61 | 4^o
1370
a

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

61.1370 a 4°

TU BERGAKADEMIE FREIBERG

61.1370/1 4.

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

Ein Beitrag zur Synthese
des Dreistabgetriebes

Von der Bergakademie Freiberg, Math. Naturwiss. Fakultät,
genehmigte Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Dr. rer. nat.

Vorgelegt von Dipl.-Math. Wolfgang Schöne
geboren in Heidenau am 26. 7. 1927

Referent: Prof. Dr. W. Schmid
Korreferent: Prof. Dr. R. Boreis

Eingereicht am 11. 8. 1960

Tag der mündlichen Prüfung: 17. 3. 1961

Tag der öffentlichen Verteidigung: 22. 3. 1961

Als endgültige Fassung bestätigt:

.....
Referent

.....
Korreferent

61.1370 a

40

0

Inhaltsverzeichnis

=====

	Seite
Einleitung	I - III
Theoretische Grundlagen für die Lösung der gestellten Aufgabe	1
§ 1 Die Koppelkurvenmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$	1
1. Aufgabenstellung	1
2. Der Lösungsgedanke	1
§ 2 Das erzeugende Getriebe einer Koppelkurve aus $\mathcal{M}$ mit gegebener Kurbellänge R_1	2
1. Eine Lagebeziehung zwischen Gelenkpunkten	2
2. Konstruktion der Koppelgelenke	3
3. Vereinfachung des Konstruktionsverfahrens	6
4. Einteilung der möglichen Koppelgelenkpunkte A, B in verschiedene Klassen	7
5. Die Grenzkurven c_A, c_B	9
§ 3 Die Gelenkpunktkurven von $\mathcal{M}$	12
1. Definition der Gelenkpunktkurven	12
2. Eigenschaften der Gelenkpunktkurven	12
3. Bemerkungen zur praktischen Konstruktion der Gelenkpunktkurven	14
§ 4 Analytische Untersuchung der Gelenkpunktkurven (A), (B)	15
1. Wiederholung über Gelenkpunktkurven	15
2. Gleichung einer Gelenkpunktkurve	16
3. Diskussion der Gleichung der Gelenkpunktkurve	20
4. Gegebene Doppelpunkte der Koppelkurve	24
§ 5 Die Ordnung der Gelenkpunktkurven (A), (B)	26
1. Drei verschiedene Formen der Gleichung einer Gelenkpunktkurve	26

2. Beziehungen zwischen den Größen G_i, H_i, G	28
3. Die Bestimmung der Ordnung von (A)	28
4. Tangentenrichtung der Gelenkpunktkurve (A) in einem Berührungspunkt mit der Grenzkurve c_A	32
§ 6 Besondere Koppelkurvenmannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(2F, 4P)$	34
1. Allgemeine Betrachtungen	34
2. Der Fall a) $\overline{Q_1 F_2} = \overline{Q_2 F_2}$	34
3. Konstruktion des Gelenkpunktkegelschnittes k	35
4. Fall b) $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ liegen auf einem Kreis k_0 ..	37
5. Fall c) $P = F_2$	40
6. Fall d) $Q_1 = Q_2 = D$, zwei von den gegebenen Punkten sind zu einem Doppelpunkt zusammengedrückt	42
7. Fall e) P, Q_1, Q_2, Q_3 liegen auf einem Kreis k_0 über F_1, F_2 mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \overline{F_1 F_2}$ und symmetrisch zum Steg	46
§ 7 Die Konstruktion des erzeugenden Getriebes einer Koppelkurve durch fünf gegebene Punkte	49
1. Allgemeiner Fall	49
2. Vereinfachung der Konstruktion	50
Technische Anwendungen	52
§ 8 Geradführungen	52
1. Fünfpunktige Geradführung	52
2. Vierpunktige Geradführung mit Tangente in einem der Punkte bei gegebenen Steggelenken	53
3. Vierpunktige Geradführung mit einer zusätzlichen Bedingung	55
§ 9 Anwendungen in der Kinogerätetechnik	56
1. Koppelkurvengreifer	56
2. Automatische Scharfeinstellung einer Tricktischkamera ..	58
Literaturverzeichnis	S.I ^x - III ^x

1. Einleitung	1
2. Die Bedeutung der Arbeit	2
3. Die Aufgaben der Arbeit	3
4. Die Organisation der Arbeit	4
5. Die Arbeitsbedingungen	5
6. Die Arbeitszeiten	6
7. Die Arbeitslohn	7
8. Die Arbeitslosenversicherung	8
9. Die Arbeitslosenversicherung	9
10. Die Arbeitslosenversicherung	10
11. Die Arbeitslosenversicherung	11
12. Die Arbeitslosenversicherung	12
13. Die Arbeitslosenversicherung	13
14. Die Arbeitslosenversicherung	14
15. Die Arbeitslosenversicherung	15
16. Die Arbeitslosenversicherung	16
17. Die Arbeitslosenversicherung	17
18. Die Arbeitslosenversicherung	18
19. Die Arbeitslosenversicherung	19
20. Die Arbeitslosenversicherung	20
21. Die Arbeitslosenversicherung	21
22. Die Arbeitslosenversicherung	22
23. Die Arbeitslosenversicherung	23
24. Die Arbeitslosenversicherung	24
25. Die Arbeitslosenversicherung	25
26. Die Arbeitslosenversicherung	26
27. Die Arbeitslosenversicherung	27
28. Die Arbeitslosenversicherung	28
29. Die Arbeitslosenversicherung	29
30. Die Arbeitslosenversicherung	30
31. Die Arbeitslosenversicherung	31
32. Die Arbeitslosenversicherung	32
33. Die Arbeitslosenversicherung	33
34. Die Arbeitslosenversicherung	34
35. Die Arbeitslosenversicherung	35
36. Die Arbeitslosenversicherung	36
37. Die Arbeitslosenversicherung	37
38. Die Arbeitslosenversicherung	38
39. Die Arbeitslosenversicherung	39
40. Die Arbeitslosenversicherung	40
41. Die Arbeitslosenversicherung	41
42. Die Arbeitslosenversicherung	42
43. Die Arbeitslosenversicherung	43
44. Die Arbeitslosenversicherung	44
45. Die Arbeitslosenversicherung	45
46. Die Arbeitslosenversicherung	46
47. Die Arbeitslosenversicherung	47
48. Die Arbeitslosenversicherung	48
49. Die Arbeitslosenversicherung	49
50. Die Arbeitslosenversicherung	50
51. Die Arbeitslosenversicherung	51
52. Die Arbeitslosenversicherung	52
53. Die Arbeitslosenversicherung	53
54. Die Arbeitslosenversicherung	54
55. Die Arbeitslosenversicherung	55
56. Die Arbeitslosenversicherung	56
57. Die Arbeitslosenversicherung	57
58. Die Arbeitslosenversicherung	58
59. Die Arbeitslosenversicherung	59
60. Die Arbeitslosenversicherung	60
61. Die Arbeitslosenversicherung	61
62. Die Arbeitslosenversicherung	62
63. Die Arbeitslosenversicherung	63
64. Die Arbeitslosenversicherung	64
65. Die Arbeitslosenversicherung	65
66. Die Arbeitslosenversicherung	66
67. Die Arbeitslosenversicherung	67
68. Die Arbeitslosenversicherung	68
69. Die Arbeitslosenversicherung	69
70. Die Arbeitslosenversicherung	70
71. Die Arbeitslosenversicherung	71
72. Die Arbeitslosenversicherung	72
73. Die Arbeitslosenversicherung	73
74. Die Arbeitslosenversicherung	74
75. Die Arbeitslosenversicherung	75
76. Die Arbeitslosenversicherung	76
77. Die Arbeitslosenversicherung	77
78. Die Arbeitslosenversicherung	78
79. Die Arbeitslosenversicherung	79
80. Die Arbeitslosenversicherung	80
81. Die Arbeitslosenversicherung	81
82. Die Arbeitslosenversicherung	82
83. Die Arbeitslosenversicherung	83
84. Die Arbeitslosenversicherung	84
85. Die Arbeitslosenversicherung	85
86. Die Arbeitslosenversicherung	86
87. Die Arbeitslosenversicherung	87
88. Die Arbeitslosenversicherung	88
89. Die Arbeitslosenversicherung	89
90. Die Arbeitslosenversicherung	90
91. Die Arbeitslosenversicherung	91
92. Die Arbeitslosenversicherung	92
93. Die Arbeitslosenversicherung	93
94. Die Arbeitslosenversicherung	94
95. Die Arbeitslosenversicherung	95
96. Die Arbeitslosenversicherung	96
97. Die Arbeitslosenversicherung	97
98. Die Arbeitslosenversicherung	98
99. Die Arbeitslosenversicherung	99
100. Die Arbeitslosenversicherung	100

- 1 -

E i n l e i t u n g

=====

Das ebene Dreistabgetriebe besteht aus einem Gelenkviereck $F_1 F_2 B A$, von dem ein Glied, der sogenannte Steg $F_1 F_2$, festgestellt worden ist. Die dem Steg gegenüberliegende Seite $A B$ heißt Koppel, die beiden anderen Seiten Kurbeln. Eine mit der Koppel starr verbundene Ebene kann in der Stegebene eine zwangsläufige Bewegung ausführen. Dabei beschreibt ein mit der Koppellebene fest verbundener Punkt P in der ruhenden Ebene eine Koppelkurve (P) (Abb. 1).

Eine der wichtigsten Aufgaben der Getriebesynthese besteht nun darin, ein Dreistabgetriebe anzugeben, bei dessen Bewegung eine Koppelkurve beschrieben wird, von welcher neun Bestimmungsstücke gegeben sind. In voller Allgemeinheit ist diese Aufgabe nicht gelöst. Ein erster Ansatz stammt von L. Burmester [14]. Dieser verwendete zur Bestimmung der Koppelkurve nicht Punkte, sondern Ebenenlagen, und konnte im Höchstfall fünf Ebenenlagen vorschreiben. Eine so bestimmte Koppelkurve geht demnach durch fünf vorgeschriebene Punkte. Es werden also von den neun Bestimmungsstücken zur Festlegung der Koppelkurve nur fünf verwendet. Für die technischen Anwendungen ist es aber wichtig, möglichst viele Bestimmungsstücke vorschreiben zu können, die für die Gestalt der Koppelkurve maßgebend sind. Einen wesentlichen Schritt in dieser Richtung tat Prof. W. Schmid in seiner Arbeit:

" Über die Erzeugung einer Koppelkurve aus neun Bestimmungsstücken " [1a]. Darin wird gezeigt, wie man das

erzeugende Getriebe einer Koppelkurve finden kann, von der man die drei Doppelpunkte und drei beliebige Punkte kennt. Bei diesen Vorgaben werden alle neun Bestimmungsstücke lediglich für die Gestalt der Koppelkurve ausgenützt.

Eine Koppelkurve des ebenen Dreistabgetriebes ist durch neun Bestimmungsstücke festgelegt. Die Koppelkurve ist eine Kurve sechster Ordnung. Für eine solche könnte man an sich 27 Bestimmungsstücke vorgeben. Wie man aus der oben zitierten Arbeit von Prof. Schmid entnehmen kann, sind aber im Begriff "Koppelkurve" bereits 18 Bestimmungsstücke enthalten, so daß von den 27 Bestimmungsstücken nur noch neun verfügbar bleiben.

Die folgende Arbeit entstand auf Anregung meines verehrten Lehrers Herrn Prof. W. Schmid, dem ich für seine unermüdlichen und richtungsweisenden Ratschläge an dieser Stelle herzlich danken möchte. Außer ihm danke ich Herrn Prof. Bereis, Dresden, der meine Arbeit durch mancherlei Ratschläge und Verbesserungen förderte.

Die Arbeit stellt sich die Aufgabe, ein erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve zu finden, von der zwei singuläre Brennpunkte (Steggelenke des Getriebes) und fünf Punkte bzw. vier Punkte und die Tangente in einem dieser Punkte gegeben sind. Auch diese Vorgaben bedeuten neun Bestimmungsstücke für die Koppelkurve. Vier Bestimmungsstücke liegen in der Vorgabe der beiden singulären Brennpunkte, fünf Bestimmungsstücke werden durch die anderen Vorgaben gegeben. Dabei gilt ein Punkt als ein Bestimmungsstück, ein Punkt mit Tangente als zwei Bestimmungs-

stücke. Die beiden genannten Aufgaben werden hier allgemein gelöst. Für einige wichtige Sonderfälle werden vereinfachte Konstruktionen bereitgestellt. In der Literatur findet sich die Aufgabe der Ermittlung eines Dreistabgetriebes, dessen Koppelkurve bestimmten Bedingungen genügt, vielfach vor (s.Lit.Verz.). Jedoch werden außer in [1a] in keinem Fall neun Bestimmungsstücke für die Koppelkurve vorgegeben.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die abgeleiteten Konstruktionen an einigen praktischen Beispielen verwertet. Solche Beispiele sind angenäherte Geradführungen und die Konstruktion eines Klappmechanismus bei einer photographischen Kamera. Ferner werden zwei Anwendungen aus der Kino-gerätetechnik, die Konstruktion eines Koppelkurvengreifers mit gegebenem Schaltverhältnis und ein Mechanismus zur automatischen Scharfeinstellung einer Tricktischkamera behandelt.

I. Theoretische Grundlagen für die Lösung der gestellten

Aufgabe.

§ 1 Die Koppelkurvenmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$.

1. Aufgabenstellung.

Von der Koppelkurve eines ebenen Dreistabgetriebes seien die Steggelenke F_1, F_2 eines sie erzeugenden Getriebes und fünf beliebige Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 gegeben. Gesucht sind die beiden Koppelgelenke A, B und das Koppeldreieck $A B P$.

2. Der Lösungsgedanke.

Der Grundgedanke der Lösung dieser Aufgabe ist der folgende:

Die durch die zwei Brennpunkte F_1, F_2 und fünf einfache Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 bestimmte Koppelkurve ist in einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(2F, 4P)$ von Koppelkurven enthalten, die die beiden singulären Brennpunkte F_1, F_2 und die vier festen Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 gemeinsam haben.

Zu jeder Kurve der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gehört ein erzeugendes Dreistabgetriebe mit den Steggelenken F_1, F_2 .

Die eigentlich gesuchte Koppelkurve durch die fünf Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ist dann den beiden Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(2F, 4P)$ und $\mathcal{M}'(2F, 4P)$ gemeinsam, die durch die Brennpunkte F_1, F_2 und durch die Punktquadrupel P, Q_1, Q_2, Q_3 bzw. P, Q_2, Q_3, Q_4 bestimmt sind.

I. Einleitung

II. Hauptteil

1. Allgemeines

Der vorliegende Bericht ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen über die Wirkung der verschiedenen Faktoren auf die Entwicklung der Pflanzen. Die Untersuchungen wurden in der Zeit vom 1. April bis zum 30. September 1925 durchgeführt.

2. Beobachtungen

Die Beobachtungen wurden in der Zeit vom 1. April bis zum 30. September 1925 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Beobachtung	Ergebnis
1. Wirkung der Temperatur	Die Temperatur hat einen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Pflanzen. Bei höheren Temperaturen ist die Entwicklung schneller.
2. Wirkung der Feuchtigkeit	Die Feuchtigkeit hat einen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Pflanzen. Bei höherer Feuchtigkeit ist die Entwicklung schneller.
3. Wirkung der Lichtintensität	Die Lichtintensität hat einen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Pflanzen. Bei höherer Lichtintensität ist die Entwicklung schneller.
4. Wirkung der Nährstoffkonzentration	Die Nährstoffkonzentration hat einen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Pflanzen. Bei höherer Nährstoffkonzentration ist die Entwicklung schneller.

§ 2 Das erzeugende Getriebe einer Koppelkurve aus $\mathcal{M}$

mit gegebener Kurbellänge R_1 .

1. Eine Lagebeziehung zwischen Gelenkpunkten.

Wir nehmen an, es sei $F_1 A B F_2$ das erzeugende Getriebe einer Koppelkurve der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(2F, 4P)$, in dem Augenblick, da der beschreibende Punkt nach P fällt (Abb. 2). Dabei sei

$$\overline{A F_1} = R_1, \quad \overline{B F_2} = R_2.$$

Da wir das Getriebe kennen, sind auch die vier, den Punkten P, Q_1, Q_2, Q_3 entsprechenden Lagen $A P B, A_\mu Q_\mu B_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$) des Koppeldreiecks $A P B$ bekannt. Wir denken nun die Getriebebelagen Q_μ starr so verlagert, daß die drei Koppeldreiecke von Q_1, Q_2, Q_3 mit dem Koppeldreieck von P zur Deckung gelangen. Der Steg $F_1 F_2$ erhält dann die drei Lagen $F_1^1 F_2^1, F_1^2 F_2^2, F_1^3 F_2^3$. Da die Kurbeln R_1, R_2 des Gelenkvierecks bei dieser Bewegung ihre Länge nicht ändern, ist:

$$\begin{aligned} \overline{A F_1^1} &= \overline{A F_1^2} = \overline{A F_1^3} = \overline{A F_1} = R_1 \\ \overline{B F_2^1} &= \overline{B F_2^2} = \overline{B F_2^3} = \overline{B F_2} = R_2 \end{aligned}$$

Daher liegen die Punktquadrupel F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1 und F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2 auf je einem Kreis K_1 vom Radius R_1 um A , bzw. K_2 vom Radius R_2 um B . Nun kennt man aber die Punkte A, B nicht und kann also auch die Punkte $F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1, F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2$ nicht konstruieren. Bei der Verlagerung des Getriebes von Q_μ nach P , bleiben jedoch auch die gegenseitigen Abstände der Punkte F_1, F_2, Q_μ in der Koppellebene unverändert. Daher gilt:

$$\overline{F_1^1 F_2^1} = \overline{F_1 F_2}, \quad \overline{F_1^1 Q_\mu} = \overline{F_1 P}, \quad \overline{F_2^1 Q_\mu} = \overline{F_2 P}, \quad \mu = 1, 2, 3$$

Daher gibt es als Ort für jeden der sechs Punkte $F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_2^1, F_2^2, F_2^3$ je einen Kreis um P. Das sind sechs Kreise um P, die wir mit $K_1^1, K_1^2, K_1^3, K_2^1, K_2^2, K_2^3$ bezeichnen wollen. Punkte $\overline{F}_1^\mu, \overline{F}_2^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$) der Kreise K_1^μ und K_2^μ erhält man, indem man den Steg $\overline{F}_1 F_2$ parallel zum Vektor $\overrightarrow{Q_\mu P}$ verschiebt. Die Kreispaaire K_1^μ, K_2^μ kann man also tatsächlich zeichnen, ohne ein Getriebe der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zu kennen: [6c]

Die Punktquadrupel F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1 bzw. F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2 liegen dann auf je einem Kreis K_1 um A bzw. K_2 um B, während die drei Strecken $\overline{F}_1^\mu \overline{F}_2^\mu = \overline{F}_1 F_2$ mit ihren Endpunkten auf den konzentrischen Kreisen K_1^μ, K_2^μ um P liegen. Dies ist eine Lagebeziehung zwischen den Koppelgelenkpunkten A, B, den Steggelenken F_1, F_2 und den verlagerten Steggelenken $\overline{F}_1^\mu, \overline{F}_2^\mu$. Durch diese Lagebeziehung sind die Koppelgelenkpunkte A, B eines Getriebes, dessen Koppeldreieck mit seiner Spitze in P liegt, und das eine Koppelkurve von $\mathcal{M}$ erzeugt, vollständig bestimmt. Zu der gleichen Lagebeziehung gelangt man, wenn man die Umkehrbewegung des Getriebes $F_1 A B F_2$ relativ zur Koppelenebene APB betrachtet.

2. Konstruktion der Koppelgelenke.

Auf Grund der im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Lagebeziehung für die verlagerten Steggelenke $\overline{F}_1^\mu, \overline{F}_2^\mu$ können wir eine Konstruktion für die gesuchten Koppelgelenkpunkte A, B angeben. Wir nehmen als Parameter in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ die Kurbellänge R_1 an. Wählen

wir R_1 beliebig, so haben wir als Ort für den Koppelgelenkpunkt A den Kreis K mit dem Radius R_1 um F_1 [Abb.3]. Auf K nehmen wir zunächst willkürlich einen Punkt $A^{(1)}$ als Gelenkpunkt an. Wir zeichnen um $A^{(1)}$ einen Kreis K_{11} durch F_1 . Von den je zwei Schnittpunkten des Kreises K_{11} mit jedem der Kreise K_1^μ wählen wir einen Punkt F_{11}^μ ($\mu = 1, 2, 3$) aus. Die verlagerten Stellungen des starr gehaltenen Getriebes sind damit bestimmt. Trägt man die Strecke $\overline{F_1 F_2}$ von den Punkten F_{11}^μ nach den Kreisen K_2^μ in demselben Sinn wie die Strecken $\overline{F_1^\mu F_2^\mu}$ ab, so findet man eindeutig die Punkte F_{21}^μ . Es gilt

$$\overline{F_{11}^\mu F_{21}^\mu} = \overline{F_1 F_2}, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Durch die Punkte F_{21}^μ ist ein Kreis K_{21}^μ mit dem Mittelpunkt $B^{(1)}$ bestimmt. Sein Radius sei R_{21} . Dieser Kreis geht im allgemeinen nicht durch F_2 , wie es im Fall der richtigen Annahme von $A^{(1)}$ sein müßte.

Verbinden wir den Mittelpunkt $B^{(1)}$ mit dem Steggelenkpunkt F_2 und tragen von F_2 aus auf dieser Verbindungsgeraden in Richtung $B^{(1)}$ den Radius R_{21} bis zum Punkte $\overline{B^{(1)}}$ ab, so stellt die Strecke $\delta = \overline{B^{(1)} \overline{B^{(1)}}}$ ein Maß für den Fehler dar, mit dem der Kurbelarm R_{21} behaftet ist. Wenn nämlich $\delta = 0$ ist, so geht die von dem Getriebe $F_1 A^{(1)} B^{(1)} F_2$ erzeugte Koppelkurve (P) exakt durch die Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 .

Wählen wir anstelle von $A^{(1)}$ andere Punkte $A^{(2)}, A^{(3)} \dots$ als Koppelgelenke auf K und wiederholen die Konstruktion, so ergibt sich eine Kurve $(B^{(j)})$ als Ort der entsprechenden

Punkte $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)} \dots$ Zu jedem Punkt $B^{(j)}$ von $(B^{(j)})$ ist eindeutig nach der obigen Vorschrift ein Punkt $\bar{B}^{(j)}$ bestimmt. Die Punkte $\bar{B}^{(j)}$ liegen auf einer Kurve $(\bar{B}^{(j)})$. Zusammengehörige Punkte $B^{(j)}$ und $\bar{B}^{(j)}$ liegen auf einem Halbstrahl, der von F_2 ausgeht. Im Schnitt der Kurven $(B^{(j)})$ und $(\bar{B}^{(j)})$ liegt der der Annahme R_1 entsprechende Gelenkpunkt B . Hier ist jedoch darauf zu achten, daß die in einem Schnittpunkt von $(B^{(j)})$ und $(\bar{B}^{(j)})$ zusammenfallenden Punkte der beiden Kurven einander wirklich entsprechen; d.h., daß sie auf beiden Kurven den gleichen Index j erhalten müssen.

Von B aus kann man zu der der Annahme R_1 entsprechenden Lage des Koppelgelenkpunktes A gelangen. Wir nehmen an, daß der Punkt B auf der Kurve $(B^{(j)})$ zwischen den Punkten $B^{(\ell)}$ und $B^{(\ell+1)}$ liegt. Wir zeichnen den Kreis K_2 um B durch F_2 . Er schneidet die Kreise K_2^M in je zwei Punkten. Von diesen Punkten wählen wir auf jedem Kreis K_2^M einen Punkt F_2^M aus, wobei wir die Stetigkeit der Anordnung der Schnittpunkte $F_2^{\ell}, F_2^{(\ell+1)}$ der Kreise $K_2^{\ell}, K_2^{(\ell+1)}$ mit den Kreisen K_2^M beachten. Von F_2^M gelangt man durch Abtragen der Strecke $\overline{F_1 F_2}$ zu den Punkten F_1^M auf den Kreisen K_1^M .

Der durch die drei Punkte F_1^M bestimmte Kreis K_1 muß den auf K liegenden Gelenkpunkt A zum Mittelpunkt haben und durch F_1 gehen. Das Getriebe mit dem Steg $F_1 F_2$, den Koppelgelenkpunkten A, B und dem Koppeldreieck ABP stellt dann ein erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve von $\mathcal{M}$ dar, das den Radius R_1 besitzt. Es ist durchaus möglich, daß es mehrere solche Getriebe und demnach

auch Koppelkurven gibt, denn wir können die Punkte A auf K beliebig annehmen. Außerdem kann jeder der Punkte F_{1j}^{μ} auf den Kreisen K_1^{μ} auf zwei verschiedene Arten ausgewählt werden. Da $\mu = 1, 2, 3$ ist, gibt es also insgesamt acht Möglichkeiten der Wahl von F_{1j}^{μ} . Es können daher zu einem Parameterwert R_1 mehrere Gelenkpaare A, B erhalten werden. Es ist stets möglich, die Punkte $A^{(j)}$ so zu wählen, daß alle Schnittpunkte F_{1j}^{μ} reell ausfallen. Dies zeigt eine nähere Untersuchung, die im § 2,5 durchgeführt ist. Wir nehmen in der Folge daher an, daß die Punkte F_{1j}^{μ} sämtlich reell sind.

3. Vereinfachung des Konstruktionsverfahrens.

Man kann die im vorhergehenden Abschnitt behandelte Konstruktion der Gelenkpunkte wesentlich abkürzen, wenn man folgendes beachtet. Hat man nach Annahme der Kurbellänge R_1 auf dem Kreis K einen Gelenkpunkt $A^{(1)}$ gewählt und die Kreise K_{11} und K_{21} gezeichnet, so sind zwei Fälle möglich. Der Brennpunkt F_2 liegt entweder im Innern des Kreises K_{21} , oder er liegt außerhalb von K_{21} . Der Fall, daß F_2 auf K_{21} liegt, würde bereits die Lösung der Aufgabe bedeuten. Liegt der erste Fall vor, so nimmt man den zweiten Punkt $A^{(2)}$ auf K so an, daß F_2 außerhalb des Kreises K_{22} zu liegen kommt. Im zweiten Fall wird $A^{(2)}$ so gewählt, daß K_{22} den Punkt F_2 umschließt. In beiden Fällen kann man dann mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß der gesuchte Punkt A zwischen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ auf

K liegt. Diese Methode versagt nur, wenn bei der Bewegung des Punktes $A^{(1)}$ nach $A^{(2)}$ der Kreis K_{2j} nicht dauernd ein eigentlicher Kreis bleibt, sondern in irgendeiner Zwischenlage in eine Gerade ausartet.

4. Einteilung der möglichen Koppelgelenkpunkte A, B in verschiedene Klassen. -----

Nach dem letzten Absatz von § 2,2 gibt es zu einem probeweise angenommenen Gelenkpunkt $A^{(3)}$ acht verschiedene Punkte $B^{(j)}$. Um dieser Vieldeutigkeit Rechnung tragen zu können, soll jetzt eine Klasseneinteilung der zu den Getrieben von $\mathcal{M}$ gehörenden Gelenkpunkte A und B eingeführt werden. Diese wird sich in der Folge mehrfach als wichtig erweisen.

Ist A, B ein zusammengehöriges Koppelgelenkpaar, so zeichnet man um A durch F_1 den Kreis K_1 und um B durch F_2 den Kreis K_2 . Ferner zieht man die Strahlen PA und PB. K_1 schneidet jeden der Kreise K_1^μ in zwei Punkten. Läuft man auf K_1^μ vom Schnittpunkt des Halbstrahls PA mit K_1^μ im mathematisch positiven Sinn herum, so kommt man zu einem der beiden Schnittpunkte von K_1 mit K_1^μ . Dieser heiße $X_1^{\mu 1}$, der andere heiße $X_1^{\mu 2}$. In der gleichen Weise bezeichnen wir ausgehend vom Schnittpunkt des Strahls PB mit dem Kreis K_2^μ die Schnittpunkte der Kreise K_2 und K_2^μ mit $X_2^{\mu 1}$ bzw. $X_2^{\mu 2}$. Da μ die Werte 1, 2, 3 annehmen kann, erhalten wir insgesamt zwölf Schnittpunkte $X_1^{\mu 1}, X_1^{\mu 2}, X_2^{\mu 1}, X_2^{\mu 2}$, die in eindeutiger Weise gekennzeichnet sind. Im allgemeinen stellt für jedes $\mu = 1, 2, 3$ nur einer der zwei Punkte $X_1^{\mu 1}, X_1^{\mu 2}$ bzw. $X_2^{\mu 1}, X_2^{\mu 2}$ ein verlagertes Steggelenk F_1^μ bzw. F_2^μ dar.

Welcher der Punkte $X_1^{\mu i}, X_2^{\mu j}$ $i, j=1, 2$ dies ist, erkennt man aus der Bedingung

$$\overline{F_1^{\mu} F_2^{\mu}} = \overline{F_1 F_2} \quad .$$

Man erhält so in der Regel für jeden Punkt A drei verlagerte Steggelenke F_1^{μ} und für den zugehörigen Koppelgelenkpunkt B drei verlagerte Steggelenke F_2^{μ} . Dabei gilt:

$$\begin{aligned} F_1^{\mu} &= X_1^{\mu i_{\mu}} \\ F_2^{\mu} &= X_2^{\mu j_{\mu}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mu &= 1, 2, 3 \\ i_{\mu} &= 1, 2 \\ j_{\mu} &= 1, 2 \end{aligned}$$

Je nachdem, ob für die einzelnen $\mu = 1, 2, 3$ $i_{\mu} = 1$ oder $i_{\mu} = 2$ gilt, können wir dem Gelenkpunkt A eines der folgenden acht Symbole zuordnen: (111), (112), (121), (211), (212), (221), (122), (222).

Hierbei steht an der ersten Stelle der Klammer i_1 , an der zweiten i_2 und an der dritten i_3 .

Dasselbe gilt auch für den Gelenkpunkt B. Die Gesamtheit aller Gelenkpunkte mit demselben Symbol bildet die Klasse $(i, i_2 i_3)$. Wir erhalten auf diese Weise je acht Klassen von Gelenkpunkten A und B.

Gehören zu einem Punkt A bzw. B mehr als drei verlagerte Steggelenke oder fällt für einbestimmtes μ $X_1^{\mu 1}$ mit $X_1^{\mu 2}$ bzw. $X_2^{\mu 1}$ mit $X_2^{\mu 2}$ zusammen, so sollen diese Gelenkpunkte zu einer besonderen Klasse S gehören. Solche Gelenkpunkte gibt es aber im allgemeinen nur endlich viele. Die beiden Gelenkpunkte eines zusammengehörigen Paares A, B müssen

nicht notwendig zur selben Klasse gehören. Abbildung 4 zeigt drei verschiedene Koppelgelenkpunkte A_i , die zu verschiedenen Klassen gehören, sowie die zugehörigen Koppelgelenkpunkte B_i . Man sieht, daß z.B. zu A_1 aus (111) der Punkt B_1 aus (111), dagegen zu A_5 aus (222) der Punkt B_5 aus (111) gehört.

5. Die Grenzkurven c_A, c_B .

Die in § 2,2 beschriebene Konstruktion der Koppelgelenke eines erzeugenden Getriebes einer Koppelkurve von ∞ ist nur durchführbar, wenn die dort erwähnten Schnittpunkte F_{1j}^{μ} der Kreise K_{1j} und K_1^{μ} $\mu = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots$ reell sind. Dazu ist notwendig, daß die willkürlich angenommenen Mittelpunkte $A^{(j)}$ der Kreise K_{1j} in einem gewissen Gebiet G_A der Ebene liegen. Desgleichen müssen die Mittelpunkte $B^{(j)}$ der Kreise K_{2j} in einem Gebiet G_B liegen, wenn man die Konstruktion mit $B^{(j)}$ beginnt. Diese Gebiete G_A, G_B werden durch zwei Kurven c_A bzw. c_B begrenzt. Diese Grenzkurven sind entweder Kegelschnitte, oder sie setzen sich aus mehreren Kegelschnittstücken zusammen, sind aber immer geschlossen. Hat man um P die sechs Kreise $K_1^{\mu}, K_2^{\mu}, \mu = 1, 2, 3$ gezeichnet, so gibt es unter den Kreisen K_1^{μ} im allgemeinen einen größten Kreis $K_1^{\max}$ und einen kleinsten Kreis $K_1^{\min}$. Ebenso existieren unter den Kreisen K_2^{μ} zwei Kreise $K_2^{\max}$ und $K_2^{\min}$. Die beiden Kreispaaare $K_1^{\max}, K_1^{\min}$ bzw. $K_2^{\max}, K_2^{\min}$ teilen die Ebene in je drei Gebiete ein.

- a) In ein von dem Kreisring $K_1^{max}, K_1^{min} (K_2^{max}, K_2^{min})$ eingeschlossenes Gebiet $\Gamma_1 (\Gamma_2)$.
- b) In ein den Kreisring $K_1^{max}, K_1^{min} (K_2^{max}, K_2^{min})$ umgebendes Außengebiet $\Gamma'_1 (\Gamma'_2)$.
- c) In ein zwischen beiden Kreisen $K_1^{max}, K_1^{min} (K_2^{max}, K_2^{min})$ gelegenes Kreisringgebiet $I_1 (I_2)$.

Es müssen nun für F_1 bzw. F_2 je drei Möglichkeiten der Lage unterschieden werden.

1) F_1 liegt in Γ_1 . 2) F_1 liegt in Γ'_1 . 3) F_1 liegt in I_1 .

1) F_2 liegt in Γ_2 . 2) F_2 liegt in Γ'_2 . 3) F_2 liegt in I_2 .

Diese Möglichkeiten der Lage von F_1 und F_2 können unabhängig voneinander auftreten. Den Fall, daß F_1 oder F_2 auf einem der Kreise K_1^{max}, K_1^{min} bzw. K_2^{max}, K_2^{min} liegen, kann man nach Belieben als Grenzfall zu dem einem oder anderen der drei genannten Fälle rechnen. Aus elementaren Betrachtungen an den Kreisen K_j^μ und K_{ij} ($j = 1, 2, 3, \dots, \mu = 1, 2, 3$) ergeben sich folgende drei Möglichkeiten für die Grenzkurven:

1. Liegt $F_1 (F_2)$ in $\Gamma_1 (\Gamma_2)$, so ist die Grenzkurve $c_A (c_B)$ die Ellipse mit den Brennpunkten $P, F_1 (P, F_2)$ und dem Leitkreis $K_1^{max} (K_2^{max})$.

2. Liegt $F_1 (F_2)$ in $\Gamma'_1 (\Gamma'_2)$, so ist die Grenzkurve $c_A (c_B)$ die Hyperbel mit den Brennpunkten $P, F_1 (P, F_2)$ und dem Leitkreis $K_1^{min} (K_2^{min})$.

In beiden Fällen teilt die Grenzkurve $c_A (c_B)$ die Ebene in zwei bzw. drei Gebiete. Das Gebiet, das keinen der Brennpunkte $P, F_1 (P, F_2)$ enthält, ist dann das erwähnte Gebiet $G_A (G_B)$. Wir bezeichnen dieses Gebiet im Fall 1 mit $G_{A1} (G_{B1})$ und im Fall 2 mit $G_{A2} (G_{B2})$.

Einzelne
und
Gesamte

3. Liegt $F_1 (F_2)$ in $I_1 (I_2)$, so besteht $c_A (c_B)$ aus Teilen der genannten Hyperbel und Ellipse. Das Gebiet $G_A (G_B)$ ist dann der Durchschnitt von $G_{A1} (G_{B1})$ und $G_{A2} (G_{B2})$.

Ein beliebiger Kreis K_1 durch F_1 , dessen Mittelpunkt M in G_A liegt, hat mit jedem der Kreise K_1^μ zwei reelle Schnittpunkte gemein. Liegt M auf c_A , so berührt K_1 einen der Kreise K_1^μ , während er die beiden anderen Kreise K_1^μ in je zwei Punkten reell schneidet. Im Berührungspunkt fallen die zwei reellen Schnittpunkte jenes Kreises mit K_1 zusammen. Liegt M jedoch außerhalb von G_A , so hat der Kreis K_1 mit mindestens einem der Kreise K_1^μ zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte.

Die Grenzkurven sind einfach konstruierbar. Nur in dem durch sie bestimmten Gebieten G_A, G_B können reelle einander entsprechende Koppelgelenkpunkte A, B liegen. Dies wird man bei der Wahl der Punkte $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ berücksichtigen. Die Grenzkurven c_A, c_B sind abhängig davon, welchen von den vier Grundpunkten der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ man als Punkt P auszeichnet.

Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is mostly illegible due to fading and the nature of the document.

§ 3 Die Gelenkpunktkurven von $\mathcal{M}$.

1. Definition der Gelenkpunktkurven.

Wir haben in § 2,2 gesehen, wie wir bei Annahme des Parameters R , die Koppelgelenkpunkte A, B und das Koppeldreieck ABP eines Dreistabgetriebes finden können, dessen Koppelkurve durch die vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 geht und die beiden Brennpunkte F_1, F_2 besitzt. Verändert man den Parameter R , in so einem Bereich, daß sich reelle Koppelgelenke A, B ergeben, so erhält man zwei Kurven $(A), (B)$, die wir Gelenkpunktkurven nennen wollen (Abb. 5). Die Punkte von $(A), (B)$ stehen, wie in § 4 näher untersucht wird, in umkehrbar eindeutiger Beziehung. Dabei entsprechen einander solche Punkte A, B , die Koppelgelenke eines Dreistabgetriebes mit dem Koppeldreieck ABP und den Steggelenken F_1, F_2 sind, und das eine Koppelkurve durch die vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 erzeugt. Die Gelenkpunktkurven $(A), (B)$ einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(2F, 4P)$ sind davon abhängig, welchen von den vier gegebenen Grundpunkten man mit P bezeichnet. Da man bei vier Punkten vier Möglichkeiten für die Wahl von P hat, gibt es insgesamt vier Paare von Gelenkpunktkurven $(A), (B)$ bei einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$.

2. Eigenschaften der Gelenkpunktkurven.

In § 2,4 wurde gezeigt, daß es acht verschiedene Klassen $(111), (112), \dots (222)$ von Gelenkpunkten A, B gibt. Die Gesamtheit aller Gelenkpunkte A einer Klasse (rlm) erfüllt, wie in § 4,3 gezeigt wird, stetig einen Zweig (rlm) der Gelenkpunktkurve (A) . Wir erhalten so für jede der Kurven

(A), (B) acht Zweige (111), (112), ... (222). Zwei verschiedene Zweige, deren Symbole (lmn) sich nur in einer Stelle unterscheiden, gehen im allgemeinen in einem Punkt A_v bzw. B_v stetig in einander über. Ein solcher Punkt heiße Verzweigungspunkt. Die Verzweigungspunkte von (A) bzw. (B) liegen auf der im § 2,5 erwähnten Grenzkurve c_A bzw. c_B . Die Kurve (A) berührt im allgemeinen in einem solchen Verzweigungspunkt die Kurve c_A (Abb. 6). Ferner verläuft sie mit ihren reellen Teilen mit Ausnahme von isolierten Punkten und Sonderfällen ganz in dem erwähnten Gebiet G_A . Das analoge gilt auch für die Kurve (B). Im allgemeinen besitzen die Kurven (A), (B) keine Singularitäten außer Doppelpunkten. Es können sich z.B. zwei verschiedene Zweige von (A) bzw. (B) im Endlichen oder Unendlichen schneiden. In einem solchen Fall besitzt die Kurve (A) im Schnittpunkt einen singulären Punkt. Hierbei sind folgende Fälle möglich:

- a) Die Klammersymbole der sich schneidenden Zweige von (A) unterscheiden sich nur an einer Stelle. In diesem Fall besitzt (A) einen Doppelpunkt und die dem Doppelpunkt entsprechenden zwei Punkte von (B) fallen zu einem einzigen Punkt zusammen. Die Kurve (B) hat dann ebenfalls einen Doppelpunkt.
- b) Die beiden Klammersymbole unterscheiden sich an zwei Stellen. Dann gibt es folgende zwei Möglichkeiten: Die Kurve (A) hat im Schnittpunkt einen Doppelpunkt, dem zwei verschiedene Punkte von (B) entsprechen, oder sie hat einen vierfachen Punkt, dem ein vierfacher Punkt von (B) zugeordnet ist. Schließlich können die Klammern der beiden

sich schneidenden Zweige sich auch an allen drei Stellen unterscheiden. Dann hat die Kurve (A) entweder einen Doppelpunkt, dem zwei verschiedene Punkte von (B) entsprechen, oder sie hat sogar einen achtfachen Punkt, dem ein achtfacher Punkt von (B) entspricht. Solche einander entsprechende vierfache bzw. achtfache Punkte der Kurven (A), (B) können aber nur in dem Sonderfall auftreten, daß zwei bzw. drei der gegebenen Punkte Q_μ auf einem Kreis durch die beiden Brennpunkte F_1, F_2 liegen.

3. Bemerkungen zur praktischen Konstruktion der Gelenkpunktkurven. ----- -----

Wenn man die Konstruktion der Kurven (A), (B) nach § 2,2 durchführt, so ist es vorteilhaft folgendes zu beachten. Falls bei der Konstruktion der Kurve (A) schleifende Schnitte zwischen den Kreisen K_{1j} und einem der Kreise K_1^μ auftreten, beginne man die Konstruktion nicht mit (A) sondern mit (B). Wenn die Punkte B sich an einer Stelle häufen, entspricht dem Häufungspunkt den wir mit B_∞ bezeichnen wollen, ein unendlich ferner Punkt A_∞ . Die Punkte A_∞ und B_∞ entsprechen dem Wert $R_1 = \infty$. Die zugehörigen Kreise K_{1j} sind Geraden durch F_1 . Jeder Geraden K_{1j} entspricht ein Kreis K_{2j} . Führt man die Konstruktion in gleicher Weise wie in § 2,2 durch, so findet man einen Kreis K_2 durch F_2 mit dem Mittelpunkt B_∞ . Zu diesem Kreis gehört eine Gerade K_1 durch F_1 . Der unendlich ferne Punkt der zu K_1 senkrechten Richtung ist dann der Punkt A_∞ . Die Kurve (A) hat eine Asymptote senkrecht zu K_1 . Das Dreistabgetriebe $F_1 A_\infty B_\infty F_2 P$ ist dann eine exzentrische Kurbelschleife.

§ 4 Analytische Untersuchung der Gelenkpunktkurven (A), (B).

1. Wiederholung über Gelenkpunktkurven.

Um frühere Behauptungen, wie z.B. die in §3,2 erwähnte eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von (A), (B) zu beweisen, und um Spezialfälle einfach behandeln zu können, sollen die Gleichungen der Kurven (A), (B) aufgestellt werden.

Nach § 3,1 sind die Gelenkpunktkurven der geometrische Ort der Koppelgelenkpunkte A, B aller zu derselben Stellung P gehörenden erzeugenden Getriebe der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(2F, 4P)$. Alle diese Getriebe haben die Steggelenke F_1, F_2 . Ein Paar entsprechender Punkte A, B findet man nach Wahl der Kurbellänge R_1 als Mittelpunkte der Kreise K_1, K_2 durch die Punkte F_1^1, F_1^2, F_1^3, F_1 und F_2^1, F_2^2, F_2^3, F_2 . Die Punkte F_1, F_2 sind gegeben, während sich die Punkte $F_1^\mu, F_2^\mu, \mu = 1, 2, 3$ auf konzentrischen Kreisen K_1^μ, K_2^μ um einen bekannten Punkt P bewegen können. Die Radien der Kreise K_1^μ, K_2^μ sind bekannt und sollen mit a_μ bzw. a'_μ bezeichnet werden. Es ist also

$$\begin{aligned} \overline{F_1^\mu F_2^\mu} &= \overline{F_1 F_2} = d \\ \overline{P F_1^\mu} &= \overline{Q_\mu F_1} = a_\mu \\ \overline{P F_2^\mu} &= \overline{Q_\mu F_2} = a'_\mu \end{aligned} \quad (0)$$

$$\overline{P F_1} = a, \quad \overline{P F_2} = a', \quad \mu = 1, 2, 3$$

Den möglichen Werten von R_1 entsprechend gibt es ∞^1 Stellungen der Punkte F_1^μ, F_2^μ . F_1, F_1^1, F_1^2, F_1^3 und F_2, F_2^1, F_2^2, F_2^3 liegen stets auf je einem Kreis K_1 bzw. K_2 . Die Mittelpunkte dieser Kreise sind dann entsprechende Punkte A, B der Gelenkpunktkurven (A), (B).

2. Gleichung einer Gelenkpunktkurve.

Es ist zweckmäßig, die Untersuchung in isotropen Koordinaten u, v zu führen [3a, c]. Als Ursprung wählen wir den Punkt P. Unser Ziel ist es, die Beziehung zwischen den Koordinaten u, v der Punkte A bzw. u', v' der Punkte B d.h. die Gleichungen der Gelenkpunktkurven (A), (B), abzuleiten. Das sind Gleichungen in laufenden Koordinaten u, v bzw. u', v' , deren Koeffizienten von den gegebenen Punkten Q_μ, P_1, P_2 abhängen. Die Punkte A, B sind die Mittelpunkte der Kreise K_1, K_2 mit den Radien R_1, R_2 . Die Gleichungen der Kreise K_1, K_2 lauten in isotropen Koordinaten x, y :

$$(x - u)(y - v) = R_1^2 \quad (x - u')(y - v') = R_2^2$$

Da die Punkte P_1^μ, P_1 auf K_1 und P_2^μ, P_2 auf K_2 liegen, müssen ihre Koordinaten die Gleichung von K_1 bzw. K_2 erfüllen.

Daher haben wir:

$$(x_\mu - u)(y_\mu - v) = R_1^2 \quad (x'_\mu - u')(y'_\mu - v') = R_2^2$$

$$(q - u)(p - v) = R_1^2 \quad (q' - u')(p' - v') = R_2^2$$

$$\mu = 1, 2, 3$$

Dabei sind x_μ, y_μ die isotropen Koordinaten von P_1^μ, x'_μ, y'_μ die isotropen Koordinaten von P_2^μ . Mit q, p bzw. q', p' bezeichnen wir die isotropen Koordinaten von P_1, P_2 . Durch Ausmultiplizieren der Klammern erhalten wir:

$$x_\mu y_\mu - u y_\mu - v x_\mu + uv = R_1^2 \quad x'_\mu y'_\mu - u' y'_\mu - v' x'_\mu + u' v' = R_2^2$$

$$q p - u p - v q + uv = R_1^2 \quad q' p' - u' p' - v' q' + u' v' = R_2^2$$

Indem wir die oberen Gleichungen von den unteren abziehen, ergibt sich:

$$u(y_\mu - p) + v(x_\mu - q) + qp - x_\mu y_\mu = 0 \quad (\alpha)$$

$$u'(y'_\mu - p') + v'(x'_\mu - q') + q'p' - x'_\mu y'_\mu = 0$$

Nun bewegen sich die Punkte $P_1^\mu, P_2^\mu (\mu = 1, 2, 3)$ auf konzentrischen Kreisen K_1^μ, K_2^μ um den Ursprung. Das drückt sich in isotropen Koordinaten unter Beachtung der Beziehungen (O) folgendermaßen aus [3c]:

$$x_\mu y_\mu = a_\mu^2 \quad x'_\mu y'_\mu = a'^2_\mu$$

Ferner gilt ebenfalls wegen (O)

$$q p = a^2 \quad q' p' = a'^2$$

Wir können nun die Gleichungen (α) vereinfachen zu

$$u(y_\mu - p) + v(x_\mu - q) = a_\mu^2 - a^2$$

$$u'(y'_\mu - p') + v'(x'_\mu - q') = a'^2_\mu - a'^2$$

Setzen wir noch zur Abkürzung $a_\mu^2 - a^2 = b_\mu$, $a'^2_\mu - a'^2 = b'_\mu$, so erhalten wir für $\mu = 1, 2, 3$ die zwei folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} u(y_1 - p) + v(x_1 - q) &= b_1 & u'(y'_1 - p') + v'(x'_1 - q') &= b'_1 \\ u(y_2 - p) + v(x_2 - q) &= b_2 \text{ (I)} & u'(y'_2 - p') + v'(x'_2 - q') &= b'_2 \text{ (II)} \\ u(y_3 - p) + v(x_3 - q) &= b_3 & u'(y'_3 - p') + v'(x'_3 - q') &= b'_3 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (I) bzw. (II) stellen geometrisch die je drei Mittellote der Strecken $\overline{P_1 P_2}$ bzw. $\overline{P'_1 P'_2} (\mu = 1, 2, 3)$ dar. Die drei Geraden jeder dieser beiden Gruppen sollen nun durch je einen Punkt gehen, nämlich den Punkt A bzw. B der Gelenkpunktkurven (A), (B). Es sollen also beide Gleichungssysteme Lösungen u, v bzw. u', v' besitzen; dazu ist notwendig, daß die Koeffizientendeterminanten verschwinden.

$$D = \begin{vmatrix} (y_1 - p) & (x_1 - q) & b_1 \\ (y_2 - p) & (x_2 - q) & b_2 \\ (y_3 - p) & (x_3 - q) & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad D' = \begin{vmatrix} (y'_1 - p') & (x'_1 - q') & b'_1 \\ (y'_2 - p') & (x'_2 - q') & b'_2 \\ (y'_3 - p') & (x'_3 - q') & b'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\Delta)$$

Wenn $D = 0$ und $D' = 0$ ist, dann liegen also die vier Punkte P_1, P_1^7, P_2^2, P_2^3 auf einem Kreis K_1 um A, und P_2, P_2^7, P_2^2, P_2^3 auf

einem Kreis K_2 um B . A und B stellen dann zwei zusammengehörige Koppelgelenkpunkte dar. Die beiden Gleichungssysteme (I) und (II) sind demnach mit den Bedingungen (4) der analytische Ausdruck für die Lagebeziehung, die zwei zusammengehörige Koppelgelenkpunkte A, B nach § 2,1 erfüllen müssen. Um zunächst die Determinante D zu Null zu machen, setzen wir:

$$x_\mu = \frac{\lambda_\mu \pm \sqrt{\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu}}{2v}, \quad y_\mu = \frac{\lambda_\mu \mp \sqrt{\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu}}{2u},$$

$$\lambda_\mu = pu + qv + b_\mu, \quad \Delta_\mu = 4a_\mu^2 uv, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Dann sind die Gleichungen (I) für jedes u, v erfüllt. Geometrisch bedeutet das, daß die Punkte E_1^μ und E_2^μ auf einem Kreis liegen. Dabei gilt in beiden Ausdrücken für x_μ, y_μ entweder das obere oder das untere Vorzeichen. Um nun auch D' zu Null zu machen, beachtet man, daß x'_μ, y'_μ von x_μ und y_μ abhängt. Denn es gilt die Beziehung $\overline{E_1^\mu E_2^\mu} = \overline{E_1 E_2} = d$. Da das Dreieck $E_1^\mu E_2^\mu P$ bei der Drehung des Punktes E_1^μ um P zu sich selbst kongruent bleibt, erhält man E_2^μ aus E_1^μ durch eine Drehstreckung. Diese ist noch von μ abhängig. Der Winkel ϵ_μ der Drehstreckung ist $\epsilon_\mu = \angle E_1^\mu P E_2^\mu$. In isotropen Koordinaten stellt sich die Drehstreckung mit dem Winkel ϵ_μ und dem Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{a'_\mu}{a_\mu}$ durch die Gleichungen $x'_\mu = \alpha_\mu x_\mu, y'_\mu = \bar{\alpha}_\mu y_\mu, \alpha_\mu = \frac{a'_\mu}{a_\mu} e^{i\epsilon_\mu}, d^2 = a_\mu^2 + a_\mu'^2 - 2a_\mu a_\mu' \cos \epsilon_\mu$ dar. Die Größen $\alpha_\mu, \bar{\alpha}_\mu$ sind konjugiert komplexe Zahlen.

Ersetzt man nun in der Determinante D' die Größen x'_μ, y'_μ durch $\alpha_\mu x_\mu, \bar{\alpha}_\mu y_\mu$, so erhält die Bedingung $D' = 0$ die Form

$$D' = \begin{vmatrix} (\bar{\alpha}_1 y_1 - p') (\alpha_1 x_1 - q') & b'_1 \\ (\bar{\alpha}_2 y_2 - p') (\alpha_2 x_2 - q') & b'_2 \\ (\bar{\alpha}_3 y_3 - p') (\alpha_3 x_3 - q') & b'_3 \end{vmatrix} = 0$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke $x_\mu(u, v)$, $y_\mu(u, v)$ in die letzte Gleichung $D' = 0$ erhält man eine Gleichung, die als einzige Veränderlichen nur noch u, v enthält. Das ist bereits die gesuchte Gleichung der Gelenkpunktkurve (A):

$$G_{ijk}(u, v) = \begin{vmatrix} (\bar{\alpha}_1 [\lambda_1 \mp \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u) (\alpha_1 [\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v) & b'_1 \\ (\bar{\alpha}_2 [\lambda_2 \mp \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] - 2p'u) (\alpha_2 [\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] - 2q'v) & b'_2 \\ (\bar{\alpha}_3 [\lambda_3 \mp \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2p'u) (\alpha_3 [\lambda_3 \pm \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2q'v) & b'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

$$\lambda_\mu = pu + qv + b_\mu, \quad \Delta_\mu = 4\alpha_\mu^2 uv, \quad \mu = 1, 2, 3$$

i, j, k sind eins oder zwei, je nachdem in der ersten, zweiten und dritten Zeile der Determinante das obere oder das untere Vorzeichen gilt. Da nun

$$x_\mu = \frac{1}{2v} [\lambda_\mu \pm \sqrt{\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu}], \quad y_\mu = \frac{1}{2u} [\lambda_\mu \mp \sqrt{\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu}]$$

ist, so folgt $G_{ijk}(u, v) = 4 uv D(u, v)$. Aus dem Verschwinden von $G_{ijk}(u, v)$ folgt also auch das Verschwinden von D' falls $u, v \neq 0$ ist. D verschwindet schon wegen der Wahl der x_μ, y_μ

Hat man daher ein Wertepaar u, v , welches die Gleichung $G_{ijk}(u, v) = 0$ erfüllt, so folgt daraus, da D' verschwindet, daß das lineare Gleichungssystem (II)^a eindeutig nach u', v' aufgelöst werden kann. Andererseits erfüllen die Werte u, v auch das Gleichungssystem (I). Daher stellen die Wertepaare u, v und u', v' die isotropen Koordinaten zweier zusammengehöriger Koppelgelenkpunkte A, B dar und $G_{ijk}(u, v) = 0$ ist die Gleichung der Kurve (A). Das ist in der Tat eine Gleichung in u, v , deren Koeffizienten von den Punkten Q_μ, F_1, F_2 abhängen. Übt man auf die Gleichung (*) die Substitution

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_\mu & \bar{\alpha}_\mu & p & q & p' & q' & a_\mu & a'_\mu & b_\mu & b'_\mu & u & v \\ \frac{1}{\alpha_\mu} & \frac{1}{\bar{\alpha}_\mu} & p' & q' & p & q & a'_\mu & a_\mu & b'_\mu & b_\mu & u' & v' \end{pmatrix}$$

aus, so erhält man die Gleichung (**) der Kurve (B).

3. Diskussion der Gleichung der Gelenkpunktkurven.

Aus den eben abgeleiteten Gleichungen (*) und (**) der Gelenkpunktkurven (A), (B) und der in § 4,2 getroffenen Vorzeichenfestsetzung kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen. Zunächst erkennt man, daß die Kurven (A), (B) algebraische Kurven sind.

In jeder Zeile der Determinante $G_{ijk}(u, v)$ hat man nur zwei Möglichkeiten der Vorzeichenwahl; es gilt entweder beides Mal das obere oder das untere Zeichen. Das gibt für die ganze Determinante acht Möglichkeiten. Jede dieser acht Möglichkeiten entspricht einem der acht Zweige

der Gelenkpunktkurve (A). Wir setzen fest, daß wir in (*) unter $\sqrt{z}$ immer eine Zahl mit einem Argument $0 \leq \varphi < \pi$ verstehen wollen. Wählen wir in allen drei Zeilen der Determinante das obere Vorzeichen, so erhalten wir die Gleichung des Zweiges (111): $G_{111}(u,v) = 0$. Wählen wir das untere Vorzeichen, so ergibt sich die Gleichung des Zweiges (222): $G_{222}(u,v) = 0$. Allgemein steht an der μ -ten Stelle des Klammersymbols eine 1 bzw. eine 2, je nachdem in der μ -ten Zeile das obere oder das untere Vorzeichen gewählt wurde. Die Bedeutung der verschiedenen Zweige der Kurve (A) für die erzeugenden Getriebe der Koppelkurven von $\mathcal{M}$ ist die folgende. Zieht man die Geraden $F_1 Q_\mu$ ($\mu=1,2,3$), die in diesem Sinn orientiert sind, so teilt jede dieser Geraden die Ebene in eine linke und eine rechte Halbebene

$\varepsilon_{\mu l}, \varepsilon_{\mu r}$. Es sei A ein Punkt eines Zweiges von (A), dessen Klammersymbol (ghk) an der μ -ten Stelle eine Eins (zwei) hat. Bringt man den die Koppelkurve erzeugenden Punkt durch Bewegung des Getriebes $F_1 A B F_2 P$ nach Q_μ , so geht der Punkt A in einen Punkt A_μ der Halbebene $\varepsilon_{\mu l} (\varepsilon_{\mu r})$ über. Durch die Angabe des Klammersymbols ist also die Lage des Koppelgelenkpunktes A_μ auf eine bestimmte der Halbebenen $\varepsilon_{\mu l}, \varepsilon_{\mu r}$ beschränkt. Dieser Umstand wird bei der endgültigen Konstruktion (§ 7,1) wesentlich sein.

Verschwindet für ein bestimmtes Wertepaar u_v, v_v , welches eine der acht Gleichungen $G_{ijk}(u,v) = 0$ erfüllt, die Größe $\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu$, so ist der Punkt $A_v(u_v, v_v)$ ein Verzweigungspunkt zweier verschiedener Zweige von (A), die sich nur an der μ -ten Stelle ihres Klammersymbols von einander unterscheiden.

Die Gleichung $\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu = 0$ stellt für jedes μ einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten F_1, F_2 und der großen Achse $a_\mu = \overline{F_1 Q_\mu}$ dar. Daher sind diese drei Kegelschnitte mit den die Grenzkurve c_A zusammensetzenden drei Kegelschnitten identisch (§ 2,5). Wir können also sagen, daß der Punkt A_v in diesem Fall sowohl auf (A) als auch auf c_A liegt. Ein solcher Punkt ist daher ein Punkt, in dem zwei Zweige ineinander übergehen, also ein Verzweigungspunkt. Im § 5,4 wird gezeigt, daß in einem solchen Punkt A_v die Kurve (A) und die Grenzkurve c_A einander berühren.

Genügen die Koordinaten u, v eines Punktes A_v von (A) zwei verschiedenen von den acht Gleichungen $G_{ijk}(u, v) = 0$, ohne daß eine der drei Wurzeln $\sqrt{\lambda_\mu^2 - \Delta_\mu}$ verschwindet, so ist A_v ein Doppelpunkt von (A). Ist der dem Punkt A_v entsprechende Punkt B_v seinerseits Doppelpunkt der Kurve (B), so besitzt die durch das Getriebe $F_1 A_v B_v F_2 P$ erzeugte Koppelkurve im allgemeinen einen regulären Doppelpunkt, der in einem der Punkte Q_μ liegt, und zwar ist $\mu = 1, 2$, oder 3 je nachdem ob sich die zwei in A_v schneidenden Zweige an der ersten, zweiten oder dritten Stelle ihrer Klammersymbole unterscheiden.

Nach § 4,2 sind die Punkte A, B der Kurven (A), (B) einander eindeutig zugeordnet. Dies ergibt sich aus dem linearen Gleichungssystem (II) auf Seite 17. Zwei einander entsprechende Punkte A, B von (A), (B) sind die Koppelgelenke eines Dreistabgetriebes $F_1 A B F_2 P$, dessen Punkt P eine Koppelkurve (P) der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ erzeugt. Die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von (A) und (B) ist jedoch nicht linear. Es gibt demnach Ausnahmepunkte. Zu einem solchen gelangt man, wenn der Rang einer der dreireihigen Determinanten D und D' für die Punkte der Kurven (A) bzw. (B) kleiner als zwei

ist. Dies tritt z.B. dann ein, wenn die drei Grundpunkte Q_μ von $\mathcal{M}$ auf einem Kreis um F_1 oder F_2 liegen. In diesem Fall entsprechen einem Punkt von (B) bzw. (A) unendlich viele Punkte von (A) bzw. (B).

Es sei noch bemerkt, daß bei der Abbildung der Kurve (A) auf die Kurve (B) im allgemeinen ein Verzweigungspunkt der einen Kurve nicht einem Verzweigungspunkt der anderen Kurve entspricht.

Macht man die Gleichungen $G_{ijk}(u,v) = 0$ rational, so erhält man eine Gleichung 16. Grades $R(u,v) = 0$. Diese Gleichung ist unabhängig von der gewählten Vorzeichenkombination der Wurzeln. D.h., daß jeder der acht verschiedenen Zweige derselben Gleichung $R(u,v) = 0$ genügt. Jedoch sind in dieser Gleichung noch die Geraden $u = 0$ und $v = 0$ mit einer gewissen Vielfachheit enthalten. Denn betrachtet man einmal die Gleichung des Zweiges (111), so ist sie für $u = 0$ erfüllt und ebenso ist es die von (222) für $v = 0$. Im § 5 wird gezeigt, mit welcher Vielfachheit die Geraden $u = 0$, $v = 0$ in der Gleichung $R(u,v) = 0$ enthalten sind.

Abb.6 zeigt ein Stück der Zweige (112) und (111) zweier Gelenkpunktkurven (A), (B) sowie einige zugehörige Koppelkurven. Die Grenzkurven c_A, c_B sind hier Ellipsen. Man sieht, daß die Kurve (A) die Grenzkurve c_A in A_{ov} berührt. Der Zweigwechsel erfolgt in der dritten Stelle des Klammersymbols. Die von dem Getriebe F_1, A_{ov}, B_0, F_2, P erzeugte Koppelkurve c_0 hat daher in Q_3 einen Punkt extremaler Entfernung von F_1 . Sie berührt den Kreis K_e mit dem Radius $r = \overline{F_1 Q_3} = \overline{A_{ov} F_1} + \overline{A_{ov} P}$ im Punkt Q_3 .

4. Gegebene Doppelpunkte der Koppelkurve.

Um den Sonderfall behandeln zu können, bei dem von der gesuchten Koppelkurve ein regulärer Doppelpunkt gegeben ist, fragen wir zunächst nach denjenigen Koppelkurven von $\mathcal{M}$, die in einem der Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 einen Doppelpunkt haben. Dabei kann man den Fall, daß P Doppelpunkt ist, durch Umbenennung der Punkte P, Q_μ auf den Fall, daß Q_μ ein Doppelpunkt sein soll, zurückführen.

Die ∞^1 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist durch acht feste Bestimmungsstücke festgelegt [1a, 1b]. Es kann also im allgemeinen höchstens eine endliche Anzahl von Koppelkurven der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in z.B. Q_1 einen Doppelpunkt besitzen. Im § 6,6 wird gezeigt, daß diese Anzahl im allgemeinen vier ist.

Jede Koppelkurve von $\mathcal{M}$ ist durch ein Paar zusammengehöriger Punkte A, B der Gelenkpunktkurven $(A), (B)$ bestimmt. Wir wollen nunmehr eine Bedingung dafür ableiten, daß die durch A, B bestimmte Koppelkurve von $\mathcal{M}$ in Q_1 einen Doppelpunkt besitzt. Dabei möge dieser Doppelpunkt einer der stets vorhandenen drei Doppelpunkte auf dem Brennpunktskreis sein; er soll ferner reell und nicht isoliert, also ein Knotenpunkt sein. Die Koppelkurve wird bekanntlich in Q_1 einen Doppelpunkt besitzen, wenn der Winkel $\varepsilon_1 = \angle F_1 Q_1 F_2$ gleich dem Winkel $\gamma = \angle APB$ des Koppeldreiecks oder seinem Nebenwinkel ist [16, 13]. Diese Bedingung soll nun analytisch formuliert werden. Die Minimalkoordinaten von A und B seien

$$\begin{aligned} A: \quad u &= \rho e^{i\lambda} \\ v &= \rho e^{-i\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: \quad u' &= \rho' e^{i\lambda'} \\ v' &= \rho' e^{-i\lambda'} \end{aligned}$$

Führt man die komplexen Zahlen $\overline{Q_1}, \overline{P_1} = z_1$, $\overline{Q_1}, \overline{P_2} = z_1'$ ein,
und setzt man $|z_1| = a_1$, $|z_1'| = a_1'$, so haben wir

$$\alpha_1 = \frac{z_1'}{z_1} = \frac{a_1'}{a_1} e^{i\varepsilon_1}$$

dann gilt

$$\lambda' - \lambda \equiv \varepsilon_1 \pmod{\pi}$$

Wir erhalten daher :

$$\frac{u'}{v'} = e^{2i\lambda'} = e^{2i(\lambda + \varepsilon_1)} = e^{2i\lambda} e^{2i\varepsilon_1} = \frac{u}{v} \frac{\alpha_1}{\alpha_1'}$$

eine Koppelkurve aus $\partial\partial\zeta$ hat also dann und nur dann in Q_1
einen Doppelpunkt, wenn die Bedingung

$$\frac{u'}{v'} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1'} \frac{u}{v}$$

erfüllt ist.

Es sei noch bemerkt, daß diese Bedingung gleichwertig
mit der folgenden ist:

$$\frac{pu + qv + b_1}{v} = \frac{p'u' + q'v' + b_1'}{\alpha_1 v'}$$

§ 5 Die Ordnung der Gelenkpunktkurven (A), (B).

1. Drei verschiedene Formen der Gleichung einer Gelenk- punktcurve.

Da die Kurven (A) und (B) aus Symmetriegründen die gleiche Ordnung haben, genügt es die Ordnung von (A) zu bestimmen. Dazu wollen wir andere Formen der Gleichung von (A) ableiten. Wir schreiben die Gleichung von (A) zunächst noch einmal in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} (\bar{\alpha}_1 [\lambda_1 - \sigma_1 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u) (\alpha_1 [\lambda_1 + \sigma_1 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v) b_1' \\ (\bar{\alpha}_2 [\lambda_2 - \sigma_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] - 2p'u) (\alpha_2 [\lambda_2 + \sigma_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] - 2q'v) b_2' \\ (\bar{\alpha}_3 [\lambda_3 - \sigma_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2p'u) (\alpha_3 [\lambda_3 + \sigma_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2q'v) b_3' \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt:

$$\lambda_\mu = p u + q v + b_\mu w, \quad \Delta_\mu = 4 a_\mu^2 u v, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad \sigma_\mu = \pm 1$$

u, v, w sind homogene isotrope Koordinaten. Jedem Zweig entspricht eine Zusammenstellung der Vorzeichen der σ_μ . Rechnet man diese Determinante aus, so erhält man eine zweite Form der Gleichung (1).

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i G_i \sqrt{\lambda_i^2 - \Delta_i} + \sum_{i,j,k=1}^3 H_i \sigma_j \sigma_k \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k} + G = 0 \quad (2)$$

Der Strich am Summenzeichen bedeutet dabei, daß i, j, k die drei Permutationen 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 durchlaufen. Die Größen G_i, H_i, G sind folgendermaßen definiert:

$$G_i = \ell_i + g_i + h_i \quad \ell_i = b_j' (\alpha_i \bar{\alpha}_k + \bar{\alpha}_i \alpha_k) \lambda_k - b_k' (\alpha_j \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j \alpha_i) \lambda_j$$

$$H_i = b_i' (\alpha_j \bar{\alpha}_k - \bar{\alpha}_j \alpha_k) \quad g_i = 2(b_k' - b_j') \alpha_i p' u, \quad h_i = 2(b_k' - b_j') \bar{\alpha}_i q' v$$

$$G = - \sum_{i,j,k=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i=1}^3 \lambda_i (g_i - h_i) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \\ k = 3, 1, 2 \end{matrix}$$

Aus Gleichung (2) erhalten wir schließlich durch Wegschaffen der Wurzeln eine dritte Form:

$$\begin{aligned} & [M^2 + N_3^2(\lambda_1^2 - \Delta_1)(\lambda_2^2 - \Delta_2) - N_2^2(\lambda_1^2 - \Delta_1)(\lambda_3^2 - \Delta_3) - N_1^2(\lambda_2^2 - \Delta_2)(\lambda_3^2 - \Delta_3)]^2 \\ & = 4[MN_3 + N_1N_2(\lambda_3^2 - \Delta_3)]^2(\lambda_1^2 - \Delta_1)(\lambda_2^2 - \Delta_2) \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei bedeutet:

$$M = \sum_{i=1}^3 G_i^2(\lambda_i^2 - \Delta_i) - \sum_{i,j=1}^3 H_i^2(\lambda_j^2 - \Delta_j)(\lambda_k^2 - \Delta_k) - G^2$$

$$N_1 = 2[H_2H_3(\lambda_1^2 - \Delta_1) + GH_1 - G_2G_3], \quad N_2 = 2[H_1H_3(\lambda_2^2 - \Delta_2) + GH_2 - G_1G_3],$$

$$N_3 = 2[H_1H_2(\lambda_3^2 - \Delta_3) + GH_3 - G_1G_2].$$

Man sieht, daß in Gleichung (3) die G_i nicht mehr vorkommen. Das heißt, daß in Gleichung (3) alle Zweige von (A) enthalten sind. Weiter zeigt eine kurze Betrachtung:

G_i ist homogen und vom 1. Grad in u, v, w

G " " " " 2. " " "

M " " " " 4. " " "

N_i " " " " 2. " " "

Die Gleichung (3) ist daher homogen und vom 16. Grade in u, v, w . Hieraus folgt zunächst für die Ordnung n der Gelenkpunktkurve (A)

$$n \leq 16$$

Das Gleichheitszeichen ist aber ausgeschlossen, da nach § 4 die Geraden $u = 0$, $v = 0$ in Gleichung (3) enthalten sind. Die Gerade $w = 0$ ist nicht in (3) enthalten. Alle drei in diesem Abschnitt abgeleiteten Formen der Gleichung von (A) werden im Folgenden noch von Nutzen sein.

2. Beziehungen zwischen den Größen G_i , H_i , G .

Die in Gleichung (2) auftretenden Größen G_i, H_i, G sind nicht voneinander unabhängig. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \ell_i = 0 \quad (a), \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (g_i + h_i) \quad (b)$$

$$G = - \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k - \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i + 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i \quad (c)$$

$$G = - \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i - 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i h_i \quad (d)$$

Diese Gleichungen sind bei der Bestimmung der Ordnung von (A) von Bedeutung.

3. Die Bestimmung der Ordnung von (A).

Wir gehen von Gleichung (2) aus und betrachten nur die zwei Zweige (111) und (222), d.h. wir setzen die δ_i einmal 1,1,1, das anderemal -1,-1,-1. Dann lauten die Gleichungen

$$\pm \sum_{i=1}^3 G_i \sqrt{\lambda_i^2 - \Delta_i} = -G - \sum_{i=1}^3 H_i \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k}$$

Durch einmaliges Quadrieren gehen beide Formen in ein- und dieselbe Gleichung über

$$\left(\sum_{i=1}^3 G_i \sqrt{\lambda_i^2 - \Delta_i} \right)^2 = G^2 + 2G \sum_{i=1}^3 H_i \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k} \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} + \left(\sum_{i=1}^3 H_i \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k} \right)^2,$$

die also beide Zweige darstellt.

Führt man in der letzten Gleichung die Quadrate aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 G_i^2 \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^3 G_i^2 \Delta_i + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 G_i G_j \sqrt{\lambda_i^2 - \Delta_i} \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} = G^2 + 2G \sum_{i=1}^3 H_i \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k} + \\ \sum_{i=1}^3 H_i^2 \lambda_j^2 \lambda_k^2 + \sum_{i=1}^3 H_i^2 \Delta_j \Delta_k - \sum_{i=1}^3 H_i^2 \lambda_k^2 \Delta_j - \sum_{i=1}^3 H_i^2 \lambda_j^2 \Delta_k + \\ + 2 \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^2 - \Delta_i) H_j H_k \sqrt{\lambda_j^2 - \Delta_j} \sqrt{\lambda_k^2 - \Delta_k} \end{aligned}$$

Wir entwickeln die Wurzeln nach dem binomischen Satz.

Dies ist möglich, wenn wir die Gleichung für kleine Werte

$|u|, |v|$ betrachten. Wenn wir zu inhomogenen Koordinaten übergehen, d.h. $w = 1$, $\Delta_i = 4a_i^2 uv$, $\lambda_i = pu + qv + b_i$ setzen, so ergibt sich dann; falls $b_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 G_i^2 \lambda_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 G_i G_j \lambda_i \lambda_j (1 - \frac{\Delta_i}{2\lambda_i^2} + \dots) (1 - \frac{\Delta_j}{2\lambda_j^2} + \dots) = G^2 + \\ 2G \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k (1 - \frac{\Delta_j}{2\lambda_j^2} + \dots) (1 - \frac{\Delta_k}{2\lambda_k^2} + \dots) + \sum_{i=1}^3 H_i^2 \lambda_j^2 \lambda_k^2 \\ + 2 \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^2 - \Delta_i) \lambda_j \lambda_k H_j H_k (1 - \frac{\Delta_k}{2\lambda_k^2} + \dots) (1 - \frac{\Delta_j}{2\lambda_j^2} + \dots) + O(\Delta_i) \end{aligned}$$

Wir fassen die Glieder, in denen kein Δ_i vorkommt, zusammen.

$$(\sum_{i=1}^3 G_i \lambda_i)^2 = G^2 + 2G \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k + (\sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k)^2 + O(\Delta_i)$$

Weiter können wir schreiben:

$$(\sum_{i=1}^3 G_i \lambda_i)^2 = (G + \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k)^2 + O(\Delta_i)$$

Dies spalten wir auf:

$$(G + \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i=1}^3 G_i \lambda_i) (G + \sum_{i=1}^3 H_i \lambda_j \lambda_k - \sum_{i=1}^3 G_i \lambda_i) + O(\Delta_i) = 0$$

Nach den im Abschnitt 2 abgeleiteten Formeln (c) und (d)

können wir aber für die Klammern setzen:

$$(2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i) (-2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i h_i) + O(\Delta_i) = 0 \quad (* * *)$$

Das heißt, daß cuv das Glied niedrigsten Grades in dieser Gleichung ist. Dabei zeigt eine etwas eingehendere Untersuchung, daß der Faktor c im allgemeinen von Null verschieden ist. Glieder der Gestalt fu^* , bzw. gv^* können für sich allein in der Entwicklung nicht vorkommen.

Die Gleichung (3) § 5,1 läßt sich in ein Produkt von vier Faktoren zerlegen.

$$[M - N_3 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} - N_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} - N_2 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] \cdot$$

$$[M - N_3 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} + N_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + N_2 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] \cdot$$

$$[M + N_3 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} + N_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} - N_2 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] \cdot$$

$$[M + N_3 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} - N_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + N_2 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] = 0$$

Der erste Faktor stimmt mit Gleichung (* * *) überein, und läßt sich in eine Reihe der Form $c u v + \dots$ entwickeln. Die anderen drei Faktoren sind für $u = 0$ bzw. $v = 0$ von Null verschieden. Die gesamte Gleichung ist vom 16. Grad in u, v . Da nur der erste Faktor, u. zwar einmal durch $u v$ teilbar ist, ist auch die ganze linke Seite einmal durch $u v$ teilbar. Es bleibt also nach Abzug der Minimalgeraden eine Gleichung 14. Ordnung für die Gelenkpunktkurve übrig. Ob diese Gleichung 14. Ordnung im allgemeinen Fall noch in Bestandteile niedrigerer Ordnung zerfällt, soll hier nicht untersucht werden. In Spezialfällen ist dies der Fall. So zerfällt z.B., wenn man als P_1 und P_2 zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen Sechsecks wählt und die vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 in die übrigen Ecken legt, die Kurve (A) in eine vierfach zählende Gerade, zwei Kurven vierter Ordnung, die nicht durch die Kreispunkte gehen und in die zwei Minimalgeraden $u = 0, v = 0$.

Hieraus folgt, daß die Kurve 14. Ordnung im allgemeinen höchstens noch einmal durch beide Kreispunkte hindurch gehen kann.

Ob die Geraden $u = 0, v = 0$ als Orte von Koppelgelenkpunkten A eine Bedeutung haben, wird in dieser Arbeit nicht untersucht. Rein formal müssen sie mit zur Gelenkpunktkurve gerechnet werden. Wir wollen uns aber in den folgenden Kapiteln nur mit der Kurve 14. Ordnung beschäftigen und wenn wir von einer Gelenkpunktkurve sprechen, so wollen wir diese darunter verstehen.

4. Tangentenrichtung der Gelenkpunktkurve (A) in einem

Schnittpunkt mit der Grenzkurve c_A .

Wir nehmen an, daß die Gelenkpunktkurve (A) mit der Grenzkurve c_A einen Punkt $P_0(u_0, v_0)$ gemein hat. Nach § 4,3 hat die Grenzkurve c_A die Gleichung $\lambda_1^2 - \Delta_1 = 0$. Die Gelenkpunktkurve (A) sei durch die Gleichung (2) gegeben. Die letztere schreiben wir wie folgt:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} [G_1 + H_2 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + H_3 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] + G_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} + G_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} \\ & + H_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + G = 0 \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} h(u, v) &= G_1 + H_2 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + H_3 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \\ g(u, v) &= G_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} + G_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + H_1 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2} \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3} + G \end{aligned}$$

Dann geht (A) über in

$$\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} h(u, v) + g(u, v) = 0 \quad (*)$$

Für $u = u_0$, $v = v_0$ erhalten wir nach Voraussetzung

$$\sqrt{\lambda_{10}^2 - \Delta_{10}} = 0 \quad , \quad g(u_0, v_0) = 0$$

Wir quadrieren Gleichung (*)

$$(\lambda_1^2 - \Delta_1) h^2(u, v) = g^2(u, v)$$

Entwickelt man diese Gleichung um den Punkt $P_0(u_0, v_0)$ nach Potenzen von $(u - u_0)$, $(v - v_0)$, so erhält man, wenn man nur die Glieder 1. Ordnung berücksichtigt:

$$[\lambda_{10}^2 - \Delta_{10} + (2\lambda_{10}\lambda_{1u0} - \Delta_{1u0})(u-u_0) + (2\lambda_{10}\lambda_{1v0} - \Delta_{1v0})(v-v_0) + \dots]$$

$$[h_0^2 + 2h_0h_{u0}(u-u_0) + 2h_0h_{v0}(v-v_0) + \dots] = g_0^2 + 2g_0g_{u0}(u-u_0) + 2g_0g_{v0}(v-v_0) + \dots$$

Dabei ist

$$\lambda_{1u0} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \Big|_{u=u_0, v=v_0}, \Delta_{1u0} = \frac{\partial \Delta}{\partial u} \Big|_{u=u_0, v=v_0}, \dots, \Delta_{1v0} = \frac{\partial \Delta}{\partial v} \Big|_{u=u_0, v=v_0}$$

Beachten wir $\lambda_{10}^2 - \Delta_{10} = 0, g_0 = g(u_0, v_0) = 0, h_0 = h(u_0, v_0) \neq 0$, so ergibt sich:

$$[(2\lambda_{10}\lambda_{1u0} - \Delta_{1u0})(u-u_0) + (2\lambda_{10}\lambda_{1v0} - \Delta_{1v0})(v-v_0) + \dots] h_0^2 + [\text{Gl. hoh. Ordg.}] = 0$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung stellt diese Gleichung die Tangente der Gelenkpunktkurve in P_0 dar. Setzt man den in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck gleich Null, so ergibt sich nach § 4,3 die Tangentengleichung der Grenzkurve $\mathcal{C}_A$ in P_0 . Da im allgemeinen $h_0 \neq 0$ ist, bedeutet dies, daß die Gelenkpunktkurve (A) in P_0 die Grenzkurve $\mathcal{C}_A$ berührt (Abb. 6).

Falls $|h(u_0, v_0)| \neq 0$ und $|g_u(u_0, v_0)| + |g_v(u_0, v_0)| > 0$ ist, kann man zeigen, daß im Punkte P_0 ein Zweigwechsel erfolgt.

Bew.: Es seien $P(u, v)$ und $P^+(u^+, v^+)$ zwei benachbarte Punkte auf (A), die durch P_0 voneinander getrennt werden. Dann müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_i^2 - \Delta_i} h(u, v) + g(u, v) &= 0 \\ -\sqrt{\lambda_i^{*2} - \Delta_i^*} h(u^+, v^+) + g(u^+, v^+) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Hierbei bedeutet $\lambda_i^* = pu^+ + qv^+ + b, \Delta_i^* = 4a^2 u^+ v^+$.

Die erste Gleichung folgt aus der Voraussetzung, daß P auf (A) liegen soll. Da $g(u_0, v_0) = 0$ und $|g_u(u_0, v_0)| + |g_v(u_0, v_0)| > 0$ ist, haben $g(u, v)$ und $g(u^+, v^+)$ entgegengesetztes Vorzeichen. Da ferner $h(u_0, v_0) \neq 0$ ist, muß die Wurzel ihr Vorzeichen wechseln, wenn die Koordinaten u, v durch u^+, v^+ ersetzt werden und die Gleichung richtig bleiben soll. Das heißt aber, daß in P_0 ein Zweigwechsel stattfindet.

§ 6 Besondere Koppelkurvenmannigfaltigkeiten $\mathcal{K}$ (2F, 4P).

1. Allgemeine Betrachtungen.

Im folgenden wollen wir mehrere für praktische Anwendungen wichtige Sonderfälle der nichtlinearen Koppelkurvenmannigfaltigkeit $\mathcal{K}$ (2F, 4P) betrachten. Diese Sonderfälle entstehen dadurch, daß zwischen den gegebenen Punkten gewisse Lagebeziehungen bestehen. Wir wollen hier die folgenden fünf Spezialfälle näher untersuchen:

- a) Zwei von den vier gegebenen Punkten P, Q_1, Q_2, Q_3 haben gleichen Abstand von einem der Brennpunkte F_1, F_2 .
- b) Alle vier Grundpunkte P, Q_1, Q_2, Q_3 liegen auf einem Kreis K_0 durch die beiden Brennpunkte F_1, F_2 .
- c) Der Punkt P fällt mit einem Brennpunkt zusammen.
- d) Zwei der Punkte Q_μ fallen in einem Doppelpunkt zusammen:

$$\mathcal{K}(P, Q_1 = Q_2 = D, Q_3; F_1, F_2) = \mathcal{K}_D$$

- e) Die vier Grundpunkte P, Q_1, Q_2, Q_3 liegen symmetrisch zum Steg auf einem Kreis durch F_1, F_2 mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \overline{F_1 F_2}$.

2. Der Fall a) : $\overline{Q_1 F_2} = \overline{Q_2 F_2}$.

Haben Q_1 und Q_2 gleichen Abstand vom Brennpunkt F_2 , so ist mit den Bezeichnungen des § 4,1 $a'_1 = a'_2$. Das bedeutet, daß die Kreise K_2^1 und K_2^2 zusammenfallen. Weiter gilt dann

$$b'_1 = b'_2$$

Dann können wir die Gleichung der Gelenkpunktkurve (A) auf S. 26 dadurch befriedigen, daß wir

$$\alpha, [\lambda, \pm \sqrt{\lambda^2 - \Delta_1}] = \alpha_2 [\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}]$$

setzen.

Dann sind die Elemente der ersten und zweiten Zeile der Determinante gleich und sie verschwindet. Rechnet man sie aus, so erhält man unter Beachtung der Beziehung $\alpha, \bar{\alpha}, \Delta_1 = \alpha_2 \bar{\alpha}_2 \Delta_2$ die Gleichung $(\alpha, \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \bar{\alpha}_1)^2 \Delta_1 + 4 \alpha_2 \bar{\alpha}_2 (\alpha, \lambda_1 - \alpha_2 \lambda_2)(\bar{\alpha}, \lambda_1 - \bar{\alpha}_2 \lambda_2) = 0$. Dies stellt die Gleichung eines Kegelschnitts k dar. Da diese Gleichung bei der Transformation $u = \frac{q}{p} v, v = \frac{p}{q} u$ in sich selbst übergeht, so ist der Kegelschnitt zu der Geraden PF_1 symmetrisch. Die Gerade PF_1 ist also Hauptachse von k . Rechnet man die Gleichung (7) aus, so zeigt sich, daß k zweimal Bestandteil von (A) ist. Wenn zwei von den drei Grundpunkten Q_μ von $\mathcal{H}$ gleiche Abstände vom Brennpunkt F_2 haben, zerfällt also die Gelenkpunktkurve (A) in einen doppelt zählenden Kegelschnitt und eine Restkurve.

3. Konstruktion des Gelenkpunktkegelschnittes k .

Wenn $a'_1 = a'_2$ ist, so fallen die Kreise K'_1 und K'_2 zusammen, und die Gelenkpunktkurve enthält den Kegelschnitt k als Bestandteil. Um Punkte von k zu erhalten, nimmt man auf $K_2^{1/2}$ einen Punkt $F_2^{1/2}$ beliebig an (Abb. 7). Konstruiert man dann die zugehörigen Punkte F_1^1, F_1^2 durch Abtragen der Strecke $\overline{F_1 F_2}$, so bleibt der Abstand $\overline{F_1^1 F_1^2}$ konstant, wenn sich $F_2^{1/2}$ auf $K_2^{1/2}$ bewegt. Durch F_1, F_1^1, F_1^2 legen wir einen Kreis K_1 . Der Mittelpunkt A von K_1 ist ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts. Um zum zugehörigen Gelenkpunkt B zu kommen, wählen wir einen der Schnittpunkte von K_1 und K_1^3 als F_1^3 . Konstruieren wir durch Abtragen der Strecke $\overline{F_1 F_2}$ den zugehörigen Punkt F_2^3 auf K_2^3 , so läßt sich auch durch F_2, F_1^1, F_1^2, F_1^3 immer ein Kreis K_2 legen, da F_1^1 und F_1^2 zusammenfallen. Der Mittelpunkt von K_2 ist dann ein zugehöriger Gelenkpunkt B . Wählt man als F_1^3 den anderen Schnittpunkt von K_1 und K_1^3 , so erhält man einen

zweiten zu A gehörigen Gelenkpunkt $\tilde{B}$. Unter den Gelenkpunkten bestehen die im § 2, 1 beschriebenen Lagebeziehungen. Läßt man den Punkt $F_2^1 = F_2^2$ den Kreis $K_2^1 = K_2^2$ um P durchlaufen, so erhält man als Ort von A den ganzen Kegelschnitt k. Spiegelt man die Strecke $\overline{F_1^1 F_1^2}$ an einer beliebigen Geraden durch den Punkt P, so erzeugt die gespiegelte Strecke $\overline{F_1^{1'} F_1^{2'}}$ denselben Kegelschnitt. Das ist die geometrische Bedeutung der analytischen Tatsache, daß die Kegelschnittsgleichung bei Vertauschung von α_1 mit $\bar{\alpha}_1$ und α_2 mit $\bar{\alpha}_2$ invariant bleibt. Auf Grund dieses Sachverhalts kann man sich leicht einen Durchmesser des Kegelschnitts verschaffen. Wir legen dazu durch F_1^1 und P, eine Gerade. Sie schneidet K_1^1 noch in dem Punkt $F_1^{1'}$. Zu F_1^1 gehört der Punkt F_1^2 . Spiegelung an der Geraden PF_1^1 ergibt $F_1^{2'}$. Ebenso gehört zu $F_1^{1'}$ der Punkt $F_1^{2'}$ und durch Spiegelung an der Geraden $PF_1^{1'}$ finden wir F_1^{2x} . Durch die vier Punktripel $F_1, F_1^1, F_1^2, F_1, F_1^1, F_1^{2'}$, $F_1, F_1^{1'}, F_1^{2x}$, $F_1, F_1^{1'}, F_1^{2x}$ sind vier Kreise bestimmt. Ihre vier Mittelpunkte A, A', A^x, A^x sind vier Punkte des Gelenkpunktkegelschnitts k. Die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{A^x A^x}$ sind bei unserer Annahme von F_1^1 parallel. Daher ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Strecken ein Durchmesser. Der Schnittpunkt dieses Durchmessers mit der Geraden PF_1 ergibt den Kegelschnittsmittelpunkt.

Dreht sich die Gerade $F_1^1 F_1^2$ um P, so erzeugt sie als Einhüllende einen Kreis l. Liegt F_1 außerhalb von l, so hat man als Kegelschnitt eine Hyperbel. Die Asymptotenrichtungen sind senkrecht zu den Tangenten, die man von F_1 an den Kreis l legen kann. Liegt F_1 innerhalb von l, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. In diesem Fall sind die

Asymptotenrichtungen konjugiert komplex und bestimmt als Doppelstrahlen einer Involution im Strahlenbüschel mit dem Scheitel P. Die Doppelstrahlen sind die beiden konjugiert komplexen Geraden von P nach den zwei konjugiert komplexen Schnittpunkten der Kreise l und l_1 . Dabei ist l_1 der Kreis über dem Durchmesser PF_1 . Verlangt man außer der Bedingung $\overline{Q_1 F_2} = \overline{Q_2 F_1}$ noch, daß die Punkte Q_1, Q_2 auf einem Kreis durch die Brennpunkte F_1, F_2 liegen, so geht der Gelenkpunktkogelschnitt in eine doppelt zählende Gerade über. Diese Gerade zählt dann vierfach (Vgl. § 8,2) und [11].

4. Fall b) $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ liegen auf einem Kreis k_0 .

Liegen die Punkte P und Q_μ ($\mu=1,2,3$) und die Brennpunkte F_1, F_2 auf einem Kreis, so gelten für die Größen α_μ und für q, p, q', p' die Beziehungen:

$$\alpha_\mu = \pm \frac{a'_\mu}{a_\mu} e^{i\varepsilon} \quad (\mu=1,2,3), \quad \frac{q'}{q} = \pm \frac{a'}{a} e^{i\varepsilon}, \quad \frac{p'}{p} = \pm \frac{a'}{a} e^{-i\varepsilon}$$

Hierbei ist ε der Peripheriewinkel über der Sehne F_1, F_2 des Bogens von k_0 , den man erhält, wenn man den Kreis k_0 von F_2 nach F_1 im positiven Sinn durchläuft. Er möge der obere Kreisbogen heißen. Es gilt dann in jeder der obigen Formeln das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem der zugehörige Punkt auf dem oberen Kreisbogen liegt oder nicht. Wir können nun die erste und zweite Spalte der Determinante (*) auf S.19 durch $e^{-i\varepsilon}$ bzw. $e^{i\varepsilon}$ dividieren und erhalten dann als Gleichung von (A):

$$\begin{vmatrix} \left(\pm \frac{a'_1}{a_1} [\lambda_1 - \sigma_1 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] \mp 2 \frac{a'_1}{a_1} p u \right) & \left(\pm \frac{a'_1}{a_1} [\lambda_1 + \sigma_1 \sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] \mp 2 \frac{a'_1}{a_1} q v \right) & b'_1 \\ \left(\pm \frac{a'_2}{a_2} [\lambda_2 - \sigma_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] \mp 2 \frac{a'_2}{a_2} p u \right) & \left(\pm \frac{a'_2}{a_2} [\lambda_2 + \sigma_2 \sqrt{\lambda_2^2 - \Delta_2}] \mp 2 \frac{a'_2}{a_2} q v \right) & b'_2 \\ \left(\pm \frac{a'_3}{a_3} [\lambda_3 - \sigma_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] \mp 2 \frac{a'_3}{a_3} p u \right) & \left(\pm \frac{a'_3}{a_3} [\lambda_3 + \sigma_3 \sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] \mp 2 \frac{a'_3}{a_3} q v \right) & b'_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_\mu = p u + q v + b_\mu, \quad \Delta_\mu = 4 a_\mu^2 u v, \quad \mu = 1, 2, 3$$

In unserem Sonderfall ist nun (A) symmetrisch zur Geraden PF_1 . Es sei $A(u, v)$ ein Punkt von (A). Führen wir die Spiegelung $u = \frac{q}{p} v^*, v = \frac{p}{q} u^*$ an der Geraden PF_1 durch, so geht die Kurve (A) zunächst in eine zur Geraden PF_1 symmetrische über; diese ist aber mit (A) identisch, denn vertauschen wir die erste und die zweite Spalte von (1), so unterscheidet sich die so erhaltene Determinante von der ursprünglichen nur durch Er-satz von u, v durch u^*, v^* und durch das entgegengesetzte Vorzeichen der Quadratwurzeln. Daraus sieht man, daß der Zweig (1 m n) in den Zweig (3-1 3-m 3-n) der transformierten Kurve übergeht. Dasselbe gilt für (B) bei Spiegelung an PF_2 . Es geht also bei der beschriebenen Transformation des Kurven-paares (A), (B) jede dieser Kurven in sich selbst über.

Durch die Punkte P, Q, F_1, F_2 ist nun eine Koppelkurvenmannig-faltigkeit $\mathcal{M}$ bestimmt. Greifen wir ein zusammengehöriges Punktepaar A, B der Gelenkpunktkurven (A), (B) heraus, so haben wir ein erzeugendes Getriebe $F, A B F_2 P$ mit dem Koppel-dreieck $A P B$ einer Koppelkurve (P) von $\mathcal{M}$. Spiegeln wir den Punkt A an der Geraden PF_1 , B an PF_2 , so erhalten wir, wie sich in unserem Sonderfall zeigen läßt, wieder ein zusammengehöriges Punktepaar A^*, B^* von (A), (B). Es geht also bei der obigen Transformation des Kurven-paares (A), (B) jedes Paar zusammengehöriger Koppelgelenk-punkte A, B in ein ebensolches Paar A^*, B^* über.

Daher stellt das Getriebe $F, A^* B^* F_2 P$ mit dem Koppel-dreieck $A^* P B^*$ ebenfalls ein erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve $(P)^*$ von $\mathcal{M}$ dar. Die beiden Getriebe $F, A B F_2 P$ und $F, A^* B^* F_2 P$ stimmen in allen Längen mit Ausnahme

simon
1881
1881

ihrer Koppeln überein. Bezeichnet man den Winkel $\angle APB$ des Koppeldreiecks mit γ , und den Winkel $\angle F_1 P F_2$ mit δ , so gilt für den Winkel γ^x des Koppeldreiecks $A^x P B^x$:

$$\gamma^x = 2\delta - \gamma$$

Die beiden Getriebe $F, A B F_2$ und $F, A^x B^x F_2$ sind also im allgemeinen verschieden. Daher sind es auch die von ihnen erzeugten Koppelkurven $(P), (P)^x$. $(P), (P)^x$ gehen aber beide durch die vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 , da sie beide zur Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gehören. Die Koppelkurve (P) hat als trizirkulare Kurve sechster Ordnung außer den vier Punkten P, Q_1, Q_2, Q_3 und den beiden absoluten Kreispunkten mit dem Kreis k_0 noch zwei weitere Punkte Q_4, Q_5 gemein. Ersetzen wir die Punkte Q_2, Q_3 durch Q_4, Q_5 , so ist eine weitere Koppelkurvenmannigfaltigkeit $\mathcal{M}'$ bestimmt, die ebenfalls die Kurve (P) enthält. Andererseits muß $\mathcal{M}'$ aber auch $(P)^x$ enthalten, da P, Q_1, Q_4, Q_5 auf k_0 liegen. Daher geht $(P)^x$ ebenfalls durch die sechs Punkte $P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$. Im Fall, daß der Punkt P ein Doppelpunkt der Kurve (P) ist, gilt

$$\delta = \gamma \quad \text{oder} \quad \delta = \gamma + \pi \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma^x$$

Dann stimmen beide Getriebe $F, A B F_2$ und $F, A^x B^x F_2$ in allen Stücken überein. Beide Koppeldreiecke sind kongruent. Die erzeugten Koppelkurven (P) und $(P)^x$ sind miteinander identisch [13].

Für das allgemeine Dreistabgetriebe können wir somit folgenden Satz formulieren:

Schneidet man die Koppelkurve (P) eines Dreistabgetriebes $F_1 A B F_2 P$ mit einem durch die zwei Brennpunkte F_1, F_2 gehenden Kreis k_0 und wählt man von den sechs Schnittpunkten von (P) mit k_0 einen beliebigen aus und bezeichnet ihn mit P, so geht die Koppelkurve $(P)^x$ des Getriebes $F_1 A^x B^x F_2 P$ nach obigem ebenfalls durch die sechs Schnittpunkte von (P) mit k_0 . A^x bzw. B^x erhält man dabei durch Spiegelung von A bzw. B an den Geraden $F_1 P$ bzw. $F_2 P$. In Abb. 8 sind zwei von den sechs Schnittpunkten von (P) und k_0 konjugiert komplex.

5. Fall c) $P = F_2$.

Wir lassen den Punkt P mit F_2 zusammenfallen. Dann ist $p' = q' = 0$. Die Determinante (*) auf S. 19 geht durch die Transformation $u = \frac{q}{p} v^x$, $v = \frac{p}{q} u^x$ in sich über. D.h., daß die Gelenkpunktkurve (A) zum Steg F_1, F_2 symmetrisch ist. Die Konstruktion der Kurven (A), (B) läßt sich dann vereinfachen. Nachdem man zunächst die konzentrischen Kreise K_1^{μ}, K_2^{μ} um den Mittelpunkt $P = F_2$ gezeichnet hat, legt man durch F_2 einen Kreis K_2' mit dem Mittelpunkt B' so, daß er mit jedem der Kreise K_2^{μ} reelle Schnittpunkte hat. (Abb. 9). Von den sechs möglichen Schnittpunkten wählen wir auf jedem Kreis K_2^{μ} je einen Punkt F_{21}^{μ} aus. Von F_{21}^{μ} tragen wir in bekannter Weise die Strecke $\overline{F_1 F_2} = \overline{F_2 P}$ nach den Kreisen K_1^{μ} ab und erhalten so die Punkte F_{11}^{μ} . Diese drei Punkte F_{11}^{μ} bestimmen einen Kreis K_{11} mit dem Mittelpunkt A' , der im allgemeinen nicht

durch F_1 geht. Wir können aber, sofern der Radius von K_{11} hinreichend groß ist, die Kreise K'_2 und K_{11} um den Punkt P als Zentrum drehen, bis K_{11} durch F_1 geht. Dabei beschreiben die Punkte A', B' Kreishögen um P . Wir bezeichnen die gedrehten Punkte mit A bzw. B , die zugehörigen Kreise mit K_1 bzw. K_2 . Die beiden Punkte A, B stellen ein zusammengehöriges Koppelgelenkpaar der beiden Kurven (A) , (B) dar. Es gibt, wenn man von einem Punkt B' ausgegangen ist, zwei mögliche Drehwinkel, die A und B in je ein zusammengehöriges Punktepaar A, B bzw. A^*, B^* überführen. Die Punkte A und A^* liegen symmetrisch zum Steg F_1, F_2 . Die zu A, B bzw. A^*, B^* gehörigen Getriebe F_1, F_2, ABP sowie F_1, F_2, A^*B^*P stellen zwei verschiedene Lagen ein- und desselben Getriebes dar. Der Punkt P muß daher ein Doppelpunkt der Koppelkurve sein, denn es gibt zu ihm zwei verschiedene Lagen des Koppeldreiecks. Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich, da ja der Punkt P , wenn er mit F_2 zusammenfällt, auf dem Brennpunktkreis liegt [1a, 1b]. Auf diesem Kreis können aber nur Doppelpunkte der Koppelkurve liegen. Die Auswahl der Punkte F_2'' ist maßgebend dafür, welchen Zweig von (B) man konstruiert. Die Grenzkurve c_B wird hier zu einem Kreis um P . Die Kurve (B) kann in unserem Sonderfall bis zu acht reelle Verzweigungspunkte auf c_B besitzen. Abb. 10 zeigt den Fall, daß F_1 mit P zusammenfällt. Die Konstruktion ist ganz analog zu der eben beschriebenen, die Kurven (A) und (B) vertauschen nur ihre Rollen.

Daher ist hier (B) zum Steg symmetrisch und c_A artet in einen Kreis um P aus.

6. Fall d) $Q_1 = Q_2 = D$, zwei von den gegebenen Punkten

sind in einen Doppelpunkt zusammengedrückt.

Um diesen Fall behandeln zu können, betrachten wir eine neue Mannigfaltigkeit $\mathcal{K}(2F, 3P)$, die aus den Koppelkurven besteht, die zwei feste Brennpunkte F_1, F_2 und drei feste Punkte P, Q_1, Q_2 im ganzen also sieben Stücke gemeinsam haben. In $\mathcal{K}$ gibt es also ∞^2 Koppelkurven. Dies drückt sich analytisch so aus, daß für $Q_2 = Q_1$ vier von den Determinanten G_{ijk} des § 4,2 identisch verschwinden. Es sind dies jene, die zu den Gleichungen der vier Zweige (1.1.2), (111), (221) und (222) gehören. Jeder Punkt der uv-Ebene kann nun Koppelgelenkpunkt A eines Getriebes $F_1 A B F_2$ mit dem Koppeldreieck A B P sein. Die Koordinaten u', v' von B ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem (II) von § 4,2, wenn man dort $Q_1 = Q_2$ macht und von den acht Möglichkeiten gerade die Fälle (111), (112), (221), (222) berücksichtigt. Die Gleichungen der vier anderen Zweige sind dagegen nicht identisch erfüllt. Sie werden dargestellt durch

$$G_{121} = 0, \quad G_{211} = 0, \quad G_{122} = 0, \quad G_{212} = 0$$

Da nun aber $G_{121} = -G_{211}$ und $G_{122} = -G_{212}$ ist, überdecken sich je zwei dieser Zweige.

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

... (faint text) ...

Deren Gleichungen sind:

$$\begin{vmatrix} (\bar{\alpha}_1, [\lambda_1, -\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u)(\alpha_1, [\lambda_1, +\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v) & b'_1 \\ (\bar{\alpha}_1, [\lambda_1, +\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u)(\alpha_1, [\lambda_1, -\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v) & b'_1 \\ (\bar{\alpha}_3, [\lambda_3, \mp\sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2p'u)(\alpha_3, [\lambda_3, \pm\sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2q'v) & b'_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_i = pu + qv + b_i, \quad \Delta_i = 4a_i^2 uv, \quad i = 1, 3$$

Hierbei gilt in der dritten Zeile der Determinante entweder das obere oder das untere Zeichen. Jede der beiden Determinanten zerfällt, wenn man sie ausrechnet und rational macht, in die folgenden beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} & (\lambda_3^2 - \Delta_3)(\bar{\alpha}_3, \alpha_3 - \alpha, \bar{\alpha}_3)^2 b'^2 \\ & - [\lambda_3 b'_1 (\bar{\alpha}_3, \alpha_3 + \bar{\alpha}_3, \alpha_1) - 2b'_3 \alpha, \bar{\alpha}_1, \lambda_1 + 2(b'_3 - b'_1)(\alpha, p'u + \bar{\alpha}_1, q'v)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (K_A)$$

und

$$\lambda_1^2 - \Delta_1 = 0 \quad (K'_A)$$

Jede dieser Gleichungen stellt einen Kegelschnitt dar. Für einen Punkt A(u, v) auf einem dieser Kegelschnitte verschwinden die Determinanten G_{121} und G_{122} . Daher hat dann das in u', v' lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & v(\bar{\alpha}_1, [\lambda_1, -\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u)u' + u(\alpha_1, [\lambda_1, +\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v)v' = b'_1 uv \\ & v(\bar{\alpha}_1, [\lambda_1, +\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2p'u)u' + u(\alpha_1, [\lambda_1, -\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1}] - 2q'v)v' = b'_1 uv \quad (II') \\ & v(\bar{\alpha}_3, [\lambda_3, \mp\sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2p'u)u' + u(\alpha_3, [\lambda_3, \pm\sqrt{\lambda_3^2 - \Delta_3}] - 2q'v)v' = b'_3 uv \end{aligned}$$

wesentliche Lösungen u', v' . Diese bestimmen den zu A
gehörigen Koppelgelenkpunkt B (u', v'). Nimmt man jetzt an,
daß A auf dem Kegelschnitt (κ_A) liegt, so ist, da beide
Kegelschnitte im allgemeinen verschieden sind, $\lambda_1^2 - \Delta_1 \neq 0$
Durch Subtraktion der beiden ersten Gleichungen erhalten
wir dann

$$v\bar{\alpha}_1, 2\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} u' = u\alpha_1, 2\sqrt{\lambda_1^2 - \Delta_1} v' = 0$$

Hieraus folgt, da wir uns im Falle $\lambda_1^2 - \Delta_1 \neq 0$ befinden

$$v\bar{\alpha}_1 u' - u\alpha_1 v' = 0 \quad (0)$$

Dies ist aber die im § 4,4 abgeleitete Bedingung für
einen Doppelpunkt. Mithin hat die vom Getriebe $F_1 A B F_2$
mit dem Koppeldreieck ABP erzeugte Koppelkurve (P) in
 $Q_1 = Q_2$ tatsächlich einen Doppelpunkt. Außerdem geht sie
noch einfach durch die Punkte P und Q_3 . Ist jetzt aber
 $\lambda_1^2 - \Delta_1 = 0$, so hat die Koppelkurve nicht notwendig einen
Doppelpunkt in Q_1 . Soll sie ihn aber auch in diesem Fall
haben, so muß zusätzlich noch die Bedingung (0) erfüllt
sein. In diesem Fall ist aber der Doppelpunkt insbesondere
eine Spitze. Im Fall $\lambda_1^2 - \Delta_1 = 0$ sind die ersten zwei Gleichungen
von (II') miteinander identisch. Nimmt man zu den nunmehr
nur noch zwei Gleichungen als dritte die Bedingung (0)
hinzu, so muß die Koeffizientendeterminante dieses Systems
verschwinden. Diese stimmt jedoch gerade mit Gleichung
(κ_A) überein. In jedem Fall ist der Kegelschnitt (κ_A) Ort
für die Koppelgelenkpunkte A einer jetzt ∞^1 -Mannigfaltig-
keit $\mathcal{M}_0$ von Koppelkurven, die in $\mathcal{K}$ enthalten ist.

Umgekehrt kann man zeigen, daß jede Koppelkurve von $\mathcal{K}$ die in Q_1 einen Doppelpunkt besitzt, in $\mathcal{M}_D$ enthalten ist. Daher besteht $\mathcal{M}_D$ aus genau den Koppelkurven von $\mathcal{K}$, die in $Q_1 = Q_2$ einen Doppelpunkt besitzen. Die zu den Punkten $A(u, v)$ des Kegelschnitts (κ_A) gehörigen Koppelgelenkpunkte $B(u', v')$ erfüllen einen zweiten Kegelschnitt (κ_B) mit der Gleichung

$$(\lambda_3'^2 - \Delta_3') \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_1 \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1 \bar{\alpha}_3} \right)^2 b_1'^2 - \left[\lambda_3' b_1' \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_1 \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_1 \bar{\alpha}_3} \right) - 2 b_3' \frac{1}{\alpha_1 \bar{\alpha}_1} \lambda_1' + 2(b_3' - b_1') \left(p \frac{u'}{\alpha_1} + q \frac{v'}{\bar{\alpha}_1} \right) \right]^2 = 0 (\kappa_B)$$

$$\lambda_\mu' = p'u' + q'v' + b_\mu'$$

$$\Delta_\mu' = 4 a_\mu'^2 u'v' \quad \mu = 1, 3$$

Es gilt dabei für die Ausdrücke der Koordinaten u', v' in den Koordinaten u, v :

$$u' = \frac{b_1' \alpha_1 u}{\alpha_1 \bar{\alpha}_1 \lambda_1 - (p' \alpha_1 u + q' \bar{\alpha}_1 v)}$$

$$v' = \frac{b_1' \bar{\alpha}_1 v}{\alpha_1 \bar{\alpha}_1 \lambda_1 - (p' \alpha_1 u + q' \bar{\alpha}_1 v)}$$

In dem weiteren Sonderfall, daß P und Q_3 auf dem Kreis durch D, E, F_2 liegen, haben die Koppelkurven von $\mathcal{M}_D$ auch noch den dritten Brennpunkt gemein und $\mathcal{M}_D$ wird ein Fokalbüschel von Koppelkurven. Die Kegelschnitte (κ_A) und (κ_B) werden dann doppelt zählende Gerade [3b]. Es läßt sich nun die Frage nach der Anzahl der Koppelkurven einer ∞^1 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ beantworten, die in einem der Punkte Q_μ , etwa in Q_1 , einen Doppelpunkt haben.

Wir betrachten dazu die zwei ∞^1 -Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_D^1$ und $\mathcal{M}_D^2$, die durch die Punkte $P, Q_1, Q_2, F_{1/2}$ und $P, Q_1, Q_3, F_{1/2}$ gegeben sind und deren Koppelkurven sämtlich in Q_1 einen Doppelpunkt besitzen. Die Gelenkpunktkogelschnitte seien k_{A1}, k_{B1} bzw. k_{A2}, k_{B2} . Dann sind die vier Schnittpunkte von k_{A1} und k_{A2} vier mögliche Koppelgelenkpunkte A, zu denen vier Gelenkpunkte gehören, die zu vier erzeugenden Getrieben F_1, A, B, F_2, P von vier Koppelkurven führen, die in $\mathcal{M}$ enthalten sind und in Q_1 einen Doppelpunkt besitzen.

7. Fall e) P, Q_1, Q_2, Q_3 liegen auf einem Kreis k_0 durch F_1, F_2 mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \overline{F_1 F_2}$ und symmetrisch zum Steg.

Wir wollen annehmen, daß P und Q_3 sowie Q_1 und Q_2 zum Steg F_1, F_2 symmetrisch sind. Außerdem sollen alle vier Punkte auf den Kreis k_0 mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \overline{F_1 F_2}$ durch F_1, F_2 liegen. Dann erhält man für die Größen $M, N_i, \lambda_i, \Delta_i$:

$$M = 8k^2(u+v)^2[(a(u+v)+b_1)^2 - 4a^2uv] \quad p=q=a$$

$$N_1 = \frac{8k^2}{a}(u+v)[a(u+v)+b_1] = N_2$$

$$N_3 = -8k^2(u+v)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a(u+v)+b_1 \quad \lambda_3 = a(u+v)$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 4a^2uv \quad \Delta_3 = 4a^2uv \quad k = 2b_1' \frac{a_1' a_2'}{a_1}$$

Setzt man dies in Gleichung (3) ein, so zerfällt dieselbe in die folgenden Bestandteile:

$$(u+v)^4 = 0$$

$$[(a(u+v)+b_1)^2 - 4a^2uv]^2 = 0$$

$$a(u+v)+b_1 = \pm a_1(u+v), \quad uv = 0$$

Ferner erhält man noch einen identisch verschwindenden Faktor. Diese Tatsache bedeutet, daß die Determinante (1) des § 5 für gewisse Vorzeichenkombinationen identisch verschwindet. Daher kann jeder Punkt A der uv-Ebene Koppelgelenkpunkt sein. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ artet hier zu einer ∞^2 -Mannigfaltigkeit von Koppelkurven aus. Geometrisch bedeutet das, daß die acht Bedingungen, die man durch Vorgabe der zwei Brennpunkte F_1, F_2 und der vier Punkten P, Q_1, Q_2, Q_3 gegeben hat, nicht mehr voneinander unabhängig sind, sodaß man also in Wahrheit weniger Bedingungen vorgegeben hat. Daher erhält man ∞^2 Koppelkurven. Wir wollen den Fall, daß die sechs Punkte $F_1, F_2, P, Q_1, Q_2, Q_3$ die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks bilden, genauer betrachten. In diesem Fall ist $a_1 = a\sqrt{3}$. Man erhält für (A) die folgenden Bestandteile:

$$(u + v)^4 = 0$$

$$[(u + v + 2a)^2 - 12uv]^2 = 0$$

$$u + v - a(1 + \sqrt{3}) = 0$$

$$u + v - a(1 - \sqrt{3}) = 0$$

$$uv = 0$$

Außerdem erhalten wir noch einen identisch verschwindenden Faktor. Wir haben also insgesamt eine ∞^2 -Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ von Koppelkurven. Diese besteht aus vier verschiedenen ∞^1 -Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), sowie einer ∞^2 -Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{M}}$. Die letztere besteht aus lauter zum Steg F_1, F_2 symmetrischen Koppelkurven. Die erzeugenden Getriebe sind daher solche, wo der die Koppelkurve beschreibende Punkt auf der Koppel liegt, (Abb. 77). Die Gerade

$u + v = 0$ führt zu Getrieben, wo $R_1 = R_2$ und wo das Koppeldreieck symmetrisch ist. Daher sind die erzeugten Koppelkurven symmetrisch zur Mittelsenkrechten von $F_1 F_2$ (Abb. 12). Diese Koppelkurven bilden die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_1$. Die Geraden $u + v - a(1 \pm \sqrt{3}) = 0$ bestimmen die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$. Die erzeugenden Getriebe sind sämtlich Kurbelschleifen. Die ∞^1 Koppelkurven, die durch den Kegelschnitt $(u + v + 2a)^2 - 12uv = 0$ bestimmten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_4$, sind bereits in der Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathcal{M}}$ enthalten. Die Koppeldreiecke der erzeugenden Getriebe aller Koppelkurven von $\mathcal{M}_4$ sind daher wieder in eine Strecke ausgeartet. Betrachtet man $\mathcal{M}_4$ als selbständige ∞^1 Mannigfaltigkeit, so ergibt sich als Besonderheit, daß jede Koppelkurve von $\mathcal{M}_4$ in Q_1 und Q_2 Punkte extremaler Entfernung vom Brennpunkt F_1 besitzt. Abbildung 11 zeigt ein Getriebe, das eine Koppelkurve von $\widetilde{\mathcal{M}}$ erzeugt. Auf Abbildung 12 ist je eine Koppelkurve von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zu sehen.

§ 7 Die Konstruktion des erzeugenden Getriebes einer
Koppelkurve durch fünf gegebene Punkte.

1. Allgemeiner Fall.

Wir können nun die eigentliche Aufgabe in Angriff nehmen, bei welcher fünf Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 und zwei Steggelenke F_1, F_2 des Dreistabgetriebes gegeben sind. Die gesuchte Koppelkurve ist dann in zwei Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ enthalten; in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_1(2F, 4P)$, die durch die vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 und die zwei Brennpunkte F_1, F_2 bestimmt ist, und in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_2(2F, 4P)$, die durch die Punkte P, Q_2, Q_3, Q_4 und F_1, F_2 gegeben ist. Wir nehmen an, daß $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ beides ∞^1 -Mannigfaltigkeiten sind, und daß ihre Gelenkpunktkurven $(A)_1, (A)_2$ keine gemeinsamen Bestandteile haben. Die acht Zweige der Gelenkpunktkurven $(A)_1, (B)_1$ von $\mathcal{M}_1$ sind dann:

(1110), (1120), (1210), (1220), (2110), (2120), (2210), (2220).

Hierin bedeutet die Null an der vierten Stelle, daß Q_4 kein Grundpunkt der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_1$ ist. Analog sind die acht Zweige der Gelenkpunktkurven $(A)_2, (B)_2$ von $\mathcal{M}_2$ gegeben durch:

(0111), (0112), (0121), (0122), (0211), (0212), (0221), (0222).

Bringen wir jetzt zwei in den beiden mittleren Stellen übereinstimmende Zweige von $(A)_1$ und $(A)_2$ miteinander zum Schnitt, so erhalten wir Schnittpunkte $A_\lambda (\lambda = 1, 2, \dots, m)$. Der dem Punkt A_λ entsprechende Schnittpunkt von $(B)_1$ und $(B)_2$ ist dann ganz von selbst der Gelenkpunkt B_λ (Abb. 13). Bei

der Bestimmung der Schnittpunkte A_λ kommen die folgenden 16 Möglichkeiten für Paare von Zweigen in Frage:

$(1\ 1\ 1\ 0) \times (0\ 1\ 1\ 1)$	$(1\ 2\ 1\ 0) \times (0\ 2\ 1\ 1)$
$(1\ 1\ 1\ 0) \times (0\ 1\ 1\ 2)$	$(1\ 2\ 1\ 0) \times (0\ 2\ 1\ 2)$
$(1\ 1\ 2\ 0) \times (0\ 1\ 2\ 1)$	$(1\ 2\ 2\ 0) \times (0\ 2\ 2\ 1)$
$(1\ 1\ 2\ 0) \times (0\ 1\ 2\ 2)$	$(1\ 2\ 2\ 0) \times (0\ 2\ 2\ 2)$
$(2\ 1\ 1\ 0) \times (0\ 1\ 1\ 1)$	$(2\ 2\ 1\ 0) \times (0\ 2\ 1\ 1)$
$(2\ 1\ 1\ 0) \times (0\ 1\ 1\ 2)$	$(2\ 2\ 1\ 0) \times (0\ 2\ 1\ 2)$
$(2\ 1\ 2\ 0) \times (0\ 1\ 2\ 1)$	$(2\ 2\ 2\ 0) \times (0\ 2\ 2\ 1)$
$(2\ 1\ 2\ 0) \times (0\ 1\ 2\ 2)$	$(2\ 2\ 2\ 0) \times (0\ 2\ 2\ 2)$

Reelle Schnittpunkte jedes dieser Paare sind Gelenkpunkte A_λ . Selbstverständlich sind die beiden Punkte A_λ und B_λ gleichwertig, und man kann die Konstruktion auch mit den Kurven $(B)_1, (B)_2$ durchführen. Dies ist von Bedeutung, wenn die Kurven $(A)_1, (A)_2$ einen gemeinsamen Bestandteil haben. In diesem Fall bringt man die dem gemeinsamen Bestandteil entsprechenden Zweige von $(B)_1$ und $(B)_2$ zum Schnitt und wählt die Schnittpunkte nach dem eben beschriebenen Verfahren aus.

2. Vereinfachung der Konstruktion.

Es ist nicht unbedingt nötig, die Gelenkpunktkurven zweier Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zu konstruieren, wenn man eine Koppelkurve durch fünf gegebene Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 mit den Brennpunkten F_1, F_2 sucht. Man kann auch wie folgt verfahren. Hat man die Gelenkpunktkurven $(A), (B)$ der durch die Punkte $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ bestimmten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gezeichnet, so kann man

mit einer Fehlerkurve die Koppelgelenke A, B eines Getriebes, dessen Koppelkurve durch die fünf gegebenen Punkte geht, finden (Abb. 14). Ist A_1 ein Punkt von (A) - in Abb. 14 wurde $i = 3$ gewählt - so zeichnet man den Kreis K_1 um A_1 durch F_1 . Er schneidet die Kreise K_1^{μ} in den Punkten F_1^{μ} ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Durch Abtragen der Strecke $\overline{F_1 F_2}$ finden wir auf den Kreisen K_1^{μ} die Punkte F_2^{μ} ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Durch die Punkte F_2^1, F_2^2, F_2^3 ist zunächst der Kreis K_2 mit dem Mittelpunkt B_1 auf der Kurve (B) bestimmt. Durch die Punkte F_2^1, F_2^4 und einen der Punkte F_2^{μ} , $\mu = 1, 2, 3$ (in Abb. 14 wurde $\mu = 3$ gewählt) ist ein Kreis K_2' bestimmt. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist B' . Der Ort von Punkten B' ist eine Fehlerkurve (B'), deren Schnittpunkte mit (B) der gesuchte Gelenkpunkt B ist. Der zugehörige Gelenkpunkt A ist der dem Punkt B von (B) entsprechende Punkt A auf (A).

II. Technische Anwendungen =====

§ 8 Geradföhrungen.

1. Fönfpunktige Geradföhrung.

Für technische Zwecke ist es oft erforderlich, einen Punkt durch einen Mechanismus auf einer geraden Linie zu föhren. So kann z.B. verlangt werden, daß der Schwerpunkt einer von einem Kran bewegten Last beim Ausschwenken auf einer horizontalen Geraden geföhrt werden soll. Da bei materieller Ausführung eines Getriebes Drehgelenke die am einfachsten und genauesten herzustellenden gelenkigen Verbindungen sind, sucht man insbesondere Gelenkmechanismen zu konstruieren, die einen Punkt gerade föhren. Angenähert kann man diese Aufgabe nach unserer Methode so lösen, daß man fünf Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 auf einer Geraden verteilt annimmt und ein Getriebe sucht, das eine Koppelkurve durch die fünf Punkte erzeugt (Abb. 15). Nach der in § 7 angegebenen Methode ist der Zweig (2220) der Gelenkpunktkurve (A), von $\mathcal{M}_1(P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2)$, ferner der Zweig (0222) der Gelenkpunktkurve (A)₂ von $\mathcal{M}_2(P, Q_2, Q_3, Q_4, F_1, F_2)$ konstruiert. Beide Zweige schneiden sich in Abb. 15 im Punkt A. Der zugehörige Koppelgelenkpunkt B läßt sich dann nach § 2,2 leicht bestimmen. F_1, F_2, A, B ist ein Gelenkviereck, dessen zu P gehörige Koppelkurve die Aufgabe sehr gut löst. Diese Lösung ist aber nicht die einzige, die nach unserer Methode gefunden werden kann. Andere Lösungen ergeben sich, wenn man erstens weitere Schnitt-

punkte der beiden gewählten Zweige^{benutzt} und zweitens andere Zweige zum Schnitt bringt. Außerdem erhält man nach dem Roberts'schen Satz für jedes der nach dem obigen Verfahren bestimmten Getriebe noch zwei weitere, die dieselbe Koppelkurve erzeugen, jedoch einen neuen Steg besitzen. Man erhält also eine hinreichende Auswahl von Möglichkeiten. Da man die Steggelenke F_1, F_2 des gesuchten Getriebes auch ganz beliebig wählen kann, stehen bei diesem Verfahren in der Tat neun Bestimmungsstücke für die gesuchte Koppelkurve zur Verfügung.

2. Vierpunktige Geradföhrung mit Tangente in einem der Punkte.

bei gegebenen Steggelenken.

Es werden jetzt außer den beiden Steggelenken F_1, F_2 des die Geradföhrung leistenden Getriebes noch vier in einer Geraden g liegende Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 der Koppelkurve k gegeben und es wird weiter verlangt, daß k die Gerade g in P berühre (Abb. 16). Die so bestimmte Koppelkurve k ist in der durch die Punkte $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ bestimmten Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ enthalten. Wir zeichnen die Gelenkpunktkurven (A), (B) dieser Mannigfaltigkeit. Da k die Gerade g in P beröhren soll, muß das Momentanzentrum C der Koppelene auf der Normalen n zu g durch P liegen, wenn der beschreibende Punkt in P liegt. Das Momentanzentrum C ergibt sich aber als Schnittpunkt der Geraden F_1A und F_2B . Föhren wir diese Konstruktion für eine Reihe von Punktepaaren A, B der Kurven (A), (B) durch, so erhalten wir einen Ort (C) für den Momentanpol C . Im Schnittpunkt von n und (C) erhalten

wir ein Momentanzentrum C_P (Abb. 16). Die beiden zugehörigen Koppelgelenkpunkte A_P, B_P erhält man als Schnittpunkte der Geraden $F_1 C_P, F_2 C_P$ mit den Kurven (A), (B). Die von dem Getriebe $F_1 A_P B_P F_2 P$ mit dem beschreibenden Punkt P erzeugte Koppelkurve gehört dann zu $\mathcal{M}$ und besitzt außerdem in P die Gerade g als Tangente. Gibt es mehrere Schnittpunkte C_P , so erhält man ebensoviel Koppelkurven. Besonders einfach wird die Konstruktion, wenn wir die Punkte Q_1 und Q_2 so wählen, daß $\overline{Q_1 F_2} = \overline{Q_2 F_2}$ ist und Q_1, Q_2, F_1, F_2 auf ein- und demselben Kreis liegen. Dann spaltet sich nach § 6,2 von der Kurve (A) eine vierfach zählende Gerade l_0 ab, die man leicht zeichnen kann. Zieht man den Strahl PF_1 und trägt auf ihm von P aus die Entfernung $x = \frac{a_1 a_2}{2a} + \frac{a}{2}$ ab, so erhält man einen Punkt L. Die zu PF_1 senkrechte Gerade durch L ist die Gerade l_0 . Da die Gerade l_0 eine vierfach zählende Gerade ist, gibt es zu jedem ihrer Punkte A vier zugehörige Punkte $B, \hat{B}, \tilde{B}, \bar{B}$. Man findet sie folgendermaßen: Man zeichnet um A einen Kreis K_1 durch F_1 . Dieser schneidet jeden Kreis K_μ ($\mu = 1, 2, 3$) zweimal. Die Schnittpunkte seien $F_1^\mu, \tilde{F}_1^\mu$. Von diesen Punkten aus trägt man die Strecke $\overline{F_1 F_2}$ in dem bekannten Sinn (§ 2,2) nach den Kreisen K_2^μ hin ab und erhält die Punkte $F_2^\mu, \tilde{F}_2^\mu$ ($\mu = 1, 2, 3$). Dabei fällt, wegen der besonderen Annahme der Punkte $Q_{1/2}, F_2^1$ mit F_2^2 und $\tilde{F}_2^1$ mit $\tilde{F}_2^2$ zusammen. Man hat also insgesamt die Punkte $F_2^1, \tilde{F}_2^1, F_2^2, \tilde{F}_2^2, F_2^3, \tilde{F}_2^3, F_2^4, \tilde{F}_2^4$. Durch die vier Punkttupel $F_2^1 F_2^2 F_2^3 F_2^4, \tilde{F}_2^1 \tilde{F}_2^2 \tilde{F}_2^3 \tilde{F}_2^4, F_2^1 \tilde{F}_2^3 F_2^2 \tilde{F}_2^4, \tilde{F}_2^1 \tilde{F}_2^4 F_2^2 \tilde{F}_2^3$ sind vier Kreise K_2 bestimmt. Die Mittelpunkte $\hat{B}, \tilde{B}, \bar{B}, \bar{B}$ sind die vier gesuchten Punkte. Durchläuft der Punkt A die Gerade l_0 , so durchlaufen die vier Punkte $\hat{B}, \tilde{B}, \bar{B}, \bar{B}$ vier der Geraden l_0 entsprechende Teile der Kurve (B). Zwei zusammengehörige Punkte A, B bestimmen einen Momentanpol C, der auf der Kurve (C) liegt (Abb. 17). Durch Schnitt

von (C) und n erhält man wie vorhin den Punkt C_P . Schneidet man die Gerade $F_1 C_P$ mit l_0 , so findet man den Koppelgelenk-
punkt A_P eines Getriebes, dessen Koppelkurve (P) durch P,
 Q_1, Q_2, Q_3 geht und in P die Gerade g berührt (Abb. 17).

3. Vierpunktige Geradföhrung mit einer zusätzlischen Bedingung. -----

Unsere Ergebnisse gestatten es eine vierpunktige Gerad-
föhrung mit gegebenen Steggelenken F_1, F_2 zu konstruieren, bei
der noch zusätzlische Bedingungen an das Getriebe gestellt
werden können. Als Beispiel dafür wollen wir ein Dreistab-
getriebe konstruieren, das eine Kamera so aufklappt, daß
während der Bewegung das Objektiv auf seiner Achse g geföhrt
wird. Der Steg F_1, F_2 des Getriebes sei mit dem Gehäuse, der
Boden mit einer Kurbel des Getriebes starr verbunden. Die
zusätzlische Bedingung besteht nun darin, daß der optische
Mittelpunkt des Objektivs die Strecke PQ_3 der Geraden g
durchlaufen soll, während die Kurbel eine Drehung um 90°
vollföhrt. Ferner soll das ganze Getriebe bei geschlossenem
Deckel sich im Innern des Gehäuses befinden.

Lösung: Sind die Punkte $P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2$ gemäß Abb. 18 an-
genommen, so zeichnen wir ein Stück der Gelenkpunktkurven
(A), (B) der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(P, Q_1, Q_2, Q_3, F_1, F_2)$. Die
Koppelkurven dieser Mannigfaltigkeit verlaufen im Bereich
der Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 angenähert geradlinig. Zu jeder dieser
Koppelkurven gibt es ein erzeugendes Getriebe mit dem Steg
 F_1, F_2 . Die Kurbel $F_1 A$ eines jeden Getriebes überstreicht,
während sich das Koppeldreieck von P über Q_1, Q_2 nach Q_3

bewegt, einen Winkel α_0 . Wir greifen nun dasjenige Getriebe heraus, bei dem der Winkel α_0 gerade 90° beträgt. Abb. 18 zeigt ein Getriebe, das die gestellten Bedingungen erfüllt.

§ 9 Anwendungen in der Kinogerätetechnik.

1. Koppelkurvengreifer.

In der Kinogerätetechnik hat man u.a. die Aufgabe zu lösen, ein Filmband schrittweise vorwärts zu bewegen, wobei zwischen zwei Schritten eine Rast liegen soll. Dies kann man durch einen Greifer erreichen, dessen Spitze eine geeignete Koppelkurve beschreibt. Auf einem bestimmten Teil dieser Koppelkurve greift die Spitze in das Filmband ein, schiebt es ein Stück vor, löst sich vom Film und kehrt auf dem restlichen Wegteil zum nächsten Eingriffspunkt zurück.

Der Weg der Greiferspitze, die Greiferbahn, setzt sich aus vier Teilen 1, 2, 3, 4 zusammen (Abb. 19). Dabei entspricht der Weg 1 dem Filmzug, der Weg 2 dem Abkuppeln der Greiferspitze S von dem Filmband, der Weg 3 dem Greiferrücklauf und der Weg 4 dem Einkuppelungsvorgang zwischen Greiferspitze und Schaltloch SL des Filmbandes. Die Greiferspitze muß soweit in das Filmband eintauchen, daß ein sicheres Aus- und Einkuppeln gewährleistet ist. Während des Filmzuges ist eine geringe Querbewegung der Greiferspitze erwünscht, da bei einer völligen Geradföhrung an der Greiferspitze durch das Schleifen des Filmbandes eine Rillenbildung auftreten könnte, die zu Bildstandsungenauigkeiten föhren würde. Bei einer

geringen Querbewegung der Greiferspitze verteilt sich das Schleifen auf eine größere Fläche und ist damit weniger schädlich [15, S. 84]. Die Greiferbahn soll als Koppelkurve einer Kurbelschwinge erzeugt werden, deren Kurbel gleichförmig rotiert. Während einer vollen Umdrehung der Antriebskurbel durchläuft die Greiferspitze einmal die ganze Koppelkurve. Das Verhältnis s der Zeit T_s , während der das Filmband bewegt wird, (Schaltzeit), zur Umlaufzeit T der Antriebskurbel heißt Schaltverhältnis.

$$s = \frac{T_s}{T}$$

Der Mindestwert s_{min} des Schaltverhältnisses (das schnellste Schalten) ist durch die höchstzulässige mechanische Beanspruchung des Filmbandes gegeben. Andererseits darf ein Höchstwert s_{max} des Schaltverhältnisses (zulässiges langsamstes Schalten) aus optisch-physiologischen Gründen nicht überschritten werden [15, S. 15, 71].

Wir wollen nun einen Koppelkurvengreifer mit einem gegebenen Schaltverhältnis s_0 konstruieren. Dazu nehmen wir von der die Greiferbahn bildenden Koppelkurve vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 und zwei Brennpunkte F_1, F_2 gemäß Abb. 20 an. Durch P, Q_1, F_1, F_2 ist eine Koppelkurvenmannigfaltigkeit $\mathcal{M} (2F, 4P)$ bestimmt. Für diese zeichnen wir zwei einander entsprechende Stücke der Gelenkpunktkurven (A), (B) so, daß sie zusammengehörige Koppelgelenkpaare A, B enthalten, die mit den Steggelenken $F_{7/2}$ Kurbelschwingen $F_1 A B F_2$ bilden. Unter diesen Kurbelschwingen sind diejenigen brauchbar, die Koppelkurven erzeugen, bei denen der den Brennpunkten F_1, F_2

abgewandte Teil der Koppelkurve, der zum Filmzug verwendet werden soll, schwächer gekrümmt ist als die den Brennpunkten zugekehrte Seite. Die Koppelkurven dieser Kurbelschwingen sind dann zu zeichnen und können als Bahnkurven für den Greifer verwendet werden. Die Schaltverhältnisse dieser Kurbelschwingen sind voneinander verschieden. Man wählt nun eine Kurbelschwinge so aus, daß ihr Schaltverhältnis gleich s_0 ist. In Abb. 20 ist diese Konstruktion für das Schaltverhältnis $s_0 = \frac{1}{3}$ durchgeführt.

2. Automatische Scharfeinstellung einer Tricktischkamera. -----

Bei der Herstellung von Zeichentrickfilmen müssen Zeichnungen mit einer Filmkamera aus verschiedenen Entfernungen aufgenommen werden. Dabei bedient man sich eines sogenannten Tricktisches, auf dem die aufzunehmenden Zeichnungen liegen. Die Kamera kann senkrecht zur Tischplatte bewegt werden. Bei jeder neuen Entfernung muß eine Scharfeinstellung der Kamera vorgenommen werden. Wir wollen nun ein Dreistabgetriebe konstruieren, das bei Auf- und Abbewegung der Kamera eine kontinuierliche Scharfeinstellung bewirkt.

Das Kameragehäuse und das mit ihm starr verbundene Objektiv werde senkrecht zur Tischebene geführt, so daß sich die optische Achse in sich selbst verschiebt. Nun soll aber die Kamera in jeder Lage scharf eingestellt sein, dh., das Bild auf der Mattscheibe soll ständig scharf sein. Es muß also stets die Gleichung $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ (4)

erfüllt sein. Hierin bedeutet:

g = Gegenstandsweite = Entfernung der Zeichenebene vom Objektiv

b = Bildweite = Abstand der Mattscheibe vom Objektiv

f = Brennweite des Objektivs

Bei Bewegung der Kamera ändert sich die Größe g laufend und man muß also, da f konstant bleibt, die Bildweite b so ändern, daß die Beziehung (4) erhalten bleibt. Damit sich b während der Bewegung der Kamera ändern kann, muß die Mattscheibe gegenüber dem Gehäuse in Richtung der optischen Achse verschiebbar sein. Wir bringen nun am Kameragehäuse an dem beliebig angenommenen Drehpunkt S einen einarmigen Hebel SD an. Dieser Hebel werde in D durch ein Drehgelenk mit der Koppel DG verbunden, die ihrerseits durch ein Drehgelenk in G an das Mattscheibensystem angeschlossen ist. Bei Drehung des Hebels SD wird die Mattscheibe gegen das Kameragehäuse verschoben. Die Gegenstandsweite soll in dem Intervall $1,5 f \leq g \leq 5f$ veränderlich sein. Dann variiert b gemäß Gleichung (4) zwischen $3f \geq b \geq \frac{5}{4} f$. Die linken Grenzen entsprechen dabei einer Vergrößerung auf das Doppelte, die rechten einer Verkleinerung auf ein Viertel. Damit die Scharfeinstellung gewahrt bleibt, muß der Punkt D des Hebels SD relativ zum Tischsystem eine ganz bestimmte Kurve (D) beschreiben, von der die fünf Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 konstruiert sind (Abb. 21). Wir müssen also den Punkt D auf der Kurve (D) führen. Dies können wir durch ein Dreistabgetriebe erreichen, dessen Steg mit dem Tisch fest verbunden ist und das eine Koppelkurve (P) erzeugt, die mit der Kurve (D) in dem benötigten Bereich gut übereinstimmt. Die Steggelenke F_1, F_2 sind am Tischsystem noch passend angenommen worden. Dann ist nach § 7,1 ein Dreistabgetriebe $F_1 A B F_2 P$ bestimmt, das die

verlangte Koppelkurve (P) erzeugt. Diese Konstruktion ist in Abb. 27 durchgeführt. Ein Modell zeigt praktisch die dauernde Scharfeinstellung.

1. V. 9
2. J. 70
3. J. 1
4. B. 1
5. B. 3

Literaturverzeichnis

1. W. Schmid

- a) Über die Erzeugung einer Koppelkurve aus neun Bestimmungstücken
Wissenschaftl. Zeitschrift der TH Dresden 2
(1952/53) Heft 3
- b) Konstruktion der Doppelpunkte einer Koppelkurve
Ber. Math. Tagung Berlin 1953

2. J. Volmer

Ein Beitrag zur Erzeugung von Koppelkurven
Wissenschaftl. Zeitschrift der TH Dresden 6
(1956/57) Heft 3

3. A. Haarbleicher

- a) Application des coordonnées isotropes à l'étude de la courbe des trois barres
J. éc. pol. 2, 31 (1933)
- b) Faisceaux linéaires de courbe des trois barres ayant mêmes points doubles.
J. éc. pol. (3) (1939) S. 1-31
- c) de l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées Paris Gauthier - Villars et (1^{re} 1931

4. E. Hackmüller

Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurven.
ZAMM 18, 252-254 (1938)

5. R. Bereis

Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen
Österreichisches Ingenieurarchiv Bd V
Heft 3 1951

6. R. Kraus

- a) Lagenreduktion als Hilfsmittel zur Synthese ebener Kurbeltriebe. Masch.-Bau Betrieb Bd.14(1935)S.637
- b) Zur Synthese des ebenen Gelenkvierecks Masch.-Bau Betrieb Bd.17(1938) S.149
- c) Gelenkviereck für vier Lagen eines Koppel- punkts und gegebene Steggelenke. Getriebelehre S.114

7. K. Hain

Lagenzuordnungen
Masch.-Bau Betrieb Bd.17 (1938) S.314

8. H. Alt

Über die Erzeugung gegebener ebener Kurven
mit Hilfe des Gelenkvierecks ZAMM Bd 3 (1923)

9. R. Beyer

- a) Zur Synthese ebener und räumlicher Kurbel- triebe VDJ-Forschungsheft 394 Januar, Febr. 1939
- b) Kinematische Getriebesynthese
Springer Verl./Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953

10. W. Lichtenheldt

Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung
der Abmessungen von Kurbelgetrieben
VDJ-Forschungsheft 408 Mai/Juni 1941

11. P. Lohse

Polortkurven als Hilfsmittel zur Konstruktion
von Gelenkgetrieben ZAMM (1958)

12. K. H. Ries

Über die kinematische Erzeugung der rationalen
Zirkularkurven 3. Ordnung und der rationalen
Bizirkularkurven 4. Ordnung
Diss. Bergakademie Freiberg 1952

13. W. Blaschke, H. R. Müller

Ebene Kinematik
R. Oldenbourg / München 1956

14. 1.

15. 1.

16. 7.

1. Die Bedeutung der ...
2. Die Bedeutung der ...
3. Die Bedeutung der ...
4. Die Bedeutung der ...
5. Die Bedeutung der ...
6. Die Bedeutung der ...
7. Die Bedeutung der ...
8. Die Bedeutung der ...
9. Die Bedeutung der ...
10. Die Bedeutung der ...
11. Die Bedeutung der ...
12. Die Bedeutung der ...
13. Die Bedeutung der ...
14. Die Bedeutung der ...
15. Die Bedeutung der ...
16. Die Bedeutung der ...
17. Die Bedeutung der ...
18. Die Bedeutung der ...
19. Die Bedeutung der ...
20. Die Bedeutung der ...

14. L. Burmester

Lehrbuch der Kinematik

Leipzig 1888

15. H. Weise

Kinogerätetechnik

Akademische Verlagsgesellschaft

Geest & Portig K.-G./Leipzig C 1 /1950

16. F. Ebner

Leitfaden der technisch wichtigen Kurven

Verzeichnis der Abbildungen

- Abb. 1 Dreistabgetriebe (Doppelschwinge)
- " 2 Lagebeziehung zwischen Gelenkpunkten
- " 3 Konstruktion eines erzeugenden Getriebes von $\mathcal{M}$
- " 4 Klasseneinteilung der Koppelgelenkpunkte A, B
- " 5 Koppelkurven einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$
- " 6 Koppelkurven, Gelenkpunktkurven und Grenzkurven von $\mathcal{M}$
- " 7 Konstruktion des Gelenkpunktegelschnitts im Fall
 $\overline{F_2 Q_1} = \overline{F_2 Q_2}$
- " 8 Spiegelung von A, B an den Geraden PF_1, PF_2
- " 9 Konstruktion von (A), (B) im Fall $P = F_2$
- " 10 Konstruktion von (A), (B) im Fall $P = F_1$
- " 11 Konstruktion eines erzeugenden Getriebes von $\tilde{\mathcal{M}}$
- " 12 Konstruktion je eines erzeugenden Getriebes von $\mathcal{M}_1$ u. $\mathcal{M}_2$
- " 13 Koppelkurve durch fünf gegebene Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4
bei gegebenen Steggelenken F_1, F_2
- " 14 Erzeugendes Getriebe einer Koppelkurve durch fünf
Punkte (vereinfachte Konstruktion)
- " 15 Geradführung durch fünf Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , bei
gegebenem Steg F_1, F_2
- " 16 Geradführung, vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 , Tangente g in P
und Steg F_1, F_2
- " 17 Geradführung, vier Punkte P, Q_1, Q_2, Q_3 , Tangente g in P
und Steg F_1, F_2 (Sonderfall $\overline{F_2 Q_1} = \overline{F_2 Q_2}$; Q_1, Q_2, F_1, F_2 auf K_0)
- " 18 Klappenmechanismus bei einer Kamera
- " 19 Greiferbahn
- " 20 Koppelkurvengreifer
- " 21 Automatische Scharfeinstellung einer Triektschkamera

1	Verzeichnis der ...
2	Verzeichnis der ...
3	Verzeichnis der ...
4	Verzeichnis der ...
5	Verzeichnis der ...
6	Verzeichnis der ...
7	Verzeichnis der ...
8	Verzeichnis der ...
9	Verzeichnis der ...
10	Verzeichnis der ...
11	Verzeichnis der ...
12	Verzeichnis der ...
13	Verzeichnis der ...
14	Verzeichnis der ...
15	Verzeichnis der ...
16	Verzeichnis der ...
17	Verzeichnis der ...
18	Verzeichnis der ...
19	Verzeichnis der ...
20	Verzeichnis der ...
21	Verzeichnis der ...
22	Verzeichnis der ...
23	Verzeichnis der ...
24	Verzeichnis der ...
25	Verzeichnis der ...
26	Verzeichnis der ...
27	Verzeichnis der ...
28	Verzeichnis der ...
29	Verzeichnis der ...
30	Verzeichnis der ...
31	Verzeichnis der ...
32	Verzeichnis der ...
33	Verzeichnis der ...
34	Verzeichnis der ...
35	Verzeichnis der ...
36	Verzeichnis der ...
37	Verzeichnis der ...
38	Verzeichnis der ...
39	Verzeichnis der ...
40	Verzeichnis der ...
41	Verzeichnis der ...
42	Verzeichnis der ...
43	Verzeichnis der ...
44	Verzeichnis der ...
45	Verzeichnis der ...
46	Verzeichnis der ...
47	Verzeichnis der ...
48	Verzeichnis der ...
49	Verzeichnis der ...
50	Verzeichnis der ...
51	Verzeichnis der ...
52	Verzeichnis der ...
53	Verzeichnis der ...
54	Verzeichnis der ...
55	Verzeichnis der ...
56	Verzeichnis der ...
57	Verzeichnis der ...
58	Verzeichnis der ...
59	Verzeichnis der ...
60	Verzeichnis der ...
61	Verzeichnis der ...
62	Verzeichnis der ...
63	Verzeichnis der ...
64	Verzeichnis der ...
65	Verzeichnis der ...
66	Verzeichnis der ...
67	Verzeichnis der ...
68	Verzeichnis der ...
69	Verzeichnis der ...
70	Verzeichnis der ...
71	Verzeichnis der ...
72	Verzeichnis der ...
73	Verzeichnis der ...
74	Verzeichnis der ...
75	Verzeichnis der ...
76	Verzeichnis der ...
77	Verzeichnis der ...
78	Verzeichnis der ...
79	Verzeichnis der ...
80	Verzeichnis der ...
81	Verzeichnis der ...
82	Verzeichnis der ...
83	Verzeichnis der ...
84	Verzeichnis der ...
85	Verzeichnis der ...
86	Verzeichnis der ...
87	Verzeichnis der ...
88	Verzeichnis der ...
89	Verzeichnis der ...
90	Verzeichnis der ...
91	Verzeichnis der ...
92	Verzeichnis der ...
93	Verzeichnis der ...
94	Verzeichnis der ...
95	Verzeichnis der ...
96	Verzeichnis der ...
97	Verzeichnis der ...
98	Verzeichnis der ...
99	Verzeichnis der ...
100	Verzeichnis der ...

Abb. 2

260A

Geometrische
Konstruktion

Bergakademie
- Bücherei -
Freiberg i. Sa.

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

Abb. 4

1892

Abb 7

1550

Abb. 10

01413

Abb 11

Abb. 12

Abb. 13

Bergakademie
- Bucherei -
Freiberg i. Sa.

Bergakademie
- Bucherei -
Freiberg i. Sa.

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

11 100

Abb. 15

Abb. 16

Abb. 17

1000 10

Abb. 19

$$s_0 = \frac{1}{3}$$

Bergakademie
- Bucherei -
Freiberg

Bergakademie
- Bucherei -
Freiberg i. Sa.

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG

61. 1375 a n b.

Anschaffung:

12.6.61

Erwerbungsart:

g

Preis in DM:

—

Zugangsbuch:

16.6.61

AK:

19.6.61 / 21.6.61

SK:

SWK:

28.6.61

Neuerw.-Verz.:

7.7.61

Buchbinderei:

Stempeln, Bekleben:

11.7.61

Schlußstelle:

Bemerkungen:

III/11/2 Kg/1435.60 9182 4

SLUB

Wir führen Wissen.

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK
FREIBERG