Studiorum Mathematicorum.

Fasc: III.

Arithmetica infinitorum cum theoria Curvarum et Logarithmorum.

Arithmetica insti-
tutorum

1. Si quantitas quaelibet dabilis [illegible] dividatur per numerum quemcunque [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

2. Quantitas [illegible] [illegible] quantitates [illegible] quantitas [illegible]

Arithmetica infinitorum.

1. Si quantitas quaelibet dabilis et assignabilis A. dividatur per numerum quemcunque e.g. binarium, prodit dimidia pars quantitatis A. Si dimidia haec pars $\frac{1}{2}A$. iterum dividatur per numerum binarium, et quotiens qui prodit denuo; et sic continuetur sine fine, seu sine fine continuata haec divisio intelligatur; prodibit tandem quantitas omni dabili et assignabili minor; quae alias etiam INFINITE PARVA appellatur.

2.) Quantitas omni dabili et assignabili minor in respectu alius quantitatis A. quae est dabilis et assignabilis, pro nihilo reputanda est, ut itaque quantitas omni dabili et assignabili minor quantitatem dabilem et assignabilem, cui additur vel subducitur neq augeat neq minuat, et sit $A + m = A. = A - m$

3. Patet tamen ex §. 1. quantitatem omni dabili et assignabili minorem per se non nihilum esse, sed veram quantitatem. Nam cum in divisione qua neq dividendus neq divisor nihilo aequantur, quotiens nihilo aequalis esse nequit, post repetitam sine fine hanc divisionem tandem quidem quotiens prodit omni dabili et assignabili quantitate minor, qui vero tamen est aliquid et non aequatur nihilo.

4. Ex eodem §. 1. patet quantitates omni dabili et assignabili minores inter se esse posse in omni dabili et assignabi-

lisatione. Sint A. et B. quantitates dabiles et assignabiles, et dividatur quaelibet per numerum binarium sine fine, ut h. l. dictum est, donec prodeant quantitates omni dabili et assignabili minores. Sit illa quae ex A oritur a et quae ex B. oritur b. et quoniam numerus divisorum, uti assumitur, aequalis, erit omnino a. ad b. ut numerus A ad B.

5. Eadem ratione patet, dari quantitates, quae respectu ejus quae infinite parva est, iterum sit infinite parva; respectu hujus dantur aliae infinite parvae et sic in infinitum.

6. Quantitas, ad quam dabilis quaelibet et assignabilis quantitas est ut infinite parva ad dabilem s. finitam quantitatem, INFINITE MAGNA appellatur.

7. Ex iis, quae ad §. 2. dicta sunt ultro patet etiam dari infini-

te magnorum infinite magna in infinitum.
8. Sicut itaq infiniti ordines infinitorum, ad quos significandos iisdem indicibus vti possumus, quibus dignitates quantitatum assignamus: Quantitas scilicet dabilis et assignabilis est infinitum ordinis nullius, hoc est non infinita sed finita est; Ab hoc ordine finitorum ad vtrumq latus progrediuntur ordines infinitorum in infinitum, ab ~~vno~~ altero latere infinite magnorum, ab altero infinite parvorum; alterutrorum indices si sumantur positivi, reliquorum erunt negativi.
Ut si infinite parvorum indices sumantur positivi erit infinite parvum respectu dabilis et finitae quantitatis, quantitas ordinis infinitorum

primi; infinite paruum infinite parui, quantitas ordinis infinitorum secundi, et sic in infinitum; Eadem ratione erit quantitas ad quam dabilis et finita quantitas est, vt infinite parua ad ~~i~~ finitum, s. infinite magna; quantitas ordinis infinitorum primi, negative sumtis; infinite magnum infinite magni quantitas ordinis infinitorum secundi, negative, et sic vlterius in infinitum.

9. Quae §. praecedenti de signis ordinum infinitorum dicta sunt, minime ita intelligenda erunt, ac si necessitatis sit, ordinem finitorum indice v. assignari significari, et eum, ad quem dari definite magna est, primum appellari. Nam quanquam appellationi horum ordinum quod scilicet ordines sint infinitorum, maxime conueniat ordinem finitorum, tanquam or-

quantitatum vero infinitorum
per se, indice u. assignari; nihil
tamen impedit, quo minus qui-
libet ordo infinitorum pro
primo, ejus vicinus ab una
latere pro secundo, ab altero
latere pro tertio et sic porro
assumi possit.
10. Si itaq quantitas ordinis
infinitorum, quae vi legis
9. prior: est mta, assumatur
pro primo, erit ejus infinite
magnum s. ordo primus pro-
prie ordine mtitus, quan-
titas infinite parua primi
generis proprie ordinis
m-1. ta. et in genere quanti-
tas, quae respectu ordinis
mti est ntus, erit proprie se
legem 9. 8. $\overline{n+m}$ ta.
11. Index ordinis producti ae-
quatur summae indicum ordi-
nis in factoribus. Sit e.g. A quan-
titas ordinis m. et B. quantitas

ordinis n; et erit A×B. quantitas ordinis m+n. Nam est

1: A = B.: A×B.

Cum igitur sit 1. quantitas finita erit A. ad A×B. vt quantitas ordinis 0. ad quantitatem ordinis m. Quoniam autem B. est ordinis n; erit vi hypothesis A×B. omnino quantitas ordinis m+n.

12. Eadem ratione patet differentiam, quae prodit indicem ordinis in divisore ab indice dividendi subtrahendo, aequari indici ordinis in quotiente.

13. Hinc consequitur, in quantitate infinite parva primi generis a. exponentes dignitatum simul indicare ordines infinitorum quas dignitates istae subjiciuntur.

14. Si quantitas finita dividatur per infinite parvam ordinis m. prodit infinite magna ordinis m. et vice versa.

15. Si in quantitatem infinite parvam dividatur finita quan- 6

quotiens est quantitas infi-
nite parua.

16. Si in quantitatem infinite
paruam ordinis m. ducatur
quantitas finita productum
etiam est quantitas infinite
parua ordinis m.

17. Si quantitas ordinis infini-
torum m. addatur quanti-
tati ordinis cujus index mi-
nor est m; neq auget neq mi-
nuit, sed pro 0. reputanda est.
Nam consideratis indicibus
ordinum uti §pho docebatur, erit quantitas ordinis
m. respectu quantitatis ordi-
nis m-1. pro nihilo aestiman-
da. Eo magis hoc locum ha-
bet respectu quantitatum or-
dinis cujus index minor est.

18. ELEMENTUM s. DIFFEREN-
TIALE quantitatis cujus-
cunq A. appellant quantita-
tem, qua quantitas A. cujus-

respectu est infinite parva, augeri incipit vel desinit, uti ipsa quantitas A. elementi sui INTEGRALE audit.

19. Intelligimus enim quantitatem quamlibet, quando augetur vel minuitur, augendo vel minuendo quasi fluere per omnes quantitates: particulas respectu quantitatis ipsius infinite parvas, quae ipsam hanc quantitatem constituunt.

20. Integrale ipsius elementi E: significant litera S. quantitati E. praefixae, hoc modo. S.E.

21. Ad significandum elementum s. differentiale quantitatis cujuslibet, utuntur litera d. qua significatur quantitas infinite parva primi ordinis: quae ducta in quantitatem ~~dA~~ A. hoc modo dA. indicat elementum seu differentiale quantitatis A.

22. Eodem modo ddA. s. d^2A

indicat elementum quantitatis dA. nec non ddA s. d^2A indicat elementum quantitatis ddA et sic porro.

23. Quantitatem differentiare idem est ac data aequatione pro quantitate invenire aequationem pro elemento.

24. Elementum quantitatis integrare, idem est ac data aequatione pro elemento quantitatis invenire aequationem pro ipsa quantitate, eamq in quantitatibus ejusdem ordinis cum integrali ipse.

25. Quoad differentiationem quantitatum monenda sunt sequentia.

Si quantitas augetur vel minuitur necesse est quantitates quasdam, quae aequationem ingrediuntur crescere vel decrescere debere. Non vero necesse est omnes has quantitates crescere vel decrescere, sed possunt etiam quaedam mutata ipsa quantitate, manere immutatae. Sit e.g. $y = 3 + m$. erit per quemvis numerum y explicetur, 3. constans quae pars, m. vero pro numero illo, per quem y. explicatur variabit. Si e.g. $y = 4$. erit $m = 1$. si $y = 5$. erit $m = 2$ si $y = 6$. erit m 3. si $y = 3$. erit $m = 0$.

26. Quantitates, quae aequationem ingrediuntur dicuntur variabiles, si mutata quantitate, cujus aequationem constituunt crescunt vel decrescunt. Constantes vero appellantur quae neque crescunt neque decrescunt, quomodocunque quantitas, cujus aequationem ingrediuntur mutetur.

27. In subsidium memoriae, ut quantitatis variabilitas vel invariabilitas semper ob oculos habeatur, quantitates variabiles posterioribus literis alphabeti ut v. x. y. z. constantes vero prioribus a. b. c. etc. significare consuevimus.

28. Quantitatis constantis differentiale est nihilum. Nam quantitas constans, quatenus est constans, neq crescit neq decrescit, quapropter nihil est quod augeatur vel minuatur, ut ipsa itaq si a. fuerit quantitas constans in aequatione quadam, fit differentiale τὸ a. fit 0.

29. Si quantitates variabiles quae aequationem ingrediuntur quantitatis A. augeantur elementis suis; illud quod

crevit ov ipso quantitas ipsa A. est elementum s. differentiale quantitatis A. Habebitur igitur differentiale quantitatis A. si quantitates variabiles quantitatis A. augeantur elementis suis, hoc est, pro x ponendo in aequatione x+dx. et subtrahendo à quantitate sic orta, quantitatem A.

30. Monendum est si duae vel plures quantitates variabiles aequationem ingrediantur, e. g. x. et y. omnium earum elementa inter se non semper necessario sunt aequalia, sed dx. illud est, quo quantitas variabilis x. crescit, quoties y. crescit quantitate dy. et si itaque dx et dy licet utraque sit quantitas infinite parva, propterea tamen non sint aequales.

31. Quantitatis $x+y-z$ quae pluribus partibus tam positivis, quam negativis constat, differentiale habetur differentiando quamlibet partem, easundemque elementa iisdem signis sibi jungenda. Nam si quantitatum $x+y-z$ augeatur quaelibet elemento suo, erit $x+dx+y+dy-z-dz$ inde si subtrahatur $x+y-z$ erit $dx+dy-dz$ quod est elementum ipsius quantitatis $x+y-z$.

32 Si harum quantitatum altera vtra sit constans, ejus elementum est 0. Hinc erit quantitatis $a+x+y=dx+dy$

33 Quantitatis xy. quae est productum ex quantitatibus x. et y. elementum est $xdy+ydx$ seu summa productorum ex vtraque quantitate in elementum alterius:

Nam si crescant x. et y. elementis suis dx et dy. prodit $\overline{x+dx} \times \overline{y+dy} = xy + ydx + xdy + dxdy$. Si itaq. subducatur xy. relinquetur pro elemento $xdy + ydx + dxdy = xdy + ydx$ ob $dxdy$ quantitatem secundi ordinis, quae reliquas primi ordinis non auget.

34 Inde etiam patet differentiatio producti $v \times x \times y \times z$. ex pluribus factoribus orti. Nam differentiale τοῦ $v \times x \times y \times z$. est
$vxydz + zdvxy$. Est autem
$d.vxy = vxdy + yd.vx$ et $d.vx = vdx + xdv$ proinde $vxydz + zd.vxy$ s. elementum quantitatis $vxyz$ est
$vxydz + zvxdy + zyvdx + zyxdv$.

35. Hinc ultro sequitur differentiale quantitatis x^m esse $mx^{m-1}dx$

36. Si inter factores producti quantitates sint constantes, earum differentialia evadunt 0. Hinc producta quae [illegible]

differentialia existantium quantitatum ingrediuntur evanescunt et fit e.g. quantitatis ax elementum adx. Eadem ratione est $d.\overline{axy} = axdy + aydx$ et $d.\overline{abxy} = abxdy + abydx$.

37. Quoniam $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ haec quantitas $\sqrt[n]{x^m}$ differentiatur secundum regulam §phi 35. et igitur fit $d.\sqrt[n]{x^m}$ $= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx.$

38. Differentiale quotientis xy. est $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ quod elementum habetur differentiale divisoris ducendo in dividendum et contra differentiale dividendi in divisorem, factumque ex posteriori auferendo et residuum per quadratum divisoris dividendo

Nam quia $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ erit $d.\frac{x}{y}$ $= d.(xy^{-1}) = y^{-1}dx + x\,d.y^{-1}$ sed est $d.y^{-1} = -1y^{-2}dy$ atq hinc elementum $d.\frac{x}{y}=$ $y^{-1}dx - y^{-2}xdy = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

Idem etiam demonstratur hoc modo. Si quantitates variabiles x et y. in quotiente $\frac{x}{y}$ augeantur elementis suis, prodit $\frac{x+dx}{y+dy}$ et dividendo $y+dy$ in $x+dx$ prodit $\frac{x}{y} + \frac{dx}{y+dy} - \frac{xdy}{y^2+ydy}$ et subtrahendo quantitatem $\frac{x}{y}$ relinquitur pro elemento $\frac{dx}{y+dy} - \frac{xdy}{y^2+ydy}$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$$

$$= \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2}$$

$$= \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

39. Ex regulis differentiationis quas in §phis praecedentibus dedimus jam patet, contingere posse, ut duarum pluriumve quantitatum inaequalium

elementa sint aequalia eadem, id q
partim propter quantitates con
stantes aequationem ingredientes
fieri poterit; est e. g. quantita
tis $a + x$ elementum dx. quod est
etiam elementum ipsius quanti
tatis x. Idem evenire potest
ob exponentes dignitatum
heterogeneis ordinis, ita sim.
sit numerus infinitus, erit dif
ferentiale quantitatis $x^m =$
$m\,x^{m-1}dx = m\,x^m dx$. et quan
titatis $x^{1/m}$ elementum est
$1/m\,x^{-1}dx$. quod etiam est elemen
tum $-1/m\,x^0$

40. Circa integrationem elemento
rum hoc praeliminariter est no
tandum, quod ea rite facta esse
inde probetur, si ex differentia
tione hujus integralis secun
dum regulas, quas §phis prae
cedentibus docuimus factas,
elementum integrandum prodit.

41. Hinc verum est integrationem elementorum peragi posse methodo inuersa differentiationis:
Est itaq;

$$S.dx = x.$$

$$S.dx \pm dy = x \pm dy.$$

$$S.(xdy + ydx) = xy.$$

$$S.\, mx^{m-1}dx = x^{m}.$$

etc.

Sed de harum quarundam et aliarum formularum integratione in subsequentibus paragraphis ex instituto agendum erit.

42. Quoniam vero uti jam §. 39. monuimus eadem differentialia producant, sive quantitates constantes variabilibus adjectae fuerint, sive non; integrale quantitatis dx esse potest vel x vel $x+a$ vel $x-a$. et integrale quantitatis $xdy+ydx$ esse possit vel xy. vel $xy\pm a^2$ vel $xy\pm ab$ et sic porro; Integrali elementi cujuslibet secundum regulam §phi praec: invento, ut sit verum integrale quaesitum, adjiciendu est quantitas alia $\pm C$. cujus valor invenitur ponendo variabilem in aequatione 0. Nam tum ipsum integrale 0. esse debet. Si igitur ponendo $x=0$ integrale secundum regulam §phi praec: inventum non sit 0. sed majus vel minus, illud ipsum quo a 0. differt signo contrario affectum est C. integrali secundum regulam §phi praec: invento, adjici-

Hoc est si $\int$. fuerit integrale secundum regulam §phi inventum, illudq positu $x = v$ excedat τὸ C. quantitate $\pm a$. erit $\pm a = C$ Nam $\int + C$ est Integrale verum posito $x = v$ fit ex $\int + C$ $\pm a + C = 0$ hinc $\mp a = C$.

43. Si Integrale secundum regulam §phi inventum nullis partibus constat, sed est vel productum unum vel quotiens unus, hoc C semper est v. hoc est integrale ex regula §phi inventum verum est integrale, cui correctio quaedam opus non est.

44. Si elementum constat partibus quotlibet et quibuslibet, integrale illius est aggregatum ex integralibus harum partium; ita quidem ut quod §. de Quantitate C. adjicienda dictum hic minime negligendum sit.

45. Paragrapho jam monitum est quod elementi $m x^{m-1} dx$

integrale esse x^m. Hinc consequitur regula integrandi quantitatis $x^m dx$. quae est dignitas τῆς x. ducta in elementum radicis. Habetur scilicet integrale τῆς $x^m dx$. exponentem m augendo unitate, et novum exponentem $m+1$ ducendo in differentiale ~~x~~dx. per hoc productum dividendo dignitatem x^{m+1} ut prodeat $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Nam quoniam $m+1$. est quantitas constans; differentiale τῆς $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ erit omnino $x^m dx$. G proinde $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ est integrale τῆς $x^m dx$.

46. Quantitatem $\frac{1}{x^m}dx = x^{-m}dx$ et $\sqrt[n]{x^m}dx = x^{\frac{m}{n}}dx$ juxta eandem regulam integrari posse, per se patet.

47. Si in $x^m dx$. ducta sit alia quantitas constans a. Quantitatis hujus $ax^m dx$ integrale est $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ quod idem est

cum integrali $r\bar{o}$. $x^m dx$. [illegible]
cto inconstantem hanc: a.
Nam si ponatur
$a x^m = z$. erit
$\cancel{a} x^m = \frac{z}{a}$ $x = \frac{z^{1/m}}{a^{1/m}}$

$dx = \frac{1/m\, z^{\frac{1+m}{m}} dz}{a^{1/m}}$ proinde

$a x^m dx = \frac{z^{1/m}}{m . a^{1/m}} dz$

$\frac{a x^m dx\, m a^{1/m}}{z^{1/m}} = dz =$

$\frac{m a^{\frac{1+m}{m}} x^m dx}{\cancel{z^{1/m}}\, a^{1/m}\, x} = m \cancel{a^{m+1}} x^{m+1} dx$

$= m x^{m+1} dx. = dz$
integrando fit
$\frac{m . x^{m+2} \cancel{dx}}{m+2} = z$

De Logarithmis

[illegible]

De Logarithmis.

1. Si e. fuerit elementaris quantitas s. infinite parva respectu quantitatis x. ratio $x : x+e$ dicitur RATIO ELEMENTARIS.

2) Si series continue proportionalium, cujus terminus quidam $r+e$. et huic praecedens r. ita ut series progrediatur in ratione elementari $r+e : r$. in infinitum; dico terminos quoslibet hujus seriei vicinos differre quantitate infinite parva.

Termini vicini sunt $m$tus et $m+1$.tus. Sed terminus $m$tus est $\overline{r+e}^{m}$ et terminus $m+1$tus $\overline{r+e}^{m+1}$. proinde eorum differentia

$$\overline{r+e}^{m+1} - \overline{r+e}^{m} = (\overline{r+e} \times \overline{r+e}^{m}) - \overline{r+e}^{m}$$
$$= (\overline{r+e} - r) \times \overline{r+e}^{m} = e \times \overline{r+e}^{m}.$$

sed quoniam r. est quantitas finita erit etiam $r+e$ et proinde etiam $\overline{r+e}^{m}$ quantitas finita, hinc ob e. infinite parvam hyp: $e \times \overline{r+e}^{m}$ quantitas infinite parva.

3. Schol: Quantitatem $1+e$. quatenus unitate major spectatur inassignabilem quidem non tamen infinite parvam sed finitam esse inde patet quia proprie ipsi aequatur unitas.

4. Positis iisdem erit mtus terminus seriei $1+me$. si m. fuerit numerus finitus; Nam terminus mty hujus seriei est $\overline{1+e}^{m} = 1+me + \frac{m.m-1}{1.\ 2.}e^2 + \frac{m.m-1.\ m-2}{1.\ 2\ \ 3.}e^3$ etc: Sed quia m. et hinc $m-1.\ m-2$ etc: proinde etiam $\frac{m.m-1}{1.\ 2}$ $\frac{m.m-1.\ m-2}{1.\ \ 2\ \ 3.}$ etc. sunt numeri finiti $e^2\ e^3$, etc: vero infinite parvi respectu e. et me erit $\overline{1+e}^{m} = 1+me$.

5. Aliter se habet res: si m. fuerit numerus infinite magnus: Tum enim tam me. quam $\frac{m.m-1}{1\ \ 2}e^2$ $\frac{m.m-1.\ m-2}{1.\ \ 2.\ 3.}e^3$ sunt quantitates finitae.

6. Quia series $1.\ 1+e.\ \overline{1+e}^2\ \overline{1+e}^3,\ \overline{1+e}^4\ \overline{1+e}^5$ etc: incipit ab unitate et progreditur in infinitum termini autem non nisi quantitate infinite parva crescant, necesse

est inter terminos seriei occurrere quantitatem quamlibet finitam $r+x$. unitate majorem.

7. Sic etiam patet inter terminos seriei retrogradae $r+e^{-3}$ $r+e^{-2}$ $r+e^{-1}$ $r+e$. r. occurrere quamlibet quantitatem unitate minorem $r-x$.

8. Si in serie geometrice proportionalium $r+e^{-3}$. $r+e^{-2}$. $r+e^{-1}$ r. $r+e$. $r+e^{2}$ $r+e^{3}$ $r+e^{4}$ etc.... $r+e^{m}$ a termino $r+e$ primo prorsum retrorsum in ratione elementari $r+e:r$ in infinitum continuata quantitates finitae x. et y. fuerint termini, numerus rationum intermediarum inter x et y. cadentium appellatur LOGARITHMUS rationis $y:x$. In systemate integro eodem nomine veniunt quantitates quaelibet analogae.

9. Quoniam $y = \frac{y}{r}$. Logarithmus rationis $y:r$. appellatur Logarithmus numeri y. Ut itaq per Logarithmum quantitatis y intelligatur semper Logarithmus rationis $y:r$.

10. Logarithmus significatur

per L. utitaque L.x. indicet Logarithmum quantitatis x. seu rationis x:1.

11. Si x fuerit terminus aliquis in geometrica serie 1. 1±e. $1±e^2$ $1±e^3$ $1±e^4$ etc: $1±e^m$ erit $L.x = m$ quia inter 1. et $x = 1±e^m$ intercedunt rationes m. Utitaque Logarithmi terminorum 1. 1±e. $1±e^2$ etc. inter se sint ut indices terminorum s. exponentes ~~dignitatum~~ quantitatis 1±e.

12. Est itaque Logarithmus numeri finiti, unitatem quantitate finita excedentis proprie numerus infinite magnus: Cum vero numerus infinite magnus dari et assignari nequeat, in systemate integro logarithmorum numeri finiti his analogi substituuntur.

13. Logarithmus unitatis est 0. Nam inter 1. et 1. in serie 1. 1±e

$r^3 e^2$ etc. nulla cadit ratio interme-
dia.

14. Logarithmus radicis est ad logarithmum dignitatis cujuslibet ejusdem x. ut unitas ad exponentem dignitatis s.

Sit x. terminus medius seriei r. re re^2 re^3 etc. et erit x^s. terminus ms. atque proinde $lx. = m.$ et $l.x^s = ms$. atque ita $l.x. : lx^s = m : ms = 1 : s$ q.e.d.

15. Logarithmus itaque dignitatis aequatur multiplo logarithmi radicis in exponentem dignitatis: ut sit $l.x^s = s.l.x$.

16. Eadem ratione patet esse

$$\frac{lx.}{s} = l\sqrt[s]{x}.$$

17. Logarithmi itaque dignitatum quarum exponentes sunt numeri integri naturali ordine progredientes constituunt seriem arithmeticam.

18. Si Logarithmus numeri x ponatur 1. erit logarithmus dignitatis cujuslibet x. idem cum ex- 20

ponente dignitatis, hoc est si $L:x = r$. erit $L:x^2 = z$.

19. Logarithmus numeri x. unitate majoris et logarithmus numeri $1/x$. unitate qui prodit si x. dividatur in unitatem, quoad numerum unitatum sunt aequales sed determinationum oppositarum, hoc est, si alter assumatur positivus, alter erit negativus.

Sit x. terminus mtus seriei geometricae $1. rte, rte^2, rte^3$ et erit $x. = rte^m$ Est autem $1/x = x^{-1} = rte^{-m}$ et itaque logarithmi numerorum x. et $1/x$ inter se sint ut m et $-m$.

20. Logarithmus producti est summa logarithmorum factorum. hoc est. $L:x + L:y. = L:xy$.

Sit in serie $1. rte. rte^2, rte^3 rte^n$ etc x. terminus mtus et y terminus ntus. et erit $x = rte^m$ $y. = rte^n$

proinde $xy = rte^{m+n}$ hoc est productum est terminus $m+n$tg in dicta serie. Cum autem logarithmi horum terminorum sint et exponentes dignitatum erit $lx = m$. $ly = n$. $lxy = m+n$ atq sic $l.x + l.y = l.xy$. q.e.d.

21. Logarithmus quotientis aequatur differentiae quae prodit si logarithmus divisoris a logarithmo dividendi subtrahatur, hoc est $l.\frac{x}{y} = lx - ly$.

Nam $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ sed $-ly = l\frac{1}{y}$ proinde $l\frac{x}{y} = lx - ly$. q.e.d.

Idem et hoc modo demonstratur. sit in serie $1. rte. rte^2$ etc: x. terminus $m$tg. et y. terminus $n$tus et erit $x = rte^m$ $y = rte^n$ proinde $\frac{x}{y} = rte^{m-n}$ cumitaq sint $m = lx$ $n = ly$ et $m-n = l\frac{x}{y}$ erit $lx - ly = l\frac{x}{y}$. q.e.d.

22. Si a. fuerit numerq infinite magnus positivus x. vero finitus unitate major erit $\sqrt[a]{x}$. vel $x^{1/a}$ quantitas unitate major, camq quantitate infinite parva superans.

Si enim radix $\sqrt[a]{x}$ fuerit unitati aequalis erit $x = 1$. contra hyp: Si $\sqrt[a]{x}$ fuerit minor unitate erit etiam x. minor unitate, etiam contra hypothesin, est itaque $\sqrt[a]{x}$ quantitas unitate major.

Sit f. quantitas illa qua superat unitatem, eademque finita quantitas erit $\overline{1+f} = \sqrt[a]{x}$ et $\overline{1+f}^a = x = 1 + af + \frac{a.a-1}{1.2} f^2 + \frac{a.a-1.a-2}{1.2.3} f^3$ etc: hoc est quia a. numerus et hinc af, $\frac{a.a-1}{1.2} f^2$ $\frac{a.a-1.a-2}{1.2.3} f^3$ infinitae magnae quantitates, ipsa quantitas x. erit infinite magna, contra hypothesin. Eadem ratione patet f. nec esse posse infinite magnam quantitatem; proinde etenim o. esse nequeat, infinite parva.

23. Si a. numerus infinite magnus positivus, x. et y. quantitates positivae quaelibet, erunt logarithmi quantitatum x. et y.

inter se ut quantitates elementares, quibus $\sqrt[a]{x}$. $\sqrt[a]{y}$ superant unitatem. hoc est si $\sqrt[a]{x} = 1+f$. et $\sqrt[a]{y} = 1+g$. [: ubi f et g. sunt quantitates infinite parvae :] &c. erit

$$lx : ly = f : g.$$

Nam si in serie: $1+e$, $\overline{1+e}^2$, $\overline{1+e}^3$ etc. fuerit terminus mtus. et y. terminus ntus erit $x = \overline{1+e}^m$ et $y = \overline{1+e}^n$ sed quoniam $\sqrt[a]{x} = 1+f$ et $\sqrt[a]{y} = 1+g$ erit etiam $x = \overline{1+f}^a$ et $y.\ \overline{1+g}^a$ proinde $\overline{1+f}^a = \overline{1+e}^m$ et $\overline{1+g}^a = \overline{1+e}^n$ et $\overline{1+f} = \overline{1+e}^{\frac{m}{a}}$ et $\overline{1+g} = \overline{1+e}^{n/a}$. Hoc est quia m. n. a. sunt numeri infinite magni, et hinc $\frac{m}{a}$ $\frac{n}{a}$ finiti, $1+f = 1+\frac{m}{a}e$ et $1+g = 1+\frac{n}{a}e$ hinc $f = \frac{m}{a}e$ et $g = \frac{n}{a}e$. proinde

$$f : g = \frac{m}{a}e : \frac{n}{a}e = me : ne = m : n$$

Est autem $m = lx$. et $n = ly$ atque ita $lx : ly = f : g$. h. e. logarithmi quantitatum x. et y. inter se sunt ut quantitates infinite parvae f. et g. quibus radices infinitae $\sqrt[a]{x}$. et $\sqrt[a]{y}$ superant unitatem.

24. Erit itaq etiam

$$lx : ly = (\sqrt[a]{x} - r) a : (\sqrt[a]{y} - r) a.$$

25. Si a. numerus infinite magnus quilibet erit

$$\sqrt[a]{r+y} = 1/a \times r + y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{6}y^6 + \tfrac{1}{7}y^7 \text{ etc.}$$

Est enim $\sqrt[a]{r+y} = \overline{r+y}^{1/a}$ $=$

$$r + 1/a\, y - \frac{r-a}{2a^2} y^2 + \frac{r-3a+2a^2}{6 a^3} y^3 + \frac{r-6a+11a^2-6a^3}{24 a^4} y^4 \text{ etc.}$$

$=$

ob a numerum infinite magnum $r + 1/a\, y - \frac{1}{2a} y^2 + \frac{1}{3a} y^3 - \frac{1}{4a} y^4 + \frac{1}{5a} y^5 - \frac{1}{6a} y^6 + \frac{1}{7a} y^7 - \frac{1}{8a} y^8$ etc. proinde $\sqrt[a]{r+y} = r + 1/a\, y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{6}y^6 + \tfrac{1}{7}y^7 - \tfrac{1}{8}y^8$ etc.

26. Hinc sequitur esse

$$(\sqrt[a]{r+y}) - r = 1/a \times y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{6}y^6 + \tfrac{1}{7}y^7 \text{ etc.}$$

27. Si a. et b. sint numeri infinite magni quilibet erit

$$(\sqrt[a]{x} - r) a = (\sqrt[b]{x} - r) b.$$

Nam si $x = 1+y$ erit

$\sqrt[a]{x}-1 = \frac{1}{a}\times(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ etc.

$\sqrt[b]{x}-1 = \frac{1}{b}\times(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ etc.

proinde

$\overline{\sqrt[a]{x}-1}\times a = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ etc.

$\overline{\sqrt[b]{x}-1}\times b = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ etc.

et hinc

$\overline{\sqrt[a]{x}-1}\times a = \overline{\sqrt[b]{x}-1}\times b$.

28. Cum $\sqrt[a]{x}-1\times a$ ad $\sqrt[a]{x}-1\times b$ sint inter se ut Logarithmi numerorum x et y, per ipsas has quantitates $\sqrt[a]{x}-1\times a$, $\sqrt[a]{y}-1\times a$ significari possunt logarithmi numerorum x et y. Quae expressio pro logarithmis simplicissima est, cum puta $\sqrt[a]{x}-1\times a$ semper maneat eadem, quomodocunque a varietur, si modo sit quantitas infinite magna.

Ob hanc simplicitatem suam Logarithmi expressi per $\sqrt[a]{x}-1\times a$ appellantur Naturales, et tales sunt Neperiani ab inventore Nepero ita dicti.

29. Si Logarithmi naturales ducantur in numerum quemlibet m. oritur aliud Systema Logarithmorum; in quo Lx logarithmus numeri x. ad Logarithmum naturalem lx. ut m. ad 1. Appellantur tales Logarithmi artificiales respectu naturalium. Dantur itaque Logarithmorum Systemata infinita. Et numerus m. ex cujus multiplicatione in Logarithmum naturalem oritur Systema quoddam, modulus Systematis appellatur, et itaque modulus Systematis Logarithmorum naturalium fit unitas, qui modulus est simplicissimus:

30. Sunt itaque numeri x. Logarithmi diversorum Systematum inter se ut moduli Systematum.

31. Si modulus Systematis fuerit Lx. S. quotiens, qui prodit div-

denda Logarithmum naturalem numeri x in unitatem, Logarithmi sunt exponentes dignitatum numeri x. ut itq. $l.x^y$ sit y. idq per 6. Siquidem in hoc casu Logarithmus artificialis numeri est unitas.

32. Quantitatum aequalium Logarithmi naturales vel alii ejusdem systematis sunt aequales.

33. Elementum Logarithmi naturalis numeri x. est $\frac{dx}{x}$.
Nam $lx = (\sqrt[a]{x} - 1) \times a = (x^{1/a} - 1)a$.
hinc $dlx = (1/a\, x^{1/a-1}\, dx) \times a = x^{1/a-1} dx$
$= x^{-1} dx$. si quia $1/a$ quantitas infinite parva $= \frac{dx}{x}$ ob $x^{-1} = 1/x$.

34. Si x fuerit numerus positivus quilibet, erit Logarithmus naturalis numeri cujuslibet unitate majoris $lx. = x - 1/2\, x^2 + 1/3\, x^3 - 1/4\, x^4 +$

$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{9}x^9$ etc.

Nam Logarithmus naturalis numeri $x+r$. per §. est $l(x+r) - l X a$. Est autem per §. $l(x+r) - l X a = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ etc: proinde haec ipsa quantitas logarithmum naturalem numeri $x+r$. constituit.

Idem et hoc modo demonstratur. Est ~~igitur~~ scilicet $d. l. 1+x = \frac{dx}{r+x}$ proinde $\int \frac{dx}{r+x} = l. 1+x$. Est autem $\frac{r}{1+x} = r - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ proinde $\frac{dx}{x+r} = dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ etc et $\int \frac{dx}{r+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. etc.

34. Eadem ratione demonstratur numeri $r-x$ unitate minoris esse $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8$ etc.

35./ Quantitas EXPONENTIALIS, appellatur ea, quae habet exponentem variabilem; hoc est, si in x^y crescente x. quantitate infinite parva dx. etiam y. crescat infinite parva dy. x^y audit quantitas exponentialis.

36. Si x^y. fuerit quantitas exponentialis erit differentiale eiusdem

$$dy\,l.x.\,x^y + y\,x^{y-1}\,dx.$$

Nam si in quantitate x^y. crescat x. quantitate infinite parva dx. et exponens y. quantitate infinite parva dy. oritur quantitas $\overline{x+dx}^{\,y+dy}$. à qua si subducatur x^y. prodit elementum seu differentiale $\overline{x+dx}^{\,y+dy} - x^y$.

sed est $\overline{x+dx}^{\,y+dy} = \overline{x+dx}^{\,y} \times \overline{x+dx}^{\,dy}$ et $\overline{x+dx}^{\,y} = x^y + y\,x^{y-1}\,dx$

necnon $\overline{x+dx}^{\,dy} = x^{dy}$

proinde $\overline{x+dx}^{\,y} \times \overline{x+dx}^{\,dy} =$

$x^y\,x^{dy} + y\,x^{y-1}\,x^{dy}\,dx =$

$x^y \times x^{dy} + y x^{y-1} dx$. Quia si x^{dy} ponatur $= e$, e. est quantitas infinite parva.

Porro erit $\overline{x+dx}^{\,y+dy} - x^y =$
$= y x^{y-1} dx + x^y \times x^{dy} - x^y$ et
$x^y x^{dy} - x^y = (x^{dy} - 1) \times x^y$.

Est autem $x^{dy} - 1 \times dy = l\,x$.
et hinc $x^{dy} - 1 = dy\, l.x$.
proinde $\overline{x+dx}^{\,y+dy} - x^y$
$= dy\, l\,x . x^y + y x^{y-1} dx$.

Idem et hoc modo demonstratur. Si $x^y = z$ erit
$y . lx = l . z$ et differentiando
$$dy\, lx + \frac{dx}{x} y = d . lz = \frac{dz}{z}.$$
et hinc
$$dz = dy\, l\,x\, z + \frac{dx}{x} y z$$
$$= dy\, l . x\, x^y + y\, dx\, x^{y-1}$$
$$= d . x^y$$
Demonstratio etiam sic pro-

cedit. Quoniam $d.lx = \frac{dx}{x}$

erit $dx = x.dlx$. proinde

$dl.x = dlx^y \times x^y$

Sed $dlx^y = dylx$ / ob $lx^y = ylx$

$= y\frac{dx}{x} + dylx$.

proinde

$d.x^y = ydx\,x^{y-1} + dylx\,x^y$.

Theoria Curvarum.

1. Linea curva ea appellatur quae inter quaelibet sua puncta in diuersas partes extenditur.

Quid sit extensio linearis tam rectilinea, quam curuilinea, vberius exponitur in geometria elementari, quae hic supponitur. Sufficit ideam curuae hic repetiisse, quam Cel. Hausen in Geometriae elementis post Termini, Continui, Extensionis triplicis, punctiq definitionem stabiliuit.

2. Punctum motu suo lineam describere, recte dicitur. Si pro puncto assumatur lineola recta

infinite parua, mota secundum longitudinem suam, praeeunte semper vno eodemque puncto terminali, idem euenit, hoc est, motu suo describit lineam. Si elementi hujus linearis motus ita se habeat, vt illud in situ quolibet, cum situ proxime praecedente in directum non jaceat, sed situs illi vicinissimi angulo quolibet obliquo inter se inclinentur, oritur Curua.
Haec, quamuis data in Spho praec. curuae definitione, superflua videri possint, annotare placuit, vt pateat, curuam quamlibet ex infinita multitudine lineolarum rectarum infinite paruarum compositam spectari, et quemlibet arcum curuae infinite paruum pro lineola recta haberi posse.

3. Angulus ille, quo duo elementa

curuae vicinissima in puncto concursus inclinantur, Angulus Curuaturae audit; Curuaq ad eam partem, ad quam angulus curuaturae minor duobq rectis, Concaua, ad alteram, vbi major, Conuexa appellatur.

4. Si curuae flexio mutetur, ita, vt ad plagam, ad quam antea fuit conuexa, nunc fiat concaua, vel vice versa, punctum in quo mutatio incipit, Punctum Flexus contrarii appellatur.

Sit e. g. Curuae ABC. pars AB. ad plagam puncti d. vel ad rectam EF. concaua pars vero BC. ad plagam eandem conuexa, et patet in puncto B. mutationem flexus accidere, et flexionem contrariam incipere, quod itaq erit punctum flexus contrarii. F. 1.

5. Recta Mm. curuae cuilibet ACB. vtrinq occurrens **Chorda Curuae** appellatur.
Duplex autem hic casus considerandus venit. Curua enim chordae vel concauitem obuer-
F. 2. tit, vti de circulo ex geometria elementari notum est, vel conue-
F. 3. xitatem, in quo casu duae quasi curuae in puncto C. sibi occurrentes concipiendae sunt.

6. Sit linea quaeuis ABC. sit alia linea DBE. priori occurrens in puncto B. ita quidem, vt produ-
F. 4. 5. 6. cta a puncto occursus a linea ABC. regrediatur, ad eam quidem partem, ad quam ipsi occurrebat, et lineae ABC. DBE. se inuicem **Tangere** dicuntur.

7. Duae itaq lineae se inuicem non tangunt, nisi in particula elementari, s. in puncto. Hocq

punctum, haec particula elementaris; in qua se tangunt, communis est vtriq.

8. Duae rectae se inuicem proprie non tangunt, sed si occurrat altera alteri, aut secant se inuicem, aut si tangere dicantur, coincidunt.

9. Recta vero curuam tangit, et vice versa. Est autem recta curuam tangens, nihil aliud, quam elementum curuae s. arculus infinite paruus, in quo tangitur, productus. F. 4.

10. Curuam etiam curua tangere potest. Tangunt se vero curuae duplici modo, vel sibi inuicem conuexitatem obuertendo vel alterius concauitate alterius conuexitati obuersa. F. 5. 6.

11. Si curua ABC: curuae DBE: cujus concauitas prioris conuexitati obuersa est, ita occurrat, vt curuae ABC: elementa quaedam

F. 6. duo contigua coincidant, cum elementis duobus contiguis curuae DBE: prior curua posteriorem Osculari dicitur in his elementis coincidentibus.

12. In curua qualibet elementa duo contigua quaelibet, ab. ad.

F. 7. eaq aequalia constituunt triangulum isosceles; determinantes circulum per vertices angulorum ejusdem a. b. d. transeuntem. Unde patet in puncto quolibet, curuae cujuslibet dari circulum curuam in puncto illo a. osculantem. Radius hujus circuli Radius Osculi appellatur.

13. Si curuae ABC. alia linea

F. 8. DE: ita adjaceat, ut ulterius producta magis magisq ad curuam accedat, eidem ta-

men nullibi occurrat, nisi eadem lege in infinitum producatur, linea DE. Asymtotos curuae ABC. audit.
Cum autem linea DE. supponatur esse posse quaelibet, patet inde Asymtoton vel curvilineam vel rectilineam esse. In posteriori casu, siquem figura exhibet, Asymtotos est recta curuam in puncto infinito tangenes.

14. Recta cB. curuae ABC. in puncto B. occurrens, et super elemento puncti illius ad angulos rectos consistens, **Perpendicularis** s. **Normalis** ad curuam ABC. in puncto B. appellatur. F. 4. 5. 6.

15. Quae igitur recta ad curuam normalis est, etiam normalis est ad rectam curuam. F. 4.

in puncto occursus tangentem.

16. Et quae ad curvam normalis est, etiam normalis est ad aliam curvam, priorem in puncto occursus tangentem.

F. 5. 6.

17. Patet etiam, si circulus osculetur curvam, radium osculi ad elementa coincidentia ductum, ad curvam quam osculatur, in elementis in quibus osculatur eandem, normalem esse.

F. 7.

18. Recta quaelibet per duo puncta data determinatur, curva non item. Hujus enim elementa singula situm à contiguis diversum nanciscuntur, hinc etiam singula seorsim determinanda sunt. Generalissimus modus ele

menta curuae cujuslibet deter-
minandi, sequens est:
Sit curua determinanda AMB. F. 9.
Sit alia linea CPD. siue recta
siue curua. Ex hujus punctis
singulis P. exeant lineae ali-
ae PM. siue rectae sint, siue cur-
uae, occurrentes curuae AMB.
in punctis M. et patet, data
linea CPD. datoq in eadem
puncto P. et linea PM. ex eo-
dem exiens, determinari
punctum M. in curua AMB.
Datisq in linea CPD. omni-
bus punctis P. omnibusq PM.
positione et magnitudine
dari omnia puncta M. pro-
inde ipsam curuam AMB.
Difficillimus quidem est in
generalitate sua hic modus
curuam determinandi. Ad
simpliciores vero casus reductus

et tunc difficultate sua exutus plurimarum curuarum determinationem non inconcinnam etquantum pro rei natura fieri potest, breuem prodit, ex qua ipsa constructio et curuæ natura mirum in modum deriuatur. Ipse tamen casus propositus generalissimus omnium fere curuarum possibilium certa lege curuatarum, determinationem sub se comprehendit. Nobis casuum specialiorum explicatio in sequentibus curae erit, etquemlibet exemplo peculiari illustratum videbis:

19. Imposuerunt autem his lineis ad determinationem curuae ductis certa nomina. Portionem scilicet quamlibet

C.P. lineae C.P.D. Abscissam F. 9.
lineas vero P.n. priori C.P.D. occurrentes in punctis P. Applicatas, et si linea C.P.D. curuae AmB. in puncto quodam A. occurrat punctum illud occursus Verticem curuae AmB. appellant. F. 10.

20. Notabis hic cuilibet abscissae certam determinatamq. applicatam respondere, et vice versa. Quamlibet autem abscissam litera x. et applicatam ipsi respondentem litera y. denotare consueuimus.

21. Patet etiam abscissas à quolibet puncto C. lineae C.P.D. computari posse; et tunc, si ad vtramque partem puncti C. applicatae fuerint lineae, ad alteram P.m. ad alteram πN. abscissae Cπ. F. 9.

38

quae ad alteram partem puncti C. sitae sunt, respectu abscissarum CP. quae ad contrariam computantur negative considerandae veniunt, et vice versa. Computantur autem abscissae communiter à vertice.

22. Accedimus nunc ad casus cujuslibet specialioris curuae determinandae explicationem, quorum primus, generali §pho 18. exposito simillimus, hic est, si applicatae PM. sint curuae quidem, sed similes inter se, quae in casu generaliori quaelibet esse supponebantur, reliqua vero maneant vt in generali casu proposita fuerunt. Illud ipsum, quod applicatae PM. curuae esse supponuntur, casum generalem difficillimum

reddit, cum cujuslibet harum curuarum Ph. determinatio tantum requirat, quantum ipsa curua AmB.
Haec est ratio, ob quam in praxi pro applicatis Pn. curuas vix adhibeamus: Possibilem tamen esse curuae AmB. determinationem per curuas alias cognitas atq datas, praesertim si similes supponantur, vt casus hic specialis eardem postulat ex sequenti exemplo satis superq apparebit.

Sit CPD. semicirculus: Applicatae Pn. sint itidem circuli concentrici, ex centro communi D. quilibet radio DP. descripti, et arcus An. ita comparati, vt chorda cujuslibet radio, quo descriptus est, aequalis sit; Cum itaq data et cognita sit curua CPD. nec non in eadem F. 12

puncta P. et curuae mP. dentur positione et magnitudine, omnino curua AmB. determinabitur, quam circulum diametro CD. descriptum, atq ita circulo CPD. aequalem esse, aliunde constat.

23. Simili modo curuam AmB. determinatam intelliges, si rectae F. 11. AKC. curuae similes Pm. applicentur, qui casus longe simplicior priori, cum in eadem linea AKC. in qua abscissae computantur longe minori difficultate determinatur.

24. Si applicatae Pm. fuerint rectae eadem lege ad curuam F. 13. 14. 15. CPD. applicatae, determinatio curuae AmB. maxime facilitatur. Possunt autem rectae Pm. curuae CPD. eadem lege triplici praecipue modo applicari:

1.) Si applicatae Pm. ad curuam

CPD. in punctis occursus perpendiculares sint, vel angulo alio insistant. F. 13.
2. Si rectae applicatae Pn. sint latera curvae CPD. infinite parva eaq producta, hoc est tangentes curvam in punctis occursus P. F. 14.
3.) Si rectae Pn. inter se ~~fuerint~~ parallelae et ad rectam aliam positione datam angulo quolibet inclinatae fuerint. F. 15
Exempla pro casu quolibet rem clariorem reddent.
Pro casu 1. Sit CPD. semicirculus, ad hunc rectae Pn. in puncto occursus sint perpendiculares, et quaelibet aequalis chordae CP. et determinata erit curva Art. 13. F. 13.
Pro casu 2. Sit CPD. semicirculus, et Pn. tangentes eundem in punctis occursus, atq

aequales chordis CR. et determinabitur curua alia AmB.
Pro casu 3. sit CPD. itidem se-
F. 15. micirculus et rectae Am. ita applicatae, vt ad diametrum CD. positione datam normales, atq quaelibet particulae diametri CF. quam resecat, aequalis; et habebis curuam AmB. omnimodo determinatam.

25. Casus secundus §pho praecedenti expositus euolutionem curuarum continet. Si
F. 16. 17. nempe applicatae Pm. sint tangentes curuam CPD. eaeque aequales vel ipsi arcui PD. vel aggregato ex eodem et recta quadam constante DE. tunc curua AmB. ex euolutione curuae CPD. descripta,

ipsa vero CPD. curva Evoluta curvae AMB. necnon applicata quaelibet PM. radius evolutae pro puncto M. appellatur. Ratio denominationis haec est, quia si curvae CPD. filum vel aequale ipsi CPD. vel alia linea recta DE. ipsum excedens circumplicatum sit, illudq revolvatur, ipsam curvam AMB. quae dicto modo determinabatur, descriptam habebis.

26. Patet simul radium revolventem PM. quemlibet eundem esse positione et magnitudine cum radio osculi curvae AMB. in puncto M. Manifestum etiam est, centra omnium circulorum curvam AMB. osculantium sita esse in evoluta CPD. Fig. 17.

27. Novus et peculiaris modus curvam determinandi oritur, si

F. 9. linea CPD. in propositione gene-
F. 18. 19. rali §phi 18. exeat in punctum
P. ex quo exeant applicatae Pm.
rectae vel curuae, quarum si
datur magnitudo, determina-
tam habebis curuam Amβ. quae
in priori casu, ubi applicatae Pm.
sint rectae, spiralis nomine
venit.
Sint e. g. lineae Pm. rectae, eaeq.
F. 18. ita sitae ut anguli quarumlibet
vicinarum mPm. aequales sint
inter se, et quaelibet mP. sit
multiplum rectae magnitudi-
nis constantis, pro distantia
quam obtinet à recta Pm1. si-
tus constantis, ita quidem ut
si Pm1. = ab. sit Pm2 = 2ab.
Pm3. = 3.ab. cet: et curuam
spiralem Amβ. omni modo
determinatam habebis:
F. 19. Pro posteriori casu, ubi appli-

catae PN. sunt curvae ex puncto P. exeuntes, qui casus quidem in praxi vix occurrit, esto exemplum hoc: Sint PN. arcus circulorum uno eodemque radio descriptorum, sique omnes inter se aequales, et determinabitur curva alia AMB. quam circulum esse, facile patet.

§. 28. Accedimus nunc ad casum ultimum eumque simplicissimum, quam methodus curvam determinandi generalis §pho 18. propositus continet, qui est si linea abscissarum CPD. nec non applicatae PN. fuerint rectae, eaeque in punctis P. angulo recto, vel alio quolibet ad rectam CPD. inclinatae ita ut omnes inter se parallelae fuerint. Data enim abscissa CP. et ipsi respondens applicata PN. positione et magnitudine, F. 22. 24

datur punctum curuae M.
Exemplum est in promtu. Ad rectam CD. applicentur rectae Rn. perpendiculares hac lege, vt applicatae cujuslibet Rn. quadratum aequale sit facto ex recta quadam constante AE. in respondentem abscissam, hoc est, vt sit $Rn^2 = \overline{AE \times CP}$, et erunt in potestate puncta quaelibet M. proinde ipsa curua AMB.
Haec methodus curuam determinandi per relationem rectarum similiter ductarum et se mutuo determinantium, communissimus; et ad curuae naturam inuestigandam facillimus est. Huc redit quicquid vnquam de curuis dici potest. Quo de argumento plura in sequentibus:

29. Poterant etiam rectae CD. in punctis P. curuae similes; vel rectae angulis diuersis applicari; Sed cum inde nouae difficultates oriantur in curuarum determinatione, hic casus prorsus fere negligitur. Eundem tamen, ne quid obliti esse videamur, tribus verbis annotasse, non abre fuit. F. 11.

30. Methodum hanc curuam determinandi specialem, ex generali Spho 18. proposito deriuauimus. Possunt tamen ex hoc ipso reliqui casus speciales; imo ipse generalis deduci. Exemplo res fiet clarior. Sit AmB. curua determinata recta APC. et applicatis rectis Rn. His positis manente vltima applicata CB. positione et magnitudine, manente etiam magnitudine reliquarum applicatarum. F. 26. 27.

rectarum PN. quae inflexiles sup-
F. 27. ponuntur, coeat linea APC. in pun-
ctum C. et curva AMB. mutatur
et fit Spiralis CQb. quae deter-
minatur per applicatas CQ. in
puncto C. concurrentes, ita ut
quodlibet punctum Q. in Spira-
li CQb. à puncto C. tantum di-
stet, quantum punctum re-
spondens M. in curva AMB. an-
te mutationem à recta APC.
distabat. Et hic est casus figu
27. expositus, circa quem adhuc
monendum, situm abscissae in quo-
libet puncto M. fig: 26. repraesenta-
re lineam CT. ad applicatam re-
spondentem CQ. in eodem angulo
ductam, quo inclinata est in fig:
26. applicata MP. ad APC. Hoc
est, si in figura 27. ad applicatam
quamlibet CQ. ducatur CT. in eo-
dem angulo, quo inclinabatur

in figura 26. linea abscissarum APC. ad applicatas MP. ipsa recta CT. eundem situm habet respectu applicatae MP. quam habuit recta abscissarum APC. ad applicatam in fig: 27. respondentem MP. Quod ipsum et hac ratione patet, si in figura 26. ductam intelligas MT. tangentem curvam AMB. in puncto M. eamque lineae abscissarum APC. occurrentem in puncto T. et in ipsa mutatione, qua APC. coit in punctum C. triangulum MPT. quod, quia lineae PM. magnitudo immutata supponitur, simul revolui. Mutatione enim facta recta PT. in figura 26. fit CT. quae ad CQ. eodem adhuc angulo inclinatur, quo insistebat in figura 26. PM. lineae abscissarum CPD.

31. Si applicatae PM. in curva quali- F. 20. 21.
libet sint rectae parallelae inter se Ordinatim applicatae

dicuntur rectae AP. ita quidem vt si productae curuae MAm. in punctis m. iterum occurrant, vt sit PM. = Pm. rectae Mm. **Ordinatae**, MP. vero et Pm. **Semiordinatae** audiant. Ipse vero angulus APM. vel APm. in quo applicantur MP. rectae AP. **angulus Ordinationis** appellatur.

32. Si curuae cujuslibet AMB. chordae Mm. ducantur parallelae, recta AP. eas omnes bifariam secans **Diameter curuae**, si ad angulos rectos secet **Axis** appellatur.

F. 20. 21.

Assumtis abscissis in linea AP. chordas Mm. ordinatas, MP. semiordinatas, in A. vero curuae verticem esse pro diametro AP. vltro patet.

33. Diameter EF. chordas alteri diametro curuae AP. parallelas MM. (mm.) bifariam secans, Diameter conjugata diametro AP. appellatur, quae posterior Transuersa audit. F. 22.

34. Punctum C. in quo plures diametri se secant Centrum Curuae appellatur. F. 22.

35. Si linea CPD. in qua computantur abscissae pro curua AMB. determinanda fuerit quaelibet, in eaq ad punctum P. ducatur tangens PT. Si porro ad curuae AMB. punctum respondens M. recta MT. itidem fit tangens; MN. vero normalis, occurrens tangenti PT. in N. Hujus rectae portio PT. quam tangens MT. et applicata PM. resecant, Subtangens: ea vero portio PN. quam applica- F. 9.

cata et normalis resecant Subnormalis appellatur.

36. Si linea AP. in qua computantur abscissae fuerit recta, tangens eandem cum illa coincidit.
F. 25. 26. In casu itaq; quo curva determinatur per rectam abscissarum AP. et rectas semiordinatas Pm. Subtangens est rectae abscissarum AP. portio PT. inter semiordinatam Pm. et tangentem mT. intercepta; subnormalis vero portio PN. inter semiordinatam Pm. et normalem mN. intercepta.

37. Recta, quae punctum tangere dicitur situs determinati non
F. 27. est; hinc etiam in casu Sphi 27. quando linea abscissarum fit punctum, subtangentem determinatam non habebis; nisi cur-

uam ipsam cujus applicatae in uno
eodemque puncto concurrunt, ex a-
lia curva, ad abscissas rectas re-
lata, eo modo, quo §pho 30. di- F.26.27.
ctum est, generatam esse concipi-
as: Supponimus autem semper
curvae AmB. axem AP. in punctum
coiuisse, in quo casu in Spirali
CQb. recta CT. ex puncto C. ad ap-
plicatam CQ normalis situm ab-
scissae respondentis in genetrice
repraesentat, ita hac normali
CT. tangens Spiralem QT. sub-
tangentem CT. resecat.
Patet etiam tangentem QT. et
Subtangentem CT. in Spirali CQb.
easdem esse magnitudine cum
tangente mT. et subtangente
TP. respondentibus in genetrice
AmB. totum enim triangu-
lum mTP. linea AC. in pun-
ctum coeunte, sine ullo incre-

mento vel decremento laterum
simul reuolui et fieri CQT.
facile intelliges.

38. Posita idea subtangentis et
subnormalis pro casu curuae
determinatae per rectas simi-
liter inter eam ductas, ex ea-
dem deriuari potest condi-
tio subtangentis et subnor-
malis, pro casu quolibet re-
liquo, supposita incuruatio-
ne vel contractione rectae
in qua abscissae computan-
tur. De posteriori casu res
ex §pho praec: clara est; Exem-
pli loco itaq casum curuae bQc
considerabimus, cujus abscissae
computantur in alia curua
bSL. Concipiamus eandem ge-
F. 27. 28. 29. neratam esse ex curua bQC. fig:
30. 31. 28. per incuruationem lineae

BSl. in qua abscissae computantur. Sit in generatrice fig: 28 QT. tangens; QN. vero normalis; et erit Tq. subtangens; qN. subnormalis. Incurvetur nunc BSl. in curvam quamlibet, trianguli vero QTN. latera rigida supponantur, et facile apparet, hoc ipsum triangulum, cum elementis Qq. qS. quibus quasi affixum est, in ipsae incurvationis actu simul revolvi et in figura Spirali generata fieri Qqt. (curva nova)
Est itaque Qt. subtangens curvae bQC. et Sn subnormalis, quae cum utraque curvam bSl. tangit, sic ut etiam Qt. tangit curvam bQC. Quae omnino coincidunt cum iis, quae Spho 35. generaliter de subtangente et subnormali docebantur.

39. De generatione curvae bQc. ex alia BQC. per hujus abscissae BSl. incurvationem inciden-ter adhuc monendum, curvam bQc. diversam pro diversa incurvatione abscissae BSl. et diversa dispositione applicatarum. Abscissa enim BSl. vel ita incurvatur ut curvae, quae ad eandem refertur, concavitatem, vel ita ut convexitatem obvertat; In utroque casu applicatae possunt retinere angulos suos, quos habebant in genetrice, ubi in generata curva elemento curvae, in qua abscissae computantur eodem angulo insistunt, quo insistebant abscissae respondenti in genetrice, vel etiam applicatae ita disponi possunt, ut situm

inter se parallelum retineant. Casus hos omnes repraesentant figurae 27. 29. 30. 31. quae repraesentant curuam bQc: ex alia curua BQC. fig: 28. cujus axis BSL. in peripheriam circularem incurvata est.

40. Notabis etiam curuam generatam non semper eandem manere quoad longitudinem suam cum genetrice; sed hanc facta incurvatione abscissae mox extendi mox vero contrahi; e.g. in fig: 27. vbi applicatae QS: curuae BQC. axi BSL. applicantur circuli bSL. concavitati normaliter, generata bQc. brevior fit genetrice BQC: In figura vero 29. vbi eaedem rectae QS. conuexitati circuli bSL. applicantur longior ~~fit~~ euadit. Facile etiam apparet tangentem Qt. normalem Qu. sub-

tangentem St. subnormalem
gn. non eam magnitudinem retinere in generata, quam habebant tangens QT. normalis QN. subtangens gT. et subnormalis gN. sed in ipso actu incurvationis; quam accidere supponimus abscissae BgT. puncta T. N. in rectis QT. Tg. Ng. QN. moveri; aliter ac fit in contractione abscissae, in qua longitudinem curvae ipsius genetricis, aeque ac tangentis et subtangentis immutatam semper habes, per ea, quae §pho 37. circa finem breviter monebamus:

41. Si In curva AMB, crescentibus ordinatis et abscissis, PM. AP.
F. 22. 32. vel alteris crescentibus alteris decrescentibus, punctum observatur E. vel G. post quod quae creverunt, incipiant decrescere

et vice versa. Abscissae et Semiordinatae in puncto illo insistentes, priori casu MAXIMAE, posteriori MINIMAE Geometricis dicuntur. Punctum ipsum VERTICEM VARIATIONIS Cel: Hausen appellat, de Ellipsibus infinitis, ubi etiam maximae et minimae definitionem praecedentem dedit.

42. In puncto quolibet, curvae cujuslibet AMB. abscissa AB. et Semiordinata MB. determinatam relationem inter se habent, quae definitur aequatione quam x. et y. seu abscissa et Semiordinata ingrediantur.

43. Si in quolibet puncto curvae AMB. cujusdam, eadem aequatio relationem abscissae cujuslibet et applicatae respon-

dentis definiat, illa ipsa aequatio κατ' ἐξοχὴν AEQVATIO PRO CVRVA AMB. appellatur. e. g. Aequatio pro curva §. 28. definita est haec $y^2 = ax$. vbi per a. significatur recta constans AC.

$PM^2 = AC \times CP$. seu denominatis PM. per y. et AP. per x.

44. Aequationem itaq. pro curva qualibet ingrediuntur partim quantitates variabiles x. et y. seu absciissa et applicata qua vna mutata, mutatur etiam altera; partim quantitates constantes; et invariabiles, quae datae semper supponuntur et plerumq. literis alphabeti prioribus a. b. c. d. etc. significantur. e. g. aequationi $y^2 = ax$ praeter variabiles x. y. inest

quantitas constans a.

45. Si aequatio pro curva qualibet ad nihilum reducatur, subducendo utrinq aequalia à se invicem, e.g. mutando aequationem $y^2 = ax$ in hanc $0 = y^2 - ax$. oritur aequatio nihilo aequalis, quae componitur ex productulis quibusdam ex quantitatum variabilium x. et y. et aliarum constantium multiplicatione ortis.

Sunt autem hi termini aequationis vel potentiae variabilium x. et y. in coefficientem datam et constantem ducta ut

ay^m bx^n

vel facta ex potentiis abscissarum in potentias applicatarum, in coefficientem datam ducta, ut,

$cy^{r}x^{s}$.
vel facta ex meris quantitatibus datis et constantibus
vt df.
Quartum non datur. Aequatio itaq.
$$\pm ay^{m} \pm bx^{n} \pm cy^{r}x^{s} \pm df = 0.$$
relationem quamlibet possibilem, quam in curvae cujuslibet possibilis puncto quolibet abscissae et applicatae inter se habere possunt repraesentat. Duplex signum $\pm$ indicat facta illa ex quibus componitur aequatio vel positiva vel negativa esse possint sc̃, et si in casu speciali vnum vel alterum horum productorum desit in aequatione generali termini termini illud repraesentan-

tes 0. esse intelligitur. si in casu speciali unius ejusdemque variabilis plures potentiae occurrant, e.g. hx^3+kx^4 coefficiens b. termini bx^n. in formula generali explicatur per omnes ejus coefficientes h.k. et exponens dignitatis n. per omnes dignitatum exponentes; 3. 4. in casu dato occurrentes:

46. Curva, quae ad omnia sua puncta communi quadam relatione inter rectas similiter ductas et se mutuo determinantes gaudet; hoc est, si in curva AMB. applicatae PM. quibus determinatur, acq ac linea AK. in qua abscissae AP. sumuntur sint rectae, et aequatio relationem abscissarum et semiordinatarum respondentium, in omnibus curvae

AMB. punctis eadem sit, ALGEBRAICA, aliis Geometrica, Geometrice rationalis dicitur. TRANSCENDENS vero, item irrationalis, Mechanica si pro quolibet puncto ejusdem, non ~~eadem~~ eadem sit aequatio, vel si vel abscissae vel applicatae rectae non sint.

47. Aequatio pro dimensione ad quam assurgit diversi generis esse, Primi quidem si ad unam, secundi si ad duas, tertii si ad tres dimensiones assurgat etc. dicitur. Eadem ratione Curva quaelibet Algebraica pro diversitate aequationis eandem definientis diversi generis esse audit, hac quidem lege, ut si aequatio pro curva fuerit generis m. ipsa

curva generis m-1. esse dicatur. e.g. aequatio $y^2 = ax$. est generis secundi, hinc curva hac aequatione definita primi generis esse dicitur.

48. Si itaque aequatio curvam definiens sit generis primi, seu unius dimensionis; curva ipsa nullius generis est; hoc est, non est curva sed recta, quam solam aequatione unius dimensionis definiri aliunde patet.

49. Curvae quarum aequationes similes sunt, et non nisi genere differunt, EIUSDEM FAMILIAE esse dicuntur. e.g. Curvae in quibus est

$y^2 = ax$
vel $y^3 = a^2x$
vel $y^4 = a^3x$
vel $y^5 = a^4x$

ejusdem sunt familiae. Ipsa familia definitur per aequationem indeterminati generis, e.g.

$$y^m = a^{m-1} x.$$

50. Familiae curvarum denominantur communiter, à curva primi generis ad hanc familiam pertinentis: e.g. Si curva quae definitur per aequationem $y^2 = ax$. dicatur parabola, Familia curvarum quae definitur per $y^m = a^{m-1} x$. appellatur Parabolarum familia, et dicitur Parabola primi generis, si $y^2 = ax$. reliquae superiorum generum scilicet secundi, in qua est

$$y^3 = a^2 x$$

Tertii in qua est

$$y^4 = a^3 x. \quad \text{etc.}$$

51. Familiam omnium curvarum algebraicarum, quae compre-

hendit infinitas alias, quarum quaelibet infinita genera comprehendit, exponit aequatio §. 45. explicata

$$\pm ay^m \pm bx^n \pm cy^r x^s \pm df = 0.$$

52. Cum per §. 21. abscissae x. a puncto quolibet liniae PD. computari possint, ipsum punctum, à quo origo ipsius x. statuenda, ex data aequatione eruitur, ponendo # x=0. vbi prodit semiordinata pro puncto C. à quo abscissae x. computantur. F. 23. 24.

Sit e.g. pro curua AmB.

$$y^2 = ab + ax$$

ponendo x=0. quod fit in puncto C. fit

$$y^2 = ab.$$

per constantes itaq. a. et b. determinatam habes semiordinatam in puncto C. si praeterea y. ponatur 0. quod accidit in vertice V. in quo curva linea CPD. occurrit, sit

$$ab+ax=0.$$

proinde $ab=-ax$ et

$$b=-x.$$

hoc est, distantia VC. = b. et V. situm est respectu C. ad partem contrariam ipsi, ad quam computantur abscissae.

F. 25. 26. 53. Si abscissa AP. crescat quantitate infinite parva et fiat Ap. etiam applicata PM. transeundo in pm. quantitate infinite parva crescit vel decrescit. Prior significatur per dx. et appellatur abscissae x. differentiale primi ordinis. Posterior applicatae y. differentiale primi ordinis dictum, per dy. significatur. Utrumq prodire intelliges, abscissas vel semiordinatas infinite vicinas et proxime se subsequentes à se invicem subtrahendo; antecedentem à sequente.

54. Si à dy. uno subtrahatur dy proxime praecedens, prodit τὸ dy. differentiale secundi ordinis, quod significatur per ddy. horum vero proxime se subsequentium subtractione τὸ dy. differentiale tertii ordinis; quod significatur per dddy. Et sic pergendo habentur τὰ dy. differentialia omnium ordinum. Eâdem ratione prodire manifestum est, abscissae x. differentialia omnium ordinum, e.g. ddx. quod est secundi, et ex primorum, dddx. quod est tertii ordinis; et ex secundorum proxime se subsequentium subductione prodit, etc.

55. Si abscissae vel applicatae differentialia ordinis cujuscunque m. fiant aequalia; differentialia inferiorum ordinum $\overline{m+1}$. $\overline{m+2}$. evanescunt et fiunt 0. Tunc enim differentiale ordinis m. ex suppositione est quantitas constans. Si e.g. abscissae differant quantitate infinite parua constanti, ita ut omnes dx. aequales sint, quod communiter fit, in Curva per rectas similiter inter eam ductas determinatione, fit ddx = 0. dddx. = 0. etc.

56. Si πm. PM. pm. sint applicatae rectae parallelae, ac infinite
F. 33. propinquae Aπ. AP. Ap. abscis-
34. sae respondentes, et πP. Pp. re-
35. praesentant differentialia
36. abscissarum dx. Si MR. du
37.

ducatur parallela ipsi Pp determinatur mR. quod repraesentat differentiale applicatae dy. si per elementum curvae mM. ducatur tangens MT. occurrens applicatae pm. in S. mS. lineola repraesentat ddy. seu differentiale, qua variatur dy.

§7. Triangulum MmR. §pho praecedenti determinatum, triangulum CURVAE CARACTERISTICUM appellatur. Praeterquam enim, quod in eodem mR. repraesentat τὸ dy. per §. praec; τὸ MR. etiam repraesentat dx. quia ob parallelismum applicatarum MP. mp. et Pp. MR. fit MR = Pp. = dx.

Repraesentat itaq hoc triangulum relationem quam dx et dy inter se et am Mm elementum ipsius curvae respondens habeant; angulus vero MRN. est angulus ordinationis:

58. Si linea abscissarum AP. fuerit recta, ipsa parallela est lineolae mR. in Triangulo caracteristico NmR. quod in casu si AP. fuerit axis curvae rectangulum fit.

59. Patet etiam triangulum curvae caracteristicum, cumq eo lineolam mR. repraesentantem τὸ dy. si semiordinatae crescant cum abscissis, cadere ad eam partem curvae, ad quam sita est linea abscissarum; ad contrariam, si posterioribus crescentibus, priores decrescant.

60. Triangulum hoc curvae caracteristicum simile est triangulo, quod semiordinata

PM. cum Tangente MT. et subtangente PT. constituunt. quod ex idea tangentis §. 35. determinata, et ex supposito parallelismo semiordinatarum PM. pm. nec non rectarum mR. TP. facile patet. Inde vero derivatur Analogia sequens F. 33. 34 36.

$$mR. : MR. = PM. : PT.$$

61. Si AP. fuerit recta et axis curvae, caracteristicum triangulum Rm R. etiam simile est triangulo, quod semiordinata PM. cum normali MN et subnormali PN. constituunt; unde habetur analogia

$$MR : Rm = MP : PN.$$

62. Data aequatione pro curva ipsius dx et dy valor haberi potest differentiando ipsius x. et y. per aequationem curvae.

determinatam. Denuo differentiando valorem dx et dy haberi etiam potest τ8 ddx. et ddy valor. e.g. in curva in qua est $y^2 = ax$. fit

$$2ydy = adx$$

proinde $dy. = \frac{adx}{2y.} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}.}$ et

$$dx = \frac{2ydy}{a.} \text{ nec non}$$

$$ddy = -\tfrac{1}{4}dx^2 \sqrt{\tfrac{a}{x^3}}$$

63. In curva quacunq. si y. cresceat crescente abscissa, dy est quantitas positiva. si vero crescente abscissa y. decrescat, dy est quantitas negativa. veritas propositionis inde patet, quia in priori casu minus à majore, in posteriori majus à minori subtrahendum ut habeatur dy.

64. Vice versa, dy positivo existente, semiordinatae crescunt crescentibus abscissis; negativo existente dy decrescunt.

65. Utrumq valet etiam de ddy quod positivum est, crescente dy crescentibus abscissis; negativum vero, decrescente eodem, et vice versa.

66. In curva qualibet rectis inter eam ductis determinata quae concavitatem lineae abscissarum obvertit, assumto dx constante; dy semper decrescit. F. 34. 37.

Si $m\pi$. MP. mp. fuerint semiordinatae infinite propinquae et mMr. $rMmR$. triangula caracteristica, in iisq Mr. MR. τὸ dy. ut mr. MR. aequalia inter se τὰ dx. repraesentant, producatur elementum curvae

Mn. ut semiordinatae mp. occurr
cat in S. quod punctum extra cur
vam, ad plagam connexitatis
ejusdem cadit. Nam quia curva
lineae AP. concavitatem obuer
tit, et hinc angulus cnM. 7 180.
sed mMS. = 180. erit Sp 7. m p.
Cum itaq. rMn. rMS. jaceant in
directum, cnn. MR. mp. sint pa
rallelae cnr. mR. praeterea ae
quales erit omnino Mr =
SR. In eo itaq. casu ubi y. cre
scit cum abscissa, est mR. $<$ SR.
atq. sic etiam mR $<$ rMr. proin
de dy. semper decrescit.
In casu, ubi y. crescente abscis
sa decrescit Rm. 7 Rs. hinc
Rm 7. rMr. consequenter $-$ Rm
$< -$ rMr. Sunt autem Mr et
Rm. differentialia abscissam
repraesentantia in hoc casu
negatiue per §. 63. spectanda

per §. 63. vnde patet etiam in hoc casu decrescere.

67. In curua qualibet, quae conuexitatem lineae abscissarum obvertit, assumto dx. constante, dy semper ~~de~~crescit. Demonstratio antecedenti similis est. F. 36. 38.

68. Si itaq. curuae lineae abscissarum concauitatem obvertit ddy. est negatiuum, si conuexitatem, positiuum, per §. 65.

69. Vice versa etiam patet, curuam abscissae concauitatem obuertere, si ddy fuerit positiuum; conuexitatem, si fuerit negatiuum.

70. In puncto variationis curvae dy est vel 0. vel ∞. hoc est differentiale applicatae, maximam vel minimam repraesentantis, aequatur vel nihilo vel infinito. In casu enim maximae applicatae, quae antea crescebant

post punctum variationis decrescunt, hinc dy. quod antea fuit positivum, post punctum variationis fit negativum.
In casu minimae applicatae quae antea decrescebant, post punctum variationis iterum crescunt, hinc dy. quod ante fuit negativum, post punctum variationis est positivum.
In casu igitur maximae vel minimae ex dy. negativo fit positivum, vel ex positivo fit negativum; quod esse nequit
In casu igitur maximae vel minimae nisi dy in puncto variationis transeat vel per zero vel per infinitum.

71. Eadem ratione patet differentiale quantitatis cujuslibet variabilis maximam vel minimam repraesentantis esse aequale vel 0. vel ∞.

72. Data itaq aequatione procurva algebraica quaecunque datur semiordinata maxima vel minima, nec non abscissa ipsi respondens. Eruuntur autem haec ope valoris τοῦ dy. ex curvae aequatione determinati, hoc enim vel infinito vel nihilo aequali ponendo, per communes algebrae regulas determinatur.

E.g. in curva ubi $y^2 = ax - xx$ est

$$2ydy = adx - 2xdx$$

$$dy = \frac{a-2x}{2y} \times dx. = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

Si $dy = 0$. fit $\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} = 0$.

proinde $a - 2x = 0$.

et $\frac{1}{2}a = x$. unde patet abscissam maximae semiordinatae respondentem aequari $\frac{1}{2}a$.

Quoniam autem est

$$y^2 = ax - x^2$$

fit in puncto maximae applicatae

$$y^2 = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

proinde ipsa etiam applicata maxima $= \tfrac{1}{2}a$.

73. In puncto flexus contrarii ddy. est vel 0. vel infinitum seu differentiale applicatae secundi gradus puncto flexus contrarii respondens aequatur vel zero vel infinito.

Nam si curvae abscissarum lineae ante flexum contrarium concavitatem obverterit, post eundem convexitatem obverteret; in priori casu ddy. est negativum in posteriori positivum. Si curva abscissarum lineae ante flexum contrarium convexitatem obverterit post eundem concavitatem obuertet. In priori casu ddy est positiuum in posteriori negatiuum, per 65. 66. 67. 68. In casu igitur flexus contrarii ddy positiuum fit negatiuum, vel negatiuum positiuum; quod esse nequit, nisi transeat per zero vel per infinitum, idq fieri necesse est in puncto flexus contrarii.

74. Data itaq aequatione procurua algebraica datur abscissa puncto flexus contrarii respondens, si ex aequatione valor ipsius ddy eruatur, illaq vel nihilo vel infinito aequalis ponatur; Exemplo sit curua in qua $y-a = \overline{x-a}^{3/5}$. Est enim

$$dy = \tfrac{3}{5}(x-a)^{-2/5} \times dx$$

$$ddy = -\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7/5} \times dx^2$$

$$= -\frac{6}{25}\,\frac{dx^2}{\overline{x-a}^{7/5}}$$

Ponendo $ddy = \infty$ fit
$$\frac{6}{25}\frac{x\,dx^2}{\overline{x-a}^{7/5}} = \infty.$$
proinde $\overline{x-a}^{7/5} = 0 = x-a$.
et tandem $x = a$.
unde patet abscissam puncto flexus contrarii respondentem aequari quantitati constanti a. Applicatam eidem puncto respondentem etiam esse a. sic patet. Quoniam in curva data est
$$y-a = \overline{x-a}^{3/5}$$
in puncto flexus contrarii vero fit $\overline{x-a} = 0$. erit
$y-a = 0$ et hinc etiam
$y = a$.

75. Num curva lineae abscissarum concavitatem an convexitatem obvertat, ex aequatione curvae eruitur.

si ex eadem determinetur ratio
τῶ dx ad dy. ex qua patet, num
dy. crescat an decrescat; in pri-
ori casu connexitas; in posteri-
ori concauitas abscissarum
lineae obuersa est.

Sit e.g. $y - a. = \overline{x-a}^{3/5}$ h

hinc $dy. = 3/5 (x-a)^{-2/5} dx$

et $dx = \dfrac{3\,dx}{5 \overline{x-a}^{2/5}}$

proinde

$5\overline{x-a}^{2/5} : 3. = dx : dy$

Si $x > a.$ $\overline{x-a}$ est positiuum
crescente itaq x. crescit $\overline{x-a}^{2/5}$
proinde crescit ratio $dx:dy$.
Cum autem dx ponatur con-
stans; dy. decrescere necesse
est, hinc ddy est negatiuum
et curua lineae abscissarum
obuertit.
Si $x < a.$ fit $x-a.$ quantitas
negatiua, crescente itaq x.

decrescit s: $\overline{x-a}^{2/5}$ positive specta-
tum, hinc dy crescit, ddy vero est
quantitas positiva et curva conve-
xitatem lineae abscissarum
obvertit.

76. In curva qualibet applicatis pa-
rallelis determinata PT. subtan-
gens in puncto quolibet M. est
$$\frac{ydx}{dy}.$$
In puncto M. quolibet capiatur
Triangulum curvae caracteri-
sticum Mm R. in quo est
$$mR : MR = MP : PT.$$
per §. 60.
Est autem $mR = dy$. $MR = dx$
$MP = y$. hinc
$$dy : dx = y : PT.$$
et $$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

77. Expressio haec subtangentis
in qualibet curva valet sive AP. fu-
erit axis ut in fig. 26. quo ca-

su TPM. est rectangulum, sive sit diameter alia, ut fig: 29. Valet etiam si linea abscissarum fuerit curva, ut fig: 30 31. nec certo respectu, si applicatae in eodem puncto concurrant, de quo §. sequenti dicendum. Aliter res se habet cum subnormalis, Tangentis etc: expressionibus; quae in sequentibus exponentur, quippe quae aliae sunt quoad axem, ad quem communiter referuntur, aliae quoad diametrum alium.

78. Si curvae CQ. applicatae in eodem puncto concurrant, et describatur à puncto quolibet Q. ad applicatam proxime sequentem, ex centro C. arcus Qx. dicatur dx. subtangens; Qr. etiam erit $\frac{y.dx}{dy}$.

F. 21.

Nam per §. 37. subtangens est cathetus trianguli rectanguli, cujus basis applicata CQ. hypothenusa vero recta QT. curvam in elemento Qq. tangens: Porro quoniam CQ. cq. sunt infinite propinquae, Qr. arcus pro lineola recta haberi potest, quae ad Cq. normalis est. Triangula itaq CQT. rqQ. sunt similia et hinc

$$rq : rQ = Cq : CT.$$

Est autem $CQ = y$. $rQ = dx$ et $rq = dy$. siquidem CQ. cq. applicatae sunt infinite propinquae, atq sit Qr: perpendicularis lineola infinite parva, quae pro arculo circulo haberi potest, et hinc $CQ = Cr$. proinde erit

$$dy : dx = y : CT.$$

et tandem

$$CT = \frac{ydx}{dy}.$$

79. Idem patet, si curuam CQb. ex alia curua AMB. ad axem AR. relata, generata intelligatur, dum axis AR. coit in punctum C. Siquidem in hoc casu subtangens curuae CQb. eadem est cum subtangente genetricis AMB. per §. 37. F. 26. 27.

80. Hinc autem consequitur in spirali CQb. perpendicularem Qr. ex puncto Q. ad applicatam proxime vicinam ductam eandem esse cum dx. differentiali abscissae in curua genetrice AMQ. Quod etiam sic demonstratur F. 26. 27.

In Triangulis Crq. rqQ. est

Cq. : qr. = Cr. : Qr.

Quoniam autem Cq. (fig: 27) = pm (fig: 26) siquidem CQ. cq. applicatae (fig: 27) eaedem sunt cum PM. pm. semiordinatis fig. 26.; sic autem

63

$rq. = mR. = dy.$

praeterea $CT. = PT.$ per §. 37. erit

$pm : mR = TP : Qr.$

est autem in fig: 26. etiam

$pm : mR = TP : nr.$ §. 60.

et hinc tandem

$nr = Qr. = dx$

81. Patet simul etiam Triangulum $nNmR.$ curvae genetricis $AmB.$ fig: 26. caracteristicum idem esse cum $Cqr.$ caracteristico Spiralis $CQb.$ atq hinc summam τῶν $Qr.$ esse absissam vel $AP.$ si in Spirali $CQb.$ computandi initium capiatur à puncto $A.$ vel $CP.$ si computatio fiat à $b.$ versus $c.$

82. Data aequatione pro curva datur subtangens pro quolibet quidem puncto $M.$ si in expressione generali $\frac{ydx}{dy}$ valor

ipsius dx. quae ex aequatione curvae eruitur, substituatur, tunc enim quantitates infinite parvae dx. dy. evanescunt, et valor subtangentis prodit in quantitatibus finitis:
Si e.g. pro curva fuerit

$y^2 = ax$. erit

$$2ydy = adx.$$

$$\frac{2ydy}{a} = dx.$$

Et substituendo in formulas generalibus $\frac{ydx}{dy}$. pro dx. hunc ejus valorem $\frac{2ydy}{a}$ prodit subtangens

$$PT = \frac{2y^2dy}{a.dy} = \frac{2y^2}{a}.$$

$$= \frac{2ax}{a.} \text{ (ob } y^2 = ax)$$

$$= 2x.$$

F. 26. 83. In qualibet curva rectis inter eam ductis determinata PN. subnormalis quoad axem est $\frac{ydy}{dx}$.

Si enim capiatur triangulum caracteristicum Mm R. erit

MR : mR = MP : PN per §. 67.

hoc est $dx : dy = y : PN$ et

tandem $\cancel{\frac{ydy}{dy}}$ $\frac{ydy}{dx}$

Idem et hoc modo demonstratur. Triangulum caracteristicum Mm R. simile est triangulo MPT. per §. 60. et in casu ubi AP. axis etiam triangulo MPN. per §. 67. proinde triangula MPT. MPN. etiam inter se similia, unde consequitur analogia

PT : PM. = PM. : PN.

hoc est ob PM = y. et $PT = \frac{ydx}{dy}$ per §. 76.

$\frac{ydx}{dy} : y = y : PN$: consequenter $PN = \frac{ydy}{dx}$.

84\. Data itaq. aequatione curvae quoad axim ejusdem, datur subnormalis ad axin, substituendo in formula generali valorem τõ dx et dy. e. g. in curva in qua $ax = y^2$ est

$$2ydy = adx.$$

et $dy = \frac{adx}{2y}$. proinde subnormalis $\frac{ydy}{dx} = \frac{yadx}{2ydx} = \frac{1}{2}a$.

85\. Sic etiam ex aequatione generali pro qualibet curva algebraica

$$ay^m \pm bx^n \pm cy^r x^s + \text{etc.} = 0.$$

eruitur formula generalis pro subtangente et subnormali. Est scilicet in qualibet curva algebraica subtangens $PT =$

$$= \frac{may^m \pm rcy^r x^s}{\mp nbx^{n-1} \mp scy^r x^{s-1}}$$ et

Subnormalis PN. =

$$= \frac{\mp nbx^{n-1} \mp csy^r x^{s-1}}{may^{m-1} \pm crx^s y^{r-2}}.$$

Nam ob

$ay^m \pm bx^n + cy^r x^s + df = 0$. erit

$may^{m-1} \pm nbx^{n-1}dx \pm cy^r s x^{s-1} dx$

$+ cx^s r y^{r-1} dy = 0.$

$may^{m-1} dy + csy^r x^{s-1} dx$

$=$

$\mp bx^{n-1} dx \mp csy^r x^{s-1} dx.$

$$dx = \frac{dy \times may^{m-1} + crx^s y^{r-1}}{\mp nbx^{n-1} \mp csy^r x^{s-1}}.$$

proinde

$$PT. = y\frac{dx}{dy} = \frac{may^m + crx^s y^{r-1}}{\mp nbx^{n-1} \mp csy^r x^{s-1}}$$

$$PN = \frac{ydy}{dx} = \frac{\mp nbx^{n-1} \mp csy^r x^{s-1}}{may^{m-1} \mp crx^s y^{r-1}}.$$

86. T. N. summa subtangentis et subnormalis in curva quali libet ad axem relata est

$\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx \cdot dy}$ quae formula ex valore subtangentis et subnormalis hypothesis 76. 82. determinato facile eruitur.

e.g. in curva in qua $ax = y^2$ est subtangens $2x$ et subnormalis $\frac{1}{2}a$. proinde summa utriusque $\frac{1}{2} + x$. Idem ex formula generali eruitur; nam ob $y^2 = ax$ est $dx = \frac{2ydy}{a}$ proinde

$$\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx \cdot dy} = \frac{(ay \cdot \sqrt{(dy^2) + \frac{4y^2dy^2}{a^2}}}{2ydy^2}$$

$$= a\sqrt{1+\frac{4y^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{2}a + \frac{2y^2}{a}$$

$$= \frac{1}{2}a + 2x. \text{ ob } y^2 = ax.$$

F. 26. 87. In curva qualibet ad axem relata tangens MT. est
$\frac{y}{dy}.\sqrt{dx^2+dy^2}$
Nam in triangulo MPT. rectangulo ad P. est
$MT^2 = PT^2 + MP^2$
Sed $MP = y$. hypothenusa
$PT. = \frac{ydx}{dy}$ proinde
$MT^2 = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}$
$= \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dy^2}$ est tan-
dem $MT = \sqrt{\frac{y^2 \times dy^2 + dx^2}{dy^2}}$
$= \frac{y}{dy} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$
E. g. in curva in qua est $y^2 = ax$
est $PT^2 \overset{+MP^2}{=} 4x^2 + ax$ hinc
$MT. = \sqrt{4x^2+ax}$
Eadem expressio eruitur ex for-

mula generali. Nam $dx = \frac{2y\,dy}{a}$ proinde $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\frac{4y^2dy^2+a^2dy^2}{a^2}}$$

$$= dy \times \sqrt{\frac{4y^2+a^2}{a^2}}$$

$$= dy \times \sqrt{\frac{4ax+a^2}{a^2}}$$

hinc $\frac{y}{dy} \times \sqrt{dx^2+dy^2} = y . \sqrt{\frac{4ax+a^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{ax} \times \sqrt{\frac{4ax+a^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2x^2+a^3x}{a^2}}$$

$$= \sqrt{4x^2+ax}$$

88. Normalis MN. in curva quacunq ad axem relata est F. 26.

$$\frac{y}{dx} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$$

Nam in triangulo PMN. est $MN^2 = PN^2 + PM^2$. sed est $PM = y$ et $PN = \frac{y\,dy}{dx}$ proinde

$$MN^2 = y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}$$

$$= \frac{y^2 dx^2 + y^2 dy^2}{dx^2}$$

$$= \frac{y^2 \times (dy^2 + dx^2)}{dx^2}$$

et tandem

$$MN = \sqrt{\frac{y^2 \times (dy^2 + dx^2)}{dx^2}}$$

$$= \frac{y}{dx} \times \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

E. g. in Curva ubi $y^2 = ax$ est $PN = \frac{1}{2}a$. proinde $MN = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax}$. Quod ex formula generali sequenti modo eruitur.

Ob $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$ fit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2 dy^2 + a^2 dy^2}{a^2}$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy.\sqrt{4y^2+a^2}}{a.}$$

$$\frac{y}{dx} = \frac{a}{2dy.}$$ proinde

$$\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4y^2+a^2}$$

$$= \sqrt{y^2+\tfrac{1}{4}a^2}$$

$$= \sqrt{ax+\tfrac{1}{4}a^2}.$$

89. Ex summa subtangentis et subnormalis data normalis datur tangens, et vice versa; Quod facile patet cum in Triangulo MTN. etiam sit

$\overline{TN}^2$ seu $(PT^2+PN^2) = MN^2+MT^2$

90. Si in curva abscissae computentur in Axe AP. a vertice curvae A. portio axeos inter verticem A. et punctum t. in quo à tangente secatur est — F. 26.

$$\frac{ydx-xdy}{dy.}$$

Nam $AT = PT - AP$. sed est
$PT = \frac{ydx}{dy}$ et $AP = x$.
provinde $TP = \frac{ydx}{dy} - x =$
$= \frac{ydx - xdy}{dy}$.
E. g. in curva pro qua $ax = y^2$
est $PT = 2x$. provinde $AT =$
x. quod ex formula generali
ita derivatur.
Ob $dx = \frac{2ydy}{a}$ fit
$$\frac{ydx - xdy}{dy} = \frac{\frac{2y^2dy}{a} - xdy}{dy}$$
$$= \frac{2ax}{a} - x = x.$$
91. Determinatio tangentis, normalis, portionis AT. inter verticem et tangentem, summa subtangentis et subnormalis in casu speciali majori subinde opera ex formula generali

derivantur, quam si eodem modo, quo ipsam formulam generalem eruimus; inueniatur. Exempla pro curua, in qua $y^2 = ax$ §phis praecedentibus adducta rem clare loquuntur; Non tamen praetermittendae erant hae formulae generales; quippe quae nihilominus in praxi magno usui esse possunt.

92. In eo casu, ubi Tangens MT. est Asymtotos seu tangens in puncto infinito, per §. abscissa aeque ac semiordinata erit infinita, proinde quantitates constantes, aequationem ingredientes, quae semper finitae assumuntur, respectu illorum infinitae paruae. Si igitur in casu speciali ex valore τὸ AT. abiiciantur constantes, eaeque in variabilem non ductae, F. 26.

habetur portio A T. inter verticem curvae et asymtoton interceptam.

F. 38. E.g. in curva, pro qua $ay^2 = abx + bx^2$ et hinc $2aydy = abdx + 2bxdx$

et $\frac{2aydy}{ab+2bx} = dx$ fit

$$AT. = \frac{2ay^2}{ab+2bx} - x.$$

$$= \frac{2.abx+bx^2}{ab+2bx} - x.$$

$$= \frac{2abx+2bx^2-abx-2bx^2}{ab+2bx}$$

$$= \frac{abx}{ab+2bx} = \frac{ax}{a+2x}.$$

Et ~~pro~~ Asymtoto abjiciendo ex $a+2x$. το a. fit $AT. = \frac{ax}{2x} = \frac{1}{2}a.$

93. Si in casu speciali valor AT. per datur in puris: constantibus AT. est infinita, atq hinc Asym-

totos cum axe AP. parallela. Exemplum est in curua vbi $ax = y^2$ tunc enim $AT. = x.$ etiam in casu Asymtoti; est autem in hoc casu abscissa $x.$ infinita, proinde Asymtotus lineae AP. in puncto infinite ab A. distante occurrit, seu parallela est cum eadem.

94. Si in vertice curuae AM. ad axem AP. relatae ducatur AE. axi perpendicularis, tangenti MT. in E. occurret, ita vt sit F. 26

$$AE = \frac{AT.\,dy}{dx} = \frac{y\,dy\,dx - x\,dy^2}{dx^2}.$$

Res ex similitudine triangulorum caracteristici mnmR. et trianguli ETA. patet, in quibus est:

$$dx : dy = AT.\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) : EA.$$

hinc $EA = \dfrac{ydx\,dy - x\,dy^2}{dx^2}$ seu $\dfrac{AT.\,dy}{dx.}$.

70

Exemplo sit curva, in qua est

$ay^2 = abx + bx^2$ ubi

$dx = \frac{2ay\,dy}{ab+2bx}$ et $y = \sqrt{bx + \frac{bx^2}{a}}$. porro

$TA = \frac{ax}{a+2x}$ proinde $EA = AT \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \frac{ax \times \overline{ab+2bx}}{2ay \cdot \times \overline{a+x}}$$

$$= \frac{ax \times b \times \overline{a+2x}}{2ay \times \overline{a+2x}}$$

$$= \frac{axb}{2ay} = \frac{bx}{2\sqrt{bx+\frac{bx^2}{a}}} = \frac{abx}{2\sqrt{a^2bx+abx^2}}$$

In casu asymtoti AE fit $= \frac{a}{2\sqrt{ab}}$

95. In curva itaq quacunq algebrai-
ca data positione, ex data aequati-
one datur Tangens pro curvae
quolibet puncto M. imo Asymto-
tos. Dato enim puncto M. datur
abscissa et hinc puncta A et
E: per eaq tangens qualibet,
et ipse asymtotus, si qua datur,
satis determinata erit.

96. Huc usq ex data curvae aequati-
one eruere docuimus Tangen-

tem, Subtangentem, Normalem, Subnormalem pro puncto quolibet.
Nunc inverse procedendo ex data tangentis, Subtangentis, Normalis, Subnormalis valore, aequatio pro curva determinatur, si ther valorem datum expressionibus generalibus quae §§. praced. eruebantur, aequalem ponendo, et per communes algebrae regulas ita transformando, ut alteram partem abscissae, alteram semiordinatae ingrediantur elementa. Facta enim tum integratione prodit ipsa aequatio pro curva, cujus tangens, Subtangens, normalis, subnormalis datum valorem habet.
Exempla rem clariorem reddent, quam multorum verborum ambages.
Sit in curva quadam subtangens $\frac{2y^2}{a}$ quaeritur hujus curvae ae-

quatio. Est autem, quia $\frac{2y^2}{a}$ subtangens esse supponitur.

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy} \text{ proinde}$$

$$2ydy = adx \text{ et tandem}$$

capiendo summas

$$y^2 = ax, \text{ quae est aequatio}$$
pro curva.

Sit porro $\frac{1}{2}a$. subnormalis curvae cujusdam et erit

$$\frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx} \text{ proinde}$$

$\frac{1}{2}adx = ydy$. et capiendo summas $\frac{1}{2}ax = \frac{y^2}{2}$ seu $ax = y^2$ quae est aequatio pro curva cujus subnormalis est $\frac{1}{2}a$.

F. 39. 97. Datis rectis MT. TS. angulo quocunq inclinatis; curva quaelibet algebraica describi potest, datae aequationis, quae rectam MT. tangat in puncto M. et cujus axis sit TA. recta.

Ducta enim MP. ad TA. perpendicu-
lari, dantur PM. et PT. quarum pri-
or pro semiordinata curvae descri-
bendae, posterior pro subtangen-
te ipsi respondente haberi potest.
Est autem in qualibet curva
$dy : dx = PM : TP$. ob simili-
tudinem triangulorum MmR. MTP.
Si itaq. ex data curvae aequatione
determinetur dx. dy. ex horum
valore et TP. eruuntur constan-
tes quantitates aequationem in-
gredientes, nec non abscissa x. cur-
vae describendae pro. m. respon-
dens.
Sit e.g. aequatio pro curva descri-
benda $y^2 = ax$ et est $dx = \frac{2ydy}{a}$
dicatur PM y. PT. T. et erit
$dy : \frac{2ydy}{a} = y : T$. hinc $\frac{2y^2}{a} = T$.
et $\frac{2y^2}{T} = a$. Porro est $ax = y^2$
hinc $\frac{a}{y^2} = \frac{1}{x}$ et $\frac{y^2}{a} = x$
$= \frac{1}{2}T. = AP.$ proinde AT. di-
stantia verticis a pto. T. etiam $\frac{1}{2}T$.

98. Si ex puncto spiralis c. describatur circulus bGL. occurrens spi-
F. 26. 27. rali in b. Elementum spiralis primum, quod vbi in fig. 26. in
A. est vertex curuae genetricis, in centro situm est, producatur,
donec occurrat peripheriae circulari in L. et resecabitur ab
applicata qualibet cQ. producta in G. portio bG. vel LG. cu-
jus vtriusq. elementum est $\frac{rdx}{y}$
vbi per r. significatur ~~radius~~
cb circuli bGL.
Est enim $Gc : Qc = Gg : Qq$.
cum autem sit $Gc = r$. $Qc = y$.
$Qq = dx$ erit omnino
$$\frac{rdx}{y} = Gg.$$

99. Si itaq. ex curuae genetricis
F. 26. 27. AmB. aequatione in formula
generali $\frac{rdx}{y}$ substituatur va-
lor ipsius dx vel y. integrale

est Portio cg. si in generatrice sit
initium ~~com~~ computandi capiatur in
puncto c. portio vero bg. si computa
tio fiat à puncto b. versus c.

100. Manifestum etiam est, quod si
ponatur $y = r$. quod accidit in
puncto b. integrale ipsius $\frac{rdx}{y}$. ae-
quari integrae portioni cb.

101. Vice versa si curva cQb. refe
ratur ad peripheriam circula- F. 27.
rem bgc. ita quidem ut rectae gQ.
qq. in uno eodemque puncto c. con
currentes et ad peripheriam cir-
cularem bgc. normales sint ap-
plicatae y. arcus vero bg. bq. respon-
dentes abscissae x. si porro ex
puncto Q. applicatae Qg. ad qq.
infinite propinquam ducatur
Qr. normalis, erit hoc $Qr =$
$\frac{r-y}{r} dx$.

Est enim
$cg : cQ = gq : Qr$. et

ob $ES = 1$. $CQ = r-y$. $Gg = dx$
omnino $Qr = \frac{r-y}{r} dx$.

102. Substituto itaq ex aequatione
F. 26. 27. curvae bQC. ad curvam bSL. relatae valore ipsius y. vel dx
et facta integratione, prodit AP.
vel PC respondens portio axeos
AC: ad quam referebatur curva
AMB. quae coëunte hoc axe AC.
in punctum C. gignit Spiralem
cNb.

103. Patet etiam in eo casu, ubi
F. 26. 27. ponitur $y = r$. quod contingit
in puncto C. integrale elementi $\frac{r-y}{r} dx$ ipsum esse axem
AC. qui in punctum C. coit.

104. Si AMB. curvae axis AC coëat, in punctum C. ut prodeat
F. 26. 27. Spiralis cQb. radio $cb = CB$.
describatur circulus bSL.

ex data aequatione curuae AMB.
ad axin AC. relatae datur aequatio
spiralis ad circularem peripheri
am bLL. relatae, ita bf SQ sint
applicatae, arcus bS. bg. vero ab-
scissae, eaq. à puncto b. computa-
tae.
Exemplum loco demonstrationis
erit. Sit in curua AMB. $MP^2 = a.AP.$
significetur MP per y. AP. per x.
SQ. per v. bS. per z. bSL. vero per D.
et erit $y^2 = ax.$ proinde

$$2ydy = adx \text{ et } \frac{2ydy}{a} = dx = Qr.$$

proinde

$$Sg. = \frac{rdx}{y} = \frac{2rdy}{a} \text{ et}$$

$$Lg. = \frac{2ry.}{a.} = D. - z. \text{ hinc}$$

$$2ry = aD - az$$

Est autem $y. = r - v.$ proinde

$$2r^2 - 2rv = aD. - az.$$ Quae
est aequatio desiderata spiralis
CQb. ad peripheriam circularem
relatae.

Si fuerit $a = \frac{2r^2}{p}$ ubi p. significat peripheriam circuli radio r. descriptam fit

$Lg. = \frac{2rpy}{2r^2} = \frac{py}{r}$ et in puncto b. ubi $y = r$ $p = LgL = D. = rz.$

hinc $py = rp - zr = pr - pu$. et tandem $rz = pu$. quae est aequatio ~~st~~ pro spirali ab Archimede inuentore Archimedea dicta.

105: Vice versa data aequatione pro curua b&c: ad peripheriam circuli relatae ita ut applicatae S&. in uno eodemq puncto c. concurrant, et ad peripheriam circuli sint normales; abscissae vero computentur in peripheria circulari à puncto b; inuenitur aequatio pro curua AMB. ex qua, axe

AC. in punctum coeunte, Spiralis bQC. generatur.
Exemplo, quod huic etiam vicem demonstrationis subeat, res manifesta fiet. F. 26. 27.
Significetur in curva AmP. AP per z. Pm vero per v. AC. per b. nunc in Spirali fig: 27. bS. per x. SQ. per y. peripheria tota bSQb. per p. bC. = SC. per r. et sit pro Spirali bQc $py = rz$ et erit

$pdy = rdx \quad \frac{pdy}{r} = dx = Sq.$

hinc $Qr = Pp = \frac{r-y}{r}dx =$

$= \frac{pdy}{r} - \frac{pydy}{r^2}$ proinde

$PC = \frac{py}{r} - \frac{py^2}{2r^2} +$

Est autem $y = r - v$. et

$y^2 = r^2 - 2rv + v^2$ hinc

$Pc = \frac{pr}{r} - \frac{pv}{r} - \frac{pr^2}{2r^2} + \frac{prv}{2r^2} + \frac{pv^2}{2r^2}$

$= \frac{p}{2} - \frac{pv^2}{2r^2} = b - z$

Sed in puncto C. fit $z = a$ et $v = v$. proinde $\frac{v}{z} = b$. unde con-
sequitur esse $\frac{pv^2}{2r^2} = z$ seu
$v^2 = \frac{2r^2z}{p}$ quae est aequatio
curuae AmB. ex qua axi
AC in punctum excunte Spi-
ralis CNb generatur.

106. Si curuae BQC. fig: 28. axis
F. 26. BL incuruatur et fit circula
27. bgL. radio CL. descriptus,
28. ita quidem vt semiordina-
tae gQ. magnitudine mane-
ant imutatae et ad curuam
circularem bgL. normales sint,
vt antea normales erant ad
axin BgL. curua BQC. fig: 29
imutatur et fit alia bQc fig: 27.
Patet autem ex praecedenti-
bus dari etiam curuam AmB.
fig: 26. ex qua eadem curua bQC.
generatur axe AC in punctum

coeunte. Manifestum etiam est ex data curvae BQC. aequatione respectu axeos BL. dari etiam aequationem curvae AMB. respectu axeos AC. et vice versa.

107. Poterat eadem ratione problematum aliorum similium resolutio doceri, qualia sunt e.g.

Data aequatione pro curva AMB. genetrice spiralis aQb. invenire spiralis aQb. aequationem ad curvam aliam bSL. quae non est circulus et aliq cujuscunq aequationis relatae, ita ut arcus curvae bS. sint abscissae rectae SQ. applicatae F. 26.27.

Datis aequationibus curvarum AMB. AQC. ad communem axem AP. relatarum, invenire aequationem curvae alterutrius si abscissae in altera curva computentur, applicatae vero sint rectae parallelae MQ NC. inter. F. 40.

eas interceptae.

Data aequatione curvae AmB.
F 41. ad axin AP. relatae, invenire aequationem pro eadem si applicatae MC: BC: ex uno eodemque puncto ducantur.

Sed cum haec talia, aliaque similia, licet nullius usus non sint, pluribus tricis, quam quas hic paucis pagellis explicare propositum est, implicatae deprehendantur, ea quoad maximam partem praeterire et unum tantum alterumve huc spectantium in sequentibus monere, reliqua alii tempori relinquere, placuit.

108. Si AmB. fuerit curva quaelibet relata ad axem suum AP et ad eandem ex puncto quolibet C. ducantur rectae CM.

quae repraesentent applicatas, Si porro Cm. significatur per z. abscissa AP. puncto m. respondens in axe, per x. ipsa vero semiordinata mP. per y. CR. distantia puncti C. ab axe per q. et AR. abscissa semiordinatae BR. per punctum C. transeunti respondens per p. et erit

$$z^2 = y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$$

Nam ducta CD. ad mP. perpendiculari erit mD. $= y - q$. vel $q - y$. et CD. $= p - x$. Est autem $mC^2 = CD^2 + mD^2$ unde consequitur esse

$$mC^2 = z^2 = y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$$

109. Si punctum C. assumatur in axe erit $q = 0$. proinde F. 43.

$$z^2 = y^2 + p^2 - 2px + x^2$$

110. Positis iisdem, quae §pho 108. ponebantur erit

$z.zdz = zydy - zqdy - pdx + zxdx.$

et ponendo $dz = 0$. fit

$zydy - zqdy - zpdx + zxdx = 0.$

et hinc

$ydy - qdy = pdx - xdx.$

$\overline{y-q}.dy = \overline{p-x}\,Xdx.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}.$ et

$\frac{ydy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}\,Xy.$

Cum itaq. sit $p-x = CD.\ y-q = mD.$

$y = mP.$ fit

$mD : mP = CD : \frac{ydy}{dx}.$

Est autem etiam

$mD : DC = mP : PS$

hinc $\frac{ydx}{dy} = PS.$

Unde patet in puncto ~~ubi~~ curvae AmB. ubi $dz = 0.$ PS. distantiam puncti s in qua occurrit ~~in~~ cum axi, ab abscissa respon-

dente MP. esse subnormalem atq;
hinc CN. normalem ad curuam.
In puncto autem in quo $dz = 0$. est
MC. minima; hinc manifestum est
normalem esse minimam omnium
rectarum, quae ex dato puncto
quolibet, ad curuam quamlibet
datam duci potest.

111. Applicata z. cujus differentiale $dz = 0$. etiam repraesentat maximam; unde patet etiam lineam maximam, quae ex puncto quocunq; C. ad curuam AMN. duci potest, siqua datur, ad curuam normalem esse.

112. Sit AMm. curua cujq; applicatae MC. mC. in pto C. concurrunt, sint MC. mC. applicatae infinite propinquae et MT. mt. Tangentes ad puncta M. et m. CT. vero ad applicatam Cm perpendicularis, occurrens tangenti re-

alteri MT in L.
denti mt in puncto t. in quo normalis CL. majori applicatae CM. respondens occurrit tangenti MT. minori applicatae Cm. respondenti. Et punctum t respectu puncti C. ad eandem cum puncto C. plagam situm erit, si curva AmB puncto C. convexitatem obverterit, ad diversam vero si eidem concavitatem obverterit. Id quod statim ex intuitu

F. 44.

figurarum allegatarum patet.

113. In puncto igitur flexus contrarii Lt. erit 0.

114. Sint CM. cm. applicatae curvae AMm. ex eodem puncto C. exeuntes; Ducatur ex centro C. arcus circularis Mo. is vocatur dx. et supponatur constans. Cm. dicatur y. ut sit Mo. dy. dico in puncto flexus contrarii esse

$$dy^2 + dx^2 = yddy.$$

Ex T. puncto in quo tangens in M. normali CT. ad applicatam respondentem CM. occurrit, sit arg TH. perpendicularis ad CZ; et quoniam MCT. mCt recti erit angulo MCm = tCT. angulo. Est autem MCm angulo infinite paruus, ob mc mc infinite propinquas, vnde etiam tCT. angulus infinite paruus erit; hinc vero est MCZ angulo = MTC. angulo et triangula MZC. MTC. aequalia et similia proinde etiam HTZ. MTC. similia; consequenter

$$CM : CT = TH : HZ.$$

Est autem $CM = y$. per hyp; $CT. = \frac{ydx}{y}$ per §. 78. et $TH = \frac{dx^2}{y}$ ob similitudinem triangulorum HTC. MRC. in quibus est

$$CM : CT = MR : TH. \text{ seu}$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : TH.$$

proinde

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL.$$

atq. sic $HL = \frac{dx^3}{dy^2}$

Porro est Ht differentiale subtangentis $\frac{ydx}{dy}$ vnde fit ob dx constans

$$Ht = \frac{dxdy^2 - ddydxy}{dy^2}$$

Hinc tandem erit $Lt = HL + Ht$

$$= \frac{dx^3 - dxdy^2 - ddyydx}{dy^2}$$

Est autem in puncto flexus contrarii $Lt = 0$. atq. hinc

$$dx^3 + dxdy^2 - ydx\,ddy = 0.$$

consequenter

$$dx^3 + dxdy^2 = ydx\,ddy$$

et deniq.

$$dx^2 + dy^2 = yddy$$

115. Curvae cujuslibet AMB. arcus cum applicata et abscissa respondente spatium comprehendit quod AREAM CURVAE abscissae huic respondentem

appellant. Si itaq curva refertur ad rectam AP. in qua absciss ae computantur à vertice A. area est spatium AMP. F.26.

Si abscissae computantur à puncto alio E. erit Area spatium AEMPQ. F.27.

Si applicatae in puncto C. concurrunt, erit area spatium CSQ.

Si linea abscissarum fuerit curva bS. erit area spatium bSQ. et sic in casibus aliis.

116. In curva itaq qualibet ad axem relata, significatis semiordinatis PM. per y. abscissis in axe computatis per x. erit differentiale areae ydx. s. rectangulum sub abscissae differentia et semiordinata contentum.

117. Si applicatae CQ. ex uno eodemq puncto C. exeant, erit differentiale areae ½ ydx s. triangulum sub applicata CQ et arcu Qr. circuli ex centro C. descripti, per dx significata contentum.

158. Si in formulis his generalibus ydx $\frac{1}{2}$ ydx ex curvae aequatione data valor ipsius y. vel dx. substituatur et elementum hoc integratur, prodit area curvae illius applicatae y. vel abscissae cuilibet respondens: Quod appellant curvam QUADRARE.

e.g. si $y^2 = ax$ fit $y = \sqrt{ax}$ et $ydx = dx\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ proinde $S. ydx = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{ax}$ s. $\frac{2}{3} xy$. quod exprimit aream curvae abscissae x. vel semiordinatae y. respondens.

159. Sit $y^2 = ab + ax$ et erit $y = \sqrt{ab+ax}$ hinc $ydx = dx\sqrt{ab+ax}$ proinde $S. ydx = \frac{2}{3} \frac{\overline{ab+ax}^{\frac{3}{2}}}{a} \pm Q$ $= \frac{2}{3} \overline{b+x} \times \sqrt{ab+ax} \pm Q$ ponendo $x = 0$. fit $\frac{2}{3} b \times \sqrt{ab} \pm Q = 0$ proinde $Q = \frac{2}{3} b \times \sqrt{ab} + S. ydx$ s. area abscissae x. respondens $\frac{2}{3} \overline{b+x} \times \sqrt{ab+ax} - \frac{2}{3} b\sqrt{ab}$.

119. Vice versa data area per abscissam et semiordinatam aequatio pro curva ipsa determinatur. Sit eg. $\frac{2}{3}xy$. area semiordinatae y et abscissae x respondens: erit

$$\tfrac{2}{3}xy = S.\, ydx \text{ et } ydx = \tfrac{2}{3}xdy + \tfrac{2}{3}ydx$$

$$\tfrac{2}{3}xdy - \tfrac{1}{3}ydx = 0 \text{ et hinc}$$

$$\tfrac{2}{3}xdy = \tfrac{1}{3}ydx,\ \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$2\,L.y = L.x. \text{ seu } L.y^2 = L.x.$$

proinde $y^2 = x$. sed si a respectu x. et y. ~~fu~~ erit r. $y^2 = ax$

120. Si semiordinatae PM. PB. curvae AMB. designent in curva AQC ad eandem axem AP. descriptae arearum APQ, APC: iisdem Abscissis AP. AR. respondentibus, relationem curva AMB. curvae AQC. QUADRATRIX. audit. F. 40.

Possunt autem semiordinatae curvae AMB. areas curvae AQC.

iisdem abscissis respondentes variis modis designari e.g. si $AQP = PM^2$ vel si $APQ = PM.AP$ vel si $AQP = a\,PM$.
Facile autem intelligas, quod data quadratrice curuae, cujus quadratrix est, detur aequatio vel constructio et vice versa.

121. Si curua quaelibet AMB. referatur ad axem APC: ita ut AP sit x. PM vero y. Mm arculus, quo crescente abscissa particula infinite parua Pp. ipsa curua AMB. crescit, erit

$\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Nam quia APC. est axis curuae erit triangulum caracteristicum Mm R. rectangulum in quo Mm. arculus, qui pro lineola recta infinite parua haberi potest, hypothenusa, proinde

$Mm^2 = MR^2 + mR^2$ sed quia $MR = dx$, $mR = dy$, $Mm^2 = dx^2 + dy^2$ atque sic $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

122. Idem elementum etiam ex similitudine Triangulorum MTP, MmR. et analogia inde fluente

$TP : TM = MR : Mm$

eruitur.

123. Si in expressione generali $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ valor ipsius dx vel dy. ex aequatione curvae ad axem relata substituatur, et formula integretur, habebitur arcus AM abscissae AP. respondens: Hocque appellant curvam AMB. RECTIFICARE.

Sit: $y^3 = ax^2$ vel posito $a = 1$.
$y^3 = x^2$ et erit

$$3y^2dy = 2xdx$$

$$9.y^4dy^2 = 4x^2dx^2$$

$$\frac{9y^4dy^2}{4x^2} = \frac{9ydy^2}{4.} = dx^2$$

et sic $Nm^2 = \surd dx^2 + dy^2$

$= \frac{9y\,dy^2 + 4dy^2}{4.}$ proinde

$\frac{1}{2} dy \sqrt{9y+4} = Nm.$ et ca-

piendo summas fit

$\frac{1}{27}.\overline{9y+4}^{3/2} \pm \alpha = Am.$

ponendo $y = 0.$ fit $Am = 0 =$

$\frac{1}{27} \times 4^{3/2} \pm \alpha = \frac{8}{27} \pm \alpha$ proinde

$\alpha = -\frac{8}{27}.$ hinc arcus

$Am. = \frac{1}{27}. \times \overline{9.y+4}^{3/2} - \frac{8}{27}.$

$= \frac{1}{27}. \times \overline{9y+4} \times \sqrt{9y+4} - \frac{8}{27}.$

124. Vice versa dato arcu Am. per abscissam vel semiordinatam respondentem, datur aequatio pro curua. Sit e.g.

$Am = \frac{1}{27}. \times \overline{9y+4}^{3/2} - \frac{8}{27}.$

et erit $Nm = \frac{1}{2} \times (9y+4)^{1/2} \times dy.$

$= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ pro-

inde $dx^2 + dy^2 = \frac{9y+4}{4} \times dy^2$

$= \frac{9y\,dy^2}{4} + dy^2$

$dx^2 = \frac{9}{4} y dy^2 \quad dx = \frac{3}{2} \sqrt{y}\, dy$
$= \frac{3}{2} y^{1/2} dy.$

et tandem

$x = y^{3/2}$ et $x^2 = y^3.$

125. Elementum corporis AMV quod generatur revoluendo curuam AMB. circa axem est Cylinder MmPp. cujus basis est circulus MmNn. radio y. s. semiordinata MP. descriptus; altitudo vero Pp. elementum abscissae. F. 46.

Manifestum enim est quod crescente abscissa x. particula infinite parua Pp. corpus AMV. crescat definito hoc cylindro elementari MmNn.

126. Significata itaque ratione, quam radius ad peripheriam circularem eodem descriptam habet, per $\frac{r}{p}$. erit elementum corporeum

$\frac{py^2}{2r} dx.$

Nam peripheria circularis NN est $\frac{py}{r}$ proinde area ejusdem circuli $\frac{py^2}{2r}$ et sic corpusculum $\nu Nm Nn = \frac{py^2}{2r} dx.$

127. Si igitur detur aequatio curuae ad axem relatae ex ea in formula generali $\frac{py^2}{2r} d\overset{3}{x}$. substituatur valor ipsius y^2 vel dx. et formula haec integretur, habebitur corpus abscissae x. vel semiordinatae y. respondens: Sit e.g. $y^2 = ax - xx$ erit $\frac{py^2}{2r} dx = \frac{paxdx}{2r} - \frac{px^2dx}{2r}$ proinde capiendo summas $AMN corpus = \frac{pax^2}{4r} - \frac{px^3}{6r}$

$$= \frac{\frac{3}{2} pax^2 - px^3}{6r}$$

128. Vice versa etiam ex dato corpore rotatione curuae circa axem descripto, per abscissam

vel semiordinatam respondentem ipsa aequatio pro curva respectu axeos eruitur.

Sit e.g. AMPX. corpus abscissae respondens $= \frac{y^4}{a}$ et erit

$$\frac{4y^3dy}{a} = \frac{py^2dx}{2r}. \quad \frac{4ydy}{a} = \frac{pdx}{2r}.$$

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{px}{2r}. \text{ seu } 4ry^2 = apx.$$

129. Si AMB. sit curva relata ad axem AP. et CM. sit radius circuli curvam AM. in elemento Mm. osculantis et CE. ad applicatam respondentem MP. si opus productam in E. perpendicularis; et erit hujus applicatae portio ME $= \frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$.

Si abscissae elementa supponantur aequalia, atque ita dx. constans; si vero curvae ipsius AM. elementa Mm. capiantur aequalia erit

$$ME = \frac{dydx}{ddx}.$$

Ducatur MR. parallela cum AP. ut habeatur triangulum carac caracteristicum MmR. quod est rectangulum, quia AP. est axis. Quoniam radius circuli ad elementum peripheriae suae quodlibet perpendicularis, CMm. angulus rectus est; hinc, et cum etiam RMR. angulus rectus sit, erit ang. mMR = CME. ang: proinde ob rectos ad R et E triangula MmR. CME. similia et in illis

$$MR : Mm = ME : MC.$$

seu significando MR per dx Mm per ds ME. per t et MC. per R.

$$dx : ds = t : R. \text{ hinc}$$

$$\frac{dst}{dx} = R$$ et supponendo dx constans

$dR = \frac{dds + ds\,dt}{dx}$. Cum autem in elemento Nm. radius osculi CN. s. R. sit constans, erit $dR = 0. = \frac{dds + ds\,dt}{dx}$ et hinc $dds + ds\,dt = 0$. proinde $-ddt = ds\,dt$

Est autem $ds = Nm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ §. 120. hinc $dds = \overline{dx^2 + dy^2}^{-\frac{1}{2}} \times dy\,ddy$.

Porro quia mc tantum crescit quantum semiordinata PN. fit $dt = dy$ atque sic erit

$-\frac{dy.ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \times t. = dy.\sqrt{dx^2 + dy^2}$ et tandem

$-t. = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Q. E. V.

Si ds supponatur constans erit $dR. = \frac{ds\,dt}{dx} - \frac{ds\,t.\,ddx}{dx^2}$

hinc $\frac{ds:dt}{dx} = \frac{ds:ddx\,t.}{dx^2}$

hoc $dt = \frac{ddx}{dx}t$ proinde

$dy = \frac{ddx\,t}{dx}$ et $t = \frac{dy\,dx}{ddx}$

Q. E. Alterum.

130. Data itaq aequatione pro curva datur vni substituendo in formula valorem $dx.\ dy.\ ddy.$ ex aequatione derivato.

E. g. in curva in qua $y^2 = ax$ fit $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$ et $ddy = \frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$

$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dx^2 + 4axdx^2}{4\sqrt{ax}}$ proinde

$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{a^2dx^2+4axdx^2 \times 4x\sqrt{ax}}{adx^2 \times 4ax}$

$= \frac{a+4x \times 4x\sqrt{ax}}{4ax.}$

$= \frac{a+4x. \times \sqrt{ax}}{a.}$

$$= \frac{a\sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax}}{a}$$ =ME,

$$= \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$$ =ME:

131. In curva qualibet AM. ad axem AP. relata, si dx elementum abscissae sumatur constans erit radius osculi

$$CM. = \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\, ddy.}$$

Nam per ea, quae §. praec. demonstrata sunt est

$$CM. \text{ vel } R. = \frac{ds \cdot ME}{dx.}$$ posito autem dx constante est

$$ME = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$$ et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

proinde $ME.\frac{ds}{dx} = MC: =$

$$= \frac{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\, ddy.}$$

132. Si autem in curva AM. elementum Mm. capiantur aequalia erit radius osculi

$MC = \frac{ds.dy}{ddx}$ ubi per ds significatur νm.

Nam posito νm. constante est $\nu NE = \frac{dy\,dx}{ddx}$ proinde

$\frac{ds.ME}{dx} = \frac{ds.dy}{ddx} = MC$

137. Data itaq aequatione pro curva qualibet ad axem relata invenitur radius osculi pro quolibet puncto in substituto in expressionibus generalibus valore ipsius dx. et ddx vel dy et ddy e. g. pro curva in qua est $ax = y^2$ radius osculi pro quolibet puncto M. posito dx constante est

$\sqrt{\frac{16x^3}{a} + 12x^2 + 3ax + \frac{1}{4}a^2}$

Nam ob $y^2 = ax$ est $\frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dy$

$ddy = \frac{-adx^2}{4x.\sqrt{ax}}$

$$dx^2+dy^2 = dx^2 + \frac{a^2dx^2}{4ax}$$

$$= \frac{4axdx^2+adx^2}{4ax}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{dx.} = \frac{4axdx+a^2dx}{4ax}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{-dx.ddy} = \frac{4x\sqrt{ax}\times 4axdx+a^2dx}{4ax.\times adx^2}$$

$$= \frac{x.\sqrt{ax}\times 4x+a.}{ax.dx.}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{-dx.ddy}\times\sqrt{dx^2+dy^2} =$$

$$= dx.\times\frac{\sqrt{4ax+a^2}}{2\sqrt{ax}}\times\frac{x\sqrt{ax}\times 4x+a}{4ax.dx}$$

$$= \frac{\sqrt{4.ax+a^2}\times 4x^2+ax}{2ax.}$$

$$= \sqrt{4ax+a^2}\times\frac{\sqrt{16.x^4+8.ax^3+a^2x^2}}{2ax}$$

$$= \sqrt{64.ax^5+32.a^2x^4+4a^3x^3+a^4x^2+16.a^2x^4+8a^3x^3}$$

$$= 2ax.\sqrt{\frac{16x^3}{a}+12.x^2+3ax+\tfrac{1}{4}a^2} = MC.$$

134. Ponendo in expressione pro radio osculi curvae cujus libet $x=0$. prodit radius osculi pro puncto curvae quod respondet puncto, à quo abscissae computantur; si itaq computatio fit à vertice A. habebitur expressio pro radio osculi in vertice. Idem prodit si ponatur $y=0$. quippe quod etiam accidit in vertice.

135. Data aequatione curvae
F. 47. AM. ad axem relatae, datur CE centri circuli osculantis curvam in puncto M. distantia à semiordinata respondente MP quae est $\frac{(dx^2+dy^2)\,dy}{-ddy\,dx}$

Nam ob similitudinem triangulorum MPH. MEC. est
$MP : PH = ME : EC$.

Seu quia mC est normalis ad curvam AMm. per §. 17. et hinc PH. subnormalis $\frac{ydy}{dx}$ §. 83. et $mE = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ §. 220. $y : \frac{ydx}{dx} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy} : CE$.

proinde tandem

$$CE = \frac{(dx^2+dy^2)dy}{-dx . ddy}.$$

Idem et hoc modo demonstratur quia $mC^2 - mE^2 = CE^2$ fit

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{6}{2}}}{-ddy^2 dx^2} - \frac{(dx^2+dy^2)^2}{-ddy^2} = CE^2$$

$$= \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{6}{2}} - (dx^2+dy^2)^2 \times dx^2}{-ddy^2 . dx^2}$$

$$= \frac{\overline{dx^2+dy^2}^2 \times \overline{dx^2+dy^2 - dx^2}}{-ddy^2\ dx^2}$$

$$= \frac{\overline{dx^2+dy^2}^2 \times dy^2}{-ddy^2\ dx^2}$$ proinde tandem

$$CE = \frac{\overline{dx^2+dy^2} \times dy}{-ddy . dx}.$$

136. Data itaq aequatione pro curva datur CE. substituendo in formula valorem τ dx. dy. ddy. ex aequatione determinato. E. g. In curva in $y^2 = ax$ est

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} \quad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{4ax} \quad -ddy = \frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dx^2 + 4axdx^2}{4ax}$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{a+4x}{4ax} \times 4x\sqrt{ax}.$$

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} \times \frac{dy}{dx} = a+4x \times \sqrt{ax} \times \frac{a}{2\sqrt{ax}}$$

$$= \tfrac{1}{2}a + 2x. = CE.$$

137. Data aequatione curvae AM. ad axem relatae, datur aequatio pro evoluta BC: ad axem suum VC. relatae. Nam data aequatione pro curva AMm. datur ME per §. 129. CE: per §. 131: et radius osculi CM per §. 132. nec non ex hoc vl-

timo AB. radius osculi pro vertice A. per §. 133.
Si igitur ab NE subducatur semiordinata MP = y. habebitur PE = NC: abscissae pro evoluta BC:
Porro addendo AP = x et EC prodit AN: a quo si subducantur AB. radius osculi pro vertice, habebitur BN. semiordinata evolutae respondens: si haec reducantur secundum regulas algebrae habebitur tandem curvae BC:, quoad convexitatem suam ad axem NC relatam, aequatio.
Sit e.g. pro curva AM: $ax = y^2$ et erit $MC = \sqrt{\frac{16.x^3}{a.} + 12x^2 + 3.ax + \frac{1}{4}a^2}$
proinde ponendo $x = 0$. radius osculi in vertice seu $AB. = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a.$
porro $CE. = \frac{1}{2}a + 2x$ per §. 135: hinc $AN: = a + 3x$. et applicata $BN = 3x$.

Porro est $NE^2 = y\,ax. + 4x\sqrt{ax}$

§.129. proinde $PE^2 = NE^2 \cdot \frac{a.}{}$

$\frac{4x. + \sqrt{ax}}{a}$

Significatur abscissa NE per z. NB. per v. et est

$z = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} \mid az = 4x\sqrt{ax}$

$a^2z^2 = 16.\,x^2ax$

$az^2 = 16\,x^3$ $\frac{1}{16}az^2 = x^3$

Porro est $v = 3x$. $v^3 = 27.\,x^3$

$\frac{1}{27}.v^3 = x^3$ hinc denique

$\frac{1}{16}.az^2 = \frac{1}{27}v^3$.

$27.az^2 = 16v^3$ Quae est aequatio pro evoluta BC. ex cujus evolutione describitur, tam pro qua erat $y^2 = ax$

138. Data curvae cujusquam constructione geometrica vel alia per modum continuum, datur aequatio pro curva illa. Rem exemplo

comprobabimus. Circulus AmB. per motum continuum describitur, si in plano recta Cm. circa punctum fixum C. revolvatur. Ex hac constructione aequatio pro circulo eruitur hunc in modum. Sit ACB. recta per punctum fixum C. transiens, erg. applicentur normaliter Am. et erit ob similitudinem triangulorum mPB. AmP. quae ex elementis nota est, $mP^2 = AP \times PB$. Dicatur AP abscissa x. mP. semiordinata y. et AB. diameter a. et erit $BP = a - x$, proinde $AP \times PB = ax - x^2$ porro $mP^2 = y^2$ hinc

$y^2 = ax - x^2$ quae est aequatio pro circulo.

139. Vice versa ex data aequatione pro curva ipsius curvae constructio per motum con-

tinuum vel alia geometrica
eruitur. Diversimode autem
procedendum est pro casibus di-
versis occurrentibus. Nostro in-
stituto satisfactum erit rem
hanc vel uno exemplo illu-
strasse, quod sequens est.

F. 49. Quaeritur constructio geome-
trica pro curva in qua est
$y^2 = ax$.

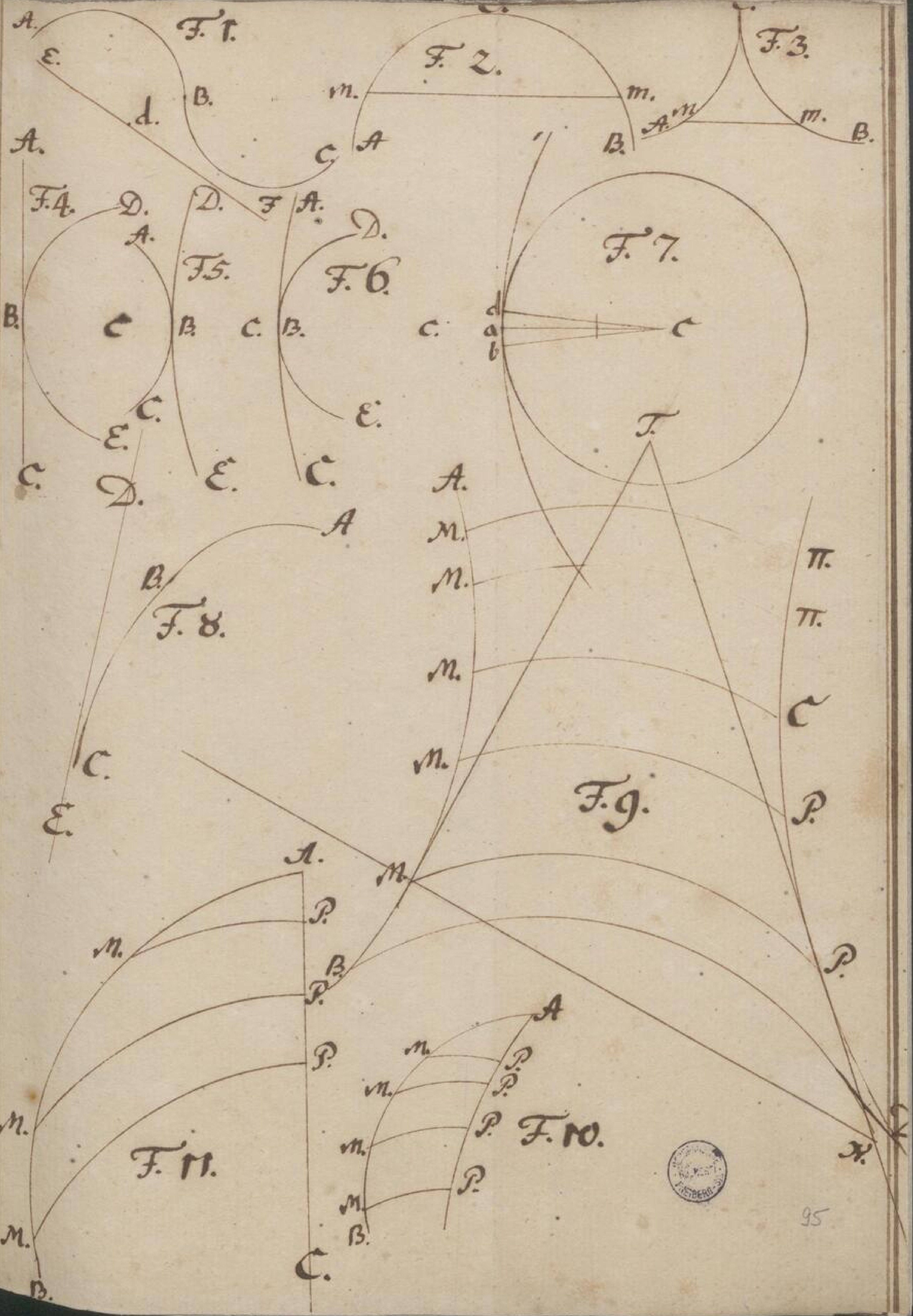
Posito $y^2 = ax$ erit
$a : y = y : x$. est ergo y. se-
miordinata media proportio-
nalis inter rectam constantem
a. et abscissam x. respondentem.
Si igitur in recta qualibet
KC. fiat KV. = a. et puncto
quolibet hujus rectae pro
centro assumto describatur
kxg circulus transiens per K. si
porro ~~Lx~~ Vx. ducatur per-
pendicularis ad KC. erit per
elementa Geometriae

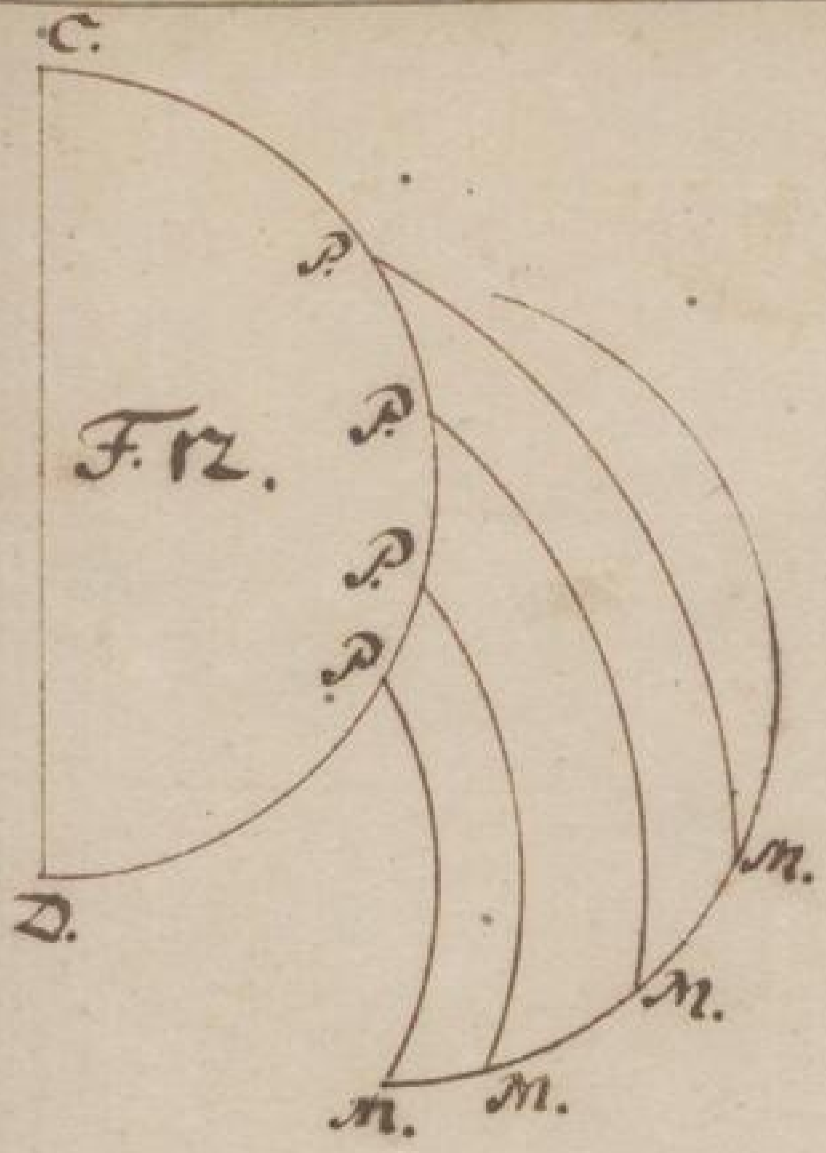
KV.(=a) Vx = Vx : Vg.
proinde est Vx. applicata abscissae
Vg. respondens: Habes igitur mo-
dum cujuslibet abscissae semior-
dinatam respondentem determi-
nandi. Ipsa igitur constructio
curvae pro qua $y^2 = ax$ sequen-
tem in modum perficitur.
Sit KS. axis curvae eaque produ-
cta in X. sit porro KZ. perpendi-
cularis ad axem Vg. et Vk = a.
Super recta KZ. describantur cir-
culi quotlibet KAa. KBb. KΓc. KΔd.
KEe. KΦf KXg. transeuntes per K.
et rectam AX. secantes in A. B. Γ.
Δ. E. Φ. X. rectam vero VZ. in
a. b. c. d. e. f. g. Et habebis in li-
nea VZ. abscissae Va. Vb. Vc. Vd.
Ve. Vf. Vg. in recta vero VK. semi-
ordinatas respondentes VA. VB.
VΓ. VΔ. VE. VΦ. VX. Inaxe VS.
resecentur abscissae VA = Va. VB.
= Vb. VC = Vc. VD = Vd. VE = Ve
VF = Vf. VS = Vg et punctis

A. B. C. D. E. F. G. applicentur normaliter semiordinatae respondentes $A\alpha = VA$. $B\beta = VB$. $C\gamma = VC$. $D\delta = V\Delta$. $E\varepsilon = VE$. $F\varphi = V\Phi$. $G\chi = VX$. et ~~ponendo~~ puncta α. β. γ. δ. ε. φ. χ. determinabunt curvam ad axem Ag. relatam pro qua est $y^2 = ax$.

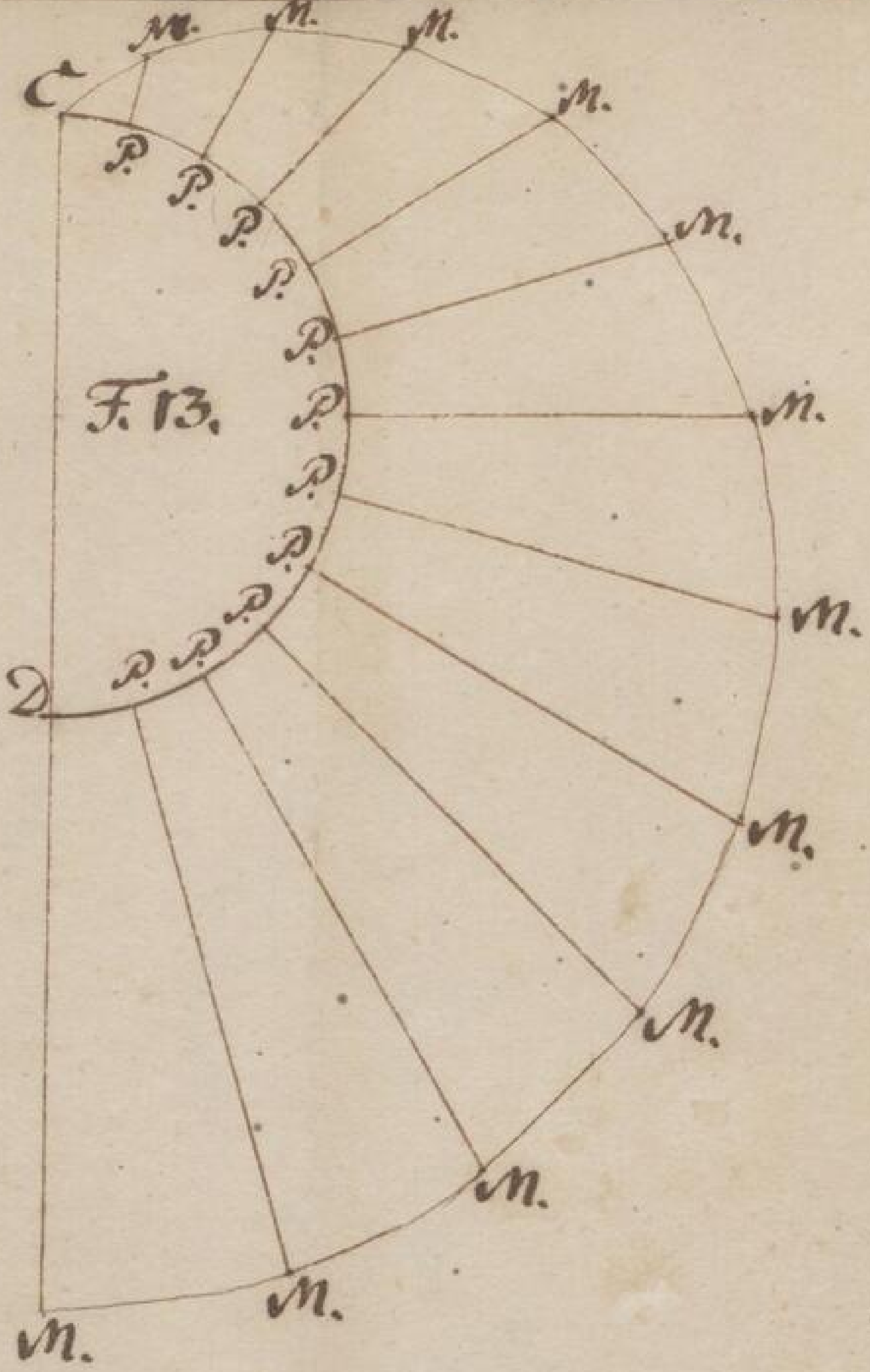
140. Haec sunt quae de curvis differere propositum fuit. de quibus adhuc monendum, omnem curvae naturam ab aequatione ejusdem pendere: Ipsam autem curvam in potestate esse, si data sit vel ipsa aequatio vel constructio vel alia ejusdem proprietas: e.g. si assignatur sit areae, vel arcus; vel sipt normalis etc. valor. Ex horum enim dato quolibet aequationem

consequenter etiam naturam curvae erui posse, et superioribus satis superque manifestum est.
Reliqua, quae de hoc argumento dici poterant alii tempori reservantur.

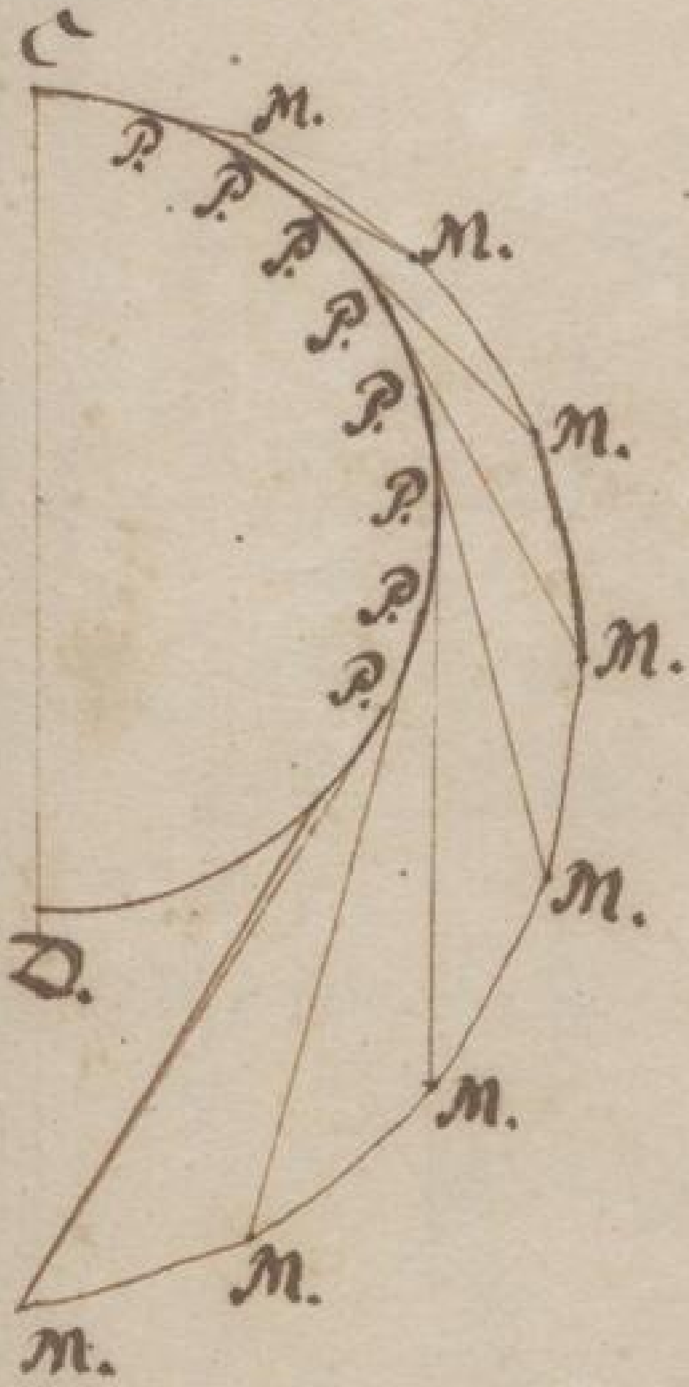

F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.



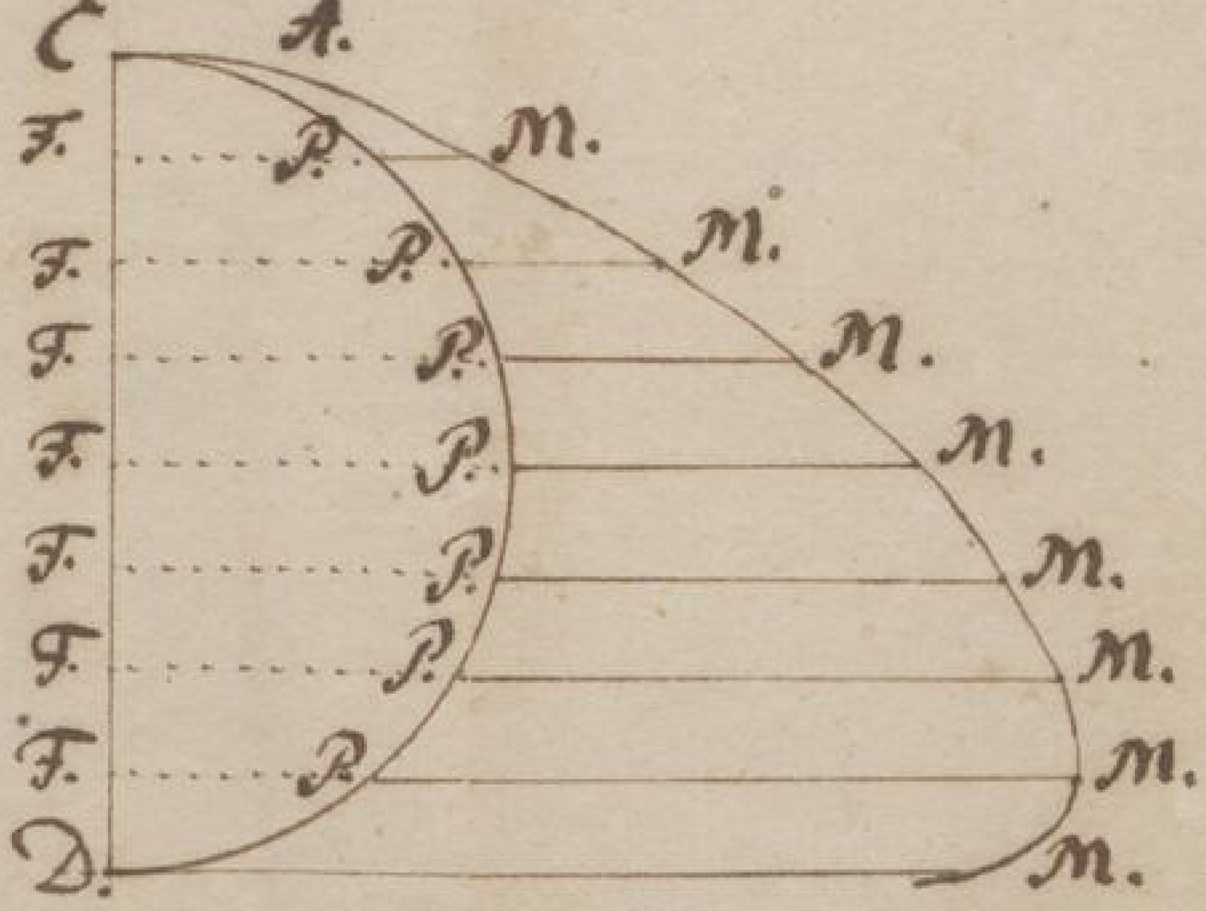
F. 12.



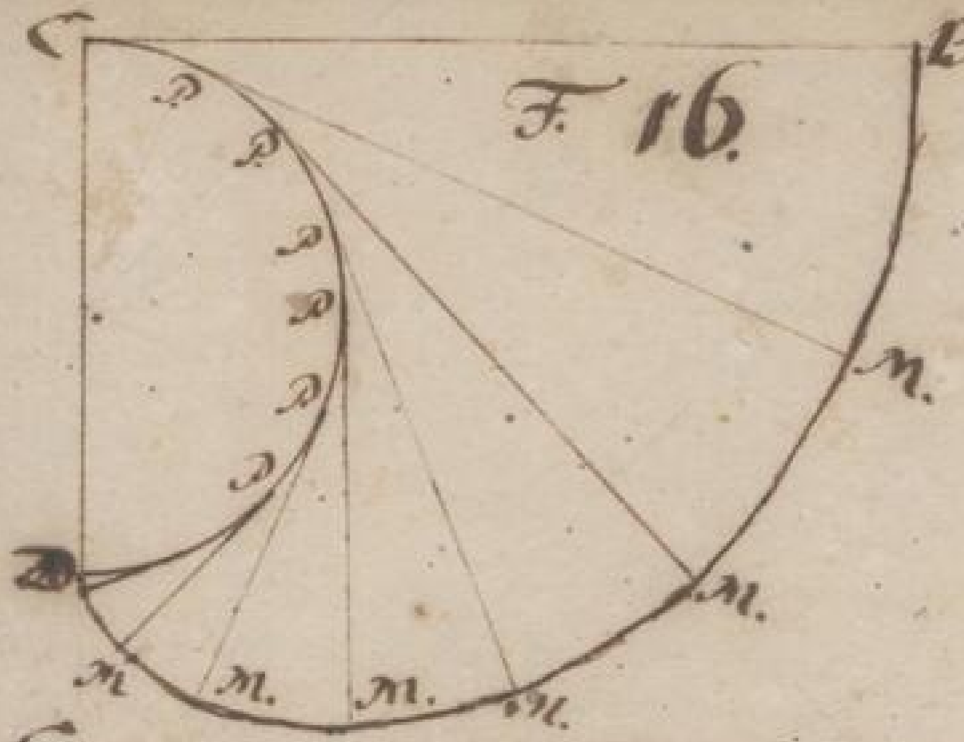
F. 13.



F. 14.

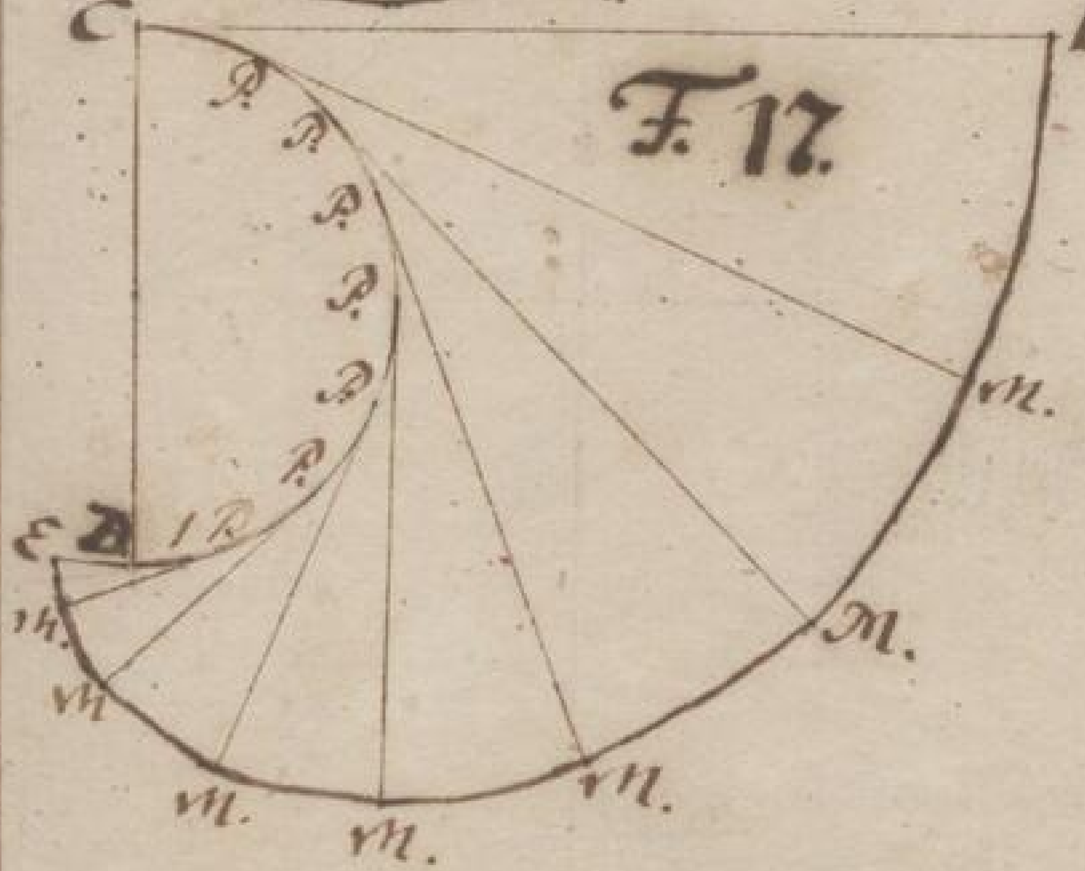


F. 15.

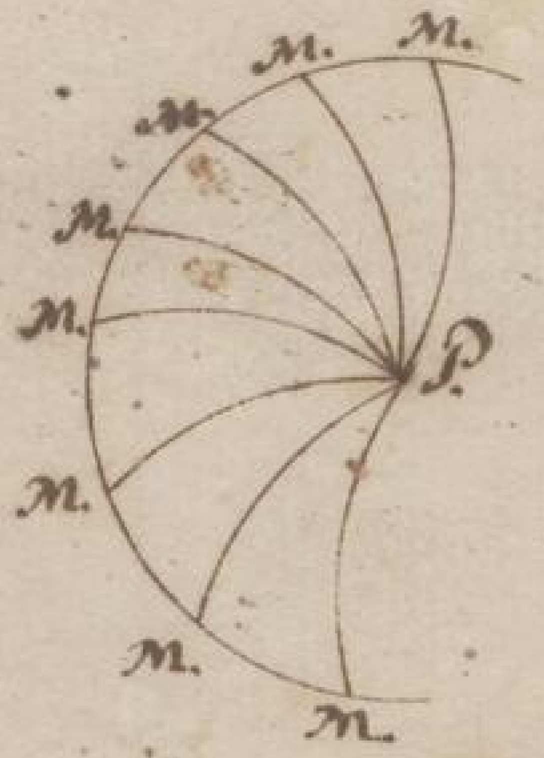


F. 16.

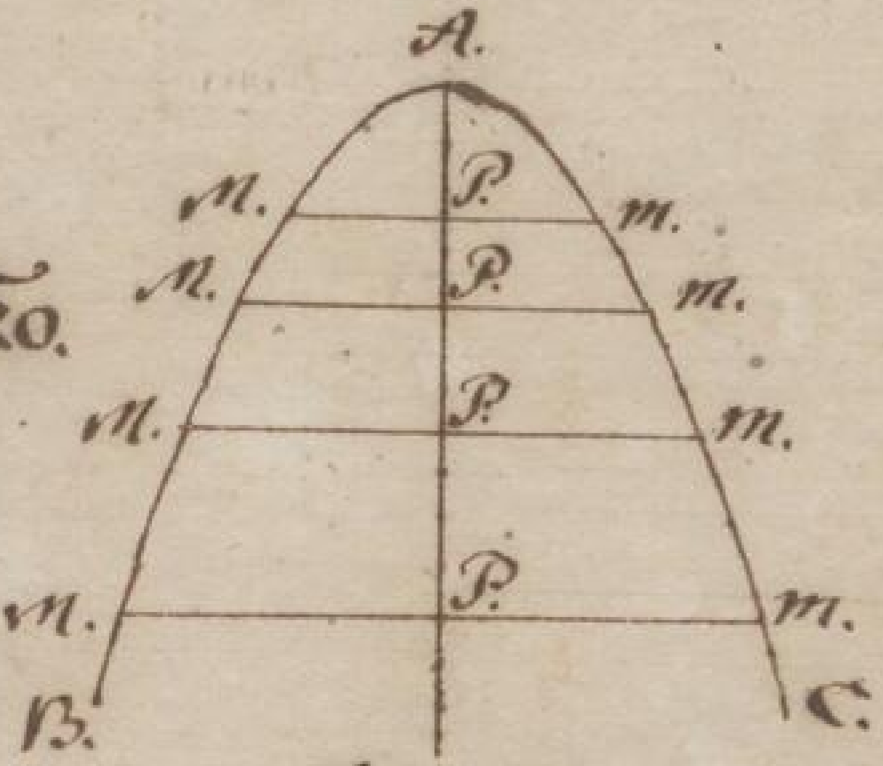
F 18.



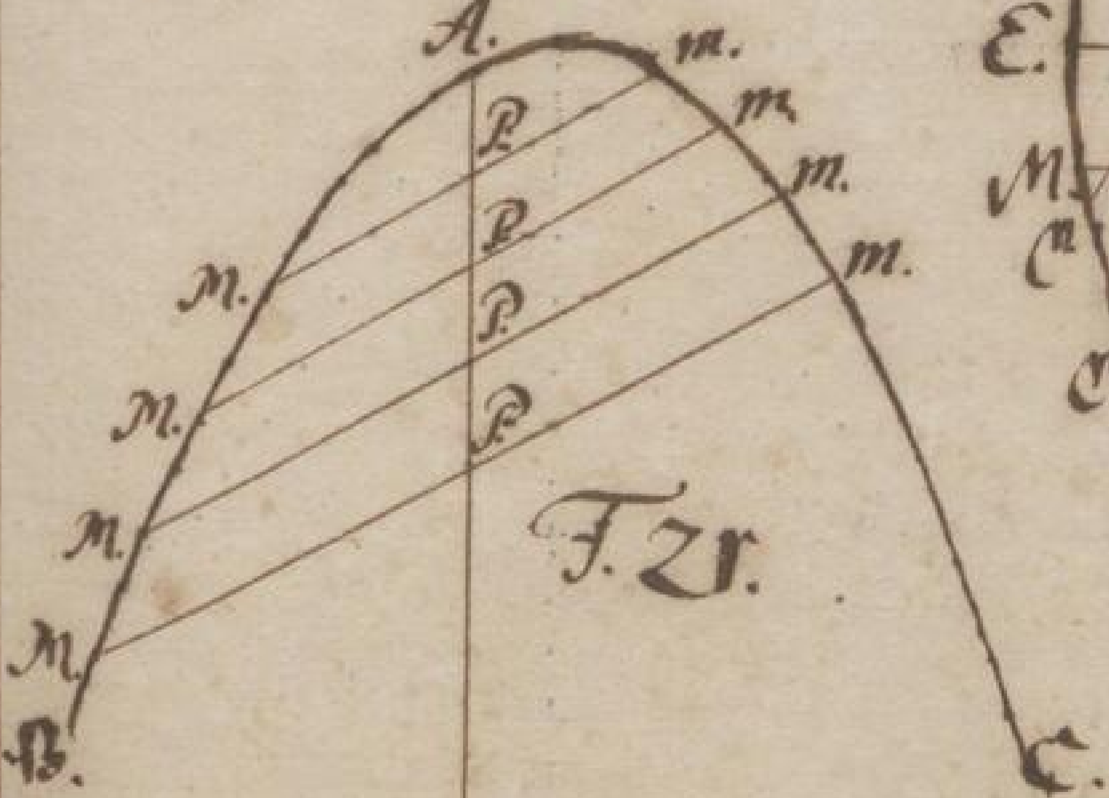
F. 17.



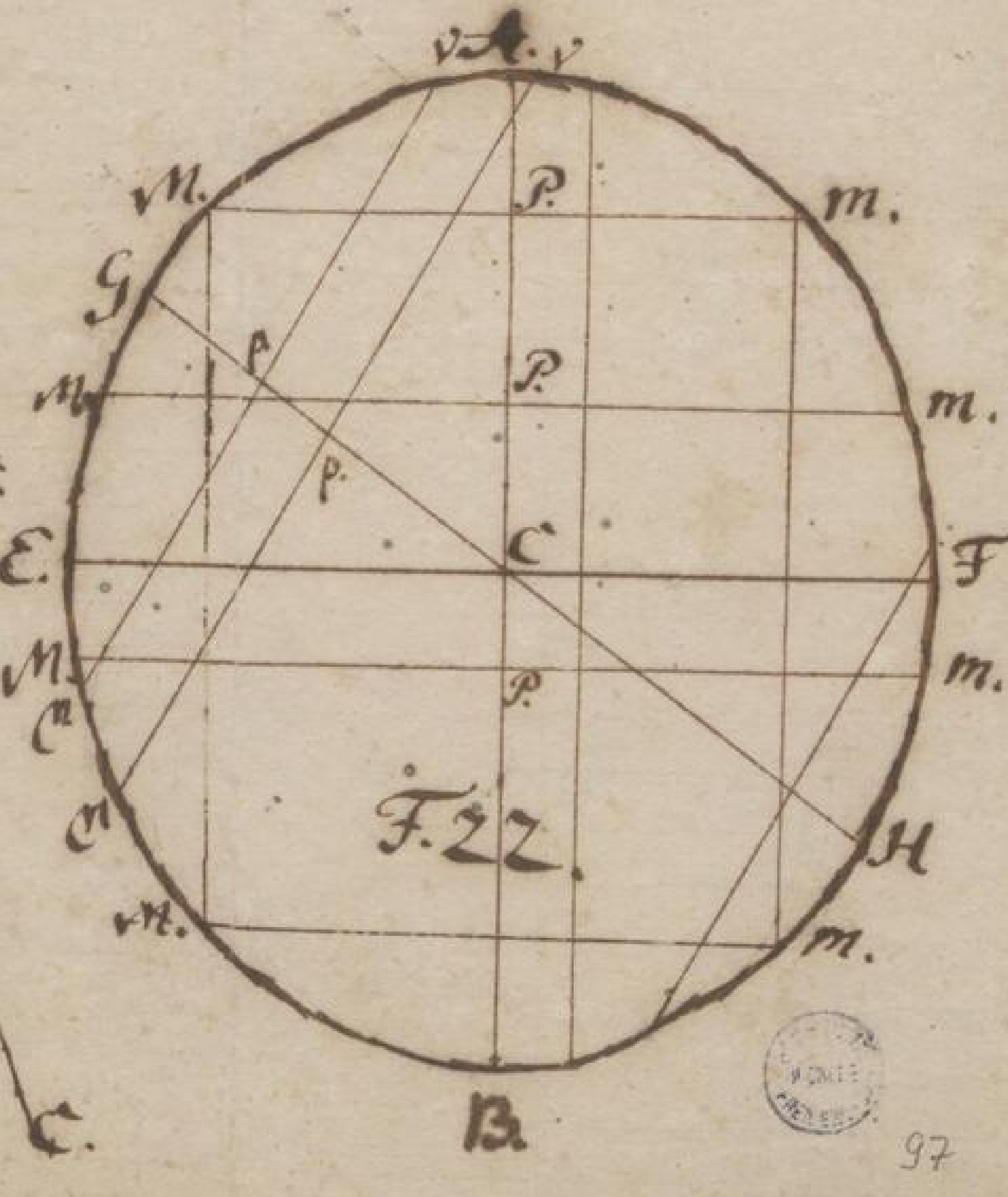
F. 19.



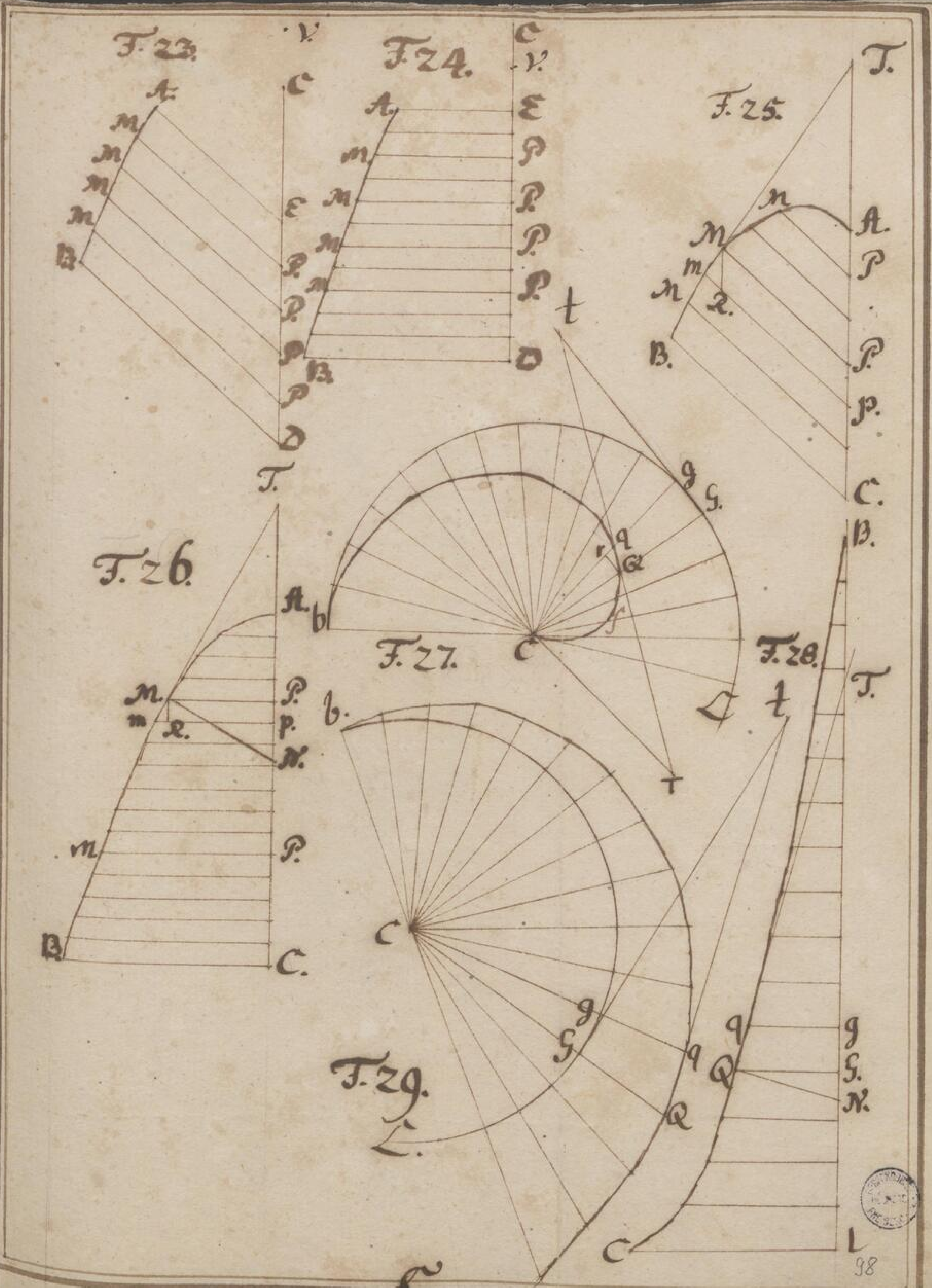
F.20.

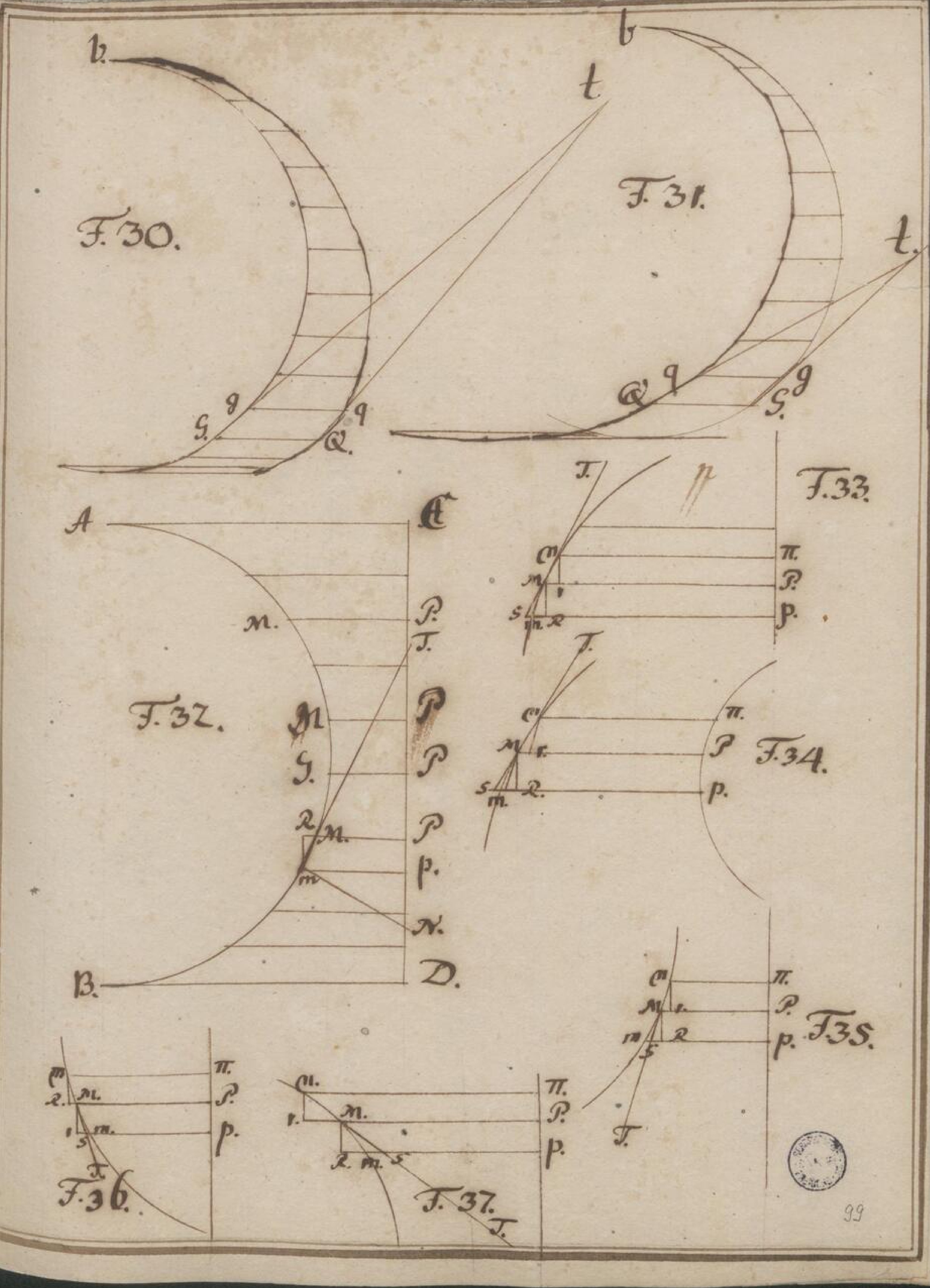


F. 21.

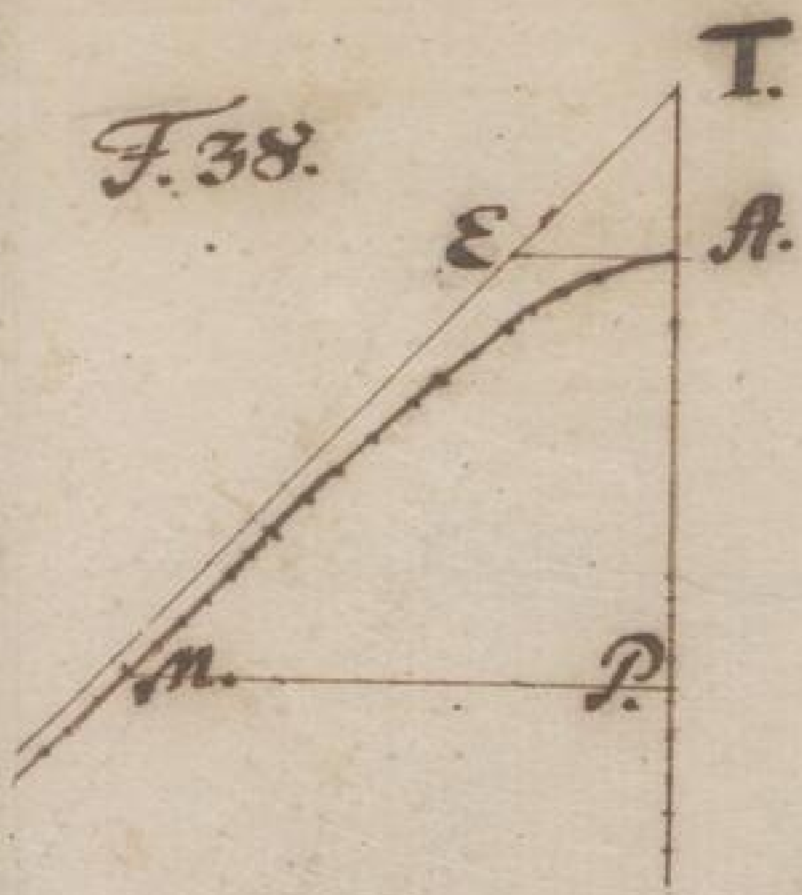


F. 22.


F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29.

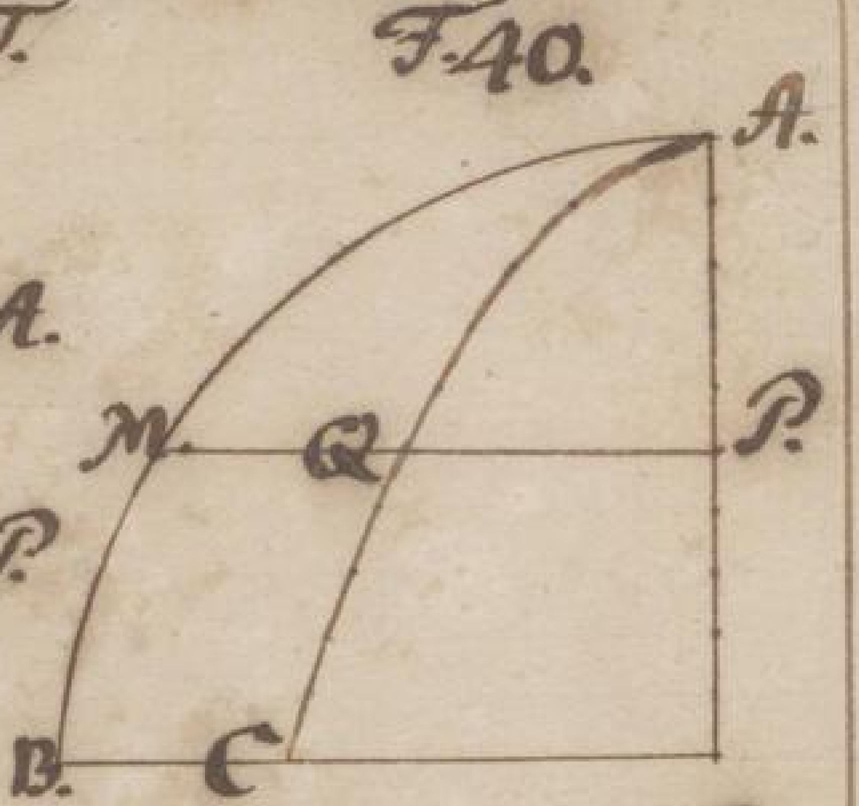

F. 30.
F. 31.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.
F. 36.
F. 37.
A
B.
D.
N.
T.

F. 38.

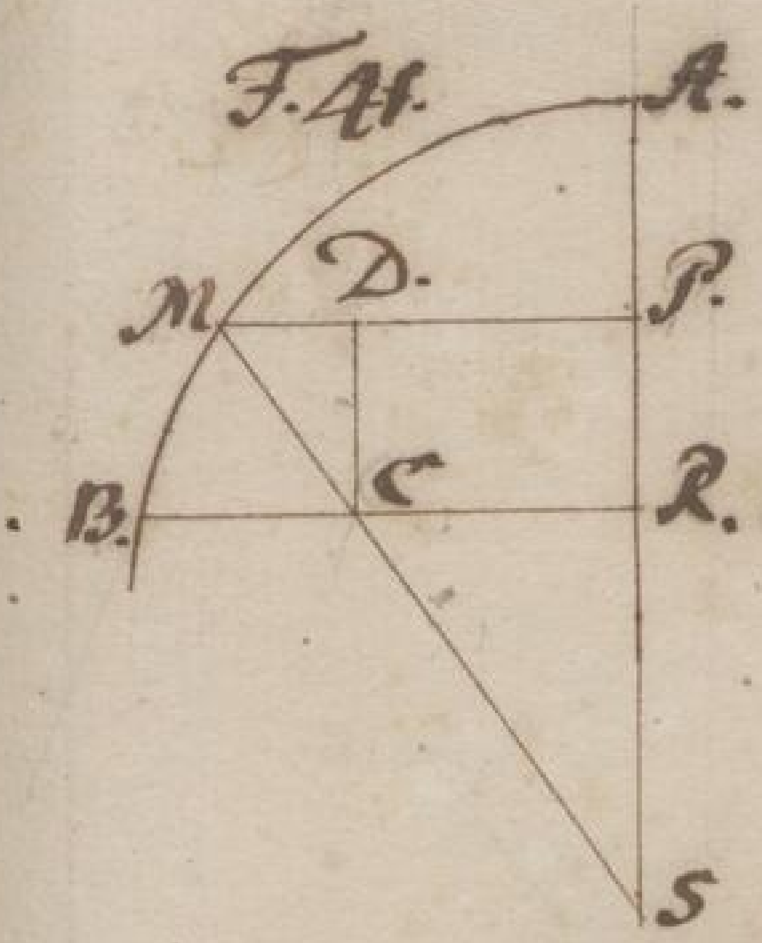


F. 39.

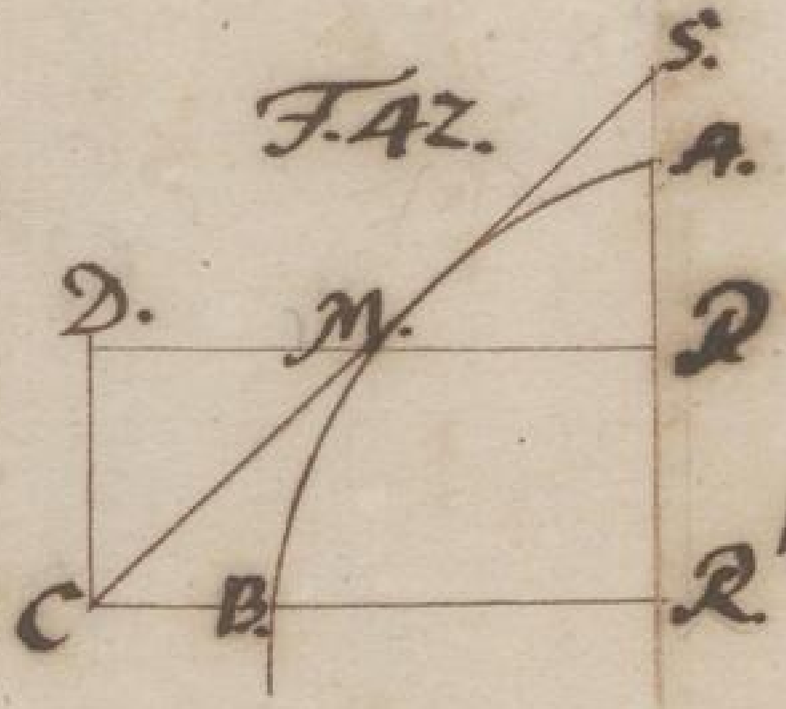
F. 40.



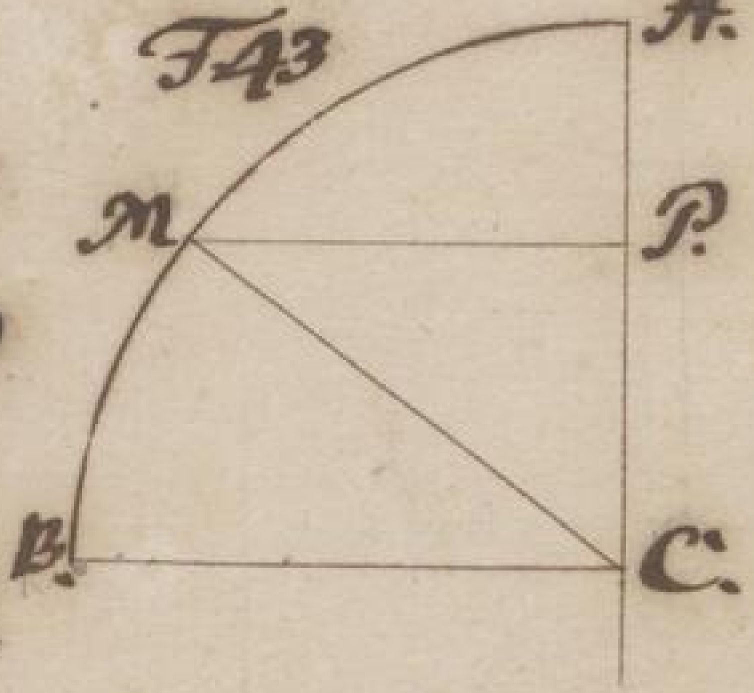
F. 41.



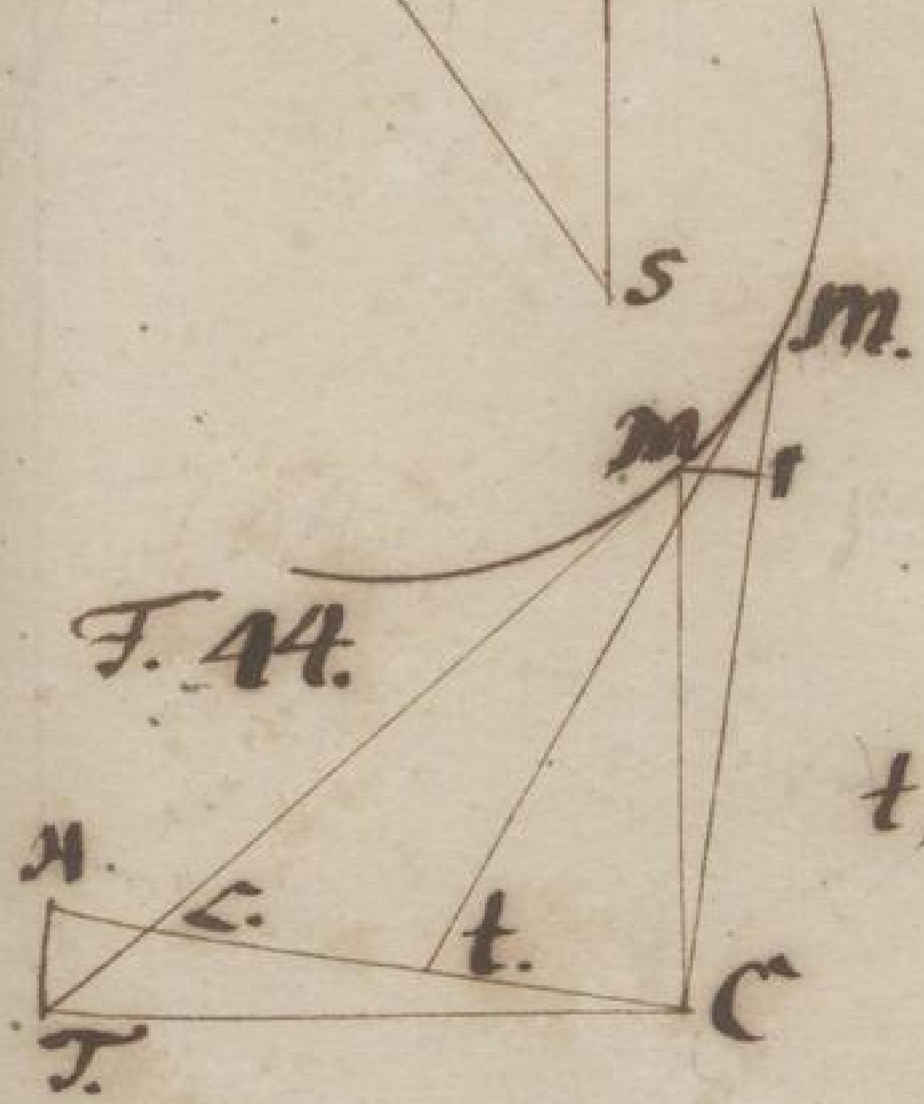
F. 42.



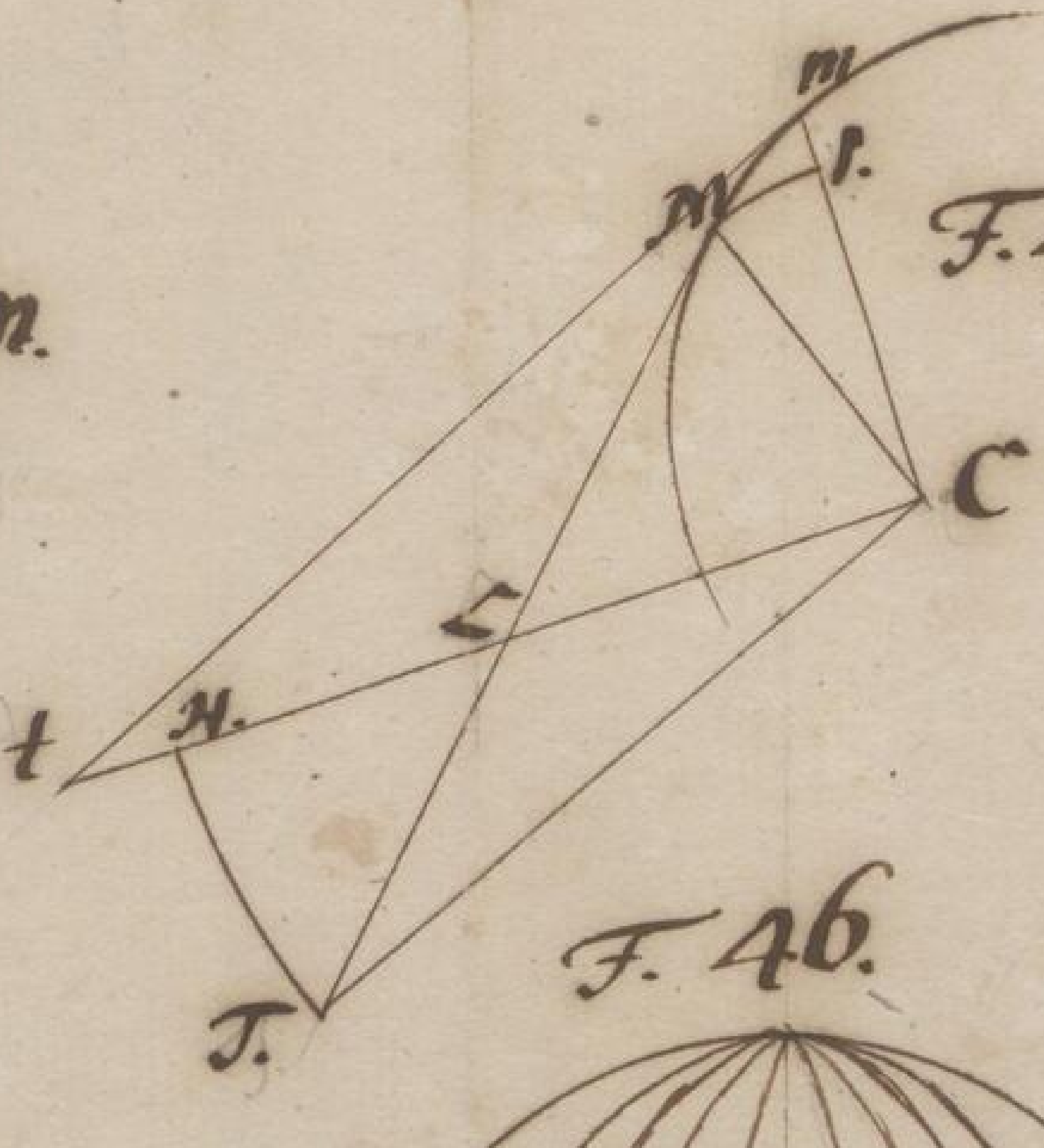
F. 43



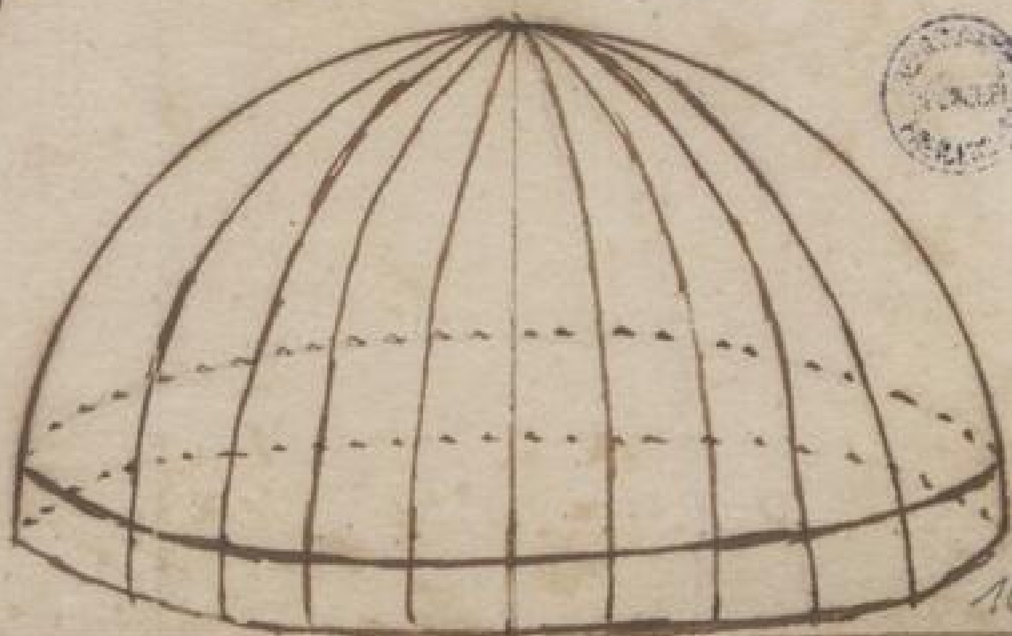
F. 44.



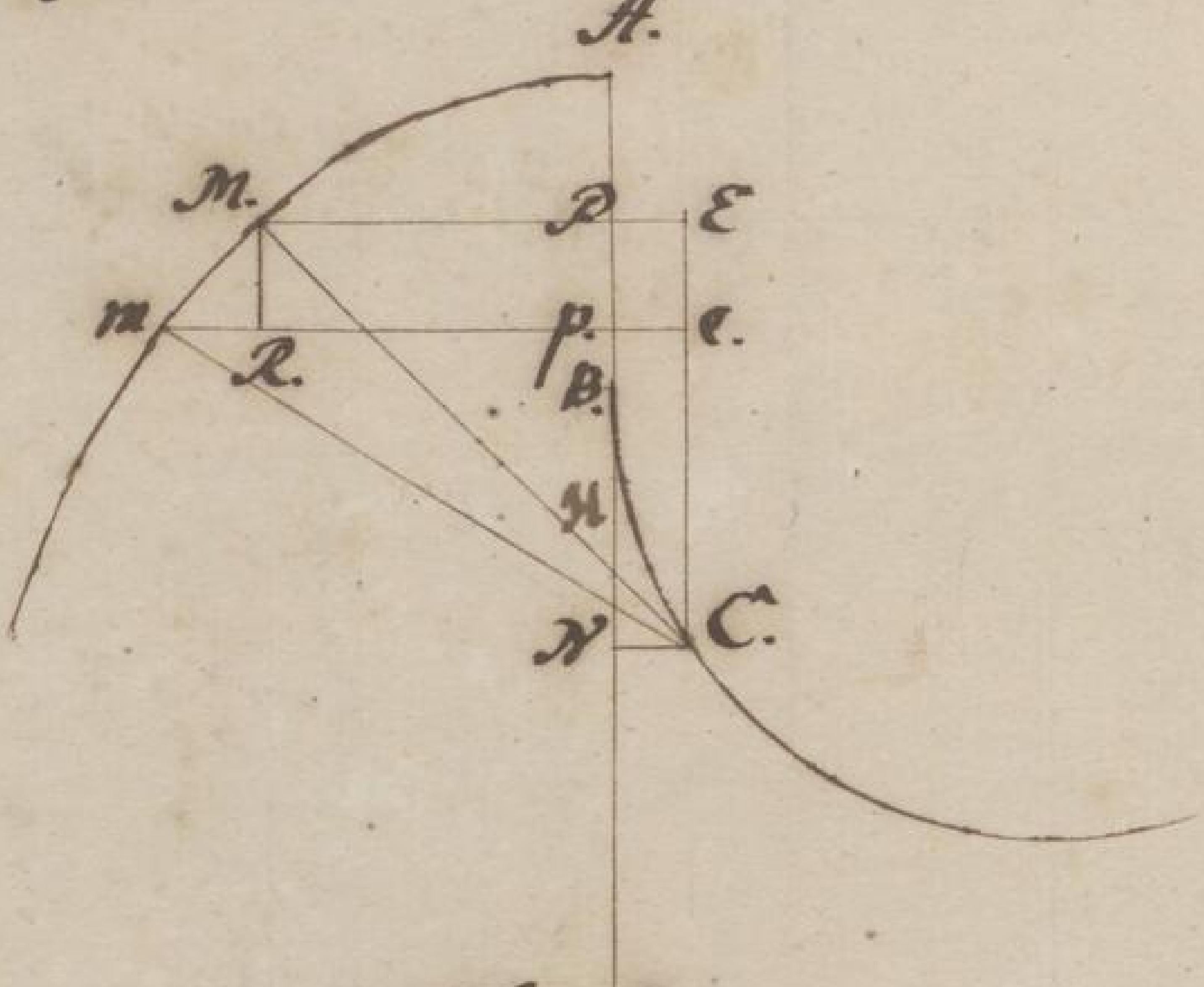
F. 45.



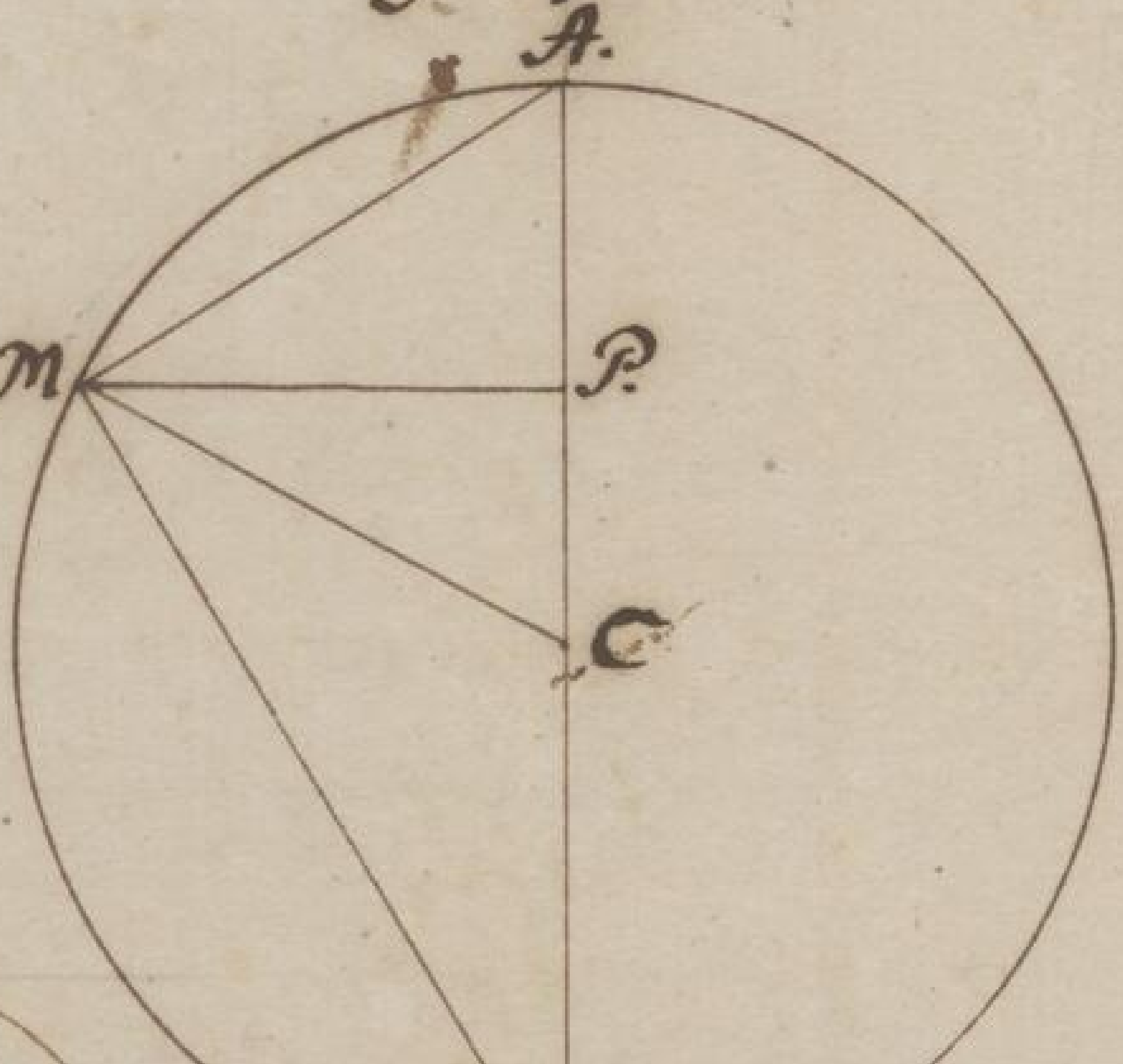
F. 46.

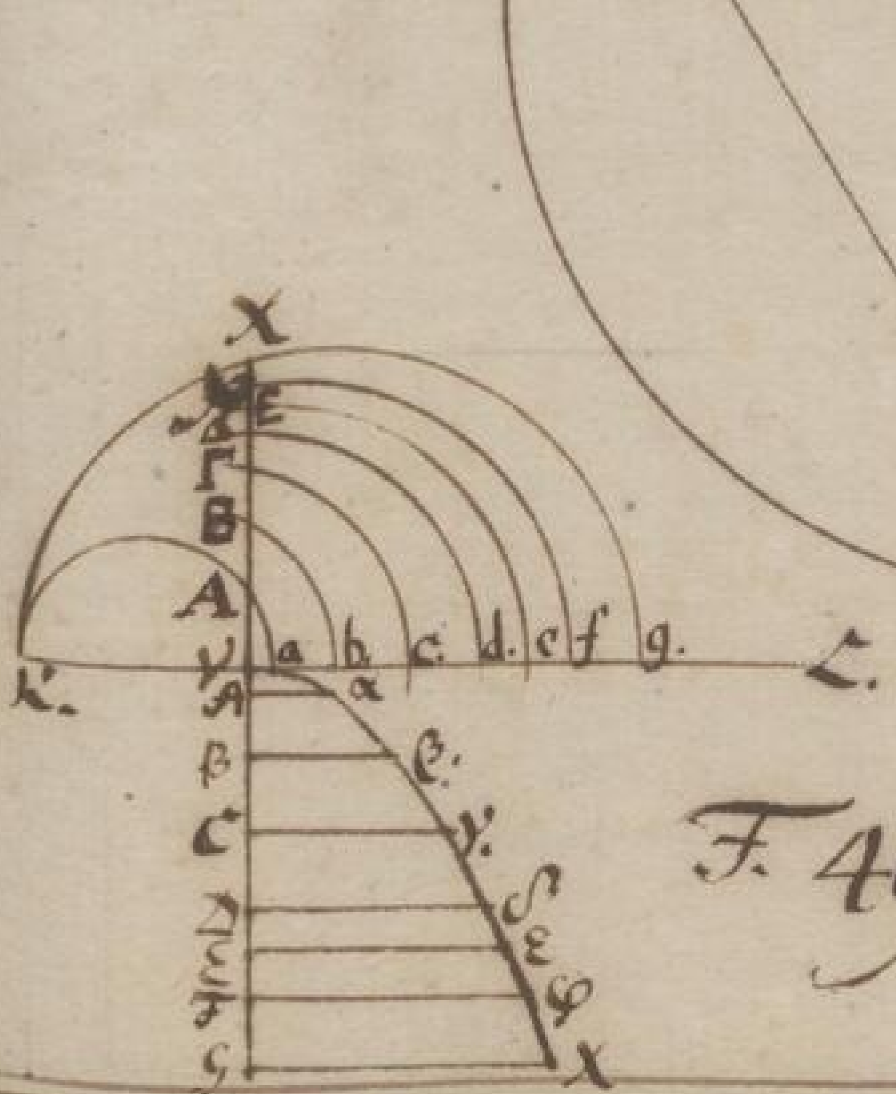


F. 47.



F. 48.





F. 49.

Geometria Logarithmorum.

1.) Ex theoria sectionum conicorum notum est, quod si secetur conus arb. a plano quodam ita, ut xov. angulus plani, quod hic per rectam xo. exhibebitur, cum axe coni ko, minor sit, quam semissis anguli conici, atq sic planum sectionis lateri coni ac. producto occurrat in x. ex hac sectione oriatur curvam NVm. Hyperbola dicta, cujus axis recta Vx. et si haec bissecetur in c. punctum C. centrum, punctum vero V. vertex appellatur. Nobis axis Vx. per literam A. significetur.

2.) Si NVm. curva fuerit hyperbola et in axe ejusdem cV. producta capiantur abscissae VP., hae abscissae VP. ad ordinatas MP. in punctis P. ad angulos rectos applicatas relatione gaudent constante, quae definitur per hanc formulam.

$A.\overline{MP}^2 = A.\Pi.AP. + \Pi.AP.^2$

in qua expressione A. significat axem XV. et Π. rectam quandam constantem, Parametrum dictam, quae à magnitudinibus anguli conici axi anguli sectionis KOV. et portionis KV. s. KO. pendet.

3. Si capiatur media proportionalis inter axem A. et parametrum Π. oritur alia recta constans $\sqrt{A\Pi}$. nobis per a. significanda, quae etiam axis hyperbolae axi A. conjugatus dicitur, in cujus differentia A. axis transversus appellatur.

4.) Si itaque in aequatione pro hyperbola §. 2. exhibita a^2. ponatur pro $A\Pi$. illa mutabitur in hanc.

$A.\overline{MP}.^2 = a^2 AP. + \frac{a^2}{A} AP.^2$

5. Si in hyperbola noh vt e

in praecedentibus à vertice V. sed à centro C. computentur, aequatio naturam ejusdem explicans abit in hanc:

$$\frac{A^2}{a^2}\overline{MP}^2 = \overline{CP}^2 - \frac{1}{4}A^2.$$

6.) Si in hyperbola quadam fuerit $A = a$. Aequilatera appellatur, in eademque est

$$\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}A^2 = \overline{MP}^2.$$

7.) In hyperbola quacunque ducatur per verticem V. recta AB. perpendicularis ad axem CP. (: quae et aliunde constat hyperbolam in vertice tangit.) fiat $AV. = VB. = \frac{1}{2}a.$ Jungantur puncta C. et A. nec non C. et B. et producantur rectae CA. CB. indefinite in R. et r. F. 2.

Porro ex vertice V. ducantur Va. parallela ipsi Cr. Vα. ipsi CR. et erit

$V\alpha. = C\alpha. = Ca. = Va.$ h. e. parallelogrammum CαVa. erit aequilaterum s. Rhombus; erit etiam praeterea

$C\alpha = \alpha B$. at $Ca. = Aa$.
Quod $C\alpha = V\alpha$. manifestum est ex aequalitate angulorum $VC\alpha$. $CV\alpha$. Et quoniam etiam anguli CAB. CBA. αVB. aequales sunt, necesse est, ut sit etiam $\alpha B. = V\alpha = C\alpha$.

8. Quadratum rectae $Va. = Ca$. appellatur Potentia hyperbolae, nobis P^2 dicta; ut ita que sit $C\alpha. = V\alpha. = P$.

9. Erit itaque $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}a^2 = 4P^2$. seu $P. = \frac{1}{4}\sqrt{A^2+a^2}$.

10. Porro si radius circuli significetur per R. angulus ACB. per C. erit area parallelogrammi aequilateri $VaC\alpha. = \frac{P^2 . \sin. C.}{R.}$

11.) In hyperbola aequilatera parallelogrammum hoc fit quadratum et area ejusdem P^2.

12.) In hyperbola quacunque ex puncto quolibet m. ducantur rectæ parallelæ rectis Cr. CR. ex lege §. 7. per centrum C. actis erit rectangulum ex rectis Cn. mn. hoc modo determinatis = potentiae hyperbolæ seu

$Cn. \times mn. = P^2 = C\alpha^2 = Aa^2$

Nam primo est

$mN. = PN. - Pm.$

$MN. = PN. + Pm.$ hinc:

$MN. \times mN. = PN^2 - Pm^2$

Porro

$CV. : VB. = CP. : PN.$

$CV^2 : VB^2 = CP^2 : PN^2.$

$\frac{VB^2 CP^2}{CV^2} = PN^2$

Porro per §. 1: est

$Pm^2 = \frac{VB^2}{CV^2} \times (CP^2 - CV^2)$

$PN^2 - Pm^2 = \frac{VB^2 CP^2}{CV^2} - \frac{VB^2 CP^2}{CV^2} + \frac{\overline{VB}^2 . \overline{CV}^2}{CV^2}$

$= \overline{VB}^2 = MN. \times mN.$

Ob similia triangula mn N

VαB, VαB. Cαm. est

$mN. : mn. = AB. : AC.$

$\alpha m : mo. = AB. : AC.$

$MN. : Cn.$ hinc

$MN \times mN : mn \times Cn = AB^2 : AC^2$

$VB^2 : mn \times Cn = AB^2 : AC^2$

$= 4VB^2 : 4Aa^2$

$1 : mn \times Cn = 1 : Aa.$

vnde tandem consequitur esse

$mn \times Cn = Aa^2 = P^2.$

13. Cum area parallelogrammi $mnXC$ fuerit $\frac{mn \times Cn \times Sin : C.}{R.}$ dicto

C: sinu anguli aCB. erit area parallelogrammi ~~Cm Xmn~~ Cmno = areæ parallelogrammi CaVa. Hinc omnia parallelogramma ex lege §. 12. descripta Cmno. lgi C. æqualia sunt inter se, et quodlibet æquale parallelogrammo CaVa.

14. In hyperbola quavis: si referatur ad rectam CR. per centrum hyperbolae C. ex lege §. 12. ducta, in qua capiantur abscissae $Cq = z$. applicatae vero qM. sint parallelæ rectae Cr. secundum eandem legem ductae erit

$P^2 = zv$.

15.) Cum P^2 sit quantitas constans; applicata v. decrescit, crescente abscissa z. hinc curva vm. magis magisque rectae AR. appropinquat. Cum autem applicata $v = 0$. fieri nequeat, nec infinite parva fiat, nisi abscissa x. fiat infinite magna; apparet inde rectam CR. hyperbolae in puncto infinite distante occurrere, ibique eam tangere. Idem hoc patet ratione curvae alterius Vm. quod ex eadem aequatione $P^2 = zy$. generatur posito $z < P$. ubi assumta Cv. pro abscissa Vm. sit applicata, quae infinite magna erit, si Cv. decreverit ad quantitatem infinite parvam.

16. Hoc proprium rectarum CR. Cr. ex lege §. 12. per centrum hyperbolae ductarum, quod scilicet magis magisque ad hyperbolam accedant, nunquam vero cum ipsa coincidant, ratio est, quod veteres

105

illas Asymtotas hyperbolae
s. non coincidentes appellarint,
et formula $P^2 = zv$. qua defini-
tur hyperbola ad asymtotos re-
lata, dicitur aequatio pro hy-
perbola inter asymtotos:

17. Si in hyperbola inter asymtotos
abscissæ non computentur à cen-
tro C. sed ab alio quodam puncto
ut O. dicto $CO = c$: $Oq = u$. erit
$Cq. = c+u$. hinc

$$P^2 = cv + uv.$$

Quae formula definit æqua-
tionem pro hyperbola inter a-
symtotos abscissis à puncto
O. quod centrum hyperbolae
non sit, computatis:

18. Si hyperbola referatur ad asym-
totos et in altera earundem
CR. capiantur abscissæ à pun-
cto O. quod centrum non est
spatium hyperbolicum Omgi.
quod determinatur per abscis-
sam $Oi = u$. et applicatam ig.
$= v$. erit

$$CaVa \times S. \frac{du}{c+u}. =$$

$= Ca\sqrt{x} \times \left(\frac{u}{c} - \frac{u^2}{2.c^2} + \frac{u^3}{3.c^3} - \frac{u^4}{4c^4}\right.$ etc. in inf.

Nam si ordinatæ v. abscissis ad angulos rectos applicarentur, esset elementum spatii hujus hyperbolici ut in omni curva $= vdu$. Cum autem applicatæ sint in angulo RCr. erit elementum hoc

$\frac{\sin RCr.}{R.} \times vdv.$

Sed est $P^2 = cv + vu.$ §. 17.

hinc $0. = cdv + vdu + udv$

$P^2 - cv. = vu.$

$\frac{P^2 - cv}{v.} = u.$ porro

$vdu = -cdv - udv.$

$= -dv \times c+u.$ hinc

$-dv. = \frac{vdu}{c+u}$ item

$vdu = -dv \times \frac{cv + P^2 - cv.}{v.}$

$= -dv \times \frac{P^2}{v.}$

$= \frac{vdu.}{c+u.} \times \frac{P^2}{v.}$

$= P^2 \times \frac{du}{c+u}$

provinde

$\frac{\text{Sin: RCi}}{R} \times v\,du = \frac{\text{Sin: RCi}}{R} \cdot P^2 \times \frac{du}{c+u}$.

Est autem per §. 12.

$\frac{\text{Sin: RCi}}{R} \cdot P^2 =$ areae parallelogrami Vala.

$=$ areae parallelogrammi COmn. per §. 13.

hinc erit

$\frac{\text{Sin: RCi}}{R} \times v\,du = \text{COmn} \times \frac{du}{c+u}$.

et integrando fit spatium hyperbolicum Cmgi $= \text{COmn} \times S.\frac{du}{c+u}$.

Sed est $\frac{du}{c+u} = \frac{du}{c} - \frac{u\,du}{c^2} + \frac{u^2du}{c^3}$

$+ \frac{u^3du}{c^4}$ etc: in inf.

hinc $S.\frac{du}{c+u} = \frac{u}{c} - \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{3c^3} - \frac{u^4}{4c^4}$ etc. in inf.

proinde tandem spatium hyperbolicum Cmgi $=$

$\text{Cnml} \times \frac{u}{c} - \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{3c^3} - \frac{u^4}{4c^4}$ etc:

19. Si fuerit ratio $c+u : c$ seu numerus per eandem significatus $\frac{c+u}{c} = 1 + \frac{u}{c}$ erit Logarithmus ejus naturalis $= \frac{u}{c} - \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{3c^3}$ $- \frac{u^4}{4c^4} + \frac{u^5}{5c^5}$ etc. in inf. et ejus elementum $\frac{du}{c+u}$ per differentia-

tionem priorem §. 33. 34.
Inde autem patet spatia hyperbolica Cmgi esse productum ex logarithmo naturali ca : co $\left(\frac{c+u}{c}\right)$ seu numeri $1+\frac{u}{c}$ et area rectanguli Comn. $= aVxC$, h. est spatia hyperbolica exhibent systema logarithmicum cujus modulus est area parallelogrammi Comn. $= CaVx$.
20. Si fiat Co $= 1$. spatium hyperbolicum ~~exprimit~~ Omgi. exprimit Logarithmum rationis $1+Oi : 1$ seu numeri $1+Oi$. ex systemate cujus modulus est area COmn. $= CaVx$.
21. In hyperbola æquilatera spatium hyperbolicum Vaig. est logarithmus rationis Ci : Ca. seu numeri $\frac{Ci}{Ca}$ ex systemate cujus modulus est Potentia hyperbolæ P^2 seu si L. significat Logarithmum naturalem erit

$$Vagi = P^2 L : \frac{CI}{Ca}.$$

Nam in hoc casu parallelogrammum CaVx. fit quadratum æquale potentiæ hyperbolæ.

22. Si latus potentiae hyperbolae $Ca = r$. spatia hyperbolica $Ciig$. repraesentant systema logarithmorum naturalium numerorum per abscissas Ci. repraesentatas:

23. In hyperbola aequilatera ad asymtotos relata si producantur applicatae gi. in Cn. et fiet $i\mathrm{Cn} = \frac{Vaig}{P}$. puncta Cn. erunt in curva quadam, in qua si referatur ad asymtoton productam $C\pi$. abscissa $C\pi = i\mathrm{Cn}$ aequatur Logarithmo rationis $\pi\mathrm{Cn} : Ca$. ex systemate cujus modulus est $P = Ca$.

Nam $i\mathrm{Cn} = C\pi = \frac{aVig}{P}$

sed $aVig = P \cdot L. \frac{ci}{ca}$

$= P. L. \frac{ca + ai}{ca}$

$= 1 + \frac{ai}{ca}$

24. Curva itaque haec Logistica appellata repraesentat systema Logarithmorum moduli $CA = P$.

et si CA. fuerit = 1. systema logarithmorum naturalium.
Oritur ut vidimus haec curva ex hyperbola, cujus quadratrix est et logarithmos exhibet rationis duarum quarumlibet applicatarum Ca : πα. logarithmum per rectam Cπ. in asymtoto Cr. producto versus π. captam, et inter ipsas applicatas Ca. πα. interceptam, quam hyperbola exhibet per spatium vagi.
Haec curva ab asymtoto CR. magis magisque recedit versus R. et transit per a.; magis magisque accedit ad alterum asymtoton Cr. ipsi tamen non occurrit. unde eadem recta s. axis Cπ. in qua capiuntur abscissa Cπ. asymtoton est curvae aα.
25. Sit aα. curva logistica ex lege §. praec. descripta, eaque relata ad rectam asymtoton ejusdem Cπ. in qua capiatur punctum C. a quo computantur abscissae

$C\pi$. Sit Ca. applicata ad punctum C. quæ constans erit, $m\pi$. applicata respondens abscissæ $C\pi$. et erit æquatio pro curva $a m$. per h. præantecedentem haec

$$C\pi = P. \times Log: \frac{m\pi}{Ca.}$$ seu si

$$Ca = 1. \quad C\pi = P. Log: m\pi.$$

vbi L. (Log:) denotat logarithmum naturalem et P. rectam constantem, quæ vt jam diximus est modulus Logarithmici systematis, quod curva $a m$. repræsentat, et qui æqualis est lateri potentiæ hyperbolæ æquilateræ, cujus quadratrix est logistica $a m$.

26. Logisticae $a m$. subtangens est constans, eaque æqualis modulo P. s. later[i] potentiae hyperbolae illius, cujus quadratrix est logistica $a m$.

Nam in qualibet curva est subtangens $= \frac{y\,dx}{dy}$. significatis abscissis per x. applicata per y. Est autem in Logistica pa. 9. $x = P. \times L. \frac{y}{ca.}$ ubi Ca. significat applicatam quamcunq in puncto C. a quo abscissæ computantur

$$dx = P. \frac{dy}{y}.$$

hinc $\frac{dxy}{dy} = \frac{P. dy. y.}{y. dy.} = P.$

27. In omnibus systematibus logarithmicis ratio illa, cujus logarithmus modulo systematis æqualis est, constans erit. Est enim tunc

$$P. = P. \times L. \frac{y}{ca.}$$

quod esse nequit, nisi logarithmus naturalis rationis $\frac{y}{ca.}$ fuerit $= 1$. Sed ratio cujus logarithmus naturalis $= 1$. semper eadem h. e. constans est.

28. Haec ratio constans, cujus logarithmus est modulus quircunq in systemate suo est haec:
1 : 0,367879441171 etc.
seu 2,718281828459 etc. : 1.
ut docet Hausen in Elementis Se

ctionum Conicarum.

29. Data itaq Logistica cum axe positione invenitur modulg sequenti modo.

fig: Ducatur bb. recta parallela cum axe in distantia 0,367879.. quæ secabit Logisticam alicubi e.g. in B. agatur et dd. recta parallela cum axe in distantia 1. hæc secabit Logisticam in D.

Ex punctis B. D. demittantur perpendiculares ad axem BA. DC. occurrentes axi in A. et C. et erit AC. subtangens Logisticæ s. modulg systematis Logarithmici, quod repræsentat.

Nam est AC. Logarithmg rationis DC : BA. h.e. vi constructionis rationis 1 : 0367879.. quæ est ratio modularis constans in quocunq systemate, per §. 28.

30. Eodem modo in Logistica data positione cum axe, datæ cujusvis rationis logarithmg invenitur.

31. Methodo inversa invenitur dati Logarithmi ratio, cujus est logarithmus.
Fiat enim AC. = logarithmo dato, erectis perpendicularibus AB. CD. secantes Logisticam in B. et D. erit DC : BA. ratio quaesita.
32. In hoc casu si fiat AC. = 1. ratio DC : AB. involvit basin systematis logarithmici, quod repraesentat Logistica. Basis haec systematis Logarithmici est numerus cujus dignitates habent exponentes logarithmis eorum aequales. Dicatur B. haec basis logarithmica ex inventa ratione DC : BA. cujus logarithmus = 1. invenitur B. quaerendo ad
BA. DC. et 1.
quartam proportionalem.
33. Data basi Logarithmica B. determinari potest punctum V. a quo si computentur logarithmi, applicatae quaelibet ut DC. erit dignitas baseos AB. cujus exponens est Logarithmus VC.
Scilicet in distantia BA. = B.

110

agatur parallela bb. cum axe ex puncto B. in quo Logistica occurrit, demittatur perpendicularis BA. occurrens axi in A. fiat VA = r. et erit et Vs. applicata in puncto V. = r.

34. Si in distantia = r. ducatur recta parallela cum axe, ex puncto occursus s: demittatur perpendicularis sV. habebitur punctum V. à quo computati Logarithmi sunt exponentes dignitatum cujus radix est basis logarithmica B. ipsæ hæ dignitates sunt applicatæ abscissis à puncto V. computatis respondentes; hinc si fiat VA = r. applicata respondens VB. ipsa est basis logarithmica.

35. In recta indefinita capiantur portiones æquales AC. CE. In punctis A. C. E. erigan-

fig:

tur perpendiculares: AB. CD.
EF. quae quoad magnitudinem ita
sint comparatae ut sit

$AB : CD = CD : EF$. hoc est
in proportione continua.
Si BD. puncta jungantur recta
occurrente indefinitae in H. et jun-
gantur D. et F. puncta recta
indefinitae AE. in K. occurrente;
dico esse $HC = KE$: et vice versa.
Nam est ex hypothesi

$BA : DC = DC : EF$.

seu $EF : DC = DC : BA$.

est autem

$EF : DC = KE : KC$.

$DC : BA = AC : HA$.

hinc

$KE : KC = HC : HA$.

$KE - KC : KC = HC - HA : HA$.

$CE : KC = AC : HA$.

$CE : AC = KC : HA$.

Est autem $CE = AC$. ex hyp:
hinc $KC = HA$.

proinde

$HC = HA + AC = KE = KC + CE$.

36. Hinc oritur nova constru-
ctio Logisticae.

In recta indefinita AE: quae axis sit Logisticae capiantur partes aequales AC. CE. etc. in quibus erigantur perpendiculares AB. CD. EF. Assumta AB. pro lubitu, nec non HC. in axe. Jungantur H. B. puncta et recta HB. producta perpendiculari DC. occurrat in D. Nunc fiat EK = CH. Jungantur KD. puncta et recta KD. perpendiculari in F. occurrat, et sic porro; et puncta B. D. F. etc. erunt in Logistica cujus Subtangens; itaq basis systematis determinantur ex Hyppthesi.

37. Si in hac ipsa constructione fiat AC. = CE. = 1. nec non AB = 1. et HC = KE. = $\frac{\beta}{\beta - 1.}$ seu quod idem est HA = HC. − AC = HC − 1. = $\frac{1}{\beta - 1.}$ ubi β. significat numerum constantem, fiet DC = β. et Logistica repraesentat systema Logarithmicum cujus basis = β. = CD.

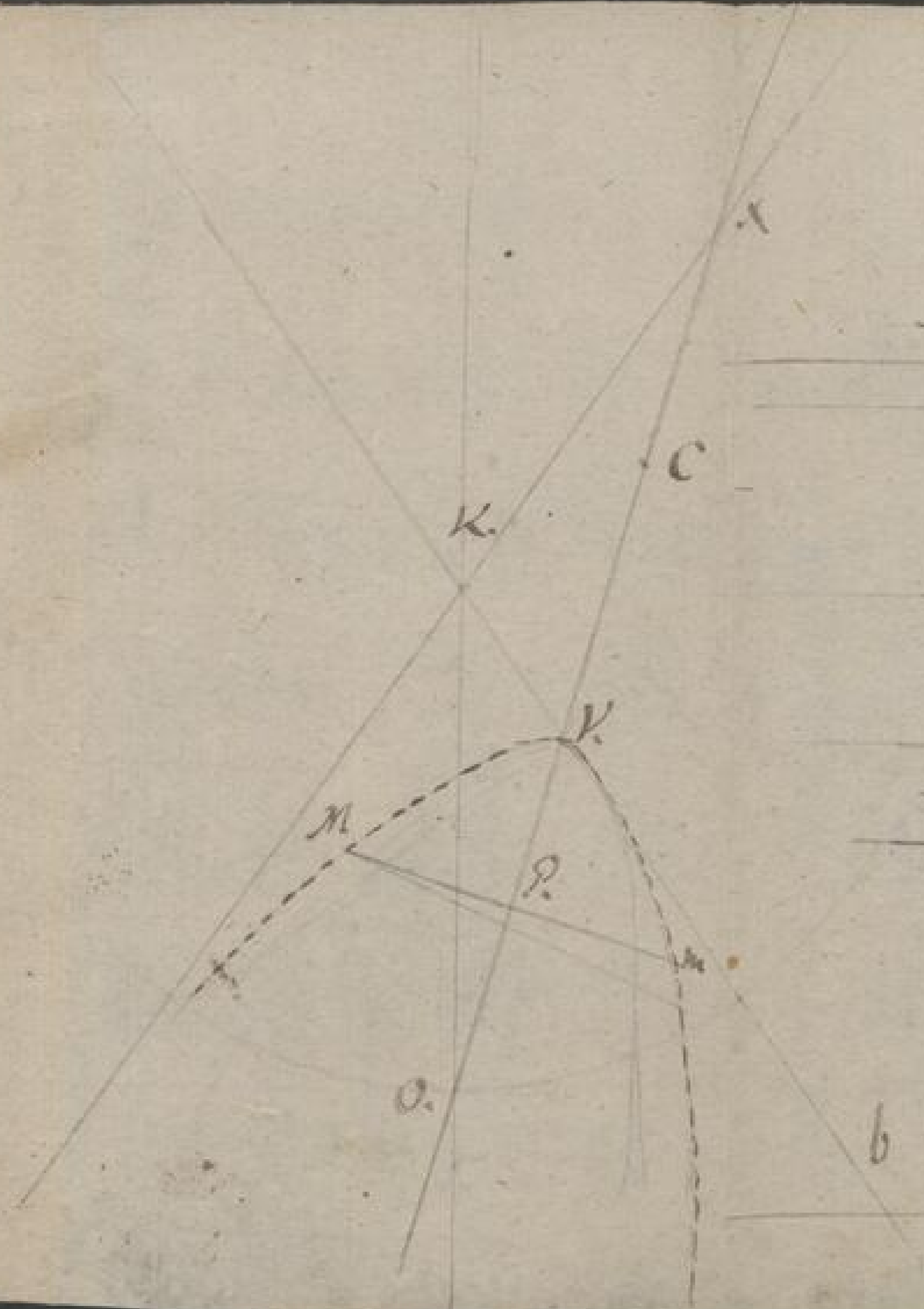
Erit enim

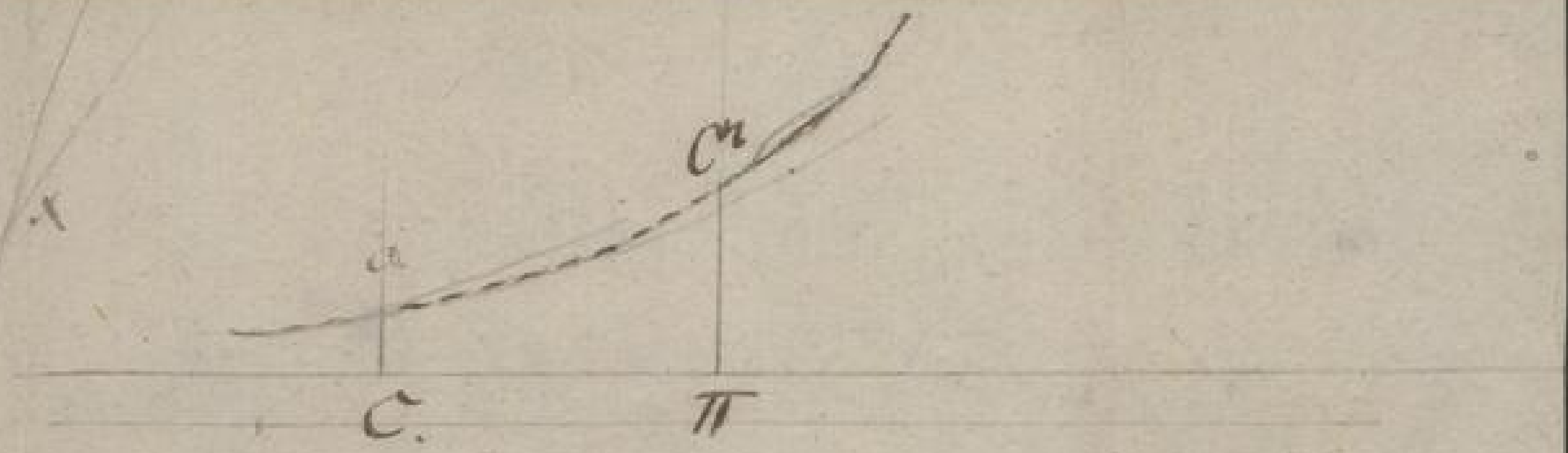
$HA : BA = BD (= HC) : dD. = (DC - 1)$

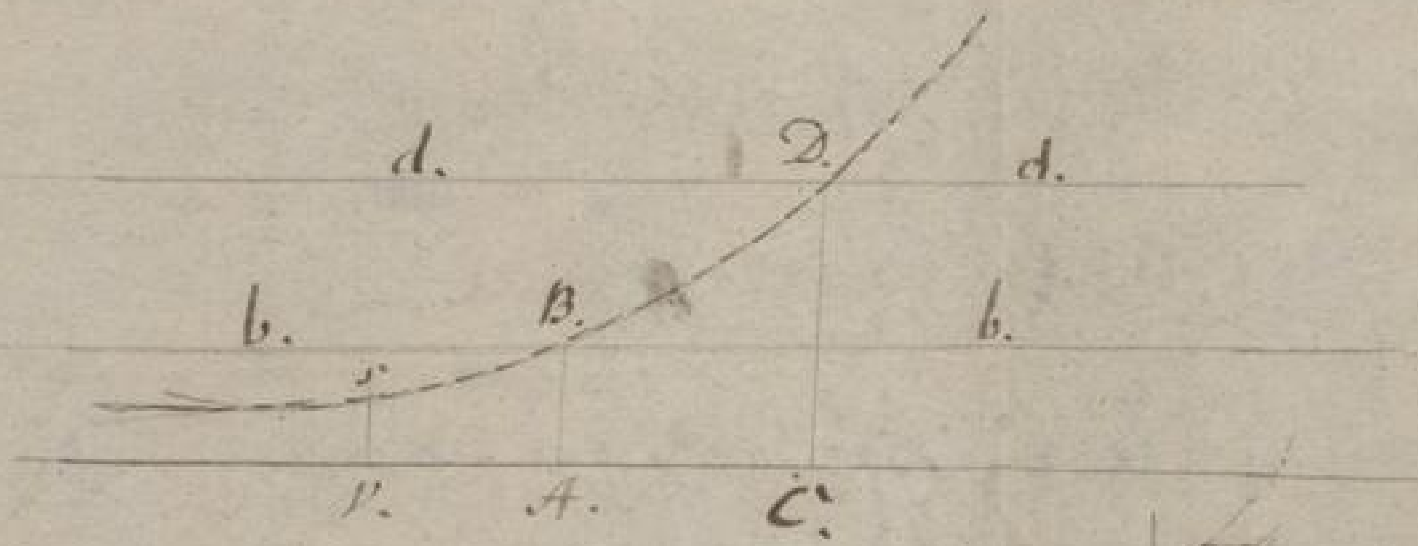
$\frac{1}{\beta - 1.} : 1. = 1 : DC - 1.$

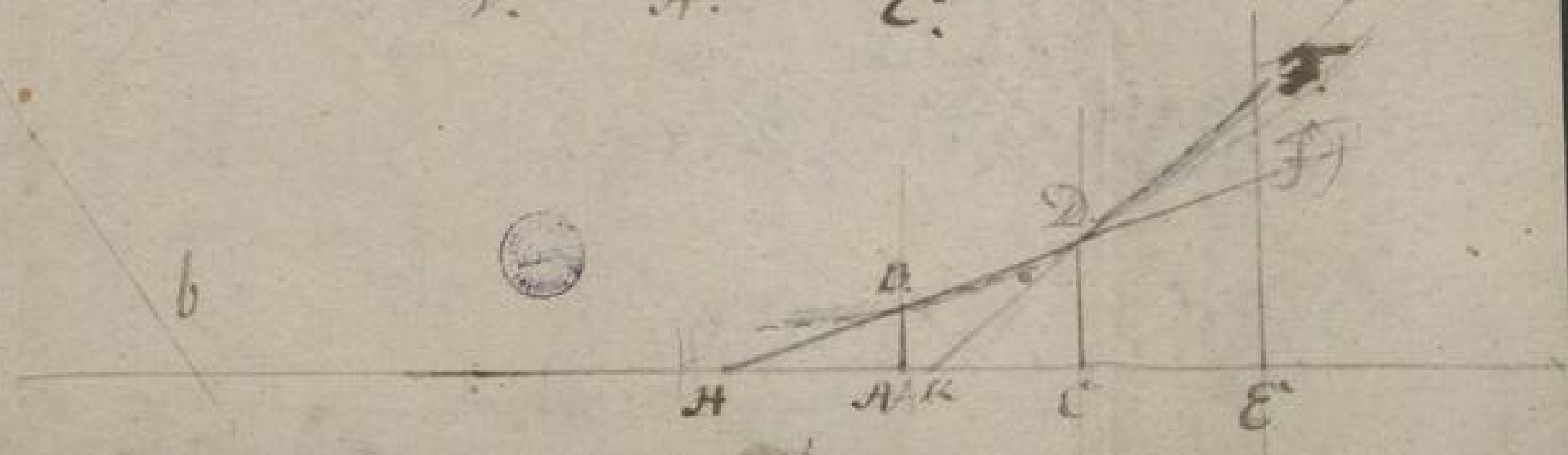
$\beta - 1. = DC. - 1.$ et $\beta. = DC.$

38. Viceversa si construatur Logistica, in qua basis systematis, quod repraesentat $eA\beta$. hoc modo ut in recta indefinita capiantur $AC. = CE.$ etc. $= 1.$ et erectis in A. C. E. perpendicularibus fiat $AB. = 1.$ $CD. = \beta.$ $EF. = \beta.^2$ etc. quo facto puncta B. D. F. erunt in Logistica. Iunctis punctis vicinis quibuslibet B. D. recta axi occurrente in H erit $HC. = \frac{1}{\beta - 1.} = KC.$ ubi punctum K. est illud, in quo recta jungens puncta vicine D. et E. occurrit axi.

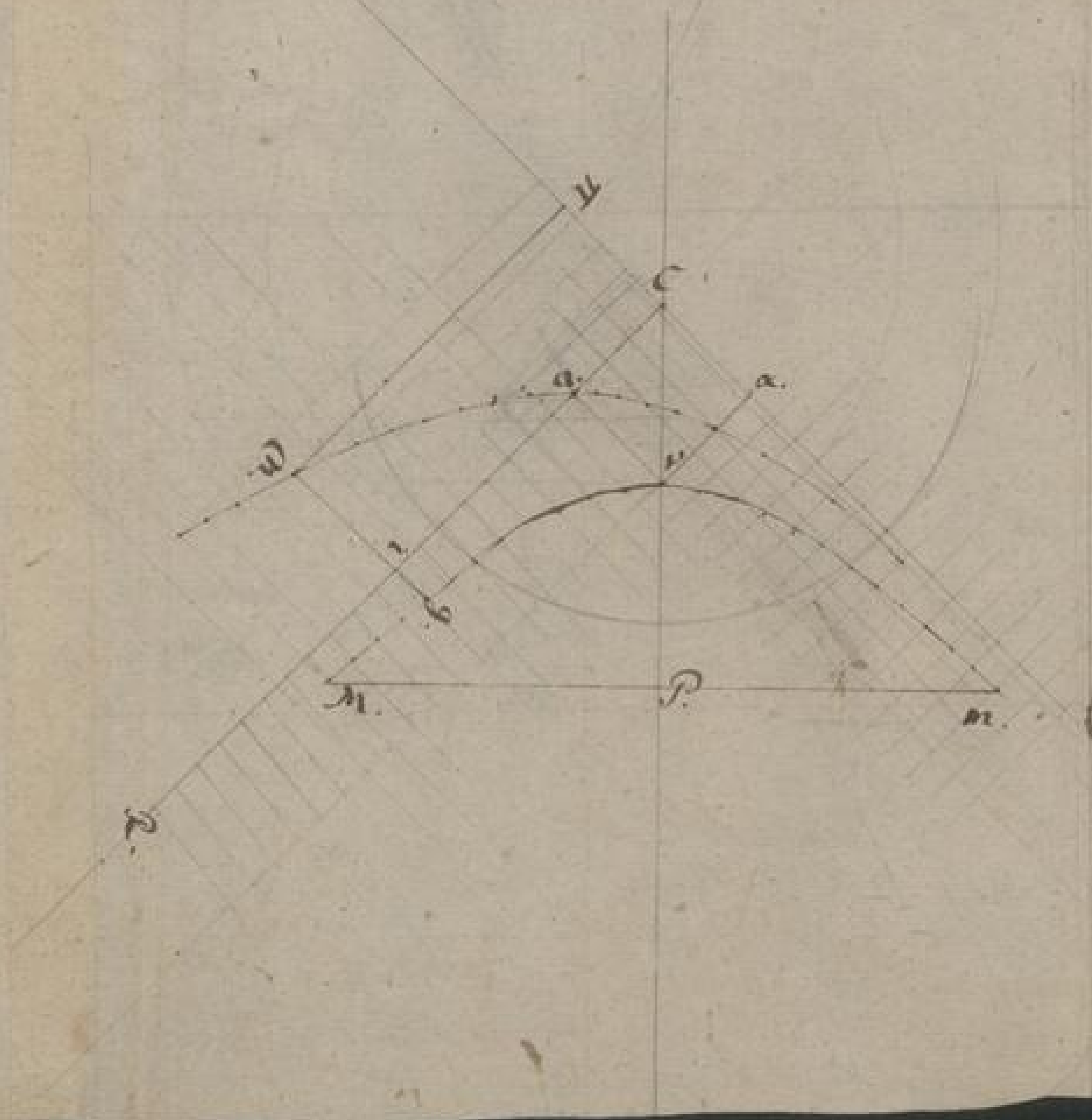

X
C
K.
V.
M.
P.
m
O.
b

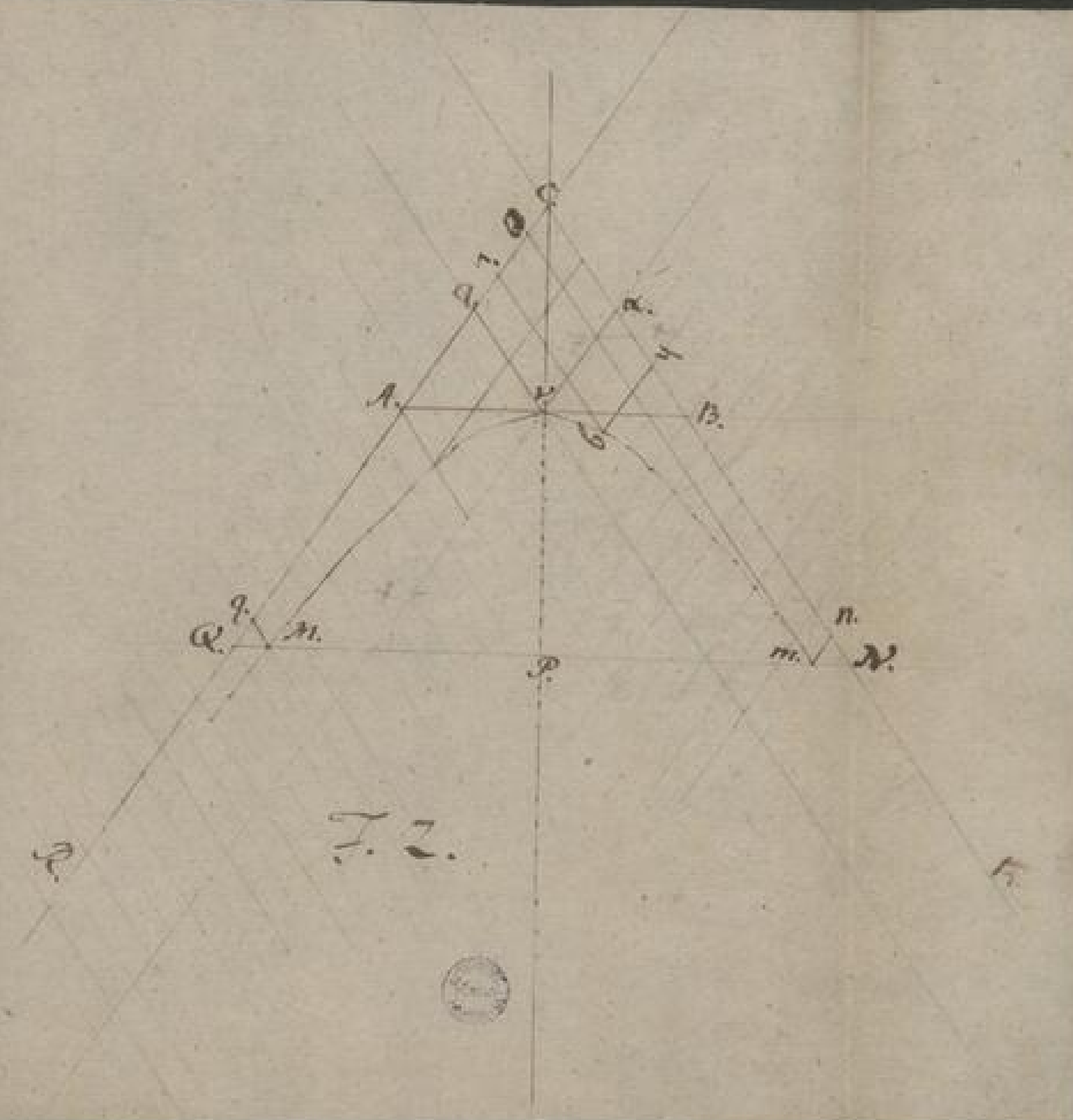

m
a
C.
Π


d.
D.
d.
b.
B.
b.
P.
A.
C.


F.
F
D.
B.
H
AK
C
E

114





F. 2.

115

De Logarithmis Cogitationes ulteriores.

1. In alio quodam scripto, elementa arithmeticae infinitorum continente, de Logarithmis pauca quaedam sed ad convenientem Logarithmi ideam consequendam sufficientia diximus; quam materiam cum maximi momenti sit in analysi mathematica, in hoc ulterius prosequi propositum est.

Docuimus in superiori scripto infinita Logarithmorum dari systemata, inter quae simplicissimum est illud, quod continet Logarithmos naturales.

Docuimus etiam logarithmum naturalem rationis $x : 1.$ seu numeri $x.$ exhiberi per formulas sequentes:

$L. x. = \sqrt[a]{x - 1.} \times a$ in qua formula $a.$ denotat numerum quemcunque infinite magnum.

$\mathcal{L}. x. = S. \frac{dx}{x}.$

et posito $x = y+1.$

$Log: x. = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ etc. in infinitum.

Nobis Logarithmus naturalis significari debet per $\mathcal{L}$: ad distinguendum eundem à logarithmo artificiali systematis cujuscunque, quem per l. vel si opus est per λ. denotabimus.

2. Si logarithmi systematis simplicissimi seu naturalis multiplicentur per numerum constantem C. oritur aliud systema logarithmorum artificiale, priori analogon secundum constantem C. quæ modulus systematis artificialis appellatur, et qui modulus in systemate naturali æquatur unitati, id quod constat ex scripto superiori. Hic notatur quod si $\mathcal{L}$. significet logarithmum naturalem numeri x. et l. logarithmum artificia-

lem ejusdem numeri in systemate moduli C. futurum esse

$$C.\mathcal{L}.x. = l.x.$$

3. Hinc consequitur, quod logarithmi ejusdem numeri ex diversis systematibus desumti inter se sint ut moduli. h. e. dicto l. logarithmo in systemate moduli C. λ. logarithmo in systemate moduli K. erit

$$\mathcal{L}.x.:l.x. = 1:C.$$

$$l.x.:\lambda.x = C:K.$$

4. Dato itaque l. logarithmo numeri x et systemate quodam logarithmico cum modulo suo C. datoque modulo alterius systematis K. invenitur logarithmus λ. numeri x. in hoc systemate per regulam auream.

5. Si modulus systematis cujusdam sit quotiens, quae prodit unitatem dividendo per logarithmum naturalem numeri constantis N. erit in systemate hoc l.N. = 1. et omnes reliqui

logarithmi systematis illius sunt exponentes dignitatum numeri N.
Nam ex hyp: est $\frac{1}{L.N.} \times$ Log: x = ~~Log. N.~~ l. N. = r.
Porro si $x = N^z$ erit

$$l.x = \frac{1}{L.N.} \times L: N^z$$

$$= \frac{1}{L.N.} \times z\, L: N.$$

$$= z. \text{ ob } \frac{1}{L.N.} \times L.N. = r.$$

6.) Numerus hic N. cujus dignitates habent pro exponentibus logarithmos systematis cujusdam Basis systematis illius appellatur.

7. Si itaq x. fuerit logarithmus numeri R. in systemate cujus Basis est B. erit $R = B^x$.

8. Inventio Logarithmorum à calculo maxime operoso pendet, quem hic prosequi non expedit. Docent eundem pro logarithmis natu

ralibus Hausen in Elementis Matheseos pro his, et logarithmis artificialibus systematis pro base numeri denarii Euler in analysi infinitorum. Nobis hic indicasse sufficiet quod opera Virorum celeberrimorum praestet Canon, vel Tabula Logarithmica systematis cujus basis est numerus denarius seu cujus modulus est unitas per logarithmum naturalem numeri 10. divisa; pro numerorum integrorum 100. Chiliadibus logarithmos in fractionibus decimalibus ad ordinem decadicarum s. decimum usque productis.

Extant etiam tabulae minores maxime vulgares, quae exhibent nos Logarithmos septem figuris decimalibus expressos pro primis decem numerorum integrorum Chiliadibus.

9. Quoniam $\frac{1}{L.N.}$ est modulus systematis Logarithmici cujus basis est N. Modulus omni-

um systematum significari potest, et communiter significatur per fractionem cujus dividendus est unitas, ut $\frac{1}{M}$.

10. Si $\frac{1}{M}$ fuerit modulus systematis logarithmici, ut in §. praec: constitutum est, et B. basis ejusdem systematis erit

$$M = \frac{\overline{B-1}}{1} - \frac{\overline{B-1}^2}{2} + \frac{\overline{B-1}^3}{3} - \frac{\overline{B-1}^4}{4} \text{ etc.}$$

Nam quoniam $\frac{1}{M} = \frac{1}{\text{Log: } B}$

erit $M = L: B$. sed Logarithmus τοῦ B. est per §. 1.

$$\frac{\overline{B-1}}{1} - \frac{\overline{B-1}^2}{2} + \frac{\overline{B-3}}{3} - \frac{\overline{B-4}}{4} \text{ etc:}$$

11. Valor τοῦ M. exhibentis modulum systematis logarithmici si dividatur in unitatem, etiam per hanc seriem magis convergentem exprimitur

$$M = 2\left(\frac{B-1}{B+1} + \frac{\overline{B-1}^3}{3.\overline{B+1}^3} + \frac{\overline{B-1}^5}{5.\overline{B+1}^5} + \frac{\overline{B-1}^7}{7.\overline{B+1}^7} \text{ etc:}\right)$$

12. Si $\frac{1}{M}$ fuerit modulus logarithmici systematis; basis ejusdem B. per M. hoc modo definitur.

$$B. = 1. + \frac{M}{1.} + \frac{M^2}{1.2.} + \frac{M^3}{1.2.3.} + \frac{M^4}{1.2.3.4.} + \frac{M^5}{1.2.3.4.5.} \text{ etc: in inf:}$$

13. In Systemate Logarithmorum naturalium, ubi modulus $\frac{1}{M.} = 1.$ hinc $M = 1.$ est Basis $= 2,71828$ pp