Dieses Buch ist zurückzugeben bis zum:

[illegible]

Best-Nr. 19 10 444 S Ag 140/V a 500 5 55 785

Über eine Verallgemeinerung der Minkowskischen
Distanzfunktion und ihre Anwendung in der Finsler-
schen Geometrie

H a b i l i t a t i o n s s c h r i f t

zur

Erlangung des wissenschaftlichen Grades eines

Dr. rer. nat. habil.

der

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

der

Technischen Hochschule Karl - Marx - Stadt

vorgelegt von

Dr. rer.nat. Wolfgang Schöne

Dekan: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Vocke

Referenten: Prof. Dr. rer.nat. habil. H. Jäckel
Prof. Dr. St. Golab
Prof. Dr. rer.nat. habil. S. Dümmel

Eingereicht: 14. 6. 1965

Tag des mündl. Abschlusses: 22. 11. 1965

Diss 2499

513.8

ZN3.1,

I n h a l t .
=====

	Seite
Vorwort	III
 <u>I. Theoretische Grundlagen</u>	
1. Richtungsbündel und Richtungsbündelfelder im E_n .	1
2. Betrachtung von Funktionen auf einem stetigen Richtungsbündelfeld	4
3. Definition der verallgemeinerten Abstandsfunktionen	6
4. Ableitung von Differentialgleichungen für die verallgemeinerte Abstandsfunktion	8
5. Eigenschaften der verallgemeinerten Abstandsfunktionen, die sich aus ihrer geometrischen Bedeutung ergeben	12
6. Unität und charakteristische Merkmale der verallgemeinerten Abstandsfunktion	17
7. Die verallgemeinerte Abstandsfunktion eines konvexen Körpers	21
 <u>II. Die Verwendung der Abstandsfunktionen in der Finsler'schen Geometrie</u>	
8. Die Konstruktion eines Linienelementes in einem speziellen Finsler'schen Raum	28
9. Die Extremalen des Finslerraumes $F^n_{\mathcal{K}}$.	30
10. Das absolute Extremum	39
11. Die Metrik des Finslerraumes $F^n_{\mathcal{K}}$.	42

	Seite
12. Der Tangentialraum und die Indikatrix	48
13. Die Winkelmessung	51
14. Bewegungen	53
15. Spezielle Finslerräume	56
16. Übertragung von Konstruktionen des euklidischen und des hyperbolischen Raumes auf den $\mathbb{R}_\delta^n$.	63

III. Die Abstandsfunktion in der Potentialtheorie

17. Die Berechnung von Volumenpotentialen	68
18. Bewegung von Teilchen in einem wider- stehenden Medium	72
19. Das Reibungsmoment bei einem Zapfenlager	74
20. Vergleich des Ergebnisses mit der Sommerfeld'schen Theorie	79

Literaturverzeichnis	84
----------------------	----

V o r w o r t

Als im Jahre 1952 meine Diplomarbeit über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten entstand, wurde mein Interesse auch auf die Berechnung des Newton'schen Potentials räumlicher Massenverteilungen gelenkt. Dabei stieß ich im Verlauf meiner Untersuchung auf die in der folgenden Arbeit behandelten Abstandsfunktionen. Diese Funktionen fesselten mich durch einige mir bemerkenswert erscheinende Eigenschaften, wie z.B. die im Abschnitt 5 behandelte Gleichung 5.7 und die Differentialgleichungen 4.13 und 4.14. Später entdeckte ich, als mir das Buch von T. Bonnesen und W. Fenchel "Theorie der konvexen Körper" in die Hände kam, daß diese Abstandsfunktion in sehr enger Beziehung zu der von Minkowski definierten Distanzfunktion und der Stützfunktion eines konvexen Körpers stehen (vgl. 7.9 und 7.16).

Mein damaliger, leider inzwischen verstorbener Lehrer, Herr Prof. W. Schmid, empfahl mir die Abstandsfunktionen mit der Finsler'schen Geometrie in Verbindung zu bringen. Diese Absicht konnte ich jedoch zunächst nicht verwirklichen, da ich durch meine Promotion anderweitig in Anspruch genommen wurde. Als ich aber im Sommer 1961 mit meiner Tätigkeit am Mathematischen Institut der heutigen TH Karl-Marx-Stadt begann, ermunterte mich Herr Prof. Dr. H. Jäckel, der von meinen Untersuchungen gesprächsweise erfahren hatte, sie wieder aufzunehmen. Er machte mich in diesem Zusammenhang auf Arbeiten von Herrn Prof. St. Golab [11] aufmerksam.

Ich möchte an dieser Stelle nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. Jäckel für seine Anregung und Unterstützung, die meine Arbeit wesentlich förderte, recht herzlich zu danken.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. St. Golab und Herrn Prof. Dr. Dümmel für ihre wertvollen kritischen Bemerkungen.

So gelang es mir schließlich, die gesuchte Verbindung zur Finsler'schen Geometrie herzustellen. Mit Hilfe der Abstandsfunktion kann ein Bogenelement für einen speziellen Finsler'schen Raum angegeben werden. Dieser Finslerraum besitzt als Extremalen euklidische Gerade und geht in das Klein'sche Modell des hyperbolischen bzw. elliptischen Raumes über, wenn man die verwendeten Abstandsfunktionen geeignet spezialisiert. Wie aus der Literatur zu entnehmen ist, hat sich O. Varga [23] mit einer Klasse von Finslerräumen beschäftigt, die die nichteuklidischen verallgemeinern. Leider war mir diese Arbeit wie auch eine andere von St. Golab [12] nicht zugänglich.

Im ersten Teil meiner Arbeit habe ich versucht, die von mir betrachteten Funktionen möglichst allgemein zu definieren und einige wesentliche Eigenschaften abzuleiten. Dabei wurde ich durch eine Vorlesung von Herrn Dr. Dümmel angeregt, den Konvergenzbegriff von Mengenfolgen bei gewissen Strahlenmannigfaltigkeiten, die ich stetige Richtungsbündelfelder genannt habe, zu benutzen. Im zweiten Teil der Arbeit werden die schon erwähnten speziellen Finslerräume betrachtet. Bei der Definition des Winkels habe ich die von Finsler angegebene Definition verwendet. Andere Winkeldefinitionen wie beispielsweise die von Landsberg (vgl. [9] S. 551) habe ich nicht untersucht. Im Fall von zwei Dimensionen sind die genannten Finslerräume auch schon von Hilbert behandelt worden. Ein Hinweis darauf findet sich in dem Buch Variationsrechnung von P. Funk auf Seite 51. Im dritten Teil meiner Arbeit habe ich gezeigt und mit einigen Beispielen belegt, wie man die Abstandsfunktionen auch in der Potentialtheorie verwenden kann.

I. Theoretische Grundlagen

=====

1. Richtungsbündel und Richtungsbündelfelder im E_n .

Wir betrachten den n -dimensionalen, euklidischen Raum E_n . Es sei in E_n ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem $O(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ gegeben. Ein reeller Punkt $X \in E_n$ habe bezogen auf dieses System die reellen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$. Wir legen um jeden Punkt $X \in E_n$ eine Einheitskugel. Sie hat die Gleichung $\sum_{k=1}^n (\xi_k - x_k)^2 = 1$. Durch einen beliebigen Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ der Kugeloberfläche und den Punkt X ist ein Einheitsvektor $\pi(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \dots, \xi_n - x_n)$ gegeben. Wir fassen nun die Menge M aller Vektoren $\tilde{\pi}$ ins Auge, die entsteht, wenn S die ganze Kugeloberfläche durchläuft und wenn man jeden Vektor π noch mit beliebigen positiven Zahlen multipliziert. Die so erhaltenen Vektoren $\tilde{\pi} = \lambda \pi$ mit $\lambda > 0$ und $|\pi| = 1$, $\tilde{\pi} \in M$ sollen Richtungsvektoren heißen. Die Menge M aller Vektoren heiße das volle Richtungsbündel des Punktes X . Offensichtlich ist die Menge M aller Richtungsvektoren für jeden Punkt $X \in E_n$ dieselbe. Der Nullvektor soll in dieser Menge nicht enthalten sein. Durchläuft der Punkt S nur einen zusammenhängenden Teilbereich F der Oberfläche der Einheitskugel um X , so bilden die Vektoren $\tilde{\pi} = \lambda \pi$ ($\lambda > 0$) eine Teilmenge $M_X \subset M$. Eine solche Teilmenge M_X heiße ein Richtungsbündel des Punktes X . Liegt der Punkt S auf dem Rand des Bereiches F der Oberfläche der Einheitskugel und ist π_0 sein zugehöriger Vektor, so heiße jeder Vektor $\tilde{\pi}_0 = \lambda \pi_0$ eine Randrichtung, andernfalls eine innere Richtung des Richtungsbündels M_X . Wir bezeichnen die Menge aller Randrichtungen von M_X mit R_X . Wir können jeden Vektor $\tilde{\pi} \in M$ auf eine orthogonale Basis $i_1, i_2, \dots, i_n$ beziehen.

$$\tilde{\pi} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \dots + u_n i_n$$

$$i_k \cdot i_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

Richtung und Richtungssinn des Einheitsvektors $\vec{e}_k$ und der Koordinatenachse $\vec{e}_k$ sollen für $k = 1, 2, 3, \dots, n$ übereinstimmen. Es sei jetzt ein abgeschlossenes, nicht notwendig beschränktes Teilgebiet T des E_n gegeben. Jedem Punkt $X \in T$ werde ein gewisses Richtungsbandel M_X zugeordnet. Wir wollen die Menge aller Punkte X des Teilgebietes T mit den zugehörigen Richtungsbandeln M_X ein Richtungsbandelfeld $R_T(M_X)$ nennen. Wird jedem Punkt $X \in T$ das volle Richtungsbandel zugeordnet, so wollen wir von einem vollen Richtungsbandelfeld $R_T(M)$ sprechen. Wir betrachten nun eine ε -Umgebung $U(X, \varepsilon)$ des Punktes $X \in T$, wenn in T ein Richtungsbandelfeld $R_T(M_X)$ definiert ist. Einen beliebigen Punkt $P \in U(X, \varepsilon)$ kann dann ein Richtungsbandel M_P zugeordnet werden. Lassen wir P alle Punkte der ε -Umgebung von $X \in T$ durchlaufen und bilden wir den Durchschnitt $M_X(\varepsilon)$ und die Vereinigung $M'_X(\varepsilon)$ der Richtungsbandel M_P aller Punkte $P \in U(X, \varepsilon)$, so gilt

$$M_X(\varepsilon) = \bigcap_{P \in U(X, \varepsilon)} M_P \subseteq M_X, \quad 1.1$$

$$M'_X(\varepsilon) = \bigcup_{P \in U(X, \varepsilon)} M_P \supseteq M_X. \quad 1.2$$

Hat ein Richtungsbandelfeld $R_T(M_X)$ die Eigenschaft, daß für jede monoton gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen ε_v , $v = 1, 2, 3, \dots$ die Bedingungen

$$\lim_v M_X(\varepsilon_v) = \bigcap_v M_X(\varepsilon_v) = M_X^\circ \quad 1.3$$

$$M_X - R_X \subseteq M_X^\circ \subseteq M_X$$

$$\lim_v M'_X(\varepsilon_v) = \bigcap_v M'_X(\varepsilon_v) = M_X \quad 1.4$$

erfüllt sind, so heiße das Richtungsbandelfeld im Punkt $X \in T$ stetig (Vgl. [13] S. 17-20). Gilt dies für alle Punkte $X \in T$, so wollen wir von einem stetigen Richtungsbandelfeld sprechen. Ist $X(\gamma) \in T$ und $\vec{n} \in M_X$, so wollen wir den Punkt X mit dem Richtungsvektor $\vec{n}$ als Stelle $(X, \vec{n})$ des Richtungsbandelfeldes

Die erste Aufgabe ist die Bestimmung der
Gesamtheit der in der Untersuchung
beteiligten Personen. Diese Aufgabe ist
von großer Wichtigkeit, da sie die Grundlage
für alle weiteren Untersuchungen bildet.
Die zweite Aufgabe ist die Bestimmung der
Art und Weise der Untersuchung.
Die dritte Aufgabe ist die Bestimmung der
Zeitdauer der Untersuchung.
Die vierte Aufgabe ist die Bestimmung der
Orte der Untersuchung.
Die fünfte Aufgabe ist die Bestimmung der
Mittel der Untersuchung.

Die sechste Aufgabe ist die Bestimmung der
Ergebnisse der Untersuchung.
Die siebte Aufgabe ist die Bestimmung der
Folgerungen aus den Ergebnissen.
Die achte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Vermeidung von Fehlern.
Die neunte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Verbesserung der Untersuchung.

Die zehnte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Sicherung der Untersuchung.
Die elfte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Dokumentation der Untersuchung.
Die zwölfte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Veröffentlichung der Untersuchung.

Die dreizehnte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Archivierung der Untersuchung.
Die vierzehnte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Aktualisierung der Untersuchung.
Die fünfzehnte Aufgabe ist die Bestimmung der
Maßnahmen zur Erneuerung der Untersuchung.

bezeichnen. Durch $(X, \vec{u})$ ist eindeutig eine gerichtete Strecke im E_n bestimmt, deren Punkte $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ durch die Gleichungen

$$\xi_k = x_k + \tau u_k, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad 1.5$$

gegeben sind. Der Richtungssinn ist im Sinne wachsender Werte von τ zu wählen.

Vom Punkt X eines stetigen Richtungsbündelfeldes gehe ein Strahl $s_{\vec{u}}$ aus, der mit dem Vektor $\vec{u} \in M_X$ Richtung und Richtungssinn gemeinsam hat. Allen Vektoren $\vec{u} \in M_X$ mit $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ($\lambda > 0$) entspricht ein und derselbe Strahl $s_{\vec{u}}$. Die Menge S_X aller Strahlen $s_{\vec{u}}$, die wir Strahlenbündel nennen wollen, erfüllt stetig einen gewissen Bereich des E_n und wird durch eine $(n-1)$ -dimensionale Kegelhyperfläche K_X mit der Spitze in X begrenzt. Diejenigen Strahlen $s_{\vec{u}}$, die auf K_X liegen, entsprechen den Randrichtungen $\vec{u} \in M_X$. Daher wollen wir den Kegel K_X als Randrichtungskegel bezeichnen. Im folgenden sind auch solche stetigen Richtungsbündelfelder für uns von Interesse, deren Randrichtungskegel eine gewisse Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ einhüllen. Dabei berühre jeder von X ausgehende Strahl $s_{\vec{u}}$ die Hyperfläche f in einem Punkt. Die Menge der Berührungspunkte bildet eine $(n-2)$ -dimensionale Hyperfläche, die in f enthalten ist. Die Hyperfläche f wollen wir als Hüllhyperfläche (Envelope) des stetigen Richtungsbündelfeldes bezeichnen. Besitzt die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ außerdem stetige, partielle Ableitungen erster Ordnung in allen Punkten X der Hüllhyperfläche, und ist für alle diese Punkte überdies

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \geq q > 0, \quad 1.6$$

so wollen wir das stetige Richtungsbündelfeld regulär nennen. Ein volles Richtungsbündelfeld soll dann regulär heißen, wenn die Menge aller Punkte X des Feldes einen konvexen Körper $\mathcal{Q}$ völlig ausfüllt, dessen Oberfläche nur reguläre Randpunkte enthält und durch eine Gleichung der Form $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ gegeben ist.

16

bestimmen (nach 12.1) die Elemente der Menge M in M so, dass M ein M -Modul ist.

Es gilt:

$$M = \{x \in M \mid x \cdot y = y \cdot x \text{ f\"ur alle } y \in M\}$$

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

$$M = \{x \in M \mid x \cdot y = y \cdot x \text{ f\"ur alle } y \in M\}$$

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Es gilt: M ist ein M -Modul, wenn M ein M -Modul ist.

Die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei einmal stetig differenzierbar und genüge der Bedingung 1.6. Die Oberfläche von $\tilde{K}$ bezeichnen wir als Grenzhypersfläche des regulären vollen Richtungsbündelfeldes $R_{\tilde{K}}(M)$.

2. Betrachtung von Funktionen auf einem stetigen Richtungsbündelfeld.

Definition 1: Eine Funktion $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ heiße auf einem Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ definiert, wenn jedem Punkt $X \in T$ und jedem Richtungsvektor $\tilde{u} \in M_X$ eindeutig ein Funktionswert $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ zugeordnet werden kann.

Definition 2: Eine auf dem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ definierte Funktion $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ heiße an der Stelle $(X, \tilde{u})$ stetig, wenn sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so finden läßt, daß für alle $X' (x'_1, \dots, x'_n) \in U(X, \delta)$, für die es Richtungen $\tilde{u}' \in M_{X'}$ gibt, die der Bedingung $|\tilde{u} - \tilde{u}'| < \delta$ genügen, die Ungleichung

$$|h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) - h(x'_1, \dots, x'_n, u'_1, \dots, u'_n)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Ist eine auf einem stetigen Richtungsbündelfeld definierte Funktion $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ im obigen Sinn stetig, so ist sie es auch im üblichen Sinne, wenn man sie als Funktion von $2n$ Variablen im E_{2n} auffasst und wenn $\tilde{u}$ eine innere Richtung $\in \mathcal{U}_X$ oder X ein innerer Punkt eines abgeschlossenen Gebietes $T \in E_n$ ist, in dem ein volles Richtungsbündelfeld $R_T(M)$ definiert ist. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $R_T(M_X)$ gibt es sicher eine Umgebung $U(X, \delta_1)$, sodaß für alle $X' \in U(X, \delta_1)$ das zugehörige Richtungsbündel $M_{X'}$ den Vektor $\tilde{u}$ als innere Richtung enthält. Wir können dann ein in jedem Richtungsbündel $M_{X'}$ enthaltenes Richtungsbündel M' auswählen, das $\tilde{u}$ enthält und dessen sämtliche Richtungen $\tilde{u}'$ der Bedingung $|\tilde{u} - \tilde{u}'| < \delta_2$ genügen. Indem wir jeden Punkt $X' \in U(X, \delta_1)$ mit jedem Vektor $\tilde{u}' \in M'$ kombinieren, erhalten wir eine Menge

von Paaren $(X', \tilde{u}')$. Dieser Menge entspricht im E_{2n} eine Menge U von Punkten $X^*(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n)$. U enthält mit dem Punkt $X^*(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n)$ eine volle Umgebung $U(X', \delta_0)$ des E_{2n} , wenn wir $\min(\delta_1, \delta_2) = \delta_0$ setzen. Ist daher die Funktion $h(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n)$ im obigen Sinn stetig, so wählen wir ε so klein, daß das zugehörige δ kleiner als δ_0 ausfällt. Die Menge aller Paare $(X', \tilde{u}')$ einschließlich des Paares $(X, \tilde{u})$ mit $X' \in U(X, \delta)$ und $|\tilde{u} - \tilde{u}'| < \delta$ ist dann der vollen Umgebung $U(X', \delta)$ des Punktes $X^*(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n) \in E_{2n}$ gleichwertig und daher gilt für jeden Punkt $X^* \in U(X', \delta)$ wegen der Voraussetzung

$$|h(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n) - h(x', \dots, x_n, u, \dots, u_n)| < \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, daß h im $2n$ -dimensionalen Sinn stetig ist. Ist $\tilde{u}$ jedoch eine Randrichtung, so gibt es möglicherweise auch für beliebig kleine Zahlen $\delta > 0$, immer Punkte $X' \in U(X, \delta)$, für die das zugehörige Richtungsbandel $M_{X'}$ die Richtung $\tilde{u}$ nicht enthält. Betrachten wir die Menge $\mathcal{R}$ aller Paare $(X', \tilde{u}')$ mit $X' \in U(X, \delta)$, $\tilde{u}' \in M_{X'}$ und $|\tilde{u} - \tilde{u}'| < \delta$, so entspricht diese Menge, wie klein auch δ gewählt wird, niemals einer vollen Umgebung $U(X', \delta)$ des Punktes $X^*(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n) \in E_{2n}$. Denn in der Umgebung $U(X', \delta)$ sind sicher alle Punkte $\bar{X}^*(x', \dots, x_n, u, \dots, u_n)$, für die $|\tilde{u} - \tilde{u}'| < \delta$ ist, enthalten. Diese Punkte entsprechen den Paaren $(\bar{X}', \tilde{u})$ mit $\bar{X}' \in U(X, \delta)$. Gilt nun $\tilde{u} \in M_{\bar{X}'}$, so gehört das Paar $(\bar{X}', \tilde{u})$ auch zur Menge $\mathcal{R}$ aller Paare $(X', \tilde{u}')$. Es gibt aber sicher Punkte $\bar{X}' \in U(X, \delta)$, für die $\tilde{u}$ nicht zu $M_{\bar{X}'}$ gehört. Dann gehört das Paar $(\bar{X}', \tilde{u})$ auch nicht zu $\mathcal{R}$, obwohl ihm ein Punkt $\bar{X}^* \in U(X', \delta)$ im E_{2n} entspricht. In diesem Fall kann die übliche Stetigkeitsdefinition nicht verwendet werden, weil die Funktion $h(x', \dots, x_n, u', \dots, u_n)$ nicht für alle Punkte $\bar{X}^* \in U(X', \delta)$ im E_{2n} erklärt ist. Daher muß die übliche Definition durch eine geeignete ersetzt werden. In ähnlicher Weise definieren wir die Differenzierbarkeit.

Definition 3: Die auf dem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ definierte Funktion $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ heißt an der Stelle $(X, \tilde{u})$ partiell nach x_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) differenzierbar, wenn für alle $X'_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in U(X, \delta)$ ($\delta > 0$ hinreichend klein), für die $\tilde{u} \in M_X$ gilt, der Grenzwert

$$\lim_{x'_k \rightarrow x_k} \frac{h(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) - h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)}{x'_k - x_k} = \frac{\partial h(\tilde{u})}{\partial x_k}$$

existiert.

Entsprechend setzen wir fest: Die auf dem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ definierte Funktion $h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ heißt an der Stelle $(X, \tilde{u})$ partiell nach u_k ($k = 1, 2, \dots, n$) differenzierbar, wenn für alle $\tilde{u}'_k(u_1, \dots, u_{k-1}, u'_k, u_{k+1}, \dots, u_n) \in M_X$ und $\tilde{u} \in M_X$ der Grenzwert

$$\lim_{u'_k \rightarrow u_k} \frac{h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_{k-1}, u'_k, u_{k+1}, \dots, u_n) - h(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)}{u'_k - u_k} = \frac{\partial h(\tilde{u})}{\partial u_k}$$

existiert.

Beide Definitionen stimmen mit der üblichen Definition (vgl. [18] S. 324) überein, wenn $\tilde{u}$ eine innere Richtung bzw. X ein innerer Punkt von T ist.

3. Definition der verallgemeinerten Abstandsfunktionen.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes abgeschlossenes Gebiet des E_n . In T sei ein stetiges Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ gegeben. Außerdem sei in E_n eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche mit der Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ gegeben, die in allen ihren Punkten stetige partielle Ableitungen nach $x_1, x_2, \dots, x_n$ bis mindestens zur k -ten Ordnung haben soll. In jedem Punkt von f gelte die Bedingung 1.6. Auf der Hyperfläche f sei eine reelle zusammenhängende Punktmenge B gegeben, die einen $(n-1)$ -dimensionalen Bereich der Hyperfläche stetig und lückenlos ausfüllt. B habe die folgenden Eigenschaften:

1. Jedem Punkt $X \in T$ kann eine Teilmenge $B_X \subseteq B$ so zugeordnet werden, daß jeder von X ausgehende zum Vektor $\tilde{u} \in M_X$ parallele Strahl $s_{\tilde{u}}$ die Hyperfläche f in genau einem reellen Punkt $S \in B_X$

trifft. Hat $\mathfrak{u}$ mit f noch andere gemeinsame Punkte, so sollen diese nicht zu B_X gehören.

2. Ein Vektor $\mathfrak{u}$ gehöre zu M_X , wenn er dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn hat wie ein von X ausgehender Strahl $\mathfrak{u}$, der f in einem beliebigen Punkt $S \in B_X$ trifft.

3. Ist $\{\mathfrak{u}_k\}$ eine Vektorfolge aus M_X , die gegen $\mathfrak{u} \in M_X$ konvergiert, und wird der zu B_X gehörige Schnittpunkt des von X ausgehenden Strahls $\mathfrak{u}_k$ mit der Hyperfläche f mit S_k bezeichnet, so konvergiere die Folge $\{S_k\}$ gegen einen Punkt $S \in B_X$. S sei der in B_X enthaltene Schnittpunkt des Strahls $\mathfrak{u}$ mit der Hyperfläche f .

4. Für eine beliebige Folge von Punkten $X_k \in T (k=1, 2, \dots)$, die gegen einen Punkt $X \in T$ konvergiert, konvergiere die Folge der Teilmengen B_{X_k} gegen B_X .

5. Es gelte $B = \sum_{X \in T} B_X$.

Läßt sich auf einer Hyperfläche f eine Punktmenge B angeben, so daß zwischen einem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ und der Hyperfläche f die in 1 - 5 genannten Beziehungen bestehen, so wollen wir $R_T(M_X)$ ein der Punktmenge B auf f zugeordnetes Richtungsbündelfeld nennen.

Ist die Funktion $\rho(\mathfrak{e}, \mathfrak{u})$ auf einem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ definiert, das der Punktmenge B auf der Hyperfläche f zugeordnet ist, so heiße $\rho(\mathfrak{e}, \mathfrak{u})$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion (Distanzfunktion) der Klasse $C^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) für die Punktmenge B der Hyperfläche f , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\rho(\mathfrak{e}, \mathfrak{u})$ erfüllt die Gleichung

$$f(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0$$

für alle X aus T und alle $\mathfrak{u} \in M_X$. Dabei ist für jedes $X \in T$ und $\mathfrak{u} \in M_X$ ρ so zu wählen, daß der Schnittpunkt $S \in B_X \subseteq B$ des von X ausgehenden Strahls $\mathfrak{u}$ mit der Hyperfläche f die Koordinaten $x_k = x_k + u_k \rho (k = 1, 2, \dots, n)$ erhält.

2. $\rho(\mathfrak{e}, \mathfrak{u})$ ist stetig und besitzt stetige partielle Ableitungen nach $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ bis zur k -ten Ordnung für alle Stellen $(X, \mathfrak{u})$ von $R_T(M_X)$.

3. $\rho(\mathfrak{e}, \mathfrak{u}) \geq 0$ für alle $X \in T$ und alle $\mathfrak{u} \in M_X$.

Ist das Richtungsbündelfeld regulär, so ist $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ die Gleichung der Hüll- bzw. Grenzhyperfläche.

Im Fall des vollen, regulären Richtungsfeldes $K_{\tilde{\alpha}}(M)$ besteht der Bereich B aus allen Punkten der Oberfläche des konvexen Körpers $\tilde{\alpha}$. Es kann für ein- und dieselbe Hyperfläche mehrere sich gegebenenfalls überdeckende Bereiche B und zugehörige Gebiete $T \in \mathbb{R}_n$ geben.

4. Ableitung von Differentialgleichungen für die verallgemeinerte Abstandsfunktion.

Ist $\rho(x, \tilde{\alpha})$ eine verallgemeinerte Abstandsfunktion bezügl. des stetigen Richtungsfeldes $K_T(M_T)$ und von der Klasse $C^{(k)}$ ($k \geq 1$) für einen Bereich B der Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, wobei die Ableitungen f_{x_k} gemäß Abschnitt 3 in den Punkten der Fläche f nicht alle gleichzeitig verschwinden dürfen, so gilt:

$$f(x_1 + u_1 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0 \quad 4.1$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach den $2n$ Variablen $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ und setzen wir $\xi_k = x_k + u_k \rho$, $f_k = \frac{\partial f}{\partial \xi_k}$, $\xi_k = \lambda_k + u_k \rho$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, so erhalten wir ein homogenes lineares Gleichungssystem von $2n$ Gleichungen für die n Größen f_k .

$$\sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_r} = 0 \quad r=1, 2, \dots, n \quad 4.2$$

$$\sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial \xi_k}{\partial u_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad 4.3$$

Dabei ist:

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x_r} = \delta_{kr} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_r} = \delta_{kr} + u_k \rho_{x_r} \quad 4.4$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i} = \delta_{ki} \rho + u_k \frac{\partial \rho}{\partial u_i} = \delta_{ki} \rho + u_k \rho_{u_i} \quad 4.5$$

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

Da dieses System von $2n$ Gleichungen für n Unbekannte f_k nichttriviale Lösungen haben soll, gilt für den Rang r seiner Koeffizientenmatrix

$$r < n .$$

4.6

Daher müssen alle n -reihigen Unterdeterminanten der Koeffizientenmatrix verschwinden. Betrachten wir zunächst die Determinante, die aus den ersten n Zeilen der Matrix gebildet werden kann. Sie lautet:

$$A_0^n = \begin{vmatrix} (1+u_1 p_{x_1}) & u_2 p_{x_1} & \dots & u_n p_{x_1} \\ u_1 p_{x_2} & (1+u_2 p_{x_2}) & \dots & u_n p_{x_2} \\ u_1 p_{x_3} & u_2 p_{x_3} & \dots & u_n p_{x_3} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_1 p_{x_n} & u_2 p_{x_n} & \dots & (1+u_n p_{x_n}) \end{vmatrix} .$$

4.7

Nach einigen elementaren Umformungen ergibt sich hieraus

$$A_0^n = 1 + \sum_{i=1}^n u_i p_{x_i} = 0 .$$

4.8

Wir betrachten nun die folgenden n -reihigen Unterdeterminanten A_k^n der Koeffizientenmatrix für $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Dabei entsteht A_k^n aus A_0^n dadurch, daß man die n -te Zeile von A_0^n durch die $(n+k)$ -te Zeile der Koeffizientenmatrix ersetzt. Wir erhalten somit

$$A_k^n = \begin{vmatrix} (1+u_1 \rho_{x_1}) & u_2 \rho_{x_1} & \dots & u_k \rho_{x_1} & \dots & u_n \rho_{x_1} \\ u_1 \rho_{x_2} & (1+u_2 \rho_{x_2}) & \dots & u_k \rho_{x_2} & \dots & u_n \rho_{x_2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ u_1 \rho_{x_k} & u_2 \rho_{x_k} & \dots & (1+u_k \rho_{x_k}) & \dots & u_n \rho_{x_k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ u_1 \rho_{x_{n-1}} & u_2 \rho_{x_{n-1}} & \dots & u_k \rho_{x_{n-1}} & \dots & u_n \rho_{x_{n-1}} \\ u_1 \rho_{u_k} & u_2 \rho_{u_k} & \dots & (1+u_k \rho_{u_k}) & \dots & u_n \rho_{u_k} \end{vmatrix} \quad 4.9$$

Daraus erhält man nach einiger Rechnung

$$A_k^n = u_n (\rho_{u_k} - \rho \rho_{x_k}) \quad k=1, 2, 3, \dots, (n-1). \quad 4.10$$

Da nun $A_k^n = 0$ sein muß für alle $X (x_1, x_2, \dots, x_n) \in T$ und alle $\tilde{u} (u_1, u_2, \dots, u_n) \in M_{\tilde{X}}$, kann $u_n \neq 0$ angenommen werden, und wir erhalten

$$\rho_{u_k} - \rho \rho_{x_k} = 0 \quad \text{für } k=1, 2, 3, \dots, (n-1). \quad 4.11$$

Für $k = n$ ergibt sich schließlich

$$A_n^n = \rho + \sum_{i=1}^n u_i \rho_{u_i} = 0. \quad 4.12$$

Da alle Determinanten A_k^n für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ verschwinden müssen, können wir zusammenfassend folgendes sagen.

Eine verallgemeinerte Abstandsfunktion der Klasse $C^{(k)}$ ($k \geq 1$) genügt den folgenden $(n+2)$ Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^n u_k \rho_{x_k} = -1, \quad \sum_{k=1}^n u_k \rho_{u_k} = -\rho \quad 4.13$$

$$\rho \rho_{x_i} = \rho_{u_i} \quad 4.14$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Diese Gleichungen sind nicht voneinander unabhängig. Aus $n+1$ dieser Gleichungen folgt jeweils die $(n+2)$ -te. Nunmehr haben wir noch zu zeigen, daß die anderen n -reihigen Unterdeterminanten der Matrix, die nicht unter der Menge $A_0^n, A_1^n, \dots, A_n^n$ enthalten sind, nichts Neues liefern, wenn man sie Null setzt. Sei A eine Unterdeterminante n -ter Ordnung der Koeffizientenmatrix des Systems 4.2, 4.3. Die ersten s Zeilen von A seien unter den ersten n Zeilen, die restlichen $n-s$ Zeilen unter den letzten n Zeilen der Koeffizientenmatrix enthalten. Dabei ist $1 \leq s \leq n-2$. Berücksichtigen wir die Gleichungen 4.14 und ersetzen in den letzten $n-s$ Zeilen von A die Größen ρ_{u_k} durch $\rho \rho_{x_k}$, so können wir aus jeder dieser Zeilen den Faktor ρ ausheben. Es sind dann zwei Fälle denkbar. Die umgeformte Determinante besitzt zwei oder mehrere gleiche Zeilen. Dann verschwindet A identisch. Die Gleichung $A=0$ sagt nicht mehr aus als $n-s$ von den n -Gleichungen 4.14. Im zweiten Fall besitzt die umgeformte Determinante keine gleichen Zeilen. Dann stimmt sie bis auf einen Faktor mit A_0^n überein, und es gilt

$$A = \rho^{n-s} A_0^n. \quad 4.15$$

In diesem Fall folgt aus $A_0^n = 0$ sofort $A = 0$. Wir gelangen somit in beiden Fällen zu ein- und demselben Ergebnis. Wenn die Differentialgleichungen 4.13 und 4.14 gelten, oder was dasselbe bedeutet, wenn die Determinanten $A_0^n, A_1^n, \dots, A_n^n$ verschwinden, dann verschwinden auch alle anderen n -reihigen Unterdeterminanten A der Koeffizientenmatrix, die nicht in der Menge $A_0^n, A_1^n, \dots, A_n^n$ enthalten sind. Die Unterdeterminanten A

liefern also Differentialgleichungen, auf die auch die Unterdeterminanten $A_0^n, A_1^n, \dots, A_n^n$ führen.

5. Eigenschaften der verallgemeinerten Abstandsfunktionen, die sich aus ihrer geometrischen Bedeutung ergeben.

Aus der Definition der Abstandsfunktion folgt für einen beliebigen Punkt $X \in T$ und einen beliebigen Vektor $\check{u} \in M_X$

$$f(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0$$

Durch diese Gleichung ist die Funktion $\rho = \rho(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ gegeben. Der Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B_X$ mit $\xi_k = x_k + u_k \rho$ ($k=1, 2, \dots, n$) ist ein gemeinsamer Punkt der Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ und des vom Punkt $X(x_1, \dots, x_n)$ parallel zum Richtungsvektor $\check{u}$ verlaufenden Strahls $s_{\check{u}}$. Für den Abstand $\overline{XS} = r$ erhält man

$$r^2 = \sum_{k=1}^n (\xi_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2 \rho^2 = \rho^2 \sum_{k=1}^n u_k^2 = \rho^2 |\check{u}|^2 \quad 5.1$$

Hieraus folgt für r

$$r = \rho(\mathcal{E}, \check{u}) |\check{u}| \quad 5.2$$

Offensichtlich ist r eine Funktion von $\mathcal{E}$ und $\check{u}$. Liegt X nicht auf der Hyperfläche f , so gibt es für alle $\check{u} \in M_X$ eine positive Zahl C mit

$$r(\mathcal{E}, \check{u}) > C. \quad 5.3$$

Für alle $\check{u} \in M_X$ mit $|\check{u}| < \varepsilon$ ist daher $\rho(\mathcal{E}, \check{u}) > \frac{C}{\varepsilon}$. Die Funktion ρ ist für $|\check{u}| < \varepsilon$ nicht beschränkt. Bezeichnen wir den Ortsvektor $\overrightarrow{XS}$ mit κ , so ist

$$\kappa = \rho(\mathcal{E}, \check{u}) \check{u}. \quad 5.4$$

Ersetzt man in 5.2 $\tilde{u}$ durch $\lambda\tilde{u}$ ($\lambda > 0$), so ist mit $\tilde{u} \in M_X$ auch $\lambda\tilde{u} \in M_X$ und daher ist $\rho(\xi, \tilde{u})$ in $(X, \lambda\tilde{u})$ definiert. Somit erhalten wir

$$r(\xi, \tilde{u}) = \rho(\xi, \tilde{u})/|\tilde{u}| = r(\xi, \lambda\tilde{u}) = \rho(\xi, \lambda\tilde{u})/|\lambda\tilde{u}|. \quad 5.5$$

Da $\lambda > 0$ ist, folgt hieraus

$$\rho(\xi, \lambda\tilde{u}) = \frac{1}{\lambda} \rho(\xi, \tilde{u}) \quad \lambda > 0. \quad 5.6$$

Ebenso leitet man für eine beliebige reelle Zahl a und für beliebige Punkte $X \in T$ mit $\tilde{u} \in M_X$ die Beziehung $r(\xi, \tilde{u}) - r(\xi + a\tilde{u}, \tilde{u}) = a/|\tilde{u}|$ ab, und daraus folgt

$$\rho(\xi, \tilde{u}) - \rho(\xi + a\tilde{u}, \tilde{u}) = a. \quad 5.7$$

Die Gleichung $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n, \tilde{u}) = C$ stellt für konstantes $\tilde{u} \neq 0$ und $C > 0$ bezgl. der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Gleichung einer zur Hyperfläche $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ kongruanten Hyperfläche f_{1C} dar, die aus der ursprünglichen Hyperfläche f durch Translation um den Vektor $-C\tilde{u}$ hervorgeht.

Bew. Für den Punkt $S(\xi_1, \dots, \xi_n)$ der Hyperfläche f gilt einerseits $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$. Andererseits ist aber $\xi_k = x_k + u_k \rho$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Da $\rho = C$ und u_k ebenfalls konstant ist, haben wir somit für $k = 1, 2, \dots, n$

$$x_k = \xi_k - u_k C.$$

Der Punkt X geht aus S durch Translation um den Vektor $-C\tilde{u}$ hervor. Da S ein beliebiger Punkt der Hyperfläche f sein soll, ist X ein Punkt der zur Hyperfläche f um den Vektor $-C\tilde{u}$ parallel verschobenen Hyperfläche f_{1C} . Demnach stellt der Vektor

$$u_1 [\rho_{x_1}(\xi, \tilde{u}), \dots, \rho_{x_n}(\xi, \tilde{u})] = \nabla_1 \rho(\xi, \tilde{u}) = u_1(\xi, \tilde{u}) \quad 5.8$$

für $X \in T$ und $\tilde{u} \in M_X$ einen Normalenvektor der parallelverschobenen Hyperfläche f_{1C} im Punkt $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dar. Er ist aber außerdem ein Normalenvektor der ursprünglichen Hyperfläche f

12

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) partiell ableitbar, wenn die partiellen Ableitungen $f'_x(x_0,y_0)$ und $f'_y(x_0,y_0)$ existieren.

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) total ableitbar, wenn die totale Ableitung $df(x_0,y_0)$ existiert.

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) differenzierbar, wenn die totale Ableitung $df(x_0,y_0)$ existiert und die partiellen Ableitungen $f'_x(x_0,y_0)$ und $f'_y(x_0,y_0)$ existieren.

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) zweimal differenzierbar, wenn die zweiten partiellen Ableitungen $f''_{xx}(x_0,y_0)$, $f''_{xy}(x_0,y_0)$ und $f''_{yy}(x_0,y_0)$ existieren.

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) dreimal differenzierbar, wenn die dritten partiellen Ableitungen $f'''_{xxx}(x_0,y_0)$, $f'''_{xxy}(x_0,y_0)$, $f'''_{xyx}(x_0,y_0)$, $f'''_{yyy}(x_0,y_0)$ existieren.

Die Funktion $f(x,y)$ ist in (x_0,y_0) viermal differenzierbar, wenn die vierten partiellen Ableitungen $f^{(4)}_{xxxx}(x_0,y_0)$, $f^{(4)}_{xxxy}(x_0,y_0)$, $f^{(4)}_{xxyx}(x_0,y_0)$, $f^{(4)}_{xyxy}(x_0,y_0)$, $f^{(4)}_{yyxx}(x_0,y_0)$ existieren.

im Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k = x_k + u_k C = x_k + u_k \rho(\xi, \tilde{u})$. Ebenso zeigt man, daß die Gleichung $\rho(\xi, u_1, u_2, \dots, u_n) = C$ ($C > 0$) für festes $\xi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und konstantes C bezügl. der Variablen $u_1, u_2, \dots, u_n$ die Gleichung einer zur Hyperfläche $f = 0$ ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperfläche f_{2C} darstellt. Bezieht man die u_k auf ein zum System $O(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ kongruentes Koordinatensystem $O'(u_1, u_2, \dots, u_n)$, dessen Ursprung O' mit X zusammenfällt, und bei dem die u_k -Achse parallel zur ξ_k -Achse für alle $k=1, 2, \dots, n$ verläuft, so geht f_{2C} aus f durch eine Streckung im Verhältnis $1 : C$ bezügl. des Ähnlichkeitszentrums O' hervor.

Bew. Nach 5.4 ist $\kappa(\xi, \tilde{u}) = \rho(\xi, \tilde{u})\tilde{u}$. Ist $\kappa(\xi, \tilde{u}) = \tilde{u}$, so ist $\rho(\xi, \tilde{u}) = 1$. Damit stellt $\rho(\xi, \tilde{u}) = 1$ für festes ξ und variables $\tilde{u}$ die Gleichung der Hyperfläche f im Koordinatensystem $O'(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dar. Ist $\tilde{u}_0$ ein Vektor, der die Gleichung $\rho(\xi, \tilde{u}_0) = 1$ erfüllt, so gilt für den Vektor $\tilde{u} = \frac{1}{C}\tilde{u}_0$ $C > 0$

$$\rho(\xi, \tilde{u}) = \rho(\xi, \frac{1}{C}\tilde{u}_0) = \rho(\xi, \tilde{u}_0)C = C. \quad 5.9$$

Durchläuft $\tilde{u}_0$ die Menge aller Vektoren, für die $\rho(\xi, \tilde{u}_0) = 1$ ist, so erfüllt die Menge aller Vektoren $\tilde{u} = \frac{1}{C}\tilde{u}_0$ mit $C > 0$ die Gleichung $\rho(\xi, \tilde{u}) = C$. Denkt man sich die Vektoren $\tilde{u}$ vom Punkt $X = O$ aus als gerichtete Strecken aufgetragen, so erfüllen ihre Endpunkte eine zu der von den Vektoren $\tilde{u}_0$ erzeugten Hyperfläche f bezügl. X ähnliche und ähnlich gelegene Hyperfläche f_{2C} . Hieraus folgt, daß der Vektor

$$u_2 \left[\rho_{u_1}(\xi, \tilde{u}), \rho_{u_2}(\xi, \tilde{u}), \dots, \rho_{u_n}(\xi, \tilde{u}) \right] = \nabla_{\tilde{u}} \rho(\xi, \tilde{u}) = u_2(\xi, \tilde{u}) \quad 5.10$$

für $X \in T$ und $\tilde{u} \in M_X$ einen Normalenvektor der Hyperfläche f im Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k = x_k + u_k C = x_k + u_k \rho(\xi, \tilde{u})$ und $k = 1, 2, \dots, n$ darstellt. Zwischen u_1 und u_2 gilt wegen 4.14 die Beziehung

$$u_2(\xi, \tilde{u}) = \rho(\xi, \tilde{u}) u_1(\xi, \tilde{u}) \quad 5.11$$

Ebenso ergibt sich wegen 4.13

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = |\vec{n}| |\vec{n}_1| \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) = \sum_{k=1}^n u_k \rho_{x_k} = -1 < 0. \quad 5.12$$

Der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{n}_1$ ist also immer größer als $\frac{\pi}{2}$. Weiter erhalten wir

$$|\vec{n}_1| = \frac{-1}{|\vec{n}| \cos(\vec{n}, \vec{n}_1)} = \frac{1}{|\vec{n}| \cos(\vec{n}, -\vec{n}_1)} \quad 5.13$$

Damit ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion für $|\vec{n}_1|$ im Fall $n=2$ (Bild 1).

Für den Betrag von $\vec{n}_1$ gilt:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \rho_{x_k}^2}. \quad 5.14$$

Ist $\rho(\mathcal{C}, \vec{n})$ eine auf dem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_X)$ gegebene Abstandsfunktion für den Bereich B der Hyperfläche $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, so kann $\rho(\mathcal{C}, \vec{n})$ nur in den Punkten $X \in T$, die zugleich zum Bereich B der Hyper-

Abb.1

fläche f gehören, verschwinden.

Beweis: Es sei $X \in T$ ein Punkt und $\vec{n} \in M_X$ eine Richtung, für die $\rho(\mathcal{C}, \vec{n}) = 0$ gilt. Da ρ für alle $X \in T$ und alle $\vec{n} \in M_X$ der Gleichung $f(x_1 + u_1 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0$ genügt, folgt hieraus $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Der Punkt X ist demnach ein Punkt der Hyperfläche f . Außerdem gilt $X \in B$. Nach Definition gehört der Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k = x_k + u_k \rho(\mathcal{C}, \vec{n})$ zu B . Da $\rho(\mathcal{C}, \vec{n}) = 0$ ist, folgt daraus $\xi_k = x_k$ für $k = 1, 2, \dots, n$ und damit $X = S \in B$.

Die in der Vorlesung, die am 1. April 1900 stattfand, wurde über die Eigenschaften der verschiedenen Arten von Eisen und Stahl berichtet.

Die Eigenschaften der verschiedenen Arten von Eisen und Stahl

Die Eigenschaften der verschiedenen Arten von Eisen und Stahl sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Die Eigenschaften der verschiedenen Arten von Eisen und Stahl sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Die Eigenschaften der verschiedenen Arten von Eisen und Stahl sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Es sei $\rho(\xi, \tilde{u})$ eine auf dem stetigen Richtungsbündelfeld $R_T(M_T)$ definierte stetige Abstandsfunktion für einen Bereich B der Hyperfläche f . In T sei eine gegen den Punkt $X \in T$ konvergierende Folge von Punkten $X_k \in T$ ($k=1, 2, \dots$) gegeben. X gehöre auch zu B . In jedem Punkt X_k existiere ein Richtungsvektor $\tilde{u}_k \in M_{X_k}$ mit $|\tilde{u}_k| > u_0$. Die Folge $\{\tilde{u}_k\}$ konvergiere gegen einen Vektor $\tilde{u} \in M_X$. Setzen wir voraus, daß die Folge der Punkte $S_k \in B$, deren Ortsvektoren durch $\delta_k = \xi_k + \rho(\xi_k, \tilde{u}_k) \tilde{u}_k$ gegeben sind, gegen X konvergiert, so folgt wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \xi, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k = \tilde{u} \quad \text{aus}$$

$$\delta_k = \xi_k + \rho(\xi_k, \tilde{u}_k) \tilde{u}_k,$$

da ρ stetig ist, $\rho(\xi, \tilde{u}) = 0$.

Ist die Hyperfläche $f = 0$ speziell eine Hyperebene mit der Gleichung

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k + a_0 = 0, \quad 5.15$$

so bezeichnen wir die Menge aller Punkte $X(x_1, \dots, x_n)$, für die $\sum_{k=1}^n a_k x_k + a > 0$ ist, als positiven Halbraum T^+ und die Menge aller Punkte $X(x_1, \dots, x_n)$, für die $\sum_{k=1}^n a_k x_k + a < 0$ gilt, als negativen Halbraum T^- . Ferner sei $\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n)$ der Stellungsvektor der Hyperebene. Jedem Punkt $X \in T^+$ wird ein Richtungsbündel M_X zugeordnet, das aus allen Vektoren $\tilde{u}$ besteht, die der Bedingung

$$\tilde{u} \cdot \alpha \leq 0 \quad 5.16$$

genügen. Dadurch ist in T^+ ein stetiges Richtungsbündelfeld $R_{T^+}(M_X)$ definiert. Entsprechend können wir in T^- ein stetiges Richtungsbündelfeld $R_{T^-}(M_X)$ definieren, wenn wir jeden Punkt $X \in T^-$ ein Richtungsbündel M_X zuordnen, das alle die Vektoren $\tilde{u}$ enthält, welche die Bedingung

$$\tilde{u} \cdot \alpha \geq 0 \quad 5.17$$

erfüllen.

Für beide Halbräume erhalten wir dann ein- und dieselbe Abstandsfunktion, wenn wir als Bereich B die Menge aller Punkte auf der Hyperebene wählen.

$$\rho(x, \tilde{n}) = - \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n} = - \frac{a_0 + a_1 \cdot x}{a \cdot \tilde{n}} \quad 5.18$$

Sie verschwindet für alle Punkte X der Hyperebene und alle Richtungen $\tilde{n}$, die der Bedingung $\tilde{n} \cdot a \neq 0$ genügen.

6. Unität und charakteristische Merkmale der verallgemeinerten Abstandsfunktion.

I. Ist $R_T(M_X)$ ein stetiges, reguläres Richtungsbündelfeld im Bereich $T \in E_n$ und ist $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ eine Hyperfläche, die die im Abschnitt 3 genannten Eigenschaften hat, ist ferner $B = \sum_{X \in T} B_X$ ein Bereich der Hyperfläche f mit der Eigenschaft, daß jeder von einem beliebigen Punkt $X \in T$ ausgehende Strahl $s_{\tilde{n}}$ die Hyperfläche f in genau einem Punkt $S \in B$ trifft, so gibt es höchstens eine verallgemeinerte Abstandsfunktion für den Bereich B der Hyperfläche f, die auf $R_T(M_X)$ definiert ist. Bew. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Abstandsfunktionen $\rho(x, \tilde{n}), \rho^*(x, \tilde{n})$. Dann bilden wir die Differenz

$$\Delta(x, \tilde{n}) = \rho(x, \tilde{n}) - \rho^*(x, \tilde{n}) \quad 6.1$$

$\rho(x, \tilde{n})$ und $\rho^*(x, \tilde{n})$ genügen beide für alle $(X, \tilde{n})$ aus $R_T(M_X)$ der Gleichung 5.7. Daher gilt

$$\Delta(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) = \rho(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) - \rho^*(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) = \rho(x, \tilde{n}) - a - \rho^*(x, \tilde{n}) + a \quad 6.2$$

$$\Delta(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) = \Delta(x, \tilde{n})$$

Längs des von X ausgehenden Strahls $s_{\tilde{n}}$ ist für alle Punkte von $s_{\tilde{n}}$ mit den Ortsvektoren $y = x + a\tilde{n}$ ($a > 0$) $\Delta(y, \tilde{n})$ konstant. Wählen wir a so groß, daß der Punkt $Y(x + a\tilde{n})$ auf B liegt, so wird $\rho(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) = \rho^*(x + a\tilde{n}, \tilde{n}) = 0$.

Somit gilt für alle Punkte $Y \in s_{\tilde{u}} \Delta(\tilde{y}, \tilde{u}) = \Delta(\tilde{e}, \tilde{u}) = 0$,
Da dies für alle Punkte $X \in T$ und alle $\tilde{u} \in M_{\tilde{X}}$ ebenso gezeigt
werden kann, folgt daraus, $\Delta(\tilde{e}, \tilde{u}) = \rho(\tilde{e}, \tilde{u}) - \rho^*(\tilde{e}, \tilde{u}) = 0$
für alle $X \in T$ und alle $\tilde{u} \in M_{\tilde{X}}$. Also stimmt im Gegensatz zu
unserer Annahme $\rho(\tilde{e}, \tilde{u})$ mit $\rho^*(\tilde{e}, \tilde{u})$ auf $R_T(M_{\tilde{X}})$ überein.

II. Ist $\rho(\tilde{e}, \tilde{u})$ eine auf dem regulären, vollen Richtungsbündelfeld
 $R_{\tilde{K}}(M)$ mit der Grenzhyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ definierte
stetige Funktion und genügt $\rho(\tilde{e}, \tilde{u})$ den folgenden drei Bedin-
gungen:

1. $\rho(\tilde{e}, \tilde{u}) > 0$ für alle inneren Punkte X des konvexen Körpers
 $\tilde{K}$, dessen Oberfläche die Grenzhyperfläche f ist.
2. $\rho(\tilde{e}, \tilde{u}) = 0$ für alle Punkte X der Hyperfläche f und alle $\tilde{u} \in M$
mit $\tilde{u} \cdot n_X \geq 0$. n_X = Außennormale in X .
3. $\rho(\tilde{e}, \tilde{u}) - \rho(\tilde{e} + a\tilde{u}, \tilde{u}) = a$ für alle $X, Y \in \tilde{K}$, dann ist $\rho(\tilde{e}, \tilde{u})$
die verallgemeinerte Abstandsfunktion für die Hyper-
fläche $f = 0$.

Wie im Abschnitt 7 noch gezeigt wird, existiert für den kon-
vexen Körper $\tilde{K}$, der nur reguläre Randpunkte hat, die verall-
gemeinerte Abstandsfunktion bezgl. des Bereiches B der aus
allen Punkten der Oberfläche von $\tilde{K}$ besteht. Wir bezeichnen
die Abstandsfunktion mit $\rho_0(\tilde{e}, \tilde{u})$. Wir bilden die Differenz

$$\Delta(\tilde{e}, \tilde{u}) = \rho(\tilde{e}, \tilde{u}) - \rho_0(\tilde{e}, \tilde{u}) \quad . \quad 6.4$$

Da ρ_0 und ρ beide der Bedingung 5.7 genügen, gilt

$$\Delta(\tilde{e} + a\tilde{u}, \tilde{u}) = \Delta(\tilde{e}, \tilde{u}) \quad 6.5$$

für alle inneren Punkte $X \in \tilde{K}$. Wenn a so gewählt wird, daß
 $Y(\tilde{e} + a\tilde{u})$ auf den Rand f von $\tilde{K}$ fällt, dann gilt
 $\rho(\tilde{e} + a\tilde{u}, \tilde{u}) = \rho_0(\tilde{e} + a\tilde{u}, \tilde{u}) = 0$. Daraus folgt

$$\Delta(\tilde{e}, \tilde{u}) = \Delta(\tilde{e} + a\tilde{u}, \tilde{u}) = 0 \quad . \quad 6.6$$

Daraus ergibt sich schließlich die Behauptung

$$\rho(\varphi, \tilde{u}) = \rho_0(\varphi, \tilde{u}) \quad 6.7$$

III. Eine Funktion $\rho(\varphi, \tilde{u})$, die auf dem stetigen Richtungs-bündel-feld $R_T(M_X)$ definiert ist, die in allen Punkten $X \in T$ einer Hyperfläche $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ verschwindet, sonst überall positiv ist, stetige partielle Ableitungen bis mindestens zur ersten Ordnung nach $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ hat und den Differentialgleichungen 4.13, 4.14 genügt, ist eine verallgemeinerte Abstandsfunktion für den zu T gehörenden Bereich B der Hyperfläche f .

Beweis: Ist $X \in T$ und $\tilde{u} \in M_X$, so ist $\rho(\varphi, \tilde{u})$ an jeder Stelle $(X, \tilde{u})$ von $R_T(M_X)$ differenzierbar und genügt nach Voraussetzungen den Differentialgleichungen 4.14.

$$\rho \rho_{x_k} = \rho_{u_k} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad 6.8$$

Diese Gleichungen können wir linearisieren, indem wir eine Funktion $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \rho)$ einführen, sodaß sich aus $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \rho) = 0$ eine Gleichung für $\rho(\varphi, \tilde{u})$ ergibt. Die Differentialgleichungen 4.14 gehen dann über in

$$\rho F_{x_k} = F_{u_k} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad 6.9$$

Aus ihnen folgt, daß F eine Funktion der Form $F(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho, \rho)$ ist. Die Differentialgleichung $\sum_{k=1}^n u_k F_{x_k} + 1 = 0$, der ρ ebenfalls genügen muß, geht bei Einführung von F über in

$$\sum_{k=1}^n u_k F_{x_k} - F_\rho = 0 \quad 6.10$$

Da F Gleichung 6.10 erfüllen muß, folgt für $\xi_k = x_k + u_k \rho$ und $k = 1, 2, \dots, n$, $\xi_{n+1} = \rho$ und $F = F(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$ wegen $F_\rho = \sum_{k=1}^n F_{\xi_k} u_k + F_{\xi_{n+1}}$, wenn man F in Gleichung 6.10 einsetzt unter Beachtung von $F_{x_k} = F_{\xi_k}$

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

... und ...

$$\sum_{k=1}^n u_k F_{\frac{\partial F}{\partial x_k}} - \sum_{k=1}^n F_{\frac{\partial F}{\partial x_k}} u_k - F_{n+1} = 0 \quad . \quad 6.11$$

Daher gilt

$$F_{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}} = 0 \quad . \quad 6.12$$

und die Funktion F hat die Form $F = F(x_1 + u_1 \rho, \dots, x_n + u_n \rho)$.
 $\rho(\varphi, \check{u})$ genügt daher einer Gleichung der Gestalt

$$F(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0. \quad 6.13$$

Die Gleichung 6.13 gilt für jeden Punkt $X \in T$ und für jede Richtung $\check{u} \in M_X$. Wählt man den Punkt X auf dem Bereich $B \subset T$ der Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, so gibt es Richtungen $\check{u} \in M_X$, für die nach Voraussetzung $\rho(\varphi, \check{u}) = 0$ ist.

Aus $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ folgt somit für $X \in B$ wegen 6.13
 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Das bedeutet, daß jeder Punkt X des Bereichs B der Hyperfläche f auch zugleich Punkt der Hyperfläche $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ist. Erfüllen umgekehrt die Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ von $X \in T$ die Gleichung $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, so hat die Gleichung 6.13 für gewisse $\check{u} \in M_X$ die Lösung $\rho = 0$. Da aber ρ nach Voraussetzung nur in den Punkten von f verschwinden kann, heißt das, daß X auch auf f liegt. Daher sind die in T liegenden Punkte der Hyperflächen f und F miteinander identisch, und wir können wegen der Unität der Abstandsfunktion für alle $X \in T$ $F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ setzen. Die Funktion $\rho(\varphi, \check{u})$ genügt daher der Gleichung

$$f(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0 \quad 6.14$$

für alle Punkte $X \in T$ und alle Richtungen $\check{u} \in M_X$. Das heißt aber nichts anderes, als daß die auf $R_T(M_X)$ definierte Funktion $\rho(\varphi, \check{u})$ verallgemeinerte Abstandsfunktion für den in T liegenden Bereich B der Hyperfläche f ist.

7. Die verallgemeinerte Abstandsfunktion eines konvexen Körpers.

Es sei im E_n ein konvexer Körper $\mathcal{K}$ gegeben, der von einer $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ begrenzt wird. Die Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei stetig und besitze in allen Punkten der Hyperfläche stetige partielle Ableitungen nach $x_1, \dots, x_n$, die der Bedingung 1.6 genügen. Zu $\mathcal{K}$ gehören dann außer inneren Punkten nur reguläre Randpunkte. Auch soll jede Stützhyperebene mit $\mathcal{K}$ nur einen einzigen Randpunkt gemeinsam haben. Sei $X(x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein Randpunkt von $\mathcal{K}$, dann ist durch die Gleichung

$$f(x_1 + u_1 \rho, x_2 + u_2 \rho, \dots, x_n + u_n \rho) = 0$$

die verallgemeinerte Abstandsfunktion $\rho(\xi, \vec{u})$ des konvexen Körpers gegeben. Dabei ist $\rho(\xi, \vec{u})$ auf dem regulären vollen Richtungsbündelfeld $R_{\mathcal{K}}(M)$ definiert. $R_{\mathcal{K}}(M)$ entsteht dadurch, daß jedem Punkt $X \in \mathcal{K}$ das volle Richtungsbündel M zugeordnet wird. Die Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ stellt die Grenzhyperebene von $R_{\mathcal{K}}(M)$ dar. Bezeichnen wir die Menge aller Randpunkte S von $\mathcal{K}$ mit B , so ist $R_{\mathcal{K}}(M)$ ein der Punktmenge B der Oberfläche F von $\mathcal{K}$ zugeordnetes Richtungsbündelfeld (vgl. Definition 5.7). Für $X \in \mathcal{K}$ fällt dann die Teilmenge B_X mit B zusammen. Aus 5.2 ergibt sich $\overline{XS} = \rho(\xi, \vec{u}) |\vec{u}| = r(\xi, \vec{u})$. Somit gilt für jeden inneren Punkt $X \in \mathcal{K}$, wenn man ihn als fest betrachtet:

$$\rho(\xi, \vec{u}) = \frac{r(\xi, \vec{u})}{|\vec{u}|} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - x_k)^2}{\sum_{k=1}^n u_k^2}} = \frac{1}{F_X(\vec{u})} \quad 7.1$$

$F_X(\vec{u})$ ist die von Minkowski eingeführte Distanzfunktion des konvexen Körpers $\mathcal{K}$ (vgl. [5], [14]). Sie ist für alle inneren Punkte $X \in \mathcal{K}$ unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{K}$ nur reguläre Randpunkte besitzt, bezügl. $\vec{u}$ stetig und hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $u_1, u_2, \dots, u_n$ (vgl. [5]). Bei Minkowski ist die Funktion $F_X(\vec{u})$ nur eine Funktion von $u_1, \dots, u_n$. Die Abhängig-

keit dieser Funktion von der Wahl des Koordinatenursprungs $X=O'$ geht nicht explizit in die Funktion ein. Durch den Index X soll angedeutet werden, daß $F_X(\tilde{u})$ auf ein Koordinatensystem $O'(u_1, u_2, \dots, u_n)$ mit dem Ursprung $O' = X$ bezogen ist.

$F_X(\tilde{u})$ hat folgende charakteristische Eigenschaften.

1. $F_X(\tilde{u}) \geq 0$ Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $|\tilde{u}| = 0$ ist.

2. $F_X(\lambda \tilde{u}) = \lambda F_X(\tilde{u})$ für alle $\tilde{u} \in M$ und $\lambda > 0$.

3. $F_X(\tilde{u} + \tilde{v}) \leq F_X(\tilde{u}) + F_X(\tilde{v})$ für $\tilde{u}, \tilde{v} \in M, X(\xi) \in \tilde{K}$.

$F_X(\tilde{u}) \leq 1$ wird von allen Punkten $U(u_1, u_2, \dots, u_n)$ des konvexen Körpers erfüllt. Besitzt eine Funktion $G(\tilde{u})$ $\tilde{u} \in M$ die drei genannten Eigenschaften, so bilden die Punkte $U(u_1, u_2, \dots, u_n)$, die der Bedingung $G(\tilde{u}) \leq 1$ genügen, einen konvexen Körper mit dem Ursprung O' des $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ -Koordinatensystems als inneren Punkt (vgl. [5] Seite 22). Demnach gilt auch für $\rho(\xi, \tilde{u})$

1. $\frac{1}{\rho(\xi, \tilde{u})} \geq 0$ für alle inneren Punkte $X \in \tilde{K}$ und alle $\tilde{u} \in M$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $|\tilde{u}| = 0$.

2. $\frac{1}{\rho(\xi, \lambda \tilde{u})} = \frac{\lambda}{\rho(\xi, \tilde{u})}$ für $X \in \tilde{K}, \tilde{u} \in M$ und $\lambda > 0$. 7.2

3. $\frac{1}{\rho(\xi, \tilde{u} + \tilde{v})} \leq \frac{1}{\rho(\xi, \tilde{u})} + \frac{1}{\rho(\xi, \tilde{v})}$ für alle $X(\xi) \in \tilde{K}$ und $\tilde{u}, \tilde{v} \in M$.

Die ersten beiden Bedingungen folgen bereits aus dem Abschnitt 4 und 5. Die letzte Bedingung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen ρ und F_X . Die Funktion $\rho(\xi, \tilde{u})$ stellt einmal dadurch, daß ihre Abhängigkeit von $X(\xi)$ ausführlich begründet wird, eine Verallgemeinerung der Minkowski'schen Distanzfunktion dar. Zum anderen ist sie im Gegensatz zur Minkowski'schen Distanzfunktion nicht nur für geschlossene konvexe Flächen, sondern auch für andere Flächen erklärt (vgl. Abschn. 3). Das rechtfertigt die verwendete Bezeichnung verallgemeinerte Abstandsfunktion. Genau genommen müßte $\rho(\xi, \tilde{u})$ eigentlich "verallgemeinerte, reziproke Abstandsfunktion" heißen. Der Kürze halber soll in dieser Arbeit nur die Bezeichnung verallgemeinerte

Abstandsfunktion verwendet werden. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Abstandsfunktion keine verallgemeinerte Funktion im Sinne der Theorie der Distributionen von L. Schwarz ist. (vgl. [40]).

Die Funktion $-\rho(x, \tilde{u})$ ist für alle Punkte $x \in K$ bezüglich $\tilde{u}$ eine konvexe Funktion. Eine solche erfüllt bekanntlich für irgend 2 Punkte x, y ihres Definitionsbereiches die Ungleichung

$$h([1 - \lambda]x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)h(x) + \lambda h(y) \quad 7.3$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Da K ein konvexer Körper ist, gilt für alle Punkte x, y für $r(x, \tilde{u}) = \rho(x, \tilde{u})/|\tilde{u}|$ die Bedingung

$$r([1 - \lambda]x + \lambda y, \tilde{u}) \geq (1 - \lambda)r(x, \tilde{u}) + \lambda r(y, \tilde{u}) \quad 7.4$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Die Ungleichung 7.4 sagt aus, daß die Verbindungsstrecke irgend zweier Randpunkte des konvexen Körpers im Innern des Körpers liegt. Dividieren wir diese Ungleichung durch $|\tilde{u}|$, so erhalten wir

$$\rho([1 - \lambda]x + \lambda y, \tilde{u}) \geq (1 - \lambda)\rho(x, \tilde{u}) + \lambda \rho(y, \tilde{u}) \quad 7.5$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

oder schließlich

$$-\rho([1 - \lambda]x + \lambda y, \tilde{u}) \leq (1 - \lambda)[- \rho(x, \tilde{u})] + \lambda[- \rho(y, \tilde{u})] \quad 7.6$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

Die Funktion $-\rho(x, \tilde{u})$ ist also eine konvexe Funktion.

Weil $-\rho(\varepsilon, \tilde{u})$ eine konvexe Funktion bezgl. ε ist, besitzt sie eine sogenannte Richtungsderivierte (vgl. [5] S.19,20). Diese Richtungsderivierte ist, wenn wir $-\rho(\varepsilon, \tilde{u}) = \rho^*(\varepsilon, \tilde{u})$ setzen, gegeben durch

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\rho^*(\varepsilon + h\eta, \tilde{u}) - \rho^*(\varepsilon, \tilde{u})}{h} = \rho^{*'}(\varepsilon; \eta, \tilde{u}) \quad 7.7$$

Dieser Grenzwert existiert für alle $X(\varepsilon) \in \mathcal{K}$, $X'(\varepsilon + \eta) \in \mathcal{K}$ und $\tilde{u} \in M$. Wählen wir für η einmal den Einheitsvektor $\hat{e}_k$ und einmal $-\hat{e}_k$, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\rho^*(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n, \tilde{u}) - \rho^*(x_1, \dots, x_n, \tilde{u})}{h} = g_1 \quad 7.8$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\rho^*(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - h, x_{k+1}, \dots, x_n, \tilde{u}) - \rho^*(x_1, \dots, x_n, \tilde{u})}{h} = g_2 =$$

$$= - \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\rho^*(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n, \tilde{u}) - \rho^*(x_1, \dots, x_n, \tilde{u})}{h} \quad 7.9$$

Nehmen wir an, daß der konvexe Körper $\mathcal{K}$ durch eine Oberfläche mit stetiger Normale begrenzt wird, so wird durch eine den Punkt X enthaltende Ebene parallel zu den Vektoren $\tilde{u}$ und $\hat{e}_k$ aus $\mathcal{K}$ eine stetige und stetig differenzierbare ebene Kurve ausgeschnitten. Führen wir in dieser Ebene ein Parallel-Koordinatensystem $\bar{O}(\xi, \eta)$ ein, dessen ξ -Achse parallel zu $\hat{e}_k$ durch den Punkt X verläuft und dessen η -Achse parallel zu $\tilde{u}$ liegt, und durch den Schnittpunkt der ξ -Achse mit der Koordinaten-Hyperebene $\xi_k = 0$ des Systems $O(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ hindurchgeht, so lautet die Gleichung der betrachteten Schnittkurve

$$\eta = \rho(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n, \tilde{u}) |\tilde{u}|.$$

Diese Kurve ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Normale stetig differenzierbar. Daher existiert

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\xi=x_k} = \left(\frac{d}{d\xi} \rho(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n, \tilde{u}) \right)_{\xi=x_k} |\tilde{u}| = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \rho(x_1, \dots, x_n, \tilde{u}) |\tilde{u}| \quad 7.10$$

Die Funktion $\rho(\mathcal{C}, \tilde{u})$ ist auch für alle Randpunkte $X \in \mathcal{K}$ und alle Richtungen $\tilde{u} \in M$ erklärt. Ist u ein Vektor der äußeren Normale in einem beliebigen Punkt X der Oberfläche von $\mathcal{K}$, und setzen wir u als stetig voraus, so gilt für einen beliebigen Richtungsvektor $\tilde{u} \in M$, der die Bedingung $\tilde{u} \cdot u \geq 0$ erfüllt, $\rho(\mathcal{C}, \tilde{u}) = 0$. Für die Richtungsvektoren $\tilde{u} \in M$ mit $\tilde{u} \cdot u < 0$ ergibt sich, wenn der vom Randpunkt X ausgehende und parallel zu $\tilde{u}$ verlaufende Strahl $s_{\tilde{u}}$ die Oberfläche von $\mathcal{K}$ im Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ schneidet:

$$\rho(\mathcal{C}, \tilde{u}) = \frac{1}{|\tilde{u}|} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - x_k)^2} > 0 \quad 7.11$$

Das erhält man auch aus 7.2, wenn man dort $\tilde{u}$ durch $\tilde{u}$ ersetzt und den Punkt X gegen den Rand rücken läßt. Man kann die Abstandsfunktion auch für das Außengebiet des konvexen Körpers definieren.

Es sei $\rho(\mathcal{C}, \tilde{u})$ die verallgemeinerte Abstandsfunktion eines konvexen Körpers der zu Beginn dieses Kapitels geschilderten Art. $\rho(\mathcal{C}, \tilde{u})$ ist dann auf $R_{\mathcal{K}}(M)$ definiert. Wir betrachten die ebenfalls auf $R_{\mathcal{K}}(M)$ definierte Funktion $r(\mathcal{C}, \tilde{u}) = \rho(\mathcal{C}, \tilde{u}) |\tilde{u}|$ und setzen voraus, daß für alle $X \in \mathcal{K}$ sowie alle $\tilde{u} \in M$ mit $|\tilde{u}| > u_0 > 0$ und alle $X' \in U(X, \delta)$, für die es Richtungen $\tilde{u}' \in M$ mit $|\tilde{u}'| > u_0$ und $|\tilde{u}' - \tilde{u}| < \delta$ gibt, wo δ eine hinreichend kleine positive Zahl ist, die Bedingungen

$$|r(\mathcal{C}, \tilde{u}) - r(\mathcal{C}, \tilde{u}')| < K_1 |\tilde{u} - \tilde{u}'|^{\alpha_1} \quad 7.12$$

$$0 < \alpha_1 \leq 1$$

Die Lösung der Aufgabe ist gegeben durch die folgenden Formeln:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - \dots \right)$$

Die Formeln (1) und (2) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Geschwindigkeiten v zu verwenden. Die Formeln (3) und (4) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Temperaturen T zu verwenden. Die Formeln (5) und (6) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Drücken p zu verwenden.

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - \dots \right)$$

Die Formeln (1) und (2) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Geschwindigkeiten v zu verwenden. Die Formeln (3) und (4) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Temperaturen T zu verwenden. Die Formeln (5) und (6) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Drücken p zu verwenden.

Die Formeln (1) und (2) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Geschwindigkeiten v zu verwenden. Die Formeln (3) und (4) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Temperaturen T zu verwenden. Die Formeln (5) und (6) sind für die Berechnung der Dichte ρ bei verschiedenen Drücken p zu verwenden.

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - \dots \right)$$

und

$$|r(\varphi', \tilde{u}') - r(\varphi, \tilde{u})| < K_2 |\varphi' - \varphi|^{\alpha_2} \quad 7.13$$

$$0 < \alpha_2 \leq 1$$

erfüllt sind. Dann läßt sich zeigen, daß die Abstandsfunktion $\rho(\varphi, \tilde{u})$ für alle $X \in \tilde{K}$ und alle $\tilde{u} \in M$ mit $|\tilde{u}| > u_0 > 0$ im Sinne der Definition 2 des Abschnitts 2 stetig ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & |\rho(\varphi', \tilde{u}') - \rho(\varphi, \tilde{u})| = \\ & = \left| \frac{r(\varphi', \tilde{u}')}{|\tilde{u}'|} - \frac{r(\varphi, \tilde{u})}{|\tilde{u}|} + \frac{r(\varphi, \tilde{u}')}{|\tilde{u}'|} - \frac{r(\varphi, \tilde{u})}{|\tilde{u}'|} + \frac{r(\varphi, \tilde{u})}{|\tilde{u}'|} - \frac{r(\varphi, \tilde{u})}{|\tilde{u}|} \right| \\ & \leq \frac{1}{|\tilde{u}'|} |r(\varphi', \tilde{u}') - r(\varphi, \tilde{u}')| + \frac{1}{|\tilde{u}'|} |r(\varphi, \tilde{u}') - r(\varphi, \tilde{u})| + \frac{r(\varphi, \tilde{u})}{|\tilde{u}'||\tilde{u}|} |\tilde{u}' - \tilde{u}| \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $|\varphi' - \varphi| < \delta$, $|\tilde{u}' - \tilde{u}| < \delta$, $r(\varphi, \tilde{u}) < N$ sowie wegen 7.12 und 7.13

$$|\rho(\varphi', \tilde{u}') - \rho(\varphi, \tilde{u})| \leq \frac{1}{u_0} K_2 \delta^{\alpha_2} + \frac{1}{u_0} \delta^{\alpha_1} + \frac{N}{u_0^2} \delta \quad 7.14$$

Ist α die kleinere der zwei Zahlen α_1, α_2 , so gilt für hinreichend kleine Zahlen $\delta > 0$

$$\delta^{\alpha_1} \leq \delta^\alpha, \quad \delta^{\alpha_2} \leq \delta^\alpha, \quad \delta \leq \delta^\alpha.$$

Somit erhalten wir

$$|\rho(\epsilon, \tilde{u}) - \rho(\epsilon, \tilde{u}')| \leq \frac{(K_1 + K_2)u_0 + M}{u_0^2} \delta^\alpha \quad 7.15$$

Wählen wir $\epsilon > 0$ beliebig klein, so gilt für alle $\delta > 0$ mit

$$\delta < \left[\frac{u_0^2 \epsilon}{(K_1 + K_2)u_0 + N} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{die Ungleichung}$$

$$|\rho(\epsilon, \tilde{u}') - \rho(\epsilon, \tilde{u})| < \epsilon$$

Das heißt aber, daß die Funktion $\rho(\epsilon, \tilde{u})$ stetig ist. Ist X insbesondere ein innerer Punkt von $\mathcal{K}$, so ist $\rho(\epsilon, \tilde{u})$ im gewöhnlichen Sinn als Funktion der $2n$ Variablen $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ stetig.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Abstandsfunktion $\rho(\epsilon, \tilde{u})$ eines regulären konvexen Körpers $\mathcal{K}$ eine enge Beziehung zur Stützfunktion dieses Körpers hat. Es gilt, wenn $h_X(\tilde{u}) = h_X(u_1, u_2, \dots, u_n)$ mit $\tilde{u} \in M$ die Stützfunktion von $\mathcal{K}$ bzgl. des Koordinatensystems $O'(u_1, u_2, \dots, u_n)$ mit $X = O'$ darstellt

$$h_X[-\rho_{x_1}(\epsilon, \tilde{u}), \dots, -\rho_{x_n}(\epsilon, \tilde{u})] = \rho(\epsilon, \tilde{u}) \quad 7.16$$

Die Gleichung der Tangentialhyperebene im Punkt $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, die zugleich Stützhyperebene ist, lautet in Bezug auf $O'(u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$\sum_{k=1}^n -\rho_{x_k}(\epsilon, \tilde{u}) [y_k - u_k \rho(\epsilon, \tilde{u})] = 0 \quad 7.17$$

Dann gilt nach [5]

$$h_X(-\rho_{x_1}, \dots, -\rho_{x_n}) = -\rho(\epsilon, \tilde{u}) \sum_{k=1}^n u_k \rho_{x_k}(\epsilon, \tilde{u}) = \rho(\epsilon, \tilde{u})$$

Hieraus folgt wegen 4.13 die Behauptung.

II. Die Verwendung der Abstandsfunktionen in der =====

Finsler'schen Geometrie. =====

8. Die Konstruktion eines Linienelementes in einem ===== speziellen Finsler'schen Raum. =====

Bekanntlich hat P. Finsler in seiner Dissertation "Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen" eine Geometrie begründet, die eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Geometrie insofern darstellt, als an Stelle des von Riemann verwendeten Linienelementes

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k}$$

ein verallgemeinertes Linienelement der Form

$$ds = F(x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n) = F(\varphi, d\varphi)$$

benutzt wird (Vgl. [19], [8]). Die Funktion $F(\varphi, \tilde{u})$ muß dabei für alle in Betracht kommenden $\varphi, \tilde{u}$ positiv sein und der Bedingung $F(\varphi, \lambda \tilde{u}) = \lambda F(\varphi, \tilde{u})$ für $\lambda > 0$ genügen [8]. In der Regel verlangt man von $F(\varphi, \tilde{u})$ noch Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit nach $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ bis zu den Ableitungen dritter Ordnung (vgl. [20] S. 140). Wir wollen nun eine spezielle Finsler'sche Geometrie betrachten, bei der wir ein Bogenelement verwenden, das eng mit der verallgemeinerten Abstandsfunktion $\rho(\varphi, \tilde{u})$ eines konvexen Körpers verwandt ist. Es sei $\mathcal{K}$ ein konvexer Körper im E_n , der außer inneren Punkten nur reguläre Randpunkte besitzt. Seine Oberfläche sei eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche. Der Raum der zu betrachtenden Geometrie ist das von der konvexen

(n-1)-dimensionalen Randhyperfläche begrenzte Gebiet T_i . Die inneren Punkte $X \in \tilde{\mathcal{K}}$ sind die Punkte dieses Raumes, Wir wollen ihn als Finsler'schen Raum $F_{\tilde{\mathcal{K}}}^n$ bezeichnen. Das Bogenelement $F(\varphi, d\varphi) = F(\varphi, \dot{\varphi}) dt$ führen wir so ein, daß das Integral

$$\int_{t_1(c_{AB})}^{t_2} F(\varphi, \dot{\varphi}) dt ,$$

berechnet für die vom Parameter $t_1 \leq t \leq t_2$ abhängige vektorielle Funktion $\varphi(t)$, weil es die Bogenlänge eines die zwei Punkte $A(\varphi(t_1))$, $B(\varphi(t_2)) \in T_i$ verbindenden Kurvenstückes darstellen soll, von der Integrationsrichtung unabhängig wird. Das bedeutet, daß $F(\varphi, \check{u})$ die Gleichung

$$F(\varphi, \check{u}) = |\lambda| F(\varphi, \check{u}) \quad \lambda \text{ reell} \quad 8.1$$

erfüllen muß. Ein solches Bogenelement erhält man z.B. mit Hilfe der Abstandsfunktion $\rho(\varphi, \check{u})$ des konvexen Körpers $\tilde{\mathcal{K}}$ durch den Ansatz

$$F(\varphi, \check{u}) = \frac{r_0}{2} \left[\frac{1}{\rho(\varphi, \check{u})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\check{u})} \right]. \quad 8.2$$

Hierbei ist $r_0 > 0$ eine konstante positive Zahl. $F(\varphi, \check{u})$ hat die folgenden drei Eigenschaften:

$$1. \quad F(\varphi, \check{u}) \geq 0 \quad 8.3$$

für alle $X \in T_i$ und alle $\check{u} \in M$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\check{u} = 0$.

$$2. \quad F(\varphi, \lambda \check{u}) = |\lambda| F(\varphi, \check{u}) \quad 8.4$$

für alle reellen λ und alle $X \in T_i$, $\check{u} \in M$.

$$3. \quad F(\varphi, \check{u} + \check{w}) \leq F(\varphi, \check{u}) + F(\varphi, \check{w}) \quad 8.5$$

für alle $X \in T_i$, $\check{u}, \check{w} \in M$.

Die dritte Eigenschaft ist eine Folge der Konvexität von $\tilde{\mathcal{K}}$. Außerdem soll $F(\varphi, \check{u})$ für alle inneren Punkte $X \in \tilde{\mathcal{K}}$ und alle $\check{u} \in M$ stetig sein und stetige partielle Ableitungen

nach $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ bis mindestens zur dritten Ordnung haben. Nach [5] S. 22 erfüllen alle Punkte $U(u_1, \dots, u_n)$, die der Bedingung $F(\varphi, \ddot{u}) \leq 1$ genügen, einen konvexen Körper $\mathcal{K}_X$ mit dem Ursprung O' des $u_1, u_2, \dots, u_n$ -Koordinaten-Systems als inneren Punkt, und der Minkowski'schen Distanzfunktion $F_X(\ddot{u}) = F(\varphi, \ddot{u})$ für konstantes φ . In unserem Fall muß man sich den Ursprung O' mit X vereinigt denken. Der konvexe Körper $\mathcal{K}_X$ ist bezüglich des Punktes $O' = X$ symmetrisch. Ein von einem Parameter t abhängiger Vektor $\varphi[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ stellt, sofern seine Koordinaten x_k für alle betrachteten t -Werte immer Koordinaten von Punkten $X \in T_i$ sind, für ein Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ ein Kurvenstück in dem betrachteten Finsler'schen Raum $F_{\mathcal{K}}^n$ dar. Der Vektor $\varphi = \varphi(t)$ soll existieren und stetig sein. Er ist, wie sich noch zeigen wird, ein Tangentenvektor des genannten Kurvenstückes im Punkt $X(\varphi(t))$. Das Bogenelement lautet dann

$$ds = F(\varphi, \dot{\varphi}) dt = \frac{r_0}{2} \left[\frac{1}{\rho(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\dot{\varphi})} \right] dt \quad . \quad 8.6$$

9. Die Extremalen des Finslerraumes $F_{\mathcal{K}}^n$

Die Bogenlänge eines durch $\varphi(t)$ gegebenen Kurvenstückes c des soeben definierten Finslerraumes $F_{\mathcal{K}}^n$ ergibt sich zu

$$I_{AB} = S_{12} = \int_{t_1(c)}^{t_2} F(\varphi, \dot{\varphi}) dt = \frac{r_0}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\rho(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\dot{\varphi})} \right) dt \quad 9.1$$

o: $\varphi = \varphi(t), \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) \quad .$

Dabei sind $\varphi(t_1) = a$ und $\varphi(t_2) = b$ die Ortsvektoren zweier Punkte A, B im Innern des konvexen Körpers $\mathcal{K}$. Wir wollen das Integral durch Variation des die beiden festen Punkte A, B verbindenden Kurvenstückes c zum Minimum machen.

Als zulässige Vergleichskurven wählen wir die Menge M aller stetigen und stetig differenzierbaren, doppelunktsfreien Kurven $e(t)$, die A mit B verbinden und deren Punkte sämtlich in $\tilde{E}$ liegen. Somit gilt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F(e, \dot{e}) dt = 0 \quad . \quad 9.2$$

Da die Funktion $F(e, u)$ die im Abschnitt 8 angeführten Bedingungen 8.4 erfüllt, können wir auf dieses Variationsproblem die Weierstraß'sche Theorie für Variationsprobleme in Parameterdarstellung anwenden (vgl. [4] S.193). Das Integral 9.1 werde in folgenden als Grundintegral bezeichnet. Um die Euler'schen Gleichungen aufstellen zu können, beachten wir noch folgende Relationen

$$\rho_{x_k}(e, -\dot{e}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \rho(e, -\dot{e}) = - \left[\frac{\partial}{\partial u_k} \rho(e, u) \right]_{u = -\dot{e}} \quad 9.3$$

$$-\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \rho(e, -\dot{e}) = \rho(e, -\dot{e}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \rho(e, -\dot{e}) \quad 9.4$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Die Euler'schen Gleichungen des Variationsproblems lauten dann

$$\frac{d}{dt} \left[- \frac{\rho_{\dot{x}_k}(e, \dot{e})}{\rho^2(e, \dot{e})} - \frac{\rho_{\dot{x}_k}(e, -\dot{e})}{\rho^2(e, -\dot{e})} \right] - \left[- \frac{\rho_{x_k}(e, \dot{e})}{\rho^2(e, \dot{e})} - \frac{\rho_{x_k}(e, -\dot{e})}{\rho^2(e, -\dot{e})} \right] = 0 \quad . \quad 9.5$$

$$(k=1, 2, 3, \dots, n)$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch

$$\varphi = \omega t + \vartheta \text{ oder } x_k = a_k t + d_k .$$

9.6

$$k=1,2,3,\dots n$$

Diese Lösungen der Euler'schen Gleichungen stellen im E_n Geraden dar (vgl. [9] S. 51). Wir beweisen zunächst, daß 9.6 Lösungen von 9.5 sind. Dazu formen wir 9.5 um. Da $\rho(\varphi, \ddot{\varphi})$ die Gleichungen 4.14 erfüllt, können wir wegen 9.4 statt 9.5 schreiben.

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{\rho_{x_k}(\varphi, \dot{\varphi})}{\rho(\varphi, \dot{\varphi})} \right] + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, \dot{\varphi})}{\rho^2(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho_{x_k}(\varphi, -\dot{\varphi})}{\rho(\varphi, -\dot{\varphi})} \right] + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, -\dot{\varphi})}{\rho^2(\varphi, -\dot{\varphi})} = 0$$

9.7

$$k=1,2,3,\dots n .$$

Setzen wir 9.6 in 9.7 ein, so folgt

$$\begin{aligned} & - \frac{\sum_{\ell=1}^n \rho_{x_k x_\ell}(\varphi, \dot{\varphi}) c_\ell \rho(\varphi, \dot{\varphi}) - \rho_{x_k}(\varphi, \dot{\varphi}) \sum_{\ell=1}^n \rho_{x_\ell}(\varphi, \dot{\varphi}) c_\ell}{\rho^2(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, \dot{\varphi})}{\rho^2(\varphi, \dot{\varphi})} + \\ & + \frac{\sum_{\ell=1}^n \rho_{x_k x_\ell}(\varphi, -\dot{\varphi}) c_\ell \rho(\varphi, -\dot{\varphi}) - \rho_{x_k}(\varphi, -\dot{\varphi}) \sum_{\ell=1}^n \rho_{x_\ell}(\varphi, -\dot{\varphi}) c_\ell}{\rho^2(\varphi, -\dot{\varphi})} + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, -\dot{\varphi})}{\rho^2(\varphi, -\dot{\varphi})} = 0 \end{aligned}$$

9.8

$$K=1,2,\dots n .$$

Da $\sum_{\ell=1}^n a_\ell \rho_{x_\ell}(\varphi, \dot{\varphi}) = -1$ ist, folgt hieraus:

$$\sum_{\ell=1}^n \rho_{x_k x_\ell}(\varphi, z) c_\ell = 0 \text{ und } \sum_{\ell=1}^n -c_\ell \rho_{x_\ell x_k}(\varphi, -z) = 0 \quad 9.9$$

Demnach ergibt sich aus 9.8

$$\frac{\rho_{x_k}(\varphi, z)(-1)}{\rho^2(\varphi, z)} + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, z)}{\rho^2(\varphi, z)} - \frac{\rho_{x_k}(\varphi, -z)}{\rho^2(\varphi, -z)} + \frac{\rho_{x_k}(\varphi, -z)}{\rho^2(\varphi, -z)} = 0 \quad 9.10$$

$$k=1, 2, \dots, n$$

Offensichtlich werden die Differentialgleichungen 9.5 von 9.6 erfüllt. Bezeichnen wir die Koordinaten von A mit $a_1, a_2, \dots, a_n$, die von B mit $b_1, b_2, \dots, b_n$, so erhält man für die noch willkürlichen Integrationskonstanten c_k, d_k aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} a_k &= c_k t_1 + d_k & b_k - a_k &= c_k (t_2 - t_1) \\ b_k &= c_k t_2 + d_k & c_k &= \frac{b_k - a_k}{t_2 - t_1} \end{aligned} \quad 9.11$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$\text{Daraus ergibt sich} \quad d_k = \frac{a_k t_2 - b_k t_1}{t_2 - t_1} \quad 9.12$$

Somit finden wir schließlich

$$x_k = \frac{b_k(t-t_1) - a_k(t-t_2)}{t_2 - t_1} \quad 9.13$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Die Extremale stellt die Euklidische Verbindungsgerade der beiden Punkte A, B dar. Natürlich gehören im Sinne der betrachteten Finsler'schen Geometrie nur die Punkte X zu der Geraden, die im Innern von $\mathcal{K}$ liegen. Der die beiden Punkte A, B verbindende Extremalenbogen erfüllt folgende Bedingungen.

1. Er ist ein Extremalenbogen der Klasse C^1 ohne mehrfache Punkte und liegt ganz im Innern von $\mathcal{K}$, wo die Funktion $F(e, \tilde{u})$ nach Voraussetzung stetige, partielle Ableitungen nach $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n$ bis zur dritten Ordnung hat.
2. Es gibt eine Funktion $F_1(e, \dot{e})$ mit $F_1(e, \dot{e}) > 0$ für alle Punkte $X(e)$ des Extremalenbogens und für jeden Vektor $\dot{e} \in M$.
3. Der Extremalenbogen AB läßt sich mit einem Feld von Extremalen umgeben, derart, daß durch jeden inneren Punkt von $\mathcal{K}$ genau eine Extremale geht und die Extremale von A nach B unter diesem Feld enthalten ist.
4. Die Weierstraß'sche E-Funktion erfüllt die Bedingung

$$E(e, \dot{e}; \tilde{u}) > 0$$

für alle Punkte X des die Punkte A, B verbindenden Extremalenbogens und alle Einheitsvektoren $\tilde{u} \in M$, die nicht parallel zum Vektor $\dot{e}$, dem Tangentenvektor der Extremale AB im Punkt X, sind.

Die Bedingung 1 ist ohne weiteres einzusehen. Die Bedingung 3 folgt daraus, daß die Extremalen sämtlich Geraden sind.

Die Bedingungen 2 und 4 folgen aus der Konvexität der Indikatrix. Die Indikatrix ist gegeben durch die Gleichung

$$F(\varphi, \tilde{u}) = 1 \quad 9.14$$

Sie stellt für jeden inneren Punkt $X(\varphi) \in \tilde{\mathcal{K}}$ eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche dar, wenn man die Koordinaten $u_1, u_2, \dots, u_n$ als variabel, $x_1, x_2, \dots, x_n$ als fest und die Gleichung auf das Koordinatensystem $O'(u_1, \dots, u_n)$ bezieht. Wir lassen O' mit X zusammenfallen und wählen für alle $k=1, 2, \dots, n$ die u_k -Achse parallel zur ξ_k -Achse. Dann folgt aus der Konvexität von $\tilde{\mathcal{K}}$ und den Eigenschaften 8.3- 8.5 der Funktion $F(\varphi, \tilde{u})$, daß $F(\varphi, \tilde{u})$ bezüglich $\tilde{u}$ die Minkowski'sche Distanzfunktion eines konvexen Körpers ist und Gleichung 9.14 die Oberfläche dieses konvexen Körpers darstellt. Überdies ist die Indikatrix sogar symmetrisch bezüglich des Punktes $O' = X$. Weil die Indikatrix konvex ist und der Punkt X im Innern von $\tilde{\mathcal{K}}$ liegt, sind die Bedingungen 2 und 4 erfüllt (vgl. [4] S. 247 - 248, [8] S. 33 - 36).

Um beispielsweise die Gültigkeit der Bedingung 4 einzusehen, betrachten wir die Weierstraß'sche E-Funktion. Sie ist durch die Gleichung

$$E(\varphi, \tilde{u}; w) = F(\varphi, w) - \sum_{k=1}^n v_k E_{u_k}(\varphi, \tilde{u}) \quad 9.15$$

gegeben (vgl. [4] S. 243, [8] S. 37). Dabei ist $X(\varphi)$ innerer Punkt von $\tilde{\mathcal{K}}$ und $\tilde{u}, w \in M$. Wir bilden

$$\frac{E(\varphi, \tilde{u}; w)}{F(\varphi, w)} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n v_k E_{u_k}(\varphi, \tilde{u})}{F(\varphi, w)} = 1 - \frac{F(\varphi, \tilde{u})}{F(\varphi, w)} \quad 9.16$$

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Die Kalkulationen sind in folgender Weise zu verstehen:

Wie im Abschnitt 12 gezeigt wird, ist

$$\frac{F(\varphi, \check{u})}{F(\varphi, w)} = \frac{\overline{XU'}}{\overline{XV}} \quad 9.17$$

Wählen wir zunächst den Betrag von w so groß, daß der Punkt V auf der Indikatrix liegt, dann ist $F(\varphi, w) = 1$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt des Strahls $s_{\check{u}}$ mit der Indikatrix mit U_1 und legen wir durch V eine zur Tangentialhyperebene der Indikatrix in U_1 parallele Hyperebene, so schneidet diese die Gerade XU im Punkt U' (vgl. Gl. 12.1-12.5). Da die Indikatrix konvex und symmetrisch bezüglich X ist, liegt U' im Innern und es gilt $F(\varphi, \check{u}) \leq 1$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\check{u} = \mu w$ (μ reell) ist. Daher ist wegen der Homogenität von E und F bezüglich w für alle inneren Punkte $X \in \check{K}$ und alle $\check{u}, w \in M$ mit $\check{u} \neq \sigma w$ (σ reell) die Bedingung

$$\frac{E(\varphi, \check{u}; w)}{F(\varphi, w)} > 0 \quad 9.18$$

erfüllt. Da aber $F(\varphi, w) > 0$, ist auch

$$E(\varphi, \check{u}; w) > 0 \quad 9.19$$

für alle inneren Punkte $X \in \check{K}$ und alle $\check{u}, w \in M$ mit $\check{u} \neq \sigma w$. Nur im Fall $\check{u} = \sigma w$ gilt

$$E(\varphi, \check{u}; w) = 0. \quad 9.20$$

Die Bedingung 4 ist also erfüllt, wenn man $\check{u} = \check{v}$ und $w = \check{u}$ setzt. Entsprechend kann man zeigen, daß auch die Bedingung 2 für jeden inneren Punkt $X \in \check{K}$ und

für jeden Vektor $\varphi \in M$ erfüllt ist. Das bedeutet, daß unser Variationsproblem positiv regulär ist (vgl. [4] S. 214) und ([6] S. 245). Für $n=2$ folgt dies aus der Konvexität der Indikatrix, wie man in dem Buch von O. Bolza [9] auf Seite 248 nachlesen kann. Für $n > 2$ muß gezeigt werden, daß die Linienelemente (x_k, u_k) für alle inneren Punkte $X \in \tilde{d}$ und alle $\tilde{u} \in M$ positiv regulär sind. Das bedeutet, daß die quadratische Form $\sum_{k=1}^n F_{u_k u_k}(\varphi, \tilde{u}) \xi_k \xi_k$ mit der linearen Nebenbedingung $\sum_{k=1}^n \xi_k \cdot u_k = 0$ für alle $X \in \tilde{d}$ und alle $\tilde{u} \in M$ positiv definit sein muß. Setzen wir noch voraus, daß die Funktion $F(\varphi, \tilde{u})$ an jeder Stelle $(X, \tilde{u})$ in eine konvergente Potenzreihe nach Potenzen von $(v_k - u_k)$ entwickelt werden kann, so finden wir

$$F(\varphi, \tilde{u}) = F(\varphi, \tilde{u}) + \sum_{k=1}^n F_{u_k}(\varphi, \tilde{u})(\bar{v}_k - u_k) + \quad 9.21$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{u_i u_j}(\varphi, \tilde{u})(\bar{v}_i - u_i)(\bar{v}_j - u_j) + R \quad 9.21$$

Dabei kann R , wenn $(\bar{v}_i - u_i)$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$ hinreichend klein ist, gegenüber den quadratischen Gliedern vernachlässigt werden. Hieraus ergibt sich wegen der Homogenität von F

$$F(\varphi, \tilde{u}) = \sum_{k=1}^n F_{u_k}(\varphi, \tilde{u}) \bar{v}_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{u_i u_j}(\varphi, \tilde{u})(\bar{v}_i - u_i)(\bar{v}_j - u_j) + R \quad 9.22$$

Führt man die E -Funktion ein, so gilt für alle hinreichend kleinen Absolutbeträge $|\tilde{u} - \bar{u}|$

$$\sum_{i,j} F_{u_i u_j}(\varphi, \tilde{u})(\bar{v}_i - u_i)(\bar{v}_j - u_j) \approx 2 E(\varphi, \tilde{u}, \bar{u}) > 0, \quad 9.23$$

 

wenn man noch voraussetzt, daß die Bedingung

$$\sum_{k=1}^n u_k (\bar{v}_k - u_k) = 0 \quad 9.24$$

erfüllt ist. Setzen wir $\xi_k = \lambda (\bar{v}_k - u_k)$ $k=1, 2, \dots, n$
 λ reell, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} F_{u_i u_j}(\varrho, \tilde{u}) \xi_i \xi_j &= \sum_{i,j} F_{u_i u_j}(\varrho, \tilde{u}) \lambda^2 (\bar{v}_j - u_j) (\bar{v}_i - u_i) \\ &\approx 2 \lambda^2 E(\varrho, \tilde{u}; \bar{v}) > 0 \end{aligned} \quad 9.25$$

mit der Nebenbedingung $\sum_{k=1}^n u_k \xi_k = 0$ für alle inneren

Punkte $X \in \tilde{K}$ und alle $\tilde{u} \in M$. Somit ist das Variations-
 problem positiv regulär und es gilt nach Satz 2
 ([6] Seite 245) für alle inneren Punkte $X \in \tilde{K}$ und alle
 $\tilde{u} \in M$, daß die Funktion

$$F_1(\varrho, \tilde{u}) = - \left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^{-2} \begin{vmatrix} F_{u_1 u_1}(\varrho, \tilde{u}) & \dots & F_{u_1 u_n}(\varrho, \tilde{u}) & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{u_n u_1}(\varrho, \tilde{u}) & \dots & F_{u_n u_n}(\varrho, \tilde{u}) & u_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad 9.26$$

ist. Bei Caratheodory wird diese Funktion mit F^* be-
 zeichnet. Sie unterscheidet sich von der von ihm ver-
 wendeten Funktion F_1 nur um einen positiven Faktor.
 Ersetzen wir in Gleichung 9.26 $\tilde{u}$ durch ϱ , so erhalten
 wir

$$F_1(\varrho, \varrho) > 0 \quad 9.27$$

und damit den Beweis für die Gültigkeit der Bedingung 2. Der Extremalenbogen AB läßt sich in ein Feld einbetten. Daher kann die totale Variation $\Delta I = I_{\bar{c}} - I_c$ für jede ganz im Feld gelegene, die beiden Punkte AB verbindende Kurve c durch die E-Funktion ausgedrückt werden.

$$\Delta I = \int_{s_1}^{s_2} E(\bar{c}, c'; \bar{c}) ds \quad . \quad 9.28$$

c' und $\bar{c}'$ sind dabei die Tangenteneinheitsvektoren im Punkt $\bar{x}$ der durch $\bar{x}$ hindurchgehenden Feldextremale und der Kurve $\bar{c}$. Wegen dieser Darstellung und weil die Bedingungen 1 - 4 für das Variationsproblem erfüllt sind, folgt dann nach Weierstraß, daß die Extremale AB ein starkes eigentliches und relatives Minimum für das Grundintegral liefert (vgl. [6] Bd. II S.227-229).

10. Das absolute Extremum.

Es seien A, B zwei innere Punkte von $\bar{K}$ und $\bar{c}$ eine stetige, die Punkte A, B verbindende Kurve, die ganz im Innern von $\bar{K}$ liegt und eine stetige Tangente hat. Wir wählen auf dem Kurvenbogen $\bar{c}_{AB}$ einen Punkt P_1 , der so nahe bei A liegt, daß erstens das Grundintegral $\bar{I}_{AP_1}$ über den Kurvenbogen $\bar{c}_{AP_1}$ von A nach P_1 größer ist als das Grundintegral I_{AP_1} über die Sehne AP_1 , zweitens das Grundintegral I_{AP_1B} über den Sehnenzug AP_1B größer ist als das Grundintegral I_{AB} über den Extremalenbogen AB.

$$\bar{I}_{AP_1} > I_{AP_1} \quad I_{AP_1B} = I_{AP_1} + I_{P_1B} > I_{AB} \quad 10.1$$

und auch den Beweis für die Existenz der
von Dirichlet angegebenen α und β zu führen.
Für α kann die folgende Konstruktion angegeben
werden. Man wähle eine beliebige Funktion $f(x)$
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Man wähle α so, dass $f(x) > 0$ für
alle x gilt. Dann ist $f(x)$ eine Funktion
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.
Man wähle β so, dass $f(x) > 0$ für
alle x gilt. Dann ist $f(x)$ eine Funktion
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.

Man wähle α so, dass $f(x) > 0$ für
alle x gilt. Dann ist $f(x)$ eine Funktion
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.
Man wähle β so, dass $f(x) > 0$ für
alle x gilt. Dann ist $f(x)$ eine Funktion
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.
Man wähle α so, dass $f(x) > 0$ für
alle x gilt. Dann ist $f(x)$ eine Funktion
mit $f(0) = 1$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.

Einen solchen Punkt P_1 gibt es, weil sowohl der Extremalenbogen AB als auch die Extremalenbögen AP_1, P_1B , die ja zugleich Sehnen sind, relative eigentliche Minima für die zugehörigen Grundintegrale liefern. Zudem können wir durch Abrundung der Ecke in P_1 , den Sehnenzug AP_1B eine zulässige Vergleichskurve $\bar{c}_{AB}$ so zuordnen, daß das zugehörige Grundintegral $\bar{I}_{AB}$ sich beliebig wenig von I_{AP_1B} unterscheidet. Wegen $\bar{I}_{AB} > I_{AB}$ folgt dann $I_{AP_1B} > I_{AB}$. Nunmehr wählen wir auf $\bar{c}$ in der Nachbarschaft von P_1 einen Punkt P_2 , der zu $\bar{c}_{AB}$ gehören soll und für den gilt

$$\bar{I}_{P_1P_2} > I_{P_1P_2} \quad \text{und} \quad I_{P_1P_2} + I_{P_2B} > I_{P_1B} \quad . \quad 10.2$$

Indem wir so fortfahren und auf $\bar{c}$ weitere Punkte $P_3, P_4, \dots$ wählen, erhalten wir, wenn wir annehmen, daß P_n der letzte dieser Punkte auf $\bar{c}$ vor B ist

$$\begin{aligned} \bar{I}_{P_2P_3} &> I_{P_2P_3} \quad , \quad I_{P_2P_3} + I_{P_3B} > I_{P_2B} \\ &\dots\dots\dots \dots\dots\dots \end{aligned} \quad 10.3$$

$$\bar{I}_{P_{n-2}P_{n-1}} > I_{P_{n-2}P_{n-1}} \quad , \quad I_{P_{n-2}P_{n-1}} + I_{P_{n-1}B} > I_{P_{n-2}B} \quad .$$

Gilt nun für den Punkt P_n

$$\bar{I}_{P_nB} > I_{P_nB} \quad , \quad 10.4$$

so brechen wir das Verfahren ab. Andernfalls muß man noch weitere Punkte $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots$ wählen, bis man einen Punkt P_m mit $m > n$ gefunden hat, für den die Bedingung $\bar{I}_{P_mB} > I_{P_mB}$ erfüllt ist.

Ein solcher Punkt ist immer vorhanden, wenn der Kurvenbogen $\bar{c}_{AB}$ eine im euklidischen Sinne endliche Länge hat. Kurvenbögen $\bar{c}_{AB}$, die keine endliche Bogenlänge im Euklidischen Sinn haben, können außer Betracht bleiben, weil die zugehörigen Grundintegrale $\bar{I}_{AB}$ über alle Grenzen wachsen. Nehmen wir daher an, daß die Bedingung 10.4 erfüllt ist, so folgt aus 10.1 - 10.4

$$\bar{I}_{AB} = \bar{I}_{AP_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{I}_{P_k P_{k+1}} + \bar{I}_{P_n B} > I_{AP_1} + \sum_{k=1}^{n-1} I_{P_k P_{k+1}} + I_{P_n B} \quad 10.5$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{AB} < I_{AP_1} + I_{P_1 B} < I_{AP_1} + I_{P_1 P_2} + I_{P_2 B} < I_{AP_1} + I_{P_1 P_2} + \\ &+ I_{P_2 P_3} + I_{P_3 B} < \dots \end{aligned} \quad 10.6$$

Somit erhalten wir schließlich durch vollständige Induktion

$$I_{AB} < I_{AP_1} + \sum_{k=1}^{n-1} I_{P_k P_{k+1}} + I_{P_n B} < \bar{I}_{AB} \quad 10.7$$

Damit haben wir gezeigt, daß das Grundintegral I_{AB} längs des die Punkte A, B verbindenden Extremalenbogens c_{AB} kleiner ist, als das Grundintegral $\bar{I}_{AB}$ längs jedes die Punkte A, B verbindenden ganz im Innern von $\mathcal{R}$ verlaufenden Kurvenbogens $\bar{c}_{AB}$ der Klasse C' .

$$I_{AB} < \bar{I}_{AB}$$

10.8

Der Extremalenbogen c_{AB} liefert somit für das betrachtete Variationsproblem sogar ein absolutes Minimum. Die Existenz eines absoluten Minimums hätte sich auch mit Hilfe des Hilbertschen Existenzsatzes zeigen lassen (vgl. [4] S. 422).

11. Die Metrik des Finslerraumes $F^n_{\mathcal{K}}$

Wir berechnen den Wert des Integrals 9.1 längs der die beiden Punkte A, B verbindenden Extremale. Bezeichnen wir das Integral mit $d(A, B)$, so können wir schreiben

$$d(A, B) = \frac{r_0}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\rho(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\dot{\varphi})} \right) dt \quad 11.1$$

Dabei ist

$$\varphi = b \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} - a \frac{t - t_2}{t_2 - t_1}, \quad \dot{\varphi} = \frac{b - a}{t_2 - t_1}$$

Erweitern wir den Integranden mit $|\dot{\varphi}|$, so erhalten wir

$$d(A, B) = \frac{r_0}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\varphi}| dt}{r(\varphi, \dot{\varphi})} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\dot{\varphi}| dt}{r(\varphi, -\dot{\varphi})} \quad 11.2$$

Da $\dot{\varphi}$ ein konstanter Vektor und $|\dot{\varphi}|$ ebenso konstant ist, ergibt sich, wenn wir die beiden Schnittpunkte der Geraden AB mit der Oberfläche von $\mathcal{K}$ in Richtung des Vektors $\dot{\varphi}$ mit U und in der Richtung $-\dot{\varphi}$ mit V bezeichnen,

und die Abstände $\overline{AX} = x$, $r(a, b-a) = r_A$, $r(a, a-b) = r'_A$,
 $r(b, a-b) = r_B$ und $r(b, b-a) = r'_B$ nennen:

$$\begin{aligned} r(\varphi, \dot{\varphi}) &= r_A - x & |d\varphi| &= |\dot{\varphi}| dt = dx \\ r(\varphi, -\dot{\varphi}) &= r'_A + x & r_A - r'_B &= r_B - r'_A \end{aligned} \quad 11.3$$

Hieraus folgt

$$d(A, B) = \frac{r_0}{2} \left(\int_0^{r_A - r'_B} \frac{dx}{r_A - x} + \int_0^{r_B - r'_A} \frac{dx}{r'_A + x} \right) = \frac{r_0}{2} \ln \left[\frac{r_A \cdot r_B}{r'_A \cdot r'_B} \right] \quad 11.4$$

Dafür können wir weiter schreiben

$$d(A, B) = \frac{r_0}{2} \ln \left[\frac{r_A \cdot r_B}{r'_A \cdot r'_B} \right] = \frac{r_0}{2} \ln(ABUV) \quad 11.5$$

Die Größe $d(A, B)$ definieren wir als Abstand der Punkte AB. Sie besitzt die für eine Metrik notwendigen Eigenschaften

1. $d(A, B) \geq 0$ Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $A = B$ ist.
2. $d(A, B) = d(B, A)$ Dies folgt aus $F(\varphi, \lambda \dot{\varphi}) = |\lambda| F(\varphi, \dot{\varphi})$.
3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Die inneren Punkte von $\mathcal{K}$ bilden somit einen metrischen Raum bezüglich der obigen Metrik. Wir können diese Metrik nun noch durch die verallgemeinerte Abstandsfunktion ausdrücken.

$$\text{Es gilt } r_A = r(\alpha, b-\alpha) = \rho(\alpha, b-\alpha) |b-\alpha|$$

$$r'_A = r(\alpha, \alpha-b) = \rho(\alpha, \alpha-b) |\alpha-b|$$

$$r_B = r(b, \alpha-b) = \rho(b, \alpha-b) |\alpha-b|$$

$$r'_B = r(b, b-\alpha) = \rho(b, b-\alpha) |b-\alpha|$$

11.6

Für die letzten beiden Gleichungen können wir wegen 5.7 auch schreiben

$$\rho(b, \alpha-b) = \rho(\alpha-(\alpha-b), \alpha-b) = \rho(\alpha, \alpha-b) + 1$$

$$\rho(b, b-\alpha) = \rho(\alpha+(b-\alpha), b-\alpha) = \rho(\alpha, b-\alpha) - 1$$

11.7

Somit erhalten wir schließlich

$$d(A, B) = \frac{r_0}{2} \ln \left[\frac{\rho(\alpha, b-\alpha) \{ \rho(\alpha, \alpha-b) + 1 \}}{\rho(\alpha, \alpha-b) \{ \rho(\alpha, b-\alpha) - 1 \}} \right] = \frac{r_0}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\rho(\alpha, \alpha-b)}}{1 - \frac{1}{\rho(\alpha, b-\alpha)}} \right]$$

11.8

Daß $d(A, B)$ die Eigenschaft 1 hat, ersieht man aus der Bedeutung von r_A, r'_A, r_B, r'_B . Die Abstände r_A, r_B sind solche, die in A beziehungsweise B beginnen und immer den anderen Endpunkt der Strecke AB mit enthalten. Die Abstände r'_A, r'_B haben diese Eigenschaft nicht. Daher gilt $r_A \geq r'_B, r_B \geq r'_A$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn A mit B zusammenfällt. Dadurch ist immer $d(A, B) \geq 0$ und $d(A, B) = d(B, A)$. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung erkennt man wie folgt: Es seien A, B, C drei innere Punkte von $\tilde{K}$ und AB, AC, BC die drei Extremalenbögen, die A mit B, A mit C und B mit C verbinden. Es sind die drei euklidischen Verbindungsstrecken der drei Punkte. Wir nehmen zunächst an, daß C nicht auf der Geraden AB liegt. Wir betrachten eine ε -Umgebung $U(C, \varepsilon)$ von C, die nur aus inneren Punkten von $\tilde{K}$ besteht, und wählen auf AC zwischen A und C einen Punkt $X_1 \in U(C, \varepsilon)$ und auf CB zwischen C und B einen Punkt $X_2 \in U(C, \varepsilon)$.

Durch X_1 und X_2 denken wir uns ein stetiges und stetig differenzierbares Kurvenstück k_{12} gelegt, das ganz in $U(C, \varepsilon)$ verläuft und die Geraden AC in X_1 , BC in X_2 berührt. Es ist dadurch zwischen A, B eine stetige, differenzierbare Kurve k_{AB} gegeben. Bildet man

$$s_{AB} = \int_{A(k_{AB})}^B F(\varrho, \dot{\varrho}) dt, \quad 11.9$$

so ergibt sich

$$s_{AB} = d(A, X_1) + \int_{X_1(k_{12})}^{X_2} F(\varrho, \dot{\varrho}) dt + d(X_2, B). \quad 11.10$$

Falls ε so klein gewählt wird, daß der Rand von $U(C, \varepsilon)$ ganz in $\tilde{R}$ liegt, so ist $F(\varrho, \dot{\varrho})$ für alle Punkte von k beschränkt. Es gilt daher $0 \leq F(\varrho, \dot{\varrho}) \leq K$, oder

$$0 \leq \int_{t_1}^{t_2} F(\varrho, \dot{\varrho}) dt \leq K |t_2 - t_1|, \quad 11.11$$

wo $\varrho(t)$ eine Parameterdarstellung von k_{12} ist und $\varrho(t_1), \varrho(t_2)$ die Ortsvektoren der Punkte X_1, X_2 sind. Wegen der Minimaleigenschaft von $d(A, B)$ gilt

$$d(A, B) < s_{AB} \leq d(A, X_1) + K |t_2 - t_1| + d(X_2, B). \quad 11.12$$

Lassen wir ε gegen Null gehen, so rücken X_1 und X_2 gegen C und $t_2 - t_1$ geht gegen Null.

Immerhin ist die Arbeit, die wir hier machen, eine Arbeit, die sich nicht nur auf die Theorie beschränkt, sondern auch auf die Praxis. Wir wollen zeigen, dass die Theorie der Differentialgleichungen nicht nur ein abstraktes Spiel ist, sondern dass sie in der Praxis eine wichtige Rolle spielt.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x) = \int f(x, y) dx + C$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion $y(x)$, die die Gleichung erfüllt. Die Konstante C wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

$$y(x) = \int f(x, y) dx + C$$

Die Funktion $y(x)$ ist die Lösung der Differentialgleichung. Sie ist eine Funktion, die die Gleichung erfüllt.

$$y(x) = \int f(x, y) dx + C$$

Die Funktion $y(x)$ ist die Lösung der Differentialgleichung. Sie ist eine Funktion, die die Gleichung erfüllt.

Dann erhalten wir aus 11.10

$$d(A,B) < d(A,C) + d(C,B) \quad 11.13$$

Liegt C jedoch auf AB zwischen A und B, so haben wir

$$d(A,B) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_A \cdot r_B}{r_A' \cdot r_B'} \right), \quad d(A,C) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_A \cdot r_C}{r_A' \cdot r_C'} \right) \quad 11.14$$

$$d(C,B) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{\bar{r}_C \cdot \bar{r}_B}{\bar{r}_C' \cdot \bar{r}_B'} \right) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_C' \cdot r_B}{r_C \cdot r_B'} \right)$$

Demnach gilt

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) \quad 11.15$$

Im Fall, daß B zwischen A und C liegt, ergibt sich

$$d(C,B) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{\bar{\bar{r}}_C \cdot \bar{\bar{r}}_B}{\bar{\bar{r}}_C' \cdot \bar{\bar{r}}_B'} \right) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_C \cdot r_B'}{r_C' \cdot r_B} \right) \quad 11.16$$

$$d(A,B) = d(A,C) - d(C,B) \quad 11.17$$

Hieraus folgt $d(A,C) + d(C,B) = d(A,B) + 2d(C,B)$

und somit wieder

$$d(A,B) < d(A,C) + d(C,B) \quad 11.18$$

Entsprechendes gilt, falls A zwischen C und B liegt.

Zusammenfassend können wir sagen: Es gilt für drei innere Punkte $A, B, C \in \tilde{\mathcal{R}}$ immer.

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) \quad 11.19$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn C zwischen A und B auf AB liegt oder wenn C mit A bzw. B zusammenfällt. Damit ist die Gültigkeit der Dreiecksungleichung gezeigt. Die Metrik $d(A, B)$ ist eine innere Metrik [20] S. 99).

Aus 11.19 kann man eine Folgerung für die elementare euklidische Geometrie der Ebene ziehen. Es seien $A_1, A_2, \dots, A_6$ die sechs Ecken eines ebenen konvexen Sechsecks, wobei sich benachbarte Ecken mit Ausnahme von A_1 und A_6 um eine Einheit im Index unterscheiden sollen. Ferner setzen wir voraus, daß wir durch die sechs Punkte A_i eine stetige und geschlossene, hinreichend oft differenzierbare Kurve legen können, die einen konvexen Bereich mit der Abstandsfunktion $\rho(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ von mindestens der Klasse $C^{(3)}$ berandet. Ziehen wir die drei Diagonalen $A_1 A_4, A_2 A_5, A_3 A_6$, so liegen auf jeder dieser drei Diagonalen im allgemeinen zwei Diagonalschnittpunkte. Jeder Diagonalschnittpunkt bildet auf jeder mit ihm inzidierenden Diagonale mit den Endpunkten dieser Diagonale zwei Diagonalabschnitte. Ein Diagonalabschnitt, der einen zweiten Diagonalschnittpunkt enthält, werde als innerer Diagonalabschnitt, andernfalls als äußerer Diagonalabschnitt bezeichnet. Dann gilt der folgende Satz:

Das Produkt der zwei inneren Diagonalabschnitte dividiert durch das Produkt der zwei äußeren Diagonalabschnitte einer jeden der drei Diagonalen ($A_1 A_4$ oder $A_2 A_5$ oder $A_3 A_6$) ist kleiner oder höchstens gleich dem Produkt der vier inneren Diagonalabschnitte dividiert durch das Produkt der vier äußeren Diagonalabschnitte der beiden anderen Diagonalen.

Das Gleichheitszeichen gilt in allen Fällen genau dann, wenn alle drei Diagonalen durch einen Punkt gehen. Der Beweis ergibt sich leicht aus der Dreiecksungleichung 11.19.

Die in der ersten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.

Die in der zweiten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der dritten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der vierten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der fünften Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der sechsten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der siebenten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der achten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der neunten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der zehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.

Die in der elften Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der zwölften Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der dreizehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der vierzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der fünfzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der sechzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der siebenzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der achtzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der neunzehnten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.
Die in der zwanzigsten Abtheilung dieses Buches beschriebenen
Verfahren sind in der That sehr einfach und leicht auszuführen,
und die Resultate sind in der That sehr genau.

12. Der Tangentialraum und die Indikatrix.

Ist X ein innerer Punkt von $\tilde{K}$, so besteht die Menge M_X aller Vektoren $\vec{u}$ aus dem vollen Richtungs-bündel M . Nehmen wir zu M noch den Nullvektor 0 hinzu, so ist durch $M + 0$ ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen gegeben. Denken wir uns die Vektoren $\vec{u} \in M + 0$ von X aus durch gerichtete Strecken dargestellt, so wird jedem Punkt $X \in \tilde{K}$ ein n -dimensionaler affiner Raum A_X^n zugeordnet, den wir als einen Tangentialraum des n -dimensionalen Raumes $F_{\tilde{K}}^n$ bezeichnen. $F(\tau, \vec{u})$ ist für jeden Punkt $X \in \tilde{K}$ eine Norm im Tangentialraum A_X^n . Durch diese Norm wird der Tangentialraum zu einem Minkowskischen Raum, dem tangierenden Minkowskischen Raum (vgl. [11], [2015, 130]). Die Länge eines Vektors $\vec{u} \in M$ wird dann gemessen durch $F(\tau, \vec{u})$. Die Gleichung $F(\tau, \vec{u}) = 1$ stellt die Gleichung der Indikatrix des Punktes X dar. Sie ist, wie bereits im Abschnitt 9 bemerkt wurde, eine geschlossene konvexe Fläche. Die Punkte $U(\vec{u})$, die der Ungleichung $F(\tau, \vec{u}) \leq 1$ genügen, stellen einen konvexen Körper mit dem Mittelpunkt $X = 0'$ dar. Wir betrachten nun zwei von X ausgehende Vektoren $\overrightarrow{XU} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{XV} = \vec{v}$. Wir bezeichnen den Strahl, der von X ausgeht und U enthält mit $s\vec{u}$. Dieser Strahl schneidet die Indikatrix im Punkt U_1 . Die Gleichung der Hyperebene durch den Punkt V parallel zur Tangentialhyperebene an die Indikatrix im Punkt U_1 lautet

$$\sum_{k=1}^n (x_k - v_k) F_{u_k}(\tau, \vec{u}) = 0 \quad . \quad 12.1$$

Diese Hyperebene schneidet die Gerade XU in einen Punkt U' . Für dessen Koordinaten $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ erhalten wir

$$u'_k = u_k \tau \quad , k = 1, 2, \dots, n \quad 12.2$$

$$\tau \sum_{k=1}^n u_k F_{u_k}(\varphi, \tilde{u}) = \sum_{k=1}^n v_k F_{u_k}(\varphi, \tilde{u})$$

$$\tau = \frac{\sum_{k=1}^n v_k F_{u_k}(\varphi, \tilde{u})}{F(\varphi, \tilde{u})} \quad 12.3$$

Wir definieren nun

$$\cos(\tilde{u}, \varphi; X) = \pm \frac{\overline{XU'}}{\overline{XV}} \quad 12.4$$

Das Minuszeichen gilt genau dann, wenn X zwischen U' und U_1 liegt. Setzen wir für $\overline{XU'}$ und $\overline{XV}$ ihre Längen ein, so ergibt sich

$$\cos(\tilde{u}, \varphi; X) = \pm \frac{F(\varphi, \tilde{u}')}{F(\varphi, \tilde{u})} = \pm \frac{F(\varphi, \tilde{u}')}{F(\varphi, \tilde{u})} = \frac{F(\varphi, \tilde{u}') \tau}{F(\varphi, \tilde{u})} = \frac{\sum_{k=1}^n v_k F_{u_k}(\varphi, \tilde{u}')}{F(\varphi, \tilde{u})} \quad 12.5$$

Diese Definition für den Winkel wurde bereits von Finsler gegeben (vgl. [8]). Die Indikatrix eines Punktes $X \in \bar{\mathcal{K}}$ läßt sich in sehr einfacher Weise aus dem konvexen Körper $\bar{\mathcal{K}}$ ableiten. Ist X ein innerer Punkt von $\bar{\mathcal{K}}$, und legen wir durch X eine beliebige Gerade g , so schneidet diese die Oberfläche von $\bar{\mathcal{K}}$ in zwei Punkten S, T . Auf g gibt es genau zwei Punkte, die symmetrisch zu X liegen und der Indikatrix angehören. Man erhält sie durch folgende Konstruktion. Man spiegelt S und T am Punkt X und erhält die Punkte S' und T' . Zu den Punktripeln XST' bzw. XTS' konstruieren wir jeweils den vierten harmonischen Punkt X_1 bzw. X_2 , so daß die Proportionen $\overline{XT'} : \overline{XS} = \overline{IX_1} : \overline{X_1S}$ bzw. $\overline{XS'} : \overline{XT} = \overline{X_2S} : \overline{X_2T}$ erfüllt sind. Nunmehr ergeben sich die zwei gesuchten Punkte U_1 und U_2 der Indikatrix, indem man auf g vom Punkt X aus nach beiden Seiten die Strecken $\overline{XU_1} = \overline{XU_2} = \frac{1}{r_0} \overline{XX_1} = \frac{1}{r_0} \overline{XX_2} = u$ aufträgt. Der Beweis dieser Konstruktion ergibt sich aus der Gleichung der Indikatrix

$$\frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{\rho(\varphi, \tilde{u})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\tilde{u})} \right) = 1 \quad 12.6$$

Setzen wir $XS = r$, $XT = r'$, $XX_1 = r_1$, $XX_2 = r_2$, $\varphi = \varphi + \tilde{u}$,
 $r_1 = ur_0$, so folgt aus 12.6

$$\frac{r_0}{2} \left(\frac{u}{r} + \frac{u}{r'} \right) = 1 \quad 12.7$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{r_1(r' + r)}{2rr'} = 1 \quad \frac{r_1}{r'} = \frac{2r}{r + r'} \quad 12.8$$

Damit erhalten wir

$$\frac{r_1 - r'}{r - r_1} = \frac{2rr' - rr' - r'^2}{r^2 + rr' - 2rr'} = \frac{(r - r')r'}{(r - r')r} = \frac{r'}{r}$$

Das heißt aber, daß die Strecke ST' von XU harmonisch geteilt wird. Das Analoge gilt für den Punkt X_2 . Durchläuft g die Menge aller Geraden durch X , so erfüllen die Punkte X_1, X_2 eine geschlossene Fläche, mit dem Punkt X als Mittelpunkt. Die Indikatrix des Punktes X ist eine zu dieser Fläche ähnliche Fläche bezügl. des Ähnlichkeitszentrums X und ist zu ihr im Verhältnis $1 : r_0$ vergrößert. Übt man auf den Körper $\tilde{\mathcal{K}}$ eine Transformation τ aus, derart, daß $\tilde{\mathcal{K}}$ in sich selbst transformiert wird, und sind X und $\bar{X}$ zwei sich bei dieser Transformation entsprechende Punkte von $\tilde{\mathcal{K}}$, so werden die Tangentialräume $A_{\tilde{X}}^n$ und $A_{\bar{X}}^n$ affin transformiert [8]. Es sei $\varphi(t)$ eine von X ausgehende stetige Kurve mit stetiger Tangente, $\varphi(0) = \varphi(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$, $\dot{\varphi}(0) = \tilde{u}(u_1, \dots, u_n)$ ihr Tangentenvektor im Punkt X . Dann gilt, wenn $\bar{x}_k = \bar{x}_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ die Transformationsgleichungen von τ sind

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_k(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad 12.9$$

$$\bar{x}_K^*(0) = \sum_{i=1}^n a_{Ki} x_i^*(0) \text{ oder } \bar{u}_K = \sum_{i=1}^n a_{Ki} u_i, \quad 12.10$$

wobei $a_{Ki} = \frac{\partial \bar{x}_K(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ ist. $K = 1, 2, \dots, n$

Da die a_{Ki} nur von X abhängen, transformieren sich die u_K affin.

13. Die Winkelmessung.

Sind zwei Kurven $\varphi(t)$, $\eta(\tau)$ gegeben, die sich im Punkt $X(\varphi(0))$ mit $\varphi(0) = \eta(0)$ schneiden und sind $\check{u} = \dot{\varphi}(0)$, $\check{w} = \dot{\eta}(0)$ ihre Tangentenvektoren in X , so können wir den Winkel φ zwischen $\check{u}$ und $\check{w}$ nach Finsler, wie bereits in Gleichung 12,4 geschehen, definieren:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n v_i F_{u_i}(\varphi, \check{u})}{F(\varphi, \check{w})} = \cos(\check{u}, \check{w}; X). \quad 13.1$$

Der Ausdruck für $\cos \varphi$ ändert sich nicht, wenn man entweder $\check{u}$ oder $\check{w}$ oder beide durch $\lambda \check{u}$, $\mu \check{w}$ ($\lambda, \mu > 0$) ersetzt. Speziell ergibt sich für

$$\cos(\check{u}, \check{w}; X) = \frac{\sum_{i=1}^n v_i [P_{x_i}(\varphi, -\check{u}) P(\varphi, \check{u}) - P_{x_i}(\varphi, \check{u}) P(\varphi, -\check{u})] P(\varphi, \check{w}) P(\varphi, -\check{w})}{[P(\varphi, \check{w}) + P(\varphi, -\check{w})] P(\varphi, \check{u}) P(\varphi, -\check{u})} \quad 13.2$$

Offensichtlich ist im allgemeinen $\cos(\check{u}, \check{w}; X) \neq \cos(\check{w}, \check{u}; X)$.

$\cos(\check{n}, \vartheta; X) = \cos(\vartheta, \check{n}; X)$ gilt genau dann, wenn die Indikatrix eine Quadrik ist, z.B. ein n -dimensionales Ellipsoid oder eine n -dimensionale Kugel darstellt (vgl. [21], [8], [20]). Der zugehörige Finsler'sche Raum ist dann ein Riemann'scher Raum. Für $\check{n} = \vartheta$ erhalten wir

$$\cos(\check{n}, \check{n}; X) = 1 \quad . \quad 13.3$$

Daher ist $\varphi = 0$. Steht die Kurventangente $\dot{\gamma}(0) = \check{n}$ im Punkt X auf der Kurventangente $\dot{\gamma}(0) = \vartheta$ senkrecht, so wollen wir abkürzend dafür schreiben $\check{n} \perp \vartheta$. Dieses Senkrechtstehen ist eine unsymmetrische Relation. Das heißt, $\check{n} \perp \vartheta$ ist nicht gleichbedeutend mit $\vartheta \perp \check{n}$. Es ist üblich, statt $\check{n} \perp \vartheta$ zu sagen, daß ϑ zu $\check{n}$ transversal ist (vgl. [8] S. 36). Gilt $\check{n} \perp \vartheta$ für zwei vom Punkt X ausgehende Vektoren, so soll das heißen, daß ϑ in einer Hyperebene durch X liegt, die ihrerseits parallel ist zur Tangentialhyperebene im Punkt U_1 an die Indikatrix von X . U_1 ist dabei der Schnittpunkt des von X ausgehenden Strahles $s_{\check{n}}$ mit der Oberfläche der Indikatrix von X . Analytisch ist $\check{n} \perp \vartheta$ gleichbedeutend mit

$$\sum_{K=1}^n v_K F_{u_K}(\vartheta, \check{n}) = 0 \quad 13.4$$

oder mit

$$\sum_{K=1}^n v_K \left[\rho_{x_K}(\vartheta, \check{n}) \rho(\vartheta, -\check{n}) - \rho_{x_K}(\vartheta, -\check{n}) \rho(\vartheta, \check{n}) \right] = 0 \quad 13.5$$

Für die zu $\perp$ duale Relation ([7] S. 20) L gilt

$$\check{n} \perp \vartheta = \vartheta L \check{n} \quad 13.6$$

Ist n die Dimension des der Finsler'schen Geometrie $F_{\tilde{K}}^n$ zu Grunde gelegten Körpers $\tilde{K}$, so existieren für jeden inneren Punkt $X \in \tilde{K}$ n -Richtungen $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ mit $\tilde{u}_1 \perp \tilde{u}_2 \perp \tilde{u}_3 \dots \perp \tilde{u}_{n-1} \perp \tilde{u}_n$. Die Vektoren $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n$ sind nicht eindeutig bestimmt. Man kann sie wie folgt normieren:

$$\cos(\tilde{u}_j, \tilde{u}_k; X) = \delta_{jk} \quad 13.7$$

für alle $j, k = 1, 2, \dots, n$ mit $j \leq k$.

14. Bewegungen.

Wir betrachten im E_n einen konvexen Körper $\tilde{K}$, der eine verallgemeinerte Abstandsfunktion der Klasse $C^{(3)}$ besitzt. Dann können wir im Innern dieses Körpers einen Finsler-Raum $F_{\tilde{K}}^n$ mit dem Bogenelement $ds = F(\varphi, \dot{\varphi}) dt = \frac{1}{2} r_0 (\frac{1}{\rho(\varphi, \dot{\varphi})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\dot{\varphi})})$ definieren. Gibt es eine eindeutige Transformation τ , die den konvexen Körper $\tilde{K}$ so in sich transformiert, daß innere Punkte in innere Punkte, Randpunkte in Randpunkte, Gerade in Gerade übergehen, und Abstände und Winkel invariant bleiben, so soll diese Transformation eine Bewegung in dem betrachteten Finslerraum heißen. Eine solche Transformation muß notwendig eine Kollineation sein (vgl. [2] S. 47). Eine solche Transformation läßt bekanntlich Doppelverhältnisse invariant und damit auch den Abstand $d(A, B)$ zweier Punkte A, B . Sind $\bar{x}_k = \bar{x}_k(x_1, \dots, x_n)$ $k = 1, 2, \dots, n$ die Transformationsgleichungen einer derartigen Transformation, die den Punkt $X(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{K}$ in den Punkt $\bar{X}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \tilde{K}$ überführt, und wird dabei die Indikatrix des Punktes X in die Indikatrix des Punktes $\bar{X}$ transformiert, so bleibt das Winkelmaß invariant.

For a full description of the present state of the
the various subjects treated, the reader is referred to the
original works, which are to be found in the
library of the University of Cambridge.

The following is a list of the works which have been
examined by the author, and which are now in the
possession of the University of Cambridge.

The following is a list of the works which have been
examined by the author, and which are now in the
possession of the University of Cambridge.

The following is a list of the works which have been
examined by the author, and which are now in the
possession of the University of Cambridge.

Denn sind $\check{u}, \check{w}$ zwei vom Punkt X ausgehende Richtungsvektoren und $\bar{u}, \bar{w}$ die entsprechenden von $\bar{X}$ ausgehenden Richtungsvektoren, so gilt

$$\bar{u}_K = \sum_{i=1}^n a_{Ki} u_i, \quad \bar{v}_K = \sum_{i=1}^n a_{Ki} v_i \quad 14.1$$

$$a_{Ki} = \frac{\partial \bar{x}_K(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \quad k, i = 1, 2, \dots, n$$

Die Vektoren $\check{u}, \check{w}$ transformieren sich affin. Nun war nach 12.4

$$\cos(\check{u}, \check{w}; X) = \pm \frac{\overline{XU'}}{\overline{XV}} \quad 14.2$$

Dabei ist V der aus X durch die Translation um den Vektor $\check{w}$ hervorgegangene Punkt, U' der Schnittpunkt der Geraden XU mit der zur Tangentialhyperebene im Punkt U , der Indikatrix von X parallelen Hyperebene durch V . Da bei einer Affinität parallele Elemente wieder in parallele Elemente übergehen, erhält man den Punkt $\bar{U}'$ als Schnittpunkt der Geraden $\bar{X}\bar{U}$ mit der zur Tangentialhyperebene in $\bar{U}$, an die Indikatrix von $\bar{X}$ parallelen Hyperebene durch $\bar{V}$. Es ist dann

$$\cos(\bar{u}, \bar{w}; \bar{X}) = \pm \frac{\overline{\bar{X}\bar{U}'}}{\overline{\bar{X}\bar{V}}} \quad 14.3$$

Die Strecken $\overline{XV}, \overline{XU'}, \overline{\bar{X}\bar{V}}, \overline{\bar{X}\bar{U}'}$ werden durch die Metrik des jeweiligen Tangentialraumes A_X^n bzw. $A_{\bar{X}}^n$ bestimmt.

Da Teilverhältnisse bei einer Affinität erhalten bleiben, läßt sich die Gleichung

$$\frac{\overline{XU}}{\overline{XV}} = \frac{\overline{X'U'}}{\overline{X'V'}}$$

14.4

und damit die Invarianz des Winkelmaßes beweisen. Eine weit schwierigere Frage ist allerdings die nach der Existenz solcher Transformationen τ . Gibt man im euklidischen Raum E_n zwei Punkte $E_0, \bar{E}_0$, zwei Gerade $E_1, \bar{E}_1$, zwei Ebenen $E_2, \bar{E}_2$, zwei $E_3, \bar{E}_3$, usw. ... zwei lineare Teilräume $E_{n-1}, \bar{E}_{n-1}$ in der Weise vor, daß

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots E_{n-1}$$

$$\bar{E}_0 \subset \bar{E}_1 \subset \bar{E}_2 \subset \bar{E}_3 \dots \bar{E}_{n-1}$$

14.5

gilt, so existiert immer eine euklidische Bewegung, die E_i in $\bar{E}_i$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ überführt. Die Indikatrix ist im euklidischen Raum eine Kugel. Verwendet man an ihrer Stelle eine beliebige konvexe Fläche als Indikatrix, so ist von Helmholtz 1868, Lie 1890 und Weyl 1921 gezeigt worden, daß die einzige mögliche Indikatrix, bei der ebensolche Bewegungen wie oben angeführt existieren, eine nicht degenerierte, reelle, quadratische Hyperfläche ist (vgl. [17], [16], [21], [24]). Dies schränkt offensichtlich die Möglichkeit der Existenz von Bewegungen bei den von uns betrachteten Finsler'schen Räumen $F^n_{\mathcal{Q}}$ stark ein. Im allgemeinen gibt es in diesen Räumen keine Bewegungen, zumindest nicht in der Vielfalt, wie es Bewegungen im euklidischen oder im hyperbolischen Raum gibt. Daß es spezielle konvexe Körper $\mathcal{Q}$ gibt, wo

Die Untersuchung der ...

Die Untersuchung der ...

Die Untersuchung der ...

die durch diesen Körper definierte Finsler'sche Geometrie tatsächlich Bewegungen enthält, erkennt man sehr leicht. Hat z.B. der Körper $\mathcal{K}$ einen Mittelpunkt, so existiert sicher wenigstens eine (involutorische) Bewegung, die euklidische Spiegelung am Mittelpunkt von $\mathcal{K}$. Ebenso existieren Bewegungen, wenn $\mathcal{K}$ irgendwelche Symmetriehyperebenen besitzt. Ist $\mathcal{K}$ ein Rotationskörper, so existiert eine unendliche Menge von Bewegungen, die aus den Drehungen um die Rotationsachse und aus Spiegelungen an einer beliebigen durch die Achse gelegten Hyperebene bestehen. Wenn in der durch $\mathcal{K}$ bestimmten Finsler'schen Geometrie Bewegungen existieren, so bilden diese eine endliche oder unendliche Gruppe. Denn sind τ_1, τ_2 zwei Bewegungen, so ist auch $\tau_1 \tau_2$ eine Bewegung, wenn man unter $\tau_1 \tau_2$ die durch Hintereinanderausführung von τ_1 und τ_2 entstandene Transformation versteht. Da die Transformationen τ eindeutig sind, existiert zu jeder Bewegung τ die inverse τ^{-1} . Unter der Einheit soll die Identität verstanden werden.

15. Spezielle Finslerräume $F_{\mathcal{K}}^n$.

a) Der hyperbolische Raum.

Wählt man als konvexen Körper $\mathcal{K}$ ein Ellipsoid oder eine Kugel, so geht der Finslerraum $F_{\mathcal{K}}^n$ in den hyperbolischen Raum und die zugehörige Geometrie in die hyperbolische Geometrie über, und zwar erhält man das Klein-Cayley'sche Modell der Hyperbolischen Geometrie. Wir setzen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - R^2 = 0 \quad . \quad 15.1$$

Dann ergibt sich für $\rho(\epsilon, \eta)$

$$f(\varphi, \ddot{u}) = \frac{-\varphi \cdot \ddot{u} + \sqrt{(R^2 - \varphi^2) \ddot{u}^2 + (\varphi \cdot \ddot{u})^2}}{\ddot{u}^2} \quad 15.2$$

Mit $r_0 > 0$ erhalten wir für $F(\varphi, \ddot{u})$

$$F(\varphi, \ddot{u}) = r_0 \frac{\sqrt{(R^2 - \varphi^2) \ddot{u}^2 + (\varphi \cdot \ddot{u})^2}}{R^2 - \varphi^2} \quad 15.3$$

Bildet man das Linienelement $ds = F(\varphi, d\varphi)$, so erkennt man, daß es sich beim hyperbolischen Raum um einen speziellen Riemann'schen Raum handelt.

$$ds = r_0 \frac{\sqrt{(R^2 - \varphi^2) \dot{\varphi}^2 + (\varphi \cdot \dot{\varphi})^2}}{R^2 - \varphi^2} dt \quad 15.4$$

Dafür kann man auch schreiben

$$ds = r_0 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j} \quad 15.5$$

$$g_{ii} = r_0^2 \frac{R^2 - \varphi^2 + x_i^2}{(R^2 - \varphi^2)^2}, \quad g_{ij} = r_0^2 \frac{x_i x_j}{(R^2 - \varphi^2)^2} \quad 15.6$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Der Abstand zweier Punkte A, B, die im Innern der Kugel gelegen sind, ist dann durch die hyperbolische Metrik

$$d(A, B) = \frac{1}{2} |\ln(ABUV)| \quad 15.7$$

gegeben, wo U und V die Schnittpunkte der Geraden AB mit der Kugel $\mathcal{C}^2 = R^2$ sind. Der Winkel zwischen zwei von X($\mathcal{C}$) ausgehenden Richtungen $\check{u}, \check{v}$ ist gegeben durch

$$\cos(\check{u}, \check{v}; X) = \frac{(R^2 - \mathcal{C}^2)\check{u} \cdot \check{v} + (\mathcal{C} \cdot \check{u})(\mathcal{C} \cdot \check{v})}{\sqrt{[(R^2 - \mathcal{C}^2)\check{u}^2 + (\mathcal{C} \cdot \check{u})^2][(R^2 - \mathcal{C}^2)\check{v}^2 + (\mathcal{C} \cdot \check{v})^2]}} \quad 15.8$$

Man erkennt, daß der Winkel, wie bereits im Abschnitt 13 bemerkt wurde, unabhängig von der Reihenfolge seiner Schenkel ist.

$$\cos(\check{u}, \check{v}; X) = \cos(\check{v}, \check{u}; X) \quad 15.9$$

Für $\mathcal{C} = 0$ geht die hyperbolische Winkelmetrik in die euklidische Winkelmetrik über.

$$\cos(\check{u}, \check{v}) = \frac{\check{u} \cdot \check{v}}{|\check{u}| |\check{v}|} \quad 15.10$$

$$\check{u} \cdot \check{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad |\check{u}|^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2$$

Die Bewegungen sind in der hyperbolischen Geometrie, die Gruppe der Kollineationen, die die Kugel $\mathcal{C}^2 = R^2$ auf sich selbst abbilden. Man erkennt, daß $\cos(\check{u}, \check{v}; X)$ im Fall einer Drehung der Kugel invariant bleibt. Denn in diesem Fall gilt $\mathcal{C}^2 = \bar{\mathcal{C}}^2, \mathcal{C} \cdot \check{u} = \bar{\mathcal{C}} \cdot \bar{\check{u}}, \mathcal{C} \cdot \check{v} = \bar{\mathcal{C}} \cdot \bar{\check{v}}, \check{u} \cdot \check{v} = \bar{\check{u}} \cdot \bar{\check{v}}$. Es bleibt aber sogar $\cos(\check{u}, \check{v}; X)$ bei jeder hyperbolischen Bewegung bis aufs Vorzeichen invariant. Für $n = 3$ sieht man das wie folgt ein.

Wir setzen

$$p_{12} = x_1 u_2 - u_1 x_2, p_{31} = x_3 u_1 - u_3 x_1, p_{23} = x_2 u_3 - u_2 x_3 \quad 15.11$$

$$p_{14} = u_1, \quad p_{24} = u_2, \quad p_{34} = u_3.$$

Die p_{ik} sind die Strahlenkoordinaten einer durch X gehenden Geraden parallel zum Richtungsvektor $\vec{u}$. Analog dazu führen wir die Koordinaten q_{ik} einer anderen Geraden durch X parallel zu $\vec{u}$ ein, und erhalten mit

$$\bar{\Phi}(p,p) = R^2(p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2) - (p_{12}^2 + p_{31}^2 + p_{23}^2) = 0 \quad 15.12$$

die Gleichung der absoluten Fläche in Strahlenkoordinaten. Unter Beachtung von 15.11 geht 15.8 in

$$\cos \varphi = \frac{\bar{\Phi}(p,q)}{\sqrt{\bar{\Phi}(p,p) \bar{\Phi}(q,q)}} \quad 15.13$$

über. Das stimmt überein mit dem im Lehrbuch von L. Heffter [14] auf Seite 157 behandelten Kosinusquadrat eines Geradenpaars, wenn man berücksichtigt, daß bei Heffter Normalkoordinaten verwendet werden. Da $\bar{\Phi}(p,p)$, $\bar{\Phi}(q,q)$, $\bar{\Phi}(p,q)$ bei hyperbolischen Bewegungen bis auf Multiplikation mit einem Faktor invariant bleiben ändert sich $\cos^2 \varphi$ bzw. $\cos \varphi$ abgesehen vom Vorzeichen nicht. Man erkennt, daß in 15.13 $\cos \varphi$ unabhängig von X ist. Die Gleichung 15.13 gilt auch für zwei sich nicht schneidende Geraden.

b) Der elliptische Raum.

Ersetzt man in 15.3 den Vektor e durch ie , wo i die imaginäre Einheit ($i^2 = -1$) ist, so erhält man das Bogenelement für das Klein'sche Modell der elliptischen Geometrie

$$ds = F(ie, die) = r_0 \frac{\sqrt{(R^2 + e^2) d e^2 - (e \cdot de)^2}}{R^2 + e^2} \quad 15.14$$

Um auf die übliche Form zu kommen, führen wir homogene Koordinaten ein $x_k = \frac{y_k}{y_0}$, $dx_k = \frac{y_0 dy_k - y_k dy_0}{y_0^2}$ $k = 1, 2, \dots, n$. Dann geht 15.14 über in

$$ds = F^*(y, dy) = r_0 \frac{\sqrt{(R^2 y_0^2 + \sum_k y_k^2) \sum_k (y_0 dy_k - y_k dy_0)^2 - (\sum_k y_k (y_0 dy_k - y_k dy_0))^2}}{y_0 (R^2 y_0^2 + \sum_k y_k^2)} \quad 15.15$$

Durch eine einfache Rechnung erhält man aus 15.15

$$ds = F^*(y, dy) = r_0 \frac{\sqrt{(R^2 y_0^2 + \sum_k y_k^2) (\sum_k dy_k^2 + R^2 dy_0^2) - (\sum_k y_k dy_k + R^2 y_0 dy_0)^2}}{(R^2 y_0^2 + \sum_k y_k^2)} \quad 15.16$$

Führen wir schließlich noch Normalkoordinaten ein, indem wir setzen

$$\xi_k = \frac{y_k}{\sqrt{R^2 y_0^2 + \sum_\ell y_\ell^2}}, \quad \xi_0 = \frac{R y_0}{\sqrt{R^2 y_0^2 + \sum_\ell y_\ell^2}}, \quad 15.17$$

$k = 1, 2, \dots, n; \ell = 1, 2, \dots, n$

so ergibt sich, wenn wir die Beziehung

$$\sum_{j=0}^n d_{\frac{y}{r}}^2 = \frac{\sum_k (dy_k)^2 + R^2 (dy_0)^2}{R^2 y_0^2 + \sum_l y_l^2} - \frac{(R^2 y_0 dy_0 + \sum_l y_l dy_l)^2}{(R^2 y_0^2 + \sum_l y_l dy_l)^2} \quad 15.18$$

beachten und $r_0 = 1$ setzen,

$$ds = \sqrt{\sum_{k=0}^n (d\xi_k)^2} \quad 15.19$$

Das ist aber das Bogenelement beim Klein'schen Modell der elliptischen Geometrie (vgl. [14] S.156). Für den Kosinus des Schnittwinkels zweier Geraden erhalten wir

$$\cos(\tilde{u}, \tilde{w}; X) = \frac{(R^2 + \varphi^2) \tilde{u} \cdot \tilde{w} - (\varphi \cdot \tilde{u})(\varphi \cdot \tilde{w})}{\sqrt{(R^2 + \varphi^2) \tilde{u}^2 - (\varphi \cdot \tilde{u})^2} \sqrt{(R^2 + \varphi^2) \tilde{w}^2 - (\varphi \cdot \tilde{w})^2}} \quad 15.20$$

Im dreidimensionalen Raum führen wir wieder Strahlenkoordinaten wie in 15.11 für die Geraden $p : \varphi' = \varphi + \lambda \tilde{u}$ und $q : \varphi' = \varphi + \mu \tilde{w}$ ein

$$p_{12} = x_1 u_2 - u_1 x_2 \dots$$

$$p_{14} = u_1, p_{24} = u_2, p_{34} = u_3$$

$$q_{12} = x_1 v_2 - v_1 x_2 \dots$$

$$q_{14} = v_1, q_{24} = v_2, q_{34} = v_3$$

setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \Phi(p, p) &= R^2 (p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2) + p_{12}^2 + p_{31}^2 + p_{23}^2 \\ \Phi(p, q) &= R^2 (p_{14} q_{14} + p_{24} q_{24} + p_{34} q_{34}) + p_{12} q_{12} + \\ &\quad + p_{31} q_{31} + p_{23} q_{23} \end{aligned} \quad 15.21$$

so erhalten wir

$$\cos(p, q) = \frac{\Phi(p, q)}{\sqrt{\Phi(p, p) \Phi(q, q)}} \quad 15.22$$

Das stimmt mit der üblichen Darstellung überein (vgl. 10 S. 157). Dabei verstehen wir unter $\cos(p, q)$ den Kosinus des Schnittwinkels der Geraden p, q . Gleichung 15.22 ist unabhängig von X und gilt auch für zwei Geraden p, q , die sich nicht schneiden, wenn die Strahlenkoordinaten p und q gegeben sind. Ebenso wie im hyperbolischen Raum gilt für 15.20

$$\cos(\tilde{n}, \tilde{q}; X) = \cos(\tilde{q}, \tilde{n}; X) \quad 15.23$$

Es muß bemerkt werden, daß der elliptische Raum unter den im Abschnitt 8 definierten Finsler'schen Räumen $F_{\tilde{K}}^n$ nicht enthalten ist, weil die absoluten Punkte dieser Räume immer reelle Punkte der Oberfläche des zu Grunde gelegten konvexen Körpers $\tilde{K}$ sind, was im Fall des elliptischen Raumes sicher nicht gilt.

Vermutlich kann man jedem Finslerraum $F_{\tilde{K}}^n$ einen Finslerraum $\bar{F}_{\tilde{K}}^n$ so zuordnen, wie man dem hyperbolischen Raum den elliptischen Raum zuordnen kann. Man erhält eine Art von isotroper Geometrie, wenn man anstelle der konvexen Hyperfläche $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ein paralleles Hyperebenenpaar verwendet. Der Raum dieser Geometrie ist der von beiden Hyperebenen begrenzte Teilraum.

16. Übertragung von Konstruktionen des euklidischen-
und des hyperbolischen Raumes auf den $F_{\tilde{K}}^n$.

Wir können nun in dem durch den n -dimensionalen, konvexen Körper $\tilde{K}$ gegebenen n -dimensionalen Finslerraum $F_{\tilde{K}}^n$ Teilräume definieren. Die Gesamtheit aller inneren Punkte von $\tilde{K}$ sollen zugängliche Punkte, die Randpunkte von $\tilde{K}$ absolute oder uneigentliche Punkte von $F_{\tilde{K}}^n$ heißen. Ein m -dimensionaler, linearer Teilraum $F_{\tilde{K}}^m \subset F_{\tilde{K}}^n$ ($m < n$) wird erklärt als die Menge aller Punkte X , die zu $\tilde{K}$ und zu einem linearen Teilraum E_m des den Körper $\tilde{K}$ enthaltenden euklidischen Raum E_n gehören.

$$F_{\tilde{K}}^m = E_m \cap \tilde{K} \quad 16.1$$

Offensichtlich ist dann eine Gerade mit der euklidischen Verbindungsstrecke zweier Randpunkte von $\tilde{K}$ identisch. Zwei Gerade heißen parallel, wenn sie einen absoluten Punkt gemeinsam haben. Unter einer Kugel $K_n(m, r)$ mit dem Mittelpunkt m und dem Radius r im Finslerraum $F_{\tilde{K}}^n$ werde die Menge aller Punkte X verstanden, für die die Bedingung

$$d(X, m) \leq r \quad 16.2$$

erfüllt ist. Für die Punkte der Kugeloberfläche gilt

$$d(X, m) = r \quad 16.3$$

Setzen wir für $r = \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \ln(C)$ mit $C > 1$, so erhalten wir die in ψ und ω symmetrische Beziehung

1. Die Bedeutung der ...

und die ...

2. Die ...

3. Die ...

4. Die ...

5. Die ...

6. Die ...

7. Die ...

8. Die ...

9. Die ...

10. Die ...

...

...

...

11. Die ...

12. Die ...

13. Die ...

14. Die ...

15. Die ...

16. Die ...

...

...

...

17. Die ...

...

...

18. Die ...

...

$$d(X, m) = \frac{r_0}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\rho(m, m-\varphi)}}{1 - \frac{1}{\rho(m, \varphi-m)}} \right] = \frac{r_0}{2} \ln C, \quad (16.4)$$

(r_0 > 0)

wobei φ bzw. m die Ortsvektoren der Punkte X bzw. M sind. Die Gleichung 16.4 ergibt, wenn man sie vereinfacht

$$\frac{C}{C-1} \frac{1}{\rho(m, \varphi-m)} + \frac{1}{C-1} \frac{1}{\rho(m, m-\varphi)} = 1 \quad (16.5)$$

Für $C \rightarrow \infty$ erhält man $\rho(m, \varphi-m) = 1$. Das ist die Gleichung der Oberfläche von $\tilde{\mathcal{K}}$.

Da $d(X, m)$ in X und m symmetrisch ist, kann man statt dessen auch die Gleichung

$$\frac{C}{C-1} \frac{1}{\rho(\varphi, m-\varphi)} + \frac{1}{C-1} \frac{1}{\rho(\varphi, \varphi-m)} = 1 \quad (16.6)$$

für die Oberfläche der n -dimensionalen Kugel $K_n(m, r)$ angeben. Gleichung 16.5 und 16.6 stellen die Oberfläche eines n -dimensionalen konvexen Körpers $\tilde{\mathcal{K}}_n \subset \mathcal{K}$ dar. Der Punkt m ist ein innerer Punkt von $\tilde{\mathcal{K}}_n$. Die linke Seite der Gleichung 16.5 ist als Funktion von $\varphi - m$ für festes m die Rihovskitsche Distanzfunktion $F_m(\varphi - m)$ des konvexen Körpers $\tilde{\mathcal{K}}_n$, wenn man m als Koordinatenursprung auffaßt. $\tilde{\mathcal{K}}_n$ ist in $\mathcal{K}$ enthalten; denn alle Punkte X , die der Gleichung $d(X, m) = r$ genügen, sind innere Punkte von $\mathcal{K}$, sofern r endlich und m selbst ein innerer Punkt von $\mathcal{K}$ ist. Die Gleichung 16.6 gilt im Gegensatz zu 16.5 für $C \rightarrow \infty$ nicht mehr.

Schneidet man die verallgemeinerte Kugel $K_n(m, r)$ mit einer Hyperebene $F_{\tilde{\mathcal{K}}}^{n-1}$, die den Punkt m enthält, so bekommt man als Schnittmannigfaltigkeit einen $(n-1)$ -dimensionalen, konvexen Körper, der eine verallgemeinerte Kugel $K_{n-1}(m, r)$ des $F_{\tilde{\mathcal{K}}}^{n-1}$ darstellt.

Der Schnitt eines $F_{\mathcal{K}}^{n-1}$, der m nicht enthält mit $K_n(m, r)$ ergibt, falls $F_{\mathcal{K}}^{n-1} \cap K_n(m, r) \neq \emptyset$ ist, einen $(n-1)$ -dimensionalen konvexen Körper $\mathcal{K}_{n-1}$ des $F_{\mathcal{K}}^{n-1}$ und damit auch des E_{n-1} , in dem $F_{\mathcal{K}}^{n-1}$ enthalten ist. Ob dieser konvexe Körper wieder eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel $K_{n-1}(m_1, r_1)$ des $F_{\mathcal{K}}^{n-1}$ ist, muß offen bleiben. Sind in $F_{\mathcal{K}}^n$ zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, so existiert auf der Strecke AB genau ein Punkt m , der A und B voneinander trennt mit der Eigenschaft

$$d(A, m) = d(m, B) \quad 16.7$$

m heiße der Mittelpunkt der Strecke AB . Man erhält ihn in folgender Weise

$$\frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_A \cdot r_m}{r'_A \cdot r'_m} \right) = \frac{r_0}{2} \ln \left(\frac{r_B \cdot \bar{r}_m}{r'_B \cdot \bar{r}'_m} \right) \quad 16.8$$

Dabei gilt $\bar{r}_m = r'_m$ und $\bar{r}'_m = r_m$. Hieraus folgt bereits, daß m zwischen A und B liegt. Die Annahme $\bar{r}_m = r_m, \bar{r}'_m = r'_m$ führt zum Widerspruch $A = B$. Somit finden wir schließlich

$$\frac{r_m}{r'_m} = \sqrt{\frac{r_B \cdot r'_A}{r'_B \cdot r_A}} \quad 16.9$$

Da sich die Striche bei r'_m, r'_A und r'_B auf die gegenseitige Lage von m, A, B beziehen, kann man schließen, daß die Bedingung

$$\frac{r'_B}{r_A} \leq \frac{r_m}{r'_m} \leq \frac{r_B}{r'_B} \quad 16.10$$

gilt.

Wir betrachten nunmehr die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^n$, die von zwei festen Punkten A, B gleichen Abstand haben. Für diese Punkte gilt

$$d(A, X) = d(X, B) \quad . \quad 16.11$$

Offensichtlich ist der Punkt M , der Mittelpunkt der Strecke AB , mit unter den Punkten dieser Menge enthalten. Die Punkte X bilden eine gewisse Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$. Die Gleichung dieser Hyperfläche lautet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(a, x-a)} + \frac{1}{\rho(a, x-b)} - \frac{1}{\rho(a, x-a)\rho(b, x-b)} &= \frac{1}{\rho(b, x-b)} \\ &+ \frac{1}{\rho(b, x-a)} - \frac{1}{\rho(a, x-a)\rho(b, x-a)} \quad . \end{aligned} \quad 16.12$$

Wir wollen diese Hyperfläche die zur Strecke AB gehörige Medianfläche nennen. Dabei sollen nur die Punkte X zur Medianfläche gerechnet werden, die die Gleichung 16.12 erfüllen und innere Punkte von $\tilde{\mathcal{K}}$ sind. Daß es solche Punkte gibt, sieht man am Beispiel des Punktes M . Es wird die Gleichung 16.12 auch durch die Randpunkte von $\tilde{\mathcal{K}}$ erfüllt, weil für jeden Randpunkt S die Beziehungen $\rho(a, x_s - a) = \rho(b, x_s - b) = 1$ erfüllt sind. Diese Randpunkte wollen wir im allgemeinen nicht zur Medianfläche rechnen. Ebenso sollen die Punkte X , die die Gleichung 16.12 erfüllen, jedoch außerhalb von $\tilde{\mathcal{K}}$ liegen, nicht zur Medianfläche zählen.

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 1. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 10-11

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 2. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 12-13

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 3. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 14-15

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 4. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 16-17

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 5. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 18-19

Die folgenden Angaben sind zu entnehmen
an der 6. Seite des Protokolls vom 1. April 1904
S. 20-21

Ist in dem Körper $\mathcal{K}$, der in E_n enthalten ist, ein n -dimensionales Simplex gegeben, dessen $n+1$ Eckpunkte sämtlich Punkte von $\mathcal{K}$ sind, so soll diese Simplex ein n -Simplex des $F_{\mathcal{K}}^n$ heißen. Im allgemeinen werden die Medianflächen der $\binom{n+1}{2}$ verschiedenen Kanten des n -Simplex keinen gemeinsamen Punkt m haben. Haben jedoch die Medianflächen der n von einem Eckpunkt des n -Simplex ausgehenden Kanten einen Punkt m gemein, dann gehen auch alle übrigen Medianflächen durch diesen Punkt m . Der Punkt m hat die Eigenschaft, daß er von den $n+1$ Eckpunkten $A_0, A_1, \dots, A_n$ des n -Simplex gleichen Abstand hat. Setzen wir

$$d(m, A_0) = d(m, A_1) = \dots = d(m, A_n) = r ,$$

16.13

dann gibt es eine verallgemeinerte Kugel $K_n(m, r)$ mit der Gleichung $d(x, m) = r$, die durch die Punkte $A_0, A_1, \dots, A_n$ hindurchgeht. Im Fall $n=2$ wird die Medianfläche zum Mittellot. Ist außerdem der Körper $\mathcal{K}$ ein Kreis, so wird aus dem n -Simplex ein hyperbolisches Dreieck und falls sich zwei der Mittellote dieses Dreiecks in einem Punkt schneiden, so geht auch das dritte Mittellot durch diesen Schnittpunkt und das Dreieck besitzt einen Umkreis. In diesem Fall sind die Mittellote Geraden (vgl. [1] S. 98).

Ist in der Regel $\frac{1}{2}$, das in $\frac{1}{2}$ enthalten ist, die
n-Regelungen dieser gegeben, dessen bei
einfachen Regeln von $\frac{1}{2}$ ab, so soll diese
ein $\frac{1}{2}$ Regel sein $\frac{1}{2}$ haben. In allgemeinen werden die
Regelungen der $\frac{1}{2}$ von dem Namen des
n-Regelungen gegeben, dass in dem Namen des
nach die Regelungen der n von dem Namen
des n-Regelungen gegeben, dass ein Name in
gibt, dass geben auch die $\frac{1}{2}$ in Regelungen
dieses Name in $\frac{1}{2}$, das Name in $\frac{1}{2}$ in Regelungen
ist es von dem $\frac{1}{2}$ in Regelungen $\frac{1}{2}$, das
n-Regelungen gegeben, dass ein Name in

Das ist die Regelungen der $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
mit der Ordnung der $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$, das auch die
n-Regelungen, das ist $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
Regelungen der $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$, das auch der Regel
in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$, so wird die $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
Regelungen, dass von $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
dieses Name in einem Name gegeben, so wird
nach von $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
und die Regelungen der $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$
ist die Regelungen der $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}$

III. Die Abstandsfunktion in der Potentialtheorie =====

17. Die Berechnung von Volumenpotentialen.

Es sei ein konvexer Körper $\mathcal{K}$ im E_3 gegeben, der mit Masse konstanter Dichte κ belegt ist. Dann ergibt sich für einen Punkt $X \in \mathcal{K}$ das Newton'sche Potential zu

$$V_i(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{K}} \frac{\kappa d\tau'}{r} \quad 17.1$$

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

κ konstant .

Liegt $X(x, y, z)$ im Innern von $\mathcal{K}$, so läßt sich dieses dreifache Integral mit Hilfe der Abstandsfunktion $\rho(\vartheta, \mu)$ des konvexen Körpers $\mathcal{K}$ in ein Doppelintegral verwandeln. Dazu setzen wir $x' = x + ur$, $y' = y + vr$, $z' = z + wr$, $u = \sin\vartheta \cos\varphi$, $v = \sin\vartheta \sin\varphi$, $w = \cos\vartheta$, $d\tau' = r^2 dr d\vartheta d\varphi$, so erhalten wir

$$V_i(\vartheta) = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\rho(\vartheta, \mu)} \kappa r dr d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \int \int_{E_X} \kappa \rho^2(\vartheta, \mu) d\vartheta d\mu \quad 17.2$$

$$|\mu| = 1 .$$

Dabei erstreckt sich das Oberflächenintegral über E_X

111. Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Es ist bekannt, dass Cholesterin in der Natur
als Isomerie vorliegt. Die Isomerie von
Cholesterin ist eine Folge der Isomerie von
Cholesterin.

112. Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin ist eine Folge der Isomerie von
Cholesterin. Die Isomerie von Cholesterin ist
eine Folge der Isomerie von Cholesterin.

113. Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin

Die Einwirkung des Lichts auf die Isomerie von
Cholesterin ist eine Folge der Isomerie von
Cholesterin.

die Einheitskugel mit dem Punkt X als Mittelpunkt und $\rho(\varrho, n)$ ist die verallgemeinerte Abstandsfunktion von $\tilde{\mathcal{K}}$. Diese Darstellung gilt für alle Punkte $X \in \tilde{\mathcal{K}}$, auch für die Randpunkte von $\tilde{\mathcal{K}}$. Für die erste Ableitung erhält man

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \iiint_{\tilde{\mathcal{K}}} \frac{x(x' - x)}{r^3} d\tau' \quad 17.3$$

Führen wir wie in 17.1 räumliche Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \int_{E_X} x \rho(\varrho, n) u \, d\varrho \quad 17.4$$

Im Fall, daß $\tilde{\mathcal{K}}$ eine Kugel vom Radius R ist, ergibt sich für $\rho(\varrho, n) = -\varrho \cdot n + \sqrt{R^2 - \varrho^2 + (\varrho \cdot n)^2}$. Somit erhalten wir für $V_i(\varrho)$

$$V_i(\varrho) = x \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^2 \, d\varrho + \frac{x}{2} (R^2 - \varrho^2) \iint_{E_X} d\varrho - x \iint_{E_X} (\varrho \cdot n) \sqrt{R^2 - \varrho^2 + (\varrho \cdot n)^2} \, d\varrho.$$

Das letzte Integral verschwindet, weil der Integrand $f(\varrho, n)$ die Bedingung $f(\varrho, -n) = -f(\varrho, n)$ erfüllt. Das erste Integral läßt sich umformen. Denn es gilt

$\varrho \cdot n = |\varrho| \cos(\varrho, n) = |\varrho| \cos \alpha$. Setzen wir $d\varrho = \sin \alpha \, d\alpha \, d\varphi$, so ergibt sich

Die Untersuchung der ...
...
...

...

...

...

$$\int_{E_X} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 d\mathbf{e} = \varrho^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi = 2\pi \varrho^2 \left[\frac{\cos^3 \alpha}{3} \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \varrho^2.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$V_i(\varrho) = \frac{4\pi \kappa}{3} \varrho^2 + \frac{\kappa}{2} (R^2 - \varrho^2) 4\pi = 2\pi \kappa \left(R^2 - \frac{1}{3} \varrho^2 \right).$$

Dies stimmt offensichtlich mit dem richtigen Wert überein. Nehmen wir an, es sei die Dichte κ eine Funktion von x, y, z , dann erhalten wir für $V_i(\varrho)$ im Fall der Kugel, wenn wir speziell

$$\kappa(\varrho') = \kappa_0 (R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2).$$

$$V_i(\varrho) = \int_{E_X} \int_0^{\rho(\varrho, \mathbf{n})} \kappa(\varrho + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) r dr d\mathbf{e} \quad 17.5$$

$$\text{Dann ist } \kappa(\varrho + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = \kappa_0 R^2 - \kappa_0 \varrho^2 - 2\kappa_0 \varrho \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - r^2 \kappa_0.$$

$$\begin{aligned} V_i(\varrho) &= \frac{1}{2} \kappa_0 (R^2 - \varrho^2) \int_{E_X} \rho^2(\varrho, \mathbf{n}) d\mathbf{e} - \frac{2}{3} \kappa_0 \int_{E_X} (\varrho \cdot \mathbf{n}) \rho^3(\varrho, \mathbf{n}) d\mathbf{e} \\ &\quad - \frac{1}{4} \kappa_0 \int_{E_X} \rho^4(\varrho, \mathbf{n}) d\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist bekannt, das zweite und dritte zerlegen wir

$$\begin{aligned} \rho^3(\varrho, \mathbf{n}) &= -(\varrho \cdot \mathbf{n})^3 + 3(\varrho \cdot \mathbf{n})^2 \sqrt{\lambda} - 3(\varrho \cdot \mathbf{n}) [R^2 - \varrho^2 + (\varrho \cdot \mathbf{n})^2] + (\sqrt{\lambda})^3 \\ \lambda &= R^2 - \varrho^2 + (\varrho \cdot \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Danach erhalten wir für

$$\begin{aligned} \iint_{E_X} (\varrho \cdot n) \rho^3 d\mathbf{e} &= - \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^4 d\mathbf{e} - 3(R^2 - \varrho^2) \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^2 d\mathbf{e} \\ &\quad - 3 \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^4 d\mathbf{e} . \end{aligned}$$

Für $\iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^4 d\mathbf{e}$ ergibt sich

$$\varrho^4 \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^4 \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi = \varrho^4 \frac{2\pi}{5} (-\cos^5 \alpha) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{5} \pi \varrho^4 .$$

Somit also

$$\iint_{E_X} (\varrho \cdot n) \rho^3 d\mathbf{e} = - 4 \cdot \frac{4}{5} \pi \varrho^4 - (R^2 - \varrho^2) 4\pi \varrho^2 .$$

Entsprechend erhält man für $\iint_{E_X} \rho^4 d\mathbf{e}$

$$\iint_{E_X} \rho^4 d\mathbf{e} = 8 \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^4 d\mathbf{e} + 8(R^2 - \varrho^2) \iint_{E_X} (\varrho \cdot n)^2 d\mathbf{e} + (R^2 - \varrho^2)^2 \iint_{E_X} d\mathbf{e} = \frac{32}{5} \pi \varrho^4 +$$

Sonach hat man insgesamt für $V_i(\varrho)$ $+ \frac{32}{3} \pi (R^2 - \varrho^2) \varrho^2 + (R^2 - \varrho^2)^2 4\pi .$

$$V_i(\varrho) = \kappa_0 (R^2 - \varrho^2) 2\pi (R^2 - \frac{1}{3} \varrho^2) + \frac{32}{15} \pi \kappa_0 \varrho^4 + \frac{8\pi}{3} \kappa_0 (R^2 - \varrho^2) \varrho^2$$

$$- \frac{8}{5} \pi \kappa_0 \varrho^4 - \frac{8\pi}{3} (R^2 - \varrho^2) \kappa_0 \varrho^2 - (R^2 - \varrho^2)^2 \kappa_0 \pi .$$

$$V_i(\varrho) = \pi \mathcal{H}_0 (R^2 - \varrho^2) \left(R + \frac{1}{3} \varrho^2 \right) + \frac{8}{15} \pi \mathcal{H}_0 \varrho^4 \quad 17.6$$

Die Niveauflächen sind konzentrische Kugeln. Die zugehörigen Potentialwerte variieren zwischen

$$\frac{8}{15} R^4 \pi \mathcal{H}_0 \leq V_i(\varrho) \leq R^4 \pi \mathcal{H}_0 \quad 17.7$$

18. Bewegung von Teilchen in einem widerstehenden Medium.

Wir denken uns ein Kraftzentrum, das auf ein bewegtes Teilchen eine Bremskraft ausübt, die proportional der Geschwindigkeit des Teilchens und umgekehrt proportional dem Abstand des Teilchens vom Zentrum ist. Außerdem soll nur dann eine Kraftwirkung zustande kommen, wenn die Tangente der Bahnkurve des Teilchens durch das Kraftzentrum hindurchgeht. Ferner denken wir uns einen konvexen Körper $\mathcal{K}$, der der Einfachheit halber die Dimension $n = 2$ haben soll. Doch können die folgenden Überlegungen auf höhere Dimensionen übertragen werden. Der zweidimensionale konvexe Körper wird begrenzt durch eine geschlossene, konvexe Kurve. Belegen wir diese Randkurve stetig mit Kraftzentren der obigen Art, wobei wir jedes dieser Zentren als punktförmig und mit konstanter Intensität der Kraftwirkung annehmen wollen, so wirkt auf ein sich im Inneren des konvexen Körpers bewegendes Teilchen in jedem Fall eine Kraft, die seine Bewegung hemmen will. Es hat den Anschein, als würde sich das Teilchen in einem Medium befinden, das der Bewegung des

Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen

Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen

Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen

Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen

Die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen

Teilchens einen gewissen Widerstand entgegensetzt. Dieser Widerstand wird umso größer, je näher das Teilchen dem Rand des Körpers kommt. Für ein Teilchen, das sich an der Stelle $X(\varrho)$ befindet und dort die Bahngeschwindigkeit $\dot{u}$ hat, ergibt sich für die Widerstandskraft, wenn wir die verallgemeinerte Abstandsfunktion $\rho(\varrho, \dot{u})$ des konvexen Körpers $\bar{K}$ einführen

$$p_r = -\frac{C}{2} \left[\frac{1}{\rho(\varrho, \dot{u})} + \frac{1}{\rho(\varrho, -\dot{u})} \right] \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad 18.1$$

$$(C > 0).$$

Hierbei ist C ein zunächst willkürlicher Proportionalitätsfaktor. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Bahntangente im Punkt X mit dem Rand des konvexen Körpers $\bar{K}$ mit S_1, S_2 , so erhalten wir für den Betrag der Kraft

$$p_r = \frac{C}{2} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] u \quad 18.2$$

Dabei ist $|\dot{u}| = u$ und $\overline{XS_1} = \rho(\varrho, \dot{u})|\dot{u}| = r_1$, $\overline{XS_2} = \rho(\varrho, -\dot{u})|\dot{u}| = r_2$ gesetzt worden. Soll sich ein Teilchen von einem Punkt A nach einem Punkt B bewegen und verlangt man, daß dabei die gegen die Widerstandskraft geleistete Arbeit ein Minimum sein soll, so muß die Variation des Linienintegrals von A nach B verschwinden. das heißt, es muß

$$\delta \int_A^B |p_r| ds = 0 \quad 18.3$$

gelten. Da dieses Variationsprinzip formal mit dem

Teilweise kann man sich auch vorstellen, dass die

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

(3.3)

... ..

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

... ..

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

... ..

im Abschnitt 9 behandelten Variationsprinzip übereinstimmt, ergibt sich, daß die Bahn des Teilchens von A nach B die euklidische Verbindungsgerade AB sein muß.

19. Das Reibungsmoment bei einem Zapfenlager.

Es sei ein Zapfen von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius r_0 gegeben, der sich in einer Lagerschale von ebenfalls kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius R drehen kann. Wir nehmen an, daß der Mittelpunkt des Zapfenquerschnitts einen Abstand e vom Mittelpunkt des Querschnitts der Lagerschale hat.

Abb. 2

Die Achse des Zapfens und die Achse der Lagerschale seien zueinander parallel. Der Zwischenraum zwischen Zapfen und Lagerschale sei durch ein Schmiermittel der Viskosität μ ausgefüllt. Wir nehmen weiter an, daß der Zapfen sich mit der Geschwindigkeit $\omega = 2\pi n$ im mathematisch positiven Sinn drehe. Die Geschwindigkeit

eines Punktes der Zapfenoberfläche ist dann $u = r_0 \omega$. Zwischen Zapfen und Lagerschale soll sich eine laminare Flüssigkeitsströmung so ausbilden, daß an der Zapfenoberfläche die Flüssigkeit die Geschwindigkeit $v = u$, an der Lagerschale die Geschwindigkeit $v = 0$ hat.

Nach Newton wirkt auf ein Oberflächenelement $dl \cdot r_0 \cdot d\varphi$ des Zapfens die Reibungskraft

$$dP_r = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_0} dl \cdot r_0 \cdot d\varphi \quad . \quad 19.1$$

Wir machen nun für das Geschwindigkeitsgefälle den Ansatz

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{C}{2} \left[\frac{1}{\rho(\varphi, \vec{u})} + \frac{1}{\rho(\varphi, -\vec{u})} \right] \quad . \quad 19.2$$

$\rho(\varphi, \vec{u}) = \frac{1}{\vec{u}^2} [-\varphi \cdot \vec{u} + \sqrt{(R^2 - \varphi^2) \vec{u}^2 + (\varphi \cdot \vec{u})^2}]$ ist die verallgemeinerte Abstandsfunktion des auf das Koordinatensystem $O(x, y)$ bezogenen Lagerquerschnitts $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ und $\vec{u}$ ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $X(x, y)$ der Zapfenoberfläche. Führen wir ein Polarkoordinatensystem mit dem Pol im Mittelpunkt O' des Zapfenquerschnittes ein und verwenden den Winkel φ , der von der Geraden OO' ausgezählt wird, so erhalten wir für φ und $\vec{u}$

$$\varphi(x, y) = \varphi(r_0 \cos \varphi - e, r_0 \sin \varphi)$$

$$\vec{u}(u_1, u_2) = \vec{u}(-u \sin \varphi, +u \cos \varphi) \quad .$$

Somit ergibt sich für $\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_0}$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -u C \frac{\sqrt{R^2 - (r_0 - e \cos \varphi)^2}}{R^2 - r_0^2 + 2r_0 e \cos \varphi - e^2} \quad . \quad 19.3$$

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Handwritten text in the middle section of the page.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Large block of handwritten text, likely the main body of a proof or explanation.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Für das Reibungsmoment M_r bezogen auf die Längeneinheit erhalten wir

$$M_r = \int_0^{2\pi} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=r_0} r_0^2 d\varphi \quad . \quad 19.4$$

Setzen wir hierin den Ausdruck für $\frac{\partial v}{\partial r}$ ein und ziehen wir alle konstanten Größen vor das Integral, so ergibt sich

$$M_r = -2\mu r_0^2 u C I \quad . \quad 19.5$$

Dabei gilt

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{R^2 - (r_0 - e \cos \varphi)^2}}{R^2 - r_0^2 + 2r_0 e \cos \varphi - e^2} d\varphi$$

$$0 \leq e \leq R - r_0 \quad .$$

Für den Faktor C setzen wir

$$C = \sqrt{\frac{R+r_0}{R-r_0}} \quad 19.5$$

Dann erhalten wir im Fall $e = 0$ für M_r

$$M_r = -2\pi\mu r_0^2 u \sqrt{\frac{R+r_0}{R-r_0}} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R^2 - r_0^2} d\varphi \quad .$$

Diese Gleichung geht für $d = R - r_0$ über in

$$M_r = -2\pi\mu r_0^2 u \frac{1}{R-r_0} = -2\pi\mu r_0^2 \frac{u}{d} \quad . \quad 19.6$$

Das ist die bekannte Gleichung von Petrow für das Reibungsmoment bei konzentrischer Stellung des Zapfens (vgl. [22] S. 244 - 252).

Das Integral I ist ein elliptisches Integral und die Zurückführung auf die Normalformen ziemlich mühsam. Wir verkleinern statt dessen den Zähler des Integranden etwas, indem wir schreiben

$$\tilde{I} = \int_0^\pi \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2 + 2r_0 e \cos \varphi - e^2}}{R^2 - r_0^2 + 2r_0 e \cos \varphi - e^2} d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 - r_0^2 + 2r_0 e \cos \varphi - e^2}} \quad .$$

Es ist $\tilde{I} \leq I$. Führen wir den halben Winkel $\psi = \frac{1}{2}\varphi$ ein, so erhalten wir

$$\tilde{I} = 2 \int_{\psi=0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - r_0^2 - e^2 + 2r_0 e (1 - 2\sin^2 \psi)}}$$

und mit $k^2 = \frac{4r_0 e}{R^2 - (r_0 - e)^2} \leq 1$ schließlich

$$\tilde{I} = \frac{2}{\sqrt{R^2 - (r_0 - e)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{2}{\sqrt{R^2 - (r_0 - e)^2}} K(k) \quad .$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$|M_r| \geq 2\mu r_0^2 u \sqrt{\frac{R+r_0}{R-r_0}} \cdot \frac{2}{\sqrt{R^2-(r_0-e)^2}} K(k) \quad 19.6$$

Für $e = 0$ geht $K \rightarrow 0$ und man erhält für die rechte Seite, da $K(0) = \frac{1}{2}\pi$ die Formel von Petrow. Für $e \rightarrow R - r_0$ geht $k \rightarrow 1$ und $K(k) \rightarrow \infty$. Daher geht auch I und somit $M_r \rightarrow \infty$. Für den relativen Fehler

$\frac{I - \tilde{I}}{I}$ erhält man

$$\delta_{|M_r|} = \delta I = \frac{I - \tilde{I}}{I} \leq \frac{I - \tilde{I}}{\tilde{I}} \leq \frac{e^2}{R^2 - r_0^2} \leq \frac{R - r_0}{R + r_0} \quad 19.7$$

Da r_0 nur wenig kleiner als R ist, wird der Fehler nicht allzu groß. Außerdem kann man noch für M_r die folgende Abschätzung angeben.

$$2\pi\mu u r_0^2 \sqrt{\frac{(R+r_0)}{(R-r_0)(R^2-(r_0-e)^2)}} \leq |M_r| \leq 2\pi\mu u r_0^2 \sqrt{\frac{R+r_0}{(R-r_0)(R^2-(r_0+e)^2)}} \quad 19.8$$

Für $e \rightarrow 0$ strebt die obere wie auch die untere Schranke gegen die Formel von Petrow. Für $e \rightarrow R - r_0$ geht die obere Schranke gegen ∞ und die untere Schranke gegen den endlichen Wert $\frac{\pi\mu u r_0^2}{R-r_0} \sqrt{\frac{R+r_0}{r_0}}$.

Um eine brauchbare Näherungsformel zu haben, wenden wir auf das Integral I die Kepler'sche Faßregel mit

Bestimmung des ...

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Die Ableitung von $f(x) = x^{-2}$ ist ...

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$

Die dritte Ableitung ist ...

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5}$$

Die vierte Ableitung ist ...

$$f^{(4)}(x) = \frac{240}{x^6}$$

Die fünfte Ableitung ist ...

der Schrittweite $h = \frac{1}{2}\pi a n$. Das ergibt

$$I \approx \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 - (r_0 - e)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (r_0 + e)^2}} + 4 \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R^2 - r_0^2 - e^2} \right]$$

Damit hat man für M_r

$$M_r \approx -\pi \mu u r_0^2 \frac{1}{3} \sqrt{\frac{R + r_0}{R - r_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 - (r_0 - e)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (r_0 + e)^2}} + 4 \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R^2 - r_0^2 - e^2} \right]$$

Über den Fehler, der hierbei entsteht, soll im nächsten Abschnitt noch etwas gesagt werden.

20. Vergleich des Ergebnisses mit der Sommerfeld'schen

Theorie.

A. Sommerfeld hat in einer bekannten Arbeit [22] eine Formel für das Reibungsmoment bei einem Zapfenlager angegeben. Sie lautet

$$|M_r| = \frac{2\pi \mu u r_0^2}{d \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1 + 2x^2}{1 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{2\pi \mu u r_0^2}{d \sqrt{1 - x^2}} y(x) \quad 20.1$$

Hierbei bedeutet $d = R - r_0$ und $x = \frac{e}{d}$, $0 \leq x \leq 1$.
Wie man sieht ergibt sich für $x = 0$ ebenfalls die Formel von Petrow. Sommerfeld kommt zu seinem Ergebnis

Der Schnittwinkel α ist durch die Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}}$$

bestimmt, wenn man die

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

aus der Definition des Sinus erhält, weil im rechtwinkligen Dreieck

der Sinus als das Verhältnis des Gegenkatheten zum Hypotenuse

$$\sin \alpha = \frac{1}{M}$$

Es folgt, dass die Zeitdauer Δt in einem Bezugssystem K die Zeitdauer Δt_0 in einem anderen Bezugssystem K_0 um den Faktor M vergrößert wird.

$$\Delta t = M \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sin \alpha}$$

Man beachte, dass die Zeitdauer Δt in einem Bezugssystem K die Zeitdauer Δt_0 in einem anderen Bezugssystem K_0 um den Faktor M vergrößert wird.

dadurch, daß er auf Grund der Integration der vereinfachten Differentialgleichungen für die schleichende Bewegung als Reibungsdruck pro Flächeneinheit folgende Gleichung findet.

$$p_{\varphi\varphi} = -\mu u \left(\frac{1}{h} - \frac{3h_0}{h^2} \right) \quad 20.2$$

Dabei wird ein Polarkoordinatensystem wie im Abschnitt 19 zu Grunde gelegt.

$$h(\varphi) = \rho(\varphi, \pi) \quad , \quad h_0 = d \frac{d^2 - e^2}{d^2 + \frac{1}{2}e^2} = h(\varphi_0) \quad ,$$

$$\pi = \pi(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad , \quad \varphi_0 = \varphi_0(r_0 \cos \varphi - e, r_0 \sin \varphi) \quad ,$$

$$h(\pi) < h_0 < h(0).$$

$\rho(\varphi, \pi)$ ist dabei die Abstandsfunktion des Lagerschalenquerschnitts $\varphi^2 - R^2 = 0$ bezogen auf das Koordinatensystem $O(x, y)$.

$$h(\varphi) = \rho(\varphi, \pi) = -(r_0 - e \cos \varphi) + \sqrt{R^2 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad 20.3$$

Sommerfeld vernachlässigt e gegenüber R und erhält für $h(\varphi)$ den Näherungswert

$$h(\varphi) \approx R - r_0 + e \cos \varphi = d + e \cos \varphi = h_s(\varphi) \quad 20.4$$

... das ... der ...
... die ...
... die ...

... (1777)

... die ...
... die ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... die ...
... die ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

... (1777) ...

Man kann auch den Sommerfeld'schen Ausdruck für den Reibungsdruck 20.2 durch die verallgemeinerte Abstandsfunktion darstellen. Es ergibt sich dann

$$p_{r\varphi} = -\mu u \left[\frac{1}{\rho(\varrho, \eta)} - \frac{3\rho(\varrho, \eta)}{\rho^3(\varrho, \eta)} \right] \quad 20.5$$

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0(r_0 \cos \varphi - e, r_0 \sin \varphi), \quad \eta = \eta_0(\cos \varphi, \sin \varphi) \\ \eta_0 &= \eta_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) \end{aligned}$$

Betrachten wir die verschiedenen Näherungswerte für das Reibungsmoment, die im vorigen Abschnitt abgeleitet wurden, so haben wir zunächst die obere Schranke in den Ungleichungen 19.8

$$|M_r| \approx 2\pi\mu u r_0^2 \sqrt{\frac{R + r_0}{(R - r_0)(R^2 - (r_0 + e)^2)}}$$

Diesen Ausdruck formen wir um und erhalten

$$|M_r| \leq \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1+x}{1+cx}} = \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} y_1(x),$$

$$\text{Dabei ist } c = \frac{R - r_0}{R + r_0}.$$

Entsprechend erhält man für die untere Schranke

$$|M_r| \geq \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x}{1-cx}} = \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} y_2(x).$$

Für die nach der Kepler'schen Faßregel entstandene Formel ergibt sich

Das ist auch der Grund, weshalb man die Werte für die
 Halbwertszeit nicht über die verschiedenen
 Methoden bestimmen kann. Es ergibt sich dann

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0.693}{\lambda}$$

Es ist also möglich, die Halbwertszeit zu berechnen, wenn
 der Zerfallskonstante λ bekannt ist.

Man erhält also die Halbwertszeit, wenn man die
 Zerfallskonstante λ in der Formel einsetzt.
 Ist λ in s^{-1} angegeben, so erhält man die
 Halbwertszeit in Sekunden. Ist λ in min^{-1} angegeben,
 so erhält man die Halbwertszeit in Minuten.

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Man kann also die Halbwertszeit berechnen, wenn man
 die Zerfallskonstante λ kennt.

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda}$$

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Es ist also möglich, die Halbwertszeit zu berechnen, wenn
 der Zerfallskonstante λ bekannt ist.

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda}$$

Es ist also möglich, die Halbwertszeit zu berechnen, wenn
 der Zerfallskonstante λ bekannt ist.

$$|M_r| \approx \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{6} \left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-cx}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-cx}} - \frac{4\sqrt{1-x^2}}{1-cx^2} \right],$$

$$|M_r| \approx \frac{2\pi\mu u r_0^2}{d\sqrt{1-x^2}} y_K^{(x)}.$$

Man erkennt, daß alle drei Formeln hinsichtlich des ersten Faktors mit der Sommerfeld'schen Formel übereinstimmen. In Bild 3 sind die Faktoren $y_S(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_K(x)$ für das Intervall $0 \leq x \leq 1$ dargestellt. Außerdem sind noch zwei Grenzkurven $y_+(x)$ und $y_-(x)$ eingezeichnet. Die durch den genauen Integralwert erhaltene Kurve, muß man sich zwischen $y_+(x)$ und $y_-(x)$ verlaufend vorstellen. Diese Kurve hat im Punkt $x = 0$, $y = 1$ eine horizontale und im Punkt $x=1$, $y=0$ eine vertikale Tangente. Man erkennt, daß die Kurven $y_1(x)$ bzw. $y_+(x)$ am besten mit der Sommerfeld'schen Kurve $y_S(x)$ übereinstimmen. Die maximale relative Abweichung von der Sommerfeld'schen Kurve beträgt bis 33 %. In Bild 3 ist der Verlauf des Reibungsmomentes nach Sommerfeld und nach der Formel, die durch die Kepler'sche Faßregel entsteht, dargestellt. Man sieht, daß beide Formeln dieselbe Grundtendenz zeigen, daß aber die nach Kepler gewonnene Formel wesentlich schwächer als die Sommerfeld'sche Formel gegen Unendlich geht.

Abb. 3

Literaturverzeichnis

- [1] R. Baldus,
F. Löbell Nichteuklidische Geometrie
Sammlung Götschen Bd. 970, Walter de
Gruyter & Co. Berlin 1953
- [2] W. Blaschke Projektive Geometrie
Verlag Birkhäuser Basel 1954
- [3] L.M. Blumenthal Theory and Applications of Distance-
Geometry
Oxford Clarendon Press 1953
- [4] O. Bolza Vorlesungen über Variationsrechnung
Koehler & Amelang/Leipzig 1949
- [5] T. Bonnesen ,
W. Fenchel Theorie der konvexen Körper
Ergebnisse der Mathematik und ihrer
Grenzgebiete, Springer Verlag Berlin 1934
- [6] C. Caratheodory Variationsrechnung und partielle
Differentialgleichungen
1935 Leipzig und Berlin Verl.B.G.
Teubner
- [7] A. Csaszar Allgemeine Topologie
B. G. Teubner Verl. Leipzig 1963
- [8] P. Finsler Über Kurven und Flächen in allge-
meinen Räumen
Verl. Birkhäuser/Basel 1951
- [9] P. Funk Variationsrechnung und ihre An-
wendung in Physik und Technik
Springer Verl. Berlin/Göttingen/
Heidelberg 1962

- [10] I.M. Gelfand,
S.E. Schilow
Verallgemeinerte Funktionen
VEB Deutscher Verlag der
Wissenschaften Berlin/1960
- [11] St. Golab,
H. Härten
Minkowski'sche Geometrie I., II.
Monatshefte Math. Phys. Bd 38/1931)
S. 387-398
- [12] St. Golab
A propos de la metrique angulaire
des espaces de Finsler
Opusc. math. Krakow 2, 129-137
- [13] H. Hahn
Reelle Funktionen 1. Teil
Chelsea Publishing company
231 west 29 the Street, New York
1, n.Y. 1948
- [14] L. Heffter
Grundlagen und analytischer Auf-
bau der Geometrie
B.G. Teubner Verl. Ges. Leipzig 1950
- [15] H. Helmholtz
Über Tatsachen, die der Geometrie
zu Grunde liegen.
Götting. Nachr. 193-221; Wissensch.
Abhdl. II 613-639
- [16] D. Laugwitz
Differentialgeometrie in Vek-
torräumen
VEB Deutscher Verl. der Wissensch.
Berlin 1965 (S. 58)
- [17] S. Lie
Über die Grundlagen der Geometrie
I. II.
Ber. Sächs. Ges. d. Wissensch.
Leipzig 42 284 - 321; 355-418
- [18] Mangelst-Knopp
Einführung in die höhere
Mathematik 2. Bd.

- [19] B. Riemann
Über die Hypothesen, welche
der Geometrie zu Grunde liegen.
Habil. Vortrag Göttingen
3. Aufl. Springer Verl. Berlin 1923
- [20] W. Rinow
Die innere Geometrie der
metrischen Räume
Springer Verl. Berlin-Göttingen-
Heidelberg
- [21] I. A. Scouten
Rioci-Calculus
Springer Verl. Berlin-Göttingen-
Heidelberg 1954
- [22] A. Sommerfeld
Mechanik der deformierbaren
Medien
Geest & Portig K.-G. Leipzig
1954 S. 244-252
- [23] O. Varga
Über eine Klasse von Pinsler'
schen Räumen, die die nicht-
euklidischen verallgemeinern
Comment. Math. Helv. 19. 367-380
- [24] H. Weyl
Raum, Zeit, Materie
4. Aufl. Springer, Berlin 300 pp