

# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

C 180 Geophysik

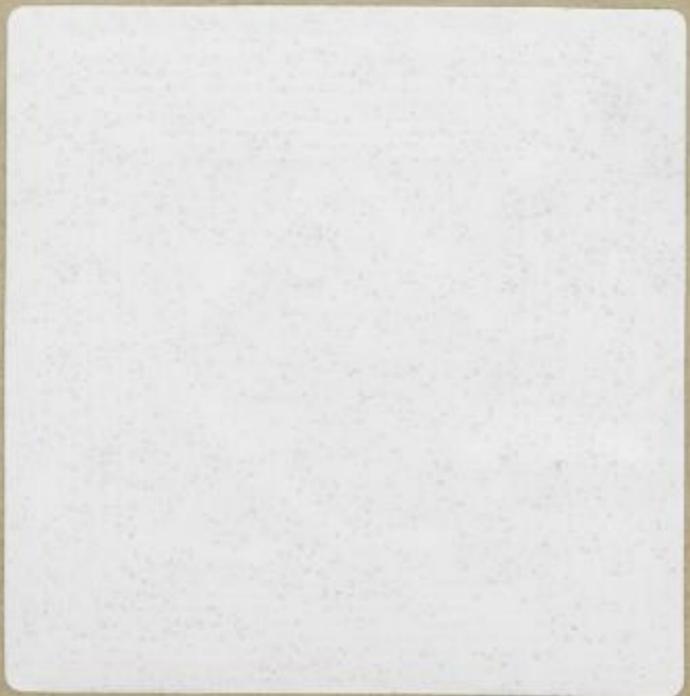
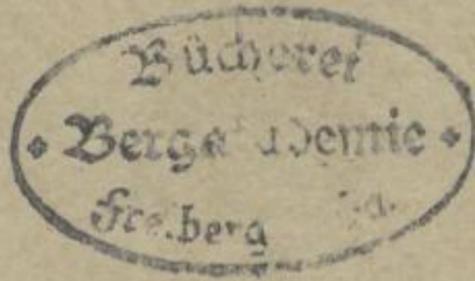
1965

*Rolf Rösler*

**Ein neues Auswerteverfahren  
für radiometrische Bohrlochmessungen  
unter besonderer Berücksichtigung  
der  $K_2O$ -Bestimmung aus Messungen  
der natürlichen Gammastrahlung in Bohrlöchern**

FFH  
C 180  
b

XVI 1142 b



TU BERGAKADEMIE FREIBERG  
TU BERGAKADEMIE FREIBERG



XVI 1142 . C180B



FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE C 180



# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der Bergakademie Freiberg

C 180

**GEOPHYSIK**

**Ein neues Auswerteverfahren  
für radiometrische Bohrlochmessungen  
unter besonderer Berücksichtigung  
der  $K_2O$ -Bestimmung aus Messungen  
der natürlichen Gammastrahlung  
in Bohrlöchern**

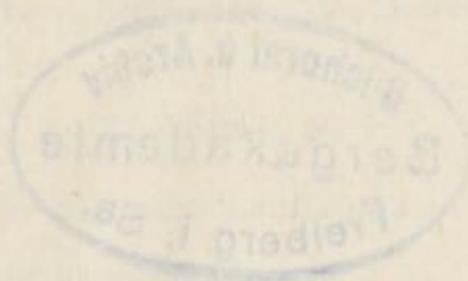
Von

*Rolf Rösler*

Mit 46 Bilder und 20 Tabellen



VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie · Leipzig 1965



Von der Bergakademie Freiberg genehmigte Habilitationsschrift

Referent: Prof. Dr. phil. habil. *W. Buchheim*

Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. *W. Burkhardt*

Prof. Dr. rer. nat. habil. *F. Rühls*

Die vorliegende Arbeit ist aus der Bearbeitung einer Teilaufgabe zum Forschungsauftrag Nr. 0106012—12/6 der Zentralen Forschungsstelle für die Kaliindustrie (Sondershausen) entstanden. Der Verfasser dankt der Forschungsstelle für die dabei gewährte fördernde Unterstützung.

Besonderer Dank gebührt meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *W. Buchheim* für Diskussionen und Anregungen zu dieser Arbeit. Den Herrn Prof. Dr. *W. Burkhardt* und Prof. Dr. *F. Rühls* danke ich für wertvolle Hinweise sowie Herrn Dr. *M. Uhlmann* (Sondershausen) und Herrn Dipl.-Geophys. *Tangelst* (VEB Bohrlochmessungen, Stützpunkt Leipzig) für die Zurverfügungstellung von Meßergebnissen.



XU 1142 (C 180)  
B

Manuskriptannahme: Bergakademie Freiberg, Arbeitsgruppe Publikationen

92 Freiberg

August-Bebel-Str. 5

„Freiberger Forschungshefte“, Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften. Herausgeber: Der Rektor der Bergakademie Freiberg, Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Wrana. — Verlag: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 7031 Leipzig 31, Karl-Heine-Str. 27 (Fernruf 44441). — Die Freiberger Forschungshefte erscheinen in zwangloser Folge in den Reihen A, B, C und D. Ausführliches Verzeichnis aller lieferbaren Hefte von der Bergakademie Freiberg oder dem VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie. — Vertrieb: In der Deutschen Demokratischen Republik durch den Buchhandel; in der Deutschen Bundesrepublik und Westberlin durch den Buchhandel (Auslieferung KUNST UND WISSEN, Erich Bieber, Stuttgart 5, Wilhelmstr. 4—6); in Österreich durch den Globus-Buchvertrieb, Wien I, Salzgries 16; im übrigen Ausland durch eine Importbuchhandlung, den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH, 701 Leipzig 1, Postschließfach 160, oder den Verlag.

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza. VLN 152—915/103/65. — Printed in Germany. — Alle Rechte vorbehalten. — ES 18 E 1 — EVP 23,25 MDN

## INHALT

1. Einführung. Mathematische Grundlagen . . . . .	7
1.1. Einleitung . . . . .	7
1.2. Problemstellung . . . . .	17
1.3. Die Gammastrahlung geschichteter Körper . . . . .	30
1.4. Die Berechnung der von einem Zählrohr registrierten $\gamma$ -Strahlung . . . . .	32
2. Aufstellung des Auswerteverfahrens . . . . .	45
2.1. Die umgekehrte Aufgabe — Bestimmung der Materialverteilung aus dem $\gamma$ -Log) . . . . .	45
2.2. Numerische Berechnung der Funktionen $\Theta, \Psi$ . . . . .	50
2.3. Die Berücksichtigung des endlichen Bohrlochradius . . . . .	61
2.4. Die Grenze des Auflösungsvermögens . . . . .	67
2.5. Numerische Berechnung der Koeffizienten der reziproken Matrizen . . . . .	70
3. Anwendungen auf praktische Messungen . . . . .	75
3.1. Die Eichung . . . . .	75
3.2. Untersuchung einer beliebigen Orientierung einer Bohrung zu den Schichtgrenzen . . . . .	79
3.3. Die Größe des Einzugsgebietes der radioaktiven Strahlung . . . . .	80
3.4. Beispiele und Fehlerbetrachtungen . . . . .	81
3.5. Weitere Beispiele im Vergleich zu chemischen Analysen der Bohrkerne . . . . .	88
3.6. Schlußfolgerungen . . . . .	94
4. Zusammenfassung . . . . .	97
5. Nachtrag . . . . .	99

6. Anhänge . . . . .	101
6.1. Anhang A: Weitere Bemerkungen zur Funktion $E_p(x)$ , Zusammenhang mit anderen Funktionen . . . . .	101
6.2. Anhang B: Ableitung der Formel (173) mittels der $\beta$ -Funktion . . . . .	103
6.3. Anhang C: Allgemeine Lösung eines speziellen linearen unendlichen Gleichungssystems . . . . .	104
6.4. Anhang D: Zur Berechnung der Kehrmatrix einer unendlichen Matrix mit reellen Koeffizienten, Teil I . . . . .	108
6.5. Anhang E: Zur Berechnung der Kehrmatrix einer unendlichen Matrix mit reellen Koeffizienten, Teil II . . . . .	114
Literatur . . . . .	116

## 1. Einführung. Mathematische Grundlagen

### 1.1. Einleitung

#### 1.1.1. Vorbemerkung und Aufgabenstellung

Es ist die Aufgabe der verschiedenen geophysikalischen Bohrlochmeßverfahren, nähere Angaben über die Eigenschaften stofflicher und physikalischer Art in der Umgebung des Bohrloches zu erhalten. Man verfolgt damit zugleich zwei Ziele, einmal nämlich das kostspielige und zeitraubende Kernbohren zu umgehen und zum anderen erreicht man auf diese Weise ein größeres „Einzugsgebiet“ für die physikalische Feldgröße, die im Bohrloch durch die Meßanordnung erfaßt wird, im Vergleich zur Untersuchung des Kernmaterials. Damit muß man natürlich einen Kompromiß eingehen, denn durch jedes dieser Verfahren wird nur eine gewisse Teilmannigfaltigkeit der physikalischen Eigenschaften der Bohrlochumgebung erfaßt. Die spezielle Aufgabe der Bohrlochradiometrie unter Verwendung der natürlichen  $\gamma$ -Strahlung ist die Festlegung radioaktiver Schichten und ihre Zuordnung zu bestimmten geologischen Horizonten. Dabei interessieren die Mächtigkeit der radioaktiven Schichten und ihr Gehalt an radioaktiver Materie, wobei eine quantitative Interpretation der beobachteten Strahlungsintensität zur Vorratsberechnung angestrebt wird. Die Interpretation der in den Bohrlöchern gemessenen  $\gamma$ -Profile ( $\gamma$ -Log) bietet jedoch wegen des komplizierten funktionellen Zusammenhanges zwischen den Meßwerten und den genannten interessierenden Größen gewisse Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde existieren verschiedene Ansätze zur Lösung dieser Aufgabe, die zu verschiedenen Auswerteverfahren geführt haben. Für diese ist charakteristisch, daß sie neben der Berücksichtigung der exakten mathematisch-physikalischen Zusammenhänge auch mehr oder weniger empirische Züge besitzen.

Als Vorgänger der radiometrischen Bohrlochmessungen kann man die Untersuchung der radioaktiven Strahlung von Probenreihen aus Bohrungen betrachten, wie sie von *Büchner* (1913) an einem Bohrloch in Holländisch-Limburg, *Eve* und *McIntosh* (1910) in Ontario, *Ambrohn* (1921, 1926) und anderen ausgeführt worden sind. Die ersten echten radiometrischen Bohrlochmessungen wurden in den dreißiger Jahren ausgeführt. Als Detektoren dienten Ionisationskammern. Nachdem sich transportable Zählrohrapparaturen bei Messungen im Gelände bewährten (*Suckstorff, A.*, 1935; *Lutz, W.*, 1940), wurde 1939 erstmalig von *Howell* und *Frosch* über  $\gamma$ -Bohrlochmessungen mit Geiger-Müller-Zählrohren in den USA berichtet. Labormessungen an Gesteinsproben, die speziell zur Auswertung von Bohrlochmessungen dienten, sowie den Aufbau

eines künstlichen Bohrloches für Vergleichsmessungen mit Bohrlochmeßapparaturen beschreibt *Pontecorvo* (1942). Für radiometrische Bohrlochmessungen sind auch heute noch Zählrohre als Detektoren in Gebrauch, jedoch setzen sich seit etwa einem Jahrzehnt mehr und mehr Szintillationsdetektoren durch, die neben ihrer Kleinheit den Vorteil eines höheren Wirkungsgrades besitzen und die Möglichkeit zu spektrometrischen Messungen bieten (*Brannon, Osaba, 1956; Comstock, 1956; Shaller, 1955*).

Bereits bei den ersten Bohrlochmessungen der Gammastrahlung in Bohrungen im Kalibergbau wurde versucht, die gemessenen Impulsraten mit dem aus chemischen Analysen bestimmten  $K_2O$ -Gehalt des Bohrmehles bzw. der Bohrkörner zu vergleichen. Dabei ergaben sich Unterschiede, die eine Zuordnung der Impulsrate zu dem auf diese Weise bestimmten  $K_2O$ -Gehalt nicht immer erlaubten. Zeigt einerseits die normale Lagerung, z. B. eines Hartsalzlagere im Werragebiet, eine gleichmäßige Schichtung, so ergaben andererseits die chemischen Analysen punktförmig entnommener Proben zum Teil einen recht unregelmäßigen verteilten  $K_2O$ -Gehalt. Darüber berichtet *Winter* (1960) und schließt daraus, daß diese Schwankungen die direkte radiometrische Messung des  $K_2O$ -Gehaltes im Anstehenden verhindern (weitere Ausführungen hierüber siehe Abschnitt 3.6.). Ein direktes Verfahren zur Ermittlung des  $K_2O$ -Gehaltes aus Bohrlochmessungen gibt *Wendt* (1955) an. Er schlägt die Bestimmung der  $\beta$ -Strahlung durch Differenzbildung aus  $\beta + \gamma$  und  $\gamma$ -Messungen vor, jedoch hat diese Methode den Nachteil eines zu großen Zeitaufwandes gegenüber der Hackprobe (*Winter, 1960*).

Wie bereits erwähnt, gibt es verschiedene Methoden, mit denen versucht worden ist, aus der  $\gamma$ -Anomalie auf die  $\gamma$ -Aktivität in einem Störkörper zu schließen. Zu diesem Zwecke werden Annäherungen der Gestalt der  $\gamma$ -Anomalie durch die Gauß'sche Fehlerkurve vorgeschlagen, was besonders bei aero-radiometrischen Aufnahmen zweckmäßig ist (*Jakowlew, 1958*). Bei Messungen in horizontalen Salzbohrungen konnten *Czubek, Dziunikowski, u. a.* (1958) Kalisalze durch  $\gamma$ -Messungen nachweisen und KCl-Salze von wasserhaltigen Kalisalzen durch die Verwendung der  $n$ - $\gamma$ -Methode unterscheiden. Über ähnliche Messungen berichten die gleichen Verfasser (1960), wobei auch das Problem der Schätzung der Mächtigkeit dünner radioaktiver Schichten behandelt wird. *Czubek und Zuber* (1959) berechnen die Gammastrahlenintensität, die von einer radioaktiven Schicht ausgestrahlt wird und von punktförmigen Detektoren und solchen mit der effektiven Länge  $L$  empfangen werden. Sie geben zugleich Korrekturfaktoren an, durch die der Einfluß der Absorption in der Bohrlochspülung bei zentrischer und exzentrischer Lage der Meßanordnung im Bohrloch berücksichtigt werden. Dabei zeigt es sich, daß die Absorption in der Spülung eine Empfindlichkeitsverringerung um einen gewissen Faktor bewirkt. Ähnliche Probleme behandelt *Czubek* (1961). Dabei wird die Intensität der Gammastrahlung in Termen gewisser tabellierter Funktionen dargestellt. In beiden Arbeiten wird nur die ungestreute (primäre)  $\gamma$ -Strahlung untersucht. Korrekturen für Absorption und Radioaktivität der Spülung bearbeitet *Czubek* (1962) theoretisch und experimentell. Speziellere Interpretationsfragen werden von

*Czubek* (1962 b) bei der Untersuchung der Genauigkeit der Schichtdickenbestimmung beim  $\gamma$ -Log behandelt. Es wird bewiesen, daß die Methode der Schichtdickenbestimmung aus der Halbwertsbreite der  $\gamma$ -Anomalie unabhängig davon ist, ob das  $\gamma$ -Log punktweise oder mit einer durch das Bohrloch bewegten Detektoranordnung aufgenommen worden ist, wenn nur die Geschwindigkeit konstant gehalten wird. Die Halbwertsbreite, die gleich der Mächtigkeit der radioaktiven Schicht gesetzt wird, bleibt nahezu unverändert, es ergibt sich lediglich eine gewisse Verschiebung der Lage dieser Schicht in Richtung des Vorschubs der Detektoranordnung. Diese Abweichungen werden untersucht. Der Gegenstand einer anderen Arbeit des gleichen Verfassers (*Czubek*; 1960) ist ein Interpretationsverfahren für  $\gamma$ -Logs in der Prospektion auf Kalisalze und Uranerz, bei der die radioaktive Schicht als „lineare Quelle“ aufgefaßt wird, von der nur das Produkt  $Q = q H$  bestimmt wird, wobei  $q$  die Durchschnittskonzentration und  $H$  die Mächtigkeit ist. Allgemeine integrale Zusammenhänge zwischen dem Gamma-Feld punktförmiger, flächenhafter und räumlicher Strahlungsquellen werden von *Kogan* (1958) behandelt. Bei der Bearbeitung der Theorie der  $\gamma$ -Bohrlochmessungen in geschichteten Medien untersucht *Voskobojnikov* (1960) den Einfluß der Dichteunregelmäßigkeiten. Er schlägt eine Methode vor, mit deren Hilfe das gegebene Medium in ein äquivalentes Medium mit konstanter Dichte umgewandelt werden kann. Auf diesem Wege kann der lineare Gehalt  $Q$  der radioaktiven Schicht in einem Medium veränderlicher Dichte mit Hilfe des Flächeninhaltes, den die  $\gamma$ -Anomalie auf dem  $\gamma$ -Log bildet, berechnet werden. Zur Bestimmung des mittleren Gehaltes radioaktiver Substanzen in größeren Flözabschnitten wird in der Praxis häufig der soeben genannte Flächeninhalt benutzt. Dieser wird durch Planimetrieren bestimmt und auf Grund von Erfahrungswerten einem gewissen mittleren Gehalt zugeordnet. Die empirische Verknüpfung von Flächeninhalt und mittlerem Gehalt wird dabei am vorteilhaftesten von einer größeren Anzahl von Messungen durchgeführt, die in Bohrungen ausgeführt worden sind, bei denen der mittlere Gehalt der radioaktiven Substanz durch chemische Analysen des Kernmaterials oder auf anderem Wege bestimmt werden konnte (*Drouillard, Dodd*, 1958; *Scott, Dodd*, 1961; *Lehnert, Rothe*, 1962). *Czubek* (1961) zeigte, daß der Flächeninhalt, den die  $\gamma$ -Anomalie einschließt, bei bewegter und bei ruhender Sonde gleich ist, vorausgesetzt, daß die Sondengeschwindigkeit während der Messung konstant war. Durch den Vergleich gemessener und theoretisch berechneter  $\gamma$ -Anomalien zeigt *Giret* (1962) für die Aeroradiometrie, daß bei einer Flughöhe von 75 m der verfälschende Einfluß der Sondengeschwindigkeit  $v$  und der Zeitkonstante  $T$  der Registrierapparatur dann zu vernachlässigen ist, wenn  $v T < 75$  m ist. Für die Verschiebung der Teufenwerte, für die die Anomalie den halben Maximalwert besitzt, gegenüber den wahren Schichtgrenzen in Abhängigkeit von der Schichtmächtigkeit, geben *Lehnert* und *Rothe* (1962) Kurvenscharen mit  $v T$  als Parameter an. Diese Interpretationsmethoden sind, soweit sie nicht überhaupt schon nur einen mittleren Gehalt für ein größeres Teufenintervall zu bestimmen erlauben, vorzugsweise zur Auswertung einzelner Anomalien geeignet, die einer Schicht zugeordnet werden können.

Treten mehrere radioaktive Schichten in geringem Abstand oder solche mit unterschiedlichem Gehalt  $q$  benachbart auf, so erfordert die Bestimmung der Schichtmächtigkeit aus der Halbwertsbreite der Anomalie die Trennung der einzelnen Anomalien voneinander. Hierdurch kann das Interpretationsverfahren leicht durch subjektive Einflüsse belastet werden. Gerade die Unterscheidung dicht benachbarter Schichten ist aber bei gewissen Auswerteproblemen von besonderem Interesse. Diese spezielle Aufgabenstellung liegt bei der Auswertung von  $\gamma$ -Logs aus Erkundungsbohrungen in der Kaliindustrie vor, aus der heraus auch die vorliegende Arbeit angeregt wurde. Hier tritt oft Kernverlust auf, so daß zum Nachweis der Kaliflöze die  $\gamma$ -Strahlenmethode herangezogen wird. Dabei wird bei der Interpretation nicht nur auf den mittleren  $K_2O$ -Gehalt Wert gelegt, sondern auch auf feinere Einzelheiten der  $K_2O$ -Verteilung innerhalb der Flöze. Da diese Verteilung für die verschiedenen Flöze des Kalilagers charakteristisch ist, dienen sie zur Identifizierung der Kaliflöze.

### 1.1.2. Die radioaktive Strahlung des Kaliums

Das natürlich vorkommende Kalium ist ein Gemisch der drei Isotope  $K^{39}$ ,  $K^{40}$  und  $K^{41}$ , von denen das zweitgenannte nicht stabil ist. Die Häufigkeiten der drei Isotope betragen nach *White, Collins* (1956):

$K^{39}$ :	93,23	$\pm 0,05\%$
$K^{40}$ :	0,0118	$\pm 0,0002\%$
$K^{41}$ :	6,76	$\pm 0,05\%$

$K^{40}$  besitzt eine wahrscheinlichste Halbwertszeit von (*Kunz, Schintlmeister, 1958*)  $t = (1,25 \pm 0,15) 10^{09}$ ,  $a = (3,94 \pm 0,46) 10^{16}$  s. Der Zerfall erfolgt im wesentlichen unter  $\beta^-$ -Emission (1,33 MeV) in  $Ca^{40}$  und unter Elektroneneinfang aus der K-Schale mit nachfolgender  $\gamma$ -Emission (1,46 MeV) in  $Ar^{40}$ . Das Verhältnis von K-Einfang zu  $\beta^-$ -Zerfall beträgt etwa 0,123; folglich sind rund 11%  $\gamma$ -Zerfälle und rund 89%  $\beta^-$ -Zerfälle. Aus diesen Angaben ergibt sich, daß 1 g natürliches Kalium pro Sekunde  $28,5 \pm 3,4$   $\beta^-$ -Teilchen und  $3,5 \pm 0,4$   $\gamma$ -Quanten emittiert. Diese Daten des Kaliums erlauben es, an Salzen unbekannter Zusammensetzung den Kaliumgehalt zu bestimmen, in Bohrlöchern mittels radiometrischer Detektoranordnungen kaliumhaltige Schichten nachzuweisen und Produktionsabläufe in der Kaliförderung und -gewinnung zu überwachen (*Uhlmann, 1960, 1963*). Weiterhin ist die Kenntnis des Zerfallschemas wichtig für die Altersbestimmung von Gesteinen und Mineralien aus dem  $Ar^{40}/K^{40}$ -Verhältnis.

Die Atommassen — bezogen auf  $O^{16}$  — betragen nach *Kunz, Schintlmeister* (1958):

$^{18}Ar^{40}$	39,9752
$^{19}K^{40}$	39,9767
$^{20}Ca^{40}$	39,9753

Außer K-Einfang mit  $\gamma$ -Emission und  $\beta^-$ -Zerfall tritt noch zu einem sehr geringen Prozentsatz Positron-Zerfall ( $\beta^+$ -Zerfall) auf. *Bell und Cassidy* (1950)

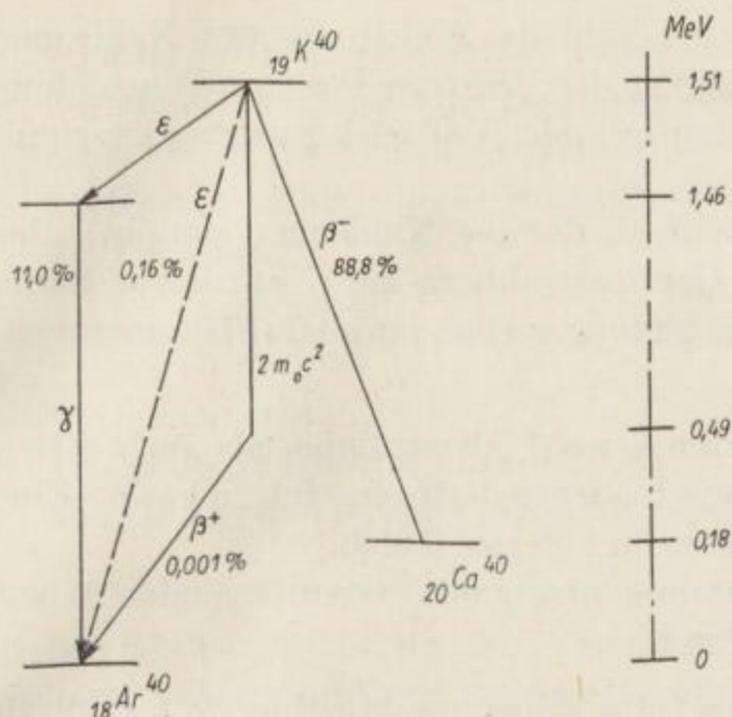


Bild 1. Zerfallschema für  $K^{40}$   
(nach Engelkemeir u. a., 1962)

fanden, daß weniger als 0,002% aller Zerfälle des  $K^{40}$   $\beta^+$ -Zerfälle sein können. *Tilley* und *Madansky* (1959) gaben 0,0013% als obere Grenze an. In einer neueren Untersuchung von *Engelkemeir*, *Flynn* und *Glendenin* (1962) wurde das Verhältnis von  $\beta^+$ - zu  $\beta^-$ -Zerfall zu  $(1,12 \pm 0,14) \times 10^{-5}$  ermittelt (Bild 1). Daraus folgt, daß  $(1,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}\%$  aller Zerfälle des  $K^{40}$  unter Positron-Emission (0,49 MeV) erfolgen. Der Nachweis des Positron-Zerfalls bringt einen wichtigen Hinweis auf die mögliche Existenz eines Elektronen-Einfangprozesses direkt zum Grundzustand des  $Ar^{40}$ . Auf Grund theoretischer Untersuchungen (a. a. O., 1962) sollte dieser Eingangsprozeß 155mal häufiger als der Positron-Zerfall auftreten. Das bedeutet, daß 0,16% aller Zerfälle als Elektronen-Einfangprozesse mit direktem Übergang zum Grundzustand des  $Ar^{40}$  erfolgen. Für die hier vorliegenden Untersuchungen sind diese Zerfallszweige ohne und für Altersbestimmungen nach der K-Ar-Methode von geringer Bedeutung.

### 1.1.3. Die Wechselwirkungsprozesse mit der Materie

Beim Durchgang von  $\gamma$ -Quanten durch Materie treten eine Reihe von Wechselwirkungsprozessen auf. Die Betrachtung dieser Prozesse ist notwendig für das Verständnis der Strahlenabschirmung. Die Wechselwirkungsprozesse können in die folgenden vier Gruppen eingestellt werden (*U. Fano*, 1953):

- a) Wechselwirkung mit den Atomelektronen. Das einfallende  $\gamma$ -Quant bewirkt eine oszillierende elektrische Kraft auf die Ladung des Elektrons und eine magnetische auf den Spin des Elektrons. Das Elektron wirkt wie ein freies Elementarteilchen zurück.
- b) Wechselwirkung mit den Kernteilchen. Das elektromagnetische Feld der  $\gamma$ -Strahlung bewirkt eine oszillierende Kraft auf die Protonenladung und eine magnetische auf den Spin der Protonen und Neutronen. Jedes Nukleon wirkt als Elementarteilchen zurück.

- c) Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld, das Elektronen und Nukleonen umgibt. Diese Wechselwirkung ist mit der Elektron-Positron-Paarbildung und mit elastischer Streuung (Potential- oder Delbrück-Streuung) verbunden.
- d) Wechselwirkung mit dem Mesonenfeld, das die Nukleonen umgibt. Das elektronenmagnetische Feld der Gammastrahlung kann in diesem Raum Ströme induzieren, die mit Mesonenbildung verbunden sind (Photomesonenbildung).

In den genannten vier Gruppen treten sowohl Absorptions- als auch Streuprozesse auf, wobei die Streuung elastisch oder inelastisch erfolgen kann. Eine Übersicht hierüber geben *Fano, Spencer* und *Berger* (1959).

An dieser Stelle mögen nur die im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit drei wichtigsten Prozesse aufgezählt werden:

- a) *Photoeffekt*. Das einfallende Quant gibt seine gesamte Energie  $h\nu$  an ein Elektron ab. Bei weicher  $\gamma$ -Strahlung wird das Photoelektron vorwiegend senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der einfallenden  $\gamma$ -Strahlung emittiert. Der Absorptionskoeffizient wird mit  $\tau$  bezeichnet [ $\text{cm}^{-1}$ ] und in Tabellen meist für Blei angegeben. Die Umrechnung des Absorptionskoeffizienten für verschiedene Elemente erfolgt nach der Gleichung

$$\tau_1 = \tau_2 \frac{\rho_1 A_2}{\rho_2 A_1} \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^n$$

mit  $\rho$  Dichte,  $A$  Atommasse und  $Z$  Ordnungszahl.

Der Exponent  $n$  liegt auf Grund experimenteller Ergebnisse zwischen 4 und 5.

- b) *Compton-Streuung*. Das einfallende Quant gibt einen Teil seiner Energie an ein als frei betrachtetes Elektron ab. Das Quant wird um einen gewissen Winkel gestreut und besitzt danach die Energie  $h\nu' < h\nu$ . Die Wellenlängenänderung des gestreuten Quants hängt nur vom Streuwinkel ab. Der Absorptionskoeffizient wird mit  $\sigma$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] bezeichnet. Die Umrechnung des Absorptionskoeffizienten für verschiedene Elemente erfolgt nach der Gleichung

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{\rho_1 A_2 Z_1}{\rho_2 A_1 Z_2}$$

Dieser Absorptionskoeffizient setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_s$$

Dabei gibt  $\sigma_s$  die Schwächung des primären  $\gamma$ -Strahlenbündels durch den Energieaufwand für die Streustrahlung und  $\sigma_a$  die Schwächung durch Energieabgabe an das Elektron wieder. Der Koeffizient  $\sigma_s$  kann aus der Winkelverteilung der Streustrahlungsintensität, die durch Formel von *Klein, Nishina* und *Tamm* angegeben wird, berechnet werden.

- c) *Paarbildung*. Besitzt das primäre  $\gamma$ -Quant eine Energie, die größer als die doppelte Ruhenergie eines Elektrons ist ( $h\nu > 1,022 \text{ MeV}$ ), so kann Paar-

bildung auftreten, bei der ein Elektron und ein Positron entstehen. Mit der Zunahme der Energie der Gammaquanten und der Ordnungszahl des Materials wächst der Wirkungsquerschnitt dieses Vorganges. Der Absorptionskoeffizient infolge dieses Prozesses kann für verschiedene Elemente nach der Gleichung

$$\kappa_1 = \kappa_2 \frac{\rho_1 A_2}{\rho_2 A_1} \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^2$$

umgerechnet werden.

Der gesamte Absorptionskoeffizient infolge dieser drei Prozesse setzt sich additiv aus den einzelnen Koeffizienten zusammen:

$$\mu = \nu + \sigma + \kappa.$$

Neben den beschriebenen drei Wechselwirkungsprozessen sind noch eine Reihe weiterer bekannt. (*Fano, Spencer, Berger, 1959, S. 663*). Diese Prozesse treten aber bei der Gammastrahlung natürlich radioaktiver Strahler entweder überhaupt nicht oder nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit auf.

#### 1.1.4. Die Sekundärstrahlung und der Aufbaufaktor

Beim Durchgang durch Materie erfahren  $\gamma$ -Strahlen im parallelen Primärbündel (kollimierter Strahl) eine Intensitätsabnahme infolge Absorption und Wechselwirkung mit der Materie, die mit Energieverlust und Änderung der Bewegungsrichtung verbunden ist. Die Intensitätsabnahme befolgt die Beziehung

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (1)$$

wobei  $x$  die Absorberdicke,

$\mu$  den linearen Schwächungskoeffizienten [ $\text{cm}^{-1}$ ] und

$I, I_0$  die Intensität<sup>1</sup> vor und nach Durchgang durch den Absorber bedeuten.

Bei nicht kollimierter Strahlung tritt im Falle einer Punktquelle in (1) noch der Faktor  $r^{-2}$  hinzu, wodurch die geometrisch bedingte Intensitätsabnahme berücksichtigt wird, wenn  $r$  den Abstand des Meßpunktes von der Punktquelle bedeutet.

Streuprozesse (im vorliegenden Energiebereich im wesentlichen Comptonstreuung) führen zum Auftreten einer Sekundärstrahlung geringerer Energie als die der Primärstrahlung, die von nichtdiskriminierenden Detektoren gemeinsam mit der Primärstrahlung registriert wird. Infolgedessen tritt eine größere Intensität als durch (1) angegeben auf.

*Spencer und Fano (1951)* geben eine Methode zur Berechnung des Durchganges von Röntgenstrahlen in einem unendlich ausgedehnten Medium an. Dabei wird die Intensität als das Produkt des ungestreuten Anteils der am stärksten

<sup>1</sup> Unter der Intensität ist die Zahl der gebildeten Ionenpaare pro  $\text{cm}^3$  und Sekunde, Röntgen pro Sekunde oder die Zahl der Gammaquanten pro  $\text{cm}^2$  und Sekunde zu verstehen (siehe Kap. 1.2.).

durchdringenden Komponente mit einem Aufbaufaktor für die gestreute Strahlung dargestellt. Der Aufbaufaktor läßt sich als Polynom in der Abstandsvariablen angeben. Damit können auch geringe Eindringtiefen bis zu dem 10 bis 15fachen der freien Weglänge der Primärstrahlung erfaßt werden (Fano, 1953).

$$I' = I_0 b e^{-\mu x} . \quad (2)$$

mit  $b > 1$  .

Die strenge Behandlung der Streuprozesse und die Berechnung des Aufbaufaktors erfolgt mittels der Boltzmann'schen Transportgleichung.

Die Transportgleichung stellt eine Bilanz des Gesamtflusses der primären und sekundären  $\gamma$ -Strahlen für ein Volumenelement dar, wobei die gerichtete  $\gamma$ -Strahlung einer bestimmten Energiekomponente betrachtet wird. Sie lautet (Fano, Spencer, Berger, 1959) für zeitlich konstante Bedingungen:

$$\vec{\omega} \text{ grad } I(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda) = \mu(\lambda) I(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda) + \int_0^\lambda d\lambda' \int_{4\pi} d\vec{\omega}' k(\vec{\omega}, \lambda, \vec{\omega}', \lambda') I(\vec{r}, \vec{\omega}', \lambda') + S(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda) . \quad (3)$$

Dabei bedeuten:

$I(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda) d\lambda d\vec{\omega}$  Zahl der Photonen mit Wellenlängen zwischen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  mit Richtungen zwischen  $\vec{\omega}$  und  $\vec{\omega} + d\vec{\omega}$  am Orte  $\vec{r}$ .

$\lambda$  Wellenlänge in Compton-Einheiten  $\frac{m c^2}{E}$  .

$\mu(\lambda)$  den linearen Schwächungskoeffizienten als Funktion von  $\lambda$ .

$k(\vec{\omega}, \lambda, \vec{\omega}', \lambda')$  Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Photon aus der Richtung  $\vec{\omega}'$  mit der Energie  $\lambda'$  in Richtung  $\vec{\omega}$  mit der Energie  $\lambda$  gestreut wird.

$S(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda)$  Anzahl der pro Volumeneinheit, Zeiteinheit, Raumwinkeleinheit und Wellenlängeneinheit im Punkte  $\vec{r}$  produzierten Photonen.

Wegen  $k = 0$  für  $\lambda > \lambda'$  braucht die Integration über  $d\lambda'$  nur von 0 bis  $\lambda$  durchgeführt zu werden. Im nichtstationären Zustand ist die linke Seite durch  $\frac{\partial}{\partial t} I(\vec{r}, \vec{\omega}, \lambda)$  zu ergänzen. (Bei der Beschreibung von Neutronenbewegungen durch die Transportgleichung erfordert die strenge Behandlung auch die Berücksichtigung der Bewegung der Moderatoratome und den Energieaustausch mit ihnen. Deshalb wird (3) als „Transportgleichung mit nur einer Geschwindigkeit“ bezeichnet. Die allgemeine Untersuchung ist noch nicht abgeschlossen (Galanin, 1959).

Die Gleichung (3) ist eine Integro-Differential-Gleichung. In den meisten Fällen, so auch im vorliegenden, braucht durch  $k$  nur die Compton-Streuung berücksichtigt zu werden und die Funktion  $k$  kann durch den Klein-Nishina-Tamm-Querschnitt, multipliziert mit der Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit, ersetzt werden. Die strenge Lösung der Transportgleichung stößt auf große Schwierigkeiten, so daß man auf Näherungslösungen angewiesen ist. Die direkte numerische Integration ist prinzipiell möglich aber sehr aufwendig und erfordert Rechenautomaten mit hohen Speicherkapazitäten und Rechen-

geschwindigkeiten. Die ebenfalls großen Arbeitsaufwand erfordernde Monte-Carlo-Methode hat sich als wertvoll erwiesen (*Spencer, Fano, Berger, 1959*). Die spektrale Intensität der gestreuten Strahlung berechnet *Voskoboynikov (1957)* aus einer von *Karr und Lamkin* angegebenen Integralgleichung. Die einzelnen Glieder der Iterationslösung der Integralgleichung stellen die primäre, sekundäre, tertiäre usw. Strahlung dar. Die beschriebene Näherungslösung läßt sich mit genügender Genauigkeit auf Stoffe mit kleiner Massenzahl ( $Z < 30$ ) und für Energiebereiche anwenden, in denen die Paarbildung vernachlässigt werden kann. Eine weitere Komplikation in der Behandlung der Transportgleichung tritt auf, wenn die  $\gamma$ -Strahlenausbreitung nicht im homogenen Raum, sondern im geschichteten Raum untersucht werden muß.

Aus den dargelegten Gründen hat man sich bei der Berechnung des Aufbaufaktors verschiedener Näherungsmethoden bedient. Als Ergebnis genäherter Berechnungen gibt *Gorschkow (1960)* für den Fall, daß die Durchdringungsfähigkeit der primären Gammastrahlen größer als die der sekundären ist, den Aufbaufaktor in der Form

$$b = x^K \quad (4)$$

an, wobei  $x$  die Entfernung von der Quelle ist und  $K$  vom Absorbermaterial und von der Gammastrahlenenergie abhängt. Für  $E = 1$  MeV gelten nach *Gorschkow (1960)* z. B. folgende Werte für  $K$ :

H <sub>2</sub> O	Al	Fe	Sn	Pb	U
1,52	1,52	1,61	1,25	0,680	0,550

Ist die Durchdringungsfähigkeit der primären kleiner als die der sekundären Gammastrahlen, so wird bei Punktquellen

$$I = I_0 x^{-11/6} e^{-\mu x + H(\mu x)^{1/3}}, \quad (5)$$

so daß der Aufbaufaktor

$$b = x^{1/6} e^{H(\mu x)^{1/3}} \quad (6)$$

beträgt. Bei der Berechnung der Zuwachsfaktoren hat es sich gezeigt, daß einerseits die Zugrundelegung sehr vereinfachter Modellvorstellungen überraschend gute Übereinstimmung mit der Flußverteilung gibt und daß andererseits durch exaktere Berechnungsmethoden keine wesentliche Verbesserung der Resultate zu erzielen ist (*Spencer, Fano, Berger, 1959*).

Auf Grund experimenteller Resultate sind auch andere Ansätze für den Aufbaufaktor aufgestellt worden:

$$b = A e^{-\mu \alpha_1 x} + (1 - A) e^{-\mu \alpha_2 x}. \quad (7)$$

Dabei werden die Konstanten  $A$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  so gewählt, daß die Meßergebnisse möglichst gut wiedergegeben werden. Eine solche Darstellung bewährt sich innerhalb großer Energie- und Distanzbereiche und besitzt gegenüber den Gleichungen (6) und (7) den Vorteil, daß dann im Prinzip die gleichen Integrale wie für den ungestreuten Teilchenstrom bei der Berechnung der Gammastrah-

lenintensität räumlicher Quellverteilungen auftreten (*Riezler, Walcher, 1958*). Für zahlreiche Anwendungen genügt bereits eine lineare Näherung für (7) (a. a. O.):

$$b = 1 + \beta \mu x = 1 - [\alpha_1 \mu A + (1 - A) \alpha_2 \mu] x \quad (8)$$

mit

$$\alpha_1 A + (1 - A) \alpha_2 < 0,$$

wobei man aber die soeben beschriebenen Vorteile bei den auszuführenden Integrationen verliert. Experimentelle Bestimmungen der Konstanten  $A$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  werden für einige Substanzen ( $H_2O$ , Fe, Pb) von *Taylor (1954)* und von *Goldstein und Wilkins (1954)* angegeben. Wir werden hier einen Aufbaufaktor der Form (7) verwenden. In dem vorliegenden Energiebereich ist auch eine Annäherung (8) zulässig, so daß mit hinreichender Genauigkeit als Aufbaufaktor

$$b = e^{\alpha \mu x} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (9)$$

gesetzt werden kann. Dies ist im Einklang mit den in *Riezler-Walcher (1958)* und bei *Gorschkow (1960)* dargestellten Ergebnissen. Im Energiebereich der natürlichen  $\gamma$ -Strahler treten wesentliche Abweichungen erst bei größeren  $\mu x$ -Werten auf ( $\mu x \approx 10$ ). Mit dem Ansatz (9) bewirkt der Aufbaufaktor eine Verringerung des linearen Absorptionskoeffizienten:

$$I' = I_0 e^{-(1-\alpha)\mu x}. \quad (10)$$

Im Energiebereich zwischen 0,25 und 2,6 MeV spielen Photoeffekt und Paarbildung nur eine geringe Rolle. Der Absorptionskoeffizient wird fast vollständig durch den Comptoneffekt bestimmt.

Wie durch die geophysikalische Praxis bestätigt wird (*Czubek, 1961*), wird bei Bohrlochmessungen die  $\gamma$ -Anomalie nur durch die Absorption der primären  $\gamma$ -Strahlen bestimmt, so daß die hier eingeführten Näherungen für den Aufbaufaktor berechtigt sind.

Für leichte Elemente gilt  $Z/A \approx 0,475 (\pm 5\%)$  näherungsweise bis zur Ordnungszahl  $Z \approx 30$ . Etwa bis zur Ordnungszahl  $Z \approx 36$  ist der Beitrag des Comptoneffektes zur Gesamtabsorption  $\geq 98\%$ . Der Wirkungsquerschnitt eines einzelnen Elektrons beträgt

$$\sigma_E = 0,181 \text{ barn.}$$

Folglich gilt für den Massenabsorptionskoeffizienten

$$\frac{\mu}{\rho} \approx \frac{\sigma}{\rho} = \sigma_E N \frac{Z}{A}$$

mit  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  und man erhält

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,052 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} (\pm 5\%).$$

Der von *Czubek und Zuber (1959)* für Gesteine angegebene Wert von  $\mu/\rho = 0,05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  liegt innerhalb der Fehlergrenzen dieses Wertes.

## 1.2. Problemstellung

### 1.2.1. Die Formulierung des Problems

Die Strahlungsintensität einer Punktquelle beträgt im Vakuum im Abstand  $r$

$$I = K' \frac{C}{r^2}, \quad (11)$$

dabei bedeutet  $C$  die Menge der radioaktiven Substanz (in Curie) und die Größen  $I$  und  $K'$  können folgende Bedeutung besitzen:

Tabelle 1

$J$	$K'$	$K'$ gemessen in
$\frac{\text{Ionenpaare}}{\text{cm}^3 \text{ s}}$	Eve'sche Zahl (bei Ra und Rn) $4,8 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-1}$	$\text{cm}^{-1}$
$\frac{\text{Röntgen}}{\text{s}}$	Dosisleistungskonstante	$\frac{\text{r cm}^2}{\text{c s}}$
$\frac{\text{Gammaquanten}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$	1	1

Beim Durchgang durch Materie erfährt die  $\gamma$ -Strahlung durch die in Abschnitt 1.1.2 beschriebenen Wechselwirkungsprozesse eine Schwächung, so daß

$$I = K' \frac{C}{r^2} e^{-\mu r} \quad (12)$$

gilt. Nimmt man an, daß die von einem Strahlenmeßgerät (z. B. Zählrohr) mit einer effektiven Länge  $z$  empfangene  $\gamma$ -Strahlung in einem Bohrloch von einer Verteilung radioaktiver Substanzen herrührt, deren Konzentration nur von der Koordinate  $x$  in Richtung der Bohrlochachse abhängt, so gilt für die Zählrate  $N$  folgende Beziehung:

$$N(x) = F \int_{\tilde{x}=x-z/2}^{x+z/2} d\tilde{x} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x') dx' \int_{r_0}^{\infty} \frac{e^{-\mu \sqrt{r^2 + (\tilde{x} - x')^2}}}{r^2 + (\tilde{x} - x')^2} r dr. \quad (13)$$

Dabei bedeutet (Bild 1 a)

$F$  den mit dem Zählrohrwirkungsgrad  $\varepsilon$  multiplizierten Zählrohrquerschnitt

$$Q(x') = K' q \varrho$$

$q$  die spezifische Aktivität [c/g]

$\varrho$  die Dichte [g/cm<sup>3</sup>]

$r_0$  den Bohrlochradius.

Unter Verwendung des Exponentialintegrals

$$Ei(-y) = - \int_y^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (14)$$

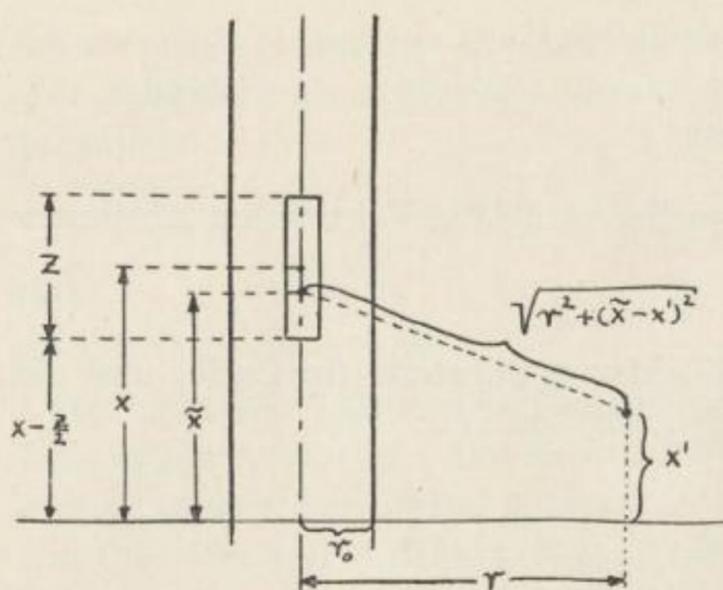


Bild 1a. Geometrische Verhältnisse in der Bohrlochumgebung

erhält man nach einigen Umformungen

$$\left. \begin{aligned} N(x) &= -2\pi F \int_{x'=-\infty}^{+\infty} Q(x') \int_{\tilde{x}=x-z/2}^{x+z/2} E i(-\mu \sqrt{r^2 + (\tilde{x} - x')^2}) d\tilde{x} dx', \\ n(x) &= \frac{1}{2\pi F} N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x') K(x, x') dx'. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Das ist eine singuläre Fredholmsche Integralgleichung erster Art für die Funktion  $Q(x)$ . Der Kern der Integralgleichung lautet

$$K(x, x') = - \int_{x-z/2}^{x+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + (\tilde{x} - x')^2}) d\tilde{x} \quad (16)$$

und läßt sich nicht in geschlossener Weise durch bekannte Funktionen einschließlich der Exponentialintegrale (und deren Integrale) ausdrücken. Dadurch bestehen für die Lösung der Integralgleichung Schwierigkeiten.

## 1.2.2. Untersuchung der Integralgleichung

### 1.2.2.1. Der Kern

Der Kern der Integralgleichung

$$K(x, x') = - \int_{x-z/2}^{x+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + (\tilde{x} - x')^2}) d\tilde{x} \quad (17)$$

geht mit der Substitution  $v = \tilde{x} - x'$  über in

$$K(x, x') = - \int_{v=x-x'-z/2}^{x-x'+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + v^2}) dv = K(x - x'). \quad (18)$$

Der Kern ist also von der speziellen Form  $K(x - x')$ . Mit  $w = -v$  erhalten wir

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \int_{w=-x+x'+z/2}^{-x+x'-z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + w^2}) dw \\ &= - \int_{w=x'-x-z/2}^{x'-x+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + w^2}) dw = K(x', x). \end{aligned} \quad (19)$$

Der Kern ist also überdies symmetrisch, was auch aus physikalischen Gründen leicht zu erkennen ist.

### 1.2.2.2. Anwendung der Fourierschen Integraltransformation

Eine Fredholmsche Integralgleichung der Form

$$N(x) = 2\pi F \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-x') Q(x') dx' \quad (20)$$

wird von *Schmeidler* (1955, S. 79) behandelt und mit der Fourierschen Integraltransformation gelöst.

Durch Multiplikation mit  $(2\pi)^{-1/2} \exp(iux)$  und Integration über  $x$  entsteht

$$\begin{aligned} N_*(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x) e^{iux} dx = \sqrt{2\pi} F \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-x') Q(x') dx' \right) dx \\ &= \sqrt{2\pi} F \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} K(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux'} Q(x') dx', \end{aligned} \quad (21)$$

$$= K_*(u) Q_*(u) (2\pi)^{3/2} F \quad (22)$$

mit

$$K_*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} K(x) dx \quad (23)$$

und

$$Q_*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux'} Q(x') dx'. \quad (24)$$

Als Lösung der Integralgleichung ergibt sich

$$Q(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux'} Q_*(u) du = \frac{1}{4\pi^2 F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_*(u)}{K_*(u)} e^{-iux'} du \quad (25)$$

falls der Quotient  $N_*/K_*$  quadratisch integrabel in  $(-\infty, +\infty)$  ist. (Nach *Schmeidler*, a. a. O.)

Die durch Messungen bestimmte Funktion  $N(x)$  ist nicht willkürlich vorgegeben, sondern erfüllt — bei gegebener Verteilung  $Q(x')$  — die Integralgleichung (20). Folglich ist die Fourier-Transformierte  $N_*(u)$  stets von der Form (22) und die Integralgleichung besitzt eine Lösung, wenn  $Q_*(u)$  existiert. Das ist aber immer der Fall, da  $Q(x')$  beschränkt und nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden ist.

1.2.2.3. Die Berechnung von  $K_*(u)$ 

Es ist

$$K_*(u) = -(2\pi)^{-1/2} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} e^{iu\xi} \left\{ \int_{\zeta=\xi-z'}^{\infty} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}) d\zeta - \int_{\zeta=\xi+z'}^{\infty} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}) d\zeta \right\} d\xi$$

mit  $2z' = z$ 

$$K^*(u) = -(2\pi)^{-1/2} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} e^{iu\xi} \int_{\xi-z/2}^{\xi+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}) d\zeta d\xi. \quad (26)$$

Durch partielle Integration erhält man

$$K_*(u) = i u^{-1} (2\pi)^{-1/2} e^{iu\xi} \int_{\xi-z/2}^{\xi+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \zeta^2}) d\zeta \Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty} + i u^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\xi} \left\{ E i\left(-\mu \sqrt{r_0^2 + \left(\xi - \frac{z}{2}\right)^2}\right) - E i\left(-\mu \sqrt{r_0^2 + \left(\xi + \frac{z}{2}\right)^2}\right) \right\} d\xi. \quad (27)$$

Im ersten Term verschwindet für  $\xi \rightarrow \pm\infty$  das Integral, der zweite wird in folgender Weise umgeformt:

$$K_*(u) = i u^{-1} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{iu(\xi-z/2)} E i\left(-\mu \sqrt{r_0^2 + \left(\xi - \frac{z}{2}\right)^2}\right) e^{iuz/2} - e^{iu(\xi+z/2)} E i\left(-\mu \sqrt{r_0^2 + \left(\xi + \frac{z}{2}\right)^2}\right) e^{-iuz/2} \right] d\xi = -2 u^{-1} (2\pi)^{-1/2} \sin u \frac{z}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \chi^2}) e^{iu\chi} d\chi. \quad (28)$$

Andererseits ist

$$E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + \chi^2}) = - \int_1^{\infty} t^{-1} e^{-\mu t \sqrt{r_0^2 + \chi^2}} dt. \quad (29)$$

In (28) darf nach Einsetzen von (29) die Integrationsreihenfolge vertauscht werden:

$$K_*(u) = 2 u^{-1} (2\pi)^{-1/2} \sin u \frac{z}{2} \int_{t=1}^{\infty} \int_{\chi=-\infty}^{+\infty} t^{-1} e^{iu\chi - \mu t \sqrt{r_0^2 + \chi^2}} d\chi dt. \quad (30)$$

Es gilt folgende Fourier-Transformation (*Magnus-Oberhettinger*, 1948, S. 164),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u z} \frac{e^{-\mu t \sqrt{r_0^2 + z^2}}}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} d z = 2 K_0 (r_0 \sqrt{\mu^2 t^2 + u^2}), \quad (31)$$

wobei  $K_0$  eine modifizierte Zylinderfunktion darstellt:

$$K_0(v) = \frac{i \pi}{2} H_2^{(1)}(i v).$$

Die Reihenfolge von Differentiation und Integration darf vertauscht werden, so daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(\mu t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u z} \frac{e^{-\mu t \sqrt{r_0^2 + z^2}}}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} d z &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u z - \mu t \sqrt{r_0^2 + z^2}} d z \\ &= - 2 r_0 \mu t (\mu^2 t^2 + u^2)^{-1/2} K_1 (r_0 \sqrt{\mu^2 t^2 + u^2}) \end{aligned} \quad (32)$$

und wir erhalten

$$K_*(u) = 4 u^{-1} (2 \pi)^{-1/2} r_0 \sin u \frac{z}{2} \int_{\tau = \mu r_0}^{\infty} \frac{K_1(\sqrt{\tau^2 + u^2 r_0^2})}{\sqrt{\tau^2 + u^2 r_0^2}} d \tau \quad (33)$$

für  $\mu r_0 \neq 0$ . Dieses Integral kann nicht auf bekannte Funktionen zurückgeführt werden. Zur Auswertung ist man auf numerische Methoden angewiesen.

#### 1.2.2.4. Weitere Betrachtungen der Integralgleichung im Hinblick auf das Interpretationsproblem

Es sei eine Funktion

$$f(x, \mu) = N(x) \quad (34)$$

gegeben, die auch für komplexe  $\mu = \sigma + i \tau$  definiert ist.  $f(x, \mu)$  sei in der Halbebene  $\sigma \geq c_0$  eindeutig und regulär, wobei  $c_0$  die Konvergenzabszisse des Integrals (42) sei. Es ist

$$N(x) = f(x, \mu) = 2 \pi F \int_{t=-\infty}^{+\infty} K(x-t) Q(t) dt \quad (35)$$

$$= -2 \pi F \int_{t=-\infty}^{+\infty} Q(t) \int_{v=x-t-z/2}^{v=x-t+z/2} E i(-\mu \sqrt{r_0^2 + v^2}) dv dt. \quad (36)$$

Wir setzen für die folgenden Untersuchungen voraus, daß die empirische Funktion  $N(x)$  so beschaffen ist, daß die auftretenden Integrale auch nach zweimaliger Differentiation nach  $x$  noch gleichmäßig konvergieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mu) &= -2 \pi F \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) \\ &\times \left[ E i \left( -\mu \sqrt{r_0^2 + \left( x - t + \frac{z}{2} \right)^2} \right) - E i \left( -\mu \sqrt{r_0^2 + \left( x - t - \frac{z}{2} \right)^2} \right) \right] dt, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) = 2\pi F \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) \left[ \frac{x-t-z/2}{r_0^2 + (x-t-z/2)^2} e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + (x-t-z/2)^2}} - \frac{x-t+z/2}{r_0^2 + (x-t+z/2)^2} e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + (x-t+z/2)^2}} \right] dt \quad (38)$$

$$= 2\pi F \int_{-\infty}^0 Q(t) [\dots] dt + 2\pi F \int_0^{+\infty} Q(t) [\dots] dt. \quad (39)$$

Man kann im ersten Integral  $t$  durch  $-t$  ersetzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) = 2\pi F \int_0^{\infty} Q(-t) & \left[ \frac{(x+t-z/2) \exp[-\mu \sqrt{r_0^2 + (x+t-z/2)^2}]}{r_0^2 + (x+t-z/2)^2} - \frac{(x+t+z/2) \exp[-\mu \sqrt{r_0^2 + (x+t+z/2)^2}]}{r_0^2 + (x+t+z/2)^2} \right] dt \\ + 2\pi F \int_0^{\infty} Q(t) & \left[ \frac{(x-t-z/2) \exp[-\mu \sqrt{r_0^2 + (x-t-z/2)^2}]}{r_0^2 + (x-t-z/2)^2} - \frac{(x-t+z/2) \exp[-\mu \sqrt{r_0^2 + (x-t+z/2)^2}]}{r_0^2 + (x-t+z/2)^2} \right] dt \quad (40) \end{aligned}$$

und erhält durch geeignete Substitutionen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) = 2\pi F \int_{\sqrt{r_0^2 + (x-z/2)^2}}^{\infty} u^{-1} e^{-\mu u} Q\left(x - \frac{z}{2} - \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) du \\ - 2\pi F \int_{\sqrt{r_0^2 + (x+z/2)^2}}^{\infty} u^{-1} e^{-\mu u} Q\left(x + \frac{z}{2} - \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) du \\ + 2\pi F \int_{\sqrt{r_0^2 + (x-z/2)^2}}^{\infty} u^{-1} e^{-\mu u} Q\left(-x + \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) du \\ - 2\pi F \int_{\sqrt{r_0^2 + (x+z/2)^2}}^{\infty} u^{-1} e^{-\mu u} Q\left(-x - \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) du. \quad (41) \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann durch geeignete Lage des Koordinatensystems erreicht werden, daß  $Q(\xi) = 0$  für  $\xi < 0$  wird. Dann verschwinden die beiden ersten Integrale und wir können schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) = 2\pi F \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-\mu u} & \left[ Q\left(-x + \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) - Q\left(-x - \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) \right] du \quad (42) \end{aligned}$$

Folglich kann

$$(2\pi F)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) \tag{43}$$

als Laplace-Transformierte der Funktion

$$u^{-1} \left[ Q\left(-x + \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) - Q\left(-x - \frac{z}{2} + \sqrt{u^2 - r_0^2}\right) \right] \tag{44}$$

aufgefaßt werden, so daß die letztere mittels der bekannten Rücktransformation aus (43) berechnet werden kann, wenn die eingangs genannten Voraussetzungen gegeben sind. Mit  $w = \sqrt{u^2 - r_0^2}$  kann nach Ausführung der Rücktransformation

$$f^*(x, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu}{2\pi F} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \mu) e^{\mu u} d\mu \tag{45}$$

die Funktion

$$P\left(-x + w, z\right) = Q\left(-x + \frac{z}{2} + w\right) - Q\left(-x - \frac{z}{2} + w\right) = u f^*(x, u) \tag{46}$$

als bekannt vorausgesetzt werden.

Mit  $x' = w - x + \frac{z}{2}$  wird

$$P\left(x' - \frac{z}{2}, z\right) = Q(x') - Q(x' - z), \tag{47}$$

so daß die Berechnung des gesuchten Gehaltes nach der Differenzenformel

$$Q(x') = P\left(x' - \frac{z}{2}, z\right) + Q(x' - z) \tag{48}$$

rekursiv möglich wird. An einigen Beispielen wird zunächst die Bildung von  $P$  aus  $Q$  nach (47) gezeigt.

Man überzeugt sich leicht, daß der Zusammenhang zwischen  $P$  und  $Q$  eindeutig umkehrbar ist (Bild 1 b und 1 c). Bei der Berechnung von  $Q$  aus  $P$  können durch

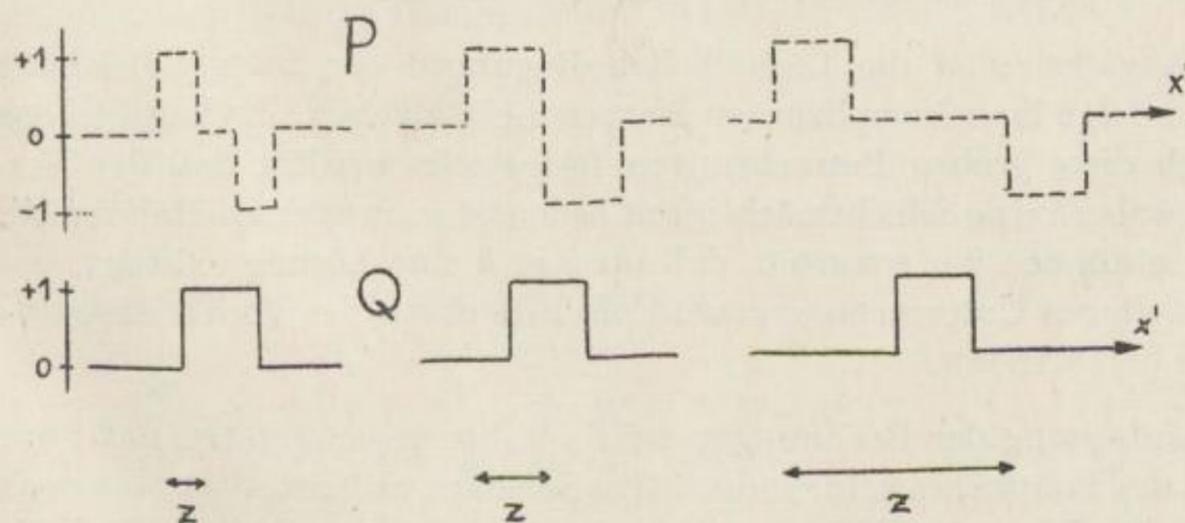


Bild 1b. Verlauf der Funktionen P und Q

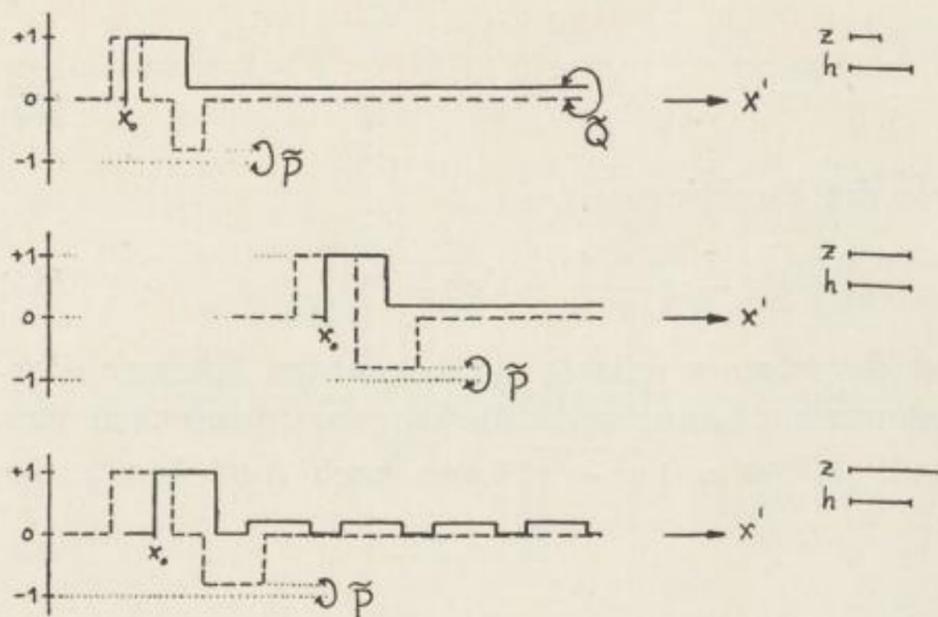


Bild 1c. Einfluß einer fehlerhaften Bestimmung der Funktion  $P$

kleine Abweichungen von der exakten Form bei  $P$  beträchtliche Fehler entstehen, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen. Hier wird angenommen, daß in den vorangegangenen Beispielen die negativen Werte der Funktion  $P$  falsch (betragsmäßig zu klein) sind. Dann ergibt sich folgendes:

Solange  $z \leq h$  ist, ergibt die Berechnung von  $Q$  aus dem fehlerhaften  $P$  für alle  $x' > x_0 + h$  einen konstanten Wert für  $\tilde{Q}$ , der gleich dem hier angenommenen Fehler  $\tilde{P}$  ist. Dagegen tritt für  $z > h$  für  $x' > x_0 + h$  eine periodische Folge von Schichten der Mächtigkeit  $h$  in den Abständen  $z - h$  mit einem Gehalt  $\tilde{Q}$  auf. Im Sinne des Interpretationszieles (siehe Abschnitt 1.1.) — nämlich der Identifizierung feinerer Einzelheiten der  $K_2O$ -Verteilung innerhalb eines Flözes — muß das Verhalten der Funktion  $Q(x')$  für  $z > h$  als instabil gegenüber fehlerhaften Bestimmungen der Funktion  $P(x')$  bzw.  $N(x)$  bezeichnet werden. Im zuerst behandelten Fall mit  $z \leq h$  tritt dagegen keine periodische Schichtenfolge, sondern nur eine konstante Abweichung  $\tilde{Q}$  vom richtigen Wert auf. Da hierdurch die  $K_2O$ -Verteilung innerhalb des Flözes nicht wesentlich verfälscht wird, möge das Verhalten der Lösungsfunktion  $Q(x')$  für  $z \leq h$  als stabil im Sinne des Interpretationsverfahrens bezeichnet werden.

Genauere Angaben über die Lösbarkeitsbedingungen der Integralgleichung lassen sich infolge ihres komplizierten Kernes nicht machen. Es kann jedoch schon durch diese groben Betrachtungen festgestellt werden, daß das Verhältnis  $z/h$ , wobei  $h$  eine Schichtmächtigkeit bedeutet, eine wichtige Rolle spielt. Insbesondere können wir erwarten, daß für  $z \leq h$  eine Lösung existiert. Im Laufe der weiteren Untersuchungen wird die Bedeutung des Verhältnisses  $z/h$  noch klarer hervortreten.

Zur Vereinfachung der Rechnungen wurde bisher vorausgesetzt, daß zwar im Inneren des Bohrloches keine radioaktive Substanz auftritt, dort aber doch die gleiche absorbierende Wirkung wie in der Umgebung auftritt. Mit Hilfe eines Iterationsverfahrens läßt sich die fehlende Absorption im Bohrloch-

inneren rechnerisch erfassen.<sup>2</sup> Bezeichnet man mit  $R$  den Radius des Zylindermantels, außerhalb dessen die Absorption erfolgt (bei trockenen, unverrohrten Bohrungen ist  $R = r_0$ , andernfalls kann durch geeignete Wahl von  $R < r_0$  die Absorption von Spülung und Verrohrung berücksichtigt werden), so gilt an Stelle von (13):

$$N(x) = 2 \pi F \int_{x' = -\infty}^{\infty} Q(x') \int_{\tilde{x} = x - z/2}^{x + z/2} \int_{r = r_0}^{\infty} \frac{e^{-\mu \frac{r-R}{r} \sqrt{r^2 + (x' - \tilde{x})^2}}}{r^2 + (x' - \tilde{x})^2} r dr d\tilde{x} dx'. \quad (49)$$

Der Kern der Integralgleichung nimmt dadurch folgende komplizierte Gestalt an und läßt sich nicht in geschlossener Weise durch bekannte Funktionen ausdrücken:

$$\bar{K}(x - x') = \int_{\tilde{x} = x - z/2}^{x + z/2} \int_{r = r_0}^{\infty} \frac{e^{-\mu \frac{r-R}{r} \sqrt{r^2 + (x' - \tilde{x})^2}}}{r^2 + (x' - \tilde{x})^2} r dr d\tilde{x}. \quad (50)$$

Durch die Reihenentwicklung

$$\bar{K}(x - x') = \int_{x - z/2}^{x + z/2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{e^{-\mu \sqrt{r^2 + (x' - \tilde{x})^2}}}{r^2 + (x' - \tilde{x})^2} \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu R)^n}{r^n n!} (r^2 + (x' - \tilde{x})^2)^{n/2} \right] r dr d\tilde{x} \quad (51)$$

wird der Kern durch die Reihe

$$\bar{K}(x - x') = K_0(x - x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu R)^n K_n(x - x') \quad (52)$$

dargestellt, wobei  $K_0(x - x')$  durch (16) und  $K_n$  durch

$$K_n(x - x') = \frac{1}{n!} \int_{x - z/2}^{x + z/2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^{n-1}} e^{-\mu \sqrt{r^2 + (x' - \tilde{x})^2}} [r^2 + (x' - \tilde{x})^2]^{\frac{n}{2} - 1} dr d\tilde{x} \quad (53)$$

definiert sind. Für die Lösungsfunktion  $Q(x')$  wird der Ansatz

$$Q(x') = Q_0(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu R)^n Q_n(x') \quad (54)$$

gemacht und es gilt

$$N(x) = 2 \pi F \int_{x' = -\infty}^{\infty} \left[ Q_0(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu R)^n Q_n(x') \right] \cdot \left[ K_0(x - x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu R)^n K_n(x - x') \right] dx', \quad (55)$$

<sup>2</sup> Hierauf wies mich freundlicherweise Herr Prof. Buchheim hin, wofür ich ihm auch an dieser Stelle nochmals herzlich danken möchte.

so daß eine schrittweise Verbesserung der Lösung  $Q$  vorgenommen werden kann. Man erhält nämlich durch Vergleich der Koeffizienten von  $(\mu R)^n$  zunächst als erste Näherung die Funktion  $Q_0(x)$  aus der Integralgleichung

$$N(x) = 2 \pi F \int_{x'=-\infty}^{+\infty} K_0(x-x') Q_0(x') dx' \quad (56)$$

und stellt fest, daß (20) bzw. (13) mit dieser Gleichung identisch ist. Aus  $Q_0$  kann  $Q_1$  berechnet werden (Koeffizienten von  $\mu R$ ):

$$O = 2 \pi F \int_{-\infty}^{+\infty} [K_1 Q_0 + K_0 Q_1] dx' \rightarrow Q_1, \quad (57)$$

ferner gilt

$$O = 2 \pi F \int_{-\infty}^{+\infty} [K_2 Q_0 + K_1 Q_1 + K_0 Q_2] dx' \rightarrow Q_2 \quad (58)$$

usw. Allgemein liefert die Integralgleichung (Koeffizienten von  $(\mu R)^n$ )

$$O = 2 \pi F \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{i=0}^n K_{n-i} Q_i \right] dx' \rightarrow Q_n \quad (59)$$

die Funktionen  $Q_n$ . Auf diese Weise kann gemäß (54) die Lösungsfunktion  $Q(x)$  schrittweise verbessert werden.

Der praktischen Anwendung dieses Verfahrens steht allerdings der enorme Rechenaufwand entgegen, der sich durch die komplizierten Kernfunktionen (53) und die Lösung der bei jedem Schritt auftretenden Integralgleichungen ergibt. Es ist zwar prinzipiell möglich, für jeden Näherungsschritt die in Abschnitt 1.2.2.2. angegebene Methode der Fourierschen Integraltransformation anzuwenden, jedoch werden durch die Notwendigkeit der Speicherung der Kernfunktionen und der Funktionen  $Q_n$  Rechenanlagen mit sehr großen Speicherkapazitäten benötigt.

Die eingeführte Vereinfachung bringt jedoch nur geringe Fehlerquellen mit sich, die unter den tatsächlichen Bedingungen teilweise durch andere Einflüsse kompensiert werden. Die Kompensation tritt durch die Absorption im Stahlgehäuse der Bohrlochsonde, die durch die größere Dichte des Stahls gegenüber dem Gestein verhältnismäßig groß ist, durch die Absorption in der Bohrlochspülung und eventuell in der Verrohrung der Bohrung ein. Diese Einflüsse befolgen die gleichen geometrischen Gesetzmäßigkeiten wie die in der Rechnung angenommene Absorption im Bohrloch. Der Fehler bei Annahme der gleichen Absorption im Bohrloch wie in der Umgebung kann durch folgende Betrachtung abgeschätzt werden. Um den ungünstigsten Fall zu erfassen, wird ein Zählrohr (Länge = 27 cm) ohne Gehäuse in einer trockenen, unverrohrten Bohrung (Durchmesser = 9 cm) angenommen. Die radioaktive Schicht möge sehr dünn sein. Setzt man nun die im Bohrloch auftretende Intensität in einem Punkt A an der Stelle dieser Schicht ins Verhältnis zur Intensität an einem Punkt B, der von der Schicht um eine Zählrohlänge entfernt ist, so stellt man fest, daß sich dieses Verhältnis nur um weniger als 20% ändert,

wenn im Bohrloch selbst keine Absorption auftritt.<sup>3</sup> Dies stellt den ungünstigsten Fall dar, da bei den später einzuführenden Verteilungen der radioaktiven Materie in der Umgebung des Bohrloches stets Schichten einer Mächtigkeit in der Größenordnung der Zählrohrlänge behandelt werden, wodurch sich der Unterschied des o. a. Verhältnisses bei Berücksichtigung der Absorption im Bohrloch verringert. Weiterhin ist zu beachten, daß die Zählrate im Punkt B kleiner als 10% der Zählrate im Punkt A ist (bei Zählrohrlänge gleich Schichtmächtigkeit, siehe Tabelle 6; bei dünnen Schichten etwa 3%). Infolgedessen treten in den zur radioaktiven Schicht benachbarten (in Schichtmitte gelegenen) Punkten Fehler der Zählrate von weniger als 2% auf, die jedoch vernachlässigt werden können, da sie praktisch ohne Einfluß sind. Die durch die im Bohrloch fehlende Absorption eintretende Gesamterhöhung der Zählrate braucht nicht gesondert berechnet zu werden, da in das später zu beschreibende Auswerteverfahren durch Wahl geeigneter Faktoren (z. B. bei der Eichung) nur die Verhältnisse der theoretischen Zählraten in äquidistanten Punkten eingehen. Mit Hilfe der von *Czubek* (1961, 1962a) angegebenen Korrekturfaktoren zur Berücksichtigung der Absorption infolge einer Bohrlochspülung ist diese Berechnung jedoch leicht möglich (siehe Abschnitt 1.2.4.).

### 1.2.3. Spezialisierung der Problemstellung

Um die mühsame Berechnung der Fourier-Transformierten der Kernfunktion und der Funktion des  $\gamma$ -Logs  $N(x)$  und die erforderliche Rücktransformation bei jeder Auswertung eines  $\gamma$ -Logs zu umgehen, wird ein anderer Lösungsweg eingeschlagen, der auf ein neues Auswerteverfahren führt, das bei Routine-messungen besonders leicht eingesetzt werden kann. In den nächsten Kapiteln wird zunächst die  $\gamma$ -Strahlung planparallel geschichteter Körper untersucht, die in einem Bohrloch registriert wird. Dabei wird der Bohrlochradius zunächst gleich Null gesetzt, da in diesem Falle die dabei auftretenden Funktionen Tabellenwerken entnommen werden können. Die Berücksichtigung des endlichen Bohrlochradius erfolgt später durch Einführung von Korrekturfaktoren.

### 1.2.4. Einflüsse der Idealisierungen

Bei der Aufstellung der Gleichung (13) sind zur Erleichterung der Rechnung eine Reihe von Annahmen gemacht worden:

- a) Das Bohrloch enthält keine radioaktive Substanz, jedoch tritt in ihm die gleiche absorbierende Wirkung wie in der Umgebung auf (siehe auch Abschnitt 1.2.2.).
- b) Die Detektoranordnung befindet sich zentrisch im Bohrloch.
- c) Das  $\gamma$ -Log wird statisch, d. h. mit der Sondengeschwindigkeit Null, im Bohrloch aufgenommen.

Die Untersuchung des Einflusses auf radiometrische Bohrlochmessungen, der durch Abweichungen von diesen Annahmen entsteht, liegt bereits in Veröffentlichungen vor.

<sup>3</sup> Durch numerische Rechnung und graphische Integration bestimmt.

Zusammengefaßt lauten die Ergebnisse:

- zu a) 1. Die Anwesenheit einer absorbierenden Substanz hat die gleiche Wirkung wie eine nicht radioaktive Bohrlochspülung. Der Einfluß einer solchen Spülung wurde von *Czubek* (1961, 1962a) untersucht. Er führte Korrekturfaktoren ein, mit deren Hilfe gemessene  $\gamma$ -Logs auf  $\gamma$ -Logs in trockenen Bohrungen umgerechnet werden können. Die Korrekturfaktoren hängen vom Bohrlochradius, Detektorradius und vom Absorptionskoeffizienten der Bohrlochfüllung ab und können graphischen Darstellungen entnommen werden. Da der Einfluß der Bohrlochspülung durch Korrekturfaktoren berücksichtigt werden kann, bewirkt er lediglich eine Verringerung der Empfindlichkeit (oder des Zählrohrwirkungsgrades) der Detektoranordnung und bedarf in den folgenden Rechnungen keiner besonderen Berücksichtigung. In der gleichen Weise wirkt die Verrohrung und Zementierung des Bohrloches hinter der Verrohrung. Auch hier verwendet man Korrekturfaktoren (*Lehnert, Rothe, 1962*).
2. Im Falle einer durchmischten radioaktiven Bohrlochspülung wird der Nulleffekt des  $\gamma$ -Logs erhöht.
- zu b) Auch die Exzentrizität der Detektoranordnung im Bohrloch wurde von *Czubek* (1962a) untersucht. Die Exzentrizität beeinflusst die obengenannten Korrekturfaktoren, die auch für diesen Fall in Diagrammen dargestellt worden sind. Der Einfluß der Exzentrizität wird eliminiert, wenn die Eichung der Sonde unter den gleichen Bedingungen wie die Messungen ausgeführt wird.
- zu c) Es wurde bereits in Abschnitt 1.1.1. darauf hingewiesen, daß bei Bohrlochmessungen mit bewegter Sonde gegenüber solchen mit ruhender Sonde eine Verschiebung des  $\gamma$ -Logs in Richtung der Sondengeschwindigkeit erfolgt. Dadurch wird die Teufenskala um einen gewissen Betrag verschoben. Beträchtliche Verfälschungen der Anomalie treten nur dann auf, wenn im Vergleich zur Sondenlänge sehr dünne Schichten auftreten und die Schichtmächtigkeit sehr klein gegen das Produkt aus Sonden-  
geschwindigkeit  $V$  mit der Zeitkonstanten  $T$  der Registrierapparatur ist.

#### 1.2.5. Die Berechnung der Gammastrahlenintensität dicker Schichten nach *Czubek*

Mit dem Problem der Berechnung des  $\gamma$ -Logs bei gegebener Verteilung radioaktiver Substanzen in einem senkrecht zur Bohrlochachse geschichteten Medium befaßte sich auch *Czubek* (1961). Diese stellte die am weitesten in die Einzelheiten gehende Berechnung dar, die aus der Literatur bekannt geworden ist. Da von *Czubek* nur der Fall behandelt wird, daß die Schichtmächtigkeit  $a$  größer als die Detektorlänge  $z$  ist, wird in den Kapiteln 1.3. und 1.4. die von einem Zählrohr registrierte Gammastrahlung unter allgemeinen Bedingungen berechnet, so daß auch dünnere Schichten erfaßt werden können. *Czubek* befaßt sich nur mit der Berechnung des  $\gamma$ -Logs, während die Lösung der umgekehrten

Aufgabe, die das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, nicht in Angriff genommen wurde.

Mit den Bezeichnungen (Bild 1 d)

- $z$  Detektor-(Zählrohr-)Länge  
 $a$  Schichtmächtigkeit  
 $r_0$  Bohrlochradius  
 $x$  Abstand des Detektormittelpunktes von einer Schichtgrenze  
 $k$  Proportionalitätsfaktor  
 $K_{0,1}(v)$  modifizierte Zylinderfunktionen (siehe Fußnote 4)

erhält Czubek folgende Zählraten für ein leeres Bohrloch:

$$N(x) = \frac{2 \pi k q \varrho}{\mu^2} \frac{A}{\mu r_0 \left[ K_1(\mu r_0) - \int_{\mu r_0}^{\infty} K_0(v) dv \right]}$$

Ist das Zählrohr im Inneren der Schicht, dann gilt:

$$\begin{aligned} A = & 2 \mu z - E_3 \left[ \mu \left( x - \frac{z}{2} \right) \right] + E_3 \left[ \mu \left( x + \frac{z}{2} \right) \right] \\ & - E_3 \left[ \mu \left( a - x - \frac{z}{2} \right) \right] + E_3 \left[ \mu \left( a - x + \frac{z}{2} \right) \right] \\ & + G_1 \left[ \mu \left( x - \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] - G_1 \left[ \mu \left( x + \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] \\ & + G_1 \left[ \mu \left( a - x - \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] - G_1 \left[ \mu \left( a - x + \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right]. \end{aligned}$$

Ist das Zählrohr oberhalb der Schicht, dann gilt:

$$\begin{aligned} A = & E_3 \left[ \mu \left( x + \frac{z}{2} \right) \right] - E_3 \left[ \mu \left( x - \frac{z}{2} \right) \right] \\ & + E_3 \left[ \mu \left( x - a - \frac{z}{2} \right) \right] - E_3 \left[ \mu \left( x - a + \frac{z}{2} \right) \right] \\ & - G_1 \left[ \mu \left( x + \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] + G_1 \left[ \mu \left( x - \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] \\ & - G_1 \left[ \mu \left( x - a - \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right] + G_1 \left[ \mu \left( x - a + \frac{z}{2} \right), \mu r_0 \right]. \end{aligned}$$

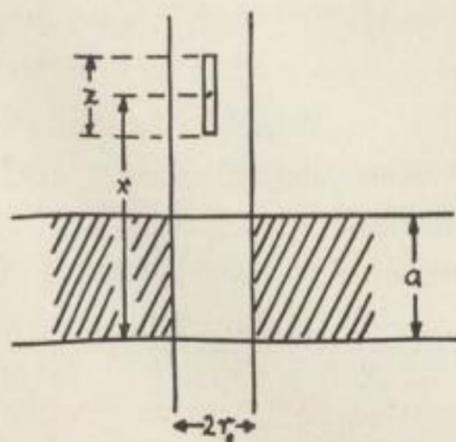


Bild 1d. Die relative Lage von Detektor und Schicht endlicher Mächtigkeit

Nähere Angaben über die Funktion  $E_3$  werden im Anhang A gemacht. Die Funktion  $G_1$  ist in folgender Weise definiert:

$$G_1(x, y) = \int_0^x G(\xi, y) d\xi$$

$$G(x, y) = \int_0^y F\left(\arctan \frac{x}{\eta}, \eta\right) d\eta$$

$$F\left(\arctan \frac{x}{y}, y\right) = \int_0^{\arctan x/y} e^{-\frac{y}{\cos \vartheta}} d\vartheta$$

also gilt:

$$G_1(x, y) = \int_0^x \int_0^y \int_0^{\arctan \xi/\eta} e^{-\frac{\eta}{\cos \vartheta}} d\vartheta d\eta d\xi.$$

Die Funktionen  $G$  und  $G_1$  werden von *Czubek* in Form von Diagrammen angegeben, für die Funktion  $F$  geben *Homilius* und *Lorch* (1957) Tabellen an.

Speziell gilt<sup>4</sup>:

$$G(x, \infty) = 1 - E_2(x)$$

und

$$G(\infty, y) = 1 - y \left[ K_1(y) - \int_y^\infty K_0(v) dv \right].$$

### 1.3. Die Gammastrahlung geschichteter Körper

Es wird angenommen, daß sich die Umgebung eines Meßpunktes aus einem geschichteten Medium aufbaut, dessen einzelne, unendlich ausgedehnte Schichten mit planparallelen Begrenzungsflächen aus radioaktivem Material mit jeweils konstanter spezifischer Aktivität, konstanter Dichte und konstantem Absorptionskoeffizienten bestehen (Bild 1e). Mit den im Abschnitt 1.2. eingeführten Bezeichnungen erhält man für den Beitrag zur Strahlungsintensität im Punkt  $P$  in der nullten Schicht vom Volumenelement  $d\tau$  im Punkt  $Q$  in der  $n$ -ten Schicht

$$dI(P) = K' q_n \varrho_n r^{-2} d\tau e^{-\tilde{R} - \mu_n r'_n} \quad (61)$$

mit

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} r_i + r'_n, \quad \tilde{R} = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i r_i.$$

Führt man Kugelkoordinaten ein, so gilt

$$r_0 = \frac{x}{\cos \varphi}, \quad r_i = \frac{a_i}{\cos \varphi}, \quad r'_n = \frac{a'_n}{\cos \varphi}$$

<sup>4</sup> Bezüglich  $E_2$  siehe Anhang A:  $K_0(v)$  und  $K_1(v)$  sind modifizierte Zylinderfunktionen:

$$\begin{aligned} K_0(v) &= i\pi/2 & H_0^{(1)}(iv) &= -\pi/2 & \operatorname{Re} N_0(iv) \\ K_1(v) &= -\pi/2 & H_1^{(1)}(iv) &= \pi/2 & \operatorname{Im} N_1(iv). \end{aligned}$$

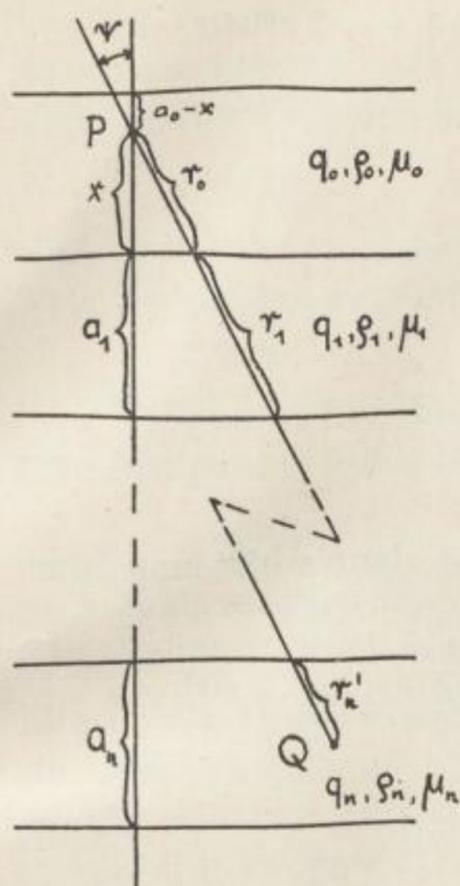


Bild 1e. Geometrische Verhältnisse in einer Schichtfolge

und für das Volumenelement in der n-ten Schicht

$$d\tau = r^2 \sin \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr'_n.$$

Die n-te Schicht liefert in P den Beitrag

$$I_n(P) = K' q_n \varrho_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{a_n} da'_n \tan \psi \exp \left[ -\frac{\xi_{n-1} + \mu_n a'_n}{\cos \psi} \right]; \quad (62)$$

$$\xi_{n-1} = \mu_0 x + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i a_i.$$

Integration und Substitution  $t = \xi_k \cos^{-1} \psi$  ergibt ( $k = n - 1, n$ ):

$$I_n(P) = 2 \pi F K' q_n \varrho_n \mu_n^{-1} \left\{ \xi_{n-1} \int_{\xi_{n-1}}^{\infty} t^{-2} e^{-t} dt - \xi_n \int_{\xi_n}^{\infty} t^{-2} e^{-t} dt \right\}. \quad (63)$$

Man bezeichnet

$$x \int_x^{\infty} t^{-2} e^{-t} dt = e^{-x} + x E i(-x) = \Phi(x) \quad (64)$$

als King-Funktion.

Tabellen des Exponentialintegrals findet man bei *Jahnke und Emde* (1938), der King-Funktion bei *Gorschkow* (1960). Umfangreichere Tabellen wurden von *Pagurova* (1959) für die Integro-Exponential-Funktion

$$E_\nu(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-\nu} du \quad (65)$$

herausgegeben (siehe auch Anhang A). Für  $\nu = 1$  und  $\nu = 2$  erhält man

$$E_1(x) = -E_i(-x), \quad E_2(x) = \Phi(x).$$

Ferner ist

$$E_3(x) = \int_x^{\infty} E_2(\xi) d\xi.$$

Folglich gilt

$$I_n(P) = 2\pi K' \frac{q_n \varrho_n}{\mu_n} [E_2(\xi_{n-1}) - E_2(\xi_n)]. \quad (66)$$

Liegt der Punkt  $P$  im Inneren der strahlenden Schicht, dann erhält man durch Zerlegung der Schicht mittels einer Ebene durch  $P$  in zwei Teile:

$$I_0(P) = 2\pi K' q_0 \varrho_0 \mu_0^{-1} [E_2(0) - E_2(\mu_0 x) + E_2(0) - E_2(\mu_0(a_0 - x))]$$

oder mit  $E_2(0) = 1$

$$I_0(P) = 2\pi K' q_0 \varrho_0 \mu_0^{-1} [2 - E_2(\mu_0 x) - E_2(\mu_0(a_0 - x))]. \quad (67)$$

Die Gesamtstrahlungsintensität im Punkt  $P$  einer Folge unendlich vieler Schichten setzt sich additiv aus den einzelnen Beiträgen zusammen:

$$I(P) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(P) \quad (68)$$

mit  $I_n(P)$  nach Gleichung (66) für  $n \neq 0$  und nach (67) für  $n = 0$ .

#### 1.4. Die Berechnung der von einem Zählrohr registrierten $\gamma$ -Strahlung

Die Anzahl der pro Raumeinheit und Zeiteinheit gebildeten Ionenpaare wird durch die Gleichung (68) angegeben. Durch Integration über das Detektorvolumen erhält man die Zählrate. Dabei ist die Richtungsabhängigkeit der Detektorempfindlichkeit zu berücksichtigen. Hierüber liegen Untersuchungen von *Homilius* und *Lorch* (1957) vor, die ergaben, daß sich die Zählrate bei Zählrohren bis zu einem Einfallswinkel von  $30^\circ$  um weniger als 5% ändert. Bei Bohrlochmessungen treten aber große Einfallswinkel der  $\gamma$ -Strahlung nur von den Schichten auf, in denen sich das Zählrohr nicht befindet. Die Strahlung dieser Schichten ist infolge der größeren Entfernung und der Absorption durch die dazwischenliegende Materie bereits beträchtlich gegenüber der Strahlung aus der nächsten Umgebung des Zählrohrs geschwächt, so daß durch die Vernachlässigung der Richtungsabhängigkeit der Zählrohrempfindlichkeit nur ein geringer Fehler entsteht. Auf diese Weise läßt sich die Rechnung wesentlich vereinfachen. Zur Ermittlung der Zählrate ist es erforderlich, gewisse Annahmen über die Schichtmächtigkeiten, die Detektorlänge und die Lage der Meßpunkte zu machen. Dabei ist es zweckmäßig, den Raum in Schichten konstanter Mächtigkeit zu unterteilen. Diese mögen von einem auf den Schichtgrenzen senkrecht stehenden Bohrloch durchörtert werden. Wird mit  $a$  die

Schichtmächtigkeit und mit  $z$  die Detektor-(Zählrohr-)Länge bezeichnet, so sind folgende Fälle von besonderem Interesse (Bild 2):

$$z = 2a$$

- a.a.) Meßpunkte in Schichtmitte
- a.b.) Meßpunkte auf Schichtrand

$$z = a$$

- b.a.) Meßpunkte in Schichtmitte
- b.b.) Meßpunkte auf Schichtrand

$$z = a/2$$

- c.a.) Meßpunkte in Schichtmitte
- c.b.) Meßpunkte auf Schichtrand

Eine feinere Unterteilung als im Fall a) mit  $z/a > 2$  ist nicht sinnvoll, da dann ein Meßpunktabstand von nur Bruchteilen der Zählrohrlänge notwendig ist, um die erforderliche hohe Auflösung zu erzielen. Andererseits ist auch eine gröbere Unterteilung als im Fall c) nicht empfehlenswert, da bei den gebräuchlichen Zählrohrängen in der Größenordnung von 30 cm die Schicht, in deren Mitte der Meßpunkt angenommen wird, dann schon bald nur noch als einzige einen nennenswerten Beitrag zur gemessenen Zählrate liefert.

#### 1.4.1. Fall a.a.

Der mit dem Mittelpunkt des Zählrohres identifizierte Meßpunkt möge sich in der Mitte der Schicht  $m$  befinden (Bild 3). Die Hälfte der Zählrohrlänge befindet sich in der Schicht  $m$ , je ein Viertel in den angrenzenden Schichten  $m - 1$  und  $m + 1$ . Wir werden die von diesen drei Teilen des Zählrohres herrührenden Beiträge zur Gesamtzählrate getrennt berechnen durch Integration der Anzahl der pro Raumeinheit und Zeiteinheit gebildeten Ionenpaare über das jeweilige Zählrohrvolumen  $V$ :

$$N = \int_v I d\tau = F \int_0^z I dx. \quad (69)$$

Dabei bedeutet  $F$  den Zählrohrquerschnitt und  $z$  die Zählrohrlänge.

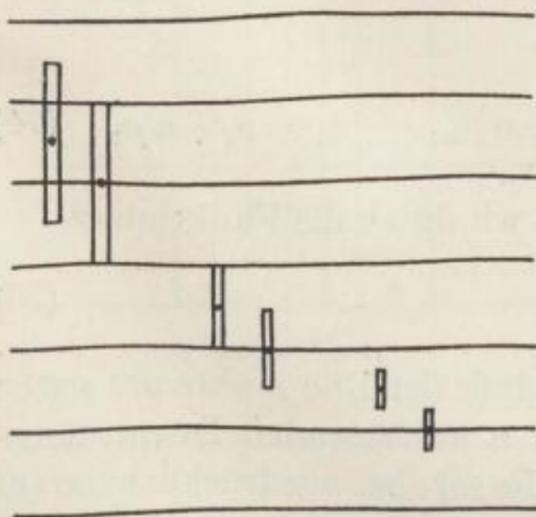


Bild 2. Anordnung von Detektor und Schichten-system in den verschiedenen untersuchten Fällen

Teil I — oberstes Zählrohrviertel

Beitrag von Schicht  $m - 1$ :

$$N_{m-1}^I(m) = 2 \pi F K' \frac{q_{m-1} \varrho_{m-1}}{\mu_{m-1}} \int_0^{a/2} [2 - E_2(\mu_{m-1} x) - E_2(\mu_{m-1} (a - x))] dx \quad (70)$$

mit

$$g_{m-1} = 2 \pi F K' \frac{q_{m-1} \varrho_{m-1}}{\mu_{m-1}}$$

erhält man durch Substitutionen:

$$N_{m-1}^{I_1}(m) = \frac{g_{m-1}}{\mu_{m-1}} \left[ \mu_{m-1} a - \int_0^{\frac{a \mu_{m-1}}{2}} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\frac{a \mu_{m-1}}{2}}^{a \mu_{m-1}} E_2(\zeta) d\zeta \right],$$

$$\begin{aligned} N_{m-1}^I(m) &= \frac{g_{m-1}}{\mu_{m-1}} \left[ a \mu_{m-1} - \int_0^{a \mu_{m-1}} E_2(\zeta) d\zeta \right] \\ &= \frac{g_{m-1}}{\mu_{m-1}} [a \mu_{m-1} - E_3(0) + E_3(a \mu_{m-1})]. \end{aligned}$$

Wir führen für den Ausdruck in der eckigen Klammer die Funktion  $\frac{1}{2} \Theta_0$  ein:

$$N_{m-1}^I(m) = \frac{1}{2} \frac{g_{m-1}}{\mu_{m-1}} \Theta_0(m - 1). \quad (71)$$

Von der Schicht  $n > m - 1$  rührt folgender Beitrag her:

$$N_n^I(m) = g_n \int_0^{a/2} \left[ E_2 \left( x \mu_{m-1} + a \sum_{i=m}^{n-1} \mu_i \right) - E_2 \left( x \mu_{m-1} + a \sum_{i=m}^n \mu_i \right) \right] dx. \quad (72)$$

Hier und im Folgenden sind leere Summen (obere Summationsgrenze kleiner als untere) durch Null zu ersetzen. Durch geeignete Substitutionen erhält man:

$$N_n^I(m) = \frac{g_n}{\mu_{m-1}} \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] \quad (73)$$

mit

$$\alpha_1 = a \sum_{i=m}^{n-1} \mu_i, \quad \alpha_2 = \frac{a}{2} \mu_{m-1} + \alpha_1, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + a \mu_n, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + a \mu_n. \quad (74)$$

Den Ausdruck in der eckigen Klammer ersetzen wir durch die Funktion  $\Theta_1$ :

$$N_n^I(m) = \frac{g_n}{\mu_{m-1}} \Theta_1(m - 1, n). \quad (75)$$

Diese in (74) als normierte, dimensionslose Abstände der Endpunkte des ersten Zählrohrviertels von den Grenzen der Schicht  $n$  auftretenden Integrationsgrenzen sind in Bild 3 symbolisch eingetragen. Es sei aber ausdrücklich darauf

hingewiesen, daß die  $\alpha_1 \dots \alpha_4$  keine Längen sind, sondern die Absorptionseigenschaften der von ihnen überstrichenen Strecken erfassen. Es ist

$$\Theta_1(m-1, n) = E_3\left(a \sum_{i=m}^{n-1} \mu_i\right) - E_3\left(\frac{a}{2} \mu_{m-1} + a \sum_{i=m}^{n-1} \mu_i\right) - E_3\left(a \sum_{i=m}^n \mu_i\right) + E_3\left(\frac{a}{2} \mu_{m-1} + a \sum_{i=m}^n \mu_i\right).$$

Von der Schicht  $k < m-1$  rührt folgender Beitrag auf das erste Zählrohrviertel her:

$$N_k^I(m) = g_k \int_{a/L}^a \left[ E_2\left(x \mu_{m-1} + a \sum_{i=k+1}^{m-2} \mu_i\right) - E_2\left(x \mu_{m-1} + a \sum_{i=k}^{m-2} \mu_i\right) \right] dx$$

$$= \frac{g_k}{\mu_{m-1}} \left[ \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta_3}^{\beta_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] \quad (76)$$

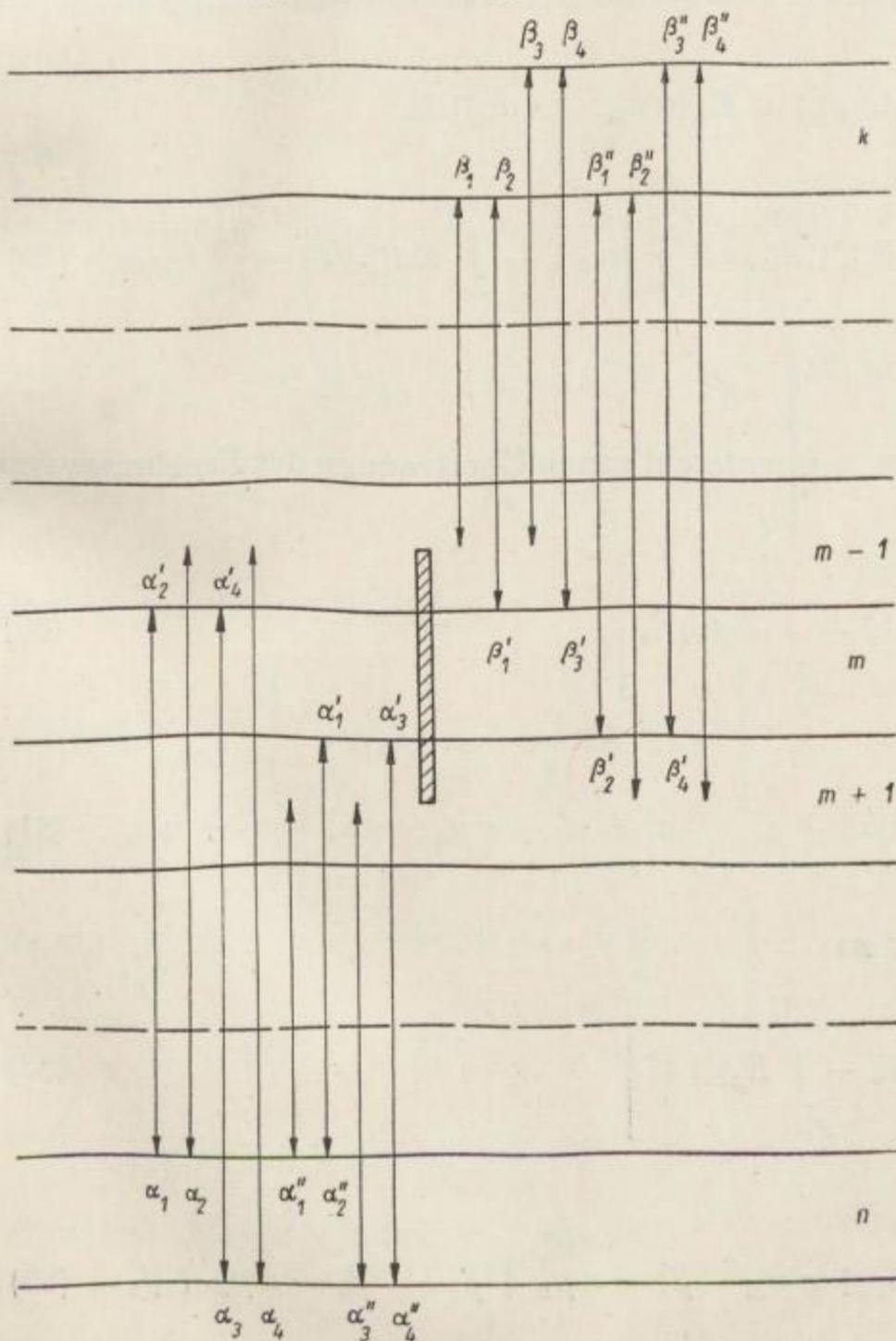


Bild 3. Die Anordnung der Schichten konstanter Mächtigkeit und die Bedeutung der Integrationsgrenzen im Fall a.a.

mit

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{a}{2} \mu_{m-1} + a \sum_{k+1}^{m-2} \mu_i, & \beta_3 &= \beta_1 + a \mu_k, \\ \beta_2 &= \frac{a}{2} \mu_{m-1} + \beta_1, & \beta_4 &= \beta_2 + a \mu_k. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, folgende neue Funktion einzuführen:

$$\begin{aligned} \Theta_2(m-1, k) &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta_3}^{\beta_4} E_2(\zeta) d\zeta \\ &= E_3(\beta_1) - E_3(\beta_2) - E_3(\beta_3) + E_3(\beta_4). \end{aligned} \quad (78)$$

Teil II — mittlere Zählrohrhälfte

**Beitrag von Schicht  $m$** , in der sich die mittlere Zählrohrhälfte befindet:

$$\begin{aligned} N_m^{\text{II}}(m) &= g_m \int_0^a [2 - E_2(x \mu_m) - E_2(a \mu_m - x \mu_m)] dx \\ &= 2 \frac{g_m}{\mu_m} \int_0^{a \mu_m} [1 - E_2(\zeta)] d\zeta = 2 \frac{g_m}{\mu_m} \left[ a \mu_m - \int_0^{a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_m}{\mu_m} \Theta_0(m) \end{aligned} \quad (79)$$

auf Grund der Gleichung (71).

Der Beitrag der Schicht  $n > m$  entsteht durch Übertragung der Ergebnisse von Teil I:

$$N_n^{\text{II}}(m) = \frac{g_m}{\mu_m} \left[ \int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha'_3}^{\alpha'_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] \quad (80)$$

mit

$$\alpha'_1 = a \sum_{m+1}^{n-1} \mu_i, \quad \alpha'_2 = a \mu_m + \alpha'_1, \quad \alpha'_3 = \alpha'_1 + a \mu_n, \quad \alpha'_4 = \alpha'_2 + a \mu_n. \quad (81)$$

**Beitrag von Schicht  $k < m$**

$$N_k^{\text{II}}(m) = \frac{g_k}{\mu_m} \left[ \int_{\beta'_1}^{\beta'_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta'_3}^{\beta'_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] \quad (82)$$

mit

$$\beta'_1 = a \sum_{k+1}^{m-1} \mu_i, \quad \beta'_2 = \beta'_1 + a \mu_m, \quad \beta'_3 = a \mu_k + \beta'_1, \quad \beta'_4 = a \mu_k + \beta'_2. \quad (83)$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\Theta_3(m, n) = \int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha'_3}^{\alpha'_4} E_2(\zeta) d\zeta = E_3(\alpha'_1) - E_3(\alpha'_2) - E_3(\alpha'_3) + E_3(\alpha'_4) \quad (84)$$

und

$$\Theta_4(m, k) = E_3(\beta'_1) - E_3(\beta'_2) - E_3(\beta'_3) + E_3(\beta'_4). \quad (85)$$

Teil III — unteres Zählrohrviertel

**Beitrag von Schicht  $m + 1$ .** Durch Anwendung von (70) auf Schicht  $m + 1$  erhält man unter Berücksichtigung von (75):

$$N_{m+1}^{\text{III}}(m) = \frac{1}{2} g_n \mu_{m+1}^{-1} \Theta_0(m + 1). \quad (86)$$

**Beitrag von Schicht  $n > m + 1$ .** Durch entsprechende Rechnung wie bei Zählrohrteil I erhält man

$$N_n^{\text{III}}(m) = g_{m+1} \mu_{m+1}^{-1} \Theta_5(m + 1, n) \quad (87)$$

mit

$$\Theta_5(m + 1, n) = E_3(\alpha''_1) - E_3(\alpha''_2) - E_3(\alpha''_3) + E_3(\alpha''_4) \quad (88)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \alpha''_1 &= \frac{a}{2} \mu_{m+1} + a \sum_{m+2}^{n-1} \mu_i, & \alpha''_3 &= \alpha''_1 + a \mu_n, \\ \alpha''_2 &= \alpha''_1 + \frac{a}{2} \mu_{m+1}, & \alpha''_4 &= \alpha''_2 + a \mu_n. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

**Beitrag von Schicht  $k < m + 1$**

$$N_k^{\text{III}}(m) = \frac{g_k}{\mu_{m+1}} \left[ \int_{\beta''_1}^{\beta''_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta''_3}^{\beta''_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] \quad (90)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \beta''_1 &= a \sum_{k+1}^m \mu_i, & \beta''_3 &= a \mu_k + \beta''_1, \\ \beta''_2 &= \frac{a}{2} \mu_{m+1} + \beta''_1, & \beta''_4 &= \frac{a}{2} \mu_{m+1} + \beta''_3, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

und

$$\Theta_6(m + 1, k) = \int_{\beta''_1}^{\beta''_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta''_3}^{\beta''_4} E_2(\zeta) d\zeta. \quad (92)$$

Zusammenfassung der Teilergebnisse:

Die Zählrate eines Zählrohres mit  $z = 2a$ , dessen Mittelpunkt in der Mitte der Schicht  $m$  liegt, beträgt:

(In dieser Gleichung ist  $k < m - 1$  und  $n > m + 1$ )

$$\begin{aligned}
 N(m) = & \dots + g_k \left[ \frac{\Theta_2(m-1, k)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_4(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, k)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_{m-1} \left[ \frac{\Theta_0(m-1)}{2\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_4(m, m-1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m-1)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & + g_m \left[ \frac{\Theta_1(m-1, m)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_0(m)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & + g_{m+1} \left[ \frac{\Theta_1(m-1, m+1)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_3(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1)}{2\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_n \left[ \frac{\Theta_1(m-1, n)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_3(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_5(m+1, n)}{\mu_{m+1}} \right] + \dots \quad (93)
 \end{aligned}$$

#### 1.4.2. Fall a.b.

Dieser Fall kann unter Verwendung von Teilergebnissen des Falles a. a. leicht durchgerechnet werden. Die Zählrohrmitte liegt auf der Schichtgrenze zwischen den Schichtgrenzen  $m$  und  $m + 1$ . Dem Meßpunkt erteilen wir die Bezeichnung  $m$ . Da die beiden Zählrohrhälften die Schicht  $m$  bzw.  $m + 1$  jeweils mit ihrer ganzen Länge überstreichen, werden nur die Ergebnisse von Fall a. a., Teil II benötigt. Es treten also nur die Funktionen  $\Theta_0$ ,  $\Theta_3$  und  $\Theta_4$  auf. Man erhält für die Zählrate eines Zählrohres mit  $z = 2a$  für  $k < m$  und  $n > m + 1$ :

$$\begin{aligned}
 N(m) = & \dots + g_k \left[ \frac{\Theta_4(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_4(m+1, k)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_m \left[ \frac{\Theta_0(m)}{\mu_m} + \frac{\Theta_4(m+1, m)}{\mu_{m+1}} \right] + g_{m+1} \left[ \frac{\Theta_3(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_n \left[ \frac{\Theta_3(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_3(m+1, n)}{\mu_{m+1}} \right] + \dots \quad (94)
 \end{aligned}$$

#### 1.4.3. Fall b.a.

Zählrohrlänge gleich Schichtmächtigkeit, Meßpunkt in der Mitte der Schicht  $m$ . Für diese Konfiguration läßt sich die Zählrate sofort auf Grund der bisherigen Resultate angeben ( $k < m < n$ ):

$$N(m) = \dots + \frac{g_k}{\mu_m} \Theta_4(m, k) + \dots + \frac{g_m}{\mu_m} \Theta_0(m) + \dots + \frac{g_n}{\mu_m} \Theta_3(m, n) + \dots \quad (95)$$

#### 1.4.4. Fall b.

Zählrohrlänge gleich Schichtmächtigkeit, Zählrohrmittelpunkt (Meßpunkt) auf der Grenze zwischen den Schichten  $m$  und  $m + 1$ , der Meßpunkt erhält die Bezeichnung  $m$ . Auch für diese Anordnung kann die Zählrate sofort aus den

Ergebnissen des Abschnittes 1.4.1. angegeben werden ( $k < m; m + 1 < n$ ):

$$\begin{aligned}
 N(m) = & \dots + g_k \left[ \frac{\Theta_2(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, k)}{\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_m \left[ \frac{\Theta_0(m)}{2\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m)}{\mu_{m+1}} \right] + g_{m+1} \left[ \frac{\Theta_1(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1)}{2\mu_{m+1}} \right] \\
 & \dots + g_n \left[ \frac{\Theta_1(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_5(m+1, n)}{\mu_{m+1}} \right] + \dots
 \end{aligned} \quad (96)$$

#### 1.4.5. Fall e.a.

Die Zählrohlänge ist gleich der halben Schichtmächtigkeit, der Zählrohrmittelpunkt befindet sich in der Mitte der Schicht  $m$ . Dann erhält man als

Beitrag der Schicht  $m$  zur Zählrate (Bild 4):

$$N_m(m) = g_m \int_{a/4}^{3a/4} [2 - E_2(\mu_m x) - E_2(\mu_m a - \mu_m x)] dx = \frac{g_m}{\mu_m} \Psi_0(m) \quad (97)$$

mit

$$\Psi_0(m) = a \mu_m - 2 E_3\left(\frac{a \mu_m}{4}\right) + 2 E_3\left(\frac{3 a \mu_m}{4}\right).$$

Als Beitrag der Schicht  $n > m$  erhält man

$$N_n(m) = \frac{g_m}{\mu_m} \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_n}{\mu_m} \Psi_1(m, n), \quad (98)$$

$$\Psi_1(m, n) = E_3(\alpha_1) - E_3(\alpha_2) - E_3(\alpha_3) + E_3(\alpha_4)$$

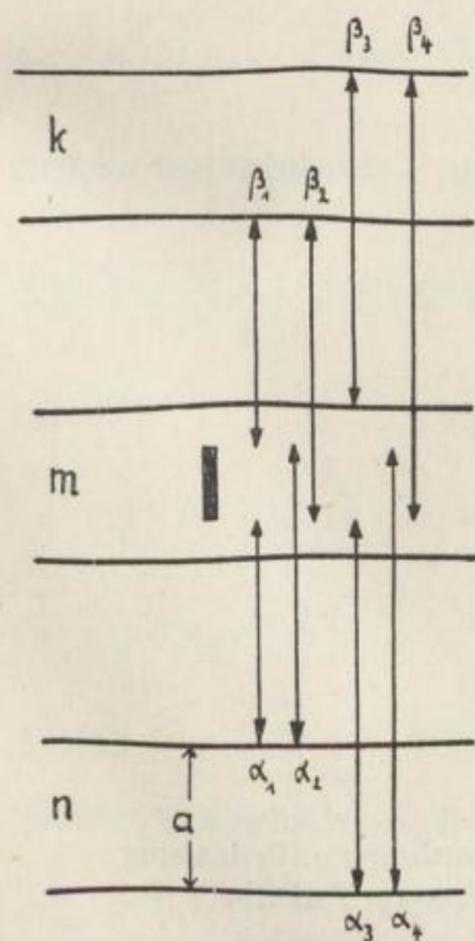


Bild 4. Schichtanordnung und Bedeutung der Integrationsgrenzen im Fall e.a.

mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} a \mu_m + a \sum_{m+1}^{n-1} \mu_i, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + a \mu_n,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} a \mu_m + \alpha_1, \quad \alpha_4 = \alpha_2 + a \mu_n,$$

und von der Schicht  $k < m$ :

$$N_k(m) = \frac{g_k}{\mu_m} \left[ \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta_3}^{\beta_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_k}{\mu_m} \Psi_6(m, k), \quad (99)$$

mit

$$\beta_1 = \frac{1}{4} a \mu_m + a \sum_{k+1}^{m-1} \mu_i, \quad \beta_3 = \beta_1 + a \mu_k,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} a \mu_m + \beta_1, \quad \beta_4 = \beta_2 + a \mu_k,$$

so daß sich die Gesamtzählrate in folgender Weise zusammensetzt ( $k < m < n$ ):

$$N(m) = \dots + \frac{g_k}{\mu_m} \Psi_6(m, k) + \dots + \frac{g_m}{\mu_m} \Psi_0(m) \dots + \frac{g_n}{\mu_m} \Psi_1(m, n) + \dots \quad (100)$$

#### 1.4.6. Fall c.b.

Der Zählrohrmittelpunkt liegt auf der Grenze der Schicht  $m$  zur Schicht  $m+1$ , so daß wieder eine Aufteilung des Zählrohrvolumens in zwei Teile erforderlich ist (Bild 5).

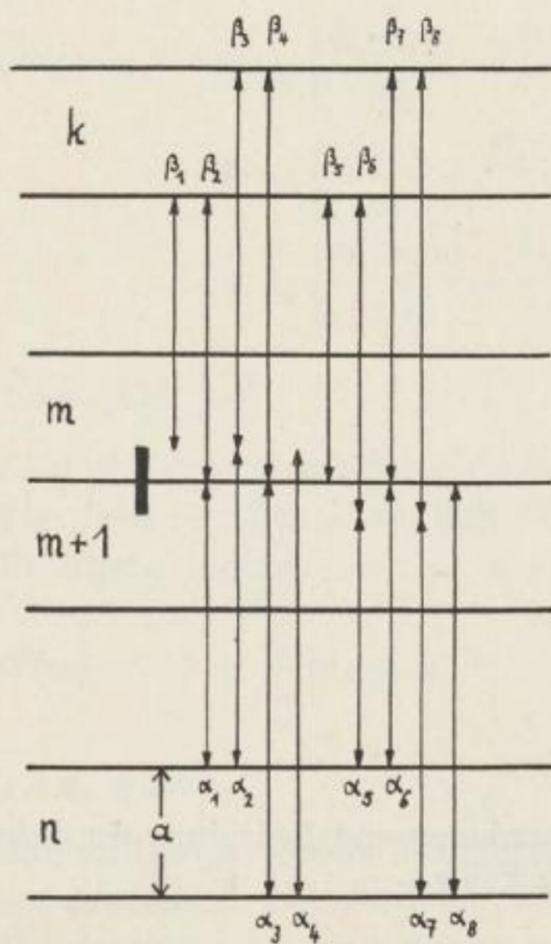


Bild 5. Schichtenanordnung u. Bedeutung der Integrationsgrenzen im Fall c.b.

## Teil I

Beitrag von Schicht  $m$ 

$$\begin{aligned}
 N_m^I(m) &= \frac{g_m}{\mu_m} \int_0^{\frac{1}{4} a \mu_m} [2 - E_2(\zeta) - E_2(a \mu_m - \zeta)] d\zeta \\
 &= \frac{g_m}{\mu_m} \left[ \frac{a \mu_m}{2} - \int_0^{\frac{1}{4} a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\frac{3}{4} a \mu_m}^{a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta \right] \\
 &= \frac{g_m}{\mu_m} \left[ a \mu_m - \int_0^{a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta - \frac{a \mu_m}{2} + \int_{\frac{1}{4} a \mu_m}^{\frac{3}{4} a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta \right],
 \end{aligned}$$

$$N_m^I(m) = \frac{g_m}{2 \mu_m} [\Theta_0(m) - \Psi_0(m)]_0. \quad (101)$$

Beitrag von Schicht  $n > m$ :

$$N_n^I(m) = \frac{g_n}{\mu_m} \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_n}{\mu_m} \Psi_5(m, n) \quad (102)$$

mit

$$\alpha_1 = a \sum_{m+1}^{n-1} \mu_i, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} a \mu_m + \alpha_1, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + a \mu_n, \quad \alpha_4 = \alpha_2 + a \mu_n.$$

Beitrag von Schicht  $k < m$ :

$$N_k^I(m) = \frac{g_m}{\mu_m} \left[ \int_{\beta_1}^{\beta_2} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta_3}^{\beta_4} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_n}{\mu_m} \Psi_4(m, k) \quad (103)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{3}{4} a \mu_m + a \sum_{k+1}^{m-1} \mu_i, & \beta_3 &= a \mu_k + \beta_1, \\
 \beta_2 &= \frac{1}{4} a \mu_m + \beta_1, & \beta_4 &= a \mu_k + \beta_2.
 \end{aligned}$$

## Teil II

Beitrag von Schicht  $m + 1$ :

$$N_{m+1}^{II}(m) = \frac{g_{m+1}}{2 \mu_{m+1}} [\Theta_0(m+1) - \Psi_0(m+1)]. \quad (104)$$

Beitrag von Schicht  $n > m + 1$ :

$$N_n^{\text{II}}(m) = \frac{g_n}{\mu_{m+1}} \left[ \int_{\alpha_5}^{\alpha_6} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_7}^{\alpha_8} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_n}{\mu_{m+1}} \Psi_3(m+1, n) \quad (105)$$

mit

$$\alpha_5 = \frac{3}{4} a \mu_{m+1} + a \sum_{m+2}^{n-1} \mu_i, \quad \alpha_7 = \alpha_5 + a \mu_n,$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} a \mu_{m+1} + \alpha_5, \quad \alpha_8 = \alpha_6 + a_n \mu_n.$$

Beitrag von Schicht  $k < m + 1$ :

$$N_k^{\text{II}}(m) = \frac{g_k}{\mu_{m+1}} \left[ \int_{\beta_5}^{\beta_6} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\beta_7}^{\beta_8} E_2(\zeta) d\zeta \right] = \frac{g_k}{\mu_{m+1}} \Psi_2(m+1, k) \quad (106)$$

mit

$$\beta_5 = a \sum_{k+1}^m \mu_i, \quad \beta_7 = a \mu_k + \beta_5,$$

$$\beta_6 = \frac{1}{4} a \mu_{m+1} + \beta_5, \quad \beta_8 = a \mu_k + \beta_6.$$

Die Gesamtzahlrate setzt sich damit in folgender Weise zusammen ( $k < m$ ,  $m+1 < n$ ):

$$\begin{aligned} N(m) = & \dots + g_k \left[ \frac{\Psi_4(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, k)}{\mu_{m+1}} \right] \\ & \dots + g_m \left[ \frac{\Theta_0(m) - \Psi_0(m)}{2 \mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, m)}{\mu_{m+1}} \right] \\ & + g_{m+1} \left[ \frac{\Psi_5(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1) - \Psi_0(m+1)}{2 \mu_{m+1}} \right] \\ & \dots + g_n \left[ \frac{\Psi_5(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Psi_3(m+1, n)}{\mu_{m+1}} \right] + \dots \end{aligned} \quad (107)$$

Die Ergebnisse dieses Kapitels können einheitlich dargestellt werden:

$$N(m) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_{m,i} g_i \quad -\infty < m < +\infty. \quad (108)$$

Die Bedeutung der Koeffizienten  $b_{m,i}$  ist in Tabelle 1 a für die sechs behandelten Fälle angegeben.

Tabelle 1a

	a. a.	a. b.	b. a.	b. b.	c. a.	c. b.
$b_{m, k}$	$\frac{\Theta_2(m-1, k)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_4(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, k)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_3(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_4(m+1, k)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_3(m, k)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_2(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, k)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Psi_6(m, k)}{\mu_m}$	$\frac{\Psi_4(m, k)}{\mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, k)}{\mu_{m+1}}$
...	...	...	...	...	...	...
$b_{m, m-1}$	$\frac{\Theta_0(m-1)}{2\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_4(m, m-1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m-1)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_4(m, m-1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_4(m+1, m-1)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_4(m, m-1)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_2(m, m-1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m-1)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Psi_6(m, m-1)}{\mu_m}$	$\frac{\Psi_4(m, m-1)}{\mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, m-1)}{\mu_{m+1}}$
$b_{m, n}$	$\frac{\Theta_1(m-1, m)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_0(m)}{\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_0(m)}{\mu_m} + \frac{\Theta_4(m+1, m)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_0(m)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_0(m)}{2\mu_m} + \frac{\Theta_6(m+1, m)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Psi_0(m)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_0(m) - \Psi_0(m)}{2\mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, m)}{\mu_{m+1}}$
$b_{m, m+1}$	$\frac{\Theta_1(m-1, m+1)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_3(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1)}{2\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_3(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_3(m, m+1)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_1(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1)}{2\mu_{m+1}}$	$\frac{\Psi_1(m, m+1)}{\mu_m}$	$\frac{\Psi_5(m, m+1)}{\mu_m} + \frac{\Theta_0(m+1) - \Psi_0(m+1)}{2\mu_{m+1}}$
...	...	...	...	...	...	...
$b_{m, n}$	$\frac{\Theta_1(m-1, n)}{\mu_{m-1}} + \frac{\Theta_2(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_5(m+1, n)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_2(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_3(m+1, n)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Theta_2(m, n)}{\mu_m}$	$\frac{\Theta_1(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Theta_5(m+1, n)}{\mu_{m+1}}$	$\frac{\Psi_1(m, n)}{\mu_m}$	$\frac{\Psi_5(m, n)}{\mu_m} + \frac{\Psi_2(m+1, n)}{\mu_{m+1}}$



## 2. Aufstellung des Auswerteverfahrens

### 2.1. Die umgekehrte Aufgabe — Bestimmung der Materialverteilung aus dem $\gamma$ -Log

Die Bestimmung der räumlichen Verteilung der spezifischen Aktivität aus einem einzigen  $\gamma$ -Bohrlochprofil oder selbst aus einer flächenhaften Vermessung dürfte ebenso wie die Ermittlung der Dichteverteilung aus gravimetrischen Messungen prinzipiell unmöglich sein, wenn man nicht schon von vornherein spezielle Annahmen über die zu bestimmende Verteilung macht. Die Voraussetzungen, daß die Umgebung des Bohrloches senkrecht zu diesem geschichtet ist und daß diese Schichten eine jeweils konstante Materialzusammensetzung und darüber hinaus auch sämtlich die gleiche Mächtigkeit besitzen, stellen bereits sehr weitgehende Annahmen über die Verteilung der spezifischen Aktivität dar. Wenn diese Annahmen auch sehr speziell erscheinen, so stehen sie doch in Beziehung zum tatsächlichen Aufbau eines Hartsalzlagers, das nach *Riemann* im Werragebiet (zitiert bei *Winter*, 1960) aus einer Folge paralleler Schichten mit 0,20 m bis 0,80 m Mächtigkeit besteht, so daß es möglich ist, die mächtigeren Schichten aus mehreren Schichten geringerer Mächtigkeit zusammenzusetzen. Auf solche Verhältnisse sind die Rechnungen des Kapitels 1.4. zugeschnitten, deren Endresultat in Gleichung (108) zusammengefaßt ist.

Im Folgenden sei eine Methode beschrieben, nach der aus einer Folge von Meßwerten der  $\gamma$ -Strahlenintensität die spezifische Aktivität des Materials in der Umgebung des Bohrlochs auf der Grundlage der soeben beschriebenen Voraussetzungen berechnet werden kann. Die Messungen mögen mit einem Zählrohr der effektiven Zählrohlänge  $z$  ausgeführt worden sein, die Meßpunkt-abstände sollen gleich der bei der Auswertung zugrundezulegenden Schichtmächtigkeit  $a$  gewählt werden, wodurch gewährleistet wird, daß ebensoviele Meßwerte wie unbekannte Aktivitäten der jeweiligen Schichten bei Messungen in einem gewissen endlichen Bohrlochabschnitt anfallen. Über die Dichten  $\rho$  und die Massenabsorptionskoeffizienten  $\mu$ , deren Schwankungsbereich wesentlich geringer als der der unbekanntespezifischen Aktivitäten  $q$  sein dürfte, mögen bereits auf andere Weise Angaben ermittelt worden sein, so daß diese als bekannt vorausgesetzt werden können. Betrachtet man eine unendliche Schichtenfolge, so bilden die Gleichungen (108) ein unendliches Gleichungssystem, das die spezifischen Aktivitäten der Schichten mit der Mächtigkeit  $a$  mit den in den Abständen  $a$  gewonnenen Meßwerten verknüpft. Dieses System

kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \dots & & & \dots \\ \dots & b_{m,m-1} & b_{m,m} & b_{m,m+1} & \dots \\ \dots & b_{m+1,m-1} & b_{m+1,m} & b_{m+1,m+1} & \dots \\ \dots & & & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ g_m \\ g_{m+1} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ N(m) \\ N(m+1) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit und nach Methoden zur Lösung eines unendlichen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = b_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (110)$$

wird bei *Kantorowitsch* und *Krylow* (1956) untersucht. Die dort für Gleichungssysteme der Art (110) angegebenen Sätze lassen sich auch auf Gleichungssysteme der Art (109) übertragen.

Bevor wir diese Sätze auf das Gleichungssystem (109) anwenden, müssen wir einige wichtige Eigenschaften der Funktionen  $\Theta_1 \dots \Theta_6$  und  $\Psi_1 \dots \Psi_6$  untersuchen, deren Linearkombinationen gemäß Tabelle 1 durch die  $b_{ik}$  repräsentiert werden. Es ist nach (75)

$$\begin{aligned} \Theta_1(m, n) &= \int_{\alpha_1(n)}^{\alpha_2(n)} E_2(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha_2(n)}^{\alpha_4(n)} E_2(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_2} - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} - \int_{\alpha_0}^{\alpha_4} + \int_{\alpha_0}^{\alpha_3} = \int_{\alpha_1(n)}^{\alpha_2(n)} \dots - \int_{\alpha_2(n)}^{\alpha_4(n)} \dots \end{aligned}$$

mit beliebigem  $\alpha_0$ . Aus den Gleichungen (74) erkennt man sofort, daß

$$\alpha_1(n+1) = \alpha_3(n)$$

und

$$\alpha_2(n+1) = \alpha_4(n)$$

ist, und man erhält für die Summe

$$\begin{aligned} \Theta_1(m, n) + \Theta_1(m, n+1) &= \int_{\alpha_1(n)}^{\alpha_2(n)} + \int_{\alpha_2(n+1)}^{\alpha_4(n+1)} - \int_{\alpha_2(n)}^{\alpha_4(n)} - \int_{\alpha_2(n+1)}^{\alpha_4(n+1)} \\ &= \int_{\alpha_1(n)}^{\alpha_2(n+1)} \dots - \int_{\alpha_2(n)}^{\alpha_4(n)} \dots \end{aligned}$$

und für die Summe über alle Werte  $n$ , für die die Funktion  $\Theta_1(m, n)$  definiert ist:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Theta_1(m, n) = \int_{\alpha_1(m+1)}^{\alpha_2(\infty)} \dots - \int_{\alpha_2(m+1)}^{\alpha_4(\infty)} \dots$$

Es ist<sup>5</sup>

$$\alpha_3(\infty) = \alpha_4(\infty) = \infty$$

<sup>5</sup> Es sei stets  $\mu_i \neq 0$ .

und

$$\alpha_1(m+1) = 0 \quad \alpha_2(m+1) = \frac{1}{2} a \mu_m,$$

also folgt

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Theta_1(m, n) = \int_0^{\frac{1}{2} a \mu_m} E_2(\zeta) d\zeta.$$

(Man beachte, daß die Gleichungen (74) für  $\Theta_1(m-1, n)$  gelten)  
Entsprechende Rechnungen ergeben:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Theta_1(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \Theta_6(m, k) = \frac{1}{2} - E_3\left(\frac{1}{2} a \mu_m\right) \quad (112)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{m-1} \Theta_2(m, k) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \Theta_5(m, n) = E_3\left(\frac{1}{2} a \mu_m\right) - E_3(a \mu_m) \quad (113)$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Theta_3(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \Theta_4(m, k) = \frac{1}{2} - E_3(a \mu_m) \quad (114)$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Psi_1(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \Psi_6(m, k) = E_3\left(\frac{a \mu_m}{4}\right) - E_3\left(\frac{3 a \mu_m}{4}\right) \quad (115)$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Psi_5(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \Psi_2(m, k) = \frac{1}{2} - E_3\left(\frac{a \mu_m}{4}\right) \quad (116)$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \Psi_3(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{m-1} \Psi_4(m, k) = E_3\left(\frac{3}{4} a \mu_m\right) - E_3(a \mu_m). \quad (117)$$

Das zur Untersuchung vorliegende Gleichungssystem

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{ik} g_k = N(i) = N_i \quad (109)$$

möge in die Form

$$g_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{ik} g_k + N_i \quad (118)$$

gebracht werden. Wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{ik}| \leq 1 - \theta, \quad \theta > 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (119)$$

dann bildet (118) ein vollständig reguläres System. Nach *Kantorowitsch-Krylow* (1956) kann die (beschränkte) Hauptlösung eines regulären Systems nach der Methode der sukzessiven Approximation und nach der Reduktionsmethode gefunden werden.

Liegt kein reguläres System vor, so kann das vorliegende System u. U. durch eine geeignete Transformation in ein reguläres überführt werden. Ist dies nicht möglich, so existiert eine Lösung, wenn ein Majorantensystem mit beschränk-

ter nichtnegativer Lösung angegeben werden kann. Wir nennen ein Gleichungssystem

$$G_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{ik} G_k + H_i \quad (120)$$

ein Majorantensystem zu (118), wenn

$$|c_{ik}| \leq C_{ik} \quad \text{und} \quad N_i \leq H_i$$

ist. Dann gilt für die Lösung des Systems (118) die Ungleichung

$$|g_i| \leq G_i.$$

Im nächsten Kapitel wird nach der numerischen Berechnung der Koeffizienten untersucht, für welche Fälle die Gleichungssysteme eine beschränkte Lösung besitzen.

### 2.1.1. Methode der sukzessiven Approximation

Bezeichnet man mit  $g_i^{(n)}$  die  $n$ -te Näherung von  $g_i$ , so kann aus (118) die  $(n+1)$ -te Näherung berechnet werden:

$$g_i^{(n+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{ik} g_k^{(n)} + N_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (121)$$

wenn man als Anfangswert etwa  $g_i^{(0)} = 0$  wählt. Mit diesem Verfahren kann man auch die Lösung eines nichtregulären Systems finden, wenn das zugehörige Majorantensystem eine nichtnegative Lösung besitzt.

### 2.1.2. Reduktionsmethode

Bildet man aus dem unendlichen Gleichungssystem durch Fortlassen aller Gleichungen und Unbekannten von einer gewissen Nummer  $\pm p$  an ein endliches, so kann man die Lösung des unendlichen Gleichungssystems mit Hilfe des Grenzübergangs  $p \rightarrow \infty$  in den Lösungen des endlichen Systems suchen. Die Reduktionsmethode liefert unter den gleichen Bedingungen wie die Methode der sukzessiven Approximation die Hauptlösung des unendlichen Gleichungssystems.

Die Entscheidung für eine der beiden Methoden ist von der Art des vorliegenden Auswertungsproblems abhängig zu machen:

- a) Ist der lineare Absorptionskoeffizient  $\mu$  von Schicht zu Schicht unterschiedlich, so ist es erforderlich, die Koeffizienten  $b_{ik}$  für jede Gleichung und für jedes Auswertungsproblem neu zu berechnen. Im allgemeinen sind diese dann sämtlich voneinander verschieden. Das Gleichungssystem muß in jedem Falle aufs neue gelöst werden. Dabei kann die Anwendung der Methode der sukzessiven Approximation vorteilhaft sein. Die Konvergenz und die Eindeutigkeit der Lösung ist gesondert zu untersuchen.
- b) Einen praktisch wichtigen Fall stellt ein im ganzen Raum durchweg konstanter Absorptionskoeffizient  $\mu$  dar, in dem die Behandlung sehr erleichtert

wird. Hier treten nämlich in jeder Gleichung des Systems die gleichen Koeffizienten auf, wobei gilt

$$\mu b_{m, m \pm q} = b'_{\pm q} \quad \text{für alle } m \text{ und } q. \quad (122)$$

In diesem Falle empfiehlt es sich, mit dem Reduktionsverfahren die zur Matrix  $b_{ik}$  reziproke Matrix  $b_{ik}^{(-1)}$  zu berechnen, so daß das Gleichungssystem (109) nach Reduktion

$$\sum_{k=-p}^{+p} b_{ik} g_k = N_i \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p \quad (123)$$

aufgelöst werden kann<sup>6</sup>

$$\sum_{i=-p}^{+p} \sum_{i=-p}^{+p} {}_p b_{li}^{(-1)} b_{ik} g_k = \sum_{i=-p}^{+p} {}_p b_{li}^{(-1)} N_i = g_l \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm p \quad (124)$$

mit

$$\sum_{i=-p}^{+p} {}_p b_{li}^{(-1)} b_{ik} = \delta_{kl}. \quad (125)$$

Aus der Matrix  ${}_p b_{li}^{(-1)}$  kann nunmehr durch Multiplikation mit einer einspaltigen Matrix, die aus den Meßwerten  $N_i$  gebildet wird, eine neue einspaltige Matrix gemäß (124) erzeugt werden, deren Elemente die gesuchten normierten spezifischen Aktivitäten  $g_l$  bilden. Bei Beschränkung auf endliches  $p$  erhält man ein endliches Auswertungsschema mit  $(2p+1)^2$  Koeffizienten, das die  $2p+1$  Meßwerte mit den  $2p+1$  Aktivitäten  $g_l$  verknüpft. Man erkennt, daß die mittlere Gleichung des Systems (124) mit  $l=0$  offenbar am wenigsten von den Einflüssen der Reduktion, also von der Weglassung der Schichten von einem gewissen Abstand an, beeinflußt wird. Darüber hinaus wirkt sich dieser Randeffekt auf das Aktivitätsmaß  $g_0$  der mittleren Schicht in symmetrischer Weise aus. Damit ist die Möglichkeit gegeben, durch Herausgreifen der mittleren Gleichung des Systems (124) ein gleitendes Auswerteschema zu bilden, nach dem durch Multiplikation der Meßwerte mit gewissen Faktoren und nachfolgender Addition der Produkte das Aktivitätsmaß  $g$  berechnet werden kann. Zu jedem Wert  $g$  tragen von beiden Seiten je  $p$  Meßwerte und der Meßwert aus dem Mittelpunkt bei, der in der Schicht liegt, deren normierte Aktivität berechnet werden soll.

Die Formel (125) repräsentiert  $(2p+1)^2$  Gleichungen für die  $(2p+1)^2$  Koeffizienten der Matrix  ${}_p b_{li}^{(-1)}$ . Da ein gleitendes Auswerteschema benutzt werden soll, interessiert nur die Mittelzeile der reziproken Matrix mit dem Index  $l=0$  und es ist

$$\sum_{k=-p}^{+p} {}_p b_{0,i}^{(-1)} b_{i,k} = \delta_{0,k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p. \quad (126)$$

<sup>6</sup> Der linke Index  $p$  kennzeichnet die reziproke Matrix des reduzierten Systems. Also ist  ${}_{\infty} b_{ik}^{(-1)} = b_{ik}^{(-1)}$ .

Das sind  $(2p + 1)$  Gleichungen für die  $2p + 1$  Unbekannten

$$\frac{1}{\mu} {}^p b_{0,i}^{(-1)} = \bar{b}_i.$$

Das Koeffizientenschema dieses Gleichungssystems ist die transponierte Matrix des Gleichungssystems (109).

Ist speziell  $b_{ik}$  symmetrisch, so gilt

$$\bar{b}_i = \bar{b}_{-i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, p$$

und es kann (126) auf ein System von  $p + 1$  Gleichungen für  $p + 1$  Unbekannte reduziert werden:

$$\mu \bar{b}_0 b_{0,k} + \mu \sum_{i=1}^p \bar{b}_i (b_{-i,k} + b_{i,k}) = \delta_{0,k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, p$$

oder wegen  $b_{ik} = b_{ki}$  und  $\mu_{k,k+q} b = b'_q$

$$\bar{b}_0 \bar{b}'_{-k} + \sum_{i=1}^p \bar{b}_i (b'_k + b'_{-i-k}) = \delta_{0,k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, p. \quad (127)$$

## 2.2. Numerische Berechnung der Funktionen $\Theta, \Psi$

Zur Auswertung gegebener Meßreihen werden die Zahlenwerte der in Kapitel 1.4. eingeführten Funktionen benötigt. Mit einer effektiven Länge  $z = 20$  bis  $35$  cm des Zählvolumens müssen für die Schichtmächtigkeiten  $a$ , die der Auswertung zugrundegelegt werden und die in bestimmten Verhältnissen zu  $z$  stehen, folgende Werte angenommen werden:

$$\text{Fall a) } z = 2a \quad a = 10 \dots 17 \text{ cm}$$

$$\text{Fall b) } z = a \quad a = 20 \dots 35 \text{ cm}$$

$$\text{Fall c) } z = a/2 \quad a = 40 \dots 70 \text{ cm.}$$

Der Massenabschwächungskoeffizient  $\mu/\rho$  liegt in der Größenordnung von  $0,05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  und die Dichte kann zwischen  $1,6$  und  $2,1 \text{ g cm}^{-3}$  variieren, so daß  $0,08 \text{ cm}^{-1} \leq \mu \leq 0,11 \text{ cm}^{-1}$  ist und das Produkt  $a\mu$  in allen drei Fällen im Intervall  $0,8 \leq a\mu \leq 7,7$  liegt.

Die Tabellen der Funktion  $\Theta$  und  $\Psi$  werden für räumlich konstanten Absorptionskoeffizienten  $\mu$  aufgestellt.

Zur Abkürzung wird

$$w = a\mu \quad (128)$$

eingeführt.

Die Funktionen  $E_\nu(x)$  können für  $\nu = 0, 1, 2, \dots, 20$  und für  $x = 0; 0,01; 0,02; \dots, 1,99; 2,00; 2,1; 2,2; \dots, 20,0$  aus den Tabellen von *W. I. Pagurowa* (1959) entnommen werden.

Wegen des im ganzen Raum als konstant vorausgesetzten Absorptionskoeffizienten  $\mu$  sind die Funktionen  $\Theta_i(m, m \pm q)$  und  $\Psi_i(m, m + q)$  nur Funktio-

nen von  $w = a\mu$  und  $q$ , nicht aber von  $m$ . Sie können durch die Integral-Exponential-Funktion  $E_3$  dargestellt werden:

$$\Theta_0(m) = 2w - 1 + 2E_3(w). \quad (129)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1(q) = \Theta_1(m, m+q) = \Theta_6(m, m-q) &= E_3((q-1)w) - E_3\left(\left(q - \frac{1}{2}\right)w\right) \\ &\quad - E_3(qw) + E_3\left(\left(q + \frac{1}{2}\right)w\right), \\ \Theta_2(q) = \Theta_2(m, m-q) = \Theta_5(m, m+q) &= E_3\left(\left(q - \frac{1}{2}\right)w\right) - E_3(qw) \\ &\quad - E_3\left(\left(q + \frac{1}{2}\right)w\right) + E_3((q+1)w), \\ \Theta_3(q) = \Theta_3(m, m+q) = \Theta_4(m, m-q) &= E_3((q-1)w) - 2E_3(qw) \\ &\quad + E_3((q+1)w). \end{aligned} \right\} (130)$$

$$\Psi_0(m) = w - 2E_3\left(\frac{w}{4}\right) + 2E_3\left(\frac{3w}{4}\right). \quad (131)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(q) = \Psi_1(m, m+q) = \Psi_6(m, m-q) &= E_3\left(\left(q - \frac{3}{4}\right)w\right) \\ &\quad - E_3\left(\left(q - \frac{1}{4}\right)w\right) - E_3\left(\left(q + \frac{1}{4}\right)w\right) + E_3\left(\left(q + \frac{3}{4}\right)w\right), \\ \Psi_2(q) = \Psi_2(m, m-q) = \Psi_5(m, m+q) &= E_3((q-1)w) \\ &\quad - E_3\left(\left(q - \frac{3}{4}\right)w\right) - E_3(qw) + E_3\left(\left(q + \frac{1}{4}\right)w\right), \\ \Psi_3(q) = \Psi_3(m, m+q) = \Psi_4(m, m-q) &= E_3\left(\left(q - \frac{1}{4}\right)w\right) \\ &\quad - E_3(qw) - E_3\left(\left(q + \frac{3}{4}\right)w\right) + E_3((q+1)w). \end{aligned} \right\} (132)$$

Diese Größen sind in den Tabellen 2, 3 und 4 in Abhängigkeit von  $w$  und  $q$  dargestellt. Aus diesen können die durch Tabelle 1 und Gleichung (122) definierten Matrixelemente berechnet werden.

Fall a. a.

$$\begin{aligned} b'_0 &= \Theta_0 + 2\Theta_1(1) \\ b'_{\pm 1} &= \frac{1}{2}\Theta_0 + \Theta_1(2) + \Theta_3(1), \\ b'_{\pm i} &= \Theta_1(i+1) + \Theta_2(i-1) + \Theta_3(i) \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (133)$$

Tabelle 2

	$w = 0,4$	0,8	1,2	1,6	2,0
$\Theta_0$	,31457	,88865	1,56787	2,29981	3,06027
$\Psi_0$	,16750	,47921	,85132	1,25330	1,67027
$\Theta_1(1)$	8,272-2	1,823-1	2,632-1	3,242-1	3,691-1
$\Theta_2$	4,743-2	7,893-2	8,731-2	8,306-2	7,339-2
$\Theta_3$	1,298-1	2,613-1	3,396-1	4,072-1	4,425-1
$\Psi_1$	6,071-2	1,153-1	1,442-1	1,546-1	1,535-1
$\Psi_2$	1,194-1	1,827-1	2,272-1	2,625-1	2,922-1
$\Psi_3(1)$	6,449-2	6,190-2	4,998-2	3,833-2	2,872-2
$\Theta_1(2)$	3,110-2	4,062-2	3,574-2	2,722-2	1,932-2
$\Theta_2$	2,147-2	2,230-2	1,578-2	9,704-3	5,576-3
$\Theta_3$	5,257-2	6,292-2	5,152-2	3,692-2	2,490-2
$\Psi_1$	2,572-2	2,992-2	2,359-2	1,613-2	1,030-2
$\Psi_2$	5,430-2	4,582-2	3,281-2	2,240-2	1,505-2
$\Psi_3(2)$	3,368-2	1,979-2	1,007-2	4,940-3	2,398-3
$\Theta_1(3)$	1,527-2	1,271-2	7,268-3	3,615-3	1,693-3
$\Theta_2$	1,109-2	7,427-3	3,442-3	1,396-3	5,307-4
$\Theta_3$	2,636-2	2,014-2	1,071-2	5,021-3	2,223-3
$\Psi_1$	1,299-2	9,691-3	4,987-3	2,242-3	9,446-4
$\Psi_2$	2,898-2	1,516-2	6,910-3	3,046-3	1,331-3
$\Psi_3(3)$	1,878-2	7,003-3	2,309-3	7,416-4	2,370-4

Anmerkung: Für 8,272-1 lies  $8,272 \cdot 10^{-1}$  usw. —  $w = \mu a$

Tabelle 3

	$w = 2,4$	2,8	3,2	4,0
$\Theta_0$	3,83681	4,62268	5,41409	7,00553
$\Psi_0$	2,09433	2,52110	2,94816	3,79848
$\Theta_1(1)$	4,021-1	4,263-1	4,442-1	4,674-1
$\Theta_2$	6,022-2	5,149-2	4,194-2	2,712-2
$\Theta_3$	4,643-1	4,778-1	4,861-1	4,945-1
$\Psi_1$	1,461-1	1,355-1	1,236-1	9,998-2
$\Psi_2$	3,179-1	3,403-1	3,600-1	3,922-1
$\Psi_3(1)$	2,140-2	1,581-2	1,163-2	6,232-3
$\Theta_1(2)$	1,319-2	8,800-2	5,790-3	2,449-3
$\Theta_2$	3,087-3	1,672-3	9,212-4	2,503-4
$\Theta_3$	1,628-2	1,047-2	6,684-3	2,699-3
$\Psi_1$	6,327-3	3,802-3	2,254-3	7,749-4
$\Psi_2$	1,002-2	6,640-3	4,388-3	1,904-3
$\Psi_3(2)$	1,160-3	5,609-4	2,711-4	6,327-5
$\Theta_1(3)$	7,624-4	3,363-4	1,465-4	2,727-5
$\Theta_2$	1,948-4	7,009-5	2,491-5	3,091-6
$\Theta_3$	9,572-4	4,064-4	1,714-4	3,036-5
$\Psi_1$	3,841-4	1,530-4	6,019-5	9,144-6
$\Psi_2$	5,800-4	2,528-4	1,102-4	2,097-5
$\Psi_3(3)$	7,577-5	2,428-5	7,794-6	8,062-7

Anmerkung: Für 4,021-1 lies  $4,021 \cdot 10^{-1}$  usw. —  $w = \mu a$

Tabelle 4

	$w = 4,8$	5,6	6,4	7,2
$\Theta_0$	8,60220	10,60089	11,80036	13,40015
$\Psi_0$	4,64093	5,47523	6,30239	7,12909
$\Theta_1(1)$	4,806-1	4,882-1	4,928-1	4,955-1
$\Theta_2$	1,723-2	1,089-2	6,852-3	4,322-3
$\Theta_3$	4,978-1	4,991-1	4,996-1	4,998-1
$\Psi_1$	7,927-2	6,229-2	4,877-2	3,815-2
$\Psi_2$	4,169-1	4,358-1	4,502-2	4,613-1
$\Psi_3(1)$	3,311-3	1,749-3	9,206-4	4,834-4
$\Theta_1(2)$	1,022-3	4,246-4	1,736-4	7,357-5
$\Theta_2$	6,925-5	1,911-5	8,251-6	1,466-6
$\Theta_3$	1,092-3	4,437-4	1,818-4	7,504-5
$\Psi_1$	2,631-4	8,904-5	3,017-5	1,026-5
$\Psi_2$	8,213-4	3,523-4	1,511-4	6,465-5
$\Psi_3(2)$	1,475-5	3,442-6	8,011-7	1,864-7
$\Theta_1(3)$	5,023-6	9,243-7	1,705-7	3,158-8
$\Theta_2$	3,799-1	4,668-8	5,754-9	7,121-10
$\Theta_3$	5,403-6	9,710-7	1,762-7	3,229-8
$\Psi_1$	1,376-6	2,068-7	3,118-8	4,721-9
$\Psi_2$	3,991-6	7,595-7	1,446-7	2,771-8
$\Psi_3(3)$	8,363-8	8,688-9	9,035-10	9,415-1

Anmerkung: Für 4,806-1 lies  $4,806 \cdot 10^{-1}$  usw. —  $w = \mu a$

## Fall a. b.

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= b'_1 = \Theta_0 + \Theta_3(1), \\
 b'_{-i} &= \Theta_3(i) + \Theta_3(i+1) \quad i \geq 1, \\
 b'_i &= \Theta_3(i-1) + \Theta_3(i) \quad i \geq 2.
 \end{aligned} \tag{134}$$

## Fall b. a.

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= \Theta_0, \\
 b'_{\pm i} &= \Theta_3(i) \quad i \geq 1.
 \end{aligned} \tag{135}$$

## Fall b. b.

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= b'_1 = \frac{1}{2} \Theta_0 + \Theta_1(1) \\
 b'_{-i} &= \Theta_1(i+1) + \Theta_3(i) \quad i \geq 1, \\
 b'_i &= \Theta_1(i) + \Theta_2(i-1) \quad i \geq 2.
 \end{aligned} \tag{136}$$

## Fall c. a.

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= \Psi_0 \\
 b'_{\pm i} &= \Psi_1(i) \quad i \geq 1.
 \end{aligned} \tag{137}$$

Fall e. b.

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= b'_1 = \frac{1}{2} (\Theta_0 - \Psi_0) + \Psi_2(1), \\
 b'_{-i} &= \Psi_2(i+1) + \Psi_3(i) & i \geq 1, \\
 b'_i &= \Psi_2(i) + \Psi_3(i-1) & i \geq 2.
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

Diese Größen sind in den Tabellen 5, 6 und 7 für die in der Praxis vorkommenden Werte des Argumentes  $w$  angegeben.

Tabelle 5

Fall a.a.

$w$	$b'_0$	$b'_{\pm 1}$	$b'_{\pm 2}$	$b'_{\pm 3}$
0,8	1,2533	,7462	,15456	,04686
1,6	2,9482	1,5843	,12360	,01527
2,4	4,6410	2,3959	,07736	,00409
3,2	6,3025	3,1989	,04877	,00109
4,0	7,9403	3,9997	,02985	,00028

Fall a.b.

$w$	$b'_0 = b'_1$	$b'_2 = b'_{-1}$	$b'_3 = b'_{-2}$	$b'_4 = b'_{-3}$
0,8	1,1500	,3242	,08306	,02722
1,6	2,7070	,4441	,04194	,00579
2,4	4,3011	,4806	,01724	,00102
3,2	5,9002	,4928	,00686	,00018
4,0	7,5000	,4972	,00273	,00003

 $w = \mu a$ 

Tabelle 6

Fall b.a.

$w$	$b'_0$	$b'_{\pm 1}$	$b'_{\pm 2}$	$b'_{\pm 3}$
1,6	2,2998	,4072	,03692	,00502
2,4	3,8368	,4643	,01628	,00096
3,2	5,4141	,4861	,00668	,00017
4,0	7,0055	,4945	,00270	,00003
4,8	8,6022	,4978	,00109	,00001

Fall b.b.

$w$	$b'_0 = b'_1$	$b'_2 = b'_{-1}$	$b'_3 = b'_{-2}$	$b'_4 = b'_{-3}$
1,6	1,4741	,1103	,01332	,00195
2,4	2,3205	,0734	,00385	,00024
3,2	3,1512	,04773	,00107	,00003
4,0	3,9702	,02957	,00028	,00000
4,8	4,7817	,01825	,00007	,00000

 $w = \mu a$

Tabelle 7

Fall c.a.

$w$	$b'_0$	$b'_{\pm 1}$	$b'_{\pm 2}$	$b'_{\pm 3}$
2,4	2,0943	,1461	,00633	,00038
3,2	2,9482	,1236	,00225	,00006
4,0	3,7985	,09998	,00077	,00001
4,8	4,6409	,07927	,00026	—
5,6	5,4752	,06229	,00009	—
6,4	6,3024	,04877	,00003	—

Fall c.b.

$w$	$b'_0 = b'_1$	$b'_2 = b'_{-1}$	$b'_3 = b'_{-2}$	$b'_4 = b'_{-3}$
2,4	1,1899	,03162	,00174	,00011
3,2	1,5930	,01602	,00038	,00001
4,0	1,9957	,00814	,00008	—
4,8	2,3975	,00413	,00002	—
5,6	2,9987	,00183	—	—
6,4	3,1992	,00107	—	—

 $w = \mu a$ Somit gilt z. B. für  $w = 3,2$  im Falle b.a.:

$$N_m = \dots + 0,00017 g_{m-3} + 0,00668 g_{m-2} + 0,4861 g_{m-1} \\ + 5,4141 g_m + 0,4861 g_{m+1} + 0,00668 g_{m+2} + 0,00017 g_{m+3} + \dots$$

und im Falle b.b.:

$$N_m = \dots + 0,00003 g_{m-3} + 0,00107 g_{m-2} + 0,04773 g_{m-1} + \\ + 3,1512 g_m + 3,1512 g_{m+1} + 0,04773 g_{m+2} + 0,00107 g_{m+3} \\ + 0,00003 g_{m+4}.$$

Zur Untersuchung der Lösbarkeit der umgekehrten Aufgabe — Berechnung der Aktivitäten aus den Meßwerten — ist festzustellen, ob das aufzulösende unendliche Gleichungssystem in der Form (118) ein reguläres System bildet, bzw. in ein solches umgewandelt werden kann. Dazu benötigen wir die Summe aller Koeffizienten

$$\sigma(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b'_k \quad w = \mu a. \quad (139)$$

Man erhält in den sechs diskutierten Fällen:

$$\text{a.a.} \quad \sigma(w) = 2 \Theta_0 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (\Theta_1(q) + \Theta_2(q) + \Theta_3(q))$$

$$\text{a.b.} \quad \sigma(w) = 2 \Theta_0 + 4 \sum_{q=1}^{\infty} \Theta_3(q)$$

$$\text{b.a.} \quad \sigma(w) = \Theta_0 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \Theta_3(q)$$

$$\text{b.b.} \quad \sigma(w) = \Theta_0 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (\Theta_1(q) + \Theta_2(q))$$

$$\text{c.a.} \quad \sigma(w) = \Psi_0 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \Psi_1(q)$$

$$\text{c.b.} \quad \sigma(w) = \Theta_0 - \Psi_0 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (\Psi_2(q) + \Psi_3(q)).$$

Mit (112) und (129) erhalten wir Tabelle 8:

Tabelle 8

Fall:	a. a.	b. a.	c. a.
	a. b.	b. b.	c. b.
$\sigma(w) =$	$4 w$	$2 w$	$w$

Für die interessierenden Fälle ist also stets  $\sigma(w) > 1$ .

Dividiert man zum Zwecke der Umwandlung des Gleichungssystems in ein reguläres System sämtliche Gleichungen durch eine positive Konstante  $K$ , so erhält man das System

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{K} b_{i,m} g_m = N_i K^{-1}. \quad (140)$$

Es lautet nach Umwandlung in die Normalform (118)

$$g_i = - \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq i)}}^{+\infty} \frac{1}{K} b_{i,m} g_m + \frac{K - b_{i,i}}{K} g_i + \frac{1}{K} N_i \quad (141)$$

und ist nach (119) vollständig regulär, wenn für  $\theta > 0$  gilt

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq i)}}^{+\infty} \frac{1}{K} b_{i,m} + \frac{1}{K} |K - b_{i,i}| \leq 1 - \theta$$

oder

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m \neq i)}}^{+\infty} b_{i,m} + |K - b_{i,i}| \leq (1 - \theta) K. \quad (142)$$

Führen wir in diese Gleichung gemäß (122)  $b'_i$  und nach (143)  $\sigma(w)$  ein, so gilt mit  $\mu K = K'$ :

$$\sigma(w) - b'_0 + |K' - b'_0| \leq (1 - \theta) K'$$

und mit  $K' < b'_0$  ist

$$\sigma(w) - b'_0 + b'_0 - K' \leq (1 - \theta) K'$$

$$\sigma(w) \leq (2 - \theta) K' < (2 - \theta) b'_0$$

also muß sein

$$\sigma(w) < 2 b'_0. \quad (143)$$

Für  $b'_0 < K'$  gilt

$$\sigma(w) - 2b'_0 + K' \leq (1 - \theta) K'$$

$$\sigma(w) \leq 2b'_0 - \theta K'$$

und in Übereinstimmung mit (143) ist zu fordern<sup>7</sup>

$$\boxed{b'_0 > \frac{1}{2} \cdot \sigma(w)} \quad (144)$$

wenn eine Umwandlung des gegebenen Gleichungssystems in ein reguläres möglich sein soll. Den Tabellen 5 bis 8 entnimmt man, daß (144) nur in den Fällen b.a. und c.a. erfüllt ist (Siehe auch Tabelle 9).

Tabelle 9

$w$	$b'_0$			$b'_0$			$b'_0$		
	a. a.	a. b.	$\frac{1}{2} \sigma(w)$	b. a.	b. b.	$\frac{1}{2} \sigma(w)$	c. a.	c. b.	$\frac{1}{2} \sigma(w)$
2,4	4,6	4,3	4,8	3,84	2,32	2,4	2,09	1,19	1,2
3,2	6,3	5,9	6,4	5,41	3,15	3,2	2,95	1,59	1,6
4,0	7,9	7,5	8,0	7,01	3,97	4,0	3,80	1,996	2,0

Zur Bildung des Auswerteschemas entsprechend den Angaben des Kapitels 2.1. ist die Lösung des aus (127) für  $p \rightarrow \infty$  entstehenden unendlichen Gleichungssystems zu suchen. Auf Grund der Transformierbarkeit in ein reguläres System ist die Existenz einer beschränkten Lösung nur in den Fällen b.a. und c.a.

<sup>7</sup> Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r},$$

bei dem die Diagonalglieder groß gegenüber den Nichtdiagonalgliedern sind, kann nach *Rothe und Schmeidler* (1956, S. 104) das „Verfahren in Einzelschritten“ benutzt werden. Die Konvergenz dieses Verfahrens wird dort unter der Bedingung bewiesen, daß in jeder Gleichung des Systems die Summe der Beträge der Nichtdiagonalglieder kleiner als das Diagonalglied ist:

$$\sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}| < |a_{\alpha\alpha}|.$$

Durch Addition von  $|a_{\alpha\alpha}|$  auf beiden Seiten erhält man

$$|a_{\alpha\alpha}| + \sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}| < 2|a_{\alpha\alpha}|.$$

Wegen

$$\sigma(w) = |a_{\alpha\alpha}| + \sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}|$$

und

$$|a_{\alpha\alpha}| = b'_0$$

ist diese Bedingung identisch mit (144).

Folglich gilt die angegebene Konvergenzbedingung für das Verfahren in Einzelschritten nicht nur für die dort behandelten endlichen linearen Gleichungssysteme, sondern auch für unendliche Gleichungssysteme.

evident. Zur Untersuchung des Falles a.a. betrachten wir zum Vergleich folgendes Gleichungssystem für  $2m + 1$  Unbekannte:

$$\begin{aligned}
 a x_{-m} + x_{-m+1} &= 0 \\
 x_{-m} + a x_{-m+1} + x_{-m+2} &= 0 \\
 x_{-m+1} + a x_{-m+2} + x_{-m+3} &= 0 \\
 \dots & \\
 x_{-2} + a x_{-1} + x_0 &= 0 \\
 x_{-1} + x_0 + x_1 &= A \\
 x_0 + a x_1 + x_2 &= 0 \\
 \dots & \\
 x_{m-3} + a x_{m-2} + x_{m-1} &= 0 \\
 x_{m-2} + a x_{m-1} + x_m &= 0 \\
 x_{m-1} + a x_m &= 0,
 \end{aligned} \tag{145}$$

Die Lösung dieses Systems läßt sich durch Gegenbauersche Polynome darstellen<sup>8</sup>

$$x_0 = \frac{\left( C_m^1 \left( \frac{a}{2} \right) \right)}{\left( C_{2m+1}^1 \frac{a}{2} \right)} A \tag{146}$$

und diese durch hypergeometrische Funktionen ausdrücken (*Magnus-Oberhettinger*, 1948, S. 99), so daß man mit den für diese gültigen Rekursionsformeln erhält

$$x_0 = \frac{{}_2F_1 \left( -\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; -m; \frac{4}{a^2} \right)}{a {}_2F_1 \left( -\frac{m}{2}, -\frac{1+m}{2}; -m; \frac{4}{a^2} \right)} A. \tag{146a}$$

Speziell für  $a = 2$  ergibt sich nach einigen Umwandlungen

$$x_0 = \frac{m+1}{2} A. \tag{147}$$

Ein solches Gleichungssystem besitzt also für  $m \rightarrow \infty$  keine beschränkte Lösung. Das Gleichungssystem (145), geschrieben in der Form

$$x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} = \delta_{0,i} A \tag{148}$$

können wir in die Normalform

$$x_i = x_{i-1} + 3x_i + x_{i+1} - \delta_{0,i} A \tag{149}$$

bringen. Die Gleichungssysteme im Falle a.a., die wir nach Division des Systems (127) durch  $\frac{1}{2} b'_0$  erhalten (um die Hauptdiagonalglieder denen von (148)

<sup>8</sup> Siehe Anhang C.

gleich zu machen), lauten mit  $p \rightarrow \infty$

$$\dots + 2 \frac{b'_{-2}}{b'_0} \bar{b}_{i-2} + 2 \frac{b'_{-1}}{b'_0} \bar{b}_{i-1} + 2 \bar{b}_i + 2 \frac{b'_1}{b'_0} \bar{b}_{i+1} + \dots = \frac{2}{b'_0} \delta_{0,i}$$

und in Normalform

$$\bar{b}_i = \dots + 2 \frac{b'_{-2}}{b'_0} \bar{b}_{i-2} + 2 \frac{b'_{-1}}{b'_0} \bar{b}_{i-1} + 3 \bar{b}_i + 2 \frac{b'_{i+1}}{b'_0} \bar{b}_{i+1} + \dots - \frac{2}{b'_0} \delta_{0,i}. \quad (150)$$

Da nach Tabelle 5 stets  $b'_0 < 2 b'_{\pm 1}$  ist, bildet (150) ein Majorantensystem zu (149), dessen Lösung laut (147) nicht endlich ist. Folglich besitzt auch (150) keine endliche Lösung.

Die umgekehrte Aufgabe besitzt im Falle a.a. keine endliche Lösung.

Zur Lösung im Falle b.b.

Die numerische Auflösung der Gleichungssysteme nach dem Reduktionsverfahren führt man hier wie in den anderen Fällen am vorteilhaftesten mit dem Schema von *Banachiewicz* aus. Dabei zeigt es sich, daß man schon mit relativ wenig Gleichungen (ca. 7–9) eine recht gute Näherung der Lösung der unendlichen Systeme erhält. Aus dem Vergleich der Lösung mit der exakten Lösung, die sich für (145) für  $a > 2$  angeben läßt, kann man schließen, daß der dabei auftretende relative Fehler nur ca.  $10^{-3}$  beträgt. In Anbetracht der bei Zählrohrmessungen zu erzielenden Meßgenauigkeit dürfte diese Genauigkeit praktisch ausreichend sein.

Die Lösung  $x_0$  des Systems (145) lautet für  $a > 2$

$$x_0 = (a^2 - 4)^{-1/2}. \quad (151)$$

Für  $a = 2,4$  beträgt die exakte Lösung  $x_0 = 0,75378$  und der Näherungswert aus der reduzierten Gleichung mit  $m = 5$   $x_0 = 0,75292$ .

Die Systeme (126) zur Berechnung der Mittelzeile der reziproken Matrix zeichnen sich in den Fällen a.b., b.b., und c.b. dadurch aus, daß die Glieder der Hauptdiagonalen gleich denen auf einer benachbarten Diagonalen sind. Wir werden eine Untersuchung des Falles b.b. für  $w = 3,2$  durchführen. Hier lautet das Gleichungssystem mit  $p = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 3,15120 & ,04773 & ,00107 & ,00003 & 0 & 0 & 0 \\ 3,15120 & 3,15120 & ,04773 & ,00107 & \dots & & \\ ,04773 & 3,15120 & 3,15120 & ,04773 & \dots & & \\ ,00107 & ,04773 & 3,15120 & 3,15120 & \dots & & \\ ,00003 & ,00107 & \dots & & & & \\ 0 & ,00003 & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_{-3} \\ \bar{b}_{-2} \\ \bar{b}_{-1} \\ \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Die Konvergenz gegen die Lösung des unendlichen Gleichungssystems ist gut, jedoch sind die sich ergebenden Koeffizienten sehr schlecht für ein Auswerte-

schema geeignet. Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{-3} &= + 10^{-7} & \bar{b}_0 &= + 0,3271 \\ \bar{b}_{-2} &= - 3,6 \cdot 10^{-5} & \bar{b}_1 &= - 0,3319 \\ \bar{b}_{-1} &= - 4,8 \cdot 10^{-3} & \bar{b}_2 &= + 0,3319 \\ & & \bar{b}_3 &= - 0,3270 . \end{aligned}$$

Wird das Gleichungssystem (152) auf 15 Unbekannte erweitert, so erhält man folgende Lösung:

$$\begin{aligned} |\bar{b}_{-7}| \cdots |\bar{b}_{-4}| &< 10^{-8} \quad \bar{b}_3, \bar{b}_{-2}, \bar{b}_{-1} \text{ wie oben} \\ \bar{b}_0 &= 0,3271 \quad \bar{b}_1 = - \bar{b}_2 = \bar{b}_3 = - \bar{b}_4 = \bar{b}_5 = - \bar{b}_6 = - 0,3319 \\ \bar{b}_7 &= - 0,3270 . \end{aligned}$$

Schon aus diesen Werten erkennt man, daß die Beträge der Koeffizienten  $b_i$  für  $i > 0$ , die sich aus dem unendlichen Gleichungssystem ergeben, konstant sind. Zum Vergleich sei folgendes System betrachtet, das aus (152) dadurch entsteht, daß nur die Glieder mit den größten Beträgen beibehalten werden, während die anderen gleich Null gesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} \cdots & & & & & \cdots \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \cdots & & & & & & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} . \quad (153)$$

Wie man sich leicht überzeugt, lautet dessen Lösung

$$\begin{aligned} x_i &= 0 & \text{für} & & i < 0 \\ x_i &= (-1)^i & \text{für} & & i \geq 0 . \end{aligned}$$

Die Lösung von (153) ist zwar wie auch die von (152) beschränkt, sie konvergiert aber nicht für  $i \rightarrow \infty$  gegen Null. Auf Grund dieser Eigenschaft ist für das Auswerteverfahren ein unendliches Multiplikationsschema zu verwenden, was für praktische Zwecke außerordentlich unhandlich ist. Überdies gehen bei der Auswertung die Meßwerte aus unmittelbarer Nachbarschaft neben der Schicht, in der die spezifische Aktivität bestimmt werden soll, in gleicher Weise in das Ergebnis ein wie die Meßwerte, die in sehr großer Entfernung bestimmt wurden.

Die gleichen Verhältnisse liegen in den Fällen a.b. und c.b. vor, so daß festgestellt werden muß:

Die Fälle a.b., b.b. und c.b.  
sind als Grundlage eines  
Auswerteverfahrens ungeeignet.

Es bleiben also nur noch die Fälle b.a. und c.a. übrig. Für diese wurde bereits nachgewiesen (siehe Tab. 9), daß die auftretenden unendlichen Gleichungssysteme in vollständig reguläre Systeme transformiert werden können. Vollständig reguläre Systeme besitzen aber beschränkte Lösungen  $\bar{b}_i$ , die für  $i \rightarrow \pm \infty$  gegen Null konvergieren (Kantorowitsch-Krylow, 1956).

Einige Lösungen sind in Tab. 10 zusammengestellt. Umfangreichere Angaben sind — unter Berücksichtigung des endlichen Bohrlochdurchmessers — den Bildern 9 bis 15 zu entnehmen.

Tabelle 10. Koeffizienten der reziproken Matrix für  $w = 3,2$

	b. a.	c. a.
$\bar{b}_0$	,1877	,3393
$\bar{b}_{\pm 1}$	— ,01695	— ,01422
$\bar{b}_{\pm 2}$	,0013001	,0003383
$\bar{b}_{\pm 3}$	— ,0001024	— ,0000102
$\bar{b}_{\pm 4}$	,0000078	,0000005

### 2.3. Die Berücksichtigung des endlichen Bohrlochradius

In den vorangehenden Kapiteln wurde ein vernachlässigbar kleiner Bohrlochradius vorausgesetzt. Das entspricht jedoch nicht immer den tatsächlichen Verhältnissen. Unter der Annahme eines konstanten Absorptionskoeffizienten  $\mu$  erhalten wir für die Strahlungsintensität im Punkt  $p$  auf der Achse eines Bohrlochs vom Radius  $r_0$  (Bild 6)

$$I(p) = q_n q_n K' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_1+a} \frac{e^{-\mu \sqrt{r^2+x^2}}}{r^2+x^2} r dr dx. \quad (154)$$

Mit

$$E_1(t) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-tu}}{u} du$$

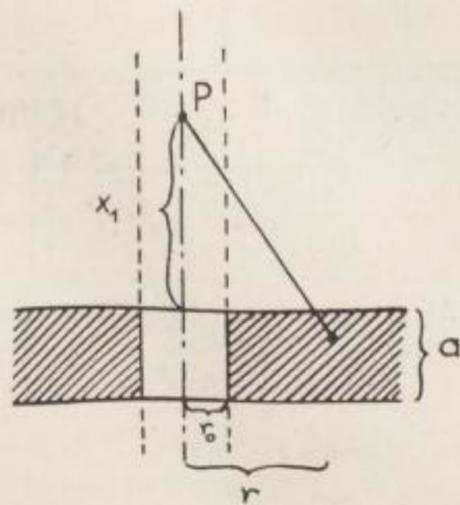


Bild 6. Zur Integration der Gleichung (154)

wird

$$I(p) = 2\pi q_n \varrho_n K' \int_{x_1}^{x_1+a} E_1(\mu \sqrt{r_0^2 + x^2}) dx. \quad (155)$$

Diese Integration bereitet gewisse Schwierigkeiten. Mit der Substitution

$$r_0^2 + x^2 = t^2$$

wird

$$I(p) = 2\pi \varrho_n q_n K' \int_{\sqrt{r_0^2+x_1^2}}^{\sqrt{r_0^2+(x_1+a)^2}} E_1(\mu t) \frac{t dt}{\sqrt{t^2-r_0^2}}. \quad (156)$$

Partielle Integration ergibt

$$I(p) = 2\pi q_n \varrho_n K' \left[ x E_1(\mu \sqrt{r_0^2 + x^2}) \Big|_{x=x_1}^{x_1+a} + \int_{\sqrt{r_0^2+x_1^2}}^{\sqrt{r_0^2+(x_1+a)^2}} \frac{\sqrt{t^2-r_0^2}}{t} e^{-\mu t} dt \right]. \quad (157)$$

Wegen  $t > r_0$  im Integrationsbereich kann unter dem letzten Integral eine Reihenentwicklung ausgeführt und gliedweise integriert werden.

$$\begin{aligned} \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{t} \sqrt{t^2 - r_0^2} e^{-\mu t} dt &= \int_{\dots}^{\dots} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{t^2}} e^{-\mu t} dt \quad \tau = \mu t \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{i} \int_{\dots}^{\dots} \frac{(\mu r_0)^{2i}}{\tau^{2i}} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ -e^{-\tau} \Big|_{\dots}^{\dots} - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{i} (\mu r_0)^{2i} \frac{E_{2i}(\mu t)}{(\mu t)^{2i-1}} \Big|_{\dots}^{\dots} \right\} \end{aligned} \quad (158)$$

mit

$$E_\nu(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xu}}{u^\nu} du = x^{\nu-1} \int_x^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau^\nu} d\tau. \quad (159)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I(p) &= 2\pi q_n \varrho_n \mu^{-1} K' \left\{ \mu (x_1 + a) E_1(\mu \sqrt{r_0^2 + (x_1 + a)^2}) \right. \\ &\quad - \mu x_1 E_1(\mu \sqrt{r_0^2 + x_1^2}) - e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + (x_1 + a)^2}} + e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + x_1^2}} \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{i} (\mu r_0)^{2i} \left[ \frac{E_{2i}(\mu \sqrt{r_0^2 + (x_1 + a)^2})}{(\mu \sqrt{r_0^2 + (x_1 + a)^2})^{2i-1}} - \frac{E_{2i}(\mu \sqrt{r_0^2 + x_1^2})}{(\mu \sqrt{r_0^2 + x_1^2})^{2i-1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (160)$$

Zur Berechnung der gemessenen Zählrate ist dieser Ausdruck gemäß (69) über das Zählrohrvolumen zu integrieren (Bild 7a):

$$N = \int_{(v)} I dv = F \int_0^z I dx_1.$$

Diese Integration ist wesentlich komplizierter als die soeben beschriebene, da hierbei Integrale der Form

$$\int \frac{E_\nu(\tau)}{\tau^\sigma} d\tau \quad (\nu, \sigma \text{ ganz}) \quad (161)$$

auftreten, die sich nicht auf bekannte Funktionen zurückführen lassen. Da mit der Berechnung dieser Integrale, die als Elemente in Doppelreihen auftreten, ein sehr großer Aufwand verknüpft ist, wird die Berücksichtigung des Einflusses eines endlichen Bohrlochdurchmessers mittels einer Näherungsmethode vorgenommen (Bild 7b). Dazu werden die  $\gamma$ -Strahlenintensitäten  $I^{(0)}$  und  $I^{(r)}$  für die Mitte des Zählrohres für  $r_0 = 0$  und für  $r_0 \neq 0$  berechnet und den Zählraten  $N$  zugeordnet:

$$\begin{array}{lll} r_0 = 0 & I = I^{(0)} & N = N^{(r)} \\ r_0 \neq 0 & I = I^{(r)} & N = N^{(r)}. \end{array}$$

Dann gilt näherungsweise

$$x = \frac{I^{(r)}(P)}{I^{(0)}(P)} \approx \frac{N^{(r)}}{N^{(0)}} \quad (162)$$

und wir erhalten einen vom Bohrlochradius abhängigen Korrekturfaktor  $x$ , der an den Koeffizienten  $b'_i$  (Tab. 6 u. 7) anzubringen ist. Da nur die Fälle b.a. und c.a. für ein Auswerteverfahren Bedeutung besitzen, genügt die Berechnung der Korrekturfaktoren für diese Fälle, in denen die Zählrohrmittelpunkte überdies in der Mitte der den Auswerteverfahren zugrundegelegten Schichten liegen. Entsprechend der Bezeichnungsweise des 1.3. Kapitels erhalten wir für Meßpunkte  $P$  in der Mitte der aktiven Schicht

$$I_0^{(0)}(P) = 4\pi K' \frac{q_0 q_0}{\mu} \left[ 1 - E_2\left(\frac{a\mu}{2}\right) \right] \quad (163)$$

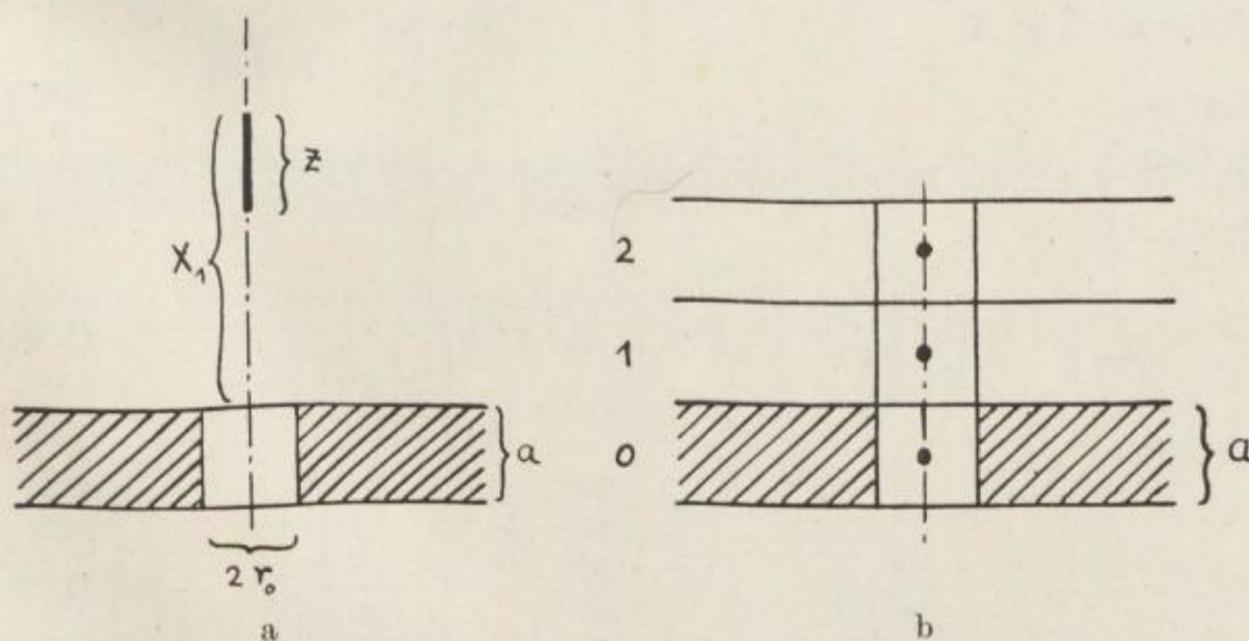


Bild 7a. Zur Berücksichtigung der Detektorlänge bei nicht verschwindendem Bohrlochradius

Bild 7b. Lage der Punkte, in denen die Korrekturfaktoren aus dem Intensitätsverhältnis berechnet werden

und für einen endlichen Bohrlochradius  $r_0$

$$I_0^{(r)}(P) = 4\pi K' \frac{q_0 q_0}{\mu} \left\{ e^{-\mu r_0} + \frac{\mu a}{2} E_1 \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right) - e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}}} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} (\mu r_0)^{2i} \left[ \frac{E_{2i}(\mu r_0)}{(\mu r_0)^{2i-1}} - \frac{E_{2i} \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right)}{\left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right)^{2i-1}} \right] \right\}. \quad (164)$$

Die Konvergenz der hierin auftretenden unendlichen Reihe muß noch bewiesen werden. Wir untersuchen zuerst die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} (\mu r_0)^{2i} \frac{E_{2i}(\mu r_0)}{(\mu r_0)^{2i-1}} = \mu r_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} E_{2i}(\mu r_0), \quad (165)$$

wobei wir für  $E_\nu(y)$  den für große  $\nu$  gültigen asymptotischen Ausdruck (*Pagurova*, 1959) verwenden

$$E_\nu(y) = \frac{e^{-y}}{y + \nu} \left( 1 + \frac{\nu}{(y + \nu)^2} + \dots \right) \approx \frac{e^{-y}}{y + \nu}, \quad (166)$$

so daß für die zu untersuchende Reihe (165) folgender Näherungsausdruck gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \approx \mu r_0 e^{-\mu r_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} \frac{1}{\mu r_0 + 2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_i. \quad (167)$$

Für ein beliebiges  $\varepsilon$  kann eine positive ganze Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so angegeben werden, daß für alle  $j \geq N$

$$|\alpha_j - \tilde{\alpha}_j| < \varepsilon \quad (168)$$

ist. Unter Verwendung hypergeometrischer Reihen gilt (*Magnus-Oberhettlinger*, 1948, S. 11)

$$(1 - \eta)^{1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} \eta^i = {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, 1; 1; \eta \right). \quad (169)$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{y + 2i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{y}{2} + i} = \frac{\frac{y}{2} \left( \frac{y}{2} + 1 \right) \dots \left( \frac{y}{2} + i - 1 \right)}{2 \frac{y}{2} \left( \frac{y}{2} + 1 \right) \dots \left( \frac{y}{2} + i \right)} = \frac{\left( \frac{y}{2} \right)_i}{y \left( \frac{y}{2} + 1 \right)_i} \quad (170)$$

mit der für hypergeometrische Reihen gebräuchlichen Bezeichnungsweise

$$(a)_i = a (a + 1) (a + 2) \dots (a + i - 1).$$

Mit (169) und (170) kann (167) als hypergeometrische Reihe dargestellt werden

$$\mu r_0 e^{-\mu r_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} \frac{1}{\mu r_0 + 2i} = e^{-\mu r_0} \left[ {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{\mu r_0}{2}; \frac{\mu r_0}{2} + 1; 1 \right) - 1 \right]. \quad (171)$$

${}_2F_1(a, b; c; z)$  konvergiert absolut auf dem ganzen Einheitskreis einschließlich  $z = 1$ , wenn

$$\operatorname{Re}(a + b - c) < 0$$

ist. (171) erfüllt diese Bedingung. Wegen

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)} \quad (172)$$

ist

$$\begin{aligned} \mu r_0 e^{-\mu r_0} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} \frac{1}{\mu r_0 + 2i} &= \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + 3\right) \Gamma(1)} - 1 \right] e^{-\mu r_0} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + 3\right)} - 1 \right] e^{-\mu r_0}. \quad (173)^9 \end{aligned}$$

Damit ist die absolute Konvergenz der Reihe (165) und auch die der Reihe (164) bewiesen, da (165) eine Majorante von (164) darstellt. Die numerische Rechnung zeigt jedoch, daß die Konvergenz langsam erfolgt. Ferner ist

$$\frac{E_{2i}(\mu r_0)}{(\mu r_0)^{2i-1}} \gg \frac{E_{2i}\left(\mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}}\right)}{\left(\mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}}\right)^{2i-1}}, \quad (174)$$

so daß (173) als brauchbare Näherung dienen kann. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung zeigt Tabelle 11.

Tabelle 11. Korrekturfaktoren  $\varkappa_0$  für  $\mu r_0 = 0,45$

$\mu a$	$\frac{\mu I_0^{(0)}(0)}{4 \pi K' q_0 \varrho_0}$	$\frac{\mu I_0^{(r)}(0)}{4 \pi K' q_0 \varrho_0}$	$\varkappa_0 = \frac{I_0^{(r)}(0)}{I_0^{(0)}(0)}$
1,6	,3129	,7992	,3915
2,4	,4006	,8889	,4507
3,2	,4472	,9362	,4776
4,0	,4734	,9625	,4919
4,8	,4876	,9775	,4988
5,6	,4969	,9864	,5038
6,4	,5036	,9917	,5078

<sup>9</sup> Siehe Anhang B.

Für einen Meßpunkt in der Mitte einer der aktiven benachbarten Schicht erhalten wir

$$I_0^{(0)}(1) = \frac{2 \pi K' q_0 \varrho_0}{\mu} \left[ E_2 \left( \frac{\mu a}{2} \right) - E_2 \left( \frac{3 \mu a}{2} \right) \right] \quad (175)$$

und

$$I_0^{(r)}(1) = \frac{2 \pi K' q_0 \varrho_0}{\mu} \left\{ \frac{3 \mu a}{2} E_1 \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{q a^2}{4}} \right) - \frac{a \mu}{2} E_1 \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \right. \\ \left. - e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + \frac{q a^2}{4}}} + e^{-\mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}}} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{1}{2} \binom{1}{i} (\mu r_0)^{2i} \left[ \frac{E_{2i} \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right)}{\left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{a^2}{4}} \right)^{2i-1}} - \frac{E_{2i} \left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{q a^2}{4}} \right)}{\left( \mu \sqrt{r_0^2 + \frac{q a^2}{4}} \right)^{2i-1}} \right] \right\}. \quad (176)$$

Diese Reihen konvergieren sehr gut. Für  $\mu r_0 = 0,45$  und  $\mu a > 1,6$  ergeben fünf Glieder der Reihe das Resultat bereits mit einer Genauigkeit von  $10^{-5}$ .

Tabelle 12. Korrekturfaktoren  $\kappa_1$  für  $\mu r_0 = 0,45$

$\mu a$	$\frac{\mu I_0^{(r)}(1)}{2 \pi K' q_0 \varrho_0}$	$\frac{\mu I_0^{(0)}(1)}{2 \pi K' q_0 \varrho_0}$	$\kappa_1 = \frac{I_0^{(r)}(1)}{I_0^{(0)}(1)}$
1,6	,1574	,1748	,8822
3,2	,05872	,06255	,9388
6,4	,008019	,008331	,9626

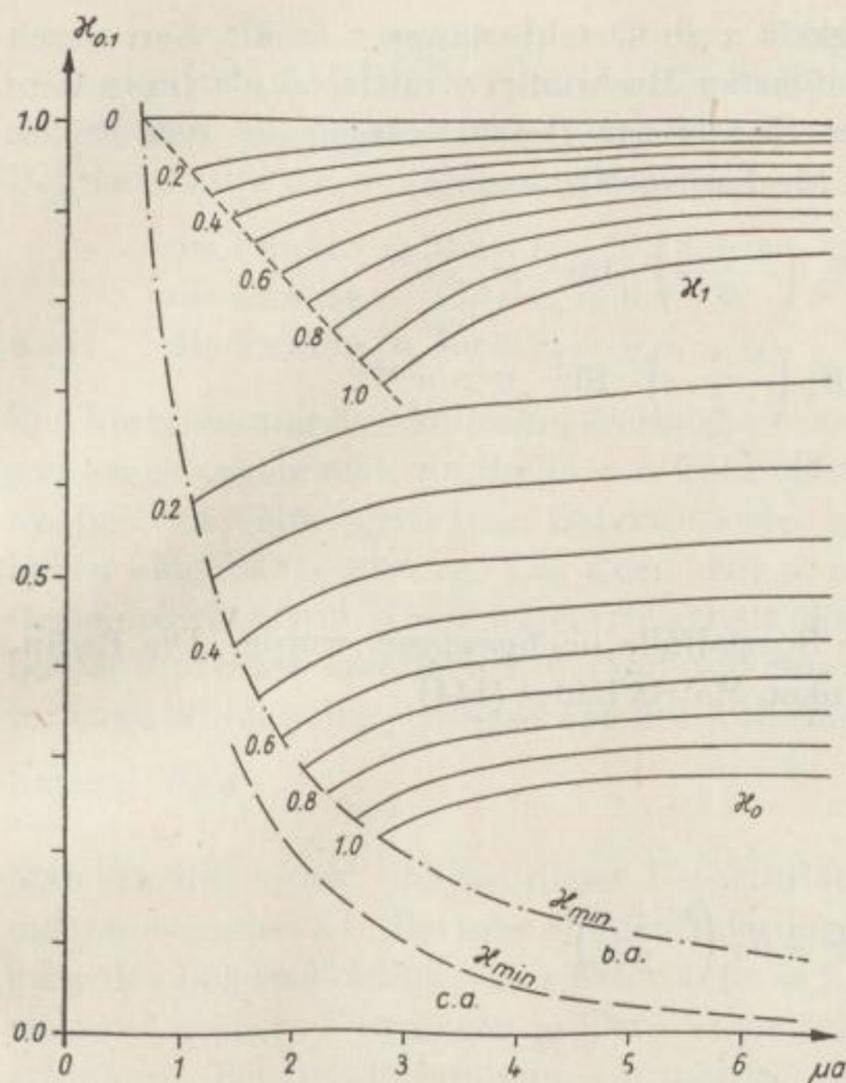
Wegen der Kleinheit der weiteren zu korrigierenden Koeffizienten im Verhältnis zu  $b'_0$  und  $b'_1$  und wegen der immer geringer werdenden Abweichung der Korrekturfaktoren vom Wert 1 ist es nicht erforderlich, noch weitere Korrekturfaktoren zu berechnen. Die Verkleinerung des Hauptgliedes  $b'_0$  durch  $\kappa_0$  beeinflußt die im Kapitel 2.2. untersuchte Lösbarkeit der unendlichen Gleichungssysteme. Die Bedingung (144) für die Umwandelbarkeit in vollständig reguläre Systeme lautet bei alleiniger Berücksichtigung von  $\kappa_0$

$$\kappa_0 b'_0 > \frac{1}{2} [\sigma(w) - (1 - \kappa_0) b'_0]. \quad (177)$$

Daraus kann eine untere Schranke für  $\kappa_0$  angegeben werden:

$$\kappa_0 > \kappa_{\min} = \frac{\sigma(w)}{b'_0} - 1. \quad (178)$$

Tabelle 13 gibt die unteren Schranken für die Fälle b.a. und c.a. gemäß (178) an. Diese minimal zulässigen Werte der Korrekturfaktoren  $\kappa_{\min}$  sowie die Korrekturfaktoren  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  für einige Werte  $\mu r_0$  zwischen 0,2 und 1,0 sind in Bild 8 als Funktion von  $\mu a$  graphisch dargestellt. Diese Kurven wurden mittels eines graphischen Interpolationsverfahrens aus den für  $\mu a = 0; 0,45$  und 1,0

Bild 8. Korrekturfaktoren  $x_0$  und  $x_1$ 

berechneten Kurven konstruiert. Zugleich können diesem Kurvenblatt die maximal zulässigen Bohrlochradien als Funktion der Zählrohrlänge entnommen werden.

Tabelle 13. Minimal zulässige Werte der Korrekturfaktoren  $x_0$  für die Fälle b.a. und c.a.

$\mu a$	(b. a.) $x_{\min}$	(c. a.)
1,2	,5308	,4096
1,6	,3914	,2766
2,4	,2510	,1460
3,2	,1821	,0854
4,0	,1420	,0530
4,8	,1160	,0343
5,6	,0979	,0228
6,4	,0847	,0155

#### 2.4. Die Grenze des Auflösungsvermögens

Es wurde gezeigt, daß ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen der Zählrate und dem Gehalt an radioaktiver Substanz der Schichten nur dann besteht, wenn die reziproke Koeffizientenmatrix existiert. In den hier behandelten Spezialfällen trat dies nur für  $a = z$  und  $a = 2z$  ein. Für beliebiges

Verhältnis von Schichtmächtigkeit  $a$  zu Detektorlänge  $z$  erhält man durch Verallgemeinerung der durchgeführten Rechnungen mit  $w = \mu a$  (normierte Schichtmächtigkeit) und  $v = \mu z$  (normierte Detektorlänge) aus den Ergebnissen der Kapitel 1.4. und 2.2. für den Koeffizienten  $b'_0$

$$b'_0 = 2v - 2E_3\left(\frac{w-v}{2}\right) + 2E_3\left(\frac{w+v}{2}\right) \quad \text{für } w > v$$

$$b'_0 = 2w - 2E_3\left(\frac{v-w}{2}\right) + 2E_3\left(\frac{w+v}{2}\right) \quad \text{für } v > w.^{10}$$

Ferner gilt stets (siehe Tabelle 8)

$$\sigma(w) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b'_i = 2v$$

wie bereits für die behandelten Spezialfälle nachgewiesen wurde. Die Bedingung für die Existenz der reziproken Matrix lautet (144)

$$b'_0 > \frac{1}{2} \sigma(w) = v.$$

Aus der Gleichung

$$v = b'_0 = 2v - 2E_3\left(\frac{w-v}{2}\right) + 2E_3\left(\frac{w+v}{2}\right)$$

erhält man die Funktion

$$w = w(v),$$

die die minimal auflösbare normierte Schichtmächtigkeit  $w = \mu a$  als Funktion der normierten Detektorlänge  $v = \mu z$  angibt. Mit

$$\xi = \frac{w+v}{2}, \quad \eta = \frac{w-v}{2}$$

geht die Gleichung über in

$$\xi + 2E_3(\xi) = \eta + 2E_3(\eta).$$

Für jedes (reelle)  $\eta_0$  besitzt diese Gleichung die Lösungen

$$\xi_1 \neq \eta_0 \quad \text{und} \quad \xi_2 = \eta_0$$

$$\left( \text{nur wenn } \frac{d}{d\eta_0} (\eta_0 + 2E_3(\eta_0)) = 0 \text{ ist } \xi_1 = \xi_2 \right).$$

Die Lösung  $\xi_2 = \eta_0$  besitzt keine physikalische Bedeutung, da sie auf  $v = 0$  führt (Detektorlänge Null). Die Funktion  $w = w(v)$  (Bild 8a) zeigt die minimal auflösbare Schichtmächtigkeit als Funktion der Detektorlänge für vernachlässigten Bohrlochradius. Bei Berücksichtigung des Bohrlochradius ist die minimal auflösbare Schichtmächtigkeit größer.

Ferner zeigt dieses Bild die Geraden  $w = 2v$ ,  $w = v$  und  $w = \frac{v}{2}$  entsprechend den untersuchten Spezialfällen c.a., b.a. und a.a. Man erkennt, daß im Falle

<sup>10</sup> Beide Formeln gelten sowohl für  $w > v$  als auch für  $w < v$ , wenn man  $E_3(-x)$  durch  $2x + E_3(x)$  ersetzt.

a.a. auch bei Wahl einer noch so großen Detektorlänge die reziproke Matrix nicht existiert. Auf den Geraden  $w = 2v$  und  $w = v$  sind weiterhin die minimal auflösbaren Schichtmächtigkeiten unter Berücksichtigung des normierten Bohrlochradius  $\mu r_0$  angegeben, wie sie sich aus Bild 8 ergeben und zwar gelten

- die Punkte  $\circ$  für  $\mu r_0 = 0,2$ ,  
 die Punkte  $\times$  für  $\mu r_0 = 0,4$   
 und die Punkte  $\bullet$  für  $\mu r_0 = 0,6$ .

Zur Verbesserung des Auflösungsvermögens radiometrischer Bohrlochmessungen ist es angebracht, an Stelle von Zählrohren Szintillationssonden zu verwenden, die eine geringere Detektorlänge besitzen. Szintillationskristalle haben eine Länge von ca.  $z = 4$  cm. Mit  $\mu = 0,1 \text{ cm}^{-1}$  (entsprechend einer Gesteinsdichte von  $\rho = 2,0 \text{ g cm}^{-3}$ ) erhält man  $v = 0,4$ . Für diesen Wert besitzt  $w(v)$  einen sehr flachen Verlauf und eine weitere Verkürzung der Detektorlänge bringt keine Verbesserung des Auflösungsvermögens. Es ist

$$\lim_{v \rightarrow 0} w = 0,54 .$$

Man erkennt ferner, daß bei dieser Detektorlänge der Fall b.a. ( $w = v$ ) nicht mehr anwendbar ist. Bei sehr dünnen Bohrungen kann — unter Berücksichtigung des Bohrlochradius — der Fall c.a. ( $w = 2v$ ) gerade noch brauchbar sein, während größere Bohrungen größere Verhältnisse  $w/v = a/z$  zur Auswertung erfordern. Bei Bohrdurchmessern zwischen 4 und 12 cm ( $\mu r_0 = 0,2 \dots 0,6$ ) ergibt sich damit die minimal auflösbare Schichtmächtigkeit zu 10 bis 15 cm auch bei extrem kurzen Detektoren.

In Anbetracht der Meßgenauigkeit bei radiometrischen Messungen, die mit abnehmender Zählrate sinkt, ist es daher nicht sinnvoll, eine normierte Detektorlänge wesentlich kleiner als  $v = 1$  zu verwenden (d. h.  $z \approx 10$  cm). Die mit der weiteren Verkürzung der Detektorlänge verknüpfte Abnahme der Zählrate steht in keinem Verhältnis zur erreichbaren Verbesserung des Auflösungsvermögens.

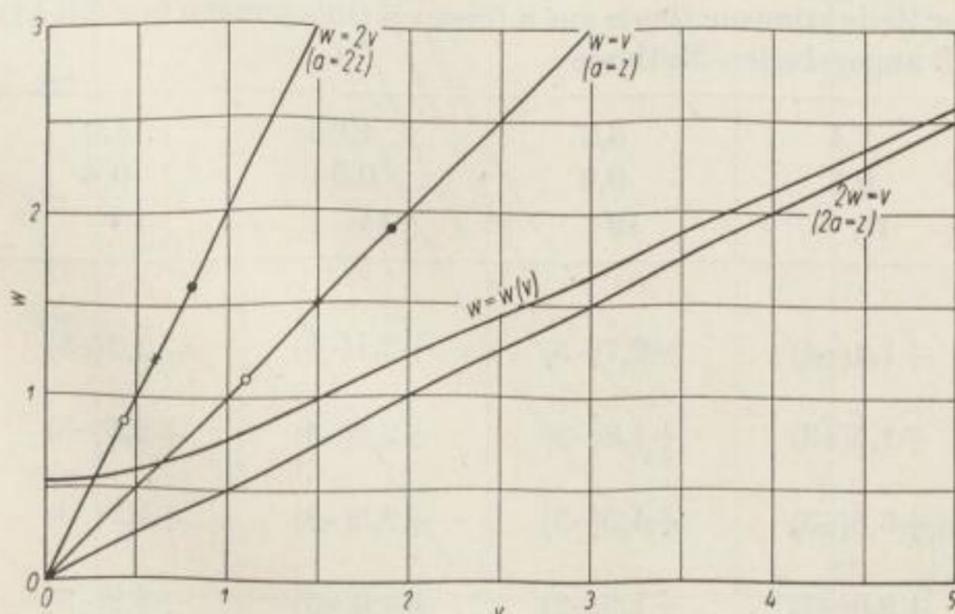


Bild 8a. Die minimal auflösbare Schichtmächtigkeit (normiert) als Funktion der normierten Detektorlänge  $v$

## 2.5. Numerische Berechnung der Koeffizienten der reziproken Matrizen

Die Koeffizienten der reziproken Matrizen  $\bar{b}_i$ , deren Berechnung auf Grund der Ergebnisse des Kapitels 2.2. nur noch für die Fälle b.a. und c.a. erforderlich ist, wurden für folgende normierte Bohrlochradien berechnet:

$$\mu r_0 = 0; 0,3; 0,4; 0,5 \quad \text{und} \quad 0,6.$$

(Bei einem in der Praxis üblichen Bohrlochdurchmesser  $2 r_0 = 9$  cm ergibt sich bei einer Dichte  $\rho = 2$  g/cm<sup>3</sup> mit  $\mu/\rho = 0,05$  cm<sup>2</sup> g<sup>-1</sup> der Wert  $\mu r_0 = 0,45$ .)  
37 lineare Gleichungssysteme mit je 19, 15 bzw. 11 Unbekannten wurden als Annäherung an die unendlichen Gleichungssysteme (126) aufgelöst. Sie konnten aus Symmetriegründen auf Gleichungssysteme mit 10, 8 bzw. 6 Unbekannten reduziert werden. Die numerische Auflösung erfolgte vom Rechenzentrum des VEB Carl Zeiss Jena mit ZRA 1. — 12 weitere Gleichungssysteme wurden teils nach den im Anhang beschriebenen Methoden gelöst, da sich diese Systeme näherungsweise durch die dort behandelten Gleichungssysteme darstellen lassen, und teils mit einer Tischrechenmaschine nach der Methode von *Banachiewicz* gelöst.

Die Ergebnisse sind in einem Diagramm dargestellt (Bild 9 bis 13).

Um ein Maß für die Genauigkeit zu erhalten, mit der die Koeffizienten der reziproken unendlichen Matrizen aus den endlichen Gleichungssystemen mit 11 bis 19 Unbekannten als Annäherung bestimmt werden konnten, wurden für 5 der 37 Gleichungssysteme, die auf ZRA 1 gelöst wurden, Kontrollrechnungen nach der im Anhang E beschriebenen Methode ausgeführt. Die sich dabei ergebenden relativen Abweichungen (bezogen auf die Ergebnisse nach letztgenannter Methode) sind in Tabelle 13a dargestellt. Dabei wurden die Koeffizienten  $b'_i$  mit  $i \geq 3$  durch Null ersetzt.

Tabelle 13a. Relative Abweichungen (R. A.) bei der Berechnung der Koeffizienten der reziproken Matrizen nach der Reduktionsmethode aus  $n$  linearen Gleichungen (auf ZRA1) und nach der im Anhang E angegebenen Methode

$\mu a = 1,6$ $\mu r_0 = 0,3$ $n = 19$	2,4 0,3 15	3,2 0,6 19	4,0 0,3 11	4,0 0,6 15	
R. A. für					
$\bar{b}_0$ :	-6,3(-3)	+1,4(-4)	-2,7(-5)	+2,1(-3)	-2,2(-5)
$\bar{b}_1$ :	+2,9(-3)	+1,5(-3)	+1,8(-3)	+2,2(-3)	+2,5(-5)
$\bar{b}_2$ :	+5,1(-2)	+8,8(-3)	+4,5(-3)	+2,5(-3)	+1,3(-3)
$\bar{b}_3$ :	+4,0(-1)	+9,0(-2)	+1,6(-2)	+7,9(-3)	+4,9(-3)

Anmerkung: Für -6,3(-3) lies  $-6,3 \cdot 10^{-3}$  usw.

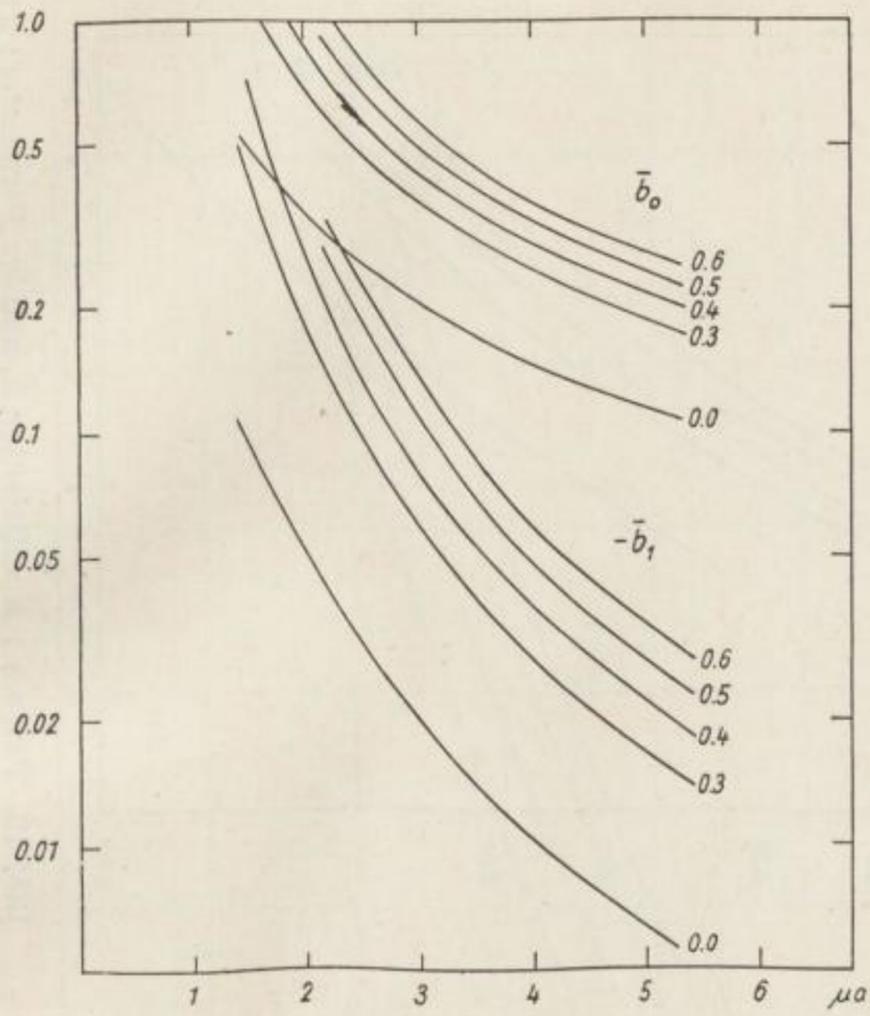


Bild 9. Fall b.a.:  
Koeffizienten  $\bar{b}_0$  und  $\bar{b}_1$ .  
Parameter:  $\mu r_0$

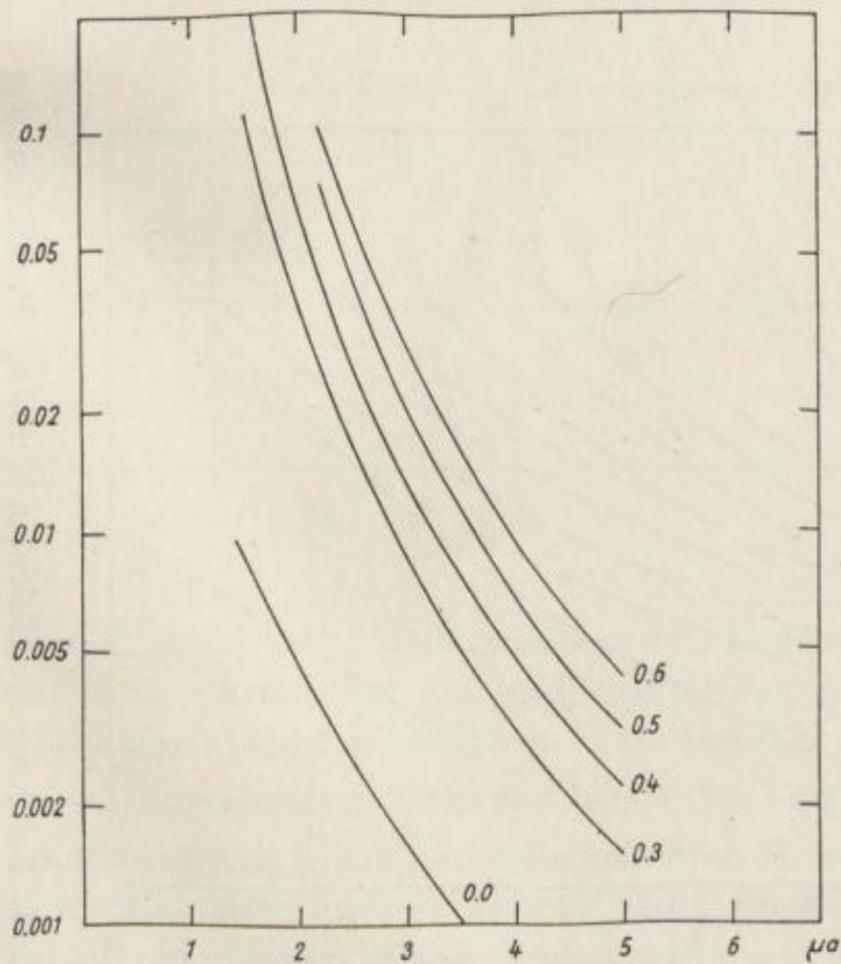


Bild 10. Fall b.a.:  
Koeffizient  $\bar{b}_2$ . Parameter:  $\mu r_0$

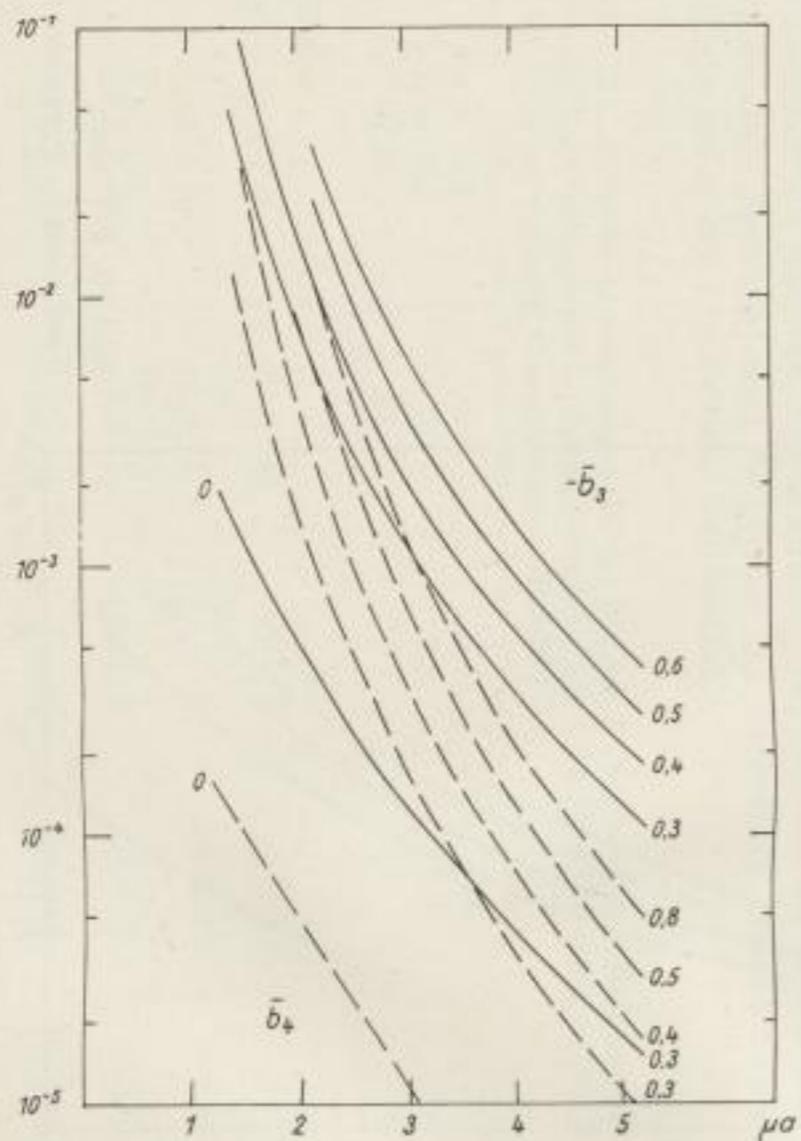


Bild 11. Fall b.a.: Koeffizienten  $\bar{b}_3$  und  $\bar{b}_4$ . Parameter:  $\mu r_0$

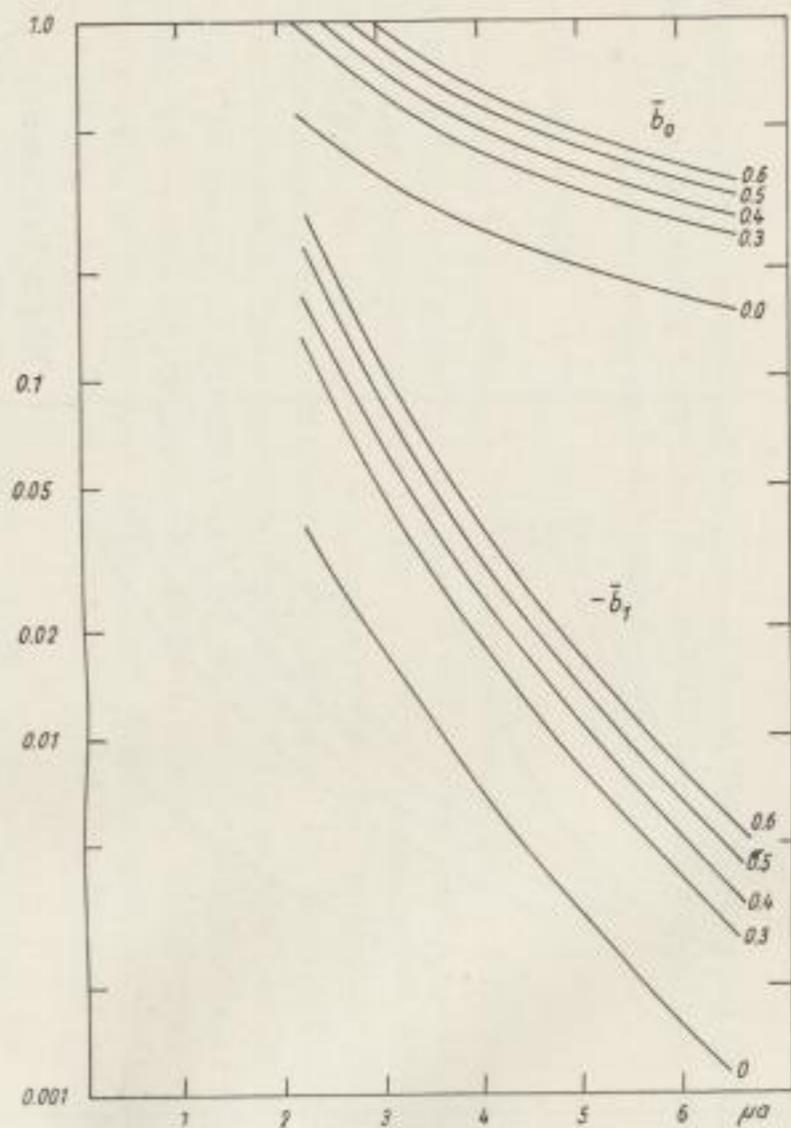


Bild 12. Fall c.a.: Koeffizienten  $\bar{b}_0$  und  $\bar{b}_1$ . Parameter:  $\mu r_0$

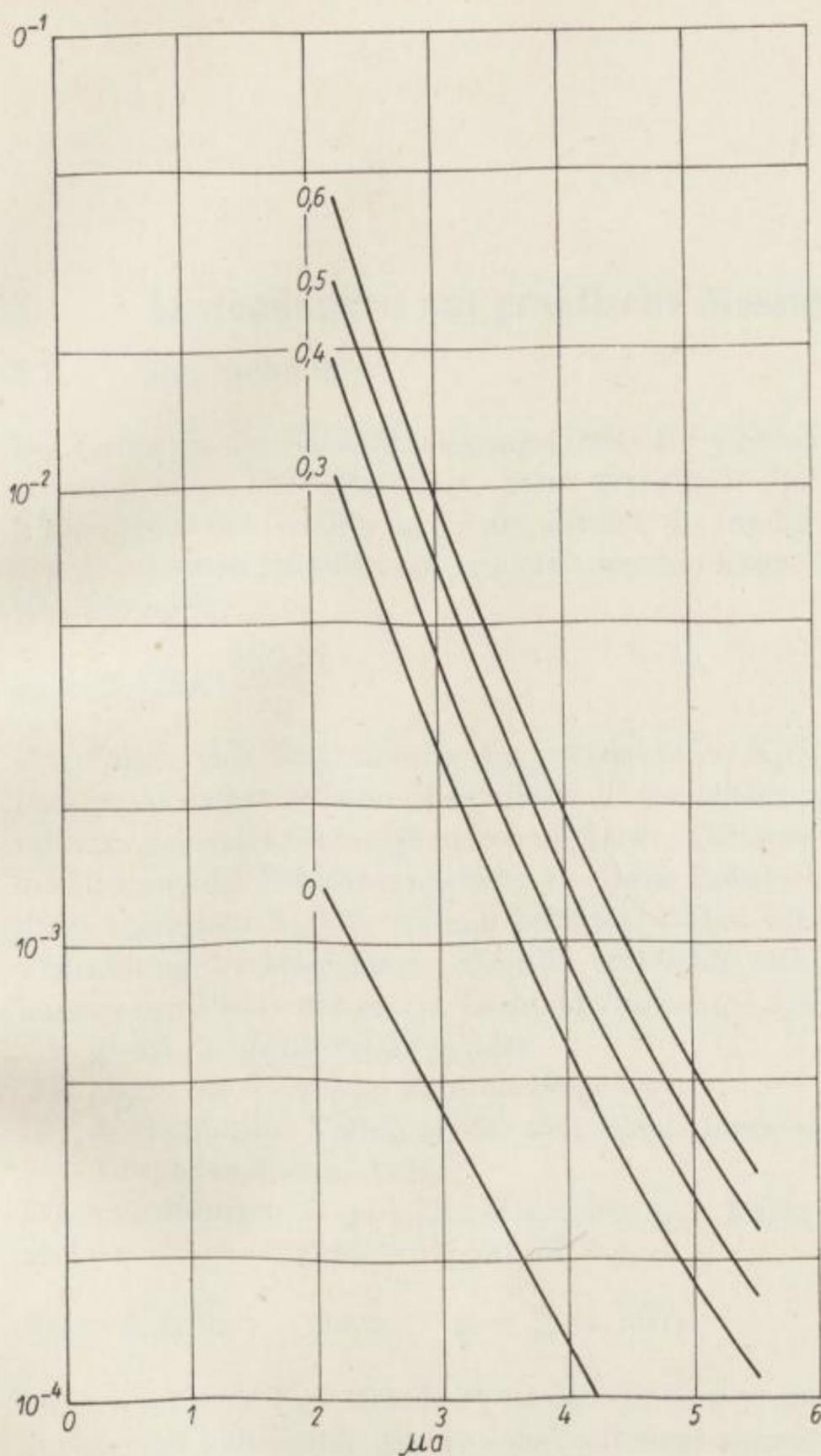


Bild 13. Fall c.a.:  
Koeffizient  $\bar{b}_2$ .  
Parameter:  $\mu r_0$

Diese Tabelle zeigt, daß zwischen den Ergebnissen der beiden Näherungsmethoden (Reduktion auf endliches Gleichungssystem und Nullsetzen der (sehr kleinen) Koeffizienten von  $b'_3$  an) nur sehr geringe Unterschiede bestehen. Diese Unterschiede nehmen erst bei den im Vergleich zu  $\bar{b}_0$  sehr kleinen höheren Koeffizienten  $\bar{b}_3$  usw. einen nennenswerten Betrag an, bei denen sie aber wegen deren Kleinheit unwesentlich sind. Eine Ausnahme bildet die erste Spalte der Tabelle; hier treten größere Unterschiede auf, was darauf zurückgeführt werden kann, daß der vernachlässigte Koeffizient  $b_3$  zu groß ist.

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]*

### 3. Anwendungen auf praktische Messungen

#### 3.1. Die Eichung

Bei Kenntnis des Zählrohrwirkungsgrades für  $\gamma$ -Strahlen, der in der Größenordnung eines Prozentes liegt, kann prinzipiell die spezifische Aktivität  $g$  [Curie/g] aus der Größe  $g$  berechnet werden, die für die einzelnen Schichten aus den gemessenen Impulsraten ermittelt werden kann. Nach (70) wurde  $g_m$  als Abkürzung für

$$g_m = 2 \pi F K' \frac{q_m Q_m}{\mu_m} \quad (179)$$

eingeführt. Zur Bestimmung des prozentualen  $K_2O$ -Gehaltes aus der spezifischen Aktivität müssen aber alle in dieser Gleichung auftretenden Größen mit hinreichender Genauigkeit bekannt sein. Genauer und einfacher ist jedoch die Eichung der Zählrohrapparatur in einem Bohrloch, das sich in einem Medium bekannter  $K_2O$ -Verteilung befindet. Dabei wird zugleich die sekundäre  $\gamma$ -Strahlung berücksichtigt. Hierfür empfiehlt sich die Verwendung einer homogenen Platte mit einem Loch zur Aufnahme des Zählrohres, deren Dicke

- I. gleich der Zählrohlänge oder
- II. gleich der doppelten Zählrohlänge ist und
- III. der homogene Vollraum, der sich leicht durch einen hinreichend großen Körper realisieren läßt.

Die Anordnungen I. und II. entsprechen den bisher behandelten Fällen b.a. und c.a. Nach (122) bis (127) gilt mit  $\mu g'_i = g_i$

$$N_m = \sum_i g'_i b'_{m-i} \quad \text{bzw.} \quad g'_i = \sum_i \bar{b}_{i-i} N_i. \quad (180)$$

Der prozentuale  $K_2O$ -Gehalt  $P_i$  ist der Größe  $g'_i$  proportional, wenn konstante Dichte und konstanter Absorptionskoeffizient angenommen werden

$$P_i = k g'_i \quad (181)$$

Unter „Eichung“ soll hier die Bestimmung der Proportionalitätskonstanten  $k$  verstanden werden. Bei ihrer Kenntnis kann der gesuchte  $K_2O$ -Gehalt direkt angegeben werden.

Für die Anordnungen I. und II. gilt

$$g'_0 \neq 0, \quad g'_i = 0 \quad \text{für} \quad i \neq 0.$$

Daraus folgt

$$N_0 = g'_0 b'_0 = k_{I,II}^{-1} P_0 b'_0, \quad (182)$$

also

$$k_{I, II} = P_0 N_0^{-1} b'_0. \quad (183)$$

( $P_0$  prozentualer  $K_2O$ -Gehalt der verwendeten Platte,  $N_0$  Zählrate im Mittelpunkt der Platte.)

Für die Anordnung III. gilt

$$g'_i = g' = \text{const}, \quad N_i = N = \text{const},$$

daraus folgt

$$N = g' \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i = k_{III}^{-1} P \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i \quad (184)$$

oder

$$g' = N \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i; \quad P = k_{III} N \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i \quad (185, 186)$$

(die in (185, 186) auftretenden Summen zeigt Bild 14),

also

$$k_{III} = P N^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i = P N^{-1} \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i \right)^{-1}. \quad (187)$$

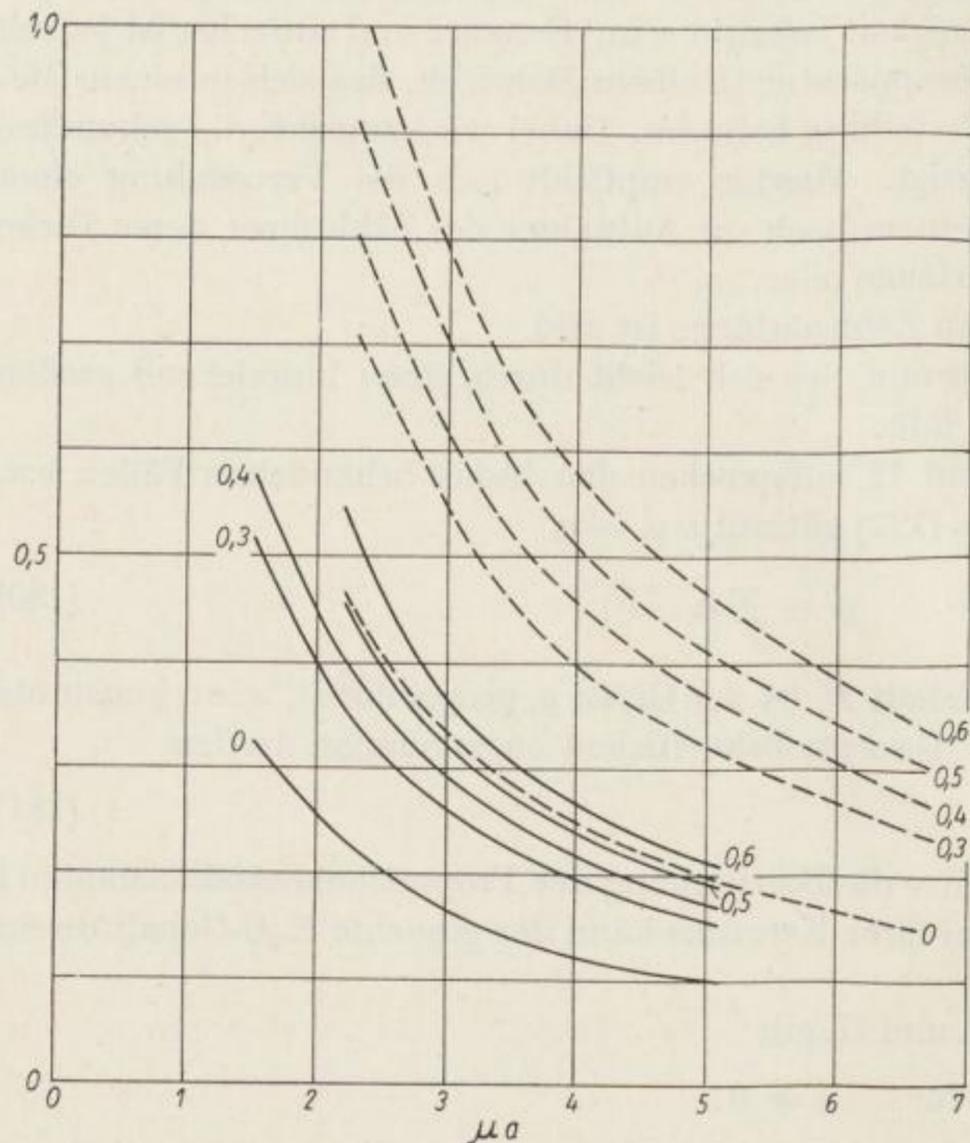


Bild 14.  $\sum_{-\infty}^{+\infty} b'_i$  für Fälle b.a. (----) und c.a. (——). Parameter:  $\mu r_0$

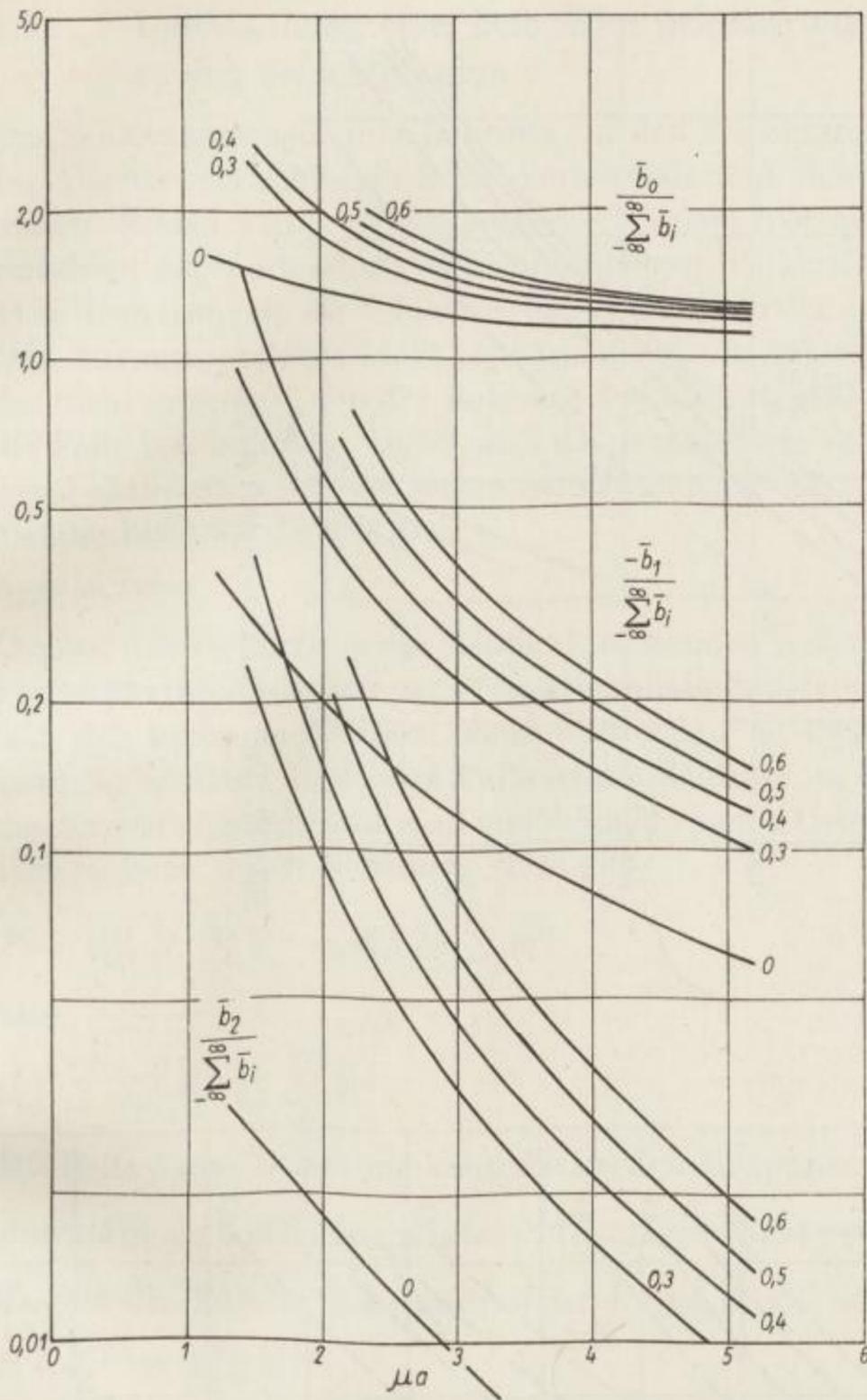


Bild 15  
Fall b.a., Parameter:  $\mu r_i$

Mit diesen Faktoren sind die in Bild 9 bis 13 dargestellten Koeffizienten  $\bar{b}_i$  zu multiplizieren. Da die Anordnung III. am häufigsten benutzte ist, sind in Bild 15 bis 17 die Koeffizienten

$$\frac{\bar{b}_i}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i}$$

für die gleichen Parameter wie in Kapitel 2.5. dargestellt. Nach Multiplikation mit

$$PN^{-1}$$

( $P$   $K_2O$ -Gehalt des homogenen Vollraumes in %,  $N$  Zählrate im homogenen Vollraum) bilden sie die Koeffizienten des Auswerteschemas.

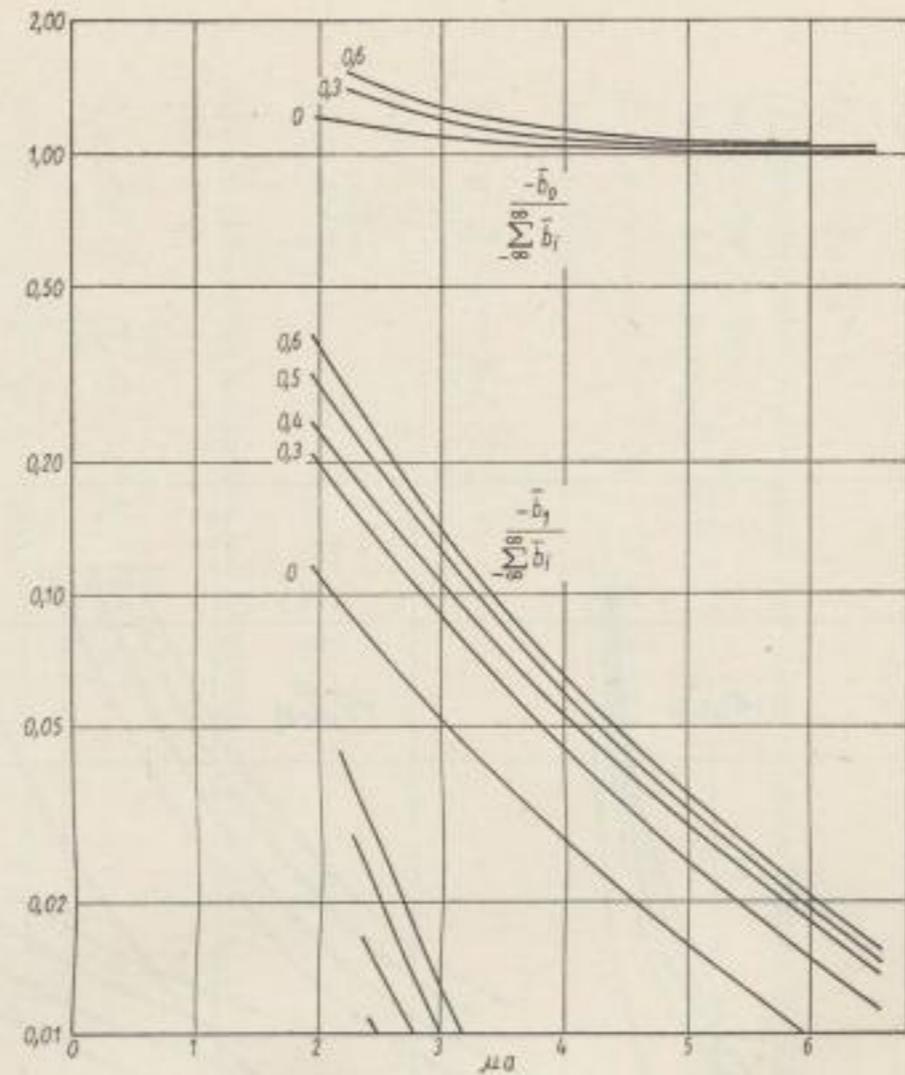
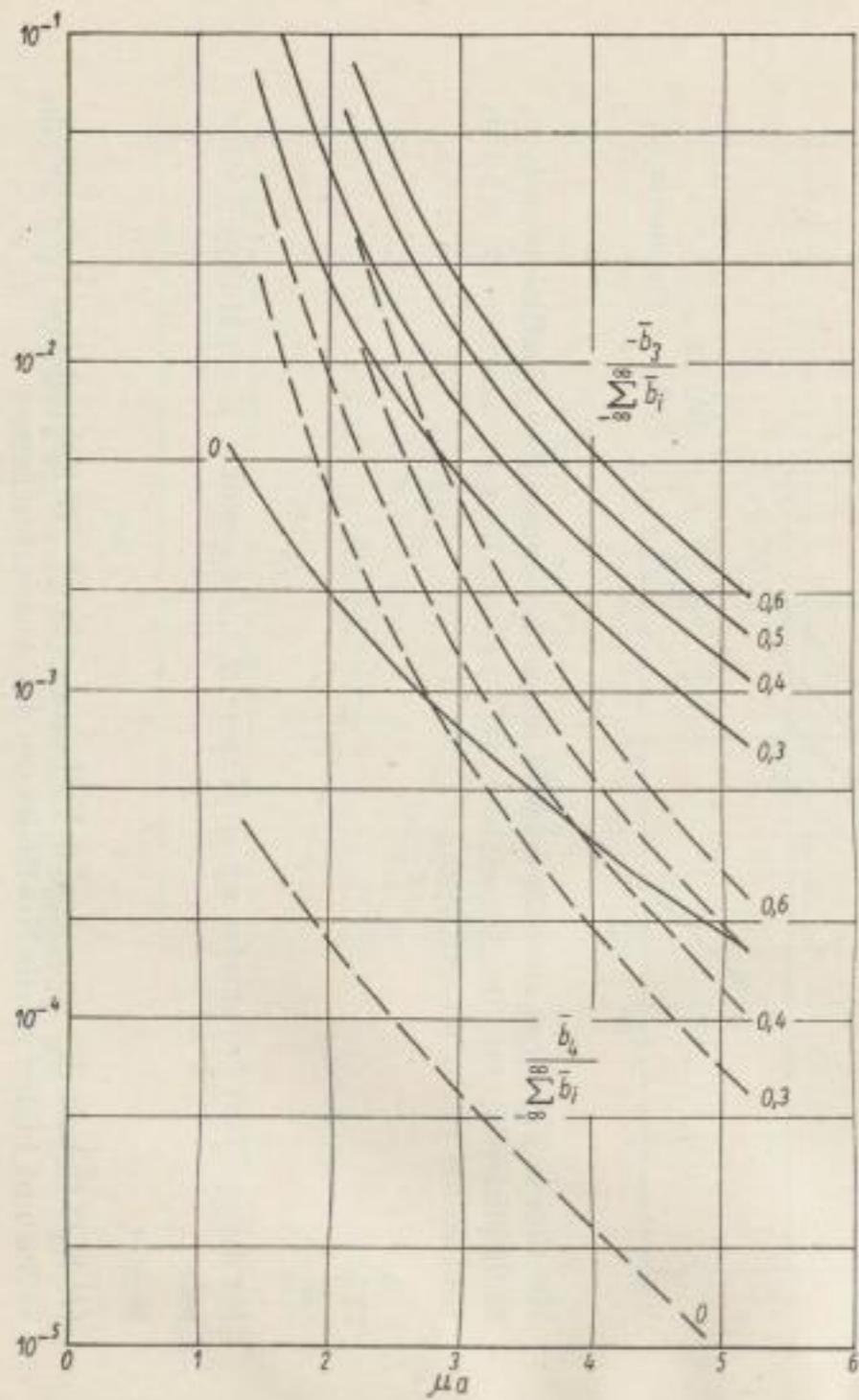


Bild 17. Fall c.a., Parameter:  $\mu r_0$

◀ Bild 16. Fall b.a., Parameter:  $\mu r_0$

### 3.2. Untersuchung einer beliebigen Orientierung einer Bohrung zu den Schichtgrenzen

Das Senkrechtstehen einer Bohrung auf den Schichtgrenzen ist ein Spezialfall. Im Allgemeinen schließen Schichtennormale und Bohrlochrichtung einen gewissen Winkel  $\alpha$  ein. Wenn auch die bei dem hier beschriebenen Auswerteverfahren zugrundegelegte Schichteinteilung willkürlich vorgegeben wird, so ist es doch sinnvoll, die Schichtgrenzen parallel zu den tatsächlichen zu wählen. Das Auswerteverfahren läßt sich leicht auf ein Schichtensystem übertragen, das nicht senkrecht von der Bohrung durchörtert wird. Dies zeigt Bild 18 für die Fälle b.a. und c.a.. Dabei wird die durchörterte Schichtmächtigkeit  $a_1$  um den Faktor  $\cos \alpha$  auf die wahre Schichtmächtigkeit  $a_2$  verkürzt, ebenso der Meßpunktstand. Es gilt also

$$a_2 = a_1 \cos \alpha .$$

Die mit der Verkürzung des Meßpunktstandes verknüpfte Verringerung von  $z$  bewirkt eine Änderung der Proportionalitätskonstanten  $k$  (siehe (181)). Dies läßt sich leicht nachweisen, wenn Messungen im homogenen Vollraum ausgewertet werden. In diesem Falle ist die Zählrate im Bohrloch konstant und das Auswertungsergebnis muß unabhängig von der Orientierung des Schichtensystems sein. Nach Gleichung (186) gilt

$$P = k_{\text{III}}^{(1)} N \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i^{(1)} = k_{\text{III}}^{(2)} N \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i^{(2)}$$

also

$$k_{\text{III}}^{(1)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i^{(1)} = k_{\text{III}}^{(2)} \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i^{(2)} . \quad (188)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann die für den Meßpunktstand  $a_1$  gültige Konstante  $k_{\text{III}}^{(1)}$  auf den Meßpunktstand  $a_2$  umgerechnet werden.  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i$  ist in Bild 14 dargestellt. Für die Eichanordnungen I. und II. gilt entsprechend (182):

$$k_{\text{I,II}}^{(1)} b_0^{(2)} = k_{\text{I,II}}^{(2)} b_0^{(1)} . \quad (189)$$

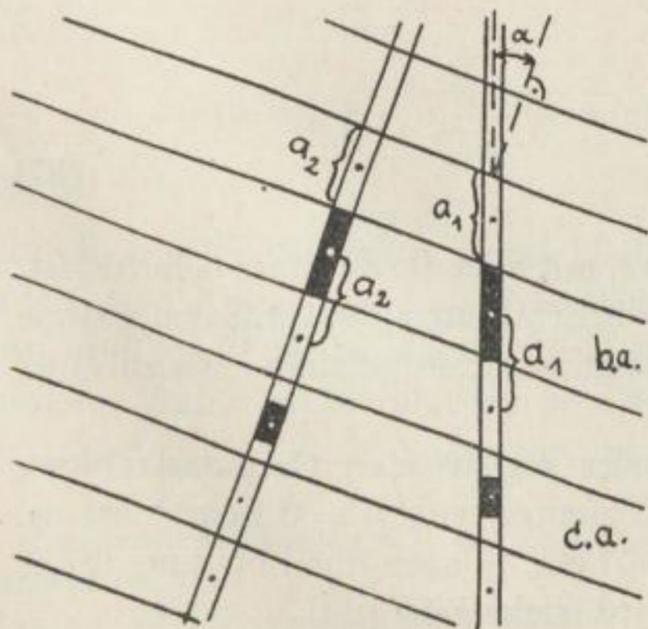


Bild 18. Zur Untersuchung der Schichtneigung

### 3.3. Die Größe des Einzugsgebietes der radioaktiven Strahlung

Infolge der starken Intensitätsabnahme der Gammastrahlung liefert nur ein endliches Gebiet in der Umgebung des Bohrloches einen wesentlichen Beitrag zur Zählrate. Die Größe dieses Einzugsgebietes kann in folgender Weise abgeschätzt werden. Ersetzt man die in (154) angenommene unendliche Schicht durch eine Schicht vom Radius  $R$  (den Radius des Einzugsgebietes), so erhält man

$$\begin{aligned}
 I_R(P) &= 2 \pi q_n \varrho_n K' \int_{x_1}^{x_1+a} \int_{r_0}^R \frac{e^{-\mu \sqrt{r^2+x^2}}}{r^2+x^2} r dr dx \\
 &= 2 \pi q_n \varrho_n K' \int_{x_1}^{x_1+a} \{E_1(\mu \sqrt{x^2+r_0^2}) - E_1(\mu \sqrt{x^2+R^2})\} dx. \quad (192)
 \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des Einzugsgebietes genügt es, die Gammastrahlenintensität einer hinreichend dünnen Schicht zu berechnen. Für  $x_1 = 0$  und hinreichend kleines  $a$  gilt näherungsweise

$$I_R(P) = 2 \pi q_n \varrho_n a K' \{E_1(\mu r_0) - E_1(\mu R)\}. \quad (193)$$

Für  $R \rightarrow \infty$  gilt

$$I_\infty(P) = 2 \pi q_n \varrho_n a K' E_1(\mu r_0). \quad (194)$$

Bezeichnet man mit  $\alpha$  den Bruchteil der Strahlungsintensität, die ihren Ursprung außerhalb dieses Einzugsgebietes hat, so gilt

$$\alpha = \frac{E_1(\mu R)}{E_1(\mu r_0)}. \quad (195)$$

Im Falle des mit radioaktiver Materie erfüllten Vollraumes erhält man für die Strahlungsintensität im Mittelpunkt einer Kugel vom Radius  $r'_0$  mit einem als Kugel vorausgesetzten Einzugsgebiet vom Radius  $R'$ :

$$I_{R'}(P) = 4 \pi \varrho q K' \int_{r'_0}^{R'} e^{-\mu r} dr = 4 \pi \varrho q K' \mu^{-1} (e^{-\mu r'_0} - e^{-\mu R'}). \quad (196)$$

Entsprechend gilt hier

$$\alpha' = \frac{e^{-\mu R'}}{e^{-\mu r'_0}}. \quad (197)$$

Setzt man den mittleren statistischen Fehler, mit dem die Zählrate behaftet ist, gleich dem Fehler, den man begeht, wenn die Strahlungsintensität der Materie außerhalb des Einzugsgebietes vernachlässigt wird, so gelangt man zu einer Definition des Einzugsgebietes.

Die Grenze des Einzugsgebietes für 99% der registrierten Gammastrahlung liegt bei Annahme eines Absorptionskoeffizienten von  $\mu = 0,1 \text{ cm}^{-1}$  bei ca.  $R = 27 \dots 37 \text{ cm}$  beziehungsweise  $R' = 47 \dots 51 \text{ cm}$ , je nach dem, ob eine dünne Schicht oder der Vollraum vorausgesetzt wird (siehe Bild 18a).

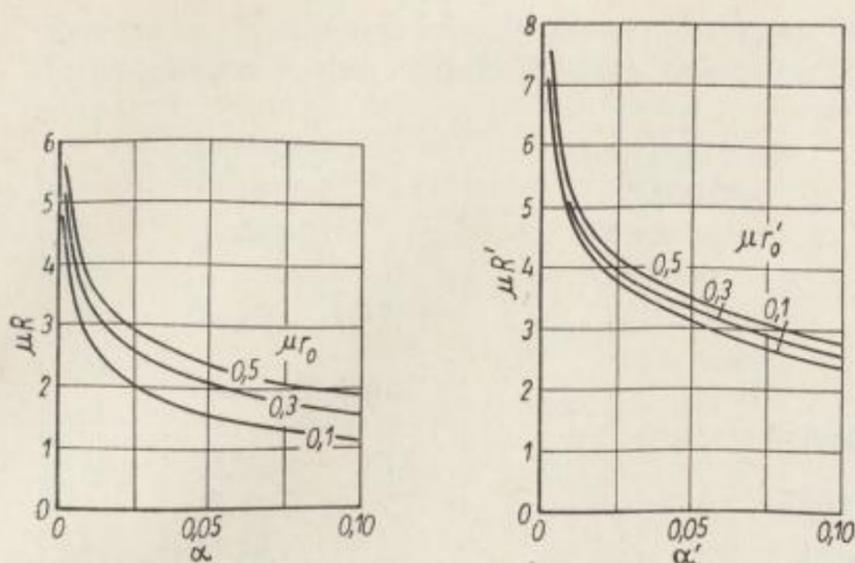


Bild 18a. Normierter Radius des Einzugsgebietes für dünne Schicht (links) und für den Vollraum (rechts)

Die Bestimmung der Zählrate mit einer Genauigkeit von  $\pm 1\%$  setzt bereits die Registrierung von  $10^4$  Impulsen voraus. Folglich kann mit einem Einzugsgebiet der Gammastrahlung gerechnet werden, dessen Radius größenordnungsmäßig maximal 50 cm beträgt.

### 3.4. Beispiele und Fehlerbetrachtungen

Die erzielten Ergebnisse werden nun auf einige Bohrlochmessungen im Kali-bergbau angewandt.

Nach Czubek und Zuber (1959) ist  $\mu/\rho = 0,05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ , so daß wir bei einer willkürlich angenommenen mittleren Dichte von  $\rho = 1,78 \text{ g cm}^{-3}$  für  $\mu = 0,089 \text{ cm}^{-1}$  erhalten. Die aktive Länge des benutzten Zählrohres betrug 28 cm, der Durchmesser des unverrohrten Bohrloches 9 cm. Bei dieser Zählrohlänge ist es zweckmäßig, ein Auswerteverfahren entsprechend Fall b.a. zu verwenden, andernfalls würde sich in den meisten Beispielen eine zu große Schichteneinteilung ergeben. Es ist also

$$r_0 = 4,5 \text{ cm}, \quad a = 28 \text{ cm}, \quad \mu r_0 = 0,4, \quad \mu a = 2,49.$$

Für diese Werte entnehmen wir den Bildern 15 und 16:

$$\frac{\bar{b}_0}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i} = 1,63, \quad \frac{\bar{b}_1}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i} = -0,376, \quad \frac{\bar{b}_2}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i} = 0,0765,$$

$$\frac{\bar{b}_3}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i} = -0,0153, \quad \frac{\bar{b}_4}{\sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i} = 0,00317.$$

Eine Kontrollmessung<sup>11</sup> in einem Medium bekannten  $\text{K}_2\text{O}$ -Gehaltes von 10,9% ergab nach Abzug des Nulleffektes und nach Totzeitkorrektur eine Zählrate von 1400 cpm<sup>12</sup>, wobei die im Kapitel 3.1. beschriebene Anordnung III (Messung im Vollraum) benutzt wurde. Mit

$$P = 10,9\% \text{ K}_2\text{O}, \quad N = 1400 \text{ cpm},$$

<sup>11</sup> Messungen ausgeführt von der Zentralen Forschungsstelle für die Kaliindustrie Sondershausen.

<sup>12</sup> cpm = counts per minute.

wird

$$P N^{-1} = 0,0078\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

und wir erhalten mit

$$k_{\text{III}} = \frac{P}{N \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{b}_i}$$

$$k_{\text{III}} \bar{b}_0 = 0,01272\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

$$k_{\text{III}} \bar{b}_1 = -0,00293\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

$$k_{\text{III}} \bar{b}_2 = 0,00060\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

$$k_{\text{III}} \bar{b}_3 = -0,00012\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

$$k_{\text{III}} \bar{b}_4 = 0,00002\% \text{ K}_2\text{O (cpm)}^{-1}$$

Diese Zahlen bilden die Koeffizienten des Auswerteschemas:

0,00002	-0,00293
-0,00012	0,00060
0,00060	-0,00012
-0,00293	0,00002
0,01272	

und sind mit den äquidistant im Abstand der Zählrohlänge  $z = a = 28$  cm gemessenen Impulsraten zu multiplizieren. Nach Addition der Produkte erhält man unmittelbar den prozentualen  $\text{K}_2\text{O}$ -Gehalt für die mittlere Schicht.

Ein Beispiel zeigt Tabelle 14, in deren linkem Teil ein Auszug aus dem Meßprotokoll mit den totzeitkorrigierten Meßwerten angegeben ist. Da der Meßpunkt Abstand nicht mit der Zählrohlänge übereinstimmt, wurden die Meßwerte für eine willkürlich vorgegebene äquidistante Punktfolge linear interpoliert (graphisch, siehe Bild 19 und 20). Die interpolierten Werte zeigt der rechte Teil der Tabelle 14 nach Abzug des Nulleffektes (60 cpm), wo zugleich die Auswertung mit dem inneren umrandeten, gleitenden Auswerteschema für die Schicht demonstriert wird, deren Mittelpunkt in einer Teufe von 64,12 m liegt. Die graphische Darstellung dieser Ergebnisse zeigen die Bilder 19 und 20. Sie zeigen die Meßpunkte des  $\gamma$ -Logs und die Schichtmittelpunkte (als Interpolationspunkte gekennzeichnet) sowie den prozentualen  $\text{K}_2\text{O}$ -Gehalt als Treppenfunktion.

Weitere Beispiele bringen die Bilder 21 bis 23. Diese radiometrischen Bohrlochmessungen wurden von der geophysikalischen Abteilung der Forschungsstelle für die Kaliindustrie Sondershausen im Kalikombinat Werra, Objekt Einheit, Schachanlage Alexandershall ausgeführt.<sup>13</sup>

Bild 22 stellt das Resultat der Auswertung nach dem beschriebenen Verfahren dem Ergebnis einer qualitativen Auswertung (— · — · —) durch die Forschungs-

<sup>13</sup> In allen Beispielen wurde vor der Auswertung von der Zählrate der Nulleffekt von ca. 50—100 cpm abgezogen.

Tabelle 14. Radiometrische Bohrlochmessungen ( $\gamma$ -Messungen)  
Kalikombinat Werra, Objekt Einheit, Schachanlage Alexandershall Bohrung 17/61

Totzeitkorr. Meßwerte (Auszug)			Interpol. Meßwerte für Schichtmitten		Berechneter $K_2O$ -Gehalt [%]
Pkt. Nr.	Teufe [m]	Impuls Rate [cpm]	Teufe [m]	Impuls Rate [cpm]	
10	62,78	74	62,44	0	
11	63,18	227	62,72	15	0,08
12	63,43	1064	63,00	100	0,33
13	63,68	1407	63,28	505	3,3
14	63,78	1298	63,56	1185	10,6
15	63,93	1179	63,84	1185	9,8
16	64,08	912	64,12	800	<b>6,38</b>
17	64,43	468	64,40	445	2,34
	...		64,68	570	5,8
	usw.		64,96	200	0,87
			65,24	70	0,49
			65,52	95	0,31
			65,80	435	3,0
			66,08	1130	9,5
			66,36	1450	12,6
			66,64	1190	8,1
			66,92	1300	11,7
			67,20	900	5,6
			67,48	1120	9,1
			67,76	1305	10,6
			68,04	1260	10,1
			68,32	1140	8,4
			68,60	1180	10,6
			68,88	740	5,0
			...		
			usw.		

$$\begin{aligned}
 x + 0,00002 &= 0,00 \\
 x - 0,00012 &= -0,06 \\
 x + 0,00060 &= 0,71 \\
 x - 0,00293 &= -3,37 \\
 x + 0,01272 &= 10,18 \rightarrow \\
 x - 0,00293 &= -1,30 \\
 x + 0,00060 &= 0,34 \\
 x - 0,00012 &= -0,02 \\
 x + 0,00002 &= 0,00 \\
 \hline
 &= 6,38
 \end{aligned}$$

Nulleffekt (60 cpm) abgezogen

stelle Sondershausen gegenüber. Man sieht, daß das hier entwickelte Verfahren detaillierte Angaben liefert und die  $\gamma$ -Anomalie besser widerspiegelt.

In Bild 23 wurden zwei Auswertungen ausgeführt, deren Interpolationspunkte (Mittelpunkte der Schichten des angenommenen Schichtensystems) um ein Drittel der Zählrohrlänge gegeneinander verschoben wurden. Beide Resultate zeigen eine befriedigende Übereinstimmung. Wie die Auswertung zeigt, liegen die Quellen der  $\gamma$ -Strahlen zwischen  $x_1 = 64$  m und  $x_2 = 68$  m Teufe. Durch Mitteilung der berechneten  $K_2O$ -Gehalte<sup>14</sup> erhalten wir als mittleren

<sup>14</sup> Der mittlere prozentuale  $K_2O$ -Gehalt  $\bar{P}$  ergibt sich aus der Formel

$$\bar{P} = \frac{a}{x_2 - x_1} \sum_i P_i$$

mit  $a = 0,28$  m.

$K_2O$ -Gehalt zwischen  $x_1$  und  $x_2$  die Werte 4,69% und 4,71%. Eine dritte Auswertung mit den Interpolationspunkten um ein Drittel der Zählrohlänge in entgegengesetzter Richtung verschoben ergibt ebenfalls den Wert 4,69%. Die drei Werte erlauben bereits eine Angabe des mittleren Fehlers, der durch die willkürliche Wahl der Interpolationspunkte entsteht. Man erhält:

$$\bar{P} = (4,70 \pm 0,01)\% K_2O .$$

Diese Genauigkeit gilt für das Gebiet zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Die Ergebnisse für die einzelnen sich überlappenden Schichten bei verschiedener Wahl der Interpolationspunkte besitzen jedoch Abweichungen in der Größenordnung von 1%, die aber unwesentlich sind. Damit zeigt es sich, daß die berechneten  $K_2O$ -Gehalte für die einzelnen angenommenen Schichten einer gewissen Streuung unterworfen sind, die sich aber beträchtlich verringert, wenn der Mittelwert über mehrere benachbarte Schichten gebildet wird.

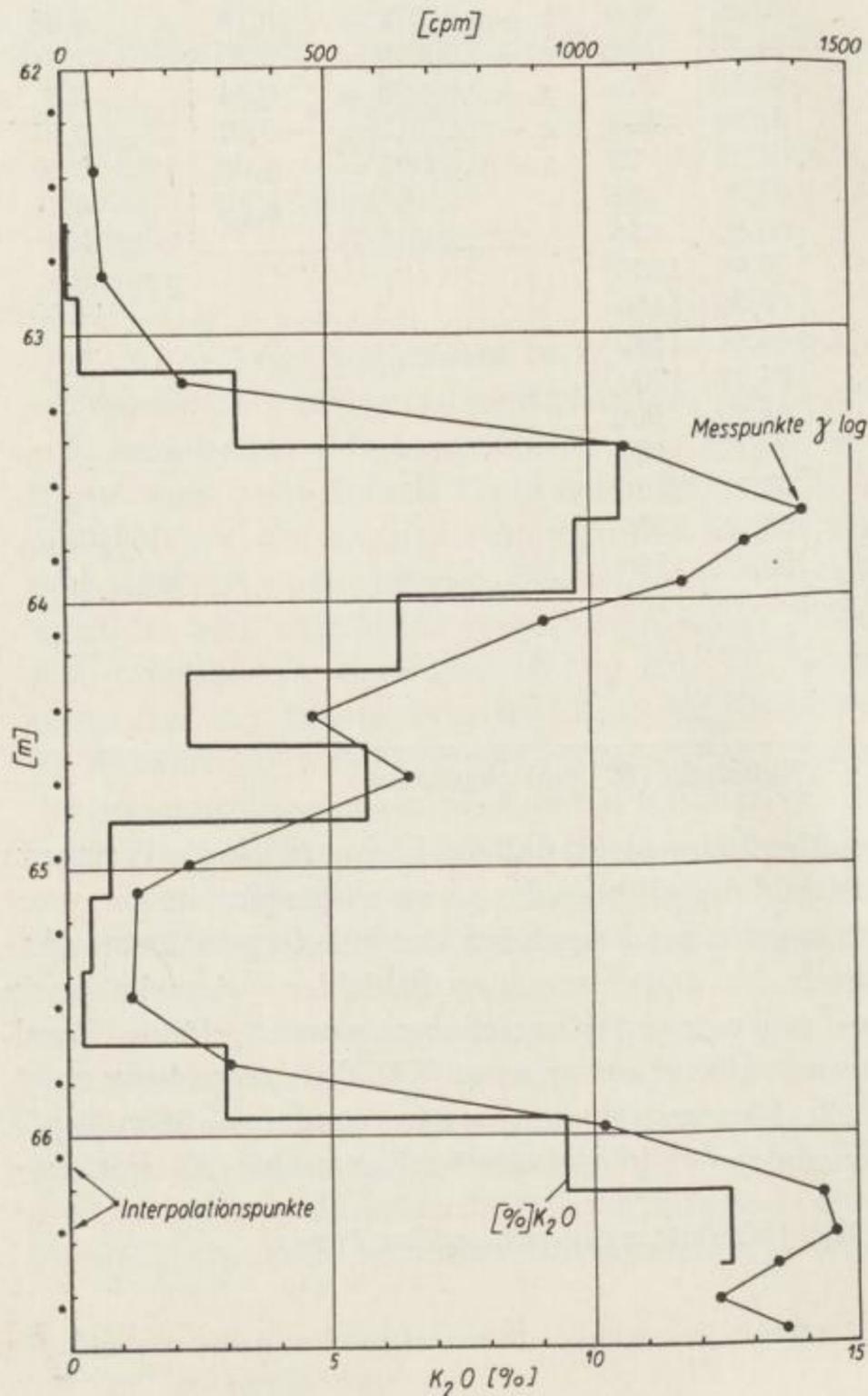


Bild 19  
Alexandershall 17/61

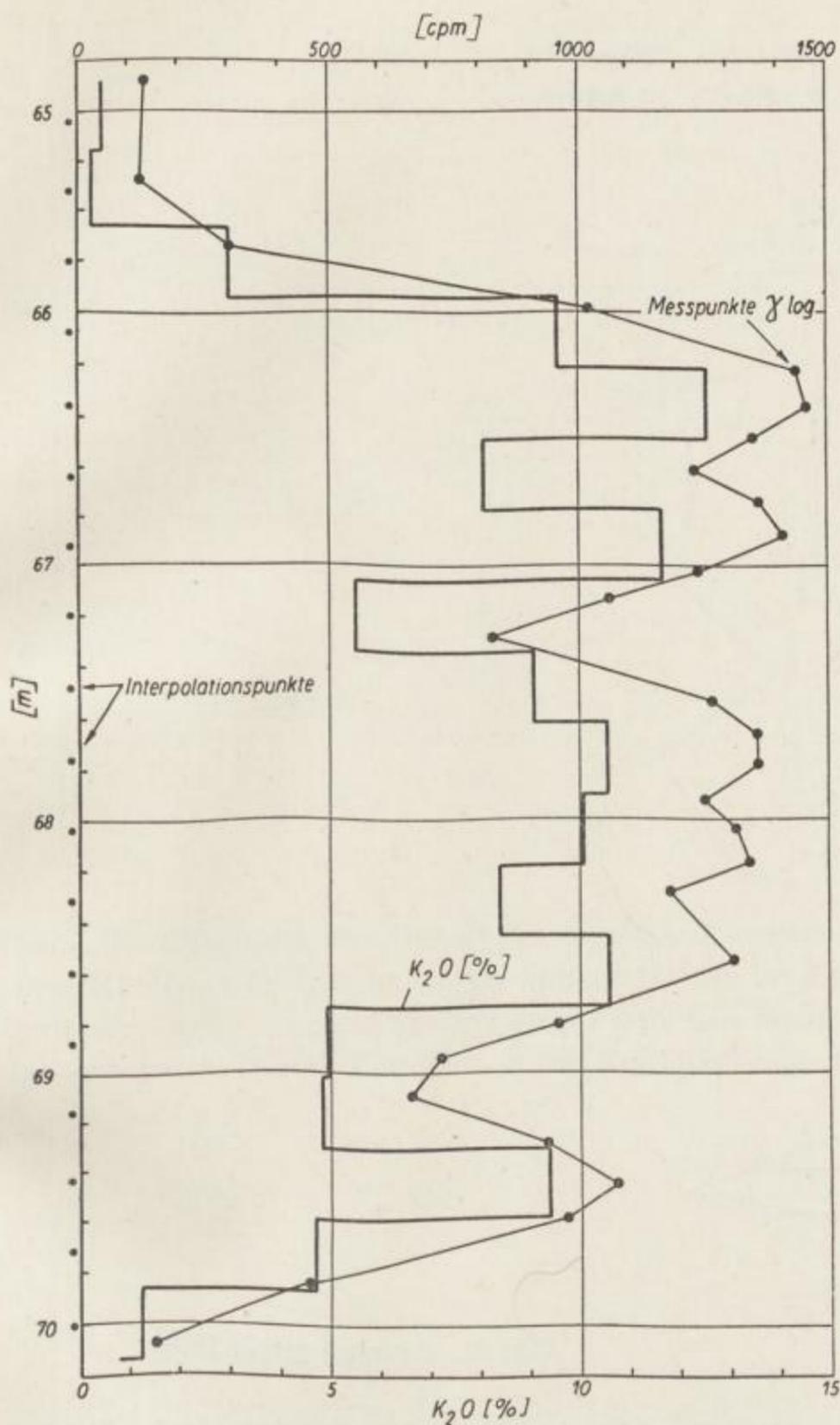


Bild 20  
Alexandershall 17/61

### Fehlerbetrachtungen

Zur Genauigkeit des Auswerteverfahrens ist folgendes zu bemerken. Die in den Beispielen angeführten Messungen wurden mit einer Meßzeit von 3 min für jeden Meßpunkt durchgeführt, so daß bei einer Zählrate  $N$  [cpm] ein mittlerer statistischer Fehler<sup>15</sup> von  $\pm \sqrt{N/3}$  auftritt. Der relative Fehler beträgt somit  $\pm (3N)^{-1/2}$ . Wenn man berücksichtigt, daß in das auf Seite 15 angegebene Auswerteschema der Meßwert in der Schicht, in der der Kaligehalt bestimmt

<sup>15</sup> Bei 3 min Meßzeit liegt die Zählrate mit 68% Wahrscheinlichkeit in dem Intervall  $N - \sqrt{N/3}$  bis  $N + \sqrt{N/3}$ .

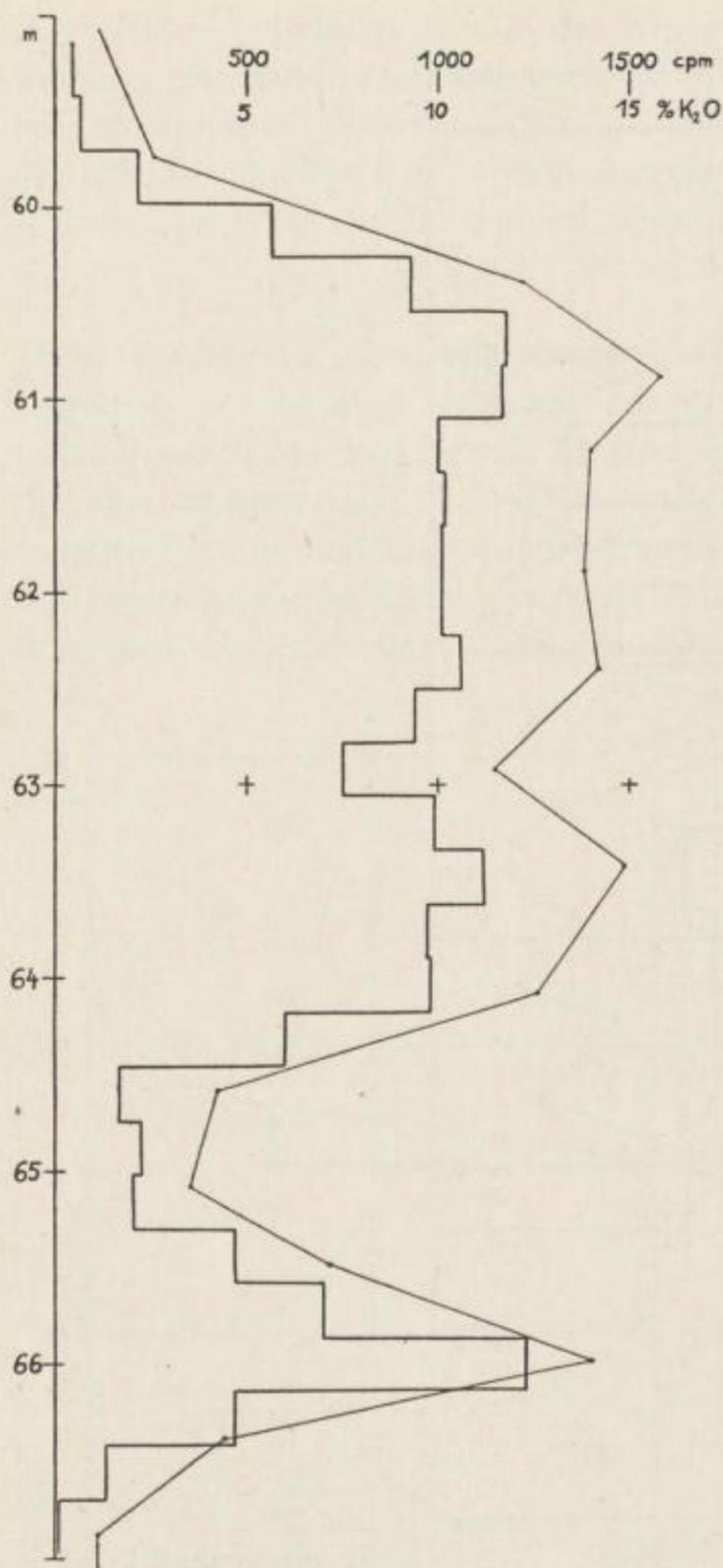


Bild 21. Alexandershall 18/60

werden soll, mit überwiegendem Gewicht eingeht, so beträgt der relative Fehler des berechneten prozentualen Kaliumgehaltes ebenfalls  $\pm (3N)^{-1/2}$ . Für die Fehlerbetrachtung ist es ausreichend, die Auswertung in einem Bohrlochabschnitt mit konstanter Zählrate zu betrachten. Die Summe der Koeffizienten des Auswerteschemas beträgt 0,00786. In Tabelle 15 werden für 3 min und für 1 min Meßzeit die statistischen Fehler der Kaliumgehaltsbestimmung in Prozenten sowie die berechneten Kaliumgehalte in Prozenten für verschiedene Zählraten angegeben.

Im Standard „Kalidüngemittel — Lieferbedingungen und Prüfvorschriften“ (TGL 2757-56) wird für die Genauigkeit in der Bestimmung des Kaliumgehaltes  $\pm 0,3\%$  gefordert. Nach *Uhlmann* (1930) genügt für Untertagemessungen im Zusammenhang mit Erkundungsarbeiten der 3- bis 5fache Wert. Für die prak-

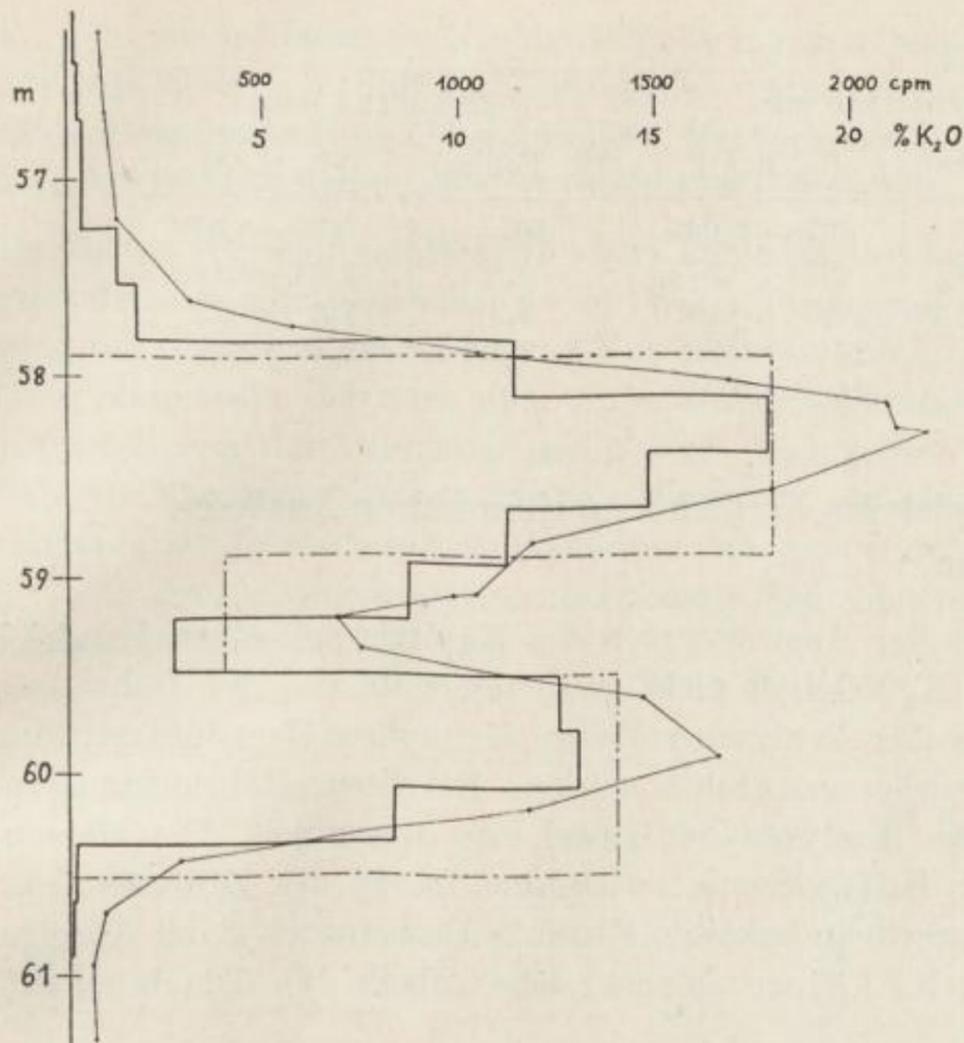


Bild 22  
Alexandershall 26/61

tische Durchführung der Messungen ergibt sich daraus, daß eine Meßzeit von einer Minute je Meßpunkt bereits Genauigkeiten ergibt, die weit über der geforderten liegen. Gegenüber der bisher üblichen Meßzeit von 3 min bedeutet das eine beträchtliche Verkürzung des Zeitaufwandes für Routinemessungen.

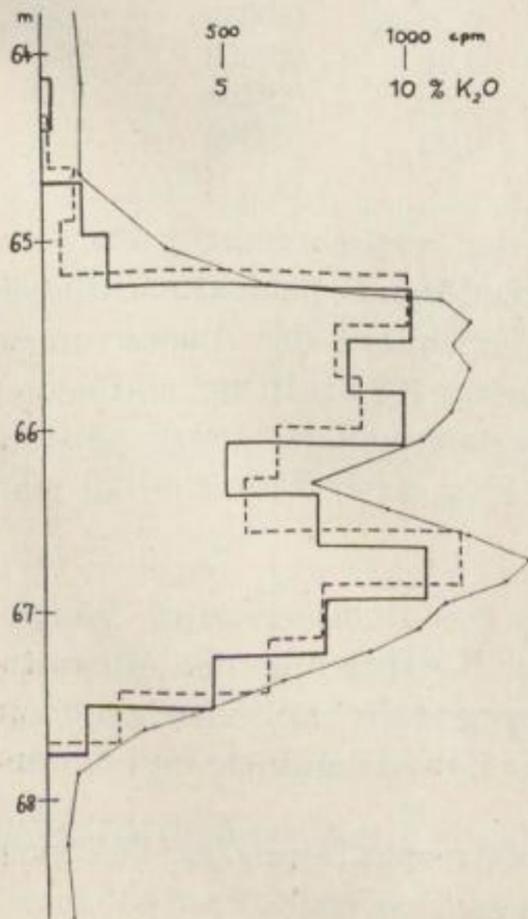


Bild 23. Alexandershall 26/61

Tabelle 15

Zählrate $N$	Meßzeit: 3 min		Meßzeit: 1 min	
	[% Fehler]	[% $K_2O$ ]	[% Fehler]	[% $K_2O$ ]
100	5,8	$0,78 \pm 0,045$	10	$0,78 \pm 0,078$
300	3,3	$2,34 \pm 0,077$	5,8	$2,34 \pm 0,14$
1000	1,8	$7,8 \pm 0,14$	3,2	$7,8 \pm 0,25$
3000	1,1	$23,4 \pm 0,26$	1,8	$23,4 \pm 0,42$
10000	0,58	$78 \pm 0,45$	1,0	$78 \pm 0,78$

### 3.5. Weitere Beispiele im Vergleich zu chemischen Analysen der Bohrkerne

Während die Resultate der Auswertungen des Kapitels 3.4. einen Vergleich mit dem tatsächlichen  $K_2O$ -Gehalt nicht gestatteten, da von den Bohrungen keine Ergebnisse chemischer Analysen vorlagen, kann diese Gegenüberstellung bei den folgenden Beispielen ausgeführt werden. Bei diesen Bohrlochmessungen<sup>16</sup> wurden chemische Analysen der Bohrkerne ausgeführt. Die Messungen erfolgten mit der RARK-Sonde; wirksame Länge des Zählvolumens:  $z = 75$  cm, mit Sondengeschwindigkeiten  $V$  und Zeitkonstanten  $T$  der Anzeige, bei denen das Produkt  $VT$  kleiner als  $z$  ist (siehe Tabelle 16). Die dabei auf-

Tabelle 16

Bild	Bohrung	$V$ [m/min]	$T$ [s]	$VT$ [m]	$k$ [%/pars]	$\pm m$ [% $K_2O$ ]
24a	Sussra 1	2,2	12	0,44	0,0591	1,5
24b	Kaltohmfeld 2	2,5	12	0,50	0,0489	2,2
24c	Billeben 1	2,5	12	0,50	0,0639	1,6
24d	Niegripp 3	2,0	12	0,40	0,0603	3,4
24e	Haynrode 4	2,0	18	0,60	0,0464	1,9
24f	GB Bleicherode	1,8	12	0,36	0,0390	1,8

tretenen Verzerrungen des  $\gamma$ -Logs gegenüber der statisch gemessenen Anomalie sind vernachlässigbar, da als kleinste aufzulösende Schichtmächtigkeit  $a = z$  interessiert. Dies wird auch durch die Ergebnisse der Auswertungen bestätigt. Der Bohrlochdurchmesser (Kaliber) betrug 8,3 bis 16 cm, als linearer Absorptionskoeffizient wurde  $\mu \approx 0,09 \text{ cm}^{-1}$  angenommen, entsprechend einer mittleren Gesteinsdichte im Kalilager von  $\rho \approx 1,8 \text{ g cm}^{-3}$ . Damit erhält man  $a\mu = az = 6,6$ .

Die Korrekturfaktoren zur Berücksichtigung des Bohrlochradius können Bild 8 entnommen werden. Die Berechnung der Koeffizienten des Auswerteschemas aus den unendlichen Gleichungssystemen gestaltet sich hier besonders einfach, da nur die Schicht selbst, in der sich die Sonde befindet, und die un-

<sup>16</sup> Freundlicherweise vom VEB Bohrlochmessungen, Stützpunkt Leipzig, zur Verfügung gestellt.

mittelbaren beidseitigen Nachbarschichten einen nennenswerten Beitrag zur Zählrate liefern, so daß zur Lösung des unendlichen Gleichungssystems mit Vorteil die im Anhang C beschriebene Methode benutzt werden kann. Die so berechneten Koeffizienten sind in Bild 24 dargestellt.

Da für die verwendeten Sonden keine Eichwerte vorlagen, wurden die Ergebnisse der Kernanalysen selbst in der Weise herangezogen, daß bei der Auswertung die Gleichheit des mittleren Kali-Gehaltes der Bohrkerne mit dem mittleren Kaligehalt, der nach dem Auswerteverfahren bestimmt wurde, für den gesamten von der Anomalie des  $\gamma$ -Logs überdeckten Bohrlochabschnitt als Nebenbedingung gefordert wurde. Damit ist die Untersuchung der Abweichungen des berechneten Kaligehaltes von dem durch Analysen ermittelten für jede der Auswertung zugrundegelegte Schicht und die Berechnung von Eichwerten möglich.

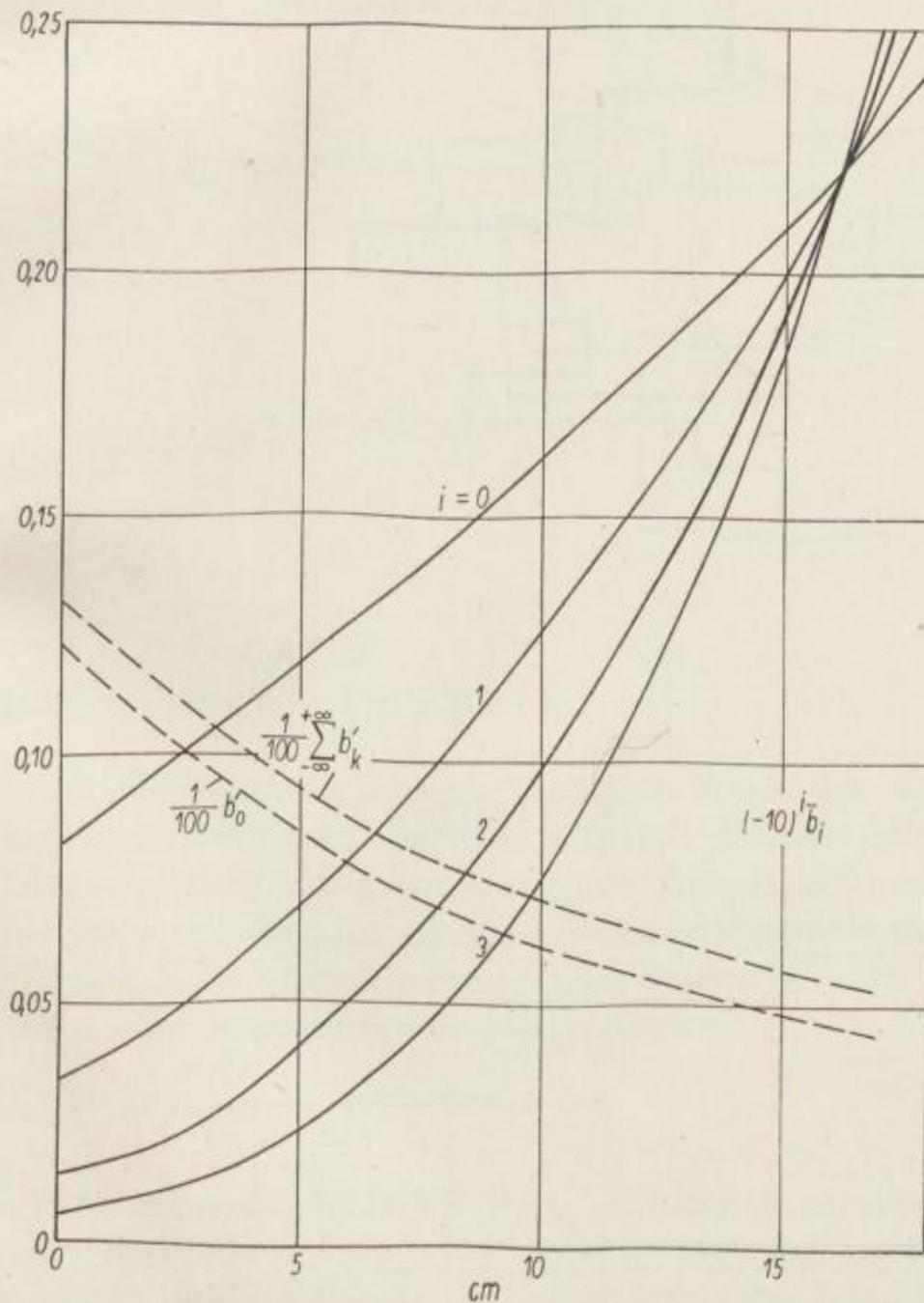


Bild 24. Die Größen  $b'_0$  und  $\sum_{-\infty}^{\infty} b'_k$  und die Koeffizienten  $b_i$  für  $a = z$  im Fall  $\mu = 0,09 \text{ cm}^{-1}$  als Funktion des Kalibers zur Auswertung der folgenden Beispiele

Die Bilder 24a bis 24f zeigen die Ergebnisse der Auswertung als starke durchgezogene Treppenkurve (—), die die Ergebnisse der Bohrkernanalyse (— — —) und die Ergebnisse der früheren Auswertung durch den VEB Bohrlochmessungen (— · — · —). Um die Bilder nicht unübersichtlicher zu machen, wurde auf die Darstellung des  $\gamma$ -Logs selbst verzichtet.

Zur Auswertung wurden die für das jeweilige Kaliber der Bohrung gültigen Koeffizienten der reziproken Matrizen aus dem Bild 24 als Faktoren des Auswerteschemas benutzt, da eine Eichung der Bohrlochsonden nicht vorlag. Nach Multiplikation mit den entsprechenden Zählraten und Addition ergeben sich

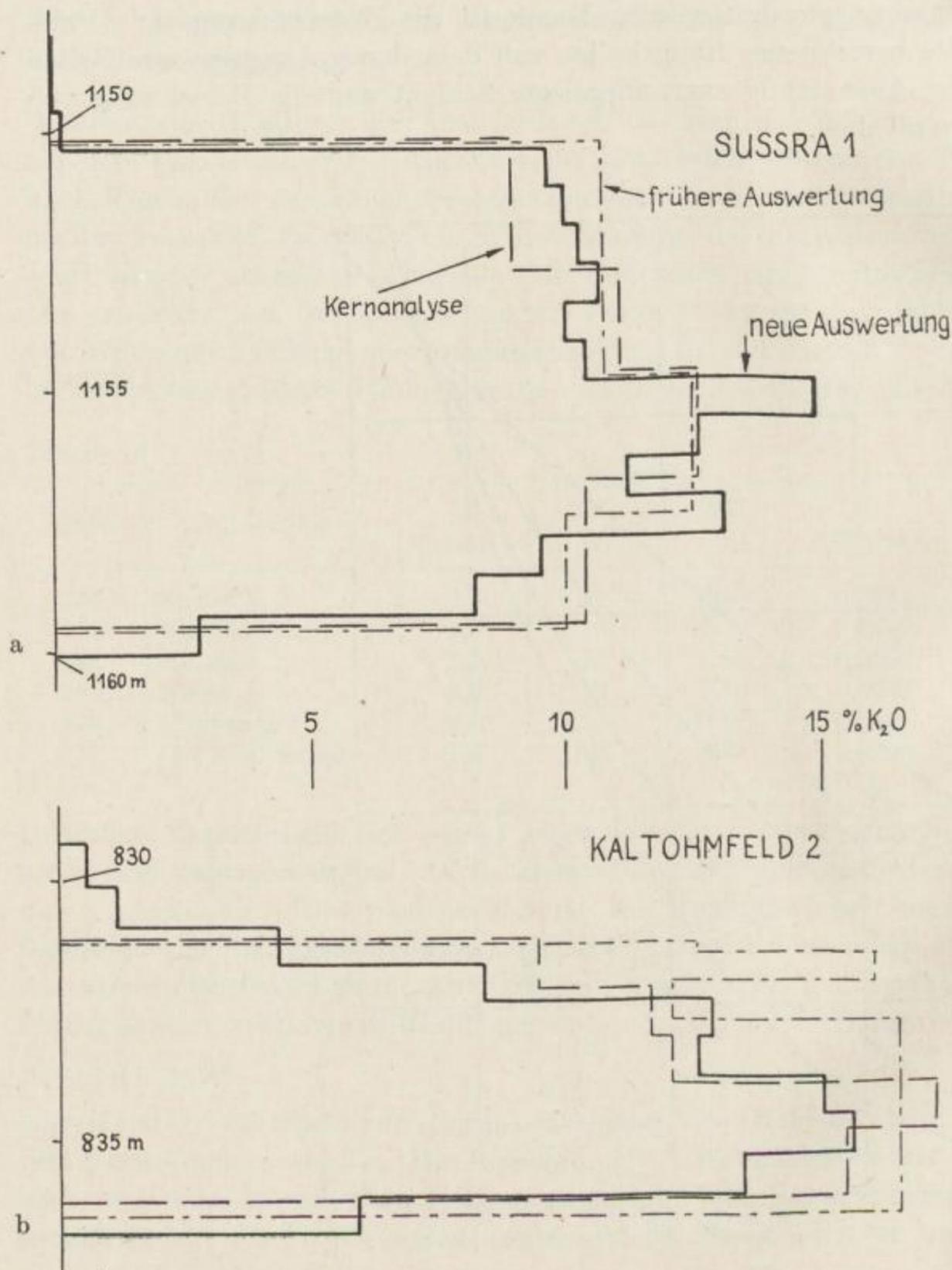


Bild 24a. Auswertung SUSSRA 1

Bild 24b. Auswertung KALTOHMFELD 2

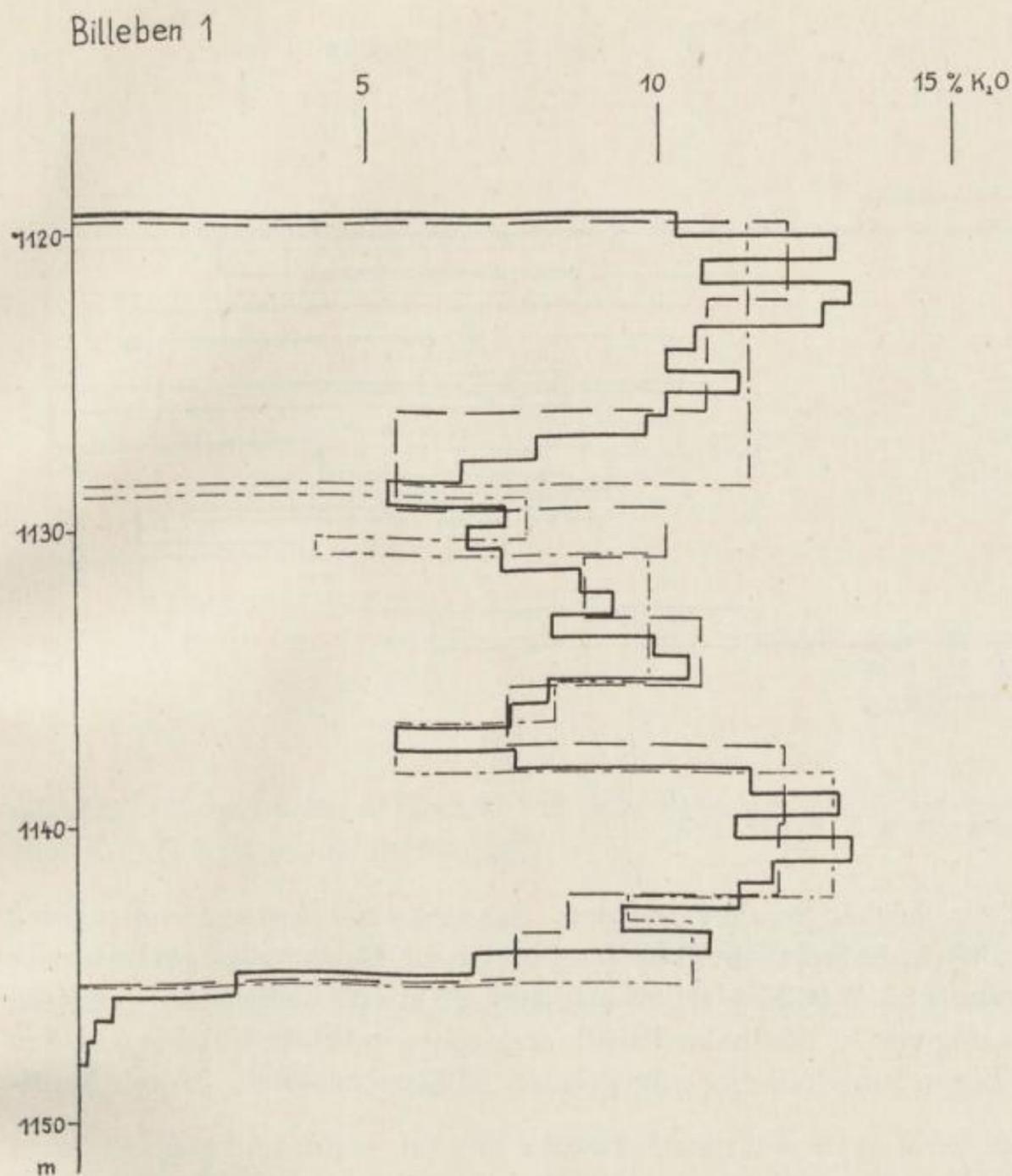


Bild 24c. Auswertung BILLEBEN 1

die für die einzelnen Schichten gültigen Werte des  $K_2O$ -Gehaltes  $g_i$  zunächst noch in unbestimmten Einheiten [pars]. Hieraus kann der mittlere lineare Gehalt  $Q_1$  für den gesamten Bereich der Anomalie in  $m \cdot \text{pars}$  berechnet werden. Aus den chemischen Analysen der Bohrkernkerne kann ebenfalls ein linearer Gehalt  $Q_2$  in  $m\% K_2O$  ermittelt werden. Das Verhältnis beider ergibt den in Gleichung (181) eingeführten Proportionalitätsfaktor

$$k = \frac{Q_2}{Q_1}$$

( $k$  kann auch nach der Methode der kleinsten Quadrate aus (181) bestimmt werden. Die Forderung nach der Gleichheit der radiometrisch und chemisch bestimmten linearen Gehalte ist jedoch vom Standpunkt der Auswertung sinnvoller. Der relative Unterschied beträgt nur etwa  $5 \cdot 10^{-3}$ ). Die verschiedenen Werte  $k$  in Tabelle 16 für die verschiedenen Bohrungen sind auf die Verwendung verschiedener Sonden zurückzuführen. Lediglich Sussra 1 und Billeben 1

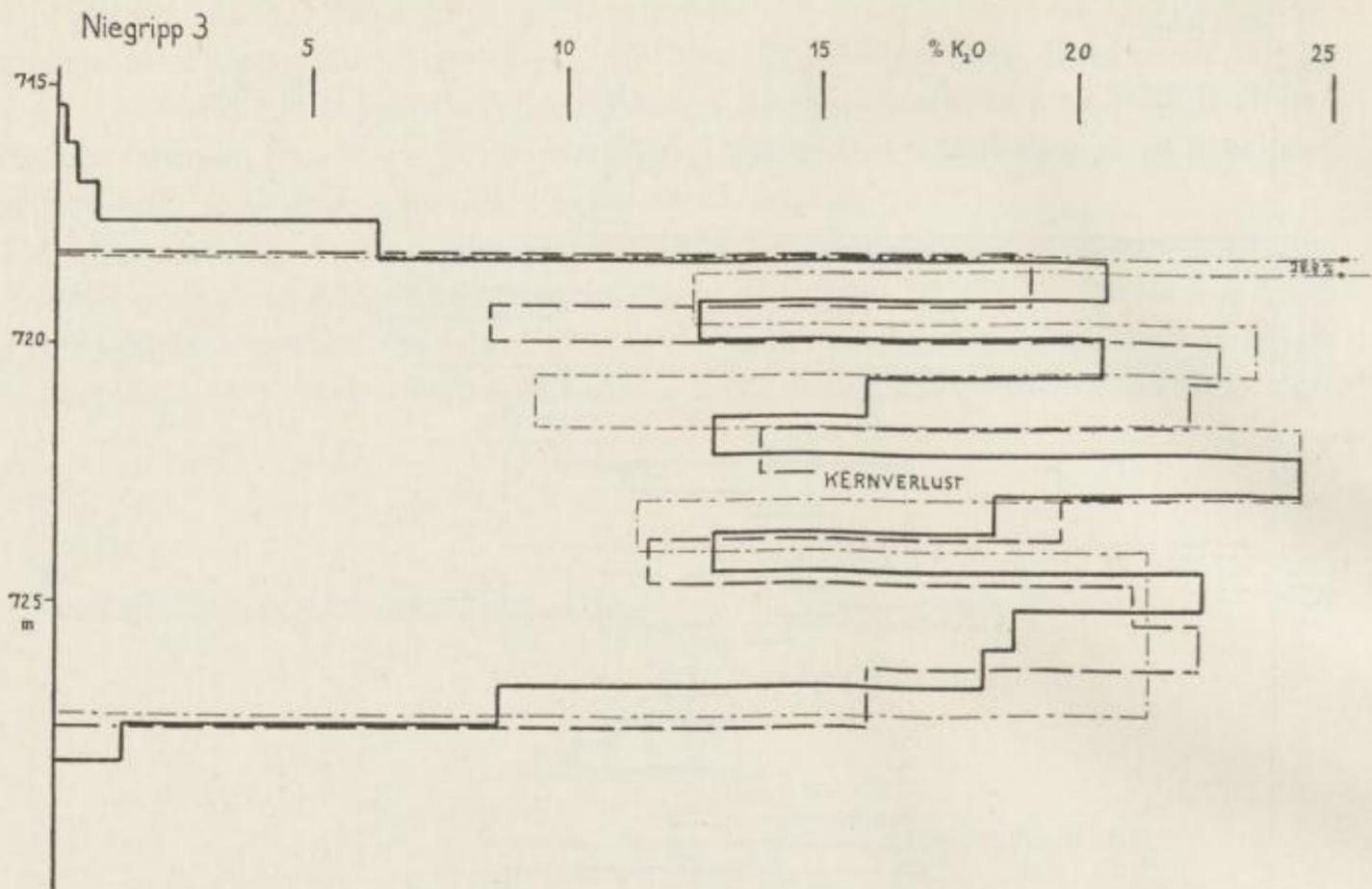


Bild 24d. Auswertung NIEGRIPP 3

wurden mit der gleichen Sonde vermessen. Aus mehreren Bestimmungen von  $k$  für kürzere Bohrlochabschnitte (3 bis 5 m) bei diesen Bohrungen ergab sich ein Mittelwert von  $k = (0,0626 \pm 0,0037)\%/pars$ , d. h. ein Fehler von  $\pm 6\%$  in der Bestimmung von  $k$ . Die in der Tabelle angegebenen Werte bei diesen beiden Bohrungen liegen innerhalb der angegebenen Fehlerschranken. Durch Multi-

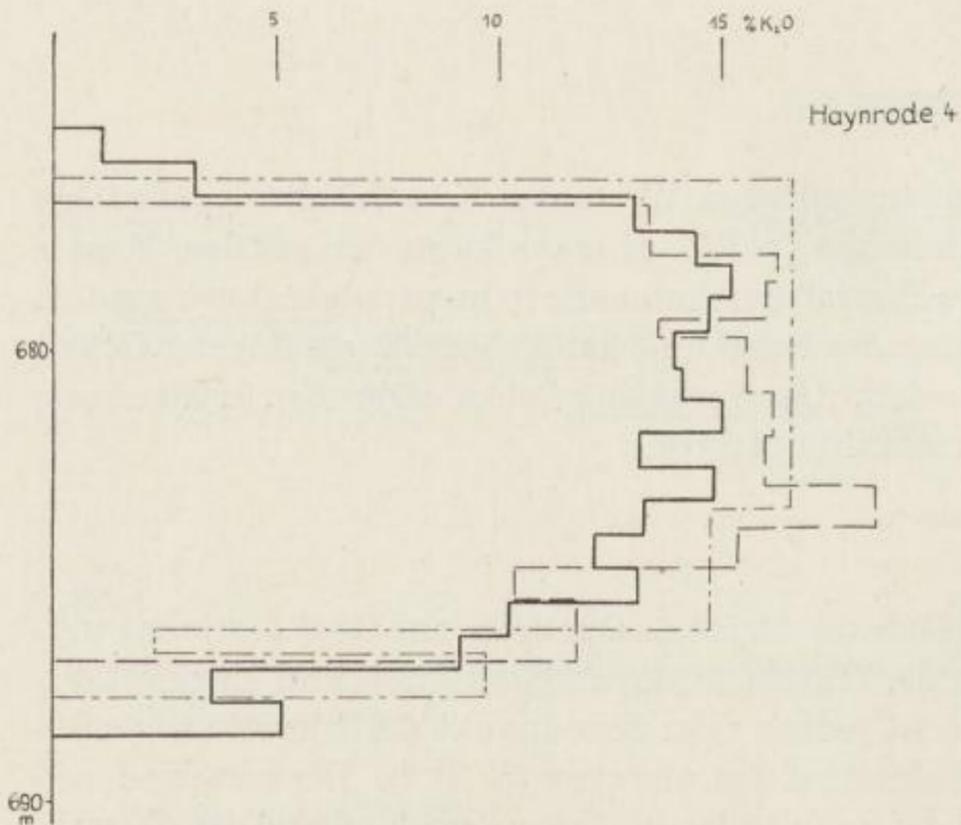
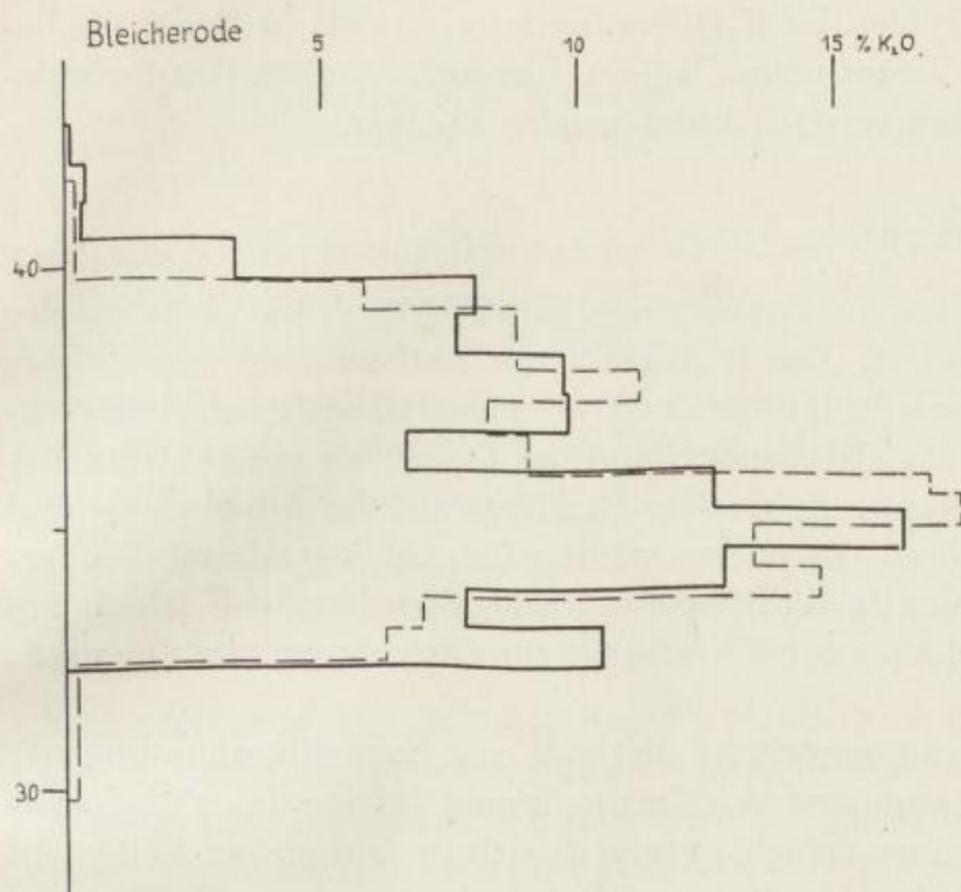


Bild 24e. Auswertung HAYNRODE 4


 Bild 24f. Auswertung  
BLEICHERODE

plikation der berechneten Gehalte mit dem Faktor  $k$  erhält man den prozentualen  $K_2O$ -Gehalt (siehe Tabelle 16):

$$P_i = k g'_i. \quad (181)$$

Der mittlere Fehler  $m$  des prozentualen  $K_2O$ -Gehaltes  $P$  nach der Auswertung des  $\gamma$ -Logs bezogen auf den  $K_2O$ -Gehalt der Bohrkerne kann nach der Formel

$$m^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (P_{i\text{rad}} - P_{i\text{chem}})^2$$

berechnet werden, wenn man die Voraussetzung macht, daß der im Bohrkern festgestellte Kaligehalt den in der Umgebung des Bohrlochs vorhandenen repräsentiert (siehe Tabelle 16). In vier Fällen von den sechs angeführten Beispielen liegt der mittlere Fehler in der von *Uhlmann* (1960) geforderten Größenordnung. Die größeren Fehler dürften auf den von *Winter* (1960) beschriebenen schwankenden Kaligehalt in den einzelnen Schichten eines Kalilagers zurückzuführen sein, wodurch der durch chemische Analysen der Bohrkerne bestimmte Kaligehalt nicht als repräsentativ für den in der Bohrlochumgebung vorhandenen betrachtet werden kann. Infolge des größeren Einzugsgebietes der  $\gamma$ -Strahlung gegenüber dem von einem Bohrloch erfaßten Bereich des Kalilagers ergeben jedoch die Ergebnisse der Auswertung der radio-metrischen Bohrlochmessungen zuverlässigere Auskunft über den Kaligehalt. Durch die endliche Zeitkonstante der Registrierapparatur mit kontinuierlicher Anzeige tritt bei bewegter Bohrlochsonde ein Verschleifen der Anomalie in Bewegungsrichtung ein. Da die Anomalien bei der Auswertung als statische angesehen wurden, ist dieses Verschleifen an dem allmählich gegen Null gehenden  $K_2O$ -Gehalt in Bewegungsrichtung der Sonde zu erkennen. Die dazugehörigen Kaligehalte sind jedoch wesentlich kleiner als die in der Tabelle 16

aufgeführten mittleren Fehler der  $K_2O$ -Bestimmung, so daß die durch die bewegte Sonde bewirkten Verzerrungen bei den hier auftretenden Geschwindigkeiten und Zeitkonstanten vernachlässigt werden können.

### 3.6. Schlußfolgerungen

Die Leistungsfähigkeit des Auswerteverfahrens wird durch die Beispiele der letzten beiden Kapitel belegt. Damit ist ein neues mathematisch begründetes Auswerteverfahren aufgestellt, mit dem aus radiometrischen Bohrlochmessungen mit geringem Zeit- und Rechenaufwand der Gehalt an radioaktiver Materie berechnet werden kann. Subjektive Einflüsse auf die Auswertung sind dabei weitgehend eliminiert. Besonders wichtig für die Beurteilung der Verwendbarkeit des Verfahrens ist das Beispiel auf Bild 23, in dem die Unabhängigkeit des Gesamt-Kali-Gehaltes von der willkürlichen Schichteneinteilung nachgewiesen wird.

*Winter* (1960) hält die radiometrische Methode zur Schnellbestimmung des Kaligehaltes für Bemusterungszwecke für ungeeignet infolge des oft schwankenden Kaligehaltes in einer Schicht, wodurch sich in zahlreichen Fällen ein sehr unterschiedlicher Verlauf der in einem Bohrloch gemessenen Zählrate im Vergleich zum Kaligehalt ergibt, der durch chemische Analyse des Bohrmehls bzw. der Bohrkerns bestimmt wurde. Ein solches Verhalten ist an allen sechs Beispielen des Kapitels 3.5. mehr oder weniger deutlich an den Ergebnissen der Auswertung zu erkennen. Während im allgemeinen die Übereinstimmung zwischen Auswertung und chemischer Analyse gut ist, heben sich mehrere Stellen mit größeren Abweichungen heraus, bei denen offensichtlich durch die chemische Analyse des Bohrkerns der Kaligehalt in der Umgebung des Bohrlochs, der die Gamma-Anomalie hervorruft, nicht richtig angegeben wird.

Als Ursache für die Unterschiede zwischen chemischer Analyse und der Gamma-Anomalie bzw. deren Auswertung müssen also Unregelmäßigkeiten in der Kaliführung angesehen werden. Hieraus darf nicht der Schluß gezogen werden, daß eine erfolgreiche Anwendung der Radiometrie zur Kaligehaltsbestimmung nicht möglich sei. Bei der chemischen Analyse von Bohrkernen (bzw. -mehl) wird dem Gesteinsverband eine Stichprobe entnommen, die auf Grund des schwankenden Kaligehaltes für ihre Umgebung nicht immer repräsentativ ist. Die chemische Analyse liefert nur einen Wert des  $K_2O$ -Gehaltes für einen Teil des Gesteins, das sich nicht mehr im zu untersuchenden Gesteinsverband befindet und sagt wenig aus über den Kaligehalt der Umgebung. Die Diskrepanzen zwischen chemischer Analyse und  $\gamma$ -Anomalie fordern also dazu auf, den chemischen Analysenwerten mit Skepsis gegenüberzutreten, während Ergebnisse auf Grund radiometrischer Messungen durch das viel größere Einzugsgebiet der  $\gamma$ -Strahlung zuverlässigere Angaben für den in der Umgebung des Bohrloches vorhandenen Kaligehalt liefern können.<sup>17</sup> An folgendem kon-

<sup>17</sup> Auf den Vorteil der radiometrischen Bestimmung des  $K_2O$ -Gehaltes durch die viel größere Masse, die bei der Mittelwertbildung erfaßt wird, gegenüber der chemischen Analyse an einzelnen Proben, verweist auch *Rothe* (1959).

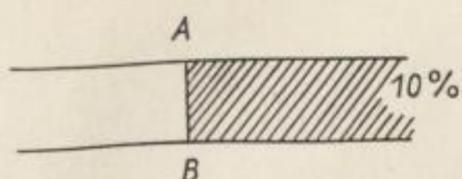


Bild 25

Beispiel einer extremen absätzigen  $K_2O$ -Verteilung

struierten Beispiel für eine extrem absätzige  $K_2O$ -Verteilung in einer Schicht soll dies demonstriert werden (Bild 25): In einer Schicht möge links von der Ebene AB kein  $K_2O$ -Gehalt vorhanden sein, während rechts davon der  $K_2O$ -Gehalt 10% (angenommen) betrage. Wenn eine Bohrung in der Nähe der Ebene AB die Schicht durchörtert, so können folgende besondere Lagen des Bohrloches betrachtet werden (Bild 26):

- $\alpha$ ) das Bohrloch tangiert die Ebene AB links
- $\beta$ ) die Bohrlochachse liegt in der Ebene AB
- $\gamma$ ) das Bohrloch tangiert die Ebene AB rechts

Während die in dem Bohrloch registrierte Zählrate in der betreffenden Schicht für die drei Bohrlochlagen nur geringe Unterschiede aufweisen wird und die Auswertung für  $\beta$  den richtigen mittleren  $K_2O$ -Gehalt für die gesamte Schicht von 5% ergeben wird (bei  $\alpha$  etwas weniger, bei  $\gamma$  etwas mehr), kann die chemische Analyse nur bei  $\beta$  übereinstimmend mit der Auswertung 5%  $K_2O$  ergeben. Für  $\alpha$  ergibt sich 0%, für  $\gamma$  jedoch 10% als mittlerer Kaligehalt für die gesamte Schicht aus der chemischen Analyse.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden auf die Bestimmung des  $K_2O$ -Gehaltes durch die Messung der natürlichen Gammastrahlung in Bohrlöchern angewandt. Selbstverständlich ist dies nicht die einzige Anwendungsmöglichkeit. Eben solche Ergebnisse können auch durch die Anwendung des Auswertungsverfahrens auf Bohrlochmessungen bei der Uranprospektion erzielt werden, wobei die in den Diagrammen dargestellten Auswertekoeffizienten unmittelbar benutzt werden können.

Weitere in der radiometrischen Prospektion häufig verwendete Methoden sind das  $n$ - $\gamma$ - und das  $\gamma$ - $\gamma$ -Verfahren. Diese basieren auf anderen als den hier zugrunde gelegten Gesetzmäßigkeiten. In einer zukünftigen Arbeit soll untersucht werden, ob auch für die genannten Verfahren eine ähnliche Auswertemethode angewandt werden kann.

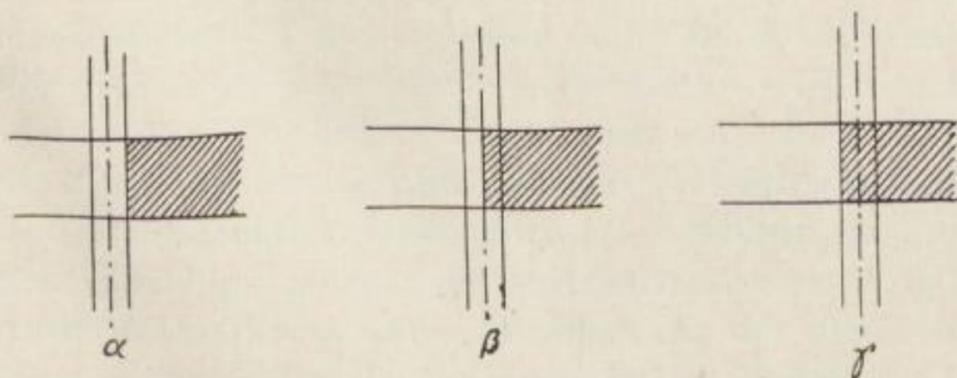


Bild 26. Verschiedene Lagen eines Bohrloches in einer extrem absätzigen Schicht



#### 4. Zusammenfassung

Bei radiometrischen Bohrlochmessungen der Gamma-Strahlung von natürlichen radioaktiven Strahlern, wie sie in der Prospektion auf Kalisalze und Uranerze durchgeführt werden, entsteht die Aufgabe der Zuordnung der gemessenen Strahlungsanomalie zur Konzentration der radioaktiven Strahler in der Umgebung. Für diese Interpretation sind Methoden entwickelt worden, mit deren Hilfe aus der Halbwertsbreite der Anomalie und deren Größe Schichtmächtigkeit und Gehalt an radioaktiver Substanz bestimmt werden können. Solche Methoden sind vorzugsweise zur Auswertung von Anomalien geeignet, die einzelnen Schichten zugeordnet werden können. Treten mehrere radioaktive Schichten in geringem Abstand mit unterschiedlicher Konzentration auf, so ist bei der Interpretation die Trennung der einzelnen Anomalien erforderlich. Hierdurch kann das Interpretationsverfahren leicht durch subjektive Einflüsse belastet werden. Bei der Interpretation von Gamma-Bohrlochmessungen in der Kali-Industrie werden gerade die feineren Einzelheiten der Kaligehaltsverteilung innerhalb eines Kaliflözes benötigt, um bei Bohrungen mit Kernverlust das Flöz identifizieren zu können.

Nach einer kurzen Beschreibung des radioaktiven Zerfalls des Kaliums, der Wechselwirkungsprozesse der Gammastrahlung mit Materie und der Sekundärstrahlung erfolgt die Formulierung des Auswerteproblems, das auf eine singuläre Fredholmsche Integralgleichung erster Art führt. Der Kern dieser Gleichung ist ein Integral über ein Exponentialintegral, dessen Argument so beschaffen ist, daß sich der Kern nicht in geschlossener Weise durch bekannte Funktionen darstellen läßt. Mit Hilfe der Fourierschen Integraltransformation ist die Integralgleichung prinzipiell lösbar, jedoch ergeben sich für die Anwendung dieser Methode Schwierigkeiten durch den komplizierten Aufbau des Kernes. Für die Fourier-Transformierte des Kernes wird eine Integraldarstellung mittels modifizierter Zylinderfunktionen angegeben. Die weitere Untersuchung der Integralgleichung zeigt, daß dem Verhältnis Detektorlänge (z. B. Zählrohr) zu Schichtmächtigkeit eine wichtige Bedeutung zukommt.

Zur Aufstellung eines in der praktischen Anwendung leicht zu handhabenden Auswerteverfahrens unter Ausschaltung der beschriebenen subjektiven Einflüsse wird zunächst die von einem Detektor endlicher Länge in einem Bohrloch registrierte Strahlungsintensität berechnet, wenn die Umgebung des Bohrlochs einen geschichteten Aufbau besitzt. Dabei werden drei verschiedene Verhältnisse Detektorlänge zu Schichtmächtigkeit und für diese jeweils die

Fälle Detektormitte in Schichtmitte und Detektormitte auf Schichtrand betrachtet. Das ergibt insgesamt sechs verschiedene Kombinationen. Die spezifischen Aktivitäten der vom Bohrloch durchhörten Schichten sind über ein unendliches lineares Gleichungssystem mit den punktwise gemessenen Zählraten verknüpft. Die Elemente der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hängen von den Schichtmächtigkeiten, der Detektorlänge, dem Bohrlochradius und den Absorptionseigenschaften der Bohrlochumgebung ab. Zur Auflösung des unendlichen linearen Gleichungssystems wird untersucht, unter welchen Bedingungen die reziproke Koeffizientenmatrix existiert. Hierzu werden bekannte Sätze über die unendlichen linearen Gleichungssysteme herangezogen. Es zeigt sich, daß die reziproke unendliche Matrix nur dann existiert, wenn die der Auswertung zugrunde gelegte Schichtmächtigkeit nicht kleiner als die Detektorlänge ist. Da der Bohrlochradius durch Faktoren an den Koeffizienten des Gleichungssystems berücksichtigt wird, kann dessen Einfluß auf die Existenz der reziproken Matrix besonders klar herausgestellt werden. Ferner zeigt es sich, daß in den Fällen, in denen die Detektormitte auf dem Schichtrand liegt, die reziproke Matrix auf ein sehr unpraktisches Auswerteverfahren führt. Somit verbleiben von den sechs untersuchten Fällen nur noch zwei. Für diese werden die Koeffizienten der reziproken unendlichen Matrixen numerisch berechnet, wobei für die zwei Parameter, Verhältnis Detektorlänge zu Schichtmächtigkeit und normierter Bohrlochradius, die in der Praxis auftretenden Werte angenommen werden. Die ca. 50 linearen Gleichungssysteme mit 11 bis 19 Unbekannten wurden teils mit dem Rechenautomaten ZRA 1 (Rechenzentrum Carl Zeiss Jena) und teils mit einer Tischrechenmaschine nach der Methode von *Banachiewicz* gelöst.

Zur Beurteilung der Fehler, die durch die Annäherung der unendlichen Gleichungssysteme durch endliche auftreten, wurde eine Methode zur strengen Berechnung der Kehrmatrix einer speziellen unendlichen Matrix entwickelt und im Anhang der vorliegenden Arbeit dargestellt. Die nach dieser Methode berechneten Koeffizienten weichen nur unwesentlich von den zuvor beschriebenen Näherungen ab (in den wichtigsten Gliedern weniger als ein Prozent). Die numerischen Ergebnisse werden graphisch dargestellt.

Für die Eichung der Meßeinrichtung werden zweckmäßige Anordnungen vorgeschlagen.

Das Auswerteverfahren wurde bei einigen Bohrlochmessungen angewandt, die von der Zentralen Forschungsstelle für die Kali-Industrie (Sondershausen) und vom VEB Bohrlochmessungen, Stützpunkt Leipzig, durchgeführt worden sind. Die Ergebnisse dieser Auswertung wurden graphisch dargestellt und diskutiert. In einem besonderen Beispiel wird der Einfluß der willkürlichen Lage des der Auswertung zugrundegelegten Schichtensystems untersucht. Dabei zeigt es sich, daß bei verschiedener Lage dieses Schichtensystems keine wesentlichen Unterschiede im Ergebnis der Auswertung auftreten.

## 5. Nachtrag

Mit einer ähnlichen Problematik beschäftigt sich *Scott* (1963)<sup>18</sup> bei der numerischen Auswertung von Gamma-Logs mittels elektronischer Rechenmaschinen zum Zwecke der Uran-Prospektion. Dazu wird, wie auch in der vorliegenden Arbeit, die tatsächliche Erzzone in eine Folge gleichmächtiger hypothetischer Schichten konstanten Urargehaltes zerlegt. Die zu den einzelnen Schichten gehörenden Anomalien werden berechnet. Mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, das mittels eines Rechenautomaten durchgeführt wird, werden die Erzgehalte so festgelegt, daß in äquidistant gelegenen Punkten eine Übereinstimmung mit der gemessenen Anomalie erzielt wird. Diese Punkte liegen in der Mitte der hypothetischen Schichten. Das Iterationsverfahren ähnelt dem Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme in Einzelschritten, das immer dann angewendet werden kann, wenn die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems auf der Hauptdiagonalen größer als die Summe der übrigen Koeffizienten auf der gleichen Zeile sind. Wie gezeigt wurde, ist das der Fall, wenn das Verhältnis Detektorlänge zu Schichtmächtigkeit gewisse Bedingungen erfüllt.

Das Programm wurde so aufgebaut, daß eventuell sich ergebende negative Erzgehalte (was mathematisch möglich, aber physikalisch nicht sinnvoll ist) durch Null ersetzt werden. *Scott* gibt an, daß nach zehn Iterationsschritten eine hinreichende Genauigkeit erreicht wird, die durch weitere Iteration nicht mehr wesentlich verbessert werden kann.

Die Genauigkeit der Resultate hängt natürlich von der Güte des eingegebenen Materials ab, die durch die Genauigkeit der Korrekturen (Bohrlochdurchmesser, Bohrlochspülung, Wassergehalt des Erzes, Abweichungen vom radioaktiven Gleichgewicht zwischen Uran und dessen Zerfallsprodukten) und der Eichung der Anordnung bestimmt ist.

Beim Vergleich dieser Methode mit der hier vorgelegten ist festzustellen, daß in beiden von der gleichen Grundkonzeption ausgegangen wird, nämlich der Berechnung des Erzgehaltes (bzw. Kaligehaltes) einer Folge hypothetischer Schichten, die das Flöz repräsentieren, durch Lösung linearer Gleichungssysteme. Während bei *Scott* zur Interpretation jedes Bohrprofils die Lösung des Gleichungssystems durch ein Iterationsverfahren durchgeführt wird, das nur mittels eines Rechenautomaten erfolgen kann, ist bei dem hier vorgelegten

<sup>18</sup> Diese Veröffentlichung erschien nach Fertigstellung dieser Arbeit.

Verfahren lediglich die einmalige Berechnung der Koeffizienten der reziproken Matrixen der Gleichungssysteme für verschiedene Auswertefälle erforderlich. Zur Interpretation des Bohrprofils werden diese Koeffizienten als Faktoren für geeignet äquidistant angeordnete Meßwerte benutzt, so daß bereits die Summe dieser Produkte den gesuchten Erzgehalt ergibt. Infolge des geringen Rechenaufwandes ist der Einsatz eines Rechenautomaten nicht erforderlich.

## 6. Anhänge

### 6.1. Anhang A: Weitere Bemerkungen zur Funktion $E_\nu(x)$ , Zusammenhang mit anderen Funktionen

Durch eine Substitution erhält man aus der von *Pagurova* (1959) angegebenen Integraldarstellung (65):

$$E_\nu(x) = x^{\nu-1} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^\nu} dt. \quad (198)$$

Für spezielle Werte  $\nu$  erhält man Exponentialintegrale und King-Funktion (siehe (65)). Für ganze  $\nu$  lassen sich die Integro-Exponentialfunktionen vermöge der Rekursionsformel

$$E_n(x) + \frac{n}{x} E_{n+1}(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

auf Exponentialfunktion und Exponentialintegral zurückführen. Ferner gilt

$$E_\nu(x) = \int_x^\infty E_{\nu-1}(x) dx.$$

Es besteht ein Zusammenhang mit den Whittakerschen Funktionen (*Pagurova*, 1959)

$$E_\nu(x) = e^{-x/2} x^{\nu/2-1} W_{-\nu/2, \nu/2+1/2}(x) \quad (199)$$

und infolgedessen auch mit den Kummerschen Funktionen (*Ryshik, Gradstein*, 1962). Ferner kann  $E_\nu(x)$  durch die unvollständige Gammafunktion ausgedrückt werden. Die Bezeichnungen für diese sind in der Literatur nicht einheitlich. Nach *Lösch, Schoblik* (1951) wird

$$(z, \varrho)! = \int_0^\varrho e^{-t} t^z dt \quad (200)$$

als unvollständige Fakultät und

$$Q(z, \varrho) = \int_\varrho^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (201)$$

als Pseudoeulersche oder  $Q$ -Funktion und

$$P(z, \varrho) = \Gamma(z) - Q(z, \varrho) = \int_0^\varrho e^{-t} t^{z-1} dt$$

als  $P$ -Funktion oder unvollständige Gammafunktion bezeichnet. Abweichend davon werden nach *Doetsch* (1947)

$$P(\varrho, z) = \int_0^{\varrho} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (202)$$

und

$$Q(\varrho, z) = \int_{\varrho}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

als unvollständige Gammafunktion oder Prymsche  $P$ - und  $Q$ -Funktion bezeichnet. Von *Prym* (1877) selbst werden als  $P$ - und  $Q$ -Funktionen

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (203)$$

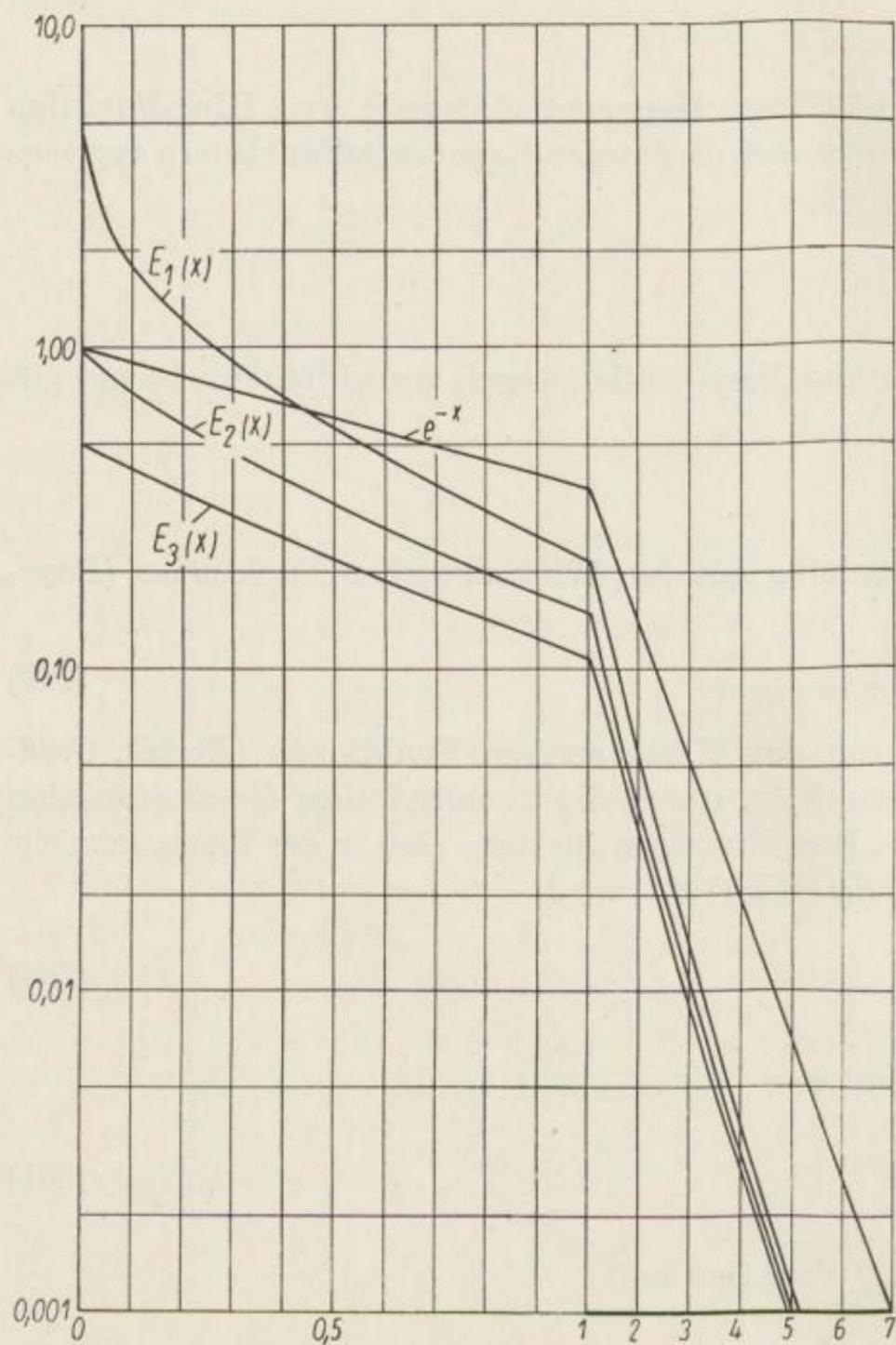


Bild 27. Verlauf der Funktionen  $e^{-x}$ ,  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$  und  $E_3(x)$

eingeführt. In Einklang mit *Lösch, Schoblik* sind die Angaben bei *Ryshik, Gradstein* (1962) (Gl. 8.350) für die unvollständige Gammafunktion:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\alpha, x) &= \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0), \\ \Gamma(\alpha, x) &= \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \\ \gamma(\alpha, x) &= \Gamma(\alpha) - x^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{1}{2}(\alpha-1), \frac{\alpha}{2}}(x) \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

(so auch bei *Magnus, Oberhettinger* (1948) und bei *Whittaker, Watson* (1952)).  
Damit wird

$$E_\nu(x) = x^{\nu-1} \Gamma(1-\nu, x). \quad (205)$$

Den Verlauf der Funktionen  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$ ,  $E_3(x)$  sowie zum Vergleich  $e^{-x}$  zeigt Bild 27.

## 6.2. Anhang B: Ableitung der Formel (173) mittels der $\beta$ -Funktion

Die Formel (173) kann aus (167) auch in folgender Weise abgeleitet werden:  
Nach *Ryshik, Gradstein* (1962) gilt für die Beta-Funktion die Reihendarstellung (Gl. 8.382.1)

$$B(x, y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y(y-1) \cdots (y-n)}{n! (x'+n)} \quad (y > 0). \quad (206)$$

Aus (162) folgt

$$\begin{aligned} & \mu_0 r_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{\frac{1}{2}}{i} \frac{e^{-\mu r_0}}{\mu r_0 + 2i} \\ &= \frac{\mu r_0}{2} e^{-\mu r_0} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - i + 1\right)}{i! \left(\frac{\mu r_0}{2} + i\right)} - e^{-\mu r_0} \\ &= \left[ \frac{\mu r_0}{2} \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \left(\frac{3}{2} - i\right)}{i! \left(\frac{\mu r_0}{2} + i\right)} - 1 \right] e^{-\mu r_0} \end{aligned} \quad (207)$$

$$= \left[ \frac{\mu r_0}{2} B\left(\frac{\mu r_0}{2}, \frac{3}{2}\right) - 1 \right] e^{-\mu r_0}. \quad (208)$$

Ferner ist (a. a. O., Gl. 8.384.1)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (209)$$

und aus (208) folgt

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\mu r_0}{2} B\left(\frac{\mu r_0}{2}, \frac{3}{2}\right) - 1 \right] e^{-\mu r_0} &= \left[ \frac{\mu r_0}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + \frac{3}{2}\right)} - 1 \right] e^{-\mu r_0} \\ &= \left[ \frac{1}{2} \pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu r_0}{2} + \frac{3}{2}\right)} - 1 \right] e^{-\mu r_0} \end{aligned} \quad (210)$$

in Übereinstimmung mit (173).

### 6.3. Anhang C: Allgemeine Lösung eines speziellen linearen unendlichen Gleichungssystems

Das endliche lineare Gleichungssystem für  $2m + 1$  Unbekannte mit reellen Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a x_{-m} + x_{-m+1} &= 0, \\ x_{-m} + a x_{-m+1} + x_{-m+2} &= 0, \\ x_{-m+1} + a x_{-m+2} + x_{-m+3} &= 0, \\ \dots &\dots \dots, \\ x_{-2} + a x_{-1} + x_0 &= 0, \\ x_{-1} + a x_0 + x_1 &= 1, \\ x_0 + a x_1 + x_2 &= 0, \\ \dots &\dots \dots, \\ x_{m-3} + a x_{m-2} + x_{m-1} &= 0, \\ x_{m-2} + a x_{m-1} + x_m &= 0, \\ x_{m-1} + a x_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

besitzt als Koeffizientendeterminante die  $2m + 1$ -reihige Determinante

$$D_{2m+1}(a) = C_{2m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right), \quad (212)$$

die nach Rösler (1962) ein Gegenbauersches Polynom  $C_{2m+1}^1$  darstellt. Als Lösung  $x_0$  finden wir

$$x_0 = \frac{\left(C_m^1\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2}{C_{2m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right)}. \quad (213)$$

Durch Entwicklung der Determinante (212) nach der mittleren Zeile oder Spalte ergibt sich

$$C_{2m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right) = C_m^1\left(\frac{a}{2}\right) \left[ \frac{a}{2} C_{m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right) - 2 C_{m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right) \right] \quad (214)$$

oder unter Berücksichtigung der Rekursionsformel

$$C_{2m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2} C_m^1\left(\frac{a}{2}\right) - C_{m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right) \quad (215)$$

vorteilhafter der Ausdruck

$$C_{m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right) = C_m^1\left(\frac{a}{2}\right) \left[ C_{m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right) - C_{m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right) \right], \quad (216)$$

womit die Lösung  $x_0$  auch so angegeben werden kann:

$$x_0 = \frac{C_m^1\left(\frac{a}{2}\right)}{C_{m+1}^1\left(\frac{a}{2}\right) - C_{m-1}^1\left(\frac{a}{2}\right)}. \quad (217)$$

Die Darstellbarkeit der GEGENBAUERschen Polynome durch hypergeometrische Reihen (*Magnus-Oberhettinger*, 1948, S. 99)

$$C_m^1\left(\frac{a}{2}\right) = a^m {}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right) \quad (218)$$

erlaubt eine Umformung des Nenners von (217):

$$a^{m+1} \left[ {}_2F_1\left(-\frac{m+1}{2}, -\frac{m}{2}; -(m+1); \frac{4}{a^2}\right) - \frac{1}{a^2} {}_2F_1\left(\frac{m-1}{2}, \frac{2-m}{2}; 1-m; \frac{4}{a^2}\right) \right] \quad (219)$$

in dem nun eine Rekursionsformel von *Gauss*

$$\gamma(\gamma+1) F(\alpha, \beta; \gamma; z) - \gamma(\gamma+1) F(\alpha, \beta; \gamma+1; z) - \alpha\beta z F(\alpha+1, \beta+1; \gamma+2; z) \quad (220)$$

mit

$$\alpha = -\frac{m+1}{2}, \quad \beta = -\frac{m}{2}, \quad \gamma = -m-1, \quad \alpha\beta = \frac{1}{4}\gamma(\gamma+1)$$

eine weitere Umformung des Nenners gestattet zu

$$a^{m+1} {}_2F_1\left(-\frac{m+1}{2}, -\frac{m}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right). \quad (221)$$

Schließlich erhalten wir

$$x_0(a) = \frac{{}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right)}{a {}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, -\frac{1+m}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right)}. \quad (222)$$

Für  $a = 2$  kann  $x_0$  besonders leicht angegeben werden, wenn man berücksichtigt, daß

$${}_2F_1(\alpha', \beta'; \gamma'; 1) = \frac{\Gamma(\gamma') \Gamma(\gamma' - \alpha' - \beta')}{\Gamma(\gamma' - \alpha') \Gamma(\gamma' - \beta')} \quad (223)$$

ist.

(Die Singularitäten der Gammafunktion für ganze negative Argumente  $\gamma' = -m$  heben sich auf: Sowohl im Zähler als auch im Nenner tritt ein einfacher Pol auf). Aus (222) folgt mit (223)

$$x_0(2) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(-\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (224)$$

Woraus sich unter Verwendung der Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad (225)$$

$$x_0(2) = \frac{1}{2} (m+1) \quad (226)$$

ergibt. Aus diesem Resultat erkennt man, daß das Gleichungssystem (211) beim Übergang zu einem unendlichen Gleichungssystem mit  $m \rightarrow \infty$  für  $a = 2$  keine beschränkte Lösung besitzt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_0(2) = \infty.$$

Von besonderem Interesse ist die Beantwortung der Frage, für welche Werte  $a$  das unendliche Gleichungssystem eine endliche Lösung besitzt. Da keine allgemeine Formel existiert, nach der  $x_0(a)$  aus (222) für beliebige  $a$  so angegeben werden könnte, daß sich auch der Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  durchführen läßt, ist man auf numerische Methoden der Berechnung angewiesen, wobei man zweckmäßigerweise auf das Gleichungssystem (211) zurückgreift. Dabei kann man berücksichtigen, daß aus Symmetriegründen

$$x_{-i} = x_i$$

sein muß, wodurch sich  $m$  Gleichungen eliminieren lassen. Dann lautet das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} a x_{+m} + x_{+m-1} &= 0, \\ x_{+m} + a x_{+m-1} + x_{+m-2} &= 0, \\ & x_{+m-1} + a x_{+m-2} + x_{+m-3} = 0, \\ \dots \dots \dots &, \\ x_3 + a x_2 + x_1 &= 0, \\ x_2 + a x_1 + x_0 &= 0, \\ 2 x_1 + a x_0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

auf das wir das Verfahren von *Banachiewicz* für mehrere Werte  $m$  anwenden, bis die Lösung  $x_0$  gegen einen Grenzwert konvergiert. (Begnügt man sich mit 3 Dezimalen, so erreicht man den Grenzwert für  $a \geq 2,1$  bereits bei  $m \leq 12$ .) Das Erreichen des Grenzwertes macht sich im Schema von *Banachiewicz*

dadurch bemerkbar, daß die Elemente der Hauptdiagonale der oberen Dreiecksmatrix konstant werden. Bezeichnen wir diese Elemente mit  $b$ , so gilt

$$b = a - \frac{1}{b} \quad (228)$$

und die gesuchte Lösung  $x_0$  nimmt für  $m \rightarrow \infty$  folgenden Wert an

$$x_0 = \frac{1}{a - \frac{1}{b}}, \quad (229)$$

wobei  $b$  aus der quadratischen Gleichung (227) zu bestimmen ist:

$$b^2 - ab + 1 = 0. \quad (230)$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten

$$b = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}. \quad (231)$$

Die Lösung des aus (211) hervorgehenden unendlichen Systems lautet nun

$$x_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - 4}}. \quad (232)$$

Von diesen beiden sich nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Lösungen führt nur eine auf eine beschränkte Lösung des unendlichen Gleichungssystems

$$x_0 = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - 4}}. \quad (233)$$

Das läßt sich leicht zeigen, wenn man aus (227) weitere Unbekannte rekursiv berechnet.

Auf Grund dieser Ergebnisse gilt folgender Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{{}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m-1}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right)}{{}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m+1}{2}; -m; \frac{4}{a^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4}}. \quad (234)$$

oder mit  $z = \frac{4}{a^2} < 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{{}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m+1}{2}; -m; z\right)}{{}_2F_1\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m-1}{2}; -m; z\right)} = \sqrt{1 - z}. \quad (235)$$

Nach Gleichung (233) besitzt das unendliche lineare Gleichungssystem nur für  $|a| > 2$  eine reelle beschränkte Lösung.

#### 6.4. Anhang D: Zur Berechnung der Kehrmatrix einer unendlichen Matrix mit reellen Koeffizienten, Teil I

Es sei eine quadratische  $(2m+1)$ -spaltige Matrix  $(a_{ik}^{(m)})$  gegeben  $(-m \leq i \leq +m; -m \leq k \leq +m)$ . Die zu  $(a_{ik}^{(m)})$  reziproke Matrix  $(x_{ik}^{(m)})$  ist definiert durch

$$\sum_{j=-m}^{+m} a_{ij}^{(m)} x_{jk}^{(m)} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases} \quad (236)$$

Für  $m \rightarrow \infty$  wird  $(a_{ik}^{(m)})$  eine unendliche Matrix und (236) ein unendliches Gleichungssystem. Wir bezeichnen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_{ik}^{(m)}) = (a_{ik})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_{ik}^{(m)}) = (x_{ik}).$$

Wenn  $(a_{ik})$  symmetrisch ist:  $a_{ik} = a_{ki}$  und speziell

$$a_{ii} = a_1 \quad a_{i, i \pm 1} = a_2 \quad a_{i, i \pm 2} = 1 \quad a_{i, i \pm j} = 0 \quad j > 2;$$

gilt, dann ist auch  $(x_{ik})$  symmetrisch und es gilt

$$x_{ii} = x_0 \quad x_{i, i+k} = x_k = x_{-k} \quad -\infty < k < +\infty. \quad (237)$$

Das unendliche Gleichungssystem lautet dann

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i, i+k} x_k = \delta_{i,0}. \quad (238)$$

Wegen der Bedingung  $x_k = x_{-k}$  reduziert sich (238) zu

$$\begin{pmatrix} \dots & & & & & & & \dots \\ \dots & a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & a_2 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & a_2 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & a_2 & a_1 & a_2 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 & a_2 & a_1 & a_2 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & a_1 + 1 & a_2 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2a_2 & a_1 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (239)$$

Lineare Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten werden am vorteilhaftesten nach dem Verfahren von *Banachiewicz* (Collatz 1955) gelöst. Wenn das unendliche System (239) eine beschränkte Lösung  $x_i$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$  besitzt, so konvergiert das Verfahren bei Anwendung auf ein auf endlich viele Gleichungen reduziertes System gegen die Lösung des unendlichen Systems und die beiden Dreiecksmatrixen des Verfahrens von *Banachiewicz* lauten

$$\begin{pmatrix} \dots & & & & \dots \\ \dots & \gamma & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ & \beta & \gamma & \alpha & 1 & 0 \\ & \gamma^{-1} & \beta & \gamma & \alpha & 1 \\ & 0 & \gamma^{-1} & \beta & 1 + \gamma & \alpha \\ \dots & 0 & 0 & 2\gamma^{-1} & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} \quad (240)$$

mit

$$\begin{aligned}\alpha &= a_2 - \beta = a_2 - \alpha \gamma^{-2} - a_2 \gamma^{-1} \\ \beta &= a_2 \gamma^{-1} - \alpha \gamma^{-2}\end{aligned}\quad (241)$$

$$\begin{aligned}\gamma &= a_1 - \gamma^{-1} - \alpha \beta = a_1 - \gamma^{-1} + \alpha^2 \gamma^{-2} - \alpha a_2 \gamma^{-1} \\ \beta' &= 2 \beta \gamma (1 + \gamma)^{-1}\end{aligned}\quad (242)$$

$$\gamma' = a_1 - 2 \gamma^{-1} + 2 \alpha (\alpha \gamma^{-1} - a_2) (1 + \gamma)^{-1}.\quad (243)$$

Für die weitere Rechnung genügt die Betrachtung der Größen  $\alpha$  und  $\gamma$ . Man erhält aus (241) und (242)

$$\alpha^2 \gamma - \gamma^2 - a_2 \alpha \gamma + a_1 \gamma - 1 = 0\quad (244)$$

$$(\gamma - 1) [a_2 \gamma - \alpha (\gamma + 1)] = 0\quad (245)$$

zwei nichtlineare Gleichungen für  $\alpha$  und  $\gamma$ . Eine Lösung von (245) lautet

$$\gamma = 1$$

und mit diesem Wert folgt aus (244) für  $\alpha$

$$\alpha = a_2/2 \pm \sqrt{a_2^2/4 + 2 - a_1}$$

Diese Lösung ist nur für  $a_1 \leq 2 + a_2^2/4$  reell. Es ist jedoch offensichtlich, daß das Gleichungssystem (239) auch für  $a_1 \gg a_2 > 1$  eine reelle, beschränkte Lösung besitzen muß. Für  $\gamma \neq 1$  erhält man

$$\alpha = a_2 \gamma (1 + \gamma)^{-1} \quad \text{oder} \quad \gamma = \alpha (a_2 - \alpha)^{-1}.\quad (246)$$

Das sind Hyperbeln in einem kartesischen  $\alpha, \gamma$ -Koordinatensystem. Mit (246) wird (244) eine Gleichung vierten Grades für  $\alpha$ :

$$\alpha^4 - 2 a_2 \alpha^3 + (2 + a_1 + a_2^2) \alpha^2 - (2 a_2 + a_1 a_2) \alpha + a_2^2 = 0$$

und eine ebensolche für  $\gamma$ :

$$\gamma^4 + (2 - a_1) \gamma^3 + (2 + a_2^2 - 2 a_1) \gamma^2 + (2 - a_1) \gamma + 1 = 0\quad (247)$$

die sich auch als quadratische Gleichung für  $\gamma + \gamma^{-1}$  schreiben läßt:

$$(\gamma + \gamma^{-1})^2 + (2 - a_1) (\gamma + \gamma^{-1}) + a_2^2 - 2 a_1 = 0.$$

Es ist also

$$\gamma + \gamma^{-1} = \frac{a_1}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} + 1\right)^2 - a_2^2}$$

und es folgt daraus für

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} + 1\right)^2 - a_2^2} \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{2 \left[ \frac{a_1^2}{4} - 1 - \frac{a_2^2}{2} \pm \left(\frac{a_1}{2} - 1\right) \sqrt{\left(\frac{a_1}{2} + 1\right)^2 - a_2^2} \right]} \right\}.\end{aligned}$$

Für das Auftreten reeller Wurzeln  $\gamma$  müssen folgende Bedingungen erfüllt sein (siehe Bild 28)

$$|a_2| \leq \left| \frac{a_1}{2} + 1 \right|. \quad (248)$$

Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für  $a_1 < 0$ . Es treten dann vier reelle Wurzeln auf. Für  $a_1 > 0$  existieren für

$$a_1 > \frac{a_2^2}{4} + 2 \quad (249)$$

zwei reelle Wurzeln, für

$$2|a_2| - 2 < a_1 < \frac{a_2^2}{4} + 2 \quad (250)$$

vier reelle Wurzeln.

Andererseits kann die Lösung auch als Schnittpunkt zweier Kurvenscharen gefunden werden. Durch Elimination von  $a_2$  aus (244) unter Verwendung von (245) erhält man

$$\alpha^2 + \left( \gamma - \frac{a_1}{2} \right)^2 = \frac{a_1^2}{4} - 1. \quad (251)$$

Das ist im rechtwinkligen  $\alpha, \gamma$ -Koordinatensystem die Gleichung eines Kreises vom Radius  $\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - 1}$  mit dem Mittelpunkt bei  $\gamma = \frac{a_1}{2}$ . Für  $|a_1| > 2$  können im allgemeinen vier Schnittpunkte  $S$  der Kreise (251) mit den Hyperbeln (246) auftreten (Bild 29). Es bedarf einer besonderen Untersuchung, welche die Schnittpunkte auf eine beschränkte Lösung des Systems (239) führen. Zunächst folgt aus (243) mit (246)

$$\gamma' = a_1 - 2\gamma^{-1} - 2\alpha^2(1 + \gamma)^{-1}$$

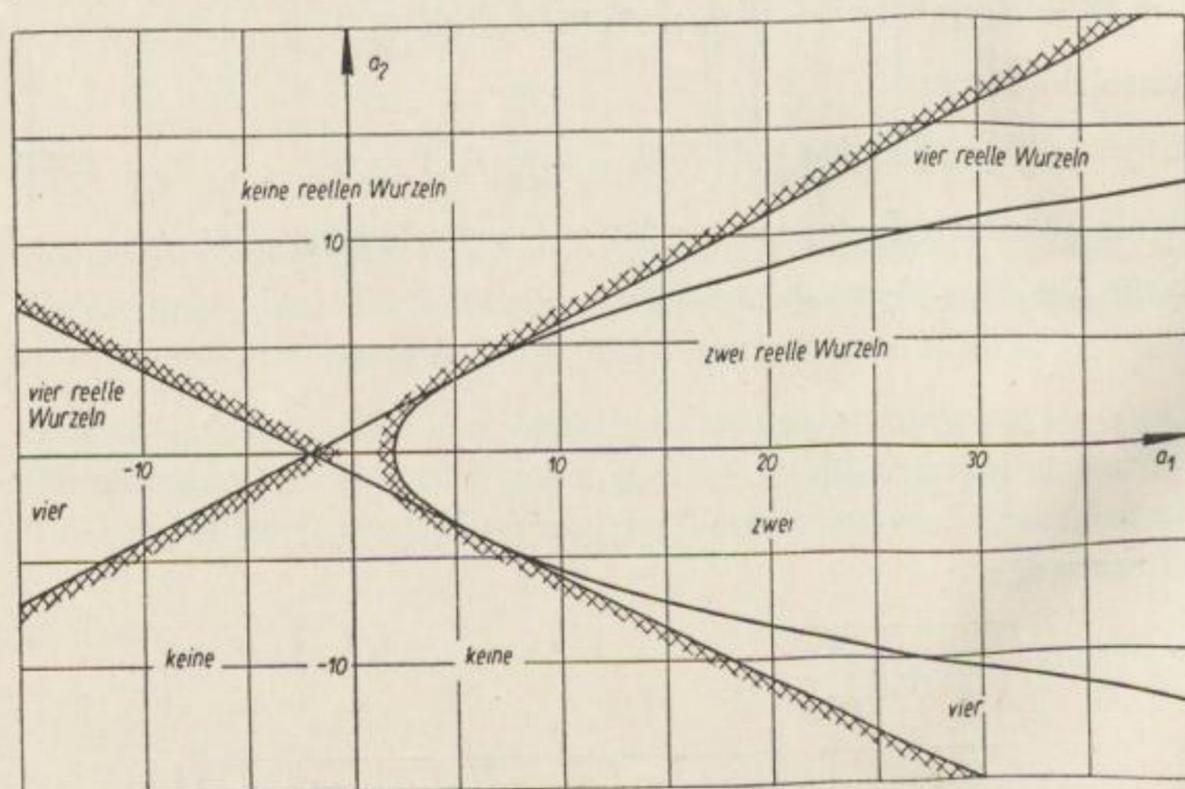


Bild 28. Bereiche der reellen und komplexen Wurzeln

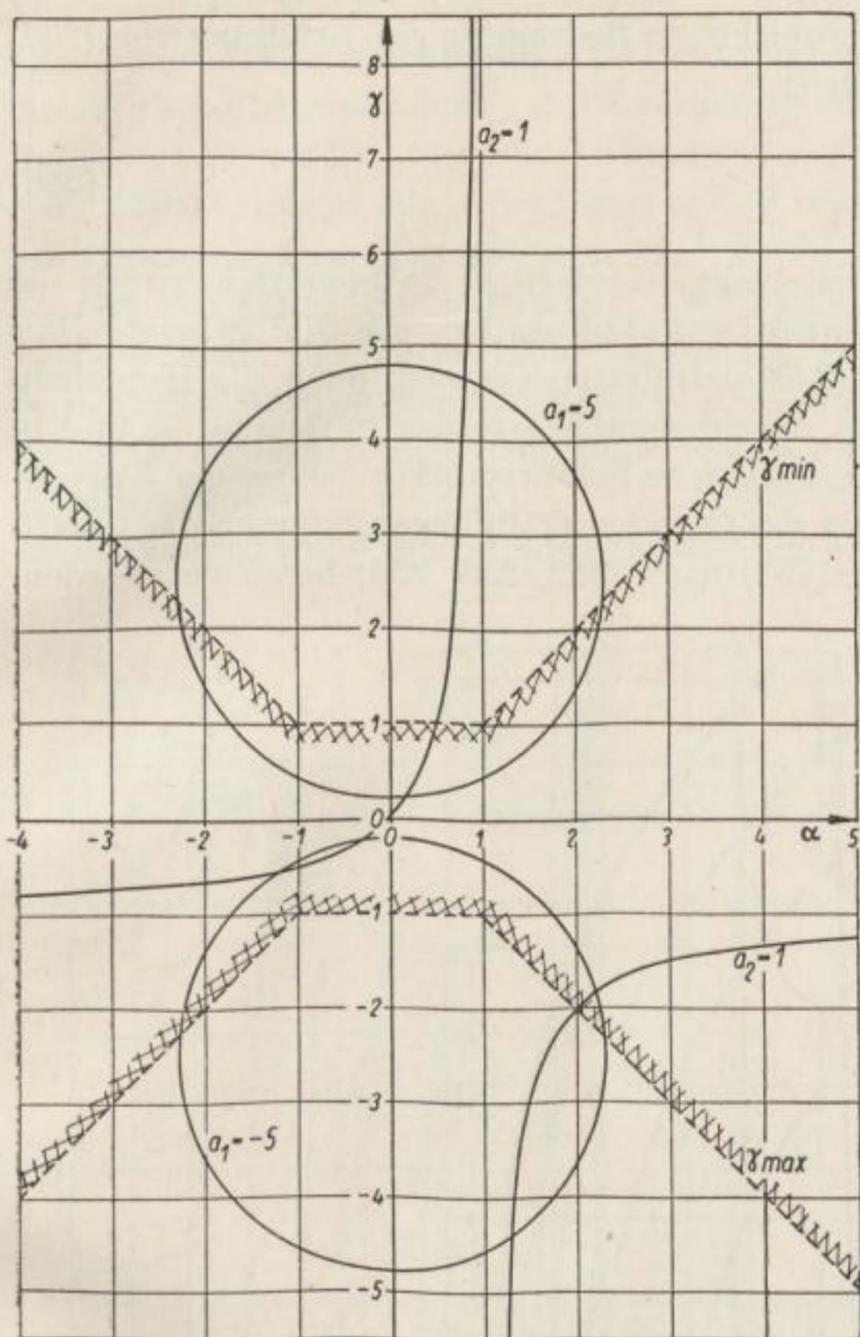


Bild 29  
Graphische Bestimmung von  $\alpha$   
und  $\gamma$  aus  $a_1$  und  $a_2$

und wir erhalten für  $x_0$ :

$$x_0 = \gamma'^{-1} = \{a_1 - 2\gamma^{-1} - 2\alpha^2(1 + \gamma)^{-1}\}^{-1}$$

und nach Elimination von  $a_1$  mittels (247):

$$x_0 = (1 + \gamma)\gamma(\gamma - 1)^{-1}[(\gamma + 1)^2 - \alpha^2]^{-1}. \quad (252)$$

Aus (240) folgt

$$x_1 = -\alpha x_0(1 + \gamma)^{-1} \quad (253)$$

und

$$x_{n+1} = -\gamma^{-1}(\alpha x_n + x_{n-1}). \quad (254)$$

Für die beschränkte Lösung des Systems (239) gilt nach *Kantorowitsch, Krylow* (1956)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \quad (255)$$

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung zur Erfüllung von (255) kann aus (254) abgeleitet werden:

$$\left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| < 1 \quad \text{und} \quad |\gamma^{-1}| < 1. \quad (256)$$

Eine Verschärfung von (256) ist nicht erforderlich, da hierdurch bereits die beiden Schnittpunkte  $S$  voneinander getrennt werden, wie Bild 29 zeigt. Hier sind außer den beiden durch (256) definierten Geraden auch die Hyperbeln (246) und die Kreise (251) für verschiedene Werte der Parameter  $a_1$  und  $a_2$  dargestellt. Aus den Werten  $\alpha, \gamma$  für jene Schnittpunkte der beiden Kurvenscharen, die für  $a_1 > 2$  oberhalb der Geraden (256) liegen, können die Koeffizienten der reziproken Matrix (237) nach (252, 253, 254) berechnet werden.

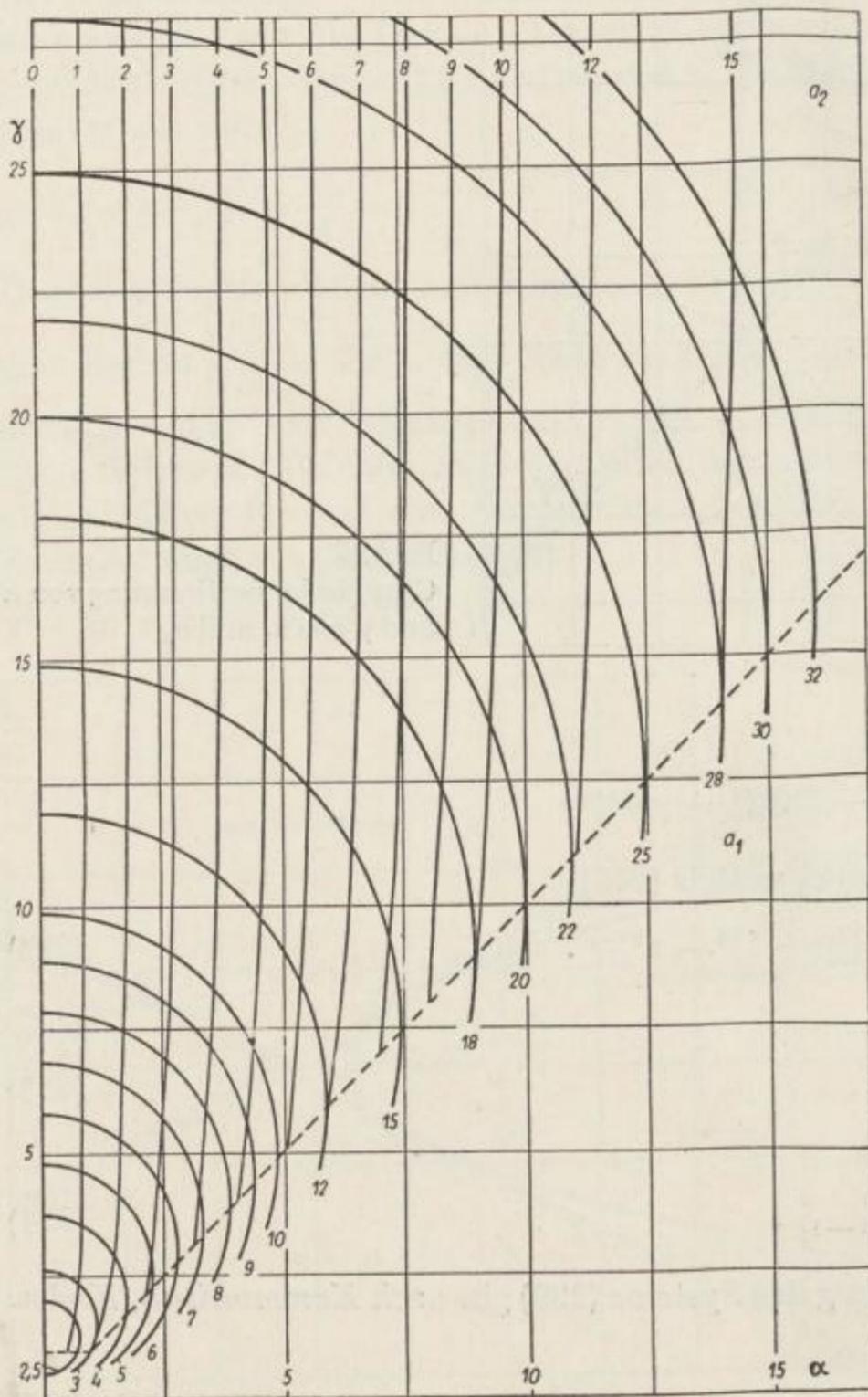


Bild 30. Nomogramm für  $\alpha$  und  $\gamma$

Die auf diese Weise ausgezeichneten  $\gamma$ -Werte sind die reellen Wurzeln der Gleichung (247) mit dem größten Absolutbetrag.

Ausführliche Nomogramme zur Bestimmung von  $\alpha$  und  $\gamma$  aus  $a_1$  und  $a_2$  zeigen die Bilder 30 und 31. Aus Bild 31 können die Wurzeln  $\alpha$  und  $\gamma$ , die der Bedingung (256) genügen, für  $a_1 > 2$  und  $a_2 > 0$  bestimmt werden. Bild 31 ist das entsprechende Nomogramm für  $a_1 < -2$  und  $a_2 > 0$ .

Da die Bedingung nur notwendig, aber nicht hinreichend ist, treten in der Nachbarschaft der durch (256) definierten Grenze für gewisse Wertepaare  $a_1, a_2$  zwei Schnittpunkte auf, wenn  $a_1 < -2$  ist. Auf die Lösung des unendlichen Gleichungssystems (239) führt jedoch nur der  $\gamma$ -Wert mit dem größten Absolutbetrag.

Beide Nomogramme gelten auch für  $a_2 < 0$ , wenn  $\alpha$  durch  $-\alpha$  ersetzt wird.

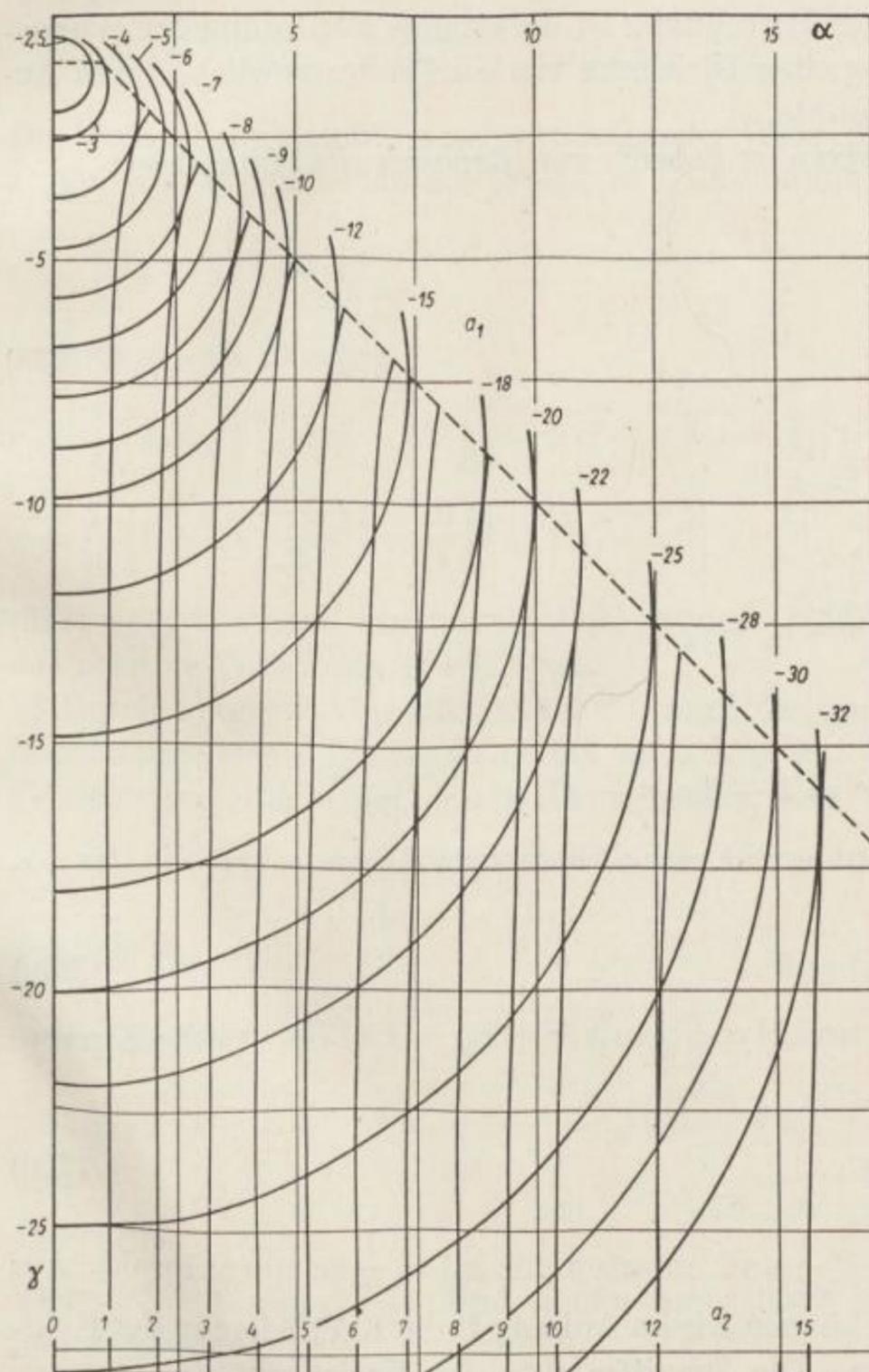


Bild 31. Nomogramm für  $\alpha$  und  $\gamma$

### 6.5. Anhang E: Zur Berechnung der Kehrmatrix einer unendlichen Matrix mit reellen Koeffizienten, Teil II

Wenn die unendliche Matrix in der Form

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \dots \\ \dots & 1 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots \\ & c_1 & 1 & c_1 & c_2 & 0 & \\ & c_2 & c_1 & 1 & c_1 & c_2 & \\ & 0 & c_2 & c_1 & 1 & c_1 & \\ \dots & 0 & 0 & c_2 & c_1 & 1 & \dots \\ \dots & & & & & & \dots \end{pmatrix} \quad (257)$$

vorliegt, kann die gleiche Methode zur Berechnung der Kehrmatrix benutzt werden. Im Verlauf dieser Berechnung ist die strenge Festlegung der Wurzelvorzeichen in der Lösung einer Gleichung vierten Grades möglich, die in Anhang D nicht erfolgen konnte.

Die beiden Dreiecksmatrixen im Schema von *Banachiewicz* lauten hier:

$$\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ & r & s & c_2 & 0 & 0 & & \\ & t & r & s & c_2 & 0 & & \\ & u & t & r & s & c_2 & & \\ & 0 & u & t & c_2 + r & s & & \\ \dots & 0 & 0 & 2u & t' & x' & & \end{array} \quad (258)$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \frac{c_2}{r} & s &= c_1 - c_2 t \\ t &= \frac{c_1}{r} - \frac{u s}{r} & t' &= \frac{2 t r}{c_2 + r} \\ r &= 1 - c_2 u - s t & r' &= 1 - 2 c_2 u - s t'. \end{aligned}$$

Durch die Elimination von  $u$  und  $t$  erhält man zwei Kurvenscharen in der  $r, s$ -Ebene. Die erste lautet

$$(r - c_2) [s (r + c_2) - r c_1] = 0. \quad (259)$$

Das sind Geraden  $r = c_2$  und Hyperbeln  $s (r + c_2) = r c_1$ . Die zweite Kurvenschar stellt Kreise dar

$$\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{1}{4} - c_2^2; \quad (260)$$

sie existieren nur für  $|c_2| < \frac{1}{2}$  und entarten für  $|c_2| = \frac{1}{2}$  zu einem Punkt. Aus einem der Schnittpunkte können wie im Anhang D die Koeffizienten der Kehrmatrix berechnet werden. Die Schnittpunkte der Kreise mit der Geraden  $r = c_2$  sind unabhängig von  $c_1$ . Folglich führen diese nicht auf die gesuchten

Koeffizienten. Die Hyperbelschar

$$s(r + c_2) = r c_1 \quad (261)$$

hat gegenüber der Hyperbelschar (246) den Nachteil, daß sie von zwei Parametern abhängt. Deshalb soll hier von einer graphischen Darstellung abgesehen werden. Durch Elimination von  $s$  mittels (261) in (260) erhalten wir eine Gleichung vierten Grades für  $r$ :

$$r^4 + (2c_2 - 1)r^3 + (2c_2^2 - 2c_2 + c_1^2)r^2 + (2c_2 - 1)r + c_2^4 = 0.$$

Die Lösung lautet

$$r = \frac{1}{4} \left\{ 1 - 2c_2 \pm \sqrt{(1 + 2c_2)^2 - 4c_1^2} \right. \\ \left. \pm \sqrt{2[1 - 2c_1^2 - 4c_2^2 \pm (1 - 2c_2)\sqrt{(1 + 2c_2)^2 - 4c_1^2}]} \right\}. \quad (262)$$

Die Vorzeichenfeststellung kann in folgender Weise erfolgen:

a) Für  $c_2 = 0$  erhält man aus (261)  $s = c_1$  und damit aus (260)

$$r = \frac{1}{2} \{ 1 \pm \sqrt{1 - 4c_1^2} \}. \quad (263)$$

Aus (262) folgt dagegen

$$r = \frac{1}{4} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4c_1^2} \pm \sqrt{2[1 - 2c_1^2 \pm \sqrt{1 - 4c_1^2}]} \right\} \\ = \frac{1}{4} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4c_1^2} \right\} \pm \frac{1}{4} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4c_1^2} \right\}. \quad (264)$$

(263) und (264) sind nur dann gleich, wenn in (262) vor der zweiten Wurzel das positive Vorzeichen gewählt wird.

b) Durch Vergleich von (263) mit der Lösung des im Anhang C untersuchten Gleichungssystems findet man, daß auch hier nur das positive Vorzeichen Übereinstimmung bringt. Es ist nämlich für  $c_2 = 0$

$$x_0 = \left[ 1 - \frac{2c_1^2}{r} \right]^{-1} = \pm \left[ 1 - 4c_1^2 \right]^{-1/2}.$$

Folglich gilt

$$r = \frac{1}{4} \left\{ 1 - 2c_2 + \sqrt{(1 + 2c_2)^2 - 4c_1^2} \right. \\ \left. + \sqrt{2[1 - 2c_1^2 - 4c_2^2 + (1 - 2c_2)\sqrt{(1 + 2c_2)^2 - 4c_1^2}]} \right\} \quad (265)$$

und

$$s = c_1 r [c_2 + r]^{-1}. \quad (266)$$

Wenn  $c_1^2 \ll 1$  und  $c_2 \ll 1$  sind, erhält man durch binomische Entwicklung näherungsweise

$$r = 1 - c_1^2 - \frac{1}{2} c_2^2. \quad (267)$$

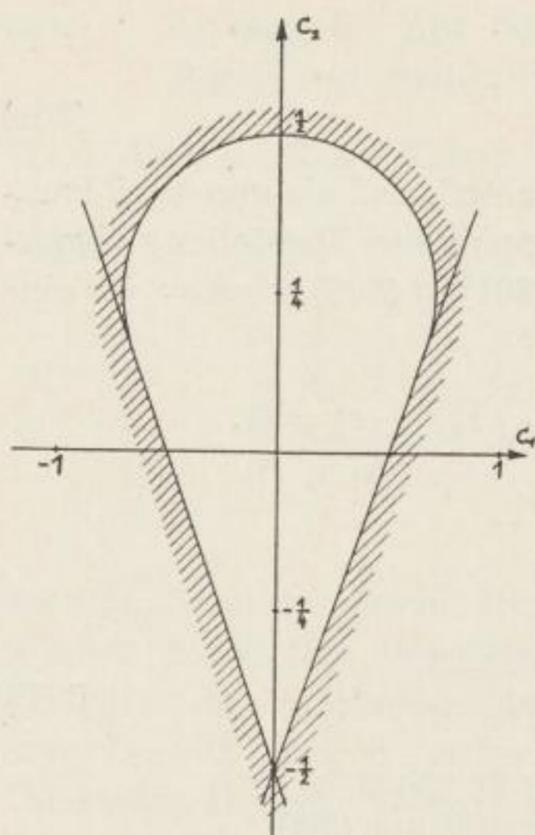


Bild 32. Bereich für reelle Wurzeln

Damit findet man die Koeffizienten der reziproken Matrix zu

$$x_0 = [1 - 2c_2^2 r^{-1} - 2s^2(c_2 + r)^{-1}]^{-1} \quad (268)$$

$$x_1 = -s x_0 (c_2 + r)^{-1} \quad (269)$$

$$x_{n+2} = -r^{-1}(s x_{n+1} + c_2 x_n) \quad \text{für } n \geq 0. \quad (270)$$

Die Kehrmatrix existiert nur dann, wenn die Radikanden in (265) positiv sind. Diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  innerhalb eines Gebietes des  $c_1, c_2$ -Koordinatensystems liegen, daß von Stücken der Geraden

$$c_2 + c_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad (271)$$

und

$$c_2 - c_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad (272)$$

und von einem Teil der Ellipse

$$2c_1^2 + 16\left(c_2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 \quad (273)$$

begrenzt wird (siehe Bild 32). Die Geraden (271, 272) sind Tangenten an die Ellipse (273).

## Literatur

- Abkürzungen: AGP Acta Geophysika Polonica, Warszawa  
Gy Geophysics, Tulsa  
GP Geophysical Prospecting, The Hague  
HP Flügge, S., Handbuch der Physik, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg  
IAN Izvestija Akademia Nauk SSSR, ser. geofiz., Moskva  
P.UN Proc. 2. U. N. Inst. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva
- Ambross, R.*: Methoden der angewandten Geophysik. Steinkopf, Dresden u. Leipzig 1926.
- Baranov, V. I.*: Radiometrie. Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1959.
- Brannon, H. R., Osaba, J. S.*: Spectral Gamma-Ray Logging — Journ. Petrol. Technol. (1956) S. 30—35.
- Büchner, E. H.*: Der Radiumgehalt von Gesteinen. Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik, Leipzig 10 (1913) S. 516—531.
- Budde, E., Wendt, J.*: Radiometrische Überwachung des Kaligehaltes im Rohsalzstrom. Kali und Steinsalz, Essen 3 (1960) S. 98—100.
- Collatz, L.*: Numerische und graphische Methoden. HP II (1955) S. 385.
- Comstock, S. S.*: Scintillation drill-hole logging. P.UN 6 (1956) S. 722—725.
- Czubek, A.*: (Die Genauigkeit der Interpretation linearer Quellen von radioaktiven Erzen aus der Gamma-Bohrlochmessung). AGP 8 (1960) S. 206—223.
- Czubek, J. A.*: Some problems of the theory and quantitative interpretation of the gamma-ray logs. AGP 9 (1961) S. 121—137.
- Czubek, J. A.*: The influence drilling fluid on the gamma-ray intensity in the borehole. AGP 10 (1962) S. 25—31.
- Czubek, J. A.*: Accuracy of the thickness interpretation from the gamma-ray logs. AGP 10 (1962) S. 137—148.
- Czubek, J. A., Dziunikowski, B., Jurkiewicz, L.*: Radioaktive well-logging in horizontal boreholes for prospecting for potassium salts. Nukleonika Nr. Spec. 3 (1958) S. 111—118.
- Czubek, J. A., Dziunikowski, B., Jurkiewicz, L.*: (Komplexe radiometrische Bohrlochmessungen in gerichteten Bergbaubohrungen bei der Kaliprospektion). AGP 8 (1960) S. 73—93.
- Czubek, J. A., Zuber, A.*: (Bemerkungen zur quantitativen Interpretation von Gamma-logs). AGP 7 (1959) S. 41—49.
- Dachnov, V. N.*: (Eine Anwendung radioaktiver Methoden bei der Erkundung von Bodenschätzen). Sessija akad. nauk SSSR po mirnomu izpolzovanija atomoj energii, Moskva 1955 S. 228—252.
- Doetsch, G.*: Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1947.
- Drouillard, R. F., Dodd, P. H. u. a.*: Gamma-ray logging techniques in uranium evaluation. P.UN 3 (1958) S. 46—53.

- Engelkemeir, D. W., Flynn, K. F., Glendenin, L. E.*: Positron emission in the decay of K-40. *Phys. Rev. (2)* **126** (1962), S. 1818—1822.
- Eve, A. S., McIntosh, D.*: On the radium contents from a deep boring at Beachville, Ontario. *Proc. Trans. Roy. Soc. Canada*, **3, 4, 3** (1910) S. 69—70.
- Fano, U.*: Gamma ray attenuation. *Nucleonics* **11** (1953) S. 8—12, 55—61.
- Fano, U.*: Penetration of X- and gamma-rays to extremely great depths. *Journ. Res. Nat. Bur. Standards (US)* **2** (1953), S. 95—121.
- Fano, U., Spencer, L. V., Berger, M. J.*: Penetration and diffusion of X-rays. *HP XXXVIII/2* (1959).
- Galanin, A. D.*: Theorie der thermischen Kernreaktoren. Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1959.
- Giret, M. R.*: Effet de la vitesse et de la constante d'intégration sur la forme des anomalies aéroradiométriques. *GP* **10** (1962) S. 183—202.
- Glasstone, S., Edlund, M. C.*: The elements of nuclear reactor theory. London 1955.
- Goldstein, H., Wilkins, J. E.*: Calculation of the penetration of gamma-rays. Final Report NYO-3075, USAEC 1954.
- Gorschkow, G. W.*: Gammastrahlung radioaktiver Körper. Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1960.
- Grammakow, A. G., Kvashevskaia u. a.*: Some theoretical and methodical problems of radiometric prospecting and survey. *P.UN* **2** (1958) S. 732—743.
- Hertz, G.*: Lehrbuch der Kernphysik. Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1958.
- Howell, L. G., Frosch, A.*: Gamma-ray Well-logging. *Gy* **4** (1939) S. 106—114.
- Homilius, J., Lorch, S.*: Density determination on near-surface layers by gamma-absorption. *GP* **5** (1957) S. 449—468.
- Homilius, J., Lorch, S.*: On the theory of gamma-ray scattering in boreholes. *GP* **6** (1958) S. 342—364.
- Jakovlev, A. F.*: (Über die Form der wahren und registrierten Anomalien bei der Gamma-Luftaufnahme). *IAN* (1958) S. 594—604.
- Kantorowitsch, L. W., Krylow, W. J.*: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften 1956.
- Kaplan, I.*: Nuclear Physics. Addison-Wesley, Cambridge 1956.
- Kogan, R. M.*: (Einige integrale Zusammenhänge der Verteilung des Gamma-Feldes in geschichteten Medien). *IAN* (1958) S. 225—234.
- Kunz, W., Schintlmeister, J.*: Tabellen der Atomkerne. Teil I: Eigenschaften der Atomkerne. Berlin: Akademie-Verlag, 1958.
- Lehnert, K., Rothe, K.*: Geophysikalische Bohrlochmessungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1962.
- Lösch, F., Schoblik, F.*: Die Fakultät. Leipzig: Verlag B. G. Teubner 1951.
- Lutz, W.*: Radioaktive Bodenuntersuchungen nach dem Gamma-Strahlenverfahren. *Beitr. z. Angew. Geophysik*, **8** (1940) S. 211—220.
- Magnus, W., Oberhettinger, F.*: Formeln und Sätze für die speziell. Funktionen d. mathemat. Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1948.
- Pagurova, W. I.*: Tablicy integro-exponentialnoj funkcii. AN SSSR, Moskva 1959.
- Pontecorvo, B.*: Radioactivity analysis of oil well samples. *Gy* **7** (1942) S. 90—94.
- Prym, F. E.*: Zur Theorie der Gammafunktion *Journ. reine u. angew. Mathematik*, **82** (1877) S. 165—172.
- Riezler, Walcher*: Kerntechnik. Stuttgart 1958.
- Rösler, R.*: Erzeugung Gegenbauerscher Polynome und eine neue Rekursionsformel. *ZAMM* **42** (1962) S. 416—417.
- Rothe, K.*: Radiometr. Bestimmungen an Mineralien und Gesteinen. *Freib. Forsch.-H. C* **68** (1959).
- Rothe, K.*: Anwendungsmöglichkeiten elektrischer und radioaktiver Bohrlochmessungen i. d. Kalisalz erkundung. *Montanwiss. Lit.-Ber.*, **C 5**. Berlin: Akademie-Verlag 1961.

- Rothe, R., Schmeidler, W.*: Höhere Mathematik, Teil VII. Stuttgart: Teubner-Verlag 1956.
- Ryshik, J. M., Gradstein, J. S.*: (Tabellen der Integrale, Summen, Reihen und Produkte). Izdat. Fiz. Mat., Moskva 1962.
- Schmeidler, W.*: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig: Akad. Verl. Ges. 1955.
- Scott, H. J.*: Computer analysis of gamma-ray logs. Gy 28 (1963) S. 457—465.
- Scott, H. J., Dodd, P. H., u. a.*: Quantitative interpretation of gamma-ray logs. Gy 26 (1961) S. 182—191.
- Shaller, H. E.*: Nouveaux développements on diagraphie radio-active. Rev. Inst. Franc. Pétrole 10 (1955). S. 1398—1401.
- Spencer, L. V., Fano, U.*: Penetration of X-rays. Calculation of spatial distribution by polynomial expansion. J. Res. Nat. Bur. Stand. 46 (1951) S. 446—456, 464—466.
- Suckerstorff, A.*: Eine tragbare Zählrohrapparatur und ihre Anwendung im Gelände. ZS f. Geophysik 11 (1935) S. 95—101.
- Taylor, J. J.*: Application of gamma-ray build-up-factor to shield design. WAPD Memo RM-217 (1954).
- Tilley, D. R., Madansky, L.*: Search for positron emission in K-40. Phys. Rev. 116 (1959) S. 413—415.
- Uhlmann, M.*: Radiometrische  $K_2O$ -Bestimmung. Mitt. Zentr. Forsch.-Stelle f. d. Kali-industrie 4 (1960).
- Uhlmann, M.*: Radiometrische  $K_2O$ -Best. v. Kalisalzen. Bergakademie 15 (1963) S. 657—666.
- Voskoboynikov, G. M.*: (Integral- und Näherungsgleichungen zur Berechnung der Gammastrahlungsintensität im homogenen Strahlungsmedium). Tr. gorno-geol. geof. sbornik, 2, Sverdlovsk 30 (1957) S. 152—161.
- Voskoboynikov, G. M.*: (Zur Theorie der Auswertung von Gammabohrlochmessungen in geschichteten Medien). IAN (1960) S. 263—270.
- Weiss, M. M., Bernstein, W.*: Degradation of gammarays in water. Phys. Rev. 92 (1953) S. 1264—1265.
- Wendt, I.*: Kalibestimmung im Labor u. unt. Tage m. d. Zählr. Geol. Jahrbuch, Hannover 70 (1955) S. 385—404.
- White, Collins*: Search for possible naturally occurring isotopes of low abundances. Phys. Rev. 101 (1956) S. 1786—1791.
- Whittaker, E. T., Watson, G. M.*: Modern Analysis. University Press, Cambridge 1952.
- Winter, U.*: Über die Eignung d. radiometr. Meth. zur Schnellbest. d. Kaligeh. Bergbau-techn. 10 (1960) S. 361—366.
- Wirtz, K., Beckurtz, K. H.*: Elementare Neutronenphysik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

Im gleichen Verlag sind erschienen:

## **FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE**

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

**C 155**

**GEOPHYSIK**

**DIETER WECK**

### **Das Problem des Filterkuchens in Bohrungen**

84 Seiten mit 39 Bildern und 7 Tabellen · Format 16,7 × 24 cm  
Kartonierte 15,40 MDN

Der gegenwärtige Stand der methodischen und technischen Entwicklung der Erdölerschließung zwingt dazu, die Bohrtechnik weiter zu vervollkommen und die geophysikalischen Bohrlochuntersuchungen zu verfeinern. Ein aktuelles Problem, dessen Lösung für die Erdölindustrie sehr wichtig ist, bilden die Einflüsse und Eigenschaften von Filterkuchen im Bohrloch. Filterkuchen bilden sich aus den festen Bestandteilen der Bohrspülung, so daß ein enger Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Spülung und denen des Filterkuchens besteht. Die Filterkuchendicke beeinflußt weitgehend die Bohrarbeiten und die geophysikalischen Bohrlochmessungen.

Es wurde deshalb, neben Methoden und Ergebnissen von Laboruntersuchungen der Spülungs- und Filterkucheneigenschaften, die Möglichkeiten behandelt, die Dicke von Filterkuchen sowohl im Spülungslabor als auch im Bohrloch selbst zu messen. Weiterhin wird dem Verhalten des elektrischen Widerstandes im Bohrloch besondere Beachtung geschenkt, soweit es mit der Problematik des Filterkuchens eng zusammenhängt.

# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

C 160

GEOPHYSIK

HEINZ MILITZER

## Entwicklung und Erprobung eines amplituden- und frequenzvariablen Bodenvibrators für nahseismische Untersuchungen

90 Seiten mit 63 Bildern und 2 Tabellen · Format 16,7 × 24 cm  
Kartoniert 17,30 MDN

Die vorliegende Arbeit, die vom Verfasser als Habilitationsarbeit der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Bergakademie Freiberg vorgelegen hat, stellt den Abschluß einer jahrelangen Entwicklung am Institut für Angewandte Geophysik der Bergakademie dar.

Für ingenieurseismische Arbeiten wurde mit der Entwicklung eines elektrodynamischen Vibrators apparativ und methodisch ein grundsätzlich neuer Weg in der Baugrund- und Baustoffuntersuchung beschritten. Der Vibrator arbeitet im Frequenzbereich von 20 bis 5000 Hz wahlweise permanent-periodisch und impulsförmig. Anregungsfrequenzen und Amplituden sind kontinuierlich regelbar und können durch ein eingebautes Ba-Ti-System kontrolliert werden.

Die Aufnahme der erzwungenen Bodenbewegungen erfolgt mit einem Drei-Komponenten-Geophon, das mit Ba-Ti-Dickenschwingern und eingebautem Röhrenverstärker in Kleinstbauweise hergestellt wurde. Außer in der Vibrortechnik hat sich das Geophon bei ingenieurseismischen Arbeiten an Industriebauten und Maschinenfundamenten gut bewährt.

Durch Einführung der Magnetbandregistrierung und elektronische Frequenzanalyse werden praktische Untersuchungen über die Absorption von Böden wesentlich erleichtert.

Theoretische Schlußfolgerungen bezüglich der Abstrahlcharakteristik von Vibratoren konnten durch Modellversuche eingehend begründet werden, die zugleich das gesamte Verfahren ausführlich illustrieren.

# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

**C 144**

GEOPHYSIK

KOPF

## **Dichtebestimmungen an Gesteinen des Osterzgebirges**

OELSNER

### **Ergebnisse der Gravimetermessungen im Osterzgebirge**

82 Seiten mit 23 Bildern, 7 Tabellen und 6 Anlagen · Format 16,7 × 24 cm

Kartonierte 24,20 MDN

Ausführlich wird auf die Dichtebestimmungen vieler Gesteinsarten eingegangen, die für die Reduktion und Interpretation der Ergebnisse von Gravimetermessungen im Osterzgebirge und in der Elbtalzone notwendig sind.

Nach einer geologischen Übersicht geht der Autor auf die Durchführung der Dichtebestimmungen sowie auf die Ergebnisse der Dichteuntersuchungen ein. Tabellen über die Dichtemittelwerte der einzelnen Gesteine und die Gesteinsdichtwerte der einzelnen Aufschlüsse bilden den Abschluß.

Die zweite Art gibt Anhaltspunkte für lagerstättenkundliche Aufschlußarbeiten (Feststellen von evtl. vorhandenen kryptobatholitischen Zinngraniten) und bildet gleichzeitig einen Beitrag zur Klärung regionaler und tektonischer Probleme.

Nach einer Einführung über die technische Durchführung der Messungen und einige Bemerkungen zur Theorie wird ausführlich auf die Ergebnisse der Gravimetermessungen eingegangen.

**C 149**

GEOPHYSIK

CHRISTIAN KNOTHE

## **Verbesserte Auswertung tiefenseismischer Beobachtungen durch Verwendung von Mehrkomponenten-Stationen**

53 Seiten mit 41 Bildern und 5 Tabellen · Format 16,7 × 24 cm

Kartonierte 10,50 MDN

Die Arbeit stellt einen Beitrag zu dem internationalen Forschungsprogramm der Erkundung des Aufbaues der Erdkruste dar. Neben dem rein wissenschaftlichen Interesse, die Kenntnisse über den Aufbau zu erweitern, hat dieses Programm enorme wirtschaftliche Bedeutung, weil dadurch die Erschließung tiefliegender Lagerstätten vorbereitet wird. In diesem Programm stellt die tiefenseismische Erkundung des Untergrundes den wesentlichsten Faktor dar. Der Verfasser will mit seiner Arbeit einen Weg zeigen, wie durch geeignete Abwandlung der Apparatur die Aussagekraft der Beobachtungen gesteigert werden kann, was bei den seltenen und aufwendigen tiefenseismischen Sprengungen von großer Bedeutung ist. Neben der theoretischen Behandlung der Auswertemöglichkeiten beschreibt er den Aufbau einer Apparatur und gibt erste Beobachtungsbeispiele an.

# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

**C 142**

MINERALOGIE

KLAUS STEINIKÉ

## **Quantitativ-mineralogische Untersuchungen an den Eisenerzen vom Typus Lahn-Dill aus Pörmitz bei Schleiz (Ostthüringen)**

123 Seiten mit 35 Bildern, 30 Tabellen und 13 Anlagen · Format 16,7 × 24 cm

Kartoniert 24,80 MDN

Pörmitz ist eine oberdevonische Roteisenerzlagerstätte vom Typ Lahn-Dill. Makroskopisch lassen sich drei Lagerfazies unterscheiden:

1. Die eisensilikatisch-magnetischen Fazies,
2. die hämatitisch-magnetisch-kieseligen Fazies und
3. die kalkig-hämatitischen Fazies.

Ziel der Untersuchungen war die quantitativ-mineralogische Phasenanalyse dieser Dispersionserze. Ein Vergleich zwischen chemischer Analyse und auf den Chemismus umgerechneter Phasenanalyse ist – innerhalb einer gewissen Fehlergrenze – möglich. Voraussetzung für diese Phasenanalyse war u. a. die exakte Bestimmung von zwei gesteinsbildenden Eisen-silikaten, die röntgenographisch, differentialthermoanalytisch und chemisch belegt werden. Die Bestimmung und Unterscheidung der Karbonate Kalgit, Dolomit, Ankerit und Siderit nebeneinander gelang durch Kombination verschiedener Ätzmethode. Besonderes Augenmerk wurde den Beziehungen zwischen Magnetit und Anthraxolit gewidmet. Die viel zitierte Reduktionstheorie, daß der Anthraxolit Hämatit zu Magnetit reduzierte, wird widerlegt. Neu für den Lagerstättentyp sind die für die Genese interessanten Minerale Ilmenit und gewöhnlicher Spinell. – Die Fragen der Genese werden im Schlußteil der Arbeit kurz diskutiert.

# FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften

C 159

MINERALOGIE

HEINZ SCHÜTZEL, DIETER KUTSCHKE  
UND GÜNTER WILDNER

## Zur Problematik der Genese der „Grauen Gneise“ des sächsischen Erzgebirges

(Zirkonstatistische Untersuchungen)

65 Seiten mit 15 Bildern und 7 Tabellen  
Format 16,7 × 24 cm · Kartoniert 12,80 MDN

Nachdem im letzten Jahrzehnt bekannt geworden ist, daß zirkonstatistische Untersuchungsmethoden mit Erfolg für petrogenetische Aussagen verwendet werden können, ist in vorliegender Arbeit versucht worden, die Frage über die Genese der Grauen Gneise des Erzgebirges mit Hilfe der Zirkonstatistik zu lösen. Die Ergebnisse zeigen, daß sich zirkonstatistische Methoden – bisher meist auf Sedimentgesteine und Magmatite beschränkt – auch für die Untersuchung hochmetamorpher Komplexe als durchaus brauchbar erweisen. Methode und Auswertungsverfahren werden eingehend beschrieben.

C 167

GEOLOGIE — LAGERSTÄTTENLEHRE

123 Seiten mit 70 Bildern und 8 Tabellen  
Format 16,7 × 24 cm · Kartoniert 30,– MDN

Das Heft enthält Beiträge namhafter Wissenschaftler der DDR der Fachrichtung Geologie-Lagerstättenlehre, die sich mit geologisch-lagerstättenkundlichen Fragen im Raum Ehrenfriedersdorf (Erzgeb.) befassen. Im einzelnen handelt es sich um die Vorträge: *Bolduan*: Geologie und Genese der Zinn-Wolfram-Lagerstätte Geyer (Erzgeb.) – *Baumann/Tägl*: Neue Erkundungsergebnisse in der Zinnerz-Lagerstätte von Ehrenfriedersdorf (Betriebsabteilung „Sauberg“) – *Bolduan/Hoffmann*: Geologie und Erkundungsergebnisse der Zinnerz-Lagerstätte „Vierung“ bei Ehrenfriedersdorf – *Oelsner*: Die gravimetrischen Spezialvermessungen des Gebietes Geyer-Ehrenfriedersdorf – *Bolduan*: Geologische Ergebnisse von Bohrungen auf verdeckte Granitaufwölbungen im Raum Geyer-Ehrenfriedersdorf – *Labich*: Probleme der geologischen Erkundung in Lagerstätten mit altem Bergbau.

10

