1 Ein allgemeines Interpolationstheorem

Es seien $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ fest vorgegebene Stellen. Jeder dieser Stellen x_μ ($\mu = 1,2,\dots,l$) sei eine eigentlich monoton wachsende Teilfolge $\nu_{\mu 1}, \nu_{\mu 2}, \dots, \nu_{\mu s_\mu}$ der Folge der Zahlen $1,2,\dots,n$ zugeordnet. Dabei möge

$$\sum_{\mu=1}^{l} s_\mu = n \geqq 1 \tag{1.1}$$

gelten. Bezeichnen wir

$$s = \mathrm{Min}\,\{\nu_{\mu 1}\} \tag{1.2}$$

und

$$k = \mathrm{Max}\,\{\nu_{\mu s_\mu}\}, \tag{1.3}$$

dann soll jede der Zahlen $s, s+1, \dots, k-1, k$ in wenigstens einer der Folgen $\{\nu_{\mu j}\}$; ($\mu = 1,2,\dots,l$; $j = 1,2,\dots,s_\mu$) angenommen werden. Für jedes $\mu = 1,2,\dots,l$ seien außerdem s_μ Zahlen

$$f_\mu^{(\nu_{\mu 1}-1)}, \quad f_\mu^{(\nu_{\mu 2}-1)}, \quad \dots, \quad f_\mu^{(\nu_{\mu s_\mu}-1)} \tag{1.4}$$

vorgegeben.

Für eine im Intervall $[x_1, x_l]$ r-mal ($r \geqq k$) differenzierbare Funktion $f(x)$, deren r-te Ableitung über $[x_1, x_l]$ R-integrabel ist und die an den Stellen x_μ die vorgeschriebenen Ableitungswerte (1.4) annimmt, suchen wir eine Interpolationsformel der Form

$$f^{(s-1)}(x) = \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{j=1}^{s_\mu} f_\mu^{(\nu_{\mu j}-1)} P_{\mu j}^{(s-1)}(x) + R^{(s-1)}(x). \tag{1.5}$$

Dabei sollen die $P_{\mu j}^{(s-1)}(x)$ Polynome von möglichst niedrigem Grade sein, die nicht von den Werten $f_\mu^{(\nu_{\mu j}-1)}$ abhängen. Sie sollen als $(s-1)$-te Ableitungen gewisser Polynome $P_{\mu j}(x)$ gedeutet werden. Die Gesamtheit der Ableitungen $f^{(\nu_{\mu j}-1)}(x_\mu)$, für die die