_2 c_p} I(i\omega).$$

21. Ein Vergleich der äquivalenten Kugelradien

Die Gegenüberstellung der Bilder 1 und 3, auf denen für das gestreckte (G) und das abgeplattete (A) Rotationsellipsoid das Verhältnis der äquivalenten Kugelradien zum Brennpunkt Abstand als Funktion der numerischen Exzentrizität dargestellt ist, zeigt, daß sich der äquivalente Kugelradius des gestreckten Rotationsellipsoids im Fall a (Feld parallel zur Rotationsachse) nur wenig von dem des abgeplatteten im Fall b unterscheidet und umgekehrt. Bildet man die Verhältnisse der genannten, nur wenig voneinander abweichenden Größen, so erhält man aus (6.4), (9.3), (13.5) und (13.9) mit (8.6), (8.7), (11.10) und (12.1) nach Einführung der numerischen Exzentrizität ε :

$$\frac{e_{bG}}{e_{aG}} = 2 \frac{(1 - \varepsilon^2) \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \varepsilon - \varepsilon}{(1 - 2\varepsilon^2) \operatorname{arc} \sin \varepsilon - \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

$$\frac{e_{aG}}{e_{bG}} = \frac{(1 + \varepsilon^2) \operatorname{Ar} \operatorname{Tg} \varepsilon - \varepsilon}{2 [\operatorname{arc} \sin \varepsilon - \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}]}.$$

Die Indizes G und A verweisen auf das gestreckte bzw. abgeplattete Rotationsellipsoid, die Indizes a und b wie schon in den vorangehenden Paragraphen auf die Fälle a und b. Beide Verhältnisse werden für verschwindende Exzentrizität gleich Eins, ihr Abhängigkeit von ε ist in Bild 10 graphisch dargestellt. Es gelten folgende Grenzwerte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{e_{bG}}{e_{aG}} = \frac{4}{\pi}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{e_{aG}}{e_{bG}} = \infty.$$

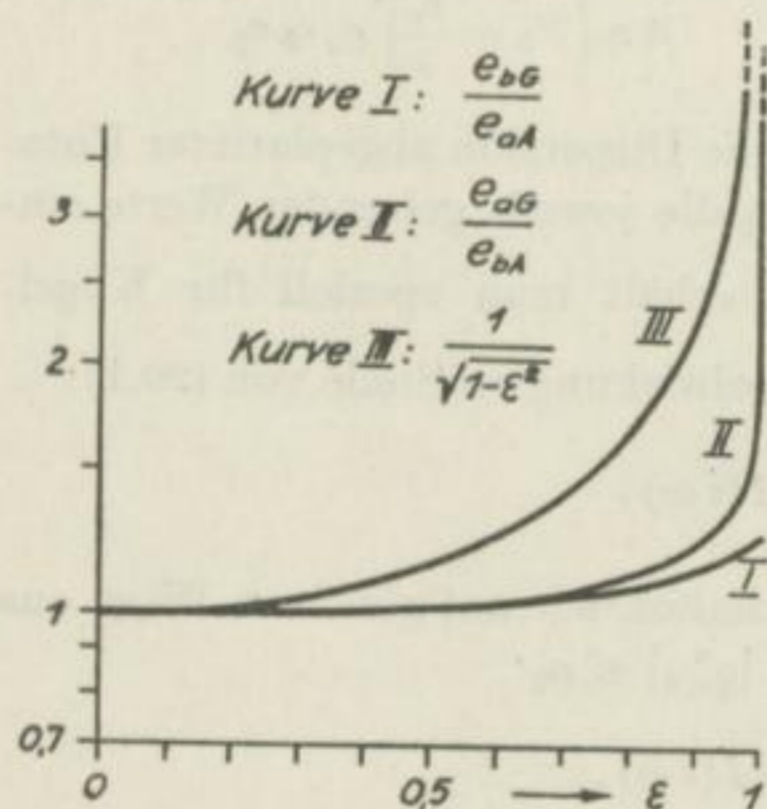


Bild 10. Die Verhältnisse der äquivalenten Kugelradien beim abgeplatteten (A) und gestreckten (G) Rotationsellipsoid als Funktion der numerischen Exzentrizität für die Fälle a und b

Solange $\varepsilon < 0,75$ ist, sind beide Ausdrücke noch $< 1,10$, sie haben sich also weniger als 10% geändert, während sich das durch die Kurve III dargestellte Verhältnis der beiden voneinander verschiedenen Achsen des jeweils betrachteten Rotationsellipsoids um ca. 50% geändert hat. Wie auch aus bereits angegebenen Resultaten gefolgert werden kann, verhalten sich gestreckte und abgeplattete Rotationsellipsoide in ähnlicher Weise im homogenen Feld bei Vorhandensein galvanisch induzierter Polarisation, wenn das erregende Außenfeld parallel der Richtung der großen oder der kleinen Achse ist. Man vergleiche hierzu die Bilder 2 und 4. Die Orientierung des Außenfeldes bezüglich der Rotationsachse der Rotationsellipsoide stellt also kein Unterscheidungsmerkmal zur Charakterisierung ähnlichen Verhaltens gestreckter und abgeplatteter Rotationsellipsoide im homogenen Feld dar.

22. Das Rotationsellipsoid im elektrischen Feld einer Punktquelle

In zwei Veröffentlichungen behandelt T. KOLBENHEYER [11] [12] das aus mehreren konfokalen Schichten verschiedener Leitfähigkeit zusammengesetzte abgeplattete und gestreckte Rotationsellipsoid sowohl im homogenen Feld als auch im Feld einer Punktquelle und diskutiert die Ergebnisse für tellurische Probleme.

Die Behandlung eines leitenden Rotationsellipsoids mit induzierter galvanischer Polarisation an seiner Oberfläche im Feld einer Punktquelle ist für die Fälle von Bedeutung, in denen sich ein großer massiver Erzkörper in der Nähe einer Stromzuführungselektrode befindet. Zur Lösung dieser Randwertaufgabe ist es erforderlich, das Potential einer Punktquelle, die sich außerhalb des Ellipsoids befinden soll (nur dieser Fall besitzt Bedeutung für die Prospektion mittels induzierter galvanischer Polarisation), nach den harmonischen Funktionen des betreffenden Rotationsellipsoids zu entwickeln, oder mit anderen Worten, es muß der reziproke Abstand zweier Punkte nach diesen Funktionen entwickelt werden. Diese Aufgabe löste bereits F. NEUMANN [17]. Auf die gleiche Weise kann natürlich auch der Fall behandelt werden, daß sich die Punktquelle im Innern des Rotationsellipsoids befindet.

Die elliptischen Koordinaten der Punktquelle, bezogen auf das jeweils betrachtete Rotationsellipsoid, seien ξ_1, η_1 und φ_1 . Dann lautet die Entwicklung des reziproken Abstandes von der Punktquelle für das gestreckte Rotationsellipsoid:

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n K_n^m(\xi_1, \eta_1) \mathfrak{P}_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1);$$

$$K_n^m(\xi_1, \eta_1) = \frac{2 - \delta_{m,0}}{c} (2n + 1) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 P_n^m(\eta_1) Q_n^m(\xi_1)$$

und für das abgeplattete Rotationsellipsoid:

$$\frac{1}{R} = i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n K_n^m(i\xi_1, \eta_1) \mathfrak{P}_n^m(i\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1)$$

für alle Punkte ξ, η, φ , die innerhalb des Rotationsellipsoids liegen, das durch ξ_1, η_1, φ_1 geht. Bedeutet q die Quellstärke der Punktquelle, dann lautet das Potential der Punktquelle

$$\psi_0 = \frac{q}{R}$$

mit $q = \mathfrak{S} \varrho_2 / 4\pi$ für den Vollraum (\mathfrak{S} ist die emittierte Stromstärke).

Das Potential im Innern des gestreckten Rotationsellipsoids betrage

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \mathfrak{P}_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1),$$

und im Außenraum möge sich folgendes Störpotential überlagern:

$$\psi_{St} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_n^m Q_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1).$$

Für das abgeplattete Rotationsellipsoid gelten entsprechende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{A}_n^m \mathfrak{P}_n^m(i\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1), \\ \psi_{St} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{B}_n^m Q_n^m(i\xi) P_n^m(\eta) \cos m(\varphi - \varphi_1), \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der Stromdichtennormalkomponenten auf der Ellipsoidoberfläche $\xi = \xi_2 = \text{const}$ ergibt sich für das gestreckte Rotationsellipsoid

$$\sigma_1 A_n^{m'} \mathfrak{P}_n^{m'}(\xi_2) = \sigma_2 [B_n^{m'} Q_n^{m'}(\xi_2) + q' K_n^m(\xi_1, \eta_1) \mathfrak{P}_n^{m'}(\xi_2)] \quad (22.1)$$

und für das abgeplattete:

$$\sigma_1 \bar{A}_n^{m'} \mathfrak{P}_n^{m'}(i\xi_2) = \sigma_2 [\bar{B}_n^{m'} Q_n^{m'}(i\xi_2) + i q' K_n^m(i\xi_1, \eta_1) \mathfrak{P}_n^{m'}(i\xi_2)]. \quad (22.2)$$

Weitere Verknüpfungen von $A_n^{m'}$ mit $B_n^{m'}$ bzw. $\bar{A}_n^{m'}$ mit $\bar{B}_n^{m'}$ liefert die Gleichung (2.1) für den Potentialsprung auf der Ellipsoidoberfläche. Um diese Randbedingungen für die gesamte Oberfläche erfüllen zu können, sind auch hier wie in den Kapiteln 2, 7 und 10 Reihenentwicklungen vorzunehmen:

$$\begin{aligned} [\xi_2^2 - \eta^2]^{-1/2} P_\nu^m(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,\nu}^m(\xi_2) P_n^m(\eta), \\ \left[\frac{1 + \xi_2^2}{\xi_2^2 + \eta^2} \right]^{1/2} P_\nu^m(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{n,\nu}^m(\xi_2) P_n^m(\eta). \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, ist:

$$\begin{aligned} C_{n,\nu}^0 &= C_{n,\nu}; & C_{n,\nu}^1 &= D_{n,\nu}; \\ \bar{C}_{n,\nu}^0 &= \bar{C}_{n,\nu}; & \bar{C}_{n,\nu}^1 &= \bar{D}_{n,\nu}. \end{aligned}$$

Die $C_{n,\nu}^m$ sind also Verallgemeinerungen der schon eingeführten Funktionen $C_{n,\nu}$ usw.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich für das gestreckte Rotationsellipsoid

$$\begin{aligned} [A_n^{m'} - q' K_n^m(\xi_1, \eta_1)] \mathfrak{P}_n^{m'}(\xi_2) - B_n^{m'} Q_n^m(\xi_2) \\ = -g(\omega) \sqrt{\xi_2^2 - 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{n,\nu}^m(\xi_2) A_n^{m'} \mathfrak{P}_\nu^{m'}(\xi_2) \end{aligned} \quad (22.3)$$

und für das abgeplattete Rotationsellipsoid:

$$\begin{aligned} [\bar{A}_n^{m'} - q' K_n^m(i \xi_1, \eta_1)] \mathfrak{P}_n^m(i \xi_2) - \bar{B}_n^{m'} Q_n^m(i \xi_2) \\ = -g(\omega) \sum_{v=0}^{\infty} \bar{C}_{n,v}^m(\xi_2) \bar{A}_v^{m'} \mathfrak{P}_v^{m'}(i \xi_2); \end{aligned} \quad (22.4)$$

ferner ist:

$$V_0 = A_0^0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}_0^0.$$

Durch die Gleichungssysteme (22.1) und (22.2) bzw. (22.3) und (22.4) sind die in den Potentialen auftretenden Konstanten für das gestreckte bzw. für das abgeplattete Rotationsellipsoid bestimmt.

Zusammenfassung

Das elektrische Feld im Innern eines Rotationsellipsoids, das sich in einem homogenen Außenfeld befindet und auf dessen Oberfläche galvanisch induzierte Polarisation auftritt, ist im Gegensatz zum Innenfeld einer Kugel und eines galvanisch nicht polarisierbaren Ellipsoids nicht homogen. Wie die numerische Berechnung unter Verwendung in der Literatur angegebener Näherungswerte für die die Polarisationserscheinungen beschreibenden Materialgrößen zeigt, sind die inhomogenen Feldanteile gegenüber dem homogenen Innenfeld vernachlässigbar. Es läßt sich für das Rotationsellipsoid ein äquivalenter Kugelradius angeben, mit dessen Hilfe das Verhalten des Ellipsoids auf das einer Kugel zurückgeführt werden kann. Unter Berücksichtigung der Dipolwechselwirkung wird der spezifische Widerstand einer Dispersion parallel ausgerichteter Rotationsellipsoide in einem Medium anderer Leitfähigkeit berechnet und für Dispersionen regellos gelagerter Ellipsoide verallgemeinert. Das Verhalten einer Dispersion von Rotationsellipsoiden mit galvanisch induzierter Polarisation läßt sich auf das einer Dispersion von Kugeln gleichen Materials zurückführen, deren Radius gleich dem äquivalenten Kugelradius ist, wenn die Ellipsoide parallel ausgerichtet sind. Bei regelloser Lagerung weicht dieser Kugelradius vom äquivalenten Kugelradius ab. Dabei tritt erst bei sehr abgeplatteten oder sehr gestreckten Rotationsellipsoiden ein wesentlicher Unterschied zwischen den Volumenanteilen der Rotationsellipsoide und denen der Kugeln auf, für die die Dispersionen den gleichen komplexen spezifischen Widerstand besitzen.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. BUCHHEIM, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für das fördernde Interesse, das er ihr jederzeit entgegengebracht hat.

Für ihre Unterstützung bei numerischen Rechnungen danke ich den Herren cand. geophys. K. BISCHOFF und cand. geophys. H. NEUNHÖFER.

Literatur

- [1] ANDERS, W.: Versuche zur induzierten galvanischen Polarisation an Gesteinsmodellen mit kugelförmiger aktiver Phase. Diplomarbeit 1957. Institut f. theoretische Physik u. Geophysik, Bergakademie Freiberg.
- [2] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Band 1. Leipzig-Berlin 1941: Teubner.
- [3] BLEIL, D. F.: Induced polarisation: A method of geophysical prospecting. *Geophysics* 18 (1953) S. 636—661.
- [4] BUCHHEIM, W.: Theoretische Betrachtungen und Versuche zur Unterscheidung elektrolytischer von metallischer Stromleitung im Boden beim elektrischen Schürfen auf Sulfiderze. *Geologie* 3 (1954) S. 1009—1035.
- [5] BUCHHEIM, W.: Zur Theorie der induzierten galvanischen Polarisation elektrisch aktiver Imprägnationserze. *Freib. Forsch.-H. C 28* (1957) S. 5—14.
- [6] BUCHHEIM, W., und MALMQVIST, D.: Anwendung der Methode der induzierten galvanischen Polarisation an Sulfiderzvorkommen des Skelleftebezirkes in Nordschweden. *Geologie* 7 (1958) S. 3—13.
- [7] DIRICHLET, L.: Sur moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène. *Crelles Journ. f. reine u. angew. Mathem.* XXXII (1846) S. 80—84.
- [8] GAUSS, C. F.: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam . . .* (1812). Carl Friedrich Gauß Werke III. Band, S. 123—162.
- [9] JOOS, G.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Leipzig 1956 (9. Auflage) S. 404.
- [10] KNOPP, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. Berlin u. Heidelberg 1947: Springer.
- [11] KOLBENHEYER, T.: Riešenie okrajovej úlohy odprovej geoelektriky pre sploštený rotačný elipsoid. *Geofyzikální Sborník* 1955, S. 255—296.
- [12] KOLBENHEYER, T.: On the boundary problem of geoelectricity for a homogeneously laminated prolate spheroid. *Geofyzikální Sborník* 1956, S. 653—677.
- [13] KRAJEW, A. P.: *Grundlagen der Geoelektrik*. Berlin 1957: VEB Verlag Technik.
- [14] LENSE, J.: *Kugelfunktionen*. Leipzig 1950: Akad. Verlagsges.
- [15] MAGNUS, W., und OBERHETTINGER, F.: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948: Springer.
- [16] MAXWELL, J. C.: *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus*. Deutsche Ausgabe von B. Weinstein, Berlin 1883.
- [17] NEUMANN, F.: Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung. *Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik* XXXVII (1848) S. 21—50.
- [18] SCHLUMBERGER, C.: *Étude sur la prospection électrique du sous-sol*. Paris 1930: Gauthier-Villars.
- [19] SCHNEIDER, M.: Bestimmung der Polarisationskapazität von galvanisch aktiven Phasen am Gesteinsmodell. Diplomarbeit 1956. Institut f. theoretische Physik u. Geophysik, Bergakademie Freiberg.
- [20] SCHRAGE, I.: Experimentelle Untersuchungen zur induzierten galvanischen Polarisation an Sulfiderzen und graphitführenden Gesteinen. *Freib. Forsch.-H. C 28* (1957) S. 15—67.
- [21] WHITTAKER, E. T., und WATSON, G. N.: *A course of modern analysis*. Cambridge 1952: University Press.

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

C 28

GEOPHYSIK

WOLFGANG BUCHHEIM

Zur Theorie der induzierten galvanischen Polarisation elektrisch aktiver Imprägnationserze

INGRID SCHRAGE

Experimentelle Untersuchungen zur induzierten galvanischen Polarisation an Sulfiderzen und graphitführenden Gesteinen

Format 17×24 cm — 68 Seiten — 51 Bilder — 2 Tabellen — DM 6,50

In der elektrischen Prospektierung von Sulfiderzen ist die Methode der sogenannten „induzierten“ Polarisation, die schon C. SCHLUMBERGER vorgeschlagen hatte, die aber bisher nur mit wenig Erfolg angewandt werden konnte, von BLEIL und BUCHHEIM unabhängig voneinander erneut aufgegriffen worden. Es bedarf aber anscheinend, wie es bei der bekannten Eigenpotentialmethode einst der Fall war, erst einer eingehenden theoretischen und laborphysikalischen Klärung ihrer physikochemischen Grundlagen. Der Beitrag von W. BUCHHEIM behandelt die theoretische Seite für den Fall einer kugelförmig eingesprengten elektrisch aktiven Mineralphase im Gestein sowohl bei Erregung durch Wechselstrom als auch für Gleichstromimpulse. Der Beitrag von I. SCHRAGE stellt eine umfassende experimentelle Studie zum Verhalten galvanisch polarisierbarer Erze bei Wechselstrom im Frequenzbereich von 10 bis 1000 Hz im Hinblick auf das Problem der Unterscheidung dieser Erze von gleichgutleitenden Elektrolyten und graphitführenden Schiefen dar.

A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

D 21

KULTUR UND TECHNIK

HERBERT CLAUSS und SIEGFRIED KUBE

Freier Berg und vermessenenes Erbe

Untersuchungen zur Frühgeschichte des Freiburger Bergbaus
und zur Entwicklung des Erbbereitens

Format 17×24 cm — 214 Seiten — 11 Bilder — 1 Tabelle — brosch. 17,50 DM —
Halbleinen 19,50 DM

Freier Berg meint den Raum, in dem der osterzgebirgische Bergmann gleich anfangs arbeitet und lebt. Auf diesem liber mons entwickelt sich das bäuerliche Christiansdorf zur Sächsstadt, in diesem Bereich wird großzügig die Oberstadt angelegt, die den Namen Vriberch übernimmt. In jenem freien Berg darf mehr als eine bloße Vorstufe der Stadtentwicklung gesehen werden, weil in ihm die Keime des territorialen Bergwesens liegen, insbesondere des territorialen Bergrechts und der territorialen Bergbauadministration.

Vermessenenes Erbe erscheint als Rechtsform, in der landesherrliche und städtische Interessen der bergbautreibenden Welt sich begegnen. Wenn auf dem freien Berg, ehe die Stadt ihre eigene Rechtssphäre zu entfalten begann, sich neben der Schürffreiheit auch bereits Rechtsgrundsätze für das Vermessen der Grubenfelder entwickelt hatten, so lernen wir im Erbvermessen eine zeremoniell ausgestattete Sonderform kennen, bei der der Freiburger Rat mit dem Bürgermeister an der Spitze neben dem landesherrlichen Bergmeister hervorragend in Erscheinung tritt. Von Freiberg her reiten sie nach der zu vermessenden Grube, ganz gleich, wo sie im markgräflichen Territorium liegen mag.

Die hier von CLAUSS und KUBE vorgelegten Arbeiten werden über den engen Kreis der Stadtgeschichtsforschung hinaus auch denen empfohlen, die sich für Landesgeschichte, allgemeine Stadtgeschichte, Kulturgeschichte des Bergbaus und bergmännische Volkskunde interessieren.

A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N