

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

C 175 Geophysik

1964

Reiner Trommer

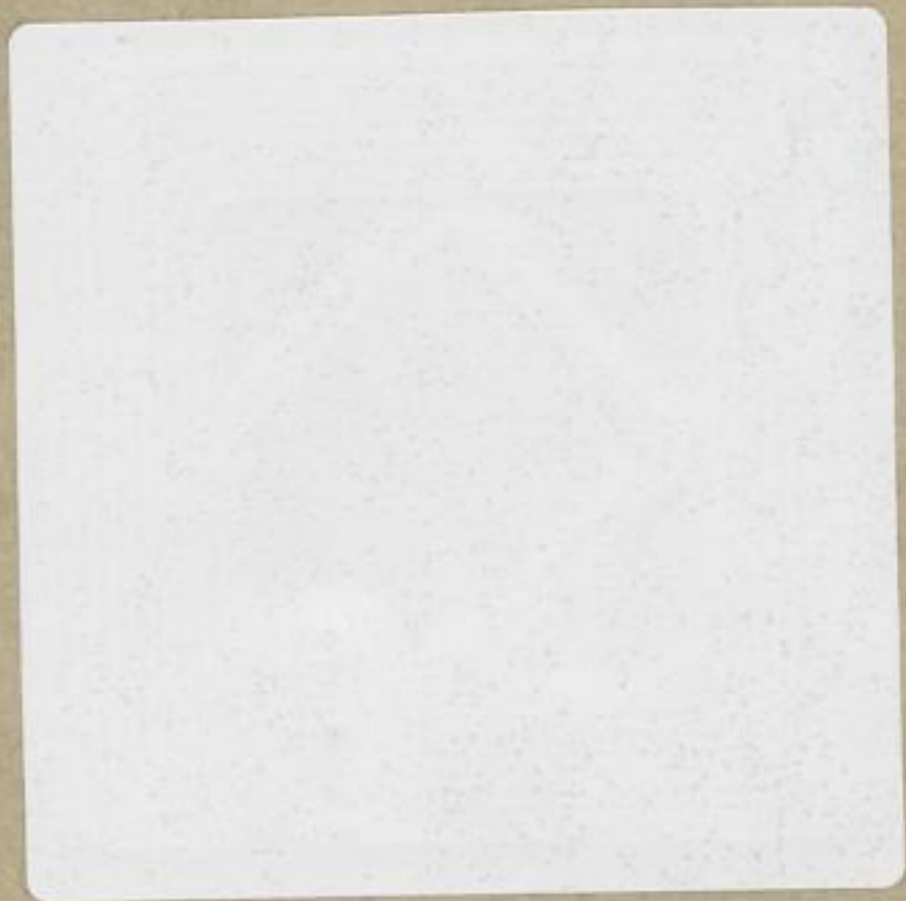
Der gravimetrische Vertikalgradient

FFH
C 175
b



VEB DEUTSCHER VERLAG FÜR GRUNDSTOFFINDUSTRIE

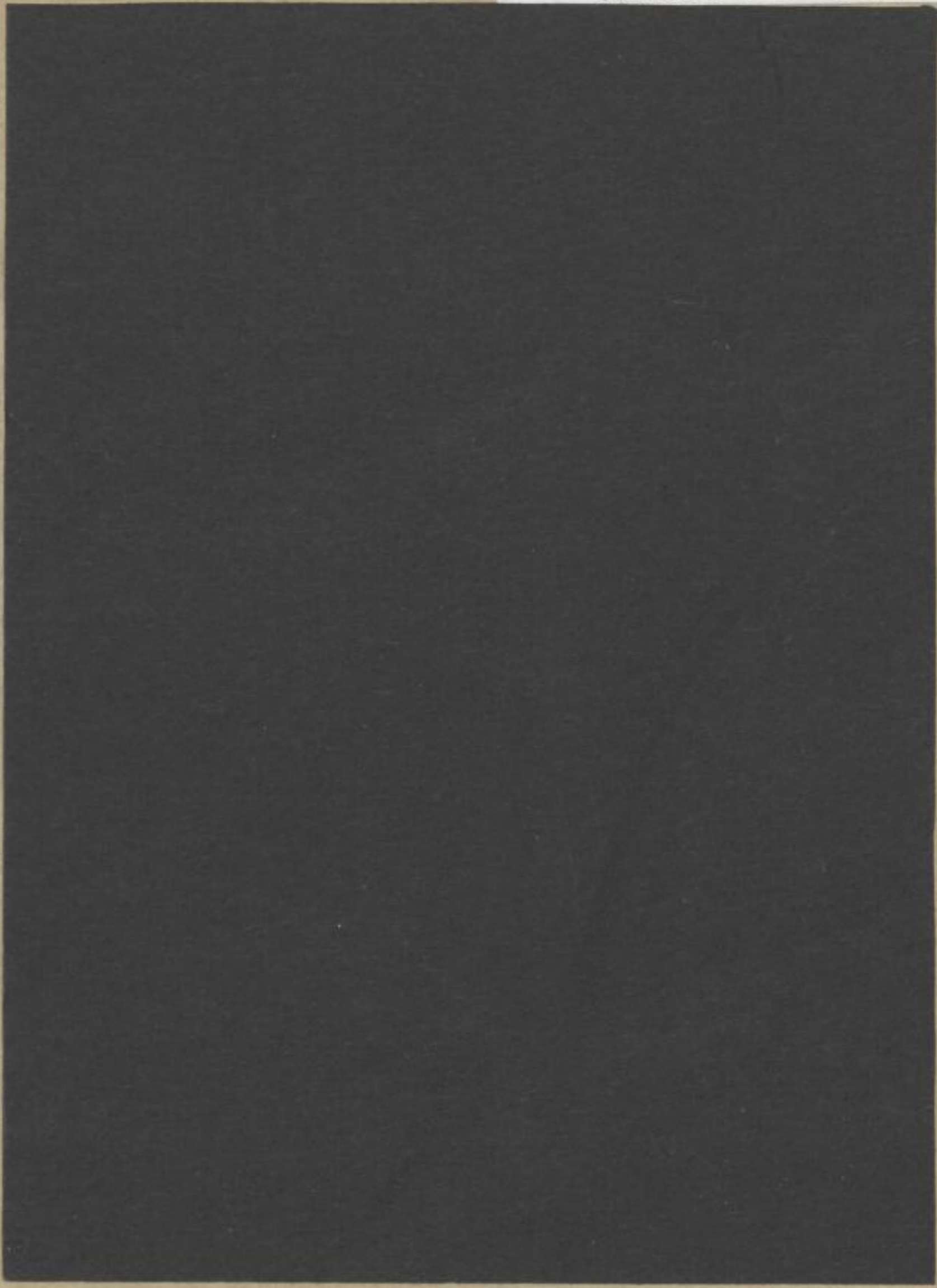
XVI 1142 b C175



TU BERGAKADEMIE FREIBERG



XVI 1142.C175B/5 b



FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

C 175

FREIBERGER FORSCHUNGSHEFTE

Herausgegeben vom Rektor der Bergakademie Freiberg

C 175

GEOPHYSIK

Der gravimetrische Vertikalgradient

Von

REINER TROMMER



VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie · Leipzig

Freib. Forsch.-H.	C 175	S. 1—130	69 Bilder	23 Tabellen	Leipzig, November 1964
-------------------	-------	----------	-----------	-------------	------------------------

Veröffentlichung Nr. 133 des Instituts für Angewandte Geophysik der Bergakademie
Freiberg. Direktor: Prof. Dr. phil. O. Meißer



III 1142 (C175)
0 b

„Freiberger Forschungshefte“, Schriftenreihe für alle Gebiete der Montanwissenschaften. Herausgeber: Der Rektor der Bergakademie Freiberg, Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Wrana. — Verlag: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig W 31, Karl-Heine-Str. 27 (Fernruf 44 441). — Die Freiberger Forschungshefte erscheinen in zwangloser Folge in den Reihen A, B, C und D. Ausführliches Verzeichnis aller lieferbaren Hefte von der Bergakademie Freiberg oder dem VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie. — Vertrieb: In der Deutschen Demokratischen Republik durch den Buchhandel; in der Deutschen Bundesrepublik und in Westberlin durch den Buchhandel (Auslieferung KUNST UND WISSEN, Erich Bieber, Stuttgart 8, Wilhelmstraße 4—6); in Österreich durch den GLOBUS-Buchvertrieb Wien I, Salzgries 16; im übrigen Ausland durch eine Importbuchhandlung, den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH., Leipzig C 1, Postschließfach 276, oder den Verlag. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza. — VLN 152—915/178/64. Printed in Germany. — Alle Rechte vorbehalten. — ES 18 E 2

(65.256)

INHALT

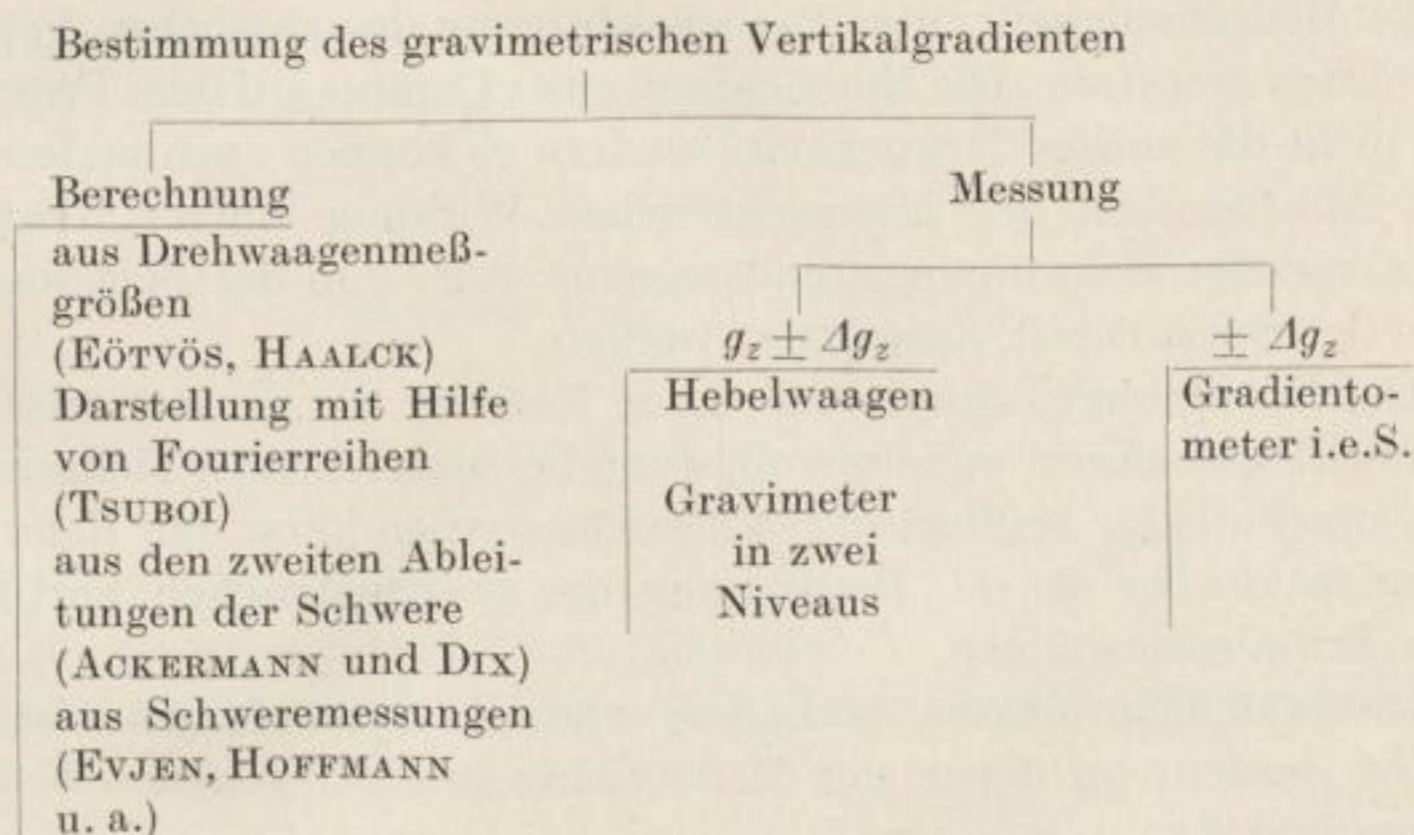
1. Einleitung	9
2. Der Begriff des gravimetrischen Vertikalgradienten	11
2.1. Der normale gravimetrische Vertikalgradient	11
2.2. Der gestörte gravimetrische Vertikalgradient — die Wirkung einfach geformter Massen	13
3. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Prospektionsgeophysik und die Geodäsie	18
3.1. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die angewandte Geophysik	18
3.1.1. Die Rolle des gravimetrischen Vertikalgradienten bei der Festlegung lokaler Störmassen	18
3.1.2. Die Verwendung des gravimetrischen Vertikalgradienten zur Strukturermittlung	20
3.1.3. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für eine genaue Freiluftreduktion	21
3.1.4. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Dichtebestimmung aus Schachtgravimetermessungen	22
3.1.5. Die Berechnung der Schwerestörung aus gemessenen Werten des gravimetrischen Vertikalgradienten	23
3.2. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Geodäsie	27
4. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten	28
4.1. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus Drehwaage- meßgrößen	28
4.1.1. Das Verfahren nach EÖTVÖS	28
4.1.2. Das Verfahren nach HAALCK	30
4.2. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus W_{zzz}	32
4.3. Die Darstellung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe von Fourierreihen	33
4.4. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus dem Schwere- bild	33
4.4.1. Übersicht über die Verfahren	33
4.4.2. Fehlerbetrachtungen	39
4.4.3. Die Bestimmung des gravimetrischen Horizontal- und Vertikalgra- dienten mit Hilfe eines mechanischen Analysiergerätes nach ACKER- MANN	40
5. Die experimentelle Bestimmung des gravimetrischen Vertikal- gradienten	42
5.1. Die statische Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten	42

5.1.1.	Die Messung mit Hebelwaagen — Maßnahmen zur Empfindlichkeitssteigerung — Die Berücksichtigung des horizontalen Gradienten W_{xz} bei der Messung	42
5.1.2.	Die vertikal schwingende Drehwaage nach BERROTH	48
5.1.3.	Die Messung mit Gravimetern	49
5.1.4.	Ein doppeltes, astasiertes Differentialgravimeter nach FEDYNSKIJ	50
5.1.5.	Die Messung mit Gradientometern	50
5.1.5.1.	Das ältere Airborne-Vertikalgradientometer nach LUNDBERG	55
5.1.5.2.	Das neue Airborne-Gradientometer nach LUNDBERG — Aufbau und Wirkungsweise — Quantitative Untersuchung des Gerätes	55
5.1.5.3.	Das Gradientometer nach BOITNOTT	61
5.1.6.	Die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effektes von Kristallen	63
5.2.	Die dynamische Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten	64
6.	Die topographische Korrektur der Meßwerte des gravimetrischen Vertikalgradienten	69
6.1.	Allgemeine Betrachtungen	69
6.2.	Die Berechnung der Geländekorrektur für vom Flugzeug gemessene Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten nach CHINNERY	71
6.3.	Die topographische Korrektur der unmittelbar auf der Erdoberfläche gemessenen Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten nach BALAVADZE	75
6.4.	Die Berücksichtigung des Niveauunterschiedes in der Anordnung der Meßsysteme bei einer genauen Geländekorrektur	81
7.	Die Entwicklung eines Gradientometers auf dem piezoelektrischen Prinzip	87
7.1.	Das Zustandekommen des piezoelektrischen Effektes — die Darstellung der Grundformeln	87
7.2.	Der direkte Piezoeffekt bei Quarz, Rochelle-Salz und ADP-Kristallen	88
7.2.1.	Der direkte Piezoeffekt bei Quarz	89
7.2.2.	Der direkte Piezoeffekt bei Rochelle-Salz	92
7.2.3.	Der piezoelektrische Effekt bei ADP-Kristallen	94
7.2.4.	Die Verwendung von Quarz als piezoelektrischen Indikator in einem Gradientometer	97
7.3.	Die Abschätzung des zu erwartenden Meßeffektes bei Verwendung von Quarz als piezoelektrisches Material	97
7.4.	Die Messung kleinster Ladungsmengen bzw. Spannungen mit Hilfe des Duantenelektrometers nach HOFFMANN	100
7.4.1.	Beschreibung des Instrumentes	100
7.4.2.	Zusammenstellung der für die Duantenelektrometer gültigen Formeln	100
7.4.3.	Die Möglichkeiten der Leistungssteigerung beim Nachweis kleinster Ladungen	101
7.4.4.	Schlußfolgerungen für den Systembau und die Anwendung des Gerätes	103
7.5.	Die Weiterentwicklung des Duantenelektrometers zu einem Spannbandgerät	105
7.6.	Der Aufbau und die Wirkungsweise eines Piezoquarzgradientometers	108
7.7.	Die Eigenschaften und das Verhalten eines Piezoquarzgradientometers	112

7.7.1. Über die mögliche Beeinflussung des Meßwertes durch die BROWN'sche Molekularbewegung in den Quarzstäben	112
7.7.2. Der Einfluß der Temperatur auf den Meßvorgang	113
7.7.3. Die Entladekonstante des Systems	114
7.7.4. Der Luftdruckeffekt bei der Gradientenmessung	115
7.7.5. Das Verhalten der piezoelektrischen Indikatoren beim Auftreten von Störbeschleunigungen	115
7.7.6. Die Berücksichtigung eines Fortbewegungseffektes bei Gradientenmessungen in bewegten Systemen	117
7.7.7. Die Wirkung periodischer Spannungsschwankungen an den Piezoquarzen und von Erschütterungen auf den hochempfindlichen Spannungsmesser	117
7.8. Experimentelle Voruntersuchungen	118
8. Die Problematik einer direkten Messung der zweiten Ableitung der Schwerkraft g_{zz}	121
9. Zusammenfassung	122
Literatur	125

1. Einleitung

Der gravimetrische Vertikalgradient hat sowohl für die Prospektionsgeophysik als auch für die Geodäsie eine große praktische Bedeutung, was die Kenntnis dieser Größe dringend verlangt. Der gravimetrische Vertikalgradient kann entweder durch Berechnung oder durch direkte Messung gewonnen werden. Die experimentellen Verfahren müssen danach unterschieden werden, ob mit ihnen der gestörte Normalgradient oder die Störung allein gemessen werden kann.



Die vorliegende Arbeit behandelt die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten nur in der Übersicht; sie befaßt sich dagegen ausführlich mit seiner experimentellen Bestimmung, da der Stand der Technik in der Gegenwart die erfolgreiche Lösung des Problems in Aussicht stellt. Neben einer Zusammenstellung der Meßmethoden, der Geräte und der Ergebnisse anderer Autoren bildet die Untersuchung eines statischen Verfahrens zur Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten auf dem piezoelektrischen Prinzip, wie es von Prof. MEISSER vorgeschlagen wird, den Hauptgegenstand der Arbeit.

Für die experimentelle Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten sind folgende Fragen wichtig [39]:

1. Ist die zu lösende Aufgabe wichtig für die angewandte Geophysik und andere Wissenschaften?
2. Welche Meßgenauigkeit muß von dem zu entwickelnden Meßverfahren gefordert werden?
3. Auf Grund welcher Prinzipien kann ein solches Gerät entwickelt werden?
4. Welche Möglichkeiten bietet das Gerät hinsichtlich seines Einsatzes in der Praxis?

Die erste Frage ist dahingehend zu untersuchen, ob die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten der angewandten Gravimetrie wesentlich neue Möglichkeiten der Interpretation eröffnet und somit der Aufwand lohnt, der zweifellos zur Entwicklung eines Meßgerätes aufgebracht werden muß.

Die Meßgenauigkeit stellt das Grundproblem einer experimentellen Bestimmung des Vertikalgradienten dar. Da der normale vertikale Gradient 3086 E (1 Eötvös-Einheit = 10^{-9} cgs) beträgt, die interessierende Störung des Normalgradienten aber in der Größenanordnung 3...10 E liegt, muß also die Variation eines beträchtlichen Grundwertes gemessen werden. Verlangt man im Anfangsstadium der Entwicklung eine Meßgenauigkeit von ± 5 E, so erfordert das die Bestimmung des Normalgradienten auf ca. $2^0/_{00}$.

Als Konstruktionsprinzip für ein Meßgerät sollte ein solches zugrunde gelegt werden, das eine direkte Messung des gestörten Gradienten ermöglicht, die größte Aussicht auf erfolgreiche Verwirklichung in sich trägt und die erforderliche Meßgenauigkeit unter Berücksichtigung der möglichen Fehlerquellen zu erreichen gestattet. Die Entwicklung eines Gerätes auf dem Prinzip der Waage ist nicht die einzige Möglichkeit, sondern es können auch andere Effekte, wie die Abhängigkeit der piezoelektrischen Wirkung einiger Kristalle und der transversalen Schwingungsfrequenz einer Seite von der Belastung, und damit von der Schwerkraft, ausgenutzt werden.

Die Entwicklung eines Gerätes zur Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten erscheint nur sinnvoll, wenn bei hinreichender Meßgenauigkeit auch ein annehmbarer Meßfortschritt erreicht werden kann, nur dann ist eine Messung rationeller als die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus Schweremessungen.

Diesbezüglich müssen besonders alle die dynamischen Verfahren untersucht werden, bei denen der Meßvorgang in einer genauen Frequenzbestimmung besteht.

Die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe eines Gradientometers ist infolge der mechanischen oder elektrischen Gegenschaltung der beiden Meßsysteme weit weniger von Störbeschleunigungen beeinflusst und so vorzugsweise für den Einsatz in Flugzeugen, Schiffen und Kraftwagen geeignet. Damit werden der gravimetrischen Übersichtsvermessung neue Möglichkeiten erschlossen.

Gradientenmessungen sind auch ökonomisch recht günstig:

Die Kosten für Messungen mit Hilfe statischer Gravimeter betragen nach KUMAGAI [64] rund $1/_{10}$ derjenigen der Seismik; die Aufwendungen für den Einsatz von Gradientometern werden noch niedriger liegen.

Ohne die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für Geophysik und Geodäsie, die in einem späteren Abschnitt nachgewiesen wird, zu unterschätzen, darf man mit der Ansicht von SCHLEUSENER [94] übereinstimmen, „daß die Messung des Vertikalgradienten der Lagerstättegeophysik keinen ähnlichen Auftrieb geben kann, wie dies z. B. durch die Einführung der Gravimeter geschah“. Dennoch bildet diese Methode eine wertvolle Ergänzung der gravimetrischen Verfahren.

2. Der Begriff des gravimetrischen Vertikalgradienten

2.1. Der normale gravimetrische Vertikalgradient

Das Potential des Schwerefeldes läßt sich durch die nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{r'^{n+1}} + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi' \quad (1)$$

darstellen.

Dabei bedeuten:

- Y_n — allgemeine Kugelfunktionen
- r' — Radiusvektor des Aufpunktes
- ω — Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
- φ' — geozentrische Breite des Aufpunktes.

Es ist allgemein üblich, obige Entwicklung in

$$W = U + T \quad (2)$$

mit

$$U = \sum_{n=0}^2 \frac{Y_n}{r'^{n+1}} + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'$$

und

$$T = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Y_n}{r'^{n+1}}$$

aufzuspalten

$U = \text{const}$ ist die Gleichung der Niveausphäroide.

Drückt man U als Funktion der Erdmasse E und der Hauptträgheitsmomente der Erde A , B und C ($A = B$) aus, so folgt

$$U = \frac{k^2 E}{r'} + \frac{k^2}{2 r'^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 r'^2}{2} \cos^2 \varphi'. \quad (3)$$

Die negative Ableitung von U nach der äußeren Flächennormalen im Punkte P

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_P = \gamma'$$

wird als theoretischer Schwerewert in P bezeichnet:

$$-\frac{\partial U}{\partial h} = \gamma' = \frac{k^2 E}{r'^2} + \frac{3 k^2}{2 r'^4} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi') - \omega^2 r' \cos^2 \varphi'. \quad (4)$$

Dabei begeht man einen Fehler von der Größenordnung des Quadrates der Erdabplattung, da

$$\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial U}{\partial r'}$$

gesetzt wurde.

Aus (4) folgt durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial h} = -\frac{2 k^2 E}{r'^3} - 6 \frac{k^2}{r'^5} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \varphi') - \omega^2 \cos^2 \varphi'. \quad (5)$$

Mit Hilfe des CLAIRAUTSchen Theorems lassen sich die Konstanten durch die aus Schweremessungen bekannten Größen a , b , c , und die große Halbachse a ausdrücken. Damit bekommt man für den gravimetrischen Vertikalgradienten

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = - \frac{2 \gamma_0}{a} (1 + a + c) (1 + [5/2 c - 3 a] \sin^2 \varphi'), \quad (6)$$

wo der Indexwert 0 den Äquatorwert bezeichnet.

Wegen der großen Bedeutung des vertikalen Schweregradienten sind verschiedene Formeln als Funktionen der geographischen Breite angegeben worden:

$$\left. \begin{aligned} \text{HELMERT 1903 } \frac{\partial \gamma}{\partial h} &= - 3086 (1 + 0.00071 \cos 2 \varphi) \cdot 10^{-9}, \\ \text{LAMBERT 1930 } \frac{\partial \gamma}{\partial h} &= - (3085,7 + 2,1 \cos 2 \varphi) \cdot 10^{-9}, \\ \text{CASSINI 1937 } \frac{\partial \gamma}{\partial h} &= - (3085,5 + 2,2 \cos 2 \varphi) \cdot 10^{-9}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ wird als Normalbetrag des gravimetrischen Vertikalgradienten angesehen und mit dem Mittelwert $\frac{\partial \gamma}{\partial h} \approx 0,3086$ mGal/m zur Freiluftreduktion benutzt. Dabei ist ein idealer Erdkörper vorausgesetzt, dessen Massenordnung den Gesetzen der Hydrostatik gehorcht.

Tabelle 1.
Vertikalgradient der Normalschwere (aus JUNG [57])

φ [Grad]	$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_{h=0}$	
	Internationales Ellipsoid	KRASSOWSKI- Ellipsoid
0	-0,30833	-0,30834
5	-0,30833	-0,30835
10	-0,30834	-0,30836
15	-0,30836	-0,30837
20	-0,30838	-0,30839
25	-0,30841	-0,30842
30	-0,30844	-0,30845
35	-0,30847	-0,30849
40	-0,30851	-0,30852
45	-0,30855	-0,30856
50	-0,30859	-0,30860
55	-0,30863	-0,30863
60	-0,30866	-0,30867
65	-0,30869	-0,30870
70	-0,30872	-0,30872
75	-0,30874	-0,30875
80	-0,30876	-0,30876
85	-0,30877	-0,30877
90	-0,30877	-0,30877

2.2. Der gestörte gravimetrische Vertikalgradient — die Wirkung einfach geformter Massen

Der Erdkörper ist in Wirklichkeit nicht ideal, somit verschwindet auch die Restfunktion T nicht; sie stellt vielmehr die Anomalien der Kräftefunktionen dar, die durch Masseninhomogenitäten des Erdkörpers verursacht werden. Der mit Hilfe theoretischer Annahmen über die Massenverteilung in der Erde berechnete normale gravimetrische Vertikalgradient hat deshalb nur im Mittel Gültigkeit. Die Störung kann in der Größenordnung einiger 10 E bis 100 E liegen.

Im folgenden soll der Verlauf des gestörten gravimetrischen Vertikalgradienten über vorgegebene Störkörper behandelt werden. Dieses Problem stellt die Lösung der „direkten Aufgabe“ dar. Die gültigen Formeln wurden nach JUNG [57,] HOFFMANN [53] u. a. zusammengestellt.

1. Homogene Kugel
$$W_{zz} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho k^2 \frac{2(z-t)^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + (z-t)^2)^{5/2}} \quad (8)$$

Für $x = t\sqrt{2}$: $W_{zz} = 0$.

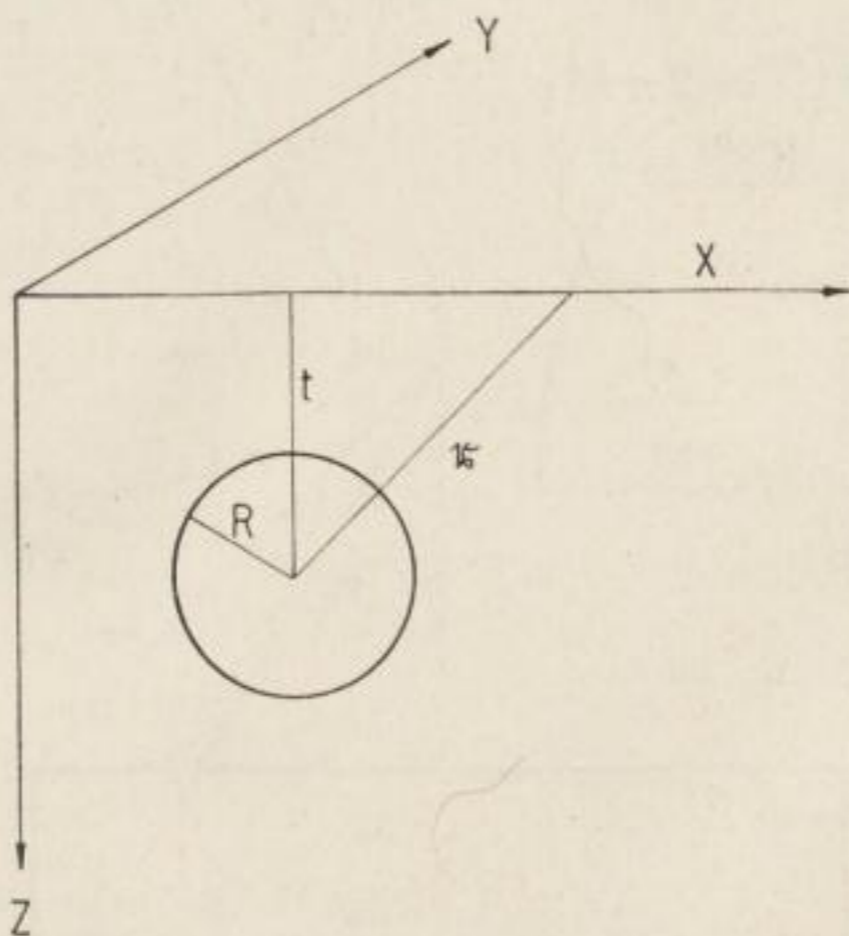


Bild 1.

2. Parallel zur Erdoberfläche liegender, unendlich langer Kreiszyylinder

$$W_{zz} = 2 \pi R^2 \rho k^2 \frac{(z-t)^2 - x^2}{(x^2 + (z-t)^2)^2} \quad (9)$$

3. Kreisscheibe

$$W_{zz}^{(P)} = 2 \pi k^2 \mu \frac{R^2}{r^3} \quad (10)$$

4. Homogener horizontaler Streifen

$$W_{zz} = 2 k^2 \mu \left(\frac{x+b}{(x+b)^2 + t^2} - \frac{x-b}{(x-b)^2 + t^2} \right) \quad (11)$$

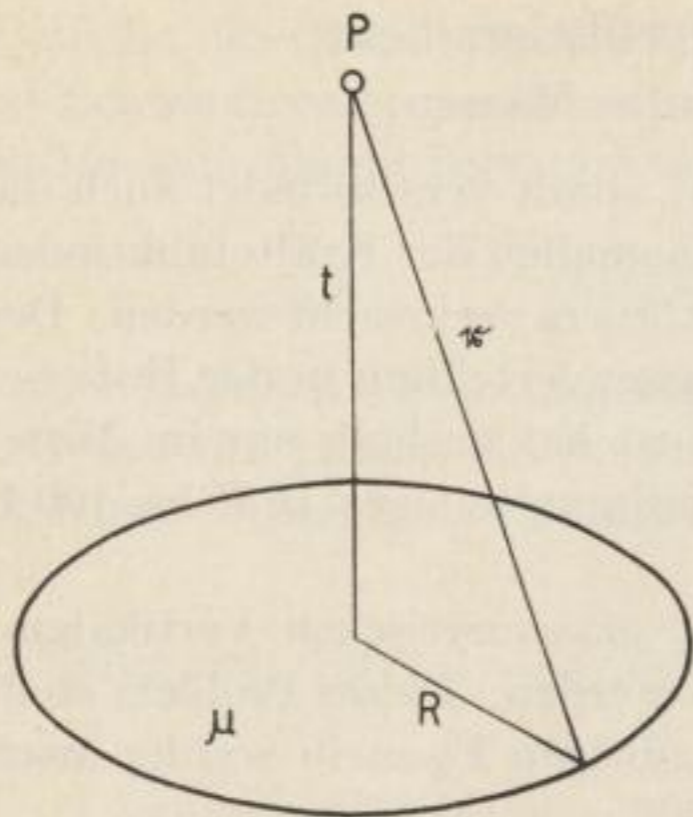


Bild 2.

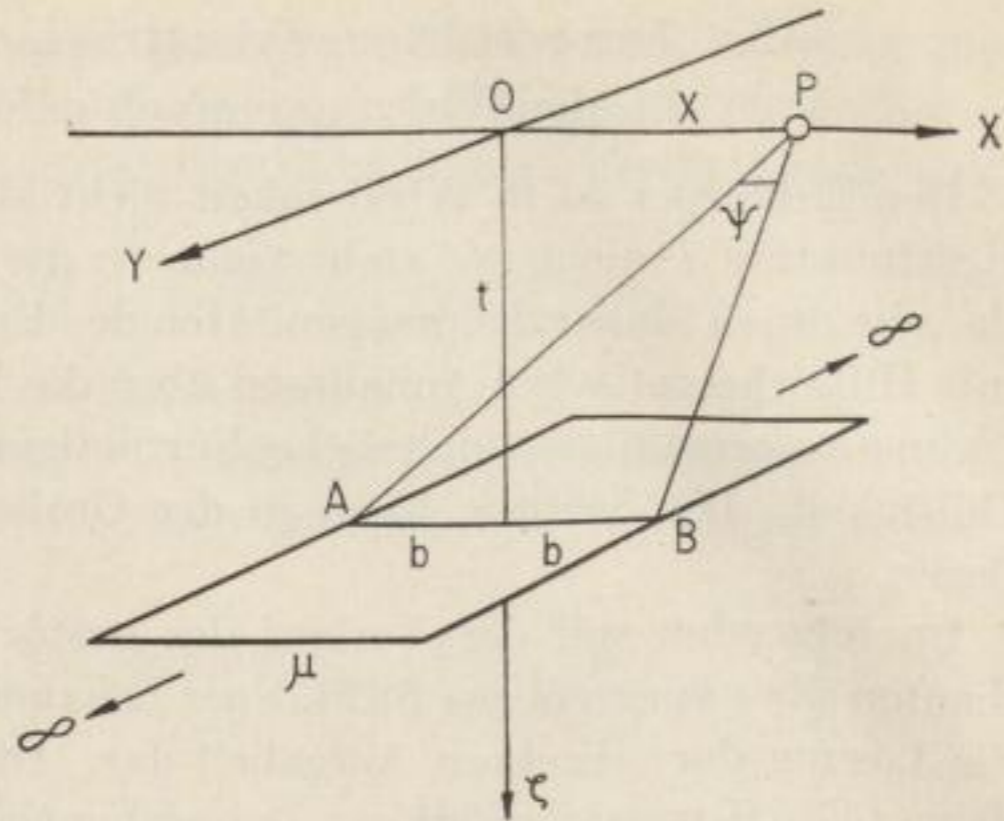


Bild 3.

5. Gerader Kreiszylinder mit lotrechter Achse

$$W_{zz}^{(P)} = 2\pi k^2 \rho \left(\frac{t+d}{r_\mu} - \frac{t}{r_0} \right). \quad (12)$$

Für $R \ll d, t \rightarrow 0: W_{zz}^{(P)} = 2\pi k^2 \rho$

Für $d \ll R, R \rightarrow \infty: W_{zz}^{(P)} = 0$

(unendliche Platte)

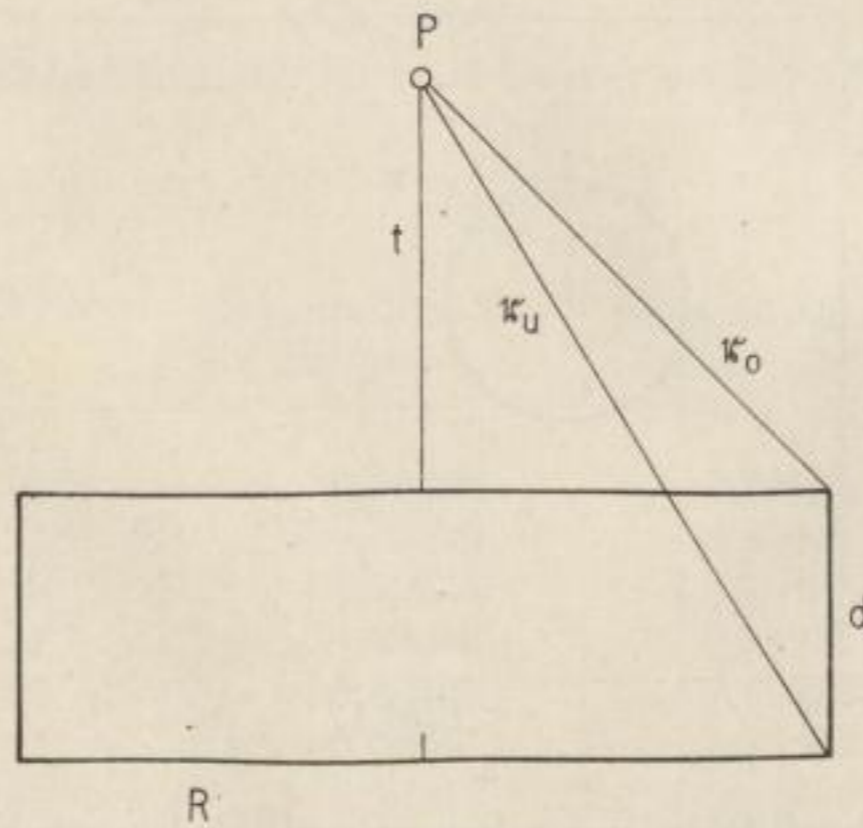


Bild 4.

6. Homogener gerader Kreiskegel

$$W_{zz}^{(P)} = 2\pi k^2 \rho \left\{ \sin^2 \alpha \left(\frac{T}{\sqrt{T^2 + (T-t)^2 \cot^2 \alpha}} - 1 \right) - \cos^2 \alpha \frac{T-t}{\sqrt{T^2 + (T-t)^2 \cot^2 \alpha}} + \cos^2 \alpha \sin \alpha \ln \frac{(T-t) + t \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sqrt{T^2 + (T-t)^2 \cot^2 \alpha}}{t(\sin^2 \alpha + \sin \alpha)} \right\}. \quad (13)$$

7. Homogenes Rotationsparaboloid

$$W_{zz}^{(P)} = 2 \pi k^2 \rho \left[\frac{T}{\sqrt{T^2 + R^2}} - 1 + \frac{2p}{2t + p} - \frac{p}{\sqrt{T^2 + R^2}} \frac{T + T^2 + R^2}{T + p + \sqrt{T^2 + R^2}} \right] \quad \text{mit } p = \frac{R^2}{2(T - t)} \quad (14)$$

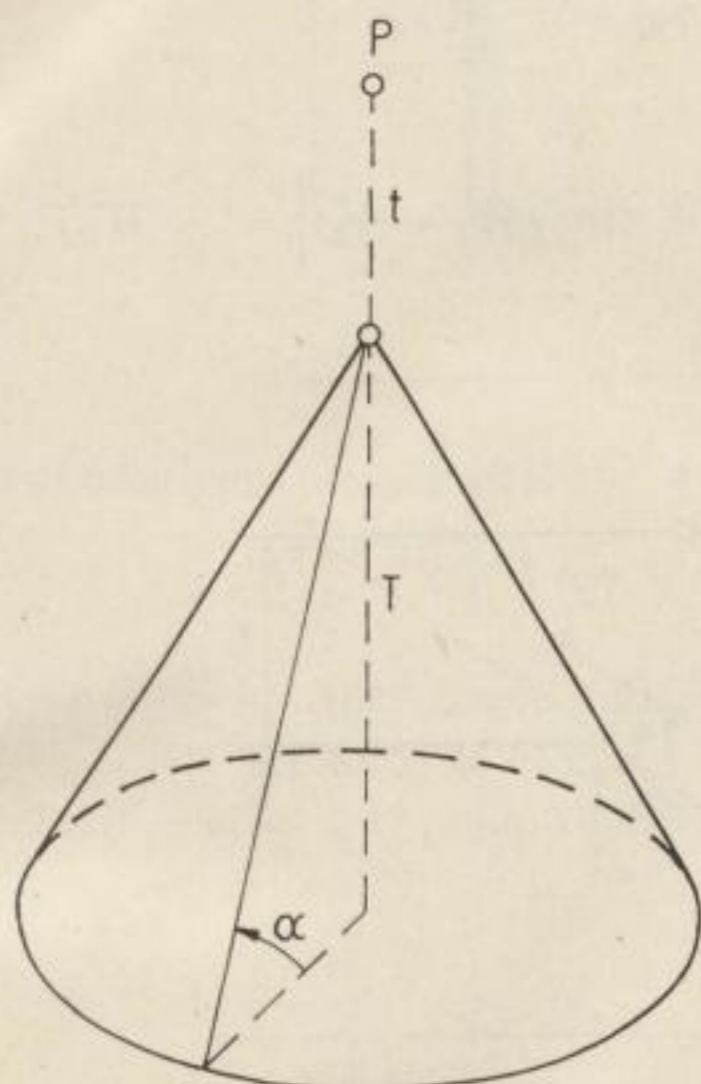


Bild 5.

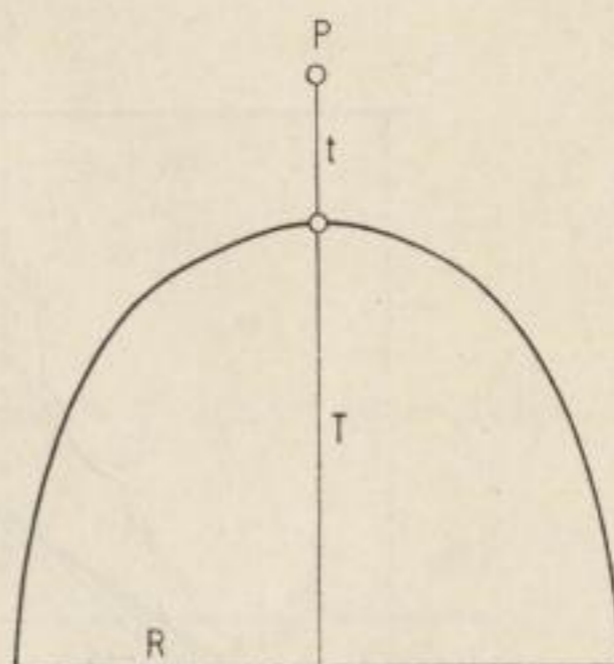


Bild 6.

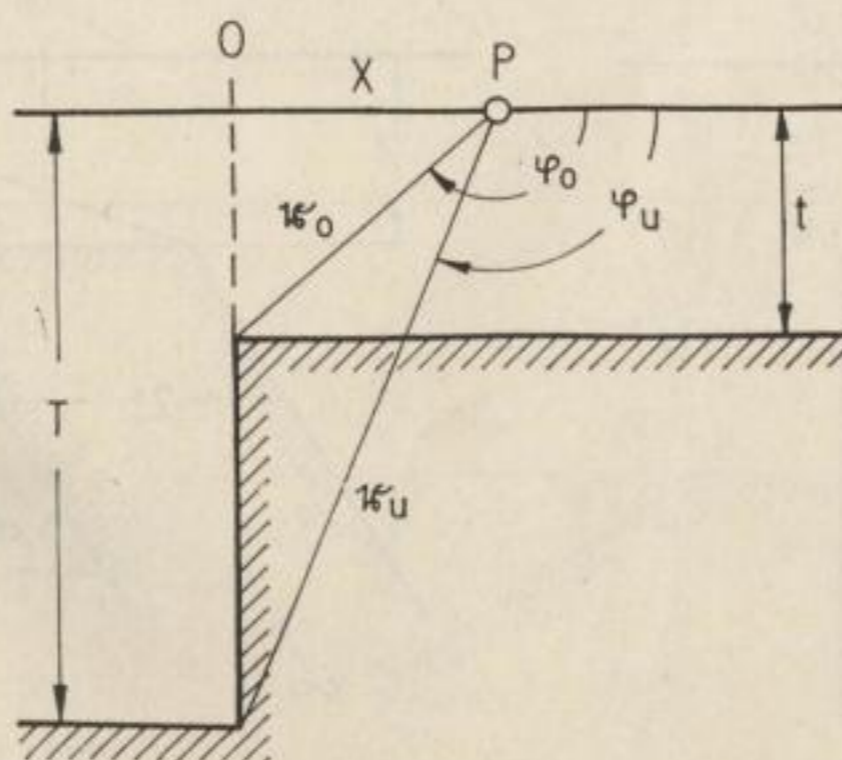


Bild 7.

8. Senkrechte Stufe

$$W_{zz} = 2 k^2 \rho (\varphi_0 - \varphi) = - W_{xx}. \quad (15)$$

9. Schiefe Stufe

$$W_{zz} = 2 k^2 \rho \sin \alpha \left\{ \cos \alpha \ln \frac{r_u}{r_0} - \sin \alpha (\varphi_u - \varphi_0) \right\} = - W_{xx}. \quad (16)$$

10. Senkrechter Spalt

$$W_{zz} = 2 k^2 \rho (\varphi_1 - \varphi_2) = - W_{xx}. \quad (17)$$

11. Schiefer Spalt

$$W_{zz} = 2 k^2 \rho \sin \alpha \left\{ - \cos \alpha \ln \frac{r_1}{r_2} + \sin \alpha (\varphi_1 - \varphi_2) \right\} = - W_{xx}. \quad (18)$$

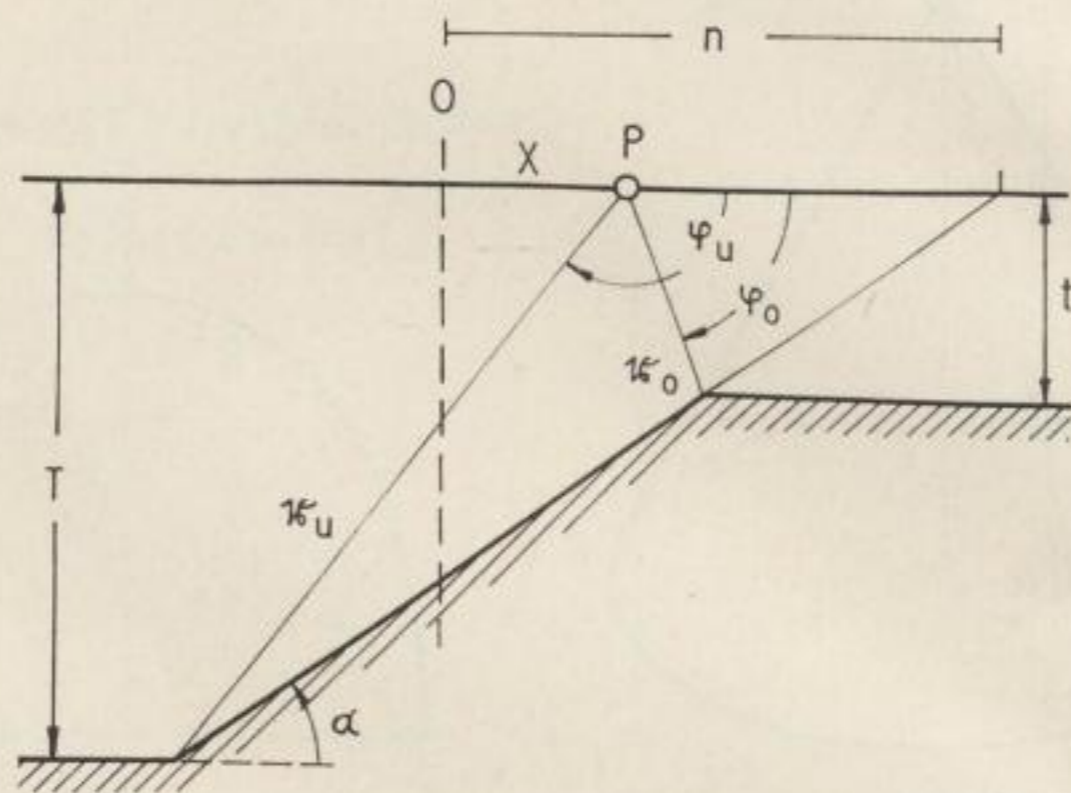


Bild 8.

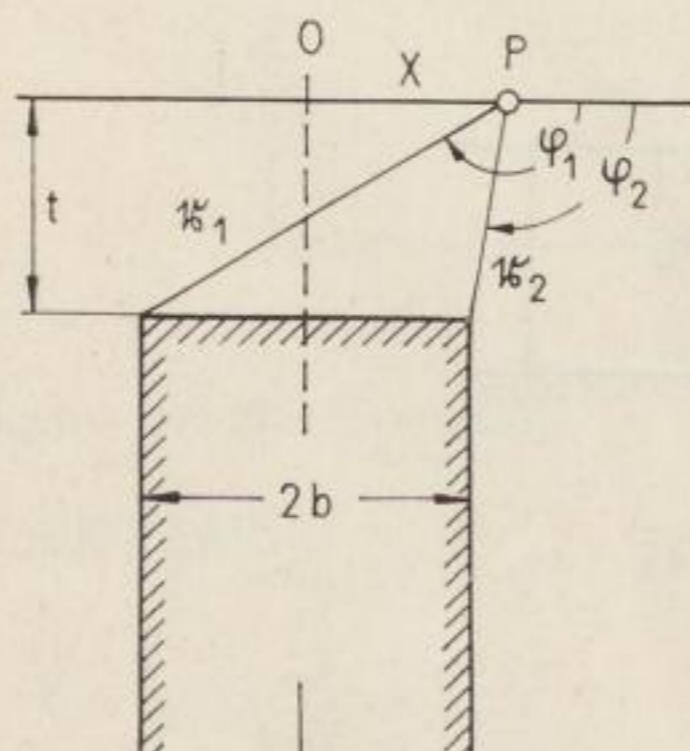


Bild 9.

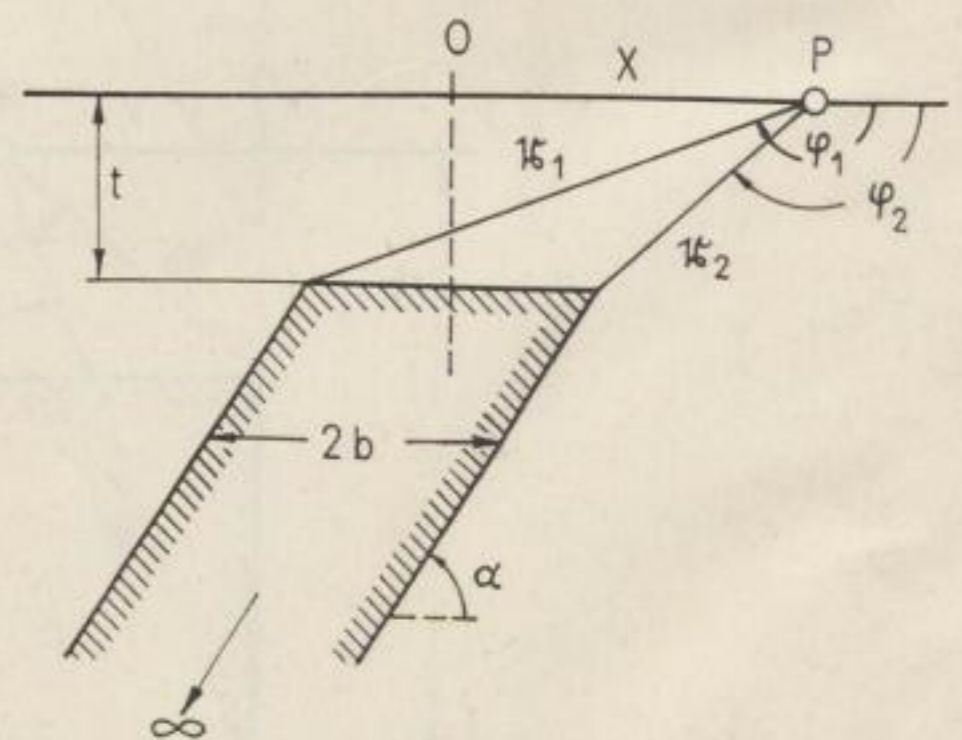


Bild 10.

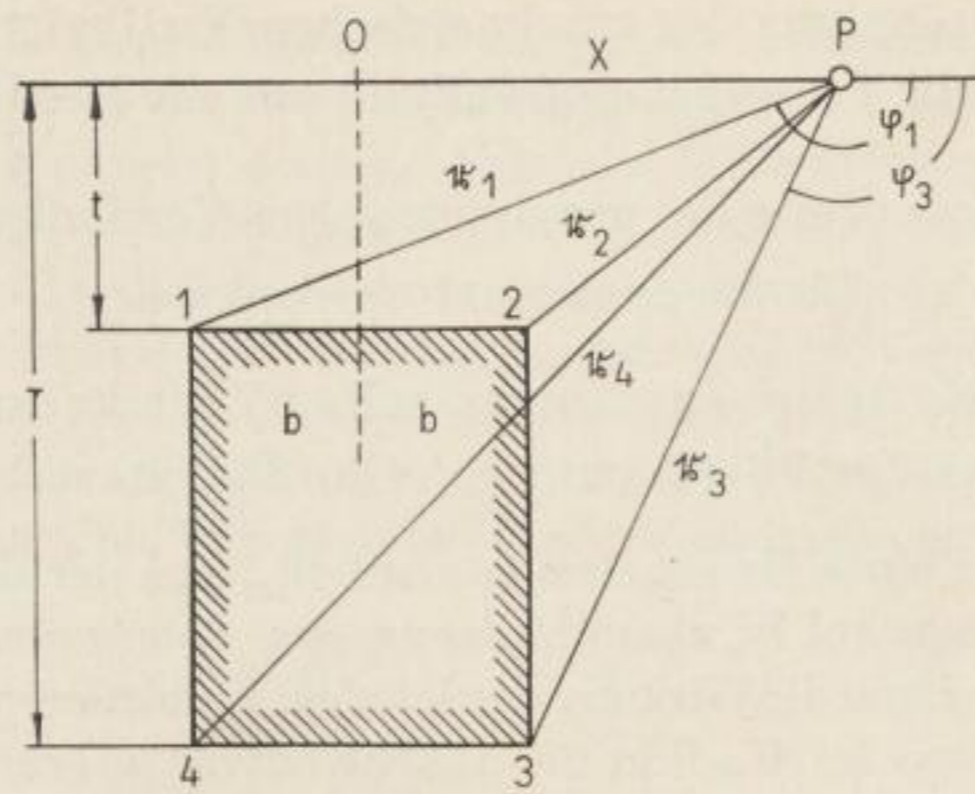


Bild 11.

12. Rechteckiger Querschnitt

$$W_{zz} = 2 k^2 \rho (\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4) = - W_{xx}. \quad (19)$$

13. Symmetrische Antiklinale und Synklinale

$$W_{zz} = - 2 k^2 \rho \sin \alpha \left\{ \sin \alpha \ln \frac{r_1}{r_2} + \cos \alpha \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) \right\}. \quad (20)$$

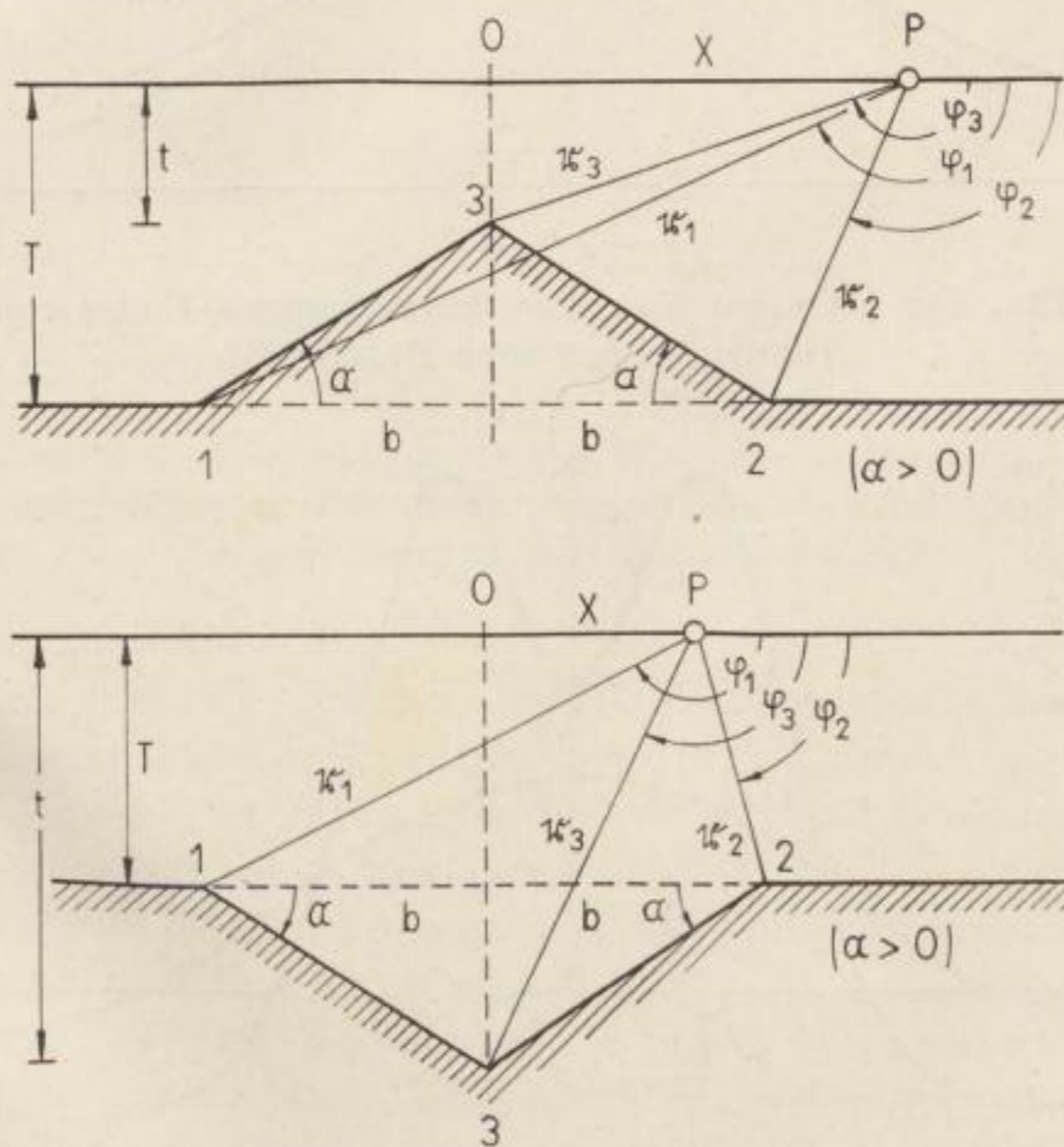


Bild 12.

3. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Prospektionsgeophysik und die Geodäsie

3.1. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die angewandte Geophysik

3.1.1. Die Rolle des gravimetrischen Vertikalgradienten bei der Festlegung lokaler Störmassen

Da die Wirkung eines Massenelements auf W_{zz} mit der dritten Potenz der Entfernung, diejenige auf W_z aber mit der zweiten Potenz abnimmt, drückt das W_{zz} -Bild in erster Linie die Wirkung der lokalen, in mittleren Tiefen gelegenen Massen aus, während im W_z -Bild die ausgedehnten, in größeren Tiefen gelegenen Massen zum Ausdruck kommen. Das Auflösungsvermögen einer W_{zz} -Messung ist damit größer als das der einfachen Schwerebestimmung. Das in den Bildern 13a und 13b dargestellte Beispiel unterstreicht diese Feststellung.

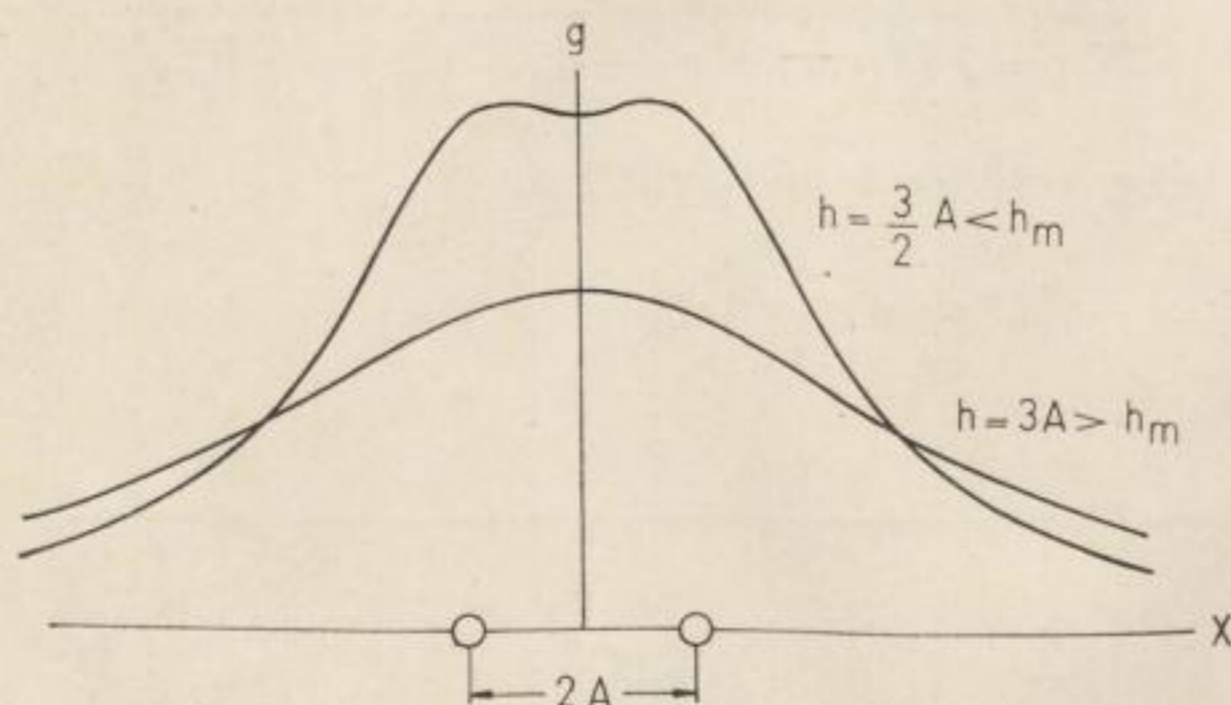


Bild 13a. Der g -Verlauf über zwei kugelförmigen Einlagerungen (umgezeichnet nach EVJEN [28])

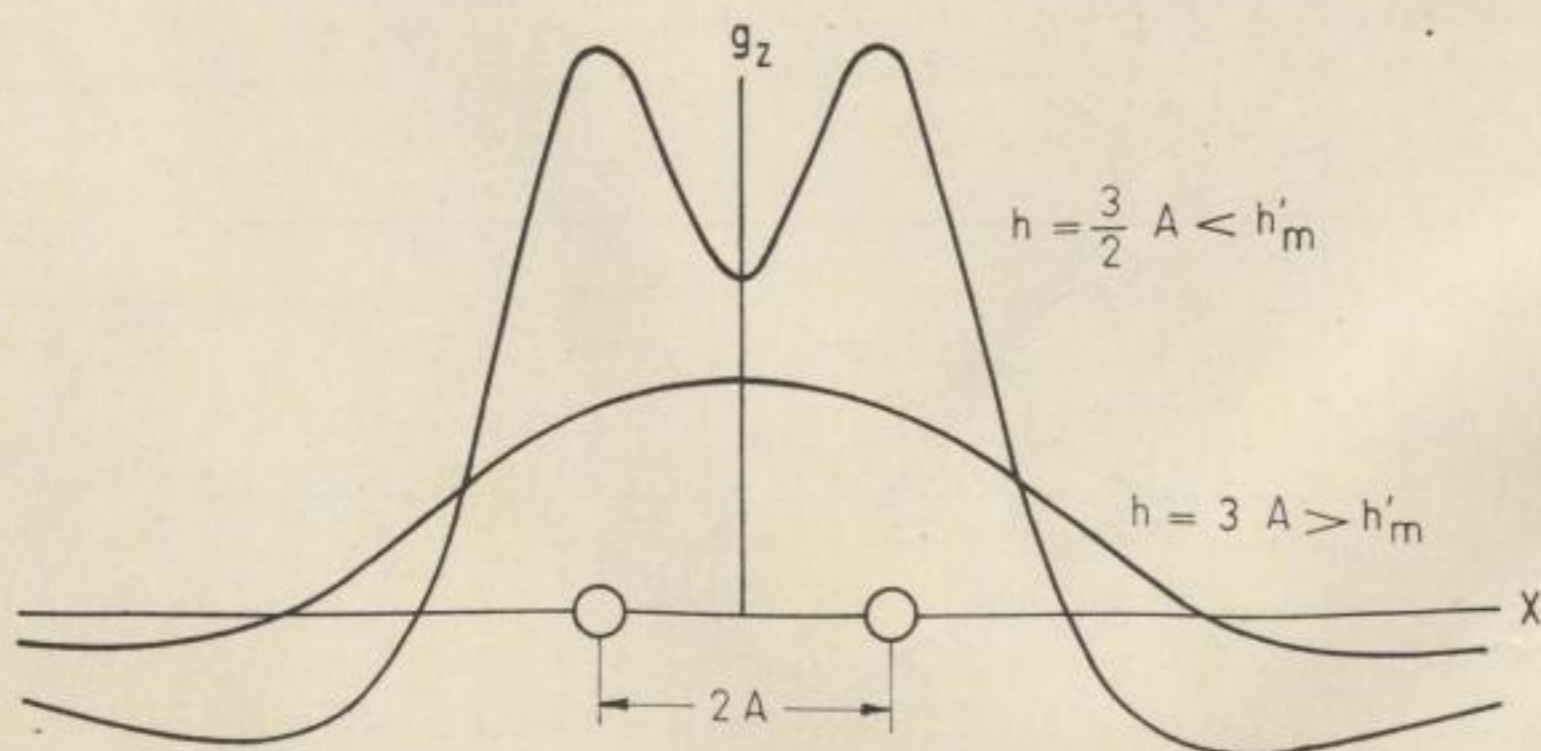


Bild 13b. Der g_z -Verlauf über zwei kugelförmigen Einlagerungen (umgezeichnet nach EVJEN [28])

Es wurden hier zwei kugelförmige Einlagerungen in der Mittelpunktstiefe h vorgegeben. Die Maxima der Kurven befinden sich in der Darstellung von g und g_z grundsätzlich senkrecht über der Mitte der Masseneinlagerungen.

Vergleicht man den Vertikalgradienten W_{zz} mit dem Krümmungswert W_{Δ} , so folgt nach Bild 14, daß die Krümmungswertkurve für langgestreckte Körper genau das Spiegelbild der Kurve des gravimetrischen Vertikalgradienten darstellt. Aus diesem Bild ist ebenfalls ersichtlich, daß der vertikale Schweregradient auch in großer Entfernung vom Störkörper noch merkliche Werte hat, was auf seine Beeinflussbarkeit durch Geländestörungen hinweist.

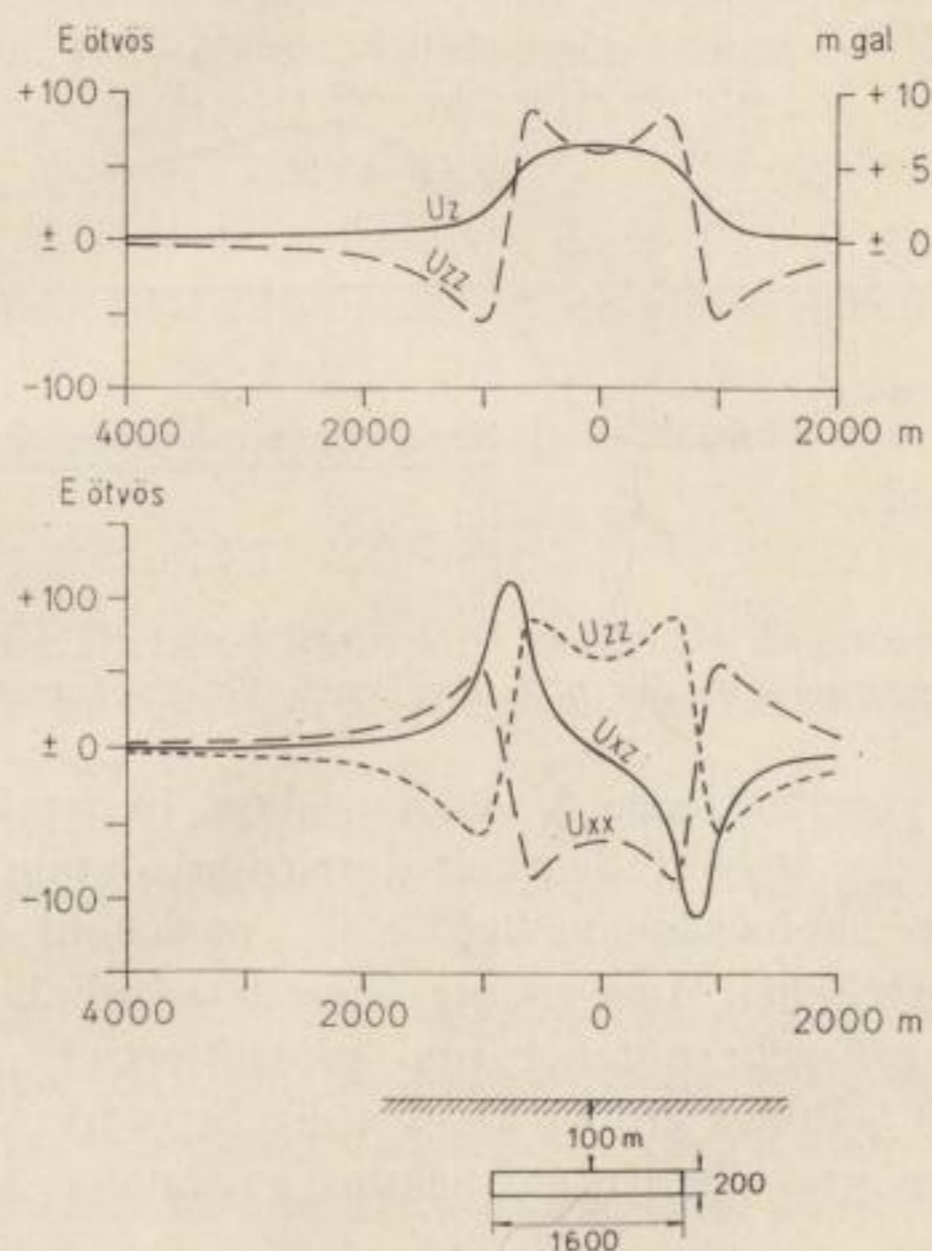


Bild 14. Der Verlauf der Drehwaagemeßgröße W_{xz} , der Krümmungsgröße W_{Δ} und des vertikalen Gradienten über einem langgestreckten Störkörper. ($U \equiv W$) (umgezeichnet nach SCHLEUSENER [94])

Die Frage nach der Begrenzung des Störkörperrandes läßt sich durch W_{xz} genauer beantworten als durch Verwendung von W_{zz} und W_{Δ} , weil das Maximum von W_{xz} diesem exakter zugeordnet ist als die Nullstellen von W_{zz} und W_{Δ} . Zudem zeigt sich, wie SCHLEUSENER [94] an Beispielen nachwies, daß mit zunehmender Tiefe des Störkörpers die Nullstellen des gravimetrischen Vertikalgradienten vom Körperrand wegwandern.

Nach HAALCK [37] soll der vertikale Gradient durchschnittlich doppelt so groß sein wie die horizontalen Meßgrößen der Drehwaage, was einer Messung große Vorteile brächte. Leider ist dies nur für günstige Störkörperteufen der Fall [94].

Die Kenntnis des gravimetrischen Vertikalgradienten gestattet unter Vorbehalt die Teufe des Störkörpers abzuschätzen. Nach EVJEN [28] ist die Teufe der Einlagerung gleich der Hälfte der Entfernung zwischen den Maxima der g_z -Kurve.

Die Kombination der Drehwaagen- mit den W_{zz} -Messungen erlaubt, Größe und Richtung des totalen Schweregradienten bzw. des totalen Störungsvektors darzustellen. Dadurch würde die Lage- und Teufenbestimmung von Störkörpern auf sichere Grundlage gestellt.

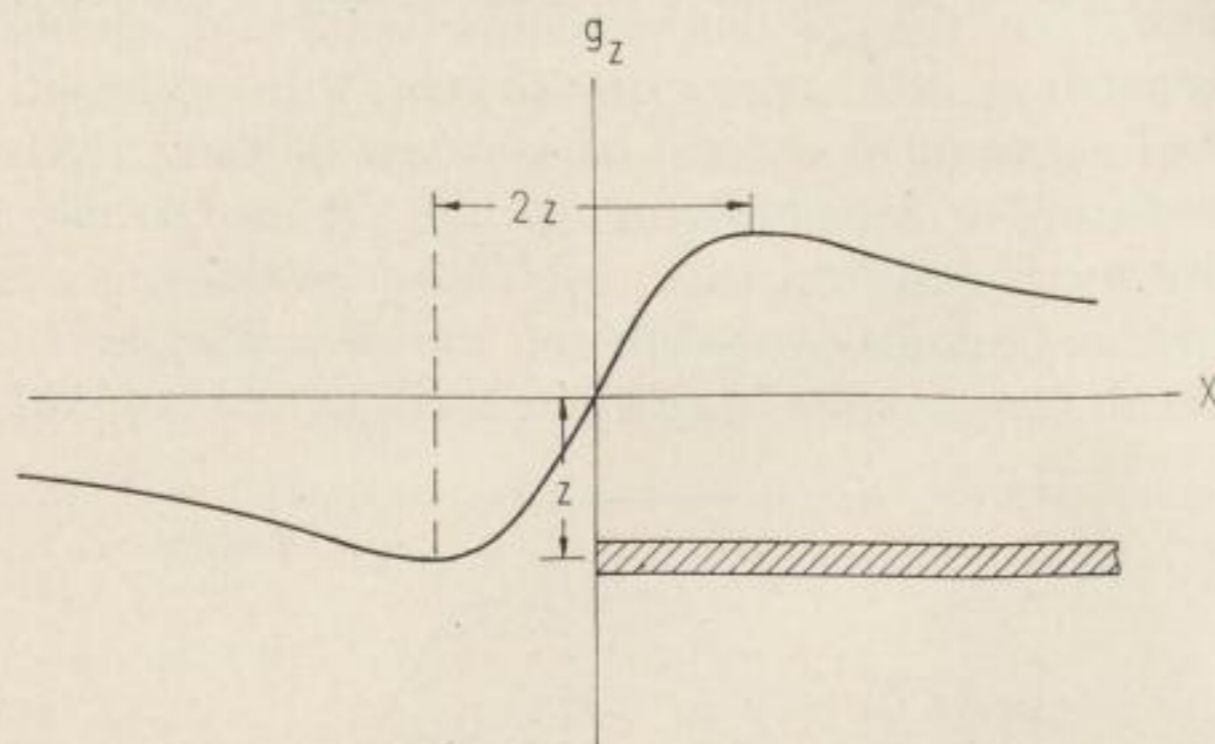


Bild 15. Teufenbestimmung aus der g_z -Kurve nach EVJEN (umgezeichnet nach [28])

Obwohl also der gravimetrische Vertikalgradient in der Frage der Störkörperbegrenzung und der Beeinflussbarkeit durch horizontale Massen zweifellos der Aussagekraft der Drehwaagenmeßgröße W_{xz} nachsteht, ist seine Verwendbarkeit zur gravimetrischen Auswertung besonders im Falle des Fehlens von Drehwaagenmessungen sehr nützlich und gerechtfertigt. Außerdem ist die Aussagekraft des W_{zz} -Bildes größer als die der Schwerkraft, da ein höheres Auflösungsvermögen und die Unterdrückung regionaler Anomalien erreicht wird.

3.1.2. Die Verwendung des gravimetrischen Vertikalgradienten zur Strukturermittlung

EVJEN [28] entwickelte ein Verfahren, das unter Verwendung des Vertikalgradienten Lage und Form solcher unterirdischer Masseneinlagerungen direkt zu berechnen gestattet, deren Dicke Δz im Verhältnis zur seitlichen Ausdehnung so gering ist, daß man diese in erster Näherung als Flächenbelegung auffassen kann. Die Schwerkraftwirkung g einer mit Masse belegten Fläche nimmt bei Annäherung an die Fläche den Wert

$$g = 2 \pi k^2 \sigma \quad (21)$$

an. Dabei bedeuten k^2 die Gravitationskonstante und σ die Flächendichte. Entsprechend gilt für eine flache in der Teufe t horizontal gelagerte Struktur der Dicke Δz und der Dichte ρ

$$g_t = 2 \pi k^2 \rho \Delta z. \quad (22)$$

g_t kann nicht direkt gemessen werden, deshalb wird die TAYLORreihe

$$g_t = g_0 + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot t + 1/2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \cdot t^2 + \dots \quad (23)$$

angesetzt.

In dieser Gleichung bedeutet g_0 die BOUGUERSCHWERE.

Die geraden höheren Ableitungen können nach

$$\frac{\partial^{2n} g}{\partial z^{2n}} = (-1)^n \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]^n g$$

berechnet werden, wenn g als Funktion von x und y vorliegt.

Um auch die ungeraden, höheren Ableitungen gemäß der Rechenvorschrift

$$\frac{\partial^{2n+1} g}{\partial z^{2n+1}} = (-1)^n \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]^n g_z$$

bestimmen zu können, ist die Kenntnis des gravimetrischen Vertikalgradienten notwendig.

Bei bekanntem g_t ist das Relief einer flachen Struktur mit

$$\Delta z = g_t / 2 \pi k^2 \rho \quad (24)$$

festgelegt. Über die Dichte ρ kann eine plausible Annahme gemacht werden. Wenn die Tiefe t nicht aus anderen geophysikalischen Messungen bekannt oder auf Grund geologischer Überlegungen erschließbar ist, so kann diese Unbekannte aus dem Konvergenzradius der Reihe (23) gefunden werden; die Struktur muß dann oberhalb einer Tiefe t_{\max} liegen, für die (23) aufhört, konvergent zu sein.

Die Problematik der Methode einer direkten Strukturberechnung nach EVJEN besteht darin, daß die Teufenermittlung aus dem Konvergenzradius unsicher ist, die Voraussetzung flacher Strukturen den Anwendungsbereich des Verfahrens einschränkt und die Gültigkeit der Berechnungsergebnisse infolge der in die Rechnung eingehenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler in g herabsetzt.

3.1.3. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für eine genaue Freiluftreduktion

Soll aus einem gemessenen Schwerewert die Schwere in einem benachbarten Punkt derselben Lotlinie hergeleitet werden, so muß der Wert des gravimetrischen Vertikalgradienten vorliegen. In der Praxis bedeutet dies die Überführung des Meßwertes aus der Stationsebene in die Reduktionsebene (allgemein das Geoid), wobei die zwischen beiden Ebenen liegenden Massen unberücksichtigt bleiben (Freiluftkorrektur):

$$g_0 = g \left(1 + \frac{2h}{R} \right) = g + 0,3086h - 0,00072h^2. \quad (25)$$

Dabei bedeuten:

R — mittlerer Erdradius

h — Höhe des Meßpunktes über der Reduktionsebene

g — gemessener Schwerewert

g_0 — auf die Reduktionsebene bezogener Schwerewert

Das quadratische Glied kann allgemein vernachlässigt werden.

Da mit den modernen Gravimetern Δg immerhin auf $\pm 0,01$ mGal genau gemessen werden kann, führt eine Niveaureduktion unter Verwendung des Normalwertes des Vertikalgradienten zu merklichen Fehlern. Es kommt ein Fehler von ± 1 mGal zustande, wenn der gestörte gravimetrische Vertikalgradient in der Größenordnung von 100 E liegt und die Reduktionshöhe 100 m beträgt.

Aus diesem Grunde ist es angebracht, bei der Freiluftreduktion die Formel

$$g_0 = g + (0,3086 \pm g_z \cdot 10^{-4}) h \quad (26)$$

anzuwenden. Dabei werden g_z in [E] und h in [m] eingesetzt.

Die Ansicht ALFANOS [4], den für eine exakte Freiluftkorrektur notwendigen gestörten Vertikalgradienten nicht durch die direkte Messung, sondern durch Berechnung aus der BOUGUERKarte herzuleiten, kann nicht unterstützt werden. Die Rechnung gestattet zwar, den Wert des Vertikalgradienten in irgendeiner Entfernung vom Meßniveau zu berechnen, umgeht aber in keinem Falle den störenden Einfluß des Geländereiefs auf den Wert des gravimetrischen Vertikalgradienten, da dieser Effekt auch in der BOUGUERKarte enthalten ist. Fehler, die durch eine unsichere Dichte bei der Gelände- und BOUGUERKorrektur entstehen, kommen noch hinzu. Außerdem würde der Rechenaufwand sehr groß sein.

3.1.4. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Dichtebestimmung aus Schachtgravimetermessungen

Die Reduktion gemessener Schwerewerte und die Berechnung der Schwerewirkung gegebener Masseninhomogenitäten erfordert die genaue Kenntnis der Dichte des anstehenden Gesteins. Es sind deshalb Methoden (Nettletonverfahren, vertikale Schwereprofile, Drehwaagemessungen unter Tage) entwickelt worden, die die Dichte im anstehenden Gestein zu bestimmen gestatten. Der Methode der vertikalen Schwereprofile kommt dabei eine besondere Bedeutung zu, da sie eine wesentliche Genauigkeitssteigerung in der Dichtebestimmung erlaubt.

Die mittlere Dichte einer Gesteinsplatte zwischen zwei Meßpunkten kann aus der Schwereänderung Δg im Teufenintervall Δt nach der Formel

$$\sigma = \frac{\frac{2 g_0}{R} - \frac{\Delta g}{T}}{4 \pi k} \quad (27)$$

berechnet werden. Für den Ausdruck $\frac{2g_0}{R}$ setzt man allgemein den ungestörten gravimetrischen Normalgradienten und begeht damit einen bedeutenden Fehler, da der Normalgradient bekanntlich um einige 100 E durch Masseninhomogenitäten gestört sein kann. RISCHE [88] und BREMER [18] wiesen nach, daß eine gravimetrische Dichtebestimmung auf $\pm 0,01 \text{ g/cm}^3$ die Kenntnis des gravimetrischen Vertikalgradienten auf 10 E verlangt. Die aus der BOUGUERKarte berechneten gestörten Vertikalgradienten können nur unter Vorbehalt benutzt werden, da sie für einen Punkt an der Oberfläche gelten, jedoch g_z sich mit der Entfernung vom Störkörper ändert und sogar sein Vorzeichen beim Durchteufen des Störkörpers ändern kann. Diese Faktoren können jedoch durch die „Methoden der analytischen Feldfortsetzung“ berücksichtigt werden. Leider steckt aber bereits in der BOUGUERKarte die Dichteunsicherheit.

Die Messung des gestörten Vertikalgradienten in Schächten und Bohrungen würde die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der gravimetrischen Dichtebestimmung wesentlich erhöhen.

3.1.5. Die Berechnung der Schwerestörung aus gemessenen Werten des gravimetrischen Vertikalgradienten

Es wurde bereits auf den Umstand hingewiesen, daß eine Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten bevorzugt in beschleunigten Systemen vorgenommen werden kann. Um eine zusätzliche Auswertegröße zu erhalten, liegt es nahe, geeignete Methoden zu entwickeln, um die Schwerestörung g aus den gemessenen Werten des Vertikalgradienten zu berechnen. Auf der Basis der bekannten Berechnungsverfahren für höhere Potentialableitungen von PETERS und EVJEN schlägt PATERSON [82] ein Integrationsverfahren speziell für vom Flugzeug aus bestimmte g_z -Werte vor.

Legt man das in Bild 16 dargestellte Koordinatensystem den Betrachtungen zugrunde, so kann nach PETERS für den gravimetrischen Vertikalgradienten

$$g_z(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_z(\alpha, \beta, 0) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (28)$$

im Bereich $z \leq 0$ geschrieben werden.

Die Integration über z ergibt

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_z(\alpha, \beta, 0) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2]^{1/2}} \quad (29)$$

Da $g_z(\alpha, \beta, 0)$ keine bekannte mathematische Funktion ist, muß dieses Integral numerisch ausgewertet werden.

Mit

$$\alpha - x = r \cos \Theta, \quad \beta - y = r \sin \Theta$$

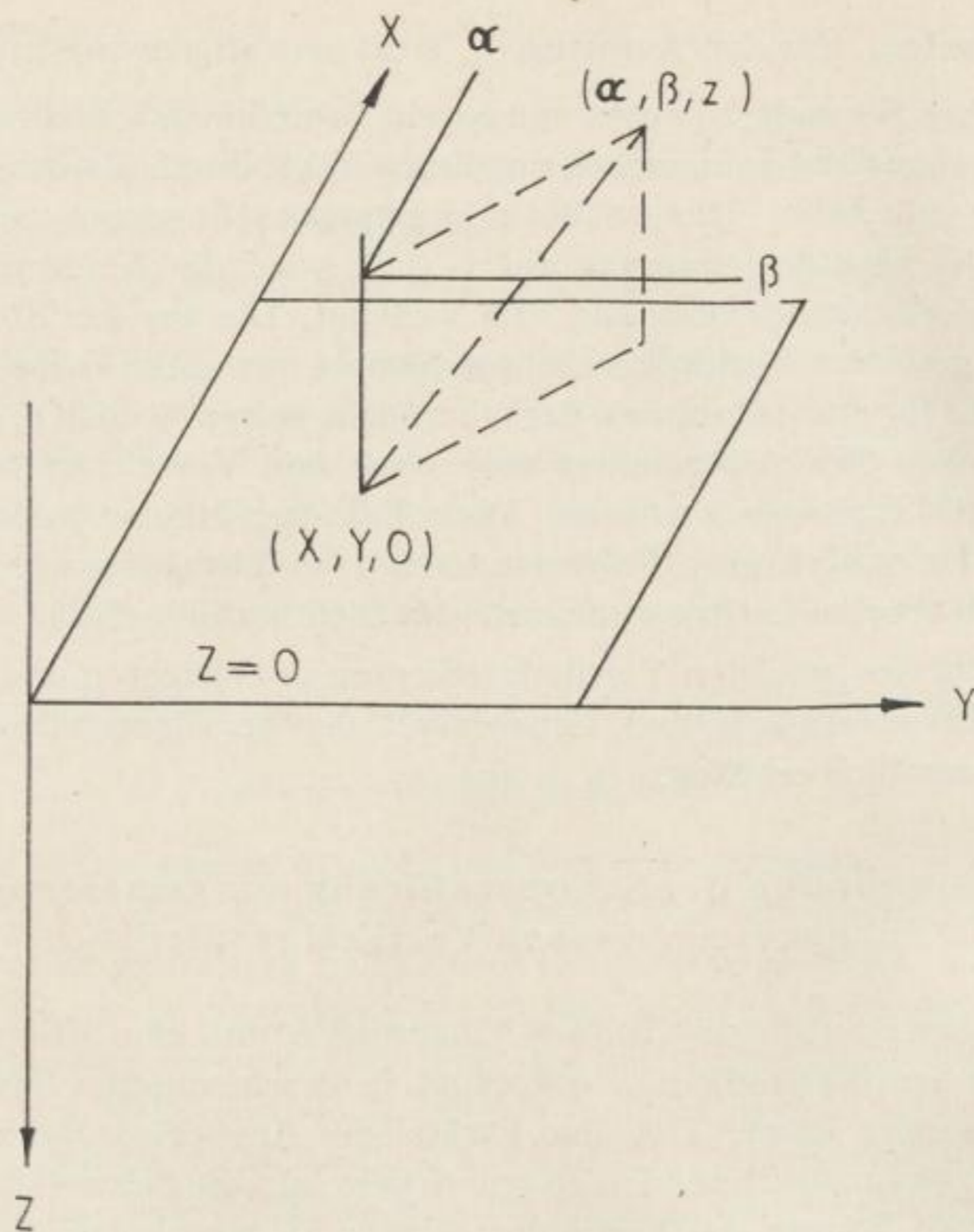


Bild 16. Das Koordinatensystem für das Integrationsverfahren nach Paterson (umgezeichnet nach [82])

und

$$\bar{g}_z(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_z(r, \Theta) d\Theta$$

bekommt man

$$g(x, y, z) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{g}_z(r) dr}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \quad (30)$$

z wird $-h$ gesetzt und Gleichung (30) in Summen dargestellt:

$$g(x, y, -h) = \frac{\bar{g}_z(0) + \bar{g}_z(b_1)}{2} \int_0^{b_1} \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{\bar{g}_z(b_1) + \bar{g}_z(b_2)}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{1/2}} + \dots \quad (31)$$

Die Integration liefert

$$g(x, y, -h) = - \sum_0^{\infty} C_n g_z(b_n) \quad (32)$$

mit

$$C_n = 1/2 [(h^2 + b_{n+1}^2)^{1/2} - (h^2 + b_{n-1}^2)^{1/2}]$$

und

$$b_0 = b_{-1} = 0.$$

Gleichung (32) gestattet, die Schwerestörung g auf einer Ebene $z = -h$ zu berechnen, wenn der gravimetrische Vertikalgradient auf der Ebene $z = 0$ vorgegeben ist.

Für die praktische Arbeit wird ein Auswertnetz benutzt, das mit dem von PETERS bis auf den Radius b_4 übereinstimmt.

Es gilt dann für den Spezialfall $z = 0$:

$$g(x, y, 0) = -S[0,500 g_z(0) + 0,707 g_z(1) + 0,618 g_z(\sqrt{2}) + 0,812 g_z(\sqrt{5}) + 0,943 g_z(\sqrt{9,23}) + 1,396 g_z(\sqrt{17}) + 1,746 g_z(\sqrt{34})] \cdot (33)$$

Die Verwendung des Verfahrens wurde an synthetischen Beispielen erprobt [82]. So wurde u. a. eine kugelförmige Einlagerung vom Radius $R = 305$ m und der Dichte $\rho = 1$ g/cm³ in der Teufe 610 m vorgegeben.

Zunächst wurde nach den Formeln

$$g = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 k^2 \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad (34)$$

die Schwerewirkung und nach

$$g_z = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 k^2 \left[\frac{1}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right] \left[1 - \frac{3h^2}{(x^2 + h^2)} \right] \quad (35)$$

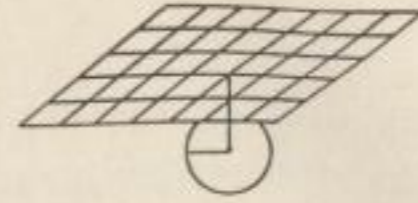
der gravimetrische Vertikalgradient unter Verwendung einer elektronischen Rechenmaschine berechnet. Danach wurde das Integrationsverfahren auf das g_z -Bild angewendet und die erhaltenen Werte mit den ursprünglich nach (34) berechneten verglichen. Zu diesem Zwecke wurde Gleichung (33) benutzt, diese aber nach dem 5. Glied abgebrochen. Der Gitterabstand S betrug 305 m.

Man stellt zunächst gute Übereinstimmungen zwischen den Bildern 17a und 17c fest. Kleine Unterschiede im Zentrum der Anomalie sind darauf zurückzuführen, daß nur die ersten fünf Glieder in Gleichung (33) verwendet wurden. Da außerdem das Feld außerhalb des siebenten Netzstreifens vernachlässigt wurde, ergeben sich auch kleine Ungenauigkeiten am Rand der Anomalie.

Bei komplizierten Masseneinlagerungen treten allgemein merkliche Amplitudendifferenzen und Verzerrungen der Anomalie auf. Die Integration müßte dann über mehr als sieben Kreise erstreckt werden.

Gelingt es, den gravimetrischen Vertikalgradienten auf $\pm 0,3$ E zu messen, dann sind die nach dem Integrationsverfahren von PATERSON gewonnenen g -Werte mit einem Fehler in der Größenordnung $\pm 0,1$ mGal behaftet. Leider

wird sich weder eine Gradientenmessung mit einer Genauigkeit von $\pm 0,3 \text{ E}$ noch eine Schweremessung im bewegten System auf $\pm 0,1 \text{ mGal}$ in nächster Zukunft praktisch verwirklichen lassen. Dennoch erweitert die hier besprochene Methode den Anwendungsbereich einer direkten Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten.



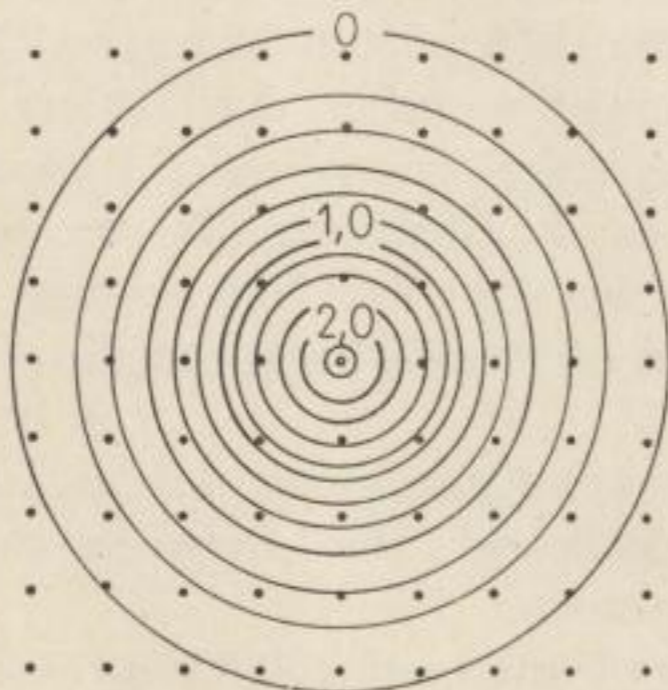
Gitterabstand: 305 m
Kugelradius: 305 m
Mittelpunktteufe: 610 m
Dichteunterschied: 1 g cm^{-3}

a) SCHWERKRAFT g [mGal]
Isolinienabstand: 0,2 mGal



b) VERTIKALER
SCHWEREGRADIENT $\frac{\partial g}{\partial z}$ [E]

Isolinienabstand: 32,8 E



c) SCHWERKRAFT g (berechnet)
Isolinienabstand: 0,2 mGal

Bild 17. Die Anwendung des Verfahrens nach PATERSON auf das Schwerebild einer kugelförmigen Einlagerung (umgezeichnet nach [82])

3.2. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die Geodäsie

Der gravimetrische Vertikalgradient hat auch für die Geodäsie eine große Bedeutung. Er wird zur Niveaureduktion der Schwerewerte gebraucht und liefert Aufschlüsse über die bei der Schwerekorrektion des geometrischen Nivellements auftretenden dynamischen Korrekturen. g_z kann weiter in Verbindung mit anderen Feldgrößen zur vollständigen geometrischen Bestimmung der Niveauflächen in der Umgebung der Beobachtungsstationen herangezogen werden.

Nach BODEMÜLLER [16] gilt für die mittlere Krümmung $2H$ der Niveauflächen, die Orthogonalflächen der Feldlinien (Lotlinien) darstellen, der Ausdruck

$$2H = \operatorname{div} \mathfrak{t} = \nabla \frac{1}{g} \cdot \nabla W = \frac{1}{g} (-\mathfrak{t} \cdot \nabla g + \Delta W). \quad (36)$$

\mathfrak{t} ist der Einheitstangentenvektor der Feldlinien: $\mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{G}}{g}$.

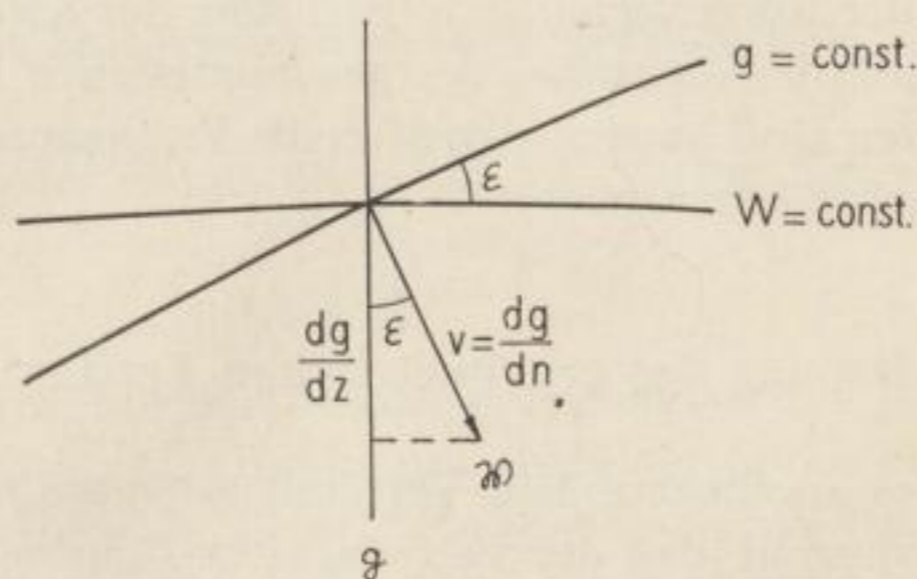


Bild 18. Zur Ableitung von Formel (38) (umgezeichnet nach BODEMÜLLER [16])

Aus Bild 18 folgt

$$\mathfrak{t} \cdot \nabla g = \frac{\mathfrak{G}}{g} \cdot \mathfrak{z} = \frac{dg}{dn} \cos \varepsilon = \frac{dg}{dz}.$$

Jetzt kann man für (36)

$$2H = \frac{1}{g} \left(-\frac{dg}{dz} + 2\omega^2 - 4\pi k^2 \varrho \right) \quad (37)$$

schreiben, da die erweiterte Poisson'sche Gleichung

$$W = 2\omega^2 - 4\pi k^2 \varrho$$

für das Potential der Schwerkraft g gilt.

Dabei bedeuten:

k^2 — Gravitationskonstante

ϱ — Massendichte

ω — Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

Gemäß Definition ist die mittlere Krümmung $2H$ der Niveauläche gleich der Summe der beiden in den aufeinander senkrechtstehenden Hauptkrümmungsrichtungen gegebenen maximalen und minimalen Normalschnittkrümmungen $1/R_1$ und $1/R_2$, womit man aus (37)

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{g} \left(-\frac{dg}{dz} + 2\omega^2 - 4\pi k^2 \rho \right) \quad (38)$$

erhält.

Sind die Drehwaagemessgrößen W_{xz} , W_{yz} , $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$ und W_{xy} bekannt, dann können aus der Krümmungsgröße

$$R = g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \sqrt{W_{\Delta}^2 + 4W_{xy}^2}$$

und Gleichung (38) die Krümmungsradien R_1 und R_2 bestimmt werden. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin 2\lambda &= -\frac{2W_{xy}}{R} \\ \cos 2\lambda &= -\frac{W_{\Delta}}{R} \end{aligned}$$

liefern die Azimute der Normalschnitte in Richtung der Krümmungslinien. Somit ist gezeigt, daß die Kenntnisse des gravimetrischen Vertikalgradienten in Verbindung mit den Drehwaagemessgrößen die Festlegung der Krümmungsverhältnisse der Niveaulächen gestattet.

4. Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten

Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für Geophysik und Geodäsie und der Umstand, daß der Bau eines zur Routinearbeit im Gelände geeigneten Meßinstrumentes noch nicht gelungen ist, hat verschiedene Autoren veranlaßt, Verfahren zur Berechnung dieser Größe aus Drehwaagemessergebnissen, aus den an der Erdoberfläche vorliegenden diskreten Schwerewerten oder aus der zweiten Ableitung der Schwere zu entwickeln. Allen Betrachtungen liegt dabei die Voraussetzung zugrunde, daß im Außenraum der gewählten Randfläche $\Delta W = 0$ ist; d. h., daß alle in Betracht kommenden Massen von dieser eingeschlossen werden. Die einzelnen Gebrauchsformeln unterschieden sich im Grad der Annäherung, in ihrer Fehlerempfindlichkeit, die auf das Gewicht des Zentralpunktes zurückzuführen ist, im Fehler der Koeffizienten und in der Form der Auswerteschablonen.

4.1. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus Drehwaagemessgrößen

4.1.1. Das Verfahren nach EÖTVÖS

Die Form der Niveaulächen ist durch die Größen

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

bestimmt, von denen sich nur

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

mit Hilfe der Drehwaage bestimmen lassen. Unter Zuhilfenahme geodätischer Messungen entwickelte Eötvös [27] ein Verfahren, um den gravimetrischen Vertikalgradienten aus Drehwaagemessgrößen berechnen zu können.

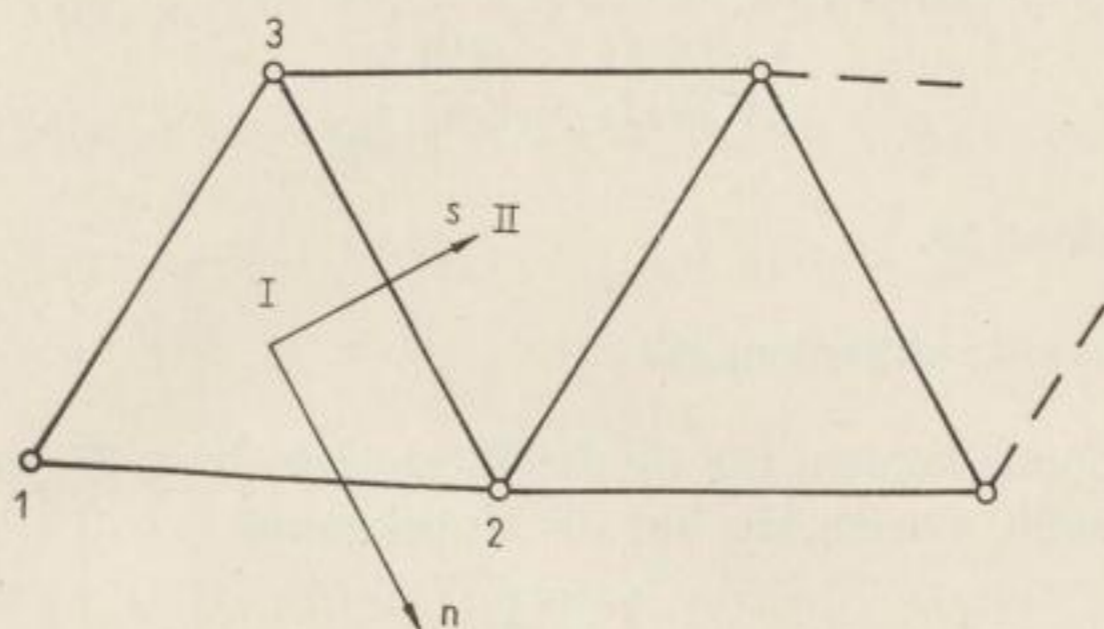


Bild 19. Das Beobachtungsschema (umgezeichnet nach Eötvös [27])

Beobachtet wird in den Eckpunkten 1, 2, 3, . . . einer Zickzacklinie. Die Werte

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$

werden durch lineare Interpolation aus den Punktwerten 1, 2, 3 für den Punkt I usw. berechnet, wo I, II . . . nahe der Mitte der durch die Beobachtungsstationen gebildeten Dreiecke liegen. Zwischen je zwei Punkten, wie I und II, wird ein ebenes Koordinatensystem s, n derart eingeführt, daß s in Richtung I II und n senkrecht dazu orientiert sind.

Es gilt

$$\int_I^{II} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right) ds = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \right)_I$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 2 \omega^2$$

bekommt man

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_I &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)_{II} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} \right)_I \\ &\quad - 2 \int_I^{II} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right) ds . \end{aligned} \quad (39)$$

Die im Koordinatensystem n, s gültigen Werte erhält man mit Hilfe der entsprechenden Transformationsgleichungen aus den für ein meridional gelegenes System gültigen, wobei die Richtungen s und n und die Koordinaten der Punkte

der Karte entnommen werden. Die Werte

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \right)$$

bestimmt man aus den Differenzen der Werte in den Eckpunkten der betreffenden Dreiecke und den Koordinaten n dieser Punkte.

Für jeden Punkt N , der mit dem Anfangspunkt I durch eine Anzahl von Zwischenpunkten verbunden ist, kann man die Differenz

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_N - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_I$$

berechnen.

In solchen Punkten ist

$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ bekannt; außerdem gilt

$\Delta W = 2 \infty^2$. Somit können für sie die Werte von W_{xx} , W_{yy} und W_{zz} durch Formeln dargestellt werden, die nur die Unbekannte

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_I$$

enthalten.

Für die Polhöhdifferenz zwischen zwei Punkten gilt

$$\mu_N - \mu_A = \frac{1}{g} \left[\int_I^N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + \int_I^N \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy \right]. \quad (40)$$

Während die rechte Seite dieser Gleichung lediglich die Unbekannte $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_I$ enthält, kann die linke Seite durch astronomische Beobachtungen bestimmt werden.

4.1.2. Das Verfahren nach HAALCK [42]

Für den Potentialunterschied zwischen zwei benachbarten Punkten $P(x, y)$ und $P(x_0, y_0)$ in der $x - y$ - Ebene gilt

$$W = W_0 + W_x(x - x_0) + W_y(y - y_0) + \text{Gl. h. 0.}, \quad (41)$$

woraus durch Differentiation die zweite Ableitung folgt:

$$W_{zz} = (W_{zz})_0 + W_{zzx}(x - x_0) + W_{zzy}(y - y_0) + \text{Gl. h. 0.} \quad (42)$$

$(W_{zz})_0$ ist ein im betrachteten Gebiet konstanter Anteil.

Benutzt man die in Bild 20 dargestellte Punktanordnung, dann ergibt sich für die Mittelpunkte der einzelnen Quadrate durch sukzessives Fortschreiten der gravimetrische Vertikalgradient

für das Längsprofil A zu

$$(W_{zz})_v = \frac{d}{2} W_{zzx} \{ (A_1 + A_2) + A_2 + A_3 + \dots + (A_{v-1} + A_v) \} \quad (43a)$$

usw.,

für das Horizontalprofil 1 zu

$$(W_{zz})_v = \frac{d}{2} W_{zz} \{(A_1 + B_1) + (B_1 + C_1) + \dots + [v - 1]_1 + \gamma_1\} \quad (43b)$$

usw..

Die Größen W_{zzx} und W_{zzy} gewinnt man unter Verwendung des gleichen Auswertenetzes aus der W_{Δ} - und 2 W_{xy} -Isanomalkarte:

$$W_{zzy} = \frac{1}{2d} \{W_{\Delta} [(a_2 + b_2) - (b_1 + a_1)] + 2 W_{xy} [(a_1 + a_2) - (b_2 + b_1)]\}, \quad (44)$$

$$W_{zzx} = \frac{1}{2d} \{W_{\Delta} [(a_1 + a_2 - (a_2 + b_1))] + 2 W_{xy} [a_1 + b_1 - (a_2 + b_1)]\}. \quad (45)$$

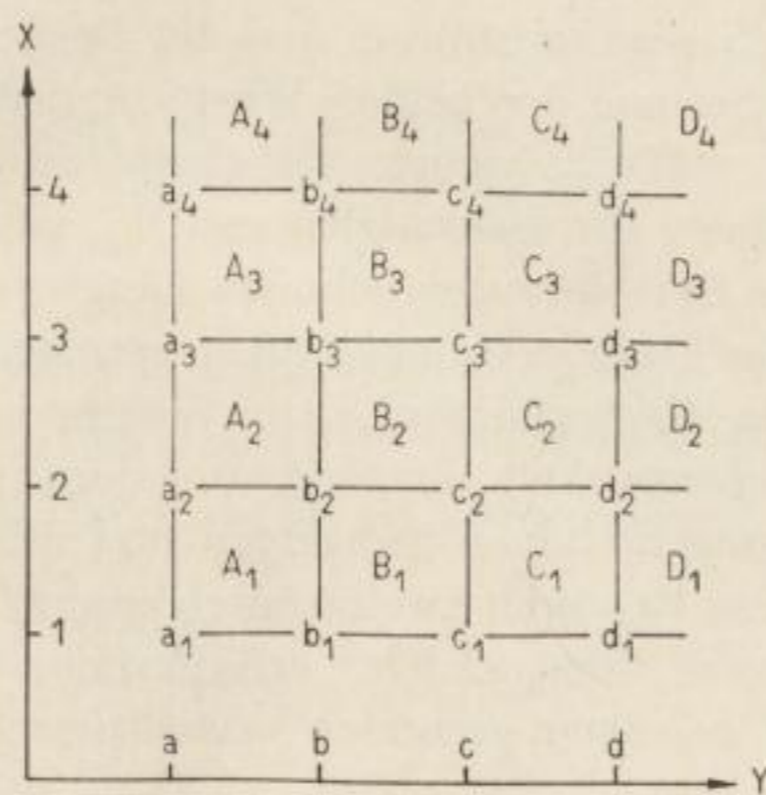


Bild 20. Bezeichnungen der Punktanordnungen nach HAALCK (umgezeichnet nach [42])
 d = Abstand der Quer- und Längsprofile. a_i, b_i = Eckpunkte der Quadratfelder
 A_i, B_i = Mittelpunkte der einzelnen Felder

Ein Vergleich der erhaltenen Ergebnisse ist nur möglich, wenn alle Berechnungsprofile auf gleiches Niveau gebracht werden. Um das Vertikalprofil b auf das Niveau des Profils a zu bringen, müssen seine Werte um den konstanten Betrag C_{a-b} gehoben werden, der als mittlerer Unterschied aus der Gesamtheit der horizontalen Querverbindungen ermittelt wird:

$$C_{a-b} = \frac{1}{n} \left\{ W_{zz} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - W_{zz} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + \frac{d}{2} W_{zzy} [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)] \right\}. \quad (46)$$

n bedeutet die jeweilige Anzahl von Querverbindungen.

Es gelten somit für die einzelnen vertikalen Berechnungsreihen die Niveaukonstanten

$$\begin{aligned} C_b &= C_{a-b} \\ C_c &= C_b + C_{b-c} \\ C_d &= C_c + C_{c-d} \end{aligned} \quad (47)$$

usw.

Analog bekommt man für die Niveaunkonstanten der Horizontalprofile

$$C_{1-2} = \frac{1}{n} \left\{ W_{zz} [(a_1 + b_1 + \dots) - (a_2 + b_2 + \dots)] + \frac{d}{2} W_{zzx} [(a_1 + b_1 + \dots) + (a_2 + b_2 + \dots)] \right\}. \quad (48)$$

usw.
und

$$\begin{aligned} C_2 &= C_{1-2} \\ C_3 &= C_2 + C_{2-3} \\ C_4 &= C_3 + C_{3-4} \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (49)$$

Nach Anbringung der Niveaunkonstanten und der Berücksichtigung des Basiswertes \bar{W}_{zz} ergibt die Summe der beiden Werte für jeden Berechnungspunkt den endgültigen Wert von W_{zz} , bezogen auf einen für das Meßgebiet gültigen Mittelwert. Die Zeichnung der Isanomalen von W_{zz} ist jetzt möglich.

Die Genauigkeit der Berechnungsergebnisse hängt von der Sicherheit, mit der die Isanomalen der Drehwaagemeßgrößen gezogen werden können, und von der Genauigkeit der Rechenmethode ab. Während der erste Anteil durch die instrumentelle Meßgenauigkeit, der Erfassung der topographischen Korrekturen, den lokalen unregelmäßigen Störungen und der Dichte des Stationsnetzes bestimmt wird, so kann der zweite durch engere Gestaltung des Profilvernetzes beliebig gesteigert werden. Der erforderliche Arbeitsaufwand steht jedoch schon sehr bald in keinem gesunden Verhältnis zum praktischen Nutzen der Ergebnisse mehr.

4.2. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus W_{zzz}

Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus den vorgegebenen Werten $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ nach ACKERMANN und DIX [1] erfolgt in Anlehnung an das Neumannsche Problem der Potentialtheorie.

Für das Potential $W(P)$ im Punkte P oberhalb einer mit der Flächendichte $\sigma(Q)$ belegten Ebene gilt

$$W(P) = \int_B \frac{\sigma(Q) dA(Q)}{r_{QP}} \quad (50)$$

mit $dA(Q)$ als dem Flächenelement, das den Punkt Q enthält, und r_{QP} als dem Abstand der Punkte Q und P .

Da im Grenzfall

$$\sigma(Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial W(Q)}{\partial z}$$

gilt, erhält man die Lösung des NEUMANNschen Problems für die Ebene darstellende Gleichung

$$W(P) = \frac{1}{2\pi} \int_B \frac{\partial W(Q)/\partial z}{r_{QP}} dA(Q). \quad (51)$$

Da $g(P)$ und auch $\frac{\partial g(P)}{\partial z}$ die LAPLACESche Gleichung erfüllen, folgt daraus

$$\frac{\partial g(P)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial^2 g(Q)/\partial z^2}{r_{QP}} dA(Q). \quad (52)$$

Die der Formel hinzuzufügende additive Konstante ist dadurch festgelegt, daß für $z \rightarrow -\infty$ $W(P)$ und $\frac{\partial g(P)}{\partial z} \rightarrow 0$ verlangt wird.

In Zylinderkoordinaten ergibt sich für den Fall $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} &= \int_0^\infty \frac{\partial^2 g(\bar{r}, 0)}{\partial z^2} dr \\ \frac{\partial^2 g(\bar{r}, 0)}{\partial z^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g(r, 0, \Theta)}{\partial z^2} d\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

mit

4.3. Die Darstellung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe von FOURIERreihen

Das Schwerpotential ΔW kann als zweidimensionale *Fourierreihe*

$$\Delta W(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{nm}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{\cos n \omega_1 x}{\sin n \omega_1 x} \cdot \frac{\cos m \omega_2 y}{\sin m \omega_2 y} \cdot e^{\sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} z} \quad (54)$$

dargestellt werden.

Daraus folgt durch Differentiation

$$W_{zz} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} g_{nm} \frac{\cos n \omega_1 x}{\sin n \omega_1 x} \frac{\cos m \omega_2 y}{\sin m \omega_2 y} \cdot e^{\sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} z}. \quad (55)$$

Ist die horizontale Schwereverteilung in der Form

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{nm} \frac{\cos n \omega_1 x}{\sin n \omega_1 x} \frac{\cos m \omega_2 y}{\sin m \omega_2 y} e^{\sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2} z}$$

vorgegeben, dann kann der gravimetrische Vertikalgradient nach Gleichung (55) berechnet werden. Anwendungen dieses direkten Auswerteverfahrens stammen von Tsuboi und Koat [110].

Die Darstellung des Schwereprofils mit Hilfe periodischer Funktionen entspricht auch bei der Wahl einer langen Grundperiode nicht der Wirklichkeit. Deshalb geht man zur Darstellung mit FOURIERintegralen über (RIKITAKE [87]).

4.4. Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten aus dem Schwerebild

4.4.1. Übersicht über die Verfahren

Größte praktische Bedeutung haben alle diejenigen Berechnungsverfahren erlangt, die die in der Ebene $z = 0$ vorgegebenen diskreten Schwerewerte als Ausgang einer Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten nehmen.

Den Anlaß zur Ausarbeitung einer ganzen Anzahl von Gebrauchsformeln durch verschiedene Autoren gab die grundlegende Veröffentlichung von EVJEN [28], der von der Formel

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_B \int \frac{g(r, \alpha) z r dr d\alpha}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (56)$$

die die Lösung der 2. Randwertaufgabe für die Ebene darstellt, ausgeht. Durch Differentiation nach z ergibt sich nach einem Grenzübergang für die Störung des normalen Vertikalgradienten an der Randfläche

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{g_0}{R} - \int_R^\infty \frac{\bar{g}(r) dr}{r^2}, \quad (57)$$

wo

$$\bar{g}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r, \alpha) d\alpha \quad (58)$$

den Mittelwert der Schwerewerte $g(r, \alpha)$ auf einem Kreis vom Radius r um den Aufpunkt P' und R den Radius eines kleinen Kreises mit P' , in dessen Inneren $\bar{g} = g_0 = \text{const}$ angenommen werden kann, bedeuten.

Auf der gleichen Grundkonzeption, aber unter Berücksichtigung des gesamten Schwerefeldes der Erde, leitet HOFFMANN [53] für die als eben angesehene Erdoberfläche die Gleichung

$$\Delta \frac{\partial g}{\partial z} = + \frac{7}{2} \frac{\Delta g_0}{R^*} + \frac{\Delta g_0}{R} - \int_R^\infty \frac{\Delta \bar{g}(r)}{r^2} \quad (59)$$

her, die, abgesehen vom ersten Glied, das für die geophysikalische Praxis keine Bedeutung hat, mit Formel (57) genau übereinstimmt. Als Rechenformel ergibt sich hieraus

$$\Delta \frac{\partial g}{\partial z} = + \frac{7}{2} \frac{\Delta g_0}{R^*} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{\Delta g_{i+1}} - \overline{\Delta g_i}}{r_i + 1}. \quad (60)$$

Es empfiehlt sich, die an der Isanomalienkarte abgeleiteten $\overline{\Delta g}$ -Werte zu benutzen, indem man die Differenzen aufeinanderfolgender Werte $\overline{\Delta g}$ mit den durch das benutzte Integrationsnetz festliegenden Werten $1/r$ multipliziert. Eine Fehlerbetrachtung verlangt, das erste Intervall möglichst groß zu machen.

Das Verfahren von BARANOV [11] basiert ebenfalls auf den Überlegungen von EVJEN. $\overline{\Delta g}(r)$ wird in den Intervallen

$$0 - s - s\sqrt{2} - s\sqrt{5} - s\sqrt{10} - s\sqrt{17} - s\sqrt{25} - s\sqrt{40} - s\sqrt{68} - s\sqrt{100}$$

durch biquadratische Parabeln

$$\overline{\Delta g}(r) = \sum_i a_i + b_i r^2 + c_i r^4$$

und im Bereich $10 - \infty$ wegen der Beschränkung der Funktion im Unendlichen durch

$$\bar{g}_{10}(r) = a_{10} + \frac{b_{10}}{r}$$

dargestellt. Für die praktische Verwendung lautet die Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{s} & [2,30518 \bar{\Delta}g(0) - 1,70975 \bar{\Delta}g(s), \\ & - 0,05284 \bar{\Delta}g(s\sqrt{2}) - 0,17401 \bar{\Delta}g(s\sqrt{5}) \\ & - 0,09577 \bar{\Delta}g(s\sqrt{10}) - 0,05249 \bar{\Delta}g(s\sqrt{17}) \\ & - 0,04174 \bar{\Delta}g(5 \cdot s) - 0,04038 \bar{\Delta}g(s\sqrt{40}) \\ & - 0,20340 \bar{\Delta}g(s\sqrt{68}) - 0,34160 \bar{\Delta}g(10 \cdot s) . \end{aligned}$$

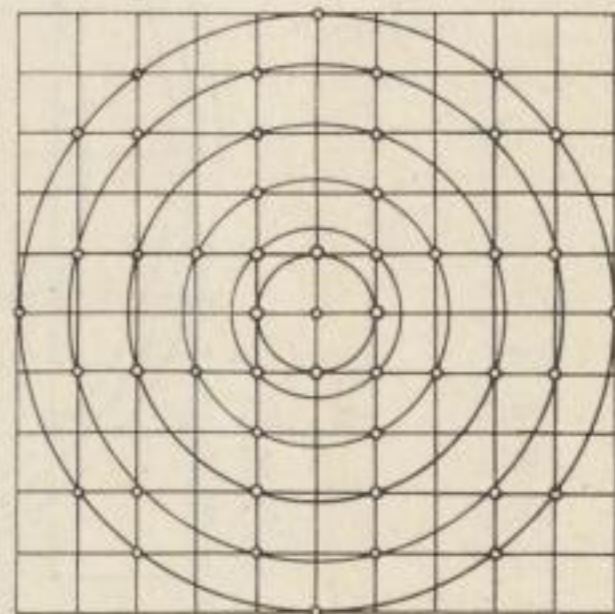


Bild 21. Das Auswertenetz nach BARANOV (entnommen aus [11])

Zur Auswertung wird ein kanonisches Gitter benutzt.

Ähnliche Formeln wurden von JUNG [57] angegeben. Benutzt man die in den Bildern 22 und 23 dargestellten Punktgitter, so gilt

$$\frac{\partial g}{\partial z} \approx \frac{1}{s} \sum_i A_i \bar{\Delta}g(r_i) . \tag{62}$$

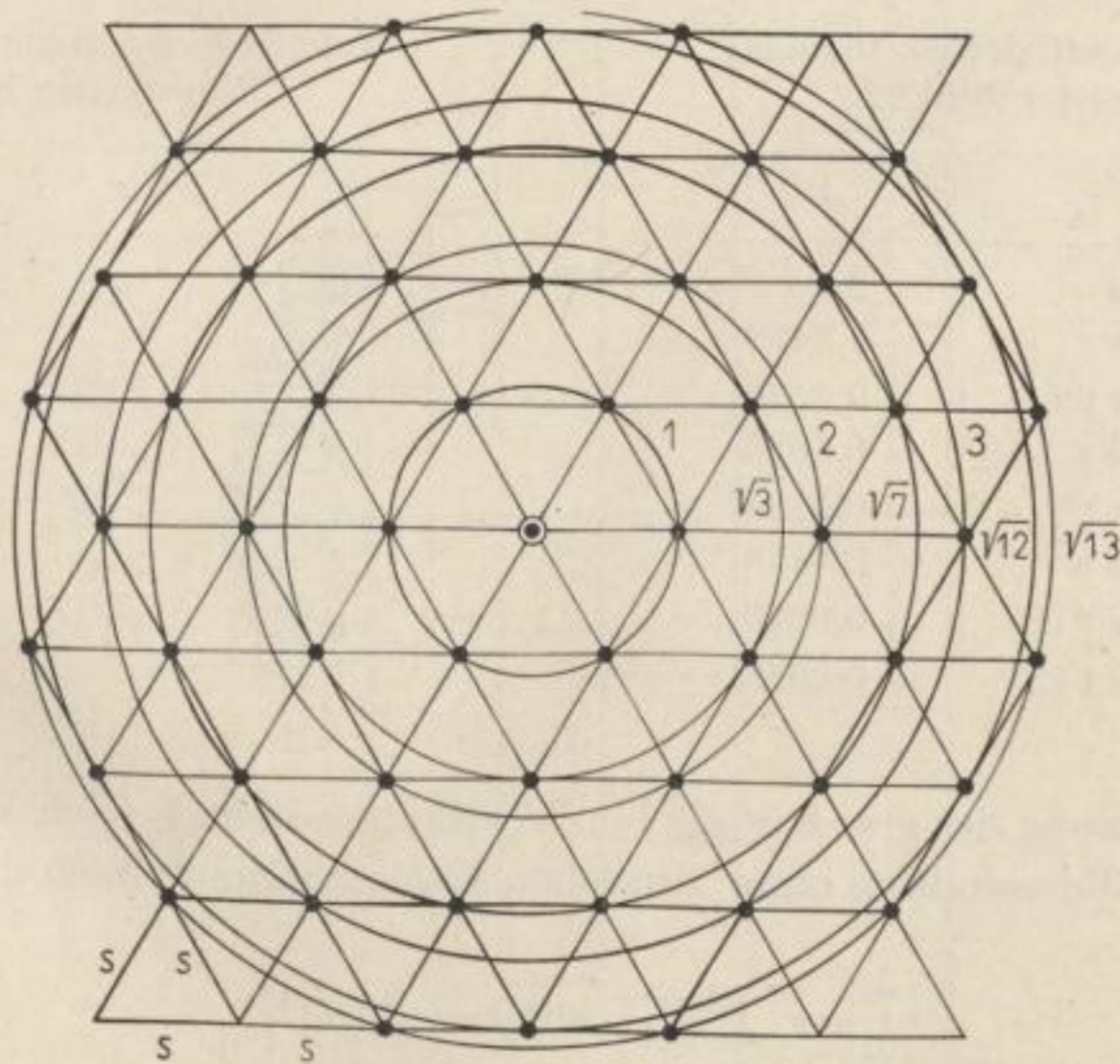


Bild 22. Punktgitter mit den Entfernungen $s, s\sqrt{3}, 2s, s\sqrt{7}, 3s, s\sqrt{12}, s\sqrt{13}$ vom Zentrum (entnommen aus JUNG [57])

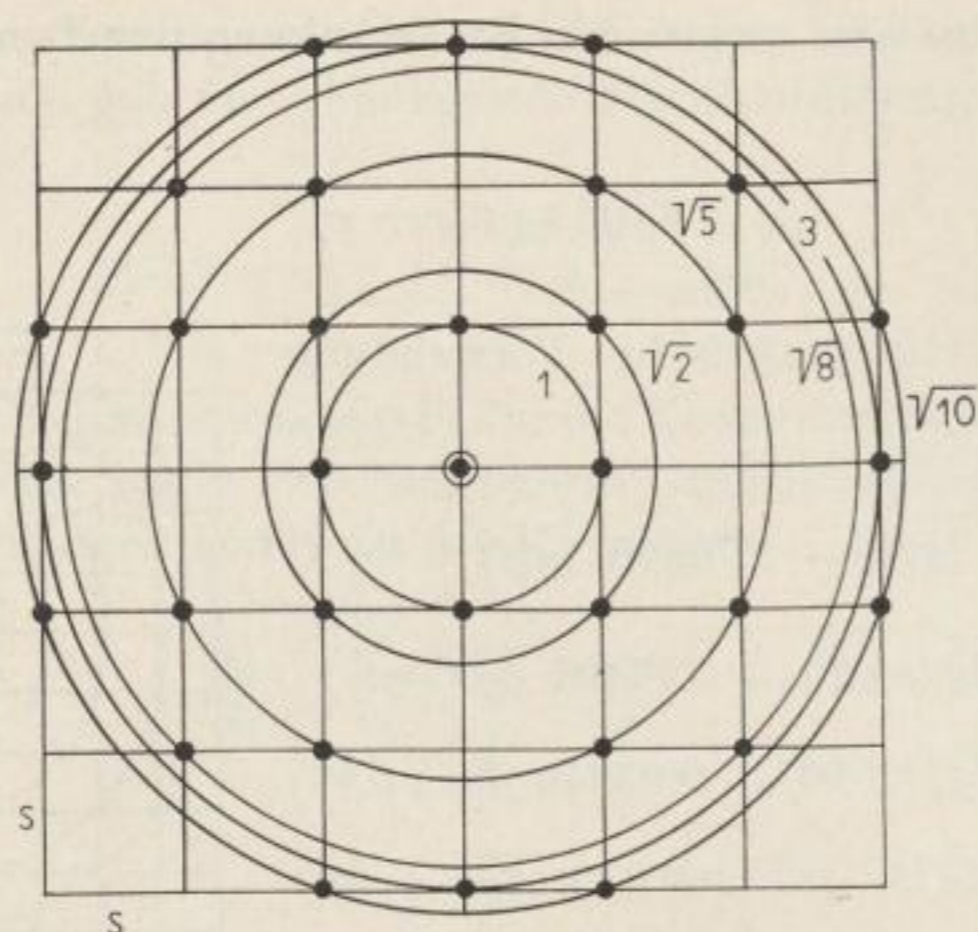


Bild 23. Punktgitter mit den Entfernungen s , $s\sqrt{2}$, $s\sqrt{5}$, $s\sqrt{8}$, $3s$, $s\sqrt{10}$ vom Zentrum (entnommen aus JUNG [57])

Die Koeffizienten der Gleichung (62) sind in den Tabellen 2 und 3 enthalten.

Diese Methoden liefern zu kleine Extremwerte. Für eine Punktmasse in den Tiefen s und $2s$ ergibt das linke Koeffizientensystem 68% und 80% des Extremwertes, das rechte System 76% und 90%. Die Formel von BARANOV gibt im Gegensatz dazu auch die Extrema recht genau wieder.

Tabelle 2. Koeffizienten für das Punktgitter Bild 22

i	r_i	A_i
0	0	+2
1	s	-1,2496
2	$s\sqrt{3}$	+0,2136
3	$2s$	-0,1035
4	$s\sqrt{7}$	-0,0786
5	$3s$	-0,0448
6	$s\sqrt{12}$	-0,0270
7	$s\sqrt{13}$	-0,0056

Tabelle 3. Koeffizienten für das Punktgitter Bild 23

i	r_i	A_i
0	0	+2
1	s	-1,1633
2	$s\sqrt{2}$	-0,2792
3	$s\sqrt{5}$	-0,1607
4	$s\sqrt{8}$	-0,0535
5	$3s$	-0,0186
6	$s\sqrt{10}$	-0,0084

Die Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten nach VESELOV [111] erfolgt unter Verwendung einer einfachen Kreisschablone nach der Formel

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \sum_i A_i (\bar{\Delta g}(r_i) - \Delta g_0) [E]. \quad (63)$$

Die Schwerewerte werden auf den Radien r_i über 16 Punkte gemittelt. Δg_0 ist der Schwerewert des Zentralpunktes.

Auf der Grundlage der VESELOV'schen Kreis- und Segmenteinteilung schlägt DIMITROV [24] ein graphisches Verfahren zur Berechnung des gravimetrischen Vertikalgradienten vor.

Mit Hilfe eines einfachen Auszählendiagramms erfolgt die Auswertung der Δg -Kurve längs eines durch die Segmentmittelpunkte der Kreisschablone gelegten Profils und Summation über alle m -Profile:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{m} \sum N_m \cdot a. \quad (64)$$

Dabei bedeuten:

- a — Eötvöswert einer Auswertefläche
- N_m — Anzahl der Auswerteflächen auf dem Profil m
- m — Anzahl der Profile.

BRJUSOV [19] leitet die Rechenformel

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 10 \cdot \sum_i K_i (m_i \Delta g_0 - \Delta g_i) [\text{E}] \quad (65)$$

ab.

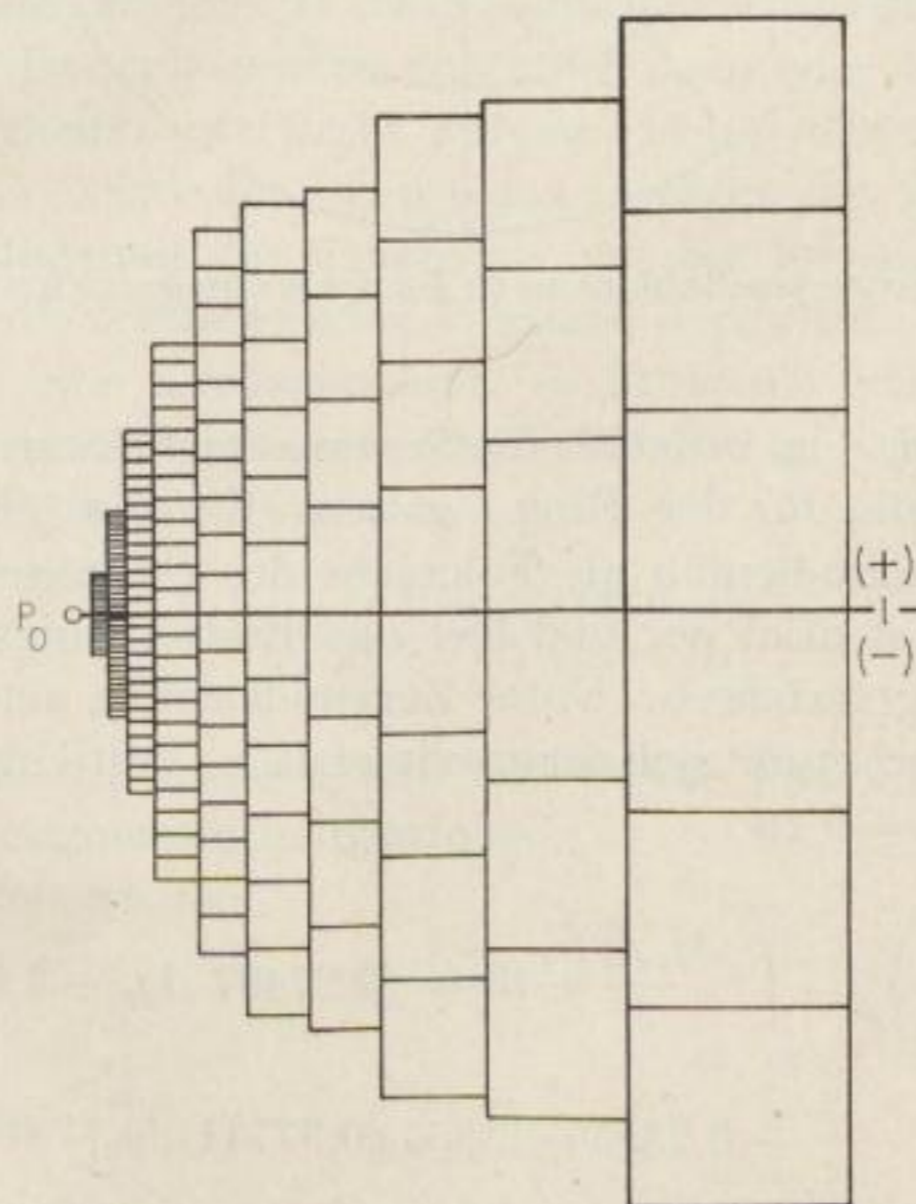


Bild 24. Auszählendiagramm nach DIMITROV (umgezeichnet nach [24]). Jedes Rechteck hat den gleichen Eötvöswert

Tabelle 4. Koeffizienten zur Berechnung von W_{zz} nach VESELOV

r_i [km]	A_i
0,2	75
0,57	12,5
1,06	5,35
1,76	2,60
2,74	1,60
4,12	0,94
5,85	0,53
7,72	0,34
10,2	0,29
13,7	0,21
18,6	0,18

Er verwendet eine Auswerteschablone (s. Bild 25), die durch die Parameter

$r_0 = 1,0 \text{ km}$	$m_1 = 4$	$K_1 = 0,15$
$r_1 = 2,5 \text{ km}$	$m_2 = 6$	$K_2 = 0,0485$
$r_2 = 8,0 \text{ km}$	$m_3 = 8$	$K_3 = 0,00882$
$r_3 = 18,3 \text{ km}$	$m_4 = 8$	$K_4 = 0,00384$
$r_4 = 42,0 \text{ km}$	$m_5 = 10$	$K_5 = 0,00114$
$r_5 = 80,6 \text{ km}$	$m_6 = 10$	$K_6 = 0,000408$
$r_6 = 120,0 \text{ km}$		$K_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} r_i} \cdot \frac{1}{m_i}$

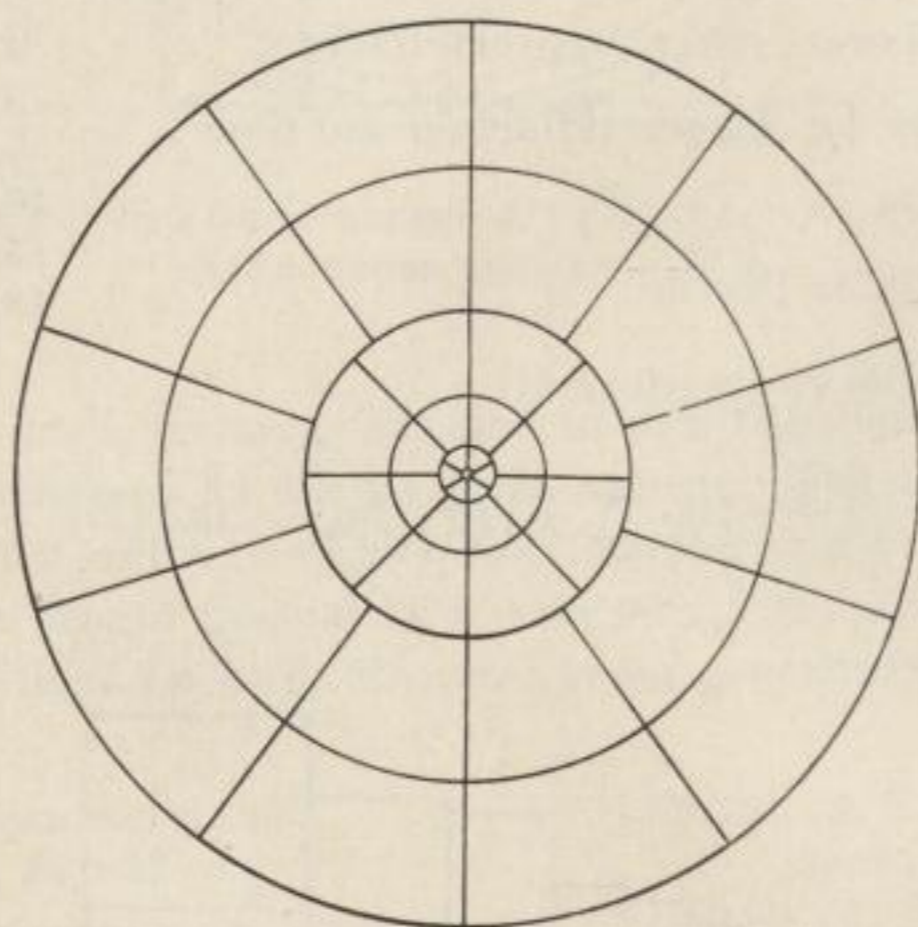


Bild 25. Auswerteschablone nach BRJUSOV (umgezeichnet nach [19])

charakterisiert wird. Δg_i bedeutet die Summe der Schwerewerte, die im Zentrum eines Segmentes für den Ring i gelten. KANTAS [58] leitet den gravimetrischen Vertikalgradienten als Folgesatz des GREENSchen Theorems aus dem Gravitationspotential her und löst das Bestimmungsintegral durch ein einfaches Näherungsverfahren. Unter Zugrundelegung eines trigonal-kanonischen Auswertenetzes ergibt sich der gravimetrische Vertikalgradient im Punkte P auf der Ebene $z = 0$ zu

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial z}\right)_P = \int_0^{\infty} \frac{\Delta g_0 \overline{\Delta g}(r)}{r^2} dr = [2,27407 \Delta g_0 - 1,66111 \overline{\Delta g}_1 - 0,23555 \cdot \overline{\Delta g}_2 - 0,37741 \overline{\Delta g}_3] \cdot 10^9 \quad (66)$$

in Eötvöseinheiten, wenn Δg in mGal und die Gitterdimensionen in cm ausgedrückt werden.

Der Vollständigkeit wegen soll auch auf das Verfahren von TJAPKIN [108] hingewiesen werden, das unter Verwendung speziell entwickelter Auswerteschablonen die Berechnung des Vertikalgradienten in einer Höhe h über der Erdoberfläche und für den zweidimensionalen Fall aus vorliegenden Schwere-messungen gestattet.

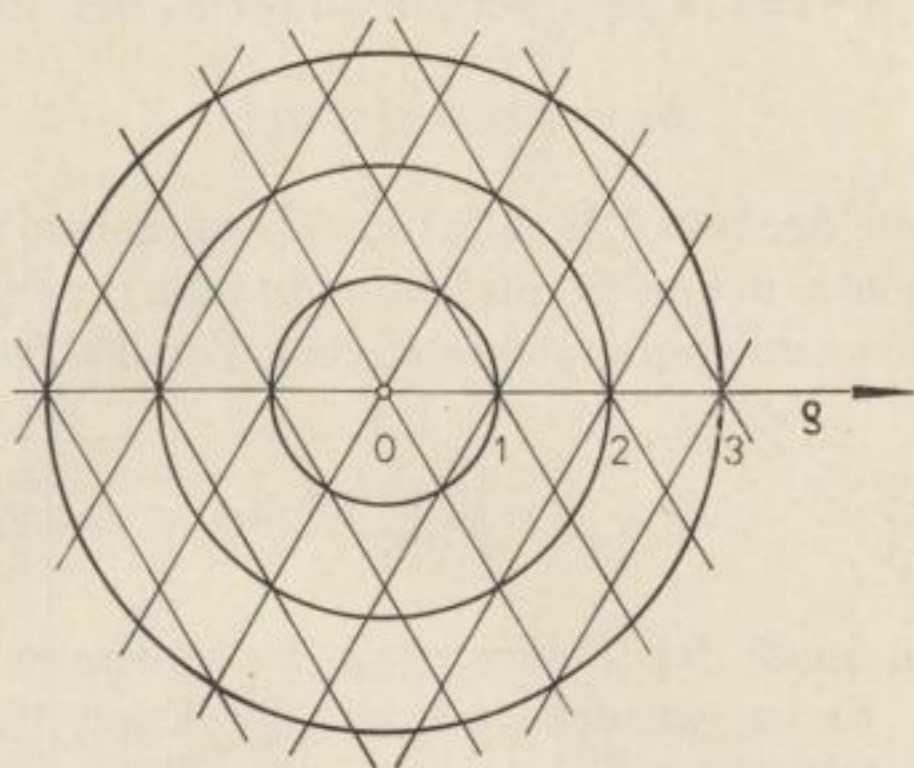


Bild 26. Das trigonal-kanonische Netz nach KANTAS (entnommen aus [58])

4.4.2. Fehlerbetrachtungen

Die berechneten Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten sind im wesentlichen durch zwei Fehler beeinflusst. So wird einmal ein Fehler mit den Schwerewerten übernommen, da diese selbst fehlerbehaftet sind und bei der Entnahme aus der Isanomalenkarte zusätzlich mehr oder weniger durch Interpolationsungenauigkeiten verfälscht werden. Der zweite Fehler liegt im Berechnungsverfahren begründet, wobei das Gewicht des Zentralpunktes, die Annäherung im Mittelteil der Schablone und die Festlegung des äußersten benutzten Radius die bestimmenden Faktoren darstellen.

Verwendet man eine Kreisschablone, so berechnet sich in Anlehnung an BALAVADZE [9] der mittlere quadratische Fehler des im Segment k berechneten gravimetrischen Vertikalgradienten zu

$$\varepsilon_k = \pm \left[\frac{\Delta a_i}{2\pi} E_k \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} + r_i} \right) \right], \quad (67)$$

wenn

E_k der den Schwerewerten anhaftende Fehler für das Segment k ,
 $\Delta \alpha_i$ den Segmentöffnungswinkel
 und r_i die Ringradien
 bedeuten.

Da

$$\frac{\Delta a_i}{2\pi} = \frac{1}{m_i}$$

ist (m_i -Anzahl der Segmente im Kreisring i), folgt aus (67):

$$\varepsilon_k = \pm E_k K_i. \quad (68)$$

Dabei wird mit

$$K_i = \frac{1}{m_i} \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} r_i} \right)$$

der Ringkoeffizient abgekürzt.

Nach de GRAAF HUNTER [s. in 9] setzt man für E_k den Ausdruck

$$E_k = c [\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i}] . \quad (69)$$

C ist ein Koeffizient, der mit $0,54 \text{ mGal/km}^{1/2}$ angegeben wird; x und y sind die Seiten des Segmentes in km. Somit bekommt man für den mittleren quadratischen Fehler des berechneten gravimetrischen Vertikalgradienten

$$E = \pm c \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 m_i (\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i})^2} . \quad (70)$$

Unabhängig davon muß der Fehleranteil des innersten Ringes gesondert betrachtet werden. Er ist, wie erwartet, eine Funktion der Schwereintensität an diesem Ort und läßt sich nur schwer bestimmen, wenn der die Anomalie erzeugende Körper unbekannt ist.

Die Anwendung obiger Formel auf ein Beispiel durch BRJUSON [19] erbrachte für die berechneten Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten einen Fehler $E = \pm 5 E$.

Auch von BARANOV und TASSENCOURT [12] wurde eine ausführliche Fehlerdiskussion für Gleichung (61) geliefert. Der Fehler E_k (plotting error) ergab sich für $s = 2000 \text{ m}$ und einen Isolinienabstand von 1 mGal zu $1,75 E$. Ungenauigkeiten in den Koeffizienten ergaben für eine Kugel in 4500 m Teufe, die an der Erdoberfläche einen Störgradienten von $6,7 E$ erzeugt, bei $s = 2250 \text{ m}$ die obere Fehlergrenze $0,4 E$.

4.4.3. Die Bestimmung des gravimetrischen Horizontal- und Vertikalgradienten mit Hilfe eines mechanischen Analysergerätes nach ACKERMANN

ACKERMANN [2] schlägt ein Verfahren zur Bestimmung des gravimetrischen Horizontal- und Vertikalgradienten vor, das sowohl in der Methode als auch in der Auswertung neue Wege beschreitet. Es handelt sich hier weder um eine Berechnungs- noch um eine direkte Meßmethode für die uns interessierende Größe.

An zwei Hilfsstationen und einer Basisstation werden Schweremessungen mit Hilfe statischer Gravimeter vorgenommen. Dabei müssen die Hilfsstationen (G_2, G_3) in verschiedenen Richtungen, 10 bis 20 m von der Basisstation (G_1) entfernt und in unterschiedlichen Höhen (2 bis 3 m) angeordnet werden. Die

derart bestimmten Schwerewerte werden mit Hilfe eines mechanischen Analysiergerätes, das in Bild 27 dargestellt ist, ausgewertet.

Die Vorrichtung besteht aus einem mit einer Gradeinteilung versehenen Eisenring (1), auf dem die Magnete (2, 3) liegen. Damit können die Richtung und die Entfernung der Hilfsstationen G_2 und G_3 von der Basisstation G_1 , die

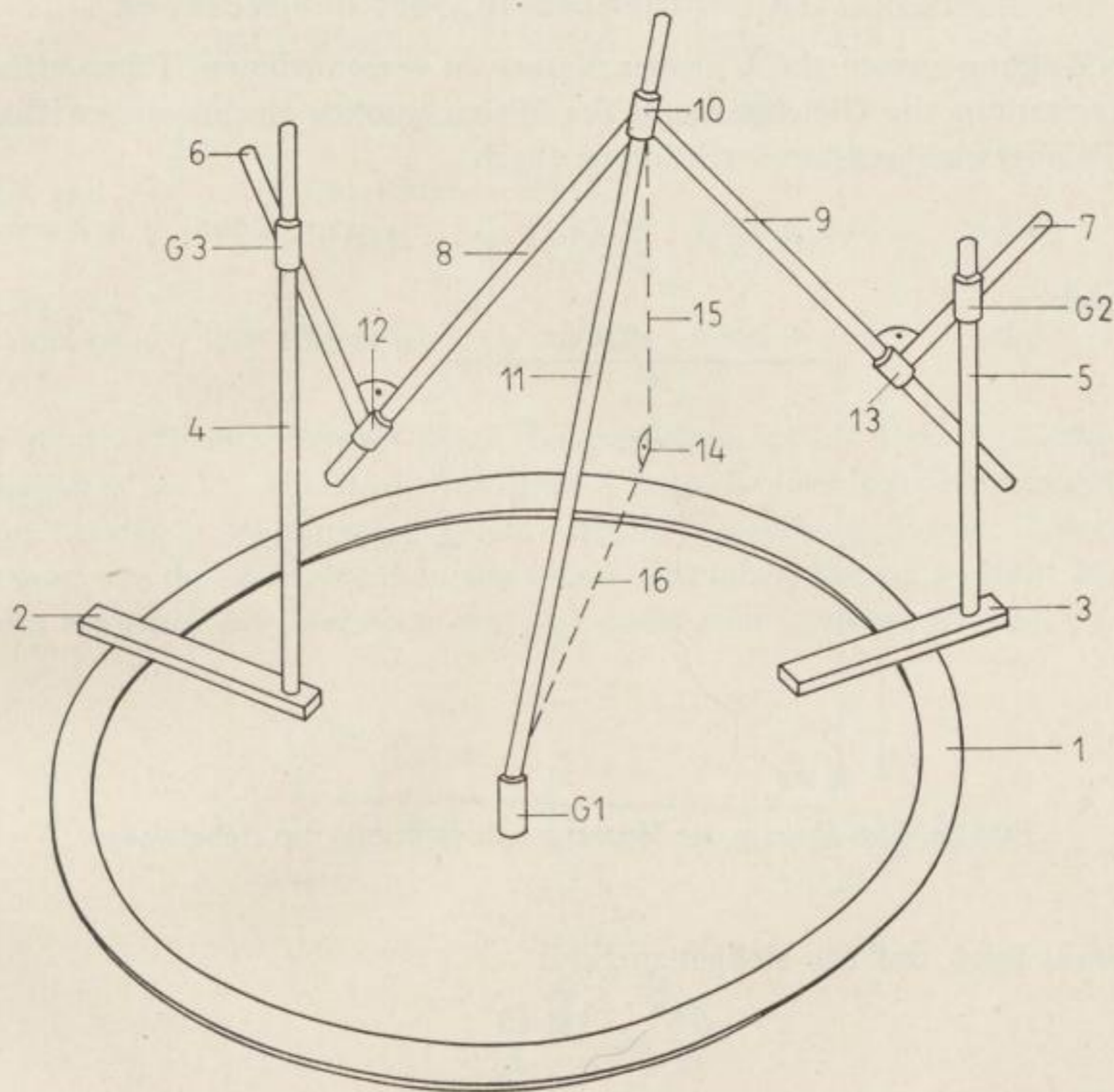


Bild 27. Das Analysiergerät nach ACKERMANN (umgezeichnet nach [2])

sich im Zentrum des Ringes befindet, festgelegt werden. Auf den senkrecht stehenden Stäben (4, 5) werden die Höhe der Hilfsstationen bezüglich der Basisstation und die dort gültigen korrigierten Schwerewerte eingestellt. Durch eine geeignete Halterung sind die Stäbe (6, 7) längs (4, 5) verschiebbar angeordnet. Rechtwinklig zu (6, 7) sind die Stäbe (8, 9) befestigt, deren Kreuzungspunkt (10) auf dem Stab (11) festgelegt ist. Damit ist ein „resultierender Schwerevektor“ konstruiert, der den Durchmesser einer Kugel darstellt, auf deren Oberfläche die Punkte G_1 , 10, 12, 13 und 14 liegen. Der gravimetrische Horizontal- und Vertikalgradient ergibt sich dann durch Abmessen der Linien 15 und 16.

Der Autor macht keine Angaben über die Genauigkeit des Verfahrens bzw. über die Möglichkeiten einer eventuell rechnerischen Auswertung der mit Hilfe der eingangs beschriebenen Meßpunktanordnung gewonnenen Schwerewerte.

5. Die experimentelle Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten

5.1. Die statische Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten

5.1.1. Die Messung mit Hebelwaagen – Maßnahmen zur Empfindlichkeitssteigerung – Die Berücksichtigung des horizontalen Gradienten W_{xz} bei der Messung

Die Wägung zweier gleich großer Massen in verschiedenen Höhen erfordert zur Herstellung des Gleichgewichts des Waagesystems ein Zusatzgewicht Δm . Der Gleichgewichtszustand wird dann durch

$$m \left(g + \frac{\partial g}{\partial z} h \right) = (m + \Delta m) g \quad (71)$$

beschrieben.

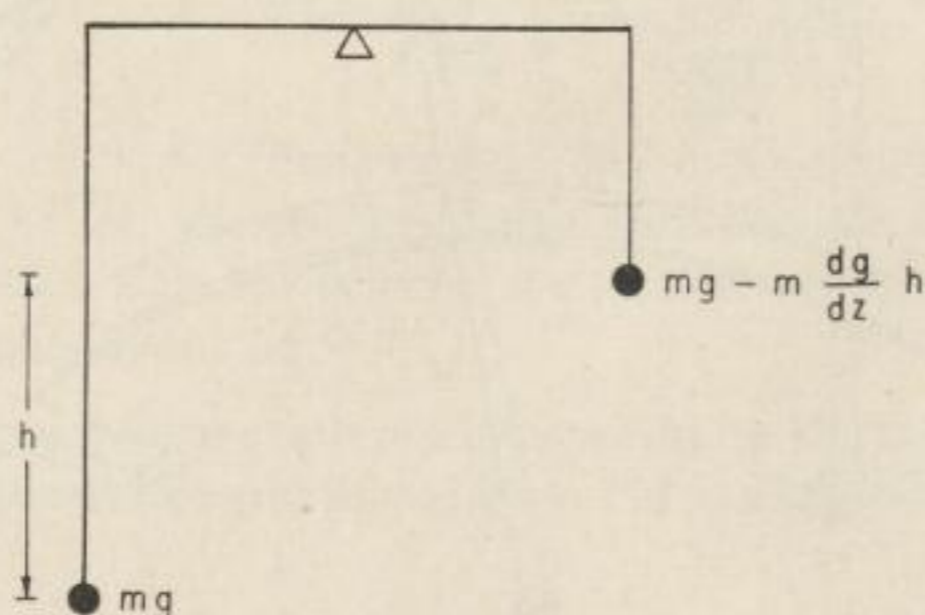


Bild 28. Das Prinzip der Messung von $\partial g/\partial z$ mit der Hebelwaage

Hieraus folgt, daß die Meßgenauigkeit

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{h}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \quad (72)$$

eine Funktion des Abstandes der beiden Massen ist. Diese Methode gestattet somit, über eine Bestimmung des Zusatzgewichtes Δm bei bekanntem Niveauunterschied den gravimetrischen Vertikalgradienten experimentell zu messen.

Die ersten Messungen dieser Art wurden von v. JOLLY [56], F. RICHARZ und O. KRIGAR-MENZEL [56], SCHEEL und DIESELHORST [90] und M. THIESSEN [102] durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Um mit Hilfe einer Hebelwaage den gravimetrischen Vertikalgradienten $\frac{\partial g}{\partial z}$ mit derselben Genauigkeit wie die horizontalen Größen bestimmen zu können, muß die relative Genauigkeit einer Hebelwaage, die gewöhnlich 10^{-8} beträgt, um den Faktor 200 erhöht werden. Eine Vergrößerung der absoluten Empfindlichkeit sowie eine Vergrößerung der Ablesegenauigkeit kann nach SCHMERWITZ [96] dadurch erzielt werden, daß ein Horizontalpendel auf einer Waage derart angeordnet wird, daß es in der Mitte etwas über der Schneide mit dem Pendelarm senkrecht zum Waagebalken steht.

Tabelle 5. Experimentelle Bestimmungen des gravimetrischen Vertikalgradienten mit der Waage (aus RISCHE [88])

Beobachter	Jahr	Ort	Meßhöhen-differenz [m]	$\frac{\partial g}{\partial h}$ [mGal/m]	Abweichung vom Mittelwert [%]	Lit.
V. JOLLY	1881	München	21,005 5,3	$0,295 \pm 0,07$	-4,5	[56]
THIESSEN	1890	Breteuil	11,479	0,272 0,303	-2	[102]
SCHEEL und DIESELHORST	1895	Charlotten-burg	29,731 14,055 7,599	$0,289 \pm 0,01$	-6,5	[91]
RICHARZ und KRIGAR-MENZEL	1898	Spandau	2,22628	$0,285 \pm 0,01$	-7,5	[56]

So zeigt z. B. eine Waage ohne Horizontalpendel bei 1 mg Belastung den Ausschlag $\psi' = 1^\circ$. Mit Horizontalpendel wäre die Gleichgewichtsstellung der Waage bei dieser Neigung noch nicht erreicht, da sich das Pendel in derselben Richtung wie der Waagebalken um einen vielfachen Betrag gedreht hat; das System erreicht seine Ruhelage erst bei einem weit größeren Winkel ψ'' .

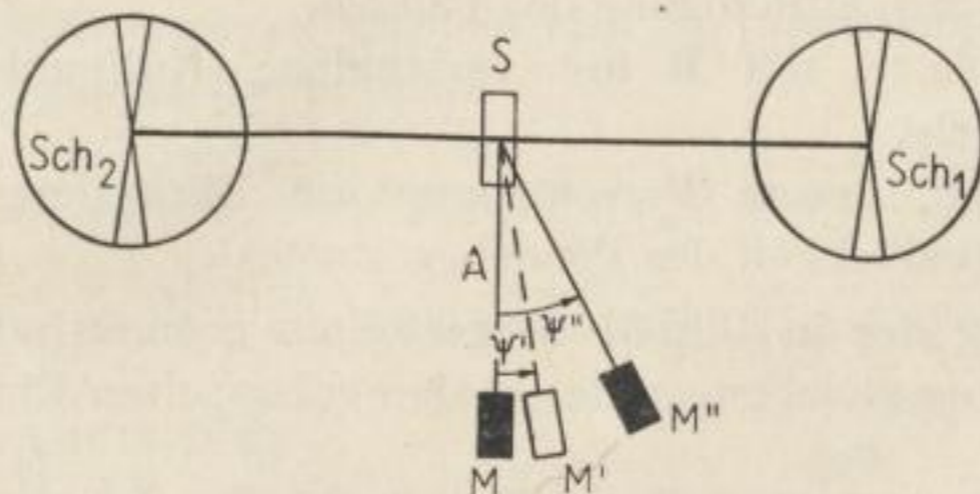


Bild 29. Erläuterung der Anordnung (umgezeichnet nach SCHMERWITZ [96])

Für die absolute Empfindlichkeit einer Waage mit Horizontalpendel gilt

$$\frac{\varphi}{p} = \frac{l}{M d - c M_H l_H} \quad (73)$$

mit

- $2l$ — Länge } des Waagebalkens
- M — Masse }
- d — Abstand der Mittelschneide vom Schwerpunkt des Balkens
- M_H — Masse des Pendels
- l_H — Länge des Pendelarmes
- c — Vergrößerungsfaktor des Horizontalpendels.

Mit dieser Formel sind die Möglichkeiten vorgeschrieben, die Empfindlichkeit der Anordnung zu steigern.

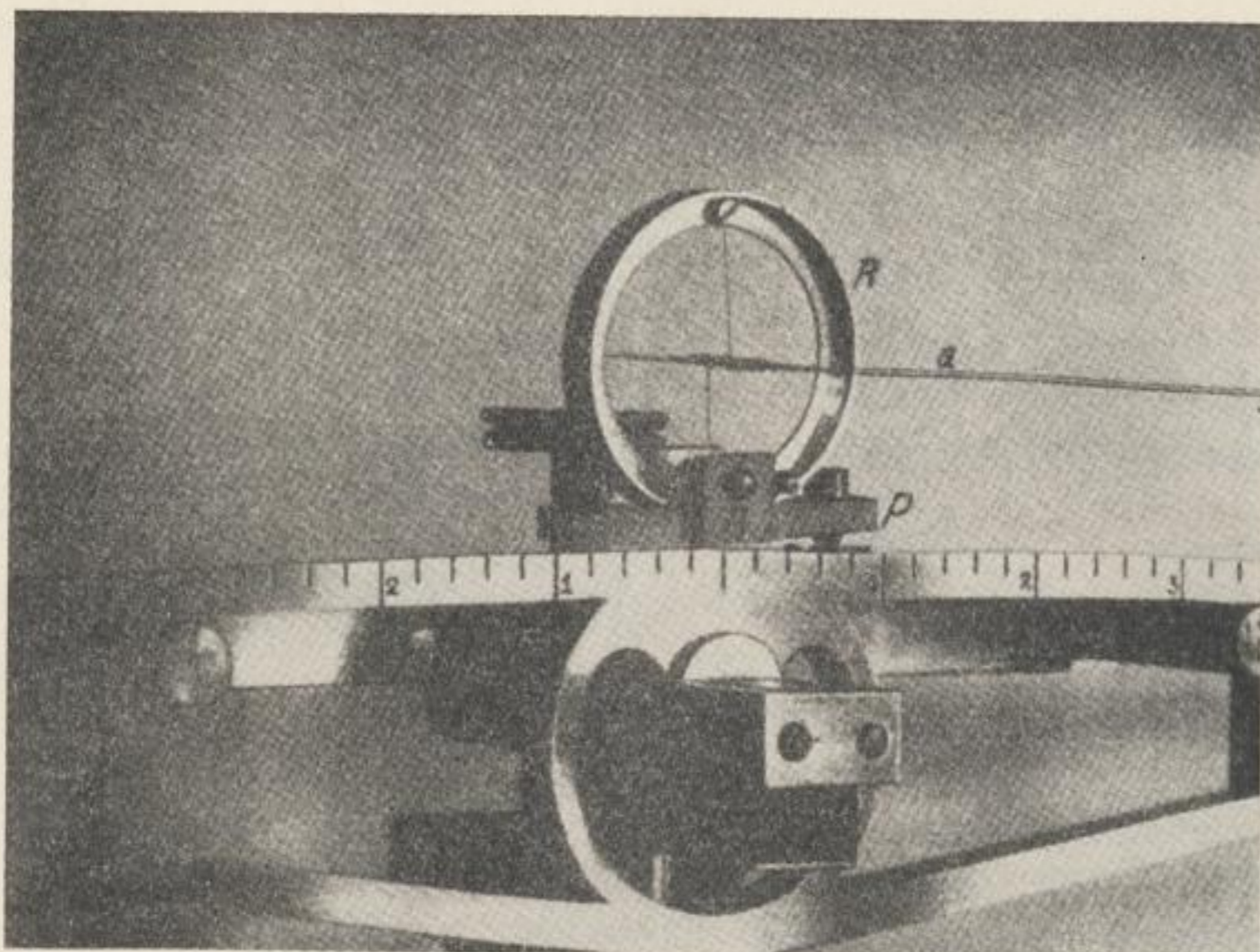


Bild 30. Horizontalpendelwaage nach SCHMERWITZ (entnommen aus [96])

- [a — Horizontalpendel
- R — Ring zur Aufhängung des Pendels
- P — Fußplatte, mit R fest verbunden; (Nullpunkteinstellung des Pendels)
- B — Bolzen, dessen Verschiebung die Einstellung der Neigungsempfindlichkeit des Pendels gestattet].

Unter Verwendung der in Bild 31 dargestellten geometrischen Verhältnisse lauten die Bewegungsgleichungen der beiden gekoppelten Einzelsysteme

$$K_1 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_1 g s_1 \varphi + m_2 g s_2 \alpha - 2 h_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (74a)$$

für den Waagebalken (Index 1)

$$K_2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -m_2 g \frac{s_2}{c} \alpha + m_2 g s_2 \varphi - 2 h_2 \frac{d\alpha}{dt} \quad (74b)$$

für das Horizontalpendel (Index 2).

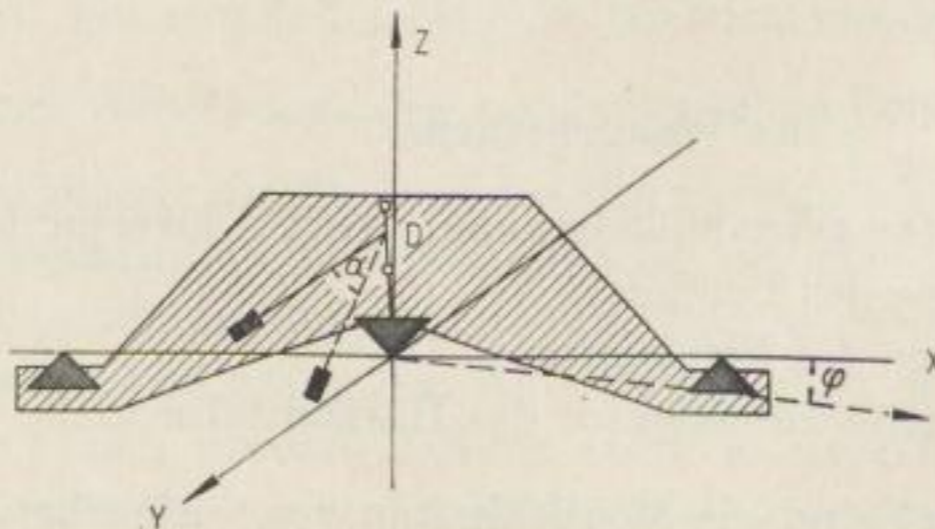


Bild 31. Definition des Koordinatensystems (umgezeichnet nach [97])

Dabei bedeuten:

- K_1, K_2 — Trägheitsmomente
- h_1, h_2 — Dämpfungen der Einzelsysteme
- m_1, m_2 — Massen des Waagebalkens bzw. des Horizontalpendels
- s_1, s_2 — Schwerpunktabstände
- c — Vergrößerungsfaktor des Horizontalpendels
- φ — Winkelausschlag des Waagebalkens
- α — Winkelausschlag des Horizontalpendels

(Die y -Achse fällt mit der Drehachse des Waagebalkens zusammen, der in der xz -Ebene schwingt. Das Horizontalpendel bewegt sich nahezu in der xy -Ebene)

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind:

$$\begin{aligned}\varphi &= A_1 e^{-\delta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \alpha &= A_2 e^{-\delta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 e^{-\delta_2 t} \sin(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (75)$$

Die Kopplungsfrequenzen ω_1 ; ω_2 und die Dämpfungen h_1 ; h_2 sind aus den bekannten Größen n_1 , n_2 , h_2 , h_1 , τ zu berechnen.

n_1 und n_2 sind die wahren Schwingungszahlen; τ ist der Kopplungsfaktor

$$\tau^2 = \frac{m_2 s_2 \cdot c}{m_1 s_1}.$$

Für die Kopplungsfrequenzen ergeben sich für ungedämpfte und auch für gedämpfte Schwingungen die Formeln

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - 1/2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \tau^2 n_1^2 n_2^2} \\ \omega_2^2 &= \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + 1/2 \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 \tau^2 n_1^2 n_2^2}.\end{aligned}\quad (76)$$

Die Dämpfung erhält man aus

$$\beta = -\frac{(h_1 - h_2)}{2} \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\quad (77)$$

zu

$$\delta_{1,2} = \frac{h_1 + h_2}{2} - \beta.\quad (78)$$

Die hier dargestellten Gleichungen geben die Berechtigung dafür, den Nullpunkt der Waage aus den Umkehrpunkten des Horizontalpendels abzulesen, da die T_2 -Schwingung gegenüber der T_1 -Schwingung sehr stark gedämpft ist.

Bei orientierenden Vorversuchen gelang es SCHMERWITZ, die Empfindlichkeit einer Waage von zwei Skalenteilen pro 1 mg Belastung ohne Horizontalpendel auf etwa das 200fache mit Horizontalpendel zu steigern. Bei der Arretierung der Waage bzw. der Schalengehänge treten bei den hohen Genauigkeitsforderungen Schwierigkeiten auf, die ihre Ursachen im Schneidenproblem haben. Deshalb wird eine Bandaufhängung der Schalen vorgeschlagen; die dann gültigen Gleichungen sind von SCHMERWITZ in [97] hergeleitet worden.

Der von SCHMERWITZ aufgezeigte Weg einer experimentellen Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten ist leider nicht weiter verfolgt worden. REISCH [85] begründet das damit, daß das Anbringen des Horizontalpendels eine einschneidende Veränderung im Mechanismus der Waage bedeutet und so eine ganze Anzahl von Schwierigkeiten mit sich bringt, die bei der Verwendung einer Bandaufhängung nur verstärkt werden.

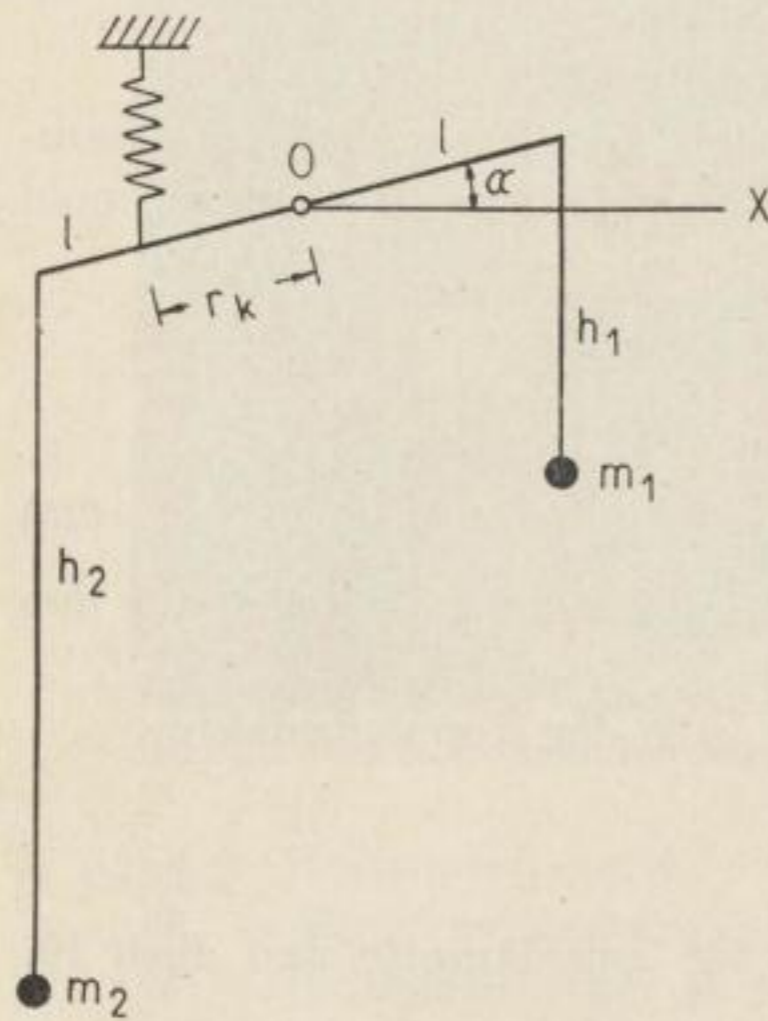


Bild 32. Die Hebelwaage zur Messung des Vertikalgradienten (umgezeichnet nach FEDYNSKIJ [29])

Zur Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe einer Hebelwaage auch die Berücksichtigung des Horizontalgradienten W_{xz} .

Auf das in Bild 32 dargestellte System wirkt das Gesamtmoment

$$M = M_k + M_1 + M_2 = \int (x g_z - z g_x) dm + x_1 m g'_z + x_2 m g_z, \quad (79)$$

wo

M_k — Moment des Waagebalkens

$\left. \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \right\}$ Momente der Massen $\left\{ \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right.$

bedeuten.

Setzt man

$$g_x = (g_x)_0 + x W_{xz} + z W_{xz}$$

$$g_z = (g_z)_0 + x W_{xz} + z W_{zz}$$

an und macht den Koordinatenursprung 0 zugleich zum Schwerpunkt des Waagebalkens, so ergibt sich

$$M = A W_{xz} + B W_{zz} \quad (80)$$

REISCH [85] schlägt dagegen vor, die Empfindlichkeit der Hebelwaage durch Verwendung einer photoelektrischen Ablesereinrichtung um das 10000fache zu steigern, ohne wesentliche mechanische Veränderungen der Hebelwaage zuzulassen. Um die so erreichte Empfindlichkeit auch praktisch ausnutzen zu können, müssen eine ganze Reihe von Maßnahmen ergriffen werden, um die Fehlereinflüsse (Lagerung des Balkens und der Endbelastungen; elastische Nachwirkungen, die zu Balken- und Schneidendeformationen führen; thermische Störungen) einzuschränken. Hier liegt auch der Umstand begründet, daß der Vorschlag weder von REISCH noch von anderen Autoren verwirklicht worden ist.

FEDYNSKIJ [29] verlangt für eine genaue Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten

mit

$$A = K + 2 l^2 m \cos^2 \alpha ; \quad K = \int (x^2 - z^2) dm$$

$$B = m l \cos \alpha (h_1 - h_2 - 2 l \sin \alpha) .$$

Im Gleichgewichtszustand muß das resultierende Drehmoment verschwinden. Dies kann durch ein Zusatzgewicht oder durch das kompensierende Moment einer Feder $M_k(\alpha)$ erreicht werden:

$$F(W_{zz}; \alpha) = M + M_k(\alpha) = 0 . \quad (81)$$

Nach Bild 32 ist

$$M_k(\alpha) = k r_k^2 \tan \alpha \cos \alpha \approx k r_k^2 \alpha = C_k \alpha . \quad (82)$$

Es bedeuten:

- k — Federsteifigkeit
- r_k — Hebelarm.

Die Differentiation des Ausdrucks (81) ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial W_{zz}} &= B \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \frac{\partial A}{\partial \alpha} W_{xz} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} W_{zz} + M'_k \approx M'_k = C_k . \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Daraus bekommt man die Empfindlichkeit der Anordnung

$$v = \frac{d\alpha}{dW_{zz}} = - \frac{B}{C_k} \quad (84a)$$

und für $\alpha = 0$

$$v_0 = - \frac{B_0}{C_0} = \frac{m l}{k r_k^2} (h_1 - h_2) . \quad (84b)$$

Für $m = 50$ g, $h = 50$ cm, $l = 20$ cm, $k = 10^2$ gs⁻² und $r_k = 1$ cm ergibt sich z. B. ein $v_0 \approx 0,1''$ [E].

Dies entspräche einer Verschiebung der Enden des Waagebalkens von $0,1 \mu\text{m}/\text{E}$.

Die Verwendung einer Doppelhängewaage nach Bild 33, die aus zwei völlig gleichartigen Waagebalken besteht, gestattet, den horizontalen Gradienten W_{xz} auszuschließen. In den obigen Gleichungen ist x durch $-x$ und α durch $(180 - \alpha)$ zu ersetzen. Für die Stellung $\alpha = 0$ gelten dann die Gleichungen

$$A_0 W_{xz} + B_0 W_{zz} + M_k(0) = 0$$

für Balken I

$$A_0 W_{yz} - B_0 W_{zz} - M_k(0) = 0$$

für Balken II ,

(85)

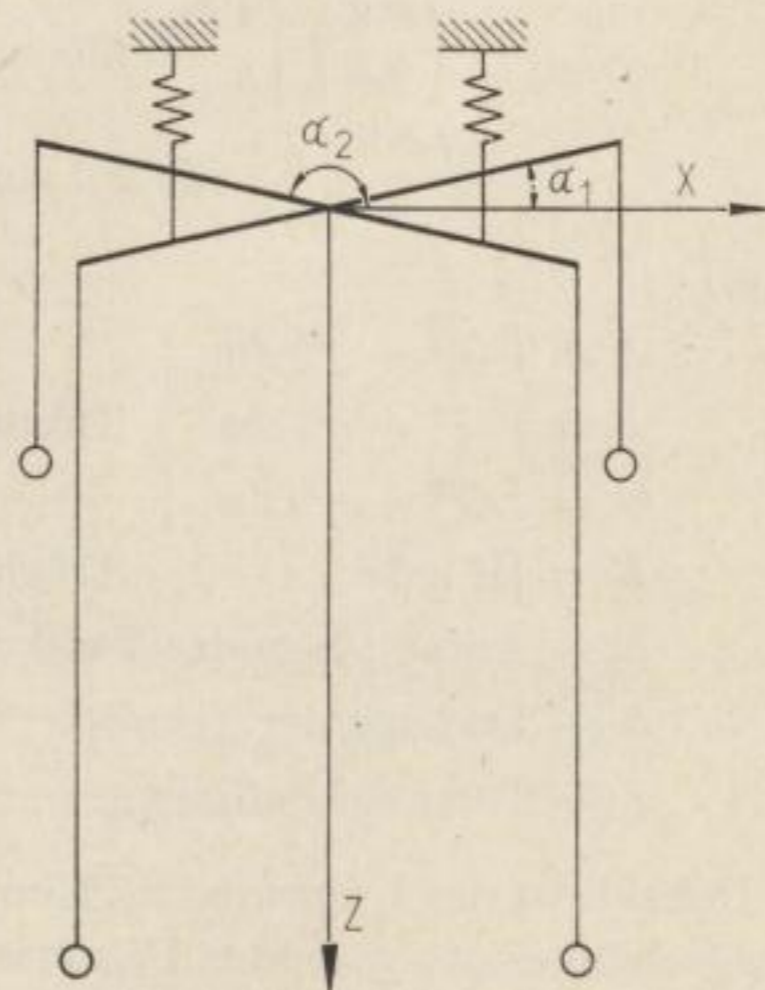


Bild 33. Doppelhängewaage nach FEDYNSKIJ (umgezeichnet nach [29])

woraus man

$$W_{zz} = -\frac{M_k}{B_0} = -\frac{M_k}{m h l} \quad (86)$$

erhält. Das heißt, für den Fall, daß beiden Waagebalken ein gleichgroßes Zusatzmoment hinzugefügt wird, ist W_{zz} diesem Moment direkt proportional.

Bei einer etwaigen praktischen Ausführung einer Torsionsdoppelgehängewaage müßten die Reibung im Unterstützungspunkt, die Steifigkeit des Gehänges, die Ungenauigkeit in der Ausführung der Balken und andere Faktoren berücksichtigt werden.

5.1.2. Die vertikal schwingende Drehwaage nach BERROTH

In Anlehnung an die Eötvössche Drehwaage, die die gravimetrischen Horizontalgradienten zu messen gestattet, schlägt BERROTH [14] zur experimentellen Bestimmung von $\frac{\partial g}{\partial z}$ vor, einen Stab vertikal schwingen zu lassen und die Ablenkung aus der Ruhelage an der Torsionskraft eines Fadens zu messen.

Die Theorie des Gerätes liefert bei vollständiger Symmetrie zur $\xi \varrho$ -Ebene die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned} \tau \delta = \tau \delta_0 &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 (B \cos \alpha + 2 F \sin \vartheta \cos \alpha) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)_0 (B \sin \alpha + 2 F \sin \vartheta \sin \alpha) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \left[\frac{1}{4} \sin 2 \vartheta \sin 2 \alpha (-A + B + C) + F \cos \vartheta \sin 2 \alpha \right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_0 \left[\frac{1}{4} \sin 2 \vartheta (-A + B + C) + F \cos \vartheta \right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \left[\frac{1}{4} \sin 2 \vartheta \cos^2 \alpha (-A + B + C) + F \cos \vartheta \cos^2 \alpha \right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 \left[\frac{1}{4} \sin 2 \vartheta \sin^2 \alpha (-A + B + C) + F \cos \vartheta \sin^2 \alpha \right] \quad (87) \end{aligned}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A &= \int (\eta^2 + \varrho^2) dm \\ B &= \int (\xi^2 + \varrho^2) dm \\ C &= \int (\xi^2 + \eta^2) dm \end{aligned} \right\} \text{Trägheitsmomente des Gehänges}$$

$$F = \int \xi \varrho dm \quad \text{Trägheitsprodukt des Gehänges}$$

δ_0 — Anfangslage der Torsion
 δ — Endlage der Torsion
 τ — Torsionskoeffizient.

Dabei liegt der Ursprung des Koordinatensystems x, y, z im Schwerpunkt P_0 des Gehänges, wo auch das Potential W_0 gilt. α ist die azimutale Drehung des Balkens in der $x y$ -Ebene, ϑ die Neigung gegen die Horizontale. Das im Schwerpunkt beginnende und mit dem Balken fest verbundene Koordinatensystem

ξ, η, ρ ist derart orientiert, daß die ρ -Achse in die Richtung des Lotfadens, die ξ -Achse in die der Balkenachse und die η -Achse in die der Balkendrehachse zeigen.

Die in Gleichung (87) enthaltenen 7 Unbekannten lassen sich durch Variation der Winkel α und η bestimmen. Der praktischen Ausführung dieser theoretisch sehr eleganten Idee standen bisher die außerordentlich großen technischen Schwierigkeiten entgegen. Das Problem besteht darin, den Schwerpunkt des Gehänges und die Achse des schwingenden Stabes in die richtige Lage zur Drehachse zu bringen, um eine möglichst große Schwingungsdauer des Systems zu erzielen.

5.1.3. Die Messung mit Gravimetern

Die experimentelle Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Gravimetern beruht auf Schweremessungen in zwei verschiedenen Niveaus.

$\frac{\partial g}{\partial z}$ ergibt sich dann zu

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\Delta g_1 - \Delta g_2}{h}, \quad (88)$$

wenn Δg_1 und Δg_2 die in den Niveaus 1 und 2 gemessenen Schwerewerte und h den Höhenunterschied zwischen den beiden Meßpunkten bedeuten. Der Meßwert wird allgemein der Mitte der Lotlinie zwischen den beiden Meßpunkten zugeordnet.

Gravimetergenauigkeit und vertikaler Meßpunktastand bestimmen die Meßgenauigkeit in $\frac{\partial g}{\partial z}$. Dieser Zusammenhang ist in Bild 34 dargestellt.

∂W_{zz} (E.E.)

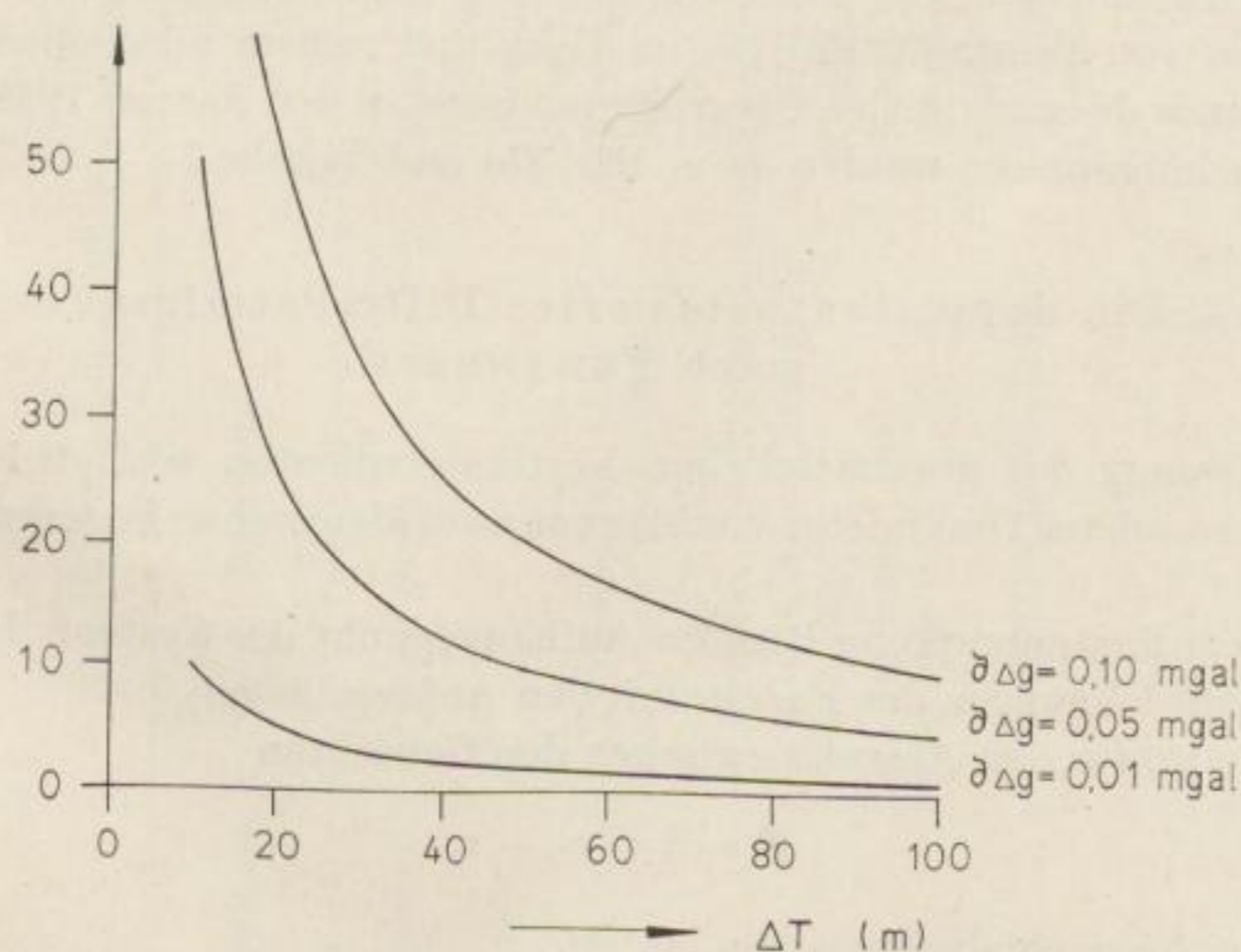


Bild 34. Die Genauigkeit von W_{zz} in Abhängigkeit vom Tiefenintervall ΔT und der Gravimetergenauigkeit $\partial \Delta g$ (umgezeichnet nach GROSSE [38])

Bei einer inneren Gravimetermeßgenauigkeit von $\partial \Delta g = \pm 0,01$ mGal und einem Tiefenintervall $\Delta T = 5$ m kann der gravimetrische Vertikalgradient auf $\partial g_z = \pm 50$ E bestimmt werden, was für praktische Belange recht gut ist.

Grundsätzlich eröffnen sich verschiedene Meßmöglichkeiten, von denen jede ihre Vor- und Nachteile besitzt.

Einmal kann die Messung des Vertikalgradienten in hohen Gebäuden erfolgen. Auf Grund des großen Tiefenintervalls (z. B. HAMMER) [45] 100 bis 300 m können weniger empfindliche Gravimeter benutzt werden. Die Wahl der Meßpunkte ist selbstverständlich stark eingeschränkt. Als wesentliche Fehlerquelle, die auch nicht exakt erfaßt werden kann, erweist sich der störende Einfluß der Gebäudemassen. Benutzt man dagegen besondere Stahlsysteme, so kann eine freie Wahl der Meßpunkte nach geologisch-geophysikalischen Gesichtspunkten erfolgen. Die Massenkorrekturen entfallen, und auch die topographischen Korrekturen können weitgehend eingeschränkt werden. Das geringe Tiefenintervall verlangt Gravimeter höherer Meßgenauigkeit. Die Meßdauer ist relativ groß und die Beweglichkeit gering. Die Kosten sind im Verhältnis zum praktischen Nutzen noch tragbar.

Starke Beweglichkeit in der Wahl der Meßpunkte und geringe Meßdauer sind garantiert, wenn die Messung mit Hilfe fahrbarer Aufsätze von veränderlicher Höhe erfolgt. Diese Methode benutzte KUMAGIA [64] bei der Vermessung der Amori-Ebene und des Yabase-Ölfeldes in Japan. Ein Teufenintervall von nur 5 m verlangt höchstempfindliche Gravimeter und sorgfältige Beachtung des topographischen Einflusses auf die Meßergebnisse.

Tabelle 6 gibt einen Überblick über die von verschiedenen Autoren durchgeführten experimentellen Bestimmungen des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Gravimetern. Der großen Bedeutung wegen soll auf die Gradientenmessungen von BODEMÜLLER [16] im Harz und seinem nördlichen Vorland, im Schwarzwald und in der Oberrheintalebene in den Jahren 1958 bis 1959 besonders hingewiesen werden (s. a. Bild 35) und Tabelle 7.

5.1.4. Ein doppeltes, astasiertes Differentialgravimeter nach FEDYNSKIJ

Zur Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten schlägt FEDYNSKIJ [29] ein besonderes Gravimeter vor, das aus zwei identischen Federgravimetern besteht.

Der Koordinatenursprung liegt im Aufhängepunkt des Systems I; z_1 und z_2 sind die Ausdehnungen der Federn mit den Anfangslängen 0.

So gilt also für den Abstand zwischen den Gewichten

$$Z = h + z_2 - z_1.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$m g - k z_1 = 0 \quad (89)$$

Tabelle 6. Experimentelle Bestimmungen des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Gravimetern

Meßprinzip	Bearbeiter	Ort	Gerät	Höhen- unterschied [m]	Gemessener Gradient [mGal/m] bzw. Genauigkeit	Lit.
Gravimeter in 2 Niveaus	HAMMER 1938	Pittsburg Pittsburg Washington New York	Wyckoff-Grav. (Gulf. Research Comp.)	137,8 158,8 152,5 290,6	$0,3060 \pm 0,0004$ $0,3048 \pm 0,0006$ $0,3124 \pm 0,0011$ $0,3128 \pm 0,0003$	[45]
	V. THYSSEN 1943	Hannover	Askania	0,25–1,5	$\pm 50 \text{ E}$	[105]
	BALAVADZE 1951–1953	am Schwarzen Meer	Noergaard	14–44	$\pm 50 \text{ E}$	[7]
	V. THYSSEN 1953	Houston	Worden	3,25	$\pm 40 \text{ E}$	[106]
	V. THYSSEN und STAKELER 1955	Turner-Valley Struktur	Worden	3,82	$\pm 10 \text{ E}$	[106]
	KUMAGAI, ABE, YOSHIMURA 1955–1960	Amori-Ebene Yabax- Ölfeld	Worden	5	$\pm 10 \dots \pm 20 \text{ E}$	[64]
	Sc. STOENESCU 1957	Sălnic (Rumänien)	Noergaard	29,1	(0,2608) –	[112]
	VISARION 1958	Transsylvanien (Rumä- nien)	Noergaard	~20	$\pm 50 \text{ E}$	[112]
	BODEMÜLLER 1958–1959	Harz Schwarzwald Oberrheintal	North-American	~10	± 10 $\pm 10 \dots \pm 20 \text{ E}$	[16]

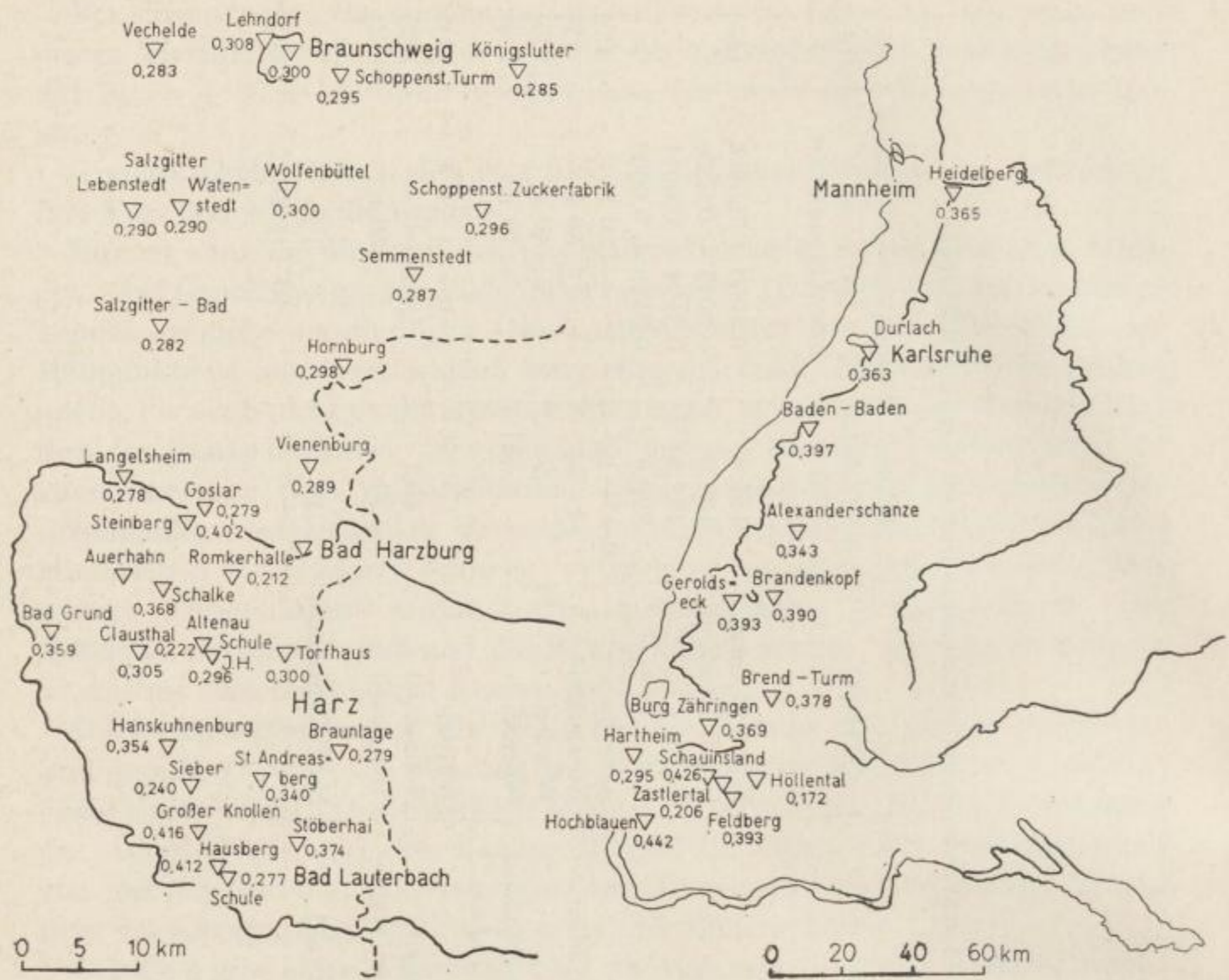


Bild 35. Meßstationen und beobachtete Schweregradienten im Harz und in dessen nördlichem Vorland, im Schwarzwald und in der Oberrheintalebene (entnommen aus BODEMÜLLER [16])

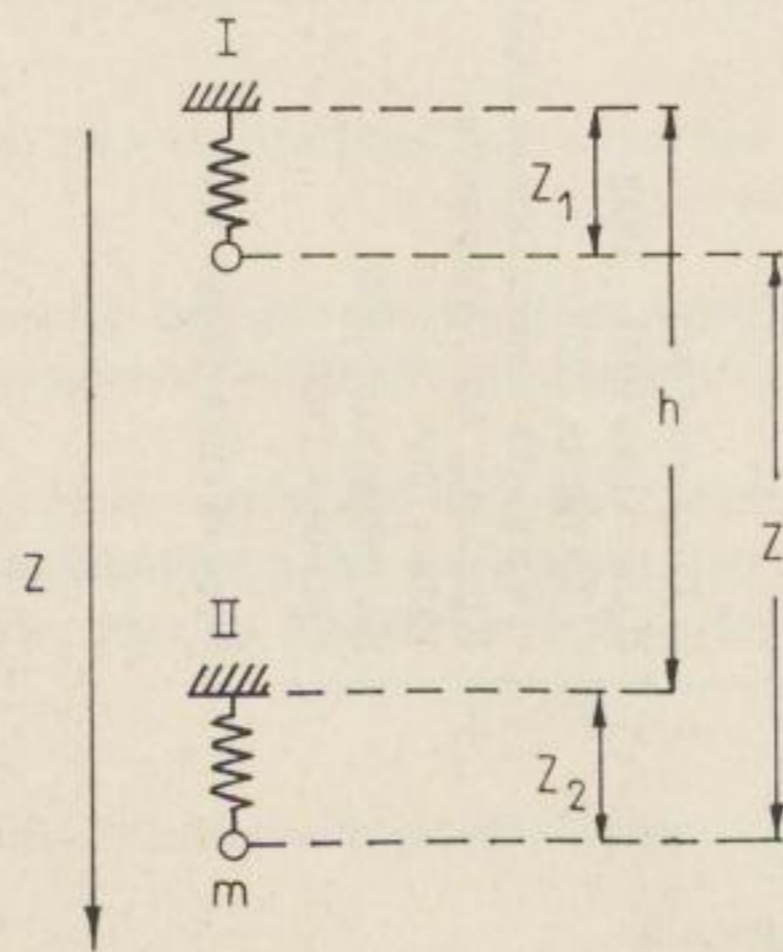


Bild 36. Das doppelte Differentialgravimeter nach FEDYNSKIJ (umgezeichnet nach [29])

Tabelle 7. Gemessene und reduzierte Vertikalgradienten im Harz mit Angaben der Topographie
 (entnommen aus BODEMÜLLER [46])




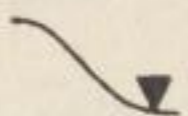
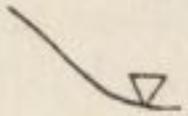

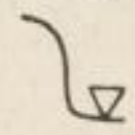




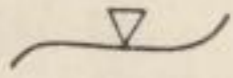
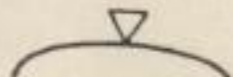
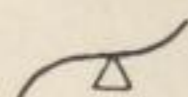


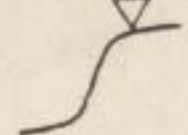


Sation	Höhe über NN [m]	Schwere [mGal]	Vertikaler Gradient [mGal/m]	Topographisch reduzierter Gradient [mGal/m]	Topographische Reduktion (unterer Punkt) [mGal/m]	Topographie
Romkerhalle	335	981,180	0,212	0,323	5,409	 tiefes V-tal
Altenau, Schule	440	981,165	0,222			 V-tal
Sieber	350	981,170	0,240	0,314	3,739	 tiefes V-Tal
Bad Lauterberg, Schule	280	981,171	0,277	0,296	1,251	 Tal, Harzrand
Bad Harzberg	280	981,187	0,278	0,277	1,446	 Ebene, Harzrand
Langelsheim	200	981,206	0,278	0,285	0,525	 Ebene, Harzrand
Goslar, Odermark	240	981,194	0,279	0,295	0,816	 Ebene, Harzrand
Braunlage	540	981,233	0,279	0,300	0,902	 breites, flaches Tal
Salzgitter-Bad Ortsmitte	125	981,222	0,282			 zwischen zwei flachen Höhenzügen
Vechelde	80	981,260	0,283	0,283	0,010	Ebene
Königslutter	120	981,261	0,285	0,296	0,172	Ebene, Fluß Elm
Semmenstedt	116	981,109	0,287	0,293	0,100	leicht gewellt
Vienenburg	148	981,205	0,289	0,294	0,414	Ebene
Salzgitter-Watenstedt	95	981,246	0,290	0,291	0,055	Ebene
Salzgitter-Lebenstedt	90	981,241	0,290	0,288	0,065	Ebene
Salzgitter-Bad, SMG	134	981,223	0,293	0,291	0,276	 zwischen zwei flachen Höhenzügen, höher am Hang
Schoppenstedter Turm	81	981,266	0,295	0,298	0,041	Ebene
Schoppenstedter Zuckerfabrik	104	981,244	0,296	0,300	0,136	Ebene
Altenau, Jugendherberge	526	981,132	0,296	0,300	1,014	 am Hang
Hornburg	90	981,231	0,298	0,301	0,195	leicht gewellt
Braunschweig Technische Hochschule	72	981,264	0,300	0,298	0,152	Ebene

Tabelle 7 (Fortsetzung)

Station	Höhe über NN [m]	Schwere [m Gal]	Vertikaler Gradient [m Gal/m]	Topographisch reduzierter Gradient [m Gal/m]	Topographische Reduktion (unterer Punkt) [mGal/m]	Topographie
Wolfenbüttel	95	981,250	0,300	0,303	0,089	Ebene
Torfhaus	797	981,093	0,300	0,288	2,289	 Hochebene
Clausthal, Jugendherberge	585	981,060	0,305	0,284	0,517	 Hochebene
Lehndorf	75	981,264	0,308	0,308	0,154	Ebene
Wirtshaus Auerhahn	636	981,125	0,233	0,232	1,924	 Hang oben
St. Andreasberg Glockenberg	620	981,127	0,340	0,311	1,746	 auf dem Berg
Hanskühnenberg	811	981,076	0,354	0,297	5,214	 auf langem Rücken
Bad Grund, Albertsturm	555	981,135	0,359	0,312	3,643	 Harzrand, auf dem Berg
Schalke, Aussichtsturm	763	981,097	0,368	0,328	5,576	 auf Bergnase
Stöberhai	718	981,117	0,374	0,301	5,794	 auf dem Berg
Steinberg bei Goslar	472	981,153	0,402	0,327	5,324	auf Bergrand, Harzrand
Bad Lauterberg Hausberg	422	981,142	0,412	0,311	5,532	auf kleinem, aber steilabfallendem Berg, Harzrand
Großer Knollen Aussichtsturm	687	981,094	0,416	0,321	9,284	auf hohem, allseits abfallendem Berg

und

$$m (g + Z W_{zz}) - k z_2 = 0 .$$

Eine einfache Umformung liefert

$$m h W_{zz} + m (z_2 - z_1) W_{zz} - k (z_2 - z_1) \approx \quad (90)$$

$$m h W_{zz} - k (z_2 - z_1) = 0 .$$

Mit $z_2 - z_1 = Z - h$ erhält man schließlich

$$W_{zz} = \frac{k (Z + k)}{m h} . \quad (91)$$

Dann berechnet sich die Empfindlichkeit des Systems zu

$$\frac{dW_{zz}}{dZ} = \frac{k}{mh} \quad (92)$$

Mit $h = 1 \text{ m}$, $m = 100 \text{ g}$, $k = 10^2 \text{ g s}^{-2}$, $W_{zz} = 1 \text{ E}$ erfolgt eine Verrückung von $dZ = 10^{-3} \mu\text{m}$, die wohl kaum meßbar erscheint.

Eine Erhöhung der Empfindlichkeit kann durch Astasierung erzielt werden, indem die elektrische Kraft der als Doppelkondensator ausgebildeten Registriervorrichtung der Federkraft k des Meßsystems ähnlich gestaltet wird.

5.1.5. Die Messung mit Gradientometern

Der Entwicklung von Gradientometern wird in neuester Zeit größte Aufmerksamkeit geschenkt. Die Ursache liegt, wie bereits früher erwähnt, darin, daß die Gradientometer infolge ihrer Konstruktion weitgehend vom Einfluß der Störbeschleunigungen unabhängig sind, was ihren Einsatz in bewegten Systemen zum Zwecke von Übersichtsvermessungen erlaubt. Bekanntlich ist die Anwendung der Gravimeter in Flugzeugen und Schiffen mit größten Schwierigkeiten verbunden.

5.1.5.1. Das ältere Airborne-Vertikalgradientometer nach LUNDBERG

Die ersten erfolgreichen Messungen des gravimetrischen Vertikalgradienten vom Flugzeug aus wurden von LUNDBERG [69] mit dem in Bild 37 schematisch dargestellten Gerät erzielt.

Befinden sich die beiden senkrecht übereinander angebrachten Massen über neutralem Untergrund im Gleichgewicht, so wird die untere bei Bewegung des gesamten Systems in ein Feld zunehmender Schwere um ein geringeres schwerer als die obere. Zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes ist es erforderlich, daß sich die obere Masse in demselben Maße nach oben bewegt wie die untere nach unten; der Meßeffect wird also verdoppelt. Bei den Testmessungen konnte nur festgestellt werden, ob die Änderungen positiv oder negativ waren. Es erwies sich als notwendig, die Profile in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen zu fliegen. Die Superposition der Ergebnisse gestattet es, die Störkörper in einer Form zu zeichnen, die der tatsächlichen gut entspricht. Sehr überzeugend ist die gute Übereinstimmung zwischen den Testflugergebnissen über dem Mykawa-Schwereminimum in Texas und der Karte der zweiten Ableitung des Potentials, die ELKINS für dieses Gebiet aus vorliegenden Schwerewerten berechnete.

5.1.5.2. Das neue Airborne-Gradientometer nach LUNDBERG

Nachdem die älteren Gradientometer nach LUNDBERG [69, 70, 71] bereits mit Erfolg bei der praktischen Lagerstättenforschung Anwendung gefunden haben, wird vom gleichen Verfasser ein neues Gerät speziell für Airborne-Mes-

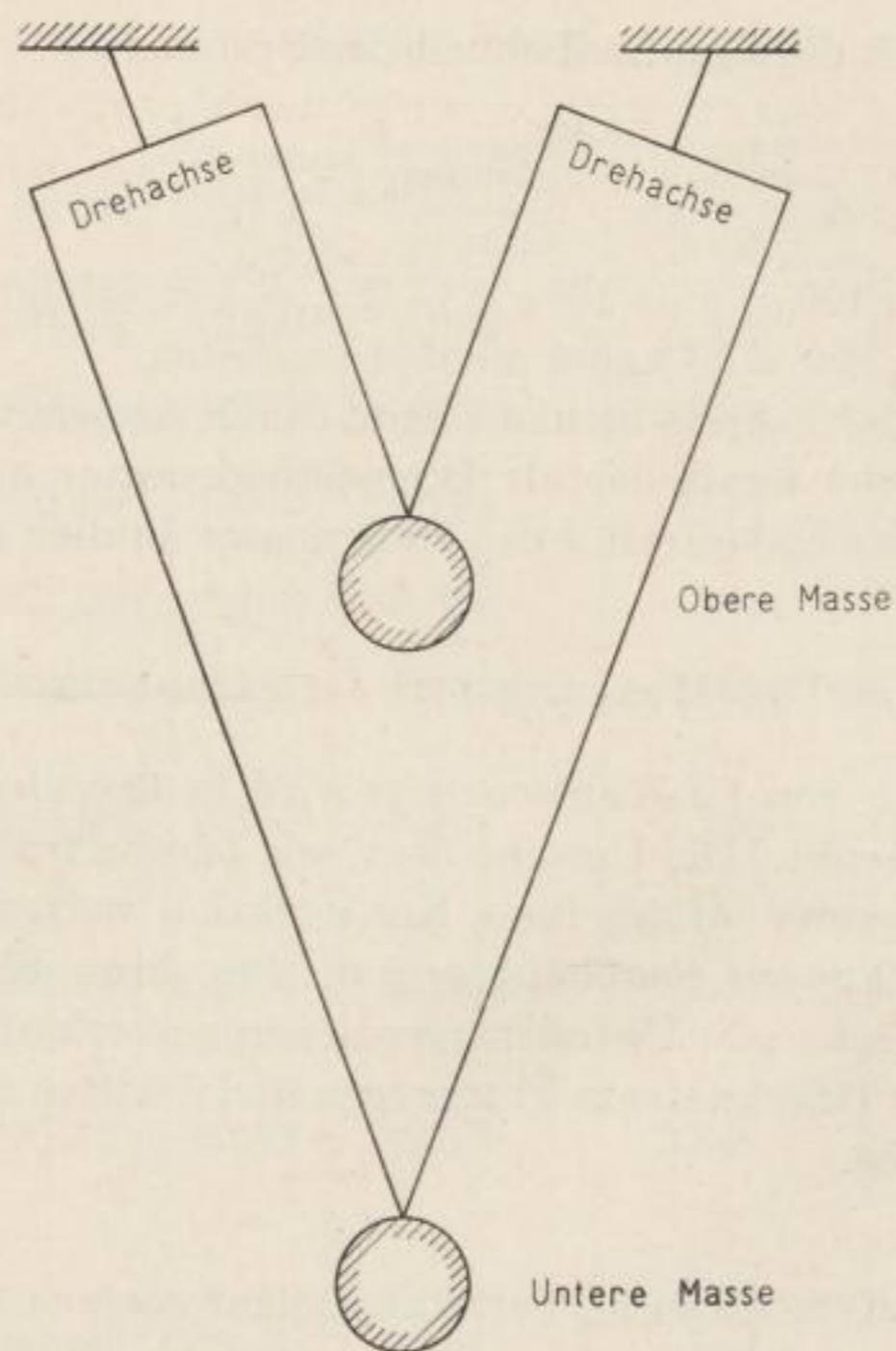


Bild 37. Das ältere Airborne-Vertikalgradientometer nach LUNDBERG
(umgezeichnet nach [69])

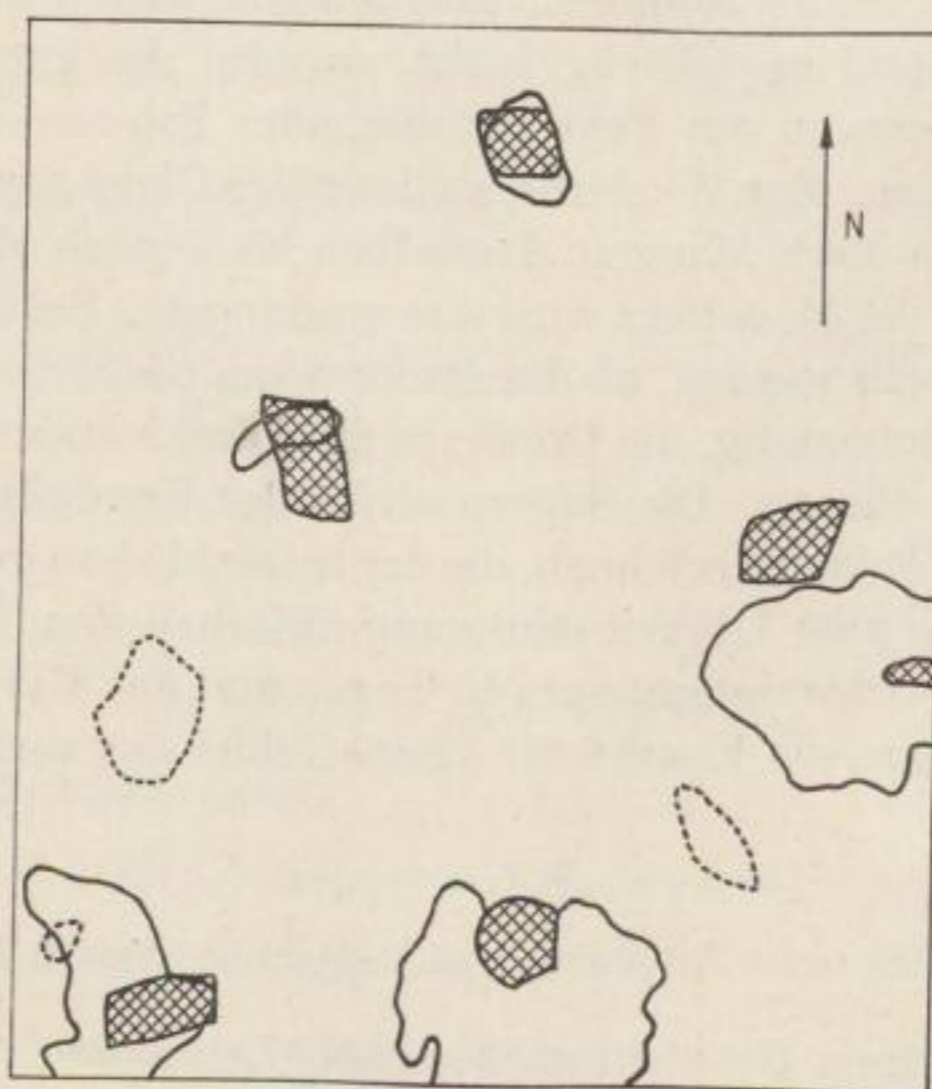


Bild 38a. Kombinierte Ergebnisse der NS- und EW-Flüge über das Mykawa-Gebiet mit
dem Lundberg-Airborne-Gradientometer

sungen vorgeschlagen [72]. Da z. Zt. lediglich die Patentschrift des Instruments vorliegt, ist hier der Versuch unternommen worden, aus einer vereinfachten Theorie des Gerätes quantitative Aussagen über die Konstruktionsausführung und Empfindlichkeit herzuleiten.

Aufbau und Wirkungsweise des Gradientometers

An den Kreuzfedergelenken 1 und 2 sind durch eine starre Leichtmetallstabkonstruktion die Massen 4 und 5 beweglich derart angeordnet, daß Bewegungen von System II über eine Blattfeder 3 auf System I bzw. umgekehrt

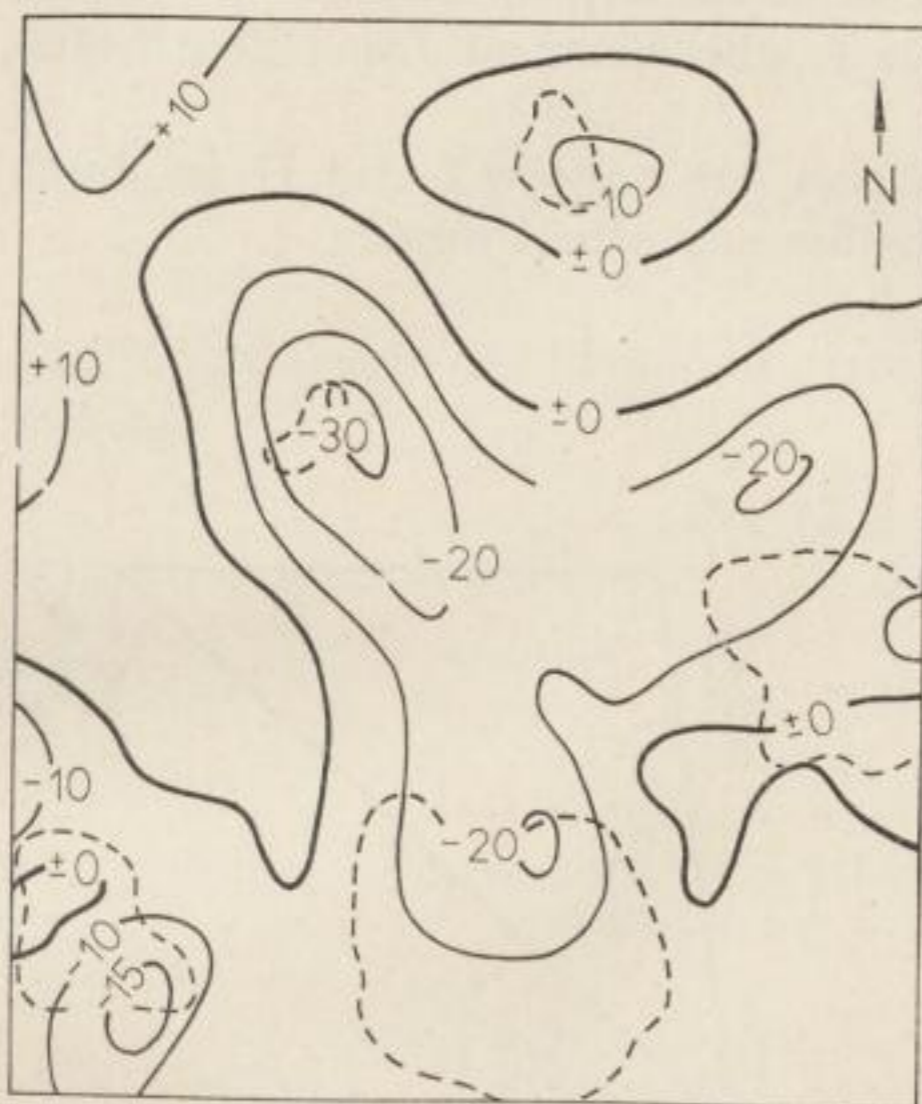


Bild 38b. Karte der W_{zz} -Werte für die Mykawa-Fläche nach ELKINS (umgezeichnet nach LUNDBERG [69])

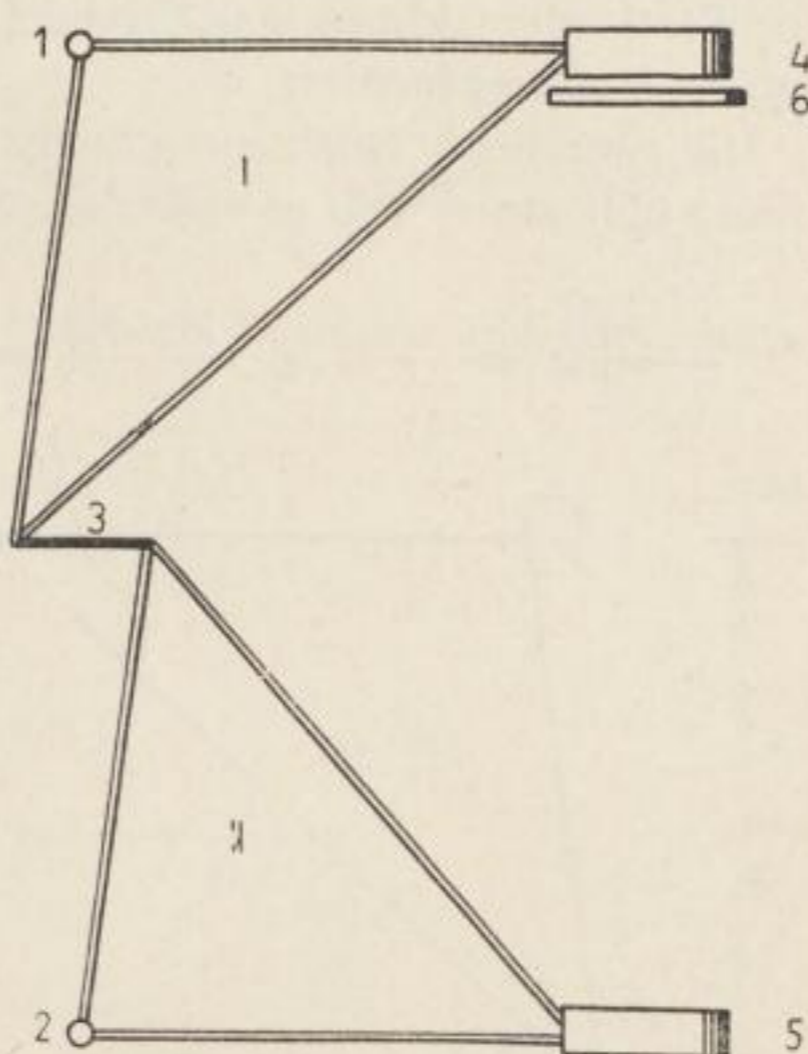


Bild 39. Vereinfachte Funktions-skizze des Gerätes

übertragen werden können. Masse 4 ist mit einer festen Platte 6 als Kondensator ausgebildet, wodurch Lageveränderungen dieser Masse kapazitiv registriert werden können. Die Abmessungen des Gerätes sind außerordentlich klein gehalten: die Höhe beträgt 30 cm, die Breite 15 cm; eine Masse wiegt 100 g.

Die Wirkung und jede Änderung der Schwerkraft auf die Massen 4 und 5 wird über die Blattfeder 3 ausgeglichen. Aus diesem Grund können vertikale Zusatzbeschleunigungen infolge Erschütterungen nicht wirksam werden. Der gravimetrische Normalgradient g_z und seine Störung $\pm \Delta g_z$ verursachen die Kraft $m \cdot h (g_z \pm \Delta g_z)$, die das System II nach unten bewegt. Dadurch erfährt die Feder 3 in erster Näherung eine Bewegung nach rechts, wodurch System I gehoben wird.

Als Bezugspunkt der Registrierungen wird der Nullausschlag des Gerätes, verursacht durch die Wirkung des Normalgradienten, gewählt.

Auch horizontale Störbeschleunigungen können den Meßvorgang nicht beeinflussen, da sie durch die Kreuzfedergelenkaufhängung weitgehend unterdrückt werden.

Quantitative Untersuchung des Gerätes

Die Rechenformeln für eine derartige Untersuchung wurden vom Institut für Technische Mechanik der Bergakademie Freiberg (W. FÖRSTER [32]) hergeleitet. Den Betrachtungen ist die in Bild 40a dargestellte Geometrie und das statische System des Bildes 40b zugrunde gelegt.

Die Kreuzfedergelenke 1 und 2 sind durch die Drehfederzahlen $-k^1$ und k^2 , die Blattfeder 3 durch das Produkt aus Trägheitsmoment J und Elastizitätsmodul E charakterisiert.

Die räumliche Leichtmetallkonstruktion der Systeme I und II ist durch zwei völlig starre und gewichtslose Scheiben angenähert worden.

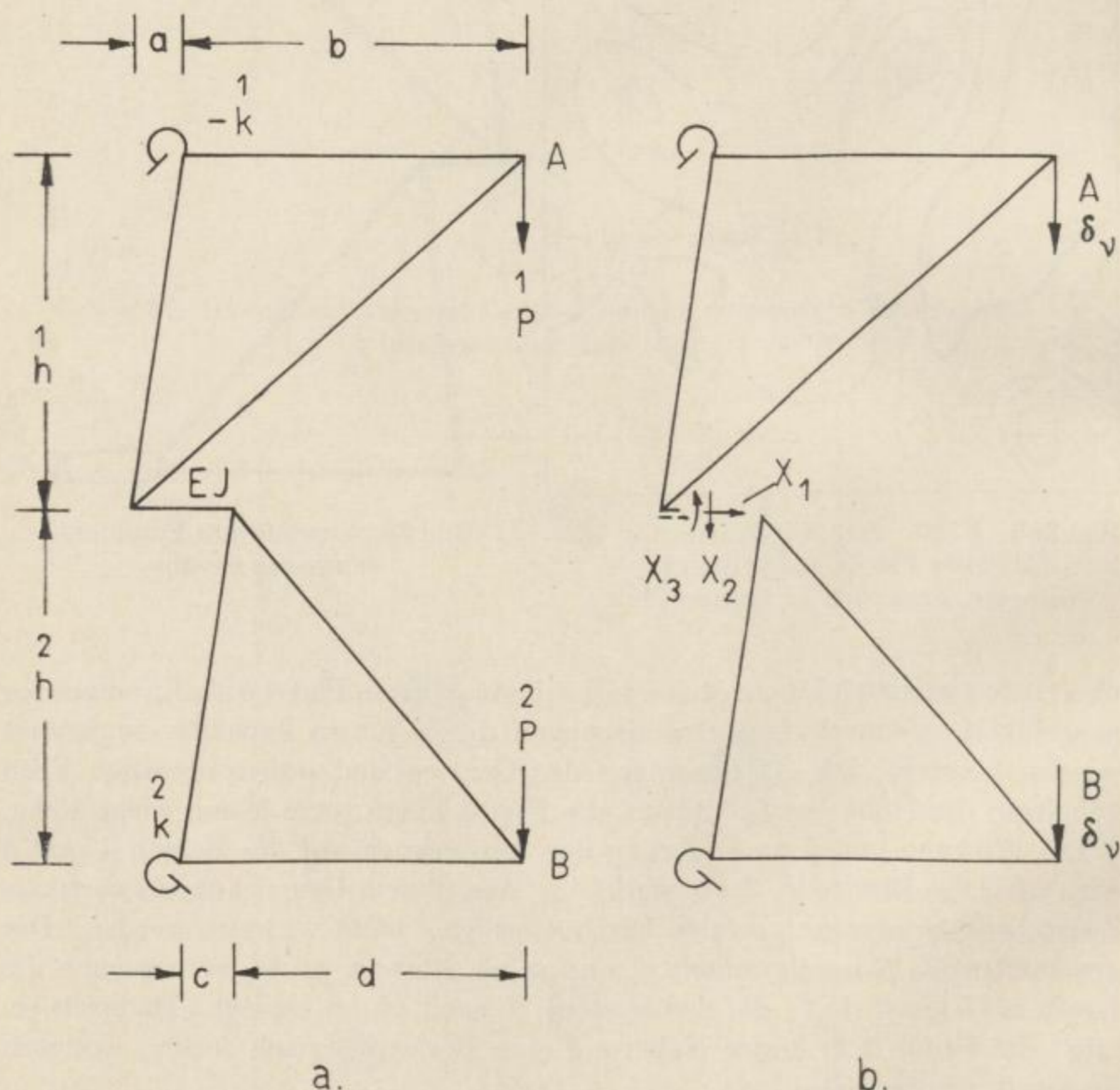


Bild 40a. Die Geometrie des Gradientometers

Bild 40b. Das statische System des Gradientometers

X_1 , X_2 und X_3 sind die Komponenten des Vektors X_k , der den Bewegungs- und Deformationsvorgang der Blattfeder beschreibt. In den Punkten A und B greifen die Kräfte $\overset{1}{P}$ und $\overset{2}{P}$ an, die die Verschiebungen $\overset{A}{\delta}_v$ und $\overset{B}{\delta}_v$ bewirken.

Das statische System wurde derart angesetzt, daß die Bedingung

$$-k, \overset{2}{k} > 0$$

erfüllt sein muß.

Die Rechnungen liefern für die Vertikalverschiebungen der Punkte A und B die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \overset{A}{\delta}_v &= \frac{b}{\overset{1}{k}} \left[\overset{1}{P} \cdot b - X_1 \overset{2}{h} + X_2 c - X_3 \right] \\ \overset{B}{\delta}_v &= \frac{c+d}{\overset{2}{k}} \left[\overset{2}{P} (c+d) - X_1 \overset{2}{h} - X_2 c + X_3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Die Komponenten des Vektors X_k ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems

$$(\delta_{ik}) (X_k) + (\delta_{i0}) = 0 \quad (94)$$

mit

$$\delta_{11} = \frac{\left(\overset{1}{h}\right)^2}{\overset{1}{k}} + \frac{\left(\overset{2}{h}\right)^2}{\overset{2}{k}}$$

$$\delta_{22} = c^2 \left(\frac{1}{\overset{1}{k}} + \frac{1}{\overset{2}{k}} \right) + 1/3 (a+c)^3 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \left(\frac{1}{\overset{1}{k}} + \frac{1}{\overset{2}{k}} \right) + (a+b) \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = c \left(-\frac{\overset{1}{h}}{\overset{1}{k}} + \frac{\overset{2}{h}}{\overset{2}{k}} \right)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{\overset{1}{h}}{\overset{1}{k}} - \frac{\overset{2}{h}}{\overset{2}{k}}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = -c \left(\frac{1}{\overset{1}{k}} + \frac{1}{\overset{2}{k}} \right) - 1/2 (a+c)^2 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{10} = -\frac{1}{\overset{1}{k}} \overset{1}{P} b \overset{1}{h} - \frac{1}{\overset{2}{k}} \overset{2}{P} \overset{2}{h} (c+d)$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{\overset{1}{k}} \overset{1}{P} b c - \frac{1}{\overset{2}{k}} \overset{2}{P} c (c+d)$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{\overset{1}{k}} \overset{1}{P} b + \frac{1}{\overset{2}{k}} \overset{2}{P} (c+d).$$

Aus der Wirkungsweise des Gerätes folgt $\overset{1}{P} = 0$ und $\overset{2}{P} = m \cdot h \cdot \Delta g_z$, wenn man den Nullausschlag unberücksichtigt läßt. Die Formeln zeigen, daß bei vorgegebenen Instrumentenabmessungen und vorgegebenen $\overset{2}{P}$ die Auslenkung des Systems II im Punkt A eine Funktion der elastischen Eigenschaften der Kreuzfedern ist.

Die Auslenkung wird um so größer sein, je kleiner die Drehfederzahlen, d. h. je weicher die Federn sind. Eine Verringerung der Federzahlen führt damit zu einer Astasierung des Gerätes, wodurch die Empfindlichkeit größer, die mechanische Stabilität aber kleiner wird.

Die elastischen Eigenschaften der Blattfeder 3 gehen in erster Näherung nicht mit in die Empfindlichkeit des Instruments ein, da diese Feder, wie bereits eine einfache Überlegung zeigt, nur auf Zug beansprucht wird. Eine Rechnung bestätigt diese Feststellung: Die Komponenten X_2 und X_3 sind bei „stärkeren“ Federn gegenüber X_1 vernachlässigbar klein. Dennoch kann Blattfeder 3 nicht durch eine starre Verbindung ersetzt werden, weil Bewegungen der Systeme I und II dann nur möglich sind, wenn die Drehpunkte in den Kreuzfedern aus ihrer Ebene heraustreten. Die Kreuzfedergelenke sollen aber gerade diese Drehpunkte eindeutig im Raum festlegen.

Für eine zahlenmäßige Auswertung wurden

$$a = c = 1 \text{ cm}$$

$$b = 15 \text{ cm}; d = 14 \text{ cm}$$

$$\overset{1}{h} = \overset{2}{h} = 15 \text{ cm}$$

$$M = 100 \text{ g}$$

vorgegeben. Die Drehfederzahlen $\overset{1}{k}$ und $\overset{2}{k}$ berechnen sich für ein Kreuzfedergelenk, das aus zwei Bandfedern von 2 cm Länge, 0,4 cm Breite und 0,015 cm Dicke besteht, zu $|\overset{1,2}{k}| = 8,8 \cdot 10^5 \text{ dyn cm}$. Die Federn sollen aus einer Metallegierung mit dem E -Modul $E = 10000 \text{ kp/mm}^2$ bestehen.

Ändert sich der gravimetrische Vertikalgradient um $\pm 50 \text{ E}$, dann erzeugt die Kraft $\overset{2}{P} = 15 \cdot 10^{-5} \text{ dyn}$ einen Ausschlag

$$\overset{A}{\delta}_v \approx \mp 1,9 \text{ \AA}.$$

Schlußfolgerungen bezüglich des praktischen Einsatzes des Gradientometers

Die Betrachtungen im vorigen Abschnitt zeigten, daß vertikale Verschiebungen in der Größenanordnung einiger Ångström ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$) zu erwarten und kapazitiv zu messen sind. Zu diesem Zweck ist die Masse 4 mit der festen Platte 6 als Meßkondensator ausgebildet, von dem geringe Streuung, gute Abschirmung, hohe Isolation und eine stabile Ausführung gefordert werden. Ein einfacher Plattenkondensator erfüllt diese hohen Anforderungen nicht; dennoch soll eine Abschätzung für eine derartig ausgebildete Meßkapazität erfolgen.

Die Kapazität eines Plattenkondensators berechnet sich nach der Formel

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 F}{d_0} [\text{F}].$$

Dabei bedeuten:

ε_0 — dielektrische Grundkonstante

F — Fläche der Kondensatorplatten

d_0 — Abstand der Kondensatorplatten in der Anfangsstellung

Verkleinert man d_0 um Δd , so wird

$$C = \frac{\varepsilon_0 F}{d_0 - \Delta d}.$$

Die Kapazität ändert sich dann um den Betrag

$$\Delta C = \varepsilon_0 F \left(\frac{1}{d_0 - \Delta d} - \frac{1}{d_0} \right).$$

Als relative Änderung ergibt sich daraus

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\frac{\Delta d}{d_0}}{1 - \frac{\Delta d}{d_0}}. \quad (95)$$

Für $d_0 = 10^{-2}$ cm und $\Delta d = 10^{-8}$ cm berechnet sich die relative Kapazitätsänderung der Anordnung zu 10^{-6} . Außerdem ist bei einem solchen kapazitiven Wandler zu beachten, daß die Umformung nicht streng proportional erfolgt, wobei jedoch die Abweichungen von der Proportionalität bei kleinen Verschiebungen gering sind.

Betrachtet man eine relative Kapazitätsmessung von 10^{-5} als durchaus realisierbar [34, 37, 83], so würde die Nachweisempfindlichkeit des Gradientometers für das hier aufgeführte Beispiel bei 250 E liegen. Selbst dann ist die Messung mit zahlreichen Schwierigkeiten verbunden, die sich aus den Schaltkapazitäten, überlagernden Fremdfeldern und der außerordentlich kleinen Leistungsabgabe des Meßkondensators ergeben.

Aus der quantitativen Abschätzung kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß das von LUNDBERG entwickelte Gerät den gravimetrischen Vertikalgradienten nur dann mit hoher Genauigkeit zu messen gestattet, wenn die Instrumentendimensionen vergrößert, die Labilisierung des Gerätes und die Empfindlichkeit der kapazitiven Abstandbestimmung gesteigert werden. Die Meßkapazität könnte z. B. als Differentialkondensator ausgebildet und zusätzlich mit einem flüssigen Dielektrikum versehen werden.

5.1.5.3. Das Gradientometer nach BOITNORT

BOITNORT [17] schlägt ein Gerät zum Feststellen und Messen von Änderungen des gravimetrischen Vertikalgradienten aus der Luft oder vom Boden aus auf dem Prinzip der Waage vor.

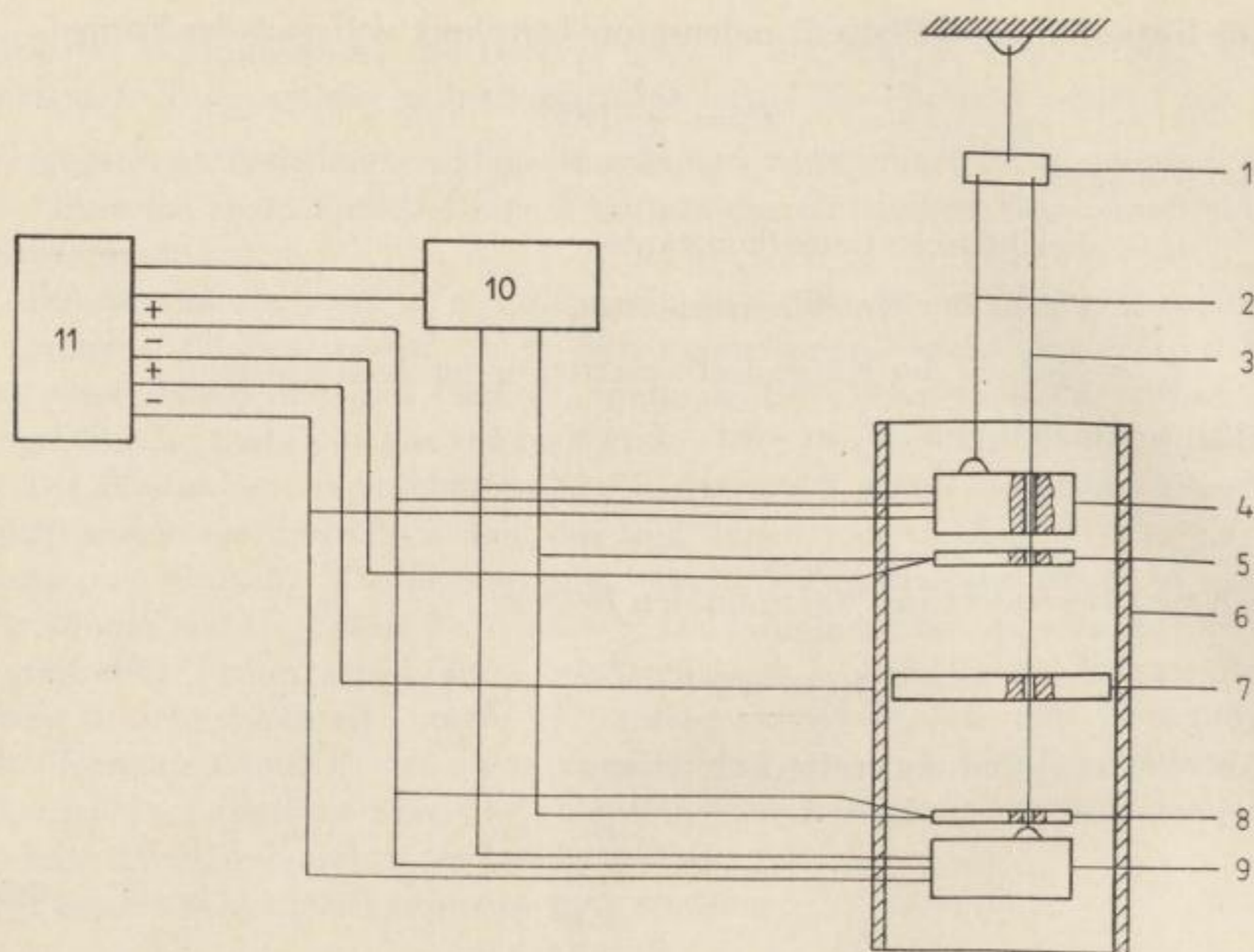


Bild 41. Das Gradientometer nach BOITNOTT und der zugehörige elektrische Kreis (umgezeichnet nach [17]). In der Zeichnung sind die Leitungen unmittelbar mit den Massen verbunden dargestellt; in der Praxis bestehen die Verbindungen mittelbar über die Haltemittel der Massen

Zwei in unterschiedlichen Niveaus angeordnete gleichgroße Massen 4 und 9 sind an einem aufgehängten Teil (1) mit Hilfe dünner Kupferdrähte (2, 3) auf gegenüberliegenden Seiten von dessen Aufhängepunkt gelenkig angebracht. Masse 4 ist durchbohrt, damit beide Massen genau vertikal ausgerichtet werden können. Die Platten 5 und 8 sind mit den zugehörigen Massen 4 und 9 als Meßkondensatoren ausgebildet; die Messung der Kapazitätsänderung als Folge der Massenverschiebungen geschieht mit Hilfe der Kapazitätsmeßbrücke (10), die mit dem elektrischen Steuersystem (11) verbunden ist. Das ganze Gerät wird von einer zylindrischen Elektrode (6) umgeben, die mit dem einen Pol, die beiden Massen mit dem anderen Pol einer „rhythmisch intermittierend einschaltbaren Gleichstromquelle“ verbunden sind. Dadurch gelingt es, seitliche Verlagerungen der Massen, die als eine Folge der Wirkung der Horizontalkomponente des Schwerfeldes auftreten könnten, auszuschließen. Die Dämpfung der normalerweise starken Eigenschwingungen des Gerätes erfolgt dadurch, daß die beiden Massen und die Platte 8 an dem einen Pol, Platte 5 an dem anderen Pol einer „rhythmisch intermittierend einschaltbaren Gleichstromquelle“ angeschlossen sind. Die Schalteinrichtung (11) ist so abgestimmt, daß sie abwechselnd nacheinander die Kapazitätsmeßbrücke, den Dämpfungskreis und den Kreis der Elektrode (6) in einer solchen Geschwindigkeitsfolge einschaltet, daß der gravimetrische Vertikalgradient im wesentlichen konti-

nuiertlich aufgezeichnet wird. Die aus Kupfer bestehende Abschirmung (7) unterstützt die Beibehaltung des Gleichgewichts, indem sie Interferenzen oder eine gegenseitige Beeinflussung zwischen den beiden Massen verhindert.

In der Patentschrift wird lediglich mitgeteilt, daß bei einer Gerätegröße kleiner als 30 cm und Massen von 1 g eine für die Lagerstättegeophysik brauchbare Meßgenauigkeit erreichbar ist. Obwohl bei diesem Gerät infolge der Fadenaufhängung der Massen im Gegensatz zum neuen LUNDBERG-Gerät ein sehr hoher Grad der Labilisierung erreicht werden kann, so muß obige Bemerkung dennoch in Zweifel gestellt werden, wenn man die möglichen Fehlereinflüsse (Temperaturschwankungen, Turbulenz, Erschütterungen, Inkonstanz der Meßbrücke u. a.) bedenkt. Die Anordnung der Meßkapazitäten ergibt bereits die Verdoppelung des Meßeffectes; es kann ein weiterer Faktor 2 gewonnen werden, wenn auch oberhalb der Masse 4 und unterhalb der Masse 9 Kondensatorplatten angeordnet werden.

Ergebnisse eines praktischen Einsatzes des Gerätes liegen zur Zeit noch nicht vor.

5.1.6. Die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effectes von Kristallen

Die aus der Literatur bekanntgewordenen Gradientometer beruhen alle auf dem Grundprinzip der Waage. Dabei wird die Abstandänderung zwischen zwei, in verschiedenen Niveaus an einem Waagebalken aufgehängten, gleich großen Massen gemessen, die durch die Wirkung des gravimetrischen Vertikalgradienten verursacht wird. Zahlreiche Schwierigkeiten, wie die Reibung in den Aufhängepunkten, das Temperaturverhalten des Waagesystems, die Stabilisierung der Massen und deren Dämpfung und die Messung der außerordentlich kleinen Abstandsänderungen haben bislang die notwendigen hohen Empfindlichkeiten bei der Gradientenmessung nicht erreichen lassen. Die zahlreichen Patentanmeldungen täuschen über diesen Sachverhalt hinweg, weil sie keine genaue Empfindlichkeitsangaben enthalten und Ergebnisse aus dem praktischen Einsatz nur in den wenigsten Fällen vorliegen.

Die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effectes von Kristallen, die von Prof. MEISSER vorgeschlagen wird, stellt einen völlig neuen Weg beim Bau von Gradientometern dar.

Bekanntlich zeigen einige Kristalle, wie z. B. Quarz, Seignette-Salz, ADP-Kristalle u. a. piezoelektrisches Verhalten, d. h., bei Beanspruchung auf Zug oder Druck entstehen auf ihren Flächen elektrische Ladungen. Diese Elektrizitätsmenge bewirkt eine bestimmte Spannung zwischen den Kristallflächen, deren Größe sich aus der Beziehung $Q = C \cdot U$ ergibt. Die Spannung ist, wie später nachgewiesen wird, der Belastung direkt proportional.

Zwei in verschiedenen Niveaus angeordnete, gleich dimensionierte und gleich belastete Kristalle ergeben infolge der Schwereabnahme mit der Höhe unterschiedliche Piezospannungen, da auf den einen Kristall die Kraft Mg .

auf den in der Höhe h dazu aufgestellten Kristall aber die Kraft $Mg - Mh \times (g_z \mp \Delta g_z)$ einwirkt.

Damit wird die Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten auf eine Spannungs- oder Ladungsmessung zurückgeführt. Die Gegenschaltung beider Kristalle ermöglicht die Eliminierung der Wirkung der Schwerkraft.

Die bereits außerordentliche kleine Piezospaltung wird durch die den Kristallen parallel geschalteten Kapazitäten des Meßinstrumentes und der notwendigen Kabelverbindungen weiter verringert. Als Meßinstrumente kommen deshalb in erster Linie hochempfindliche Elektrometer in Frage; Gleichstromverstärker erfüllen obige Forderungen nur ungenügend und zeigen zusätzlich merkliche Nullpunktsgänge.

Dieses statische Meßverfahren des gravimetrischen Vertikalgradienten unter Ausnutzung des piezoelektrischen Effektes von Kristallen umgeht die bei den Gradientometern nach dem Prinzip der Waage auftretenden Schwierigkeiten.

Jedoch tritt jetzt ein neues Problem in den Vordergrund, nämlich die Entwicklung eines hochempfindlichen und für den Feldeinsatz brauchbaren Spannungsmessers.

In Abschnitt 7 wird ausführlich die Problematik bei der Entwicklung eines Gradientometers auf dem piezoelektrischen Prinzip behandelt.

5.2. Die dynamische Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten

Bekanntlich ist die Eigenfrequenz einer transversal schwingenden Saite von deren innerer Spannung und damit von der Schwerkraft abhängig. Dieser physikalische Sachverhalt wird beim Saitengravimeter ausgenutzt. Es liegt deshalb der Gedanke nahe, zwei Saitengravimeter in verschiedenen Niveaus anzuordnen, und damit den gravimetrischen Vertikalgradienten durch einen Frequenzvergleich zwischen beiden Geräten dynamisch zu messen.

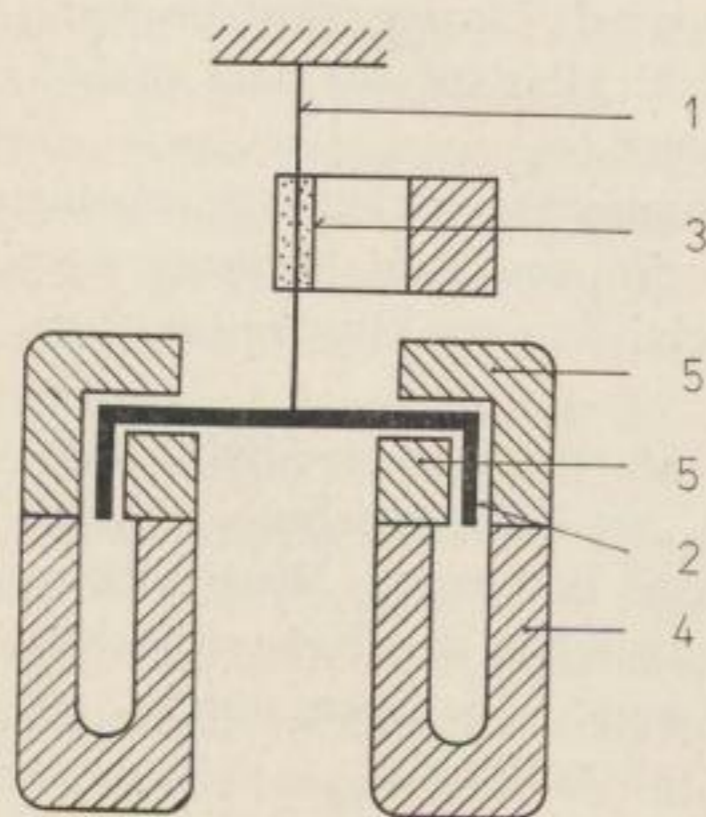


Bild 42. Schnitt durch das Saitengravimeter nach LOZINSKAJA (entnommen aus LANGE [66])

In Bild 42 ist das Funktionsschema eines Saitengravimeters dargestellt. An einer Vertikalsaite (1) hängt die als Rotkupferscheibe ausgebildete Masse (2) zwischen den Polshuhen (5) des Dämpfungsmagneten (4). Zunächst wird die Saite durch eine Wechselspannung zu transversalen Schwingungen in ihrer mechanischen Eigenfrequenz angeregt. Nach dem Prinzip des Bändchenmikrophons schwingt die Saite im Feld eines Dauermagneten (3), wodurch zwischen ihren Enden nach dem Induktionsgesetz eine Wechselspannung erzeugt wird, die abgegriffen, verstärkt, z. T. zum Aufrechterhalten einer ungedämpften Schwingung phasengleich zurückgeführt und teilweise der Frequenzmeß-

vorrichtung zugeleitet wird. Zu diesem Zweck ist zum Betreiben des Gravimeters ein Zusatzgerät (Generator) notwendig.

Für die Frequenz einer transversal schwingenden Saite gilt die Formel [68]:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{m}} \left(1 + \frac{x}{l} \sqrt{\frac{ES + Mg}{Mg}} \right). \quad (96)$$

Es bedeuten:

- l — Saitenlänge
- m — Saitenmasse pro Längeneinheit
- M — Gravimetermasse
- g — Schwerebeschleunigung
- $x^2 S$ — Trägheitsmoment des Saitenquerschnittes in bezug auf die Mittelebene
- E — Elastizitätsmodul

Das Korrekturglied kann für eine dünne Saite mit rechteckigem Querschnitt (Dicke \ll Breite) vernachlässigt werden [35].

Werden jetzt zwei völlig gleichartige Saitengravimeter in verschiedenen Höhen aufgestellt, dann hat das eine die Saitenfrequenz

$$f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{m}}, \quad (97a)$$

das andere infolge des Wirkens des gravimetrischen Normalgradienten und seiner Störung die Saitenfrequenz

$$f_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{M}{m} (g - \Delta g)}. \quad (97b)$$

Δg bedeutet hier die Schwereänderung pro Längeneinheit, also den gravimetrischen Vertikalgradienten. Eine Reihenentwicklung der Formel (97b) liefert

$$f_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{M}{m} g} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} + \dots \right). \quad (97c)$$

Zwischen den Frequenzen f_1 und f_2 erfolgt ein Frequenzvergleich, indem die Differenzfrequenz

$$f_D = f_1 - f_2 = \frac{f_1 \Delta g}{2g} \quad (98)$$

gegenüber der Vergleichsfrequenz f_1 bestimmt wird. Dieser Frequenzvergleich wird um so genauer sein, je geringer die Unsicherheit ist, mit der sich die Differenzfrequenz f_D ermitteln läßt, je niedriger f_D gewählt werden kann und je höher die Vergleichsfrequenz f_1 liegt.

In praxi würden zunächst die Frequenzen f_1 und f_2 mit Hilfe eines Mischers, der zur Vermeidung zusätzlicher Störspannungen aus passiven Elementen gefertigt sein soll, überlagert und eine Schwebung von der Frequenz f_D erzeugt. Die Frequenz f_D kann dann durch eine Periodendauermessung mit Hilfe eines digitalen Zeitmessers bestimmt werden. Ein derartiges Verfahren wird von MITTERER [79] angegeben; das Grundprinzip ist in Bild 43 dargestellt.

Um eine möglichst kurze Meßzeit zu bekommen, wird nicht die unbekannte Frequenz f_D direkt, sondern ihre Periodendauer gemessen. Dabei wird aus jedem Spannungsnulldurchgang gleicher Richtung mit Hilfe eines Impulserzeugers I (Bild 44) ein Impuls gewonnen und so die unbekannte Perioden-

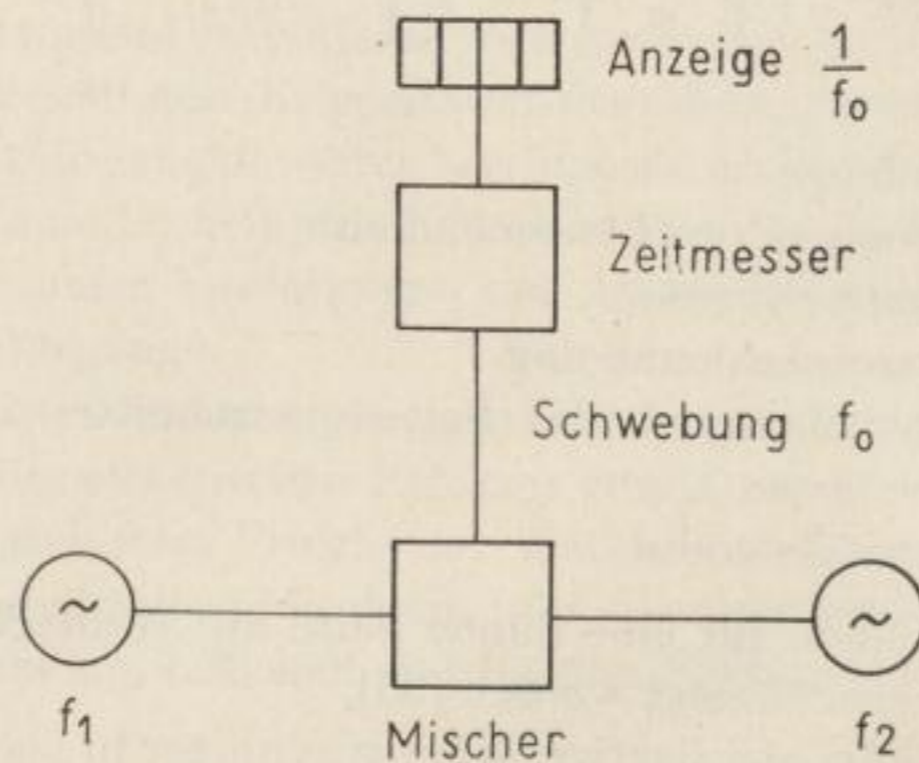


Bild 43. Grundprinzip des Frequenzvergleichs (umgezeichnet nach MITTERER [79])

dauer durch den zeitlichen Abstand der Meßimpulse dargestellt. Während dieser Zeit ist das Zeittor geöffnet und die von einem Zeitnormal abgeleiteten Impulse können durch ein elektrisches Zählwerk angezeigt werden. Das Zählergebnis ist gleich der unbekannten Periodendauer, z. B. in μs , wenn die Impulse des Frequenznormals den zeitlichen Abstand von $1 \mu s$ haben. Nachträglich muß die Umrechnung des Ergebnisses in die entsprechende Frequenzeinheit erfolgen.

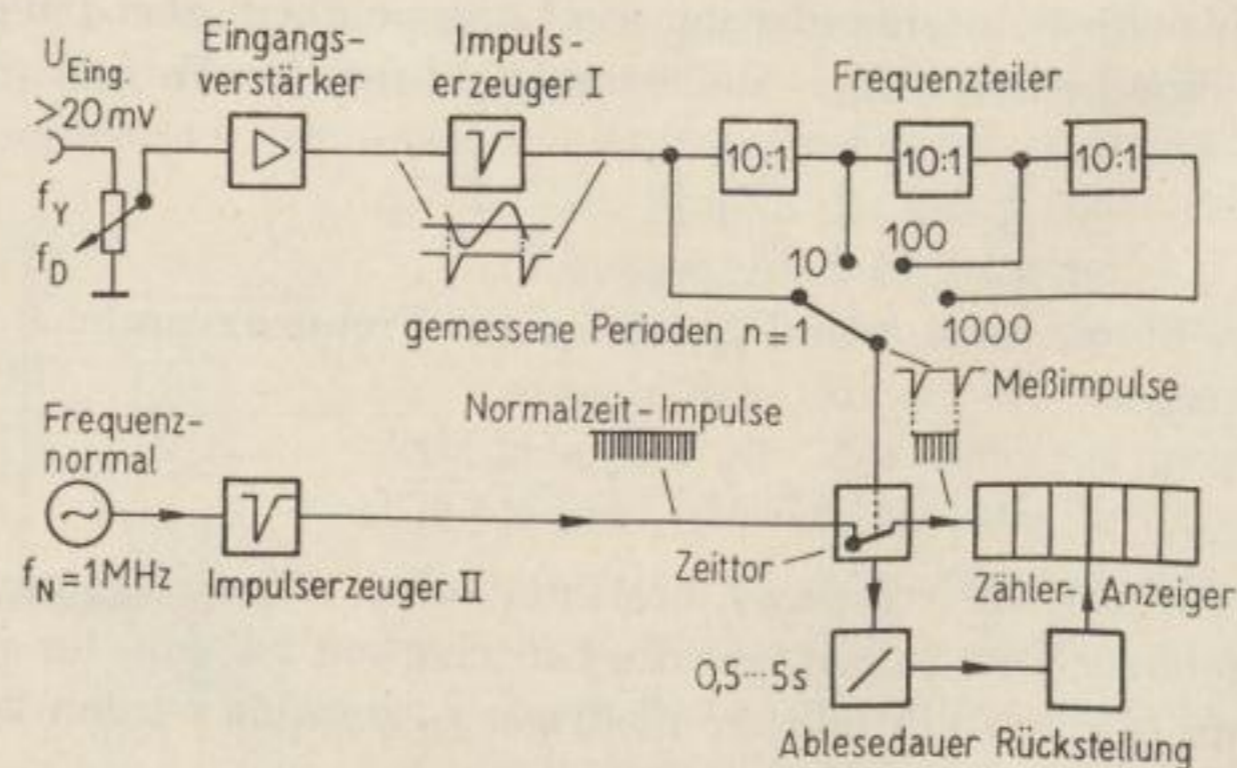


Bild 44. Das Grundprinzip der digitalen Periodendauermessung (entnommen aus MITTERER [79])

Die Unsicherheit der digitalen Periodendauermessung wird durch die Torunsicherheit T , die Unsicherheit der Normalfrequenz, die Unsicherheit S infolge überlagerter Störspannungen und die Unsicherheit E infolge Eigenstörspannungen bestimmt.

Die Torunsicherheit T verfälscht das Meßergebnis prinzipiell um ± 1 Einheit in der letzten Stelle, da ein Normalzeitimpuls, der das Zeittor genau zum Zeitpunkt des Öffnens oder Schließens erreicht, dieses nicht mit Sicherheit passiert. Dieser Fehler fällt um so weniger ins Gewicht, je mehr Perioden gemessen werden, wozu ein Frequenzteiler wahlweise eingeschaltet werden kann. Die relative Torunsicherheit beträgt

$$T = \frac{f_D}{f_N \cdot n} \quad (99)$$

Dabei bedeuten:

- f_D — Schwebungsfrequenz
- f_N — Frequenz der Normalzeitimpulse
- n — Anzahl der gemessenen Impulse

Für die Unsicherheit Q der Normalfrequenz kann die relative Frequenzdrift des Frequenznormals eingesetzt werden.

Störspannungen bilden eine empfindliche Fehlerquelle, da sie die Spannungsnulldurchgänge verschieben und so die gemessene Periodendauer verfälschen. Allgemein kann man schreiben:

$$S = \frac{U_{\text{Stör.}}}{U_{\text{Eing.}}} \cdot \frac{1}{n \pi} \quad (100)$$

Die Unsicherheit S kann also ebenfalls durch Messung mehrerer Perioden herabgedrückt werden.

Außerdem sind noch Störspannungen zu berücksichtigen, die am Eingangverstärker des Zeitmessers selbst auftreten. Es gilt hierfür

$$E = \frac{U_{\text{Stör.}} \cdot 0,7}{U_{\text{Eing.}} \cdot v \cdot n \cdot \pi} \quad (101)$$

mit

- $U_{\text{Stör.}}$ — Spitzenwert der gemessenen Störspannung am Gitter des Impulserzeugers,
- v — Verstärkung des Eingangverstärkers,
- n — Anzahl der gemessenen Perioden.

Mit Hilfe des digitalen Frequenz- und Zeitmessers Rel 3 F 144 (Siemens u. Halske) sind an MHz-Generatoren Frequenzschwankungen mit einer Unsicherheit von 10^{-9} — 10^{-13} bestimmt worden.

Es soll nun untersucht werden, welche Differenzfrequenz f_D durch einen bestimmten vorgegebenen Gradienten hervorgerufen wird und welche Meßzeit zur Bestimmung der Periodendauer notwendig ist.

Die zwei Saitengravimeter sollen in 1 m Höhenunterschied voneinander angeordnet sein. Nach Formel (97a) berechnet sich die Frequenz f_1 für eine Saite aus Phosphorbronze (Querschnitt $0,02 \times 0,37$ mm, Länge 52 mm), die von einem Gewicht von 70 g gespannt wird, zu 1000 Hz. Das andere Gravimeter soll vollkommen gleiche Kennwerte haben.

Dann ergibt sich nach Formel (98) bei Wirkung des gravimetrischen Vertikalgradienten $g_z = 0.3086 \text{ mGal/m}$ eine Differenzfrequenz $f_D = 15,7 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$; bei einer Störung des Normalgradienten $\Delta g_z = \pm 10 \text{ E}$ ein $f_D = \pm 5,1 \cdot 10^{-7} \text{ Hz}$. Berechnet man die Meßzeit t_M für eine einzige Periode nach

$$t_M = \frac{1}{f_D}, \tag{102}$$

so erhält man im ersten Fall

$$t_M = 6360 \text{ s},$$

im zweiten

$$t_M = 1,96 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Da, wie bereits erwähnt, zum Zwecke der Genauigkeitssteigerung eine Anzahl von Perioden ($n > 1$) ausgemessen werden muß, kommen die Meßzeiten in Größenordnungen, die die praktische Verwirklichung des Verfahrens von vornherein ausschließen. Aus diesem Grunde muß versucht werden, durch konstruktive Maßnahmen die Frequenz f_1 (und auch die Grundfrequenz des zweiten Gravimeters) zu erhöhen. Das kann durch Verkürzung der Saitenlänge, Erhöhung des Spannungsgewichts und Verringerung der Saitenmasse erreicht werden. Fertigungstechnische Schwierigkeiten und die begrenzten Zugfestigkeiten der Saiten setzen diesem Weg aber bald Grenzen. Andererseits ist es möglich, die Frequenzen f_1 und f_2 mittels Frequenzvervielfacher zu vergrößern. Bild 45 zeigt ein derartiges Gerät von MITTERER [78], das im Bereich 100 Hz bis 10 KHz eine Verzehnfachung der Meßfrequenzen gestattet.

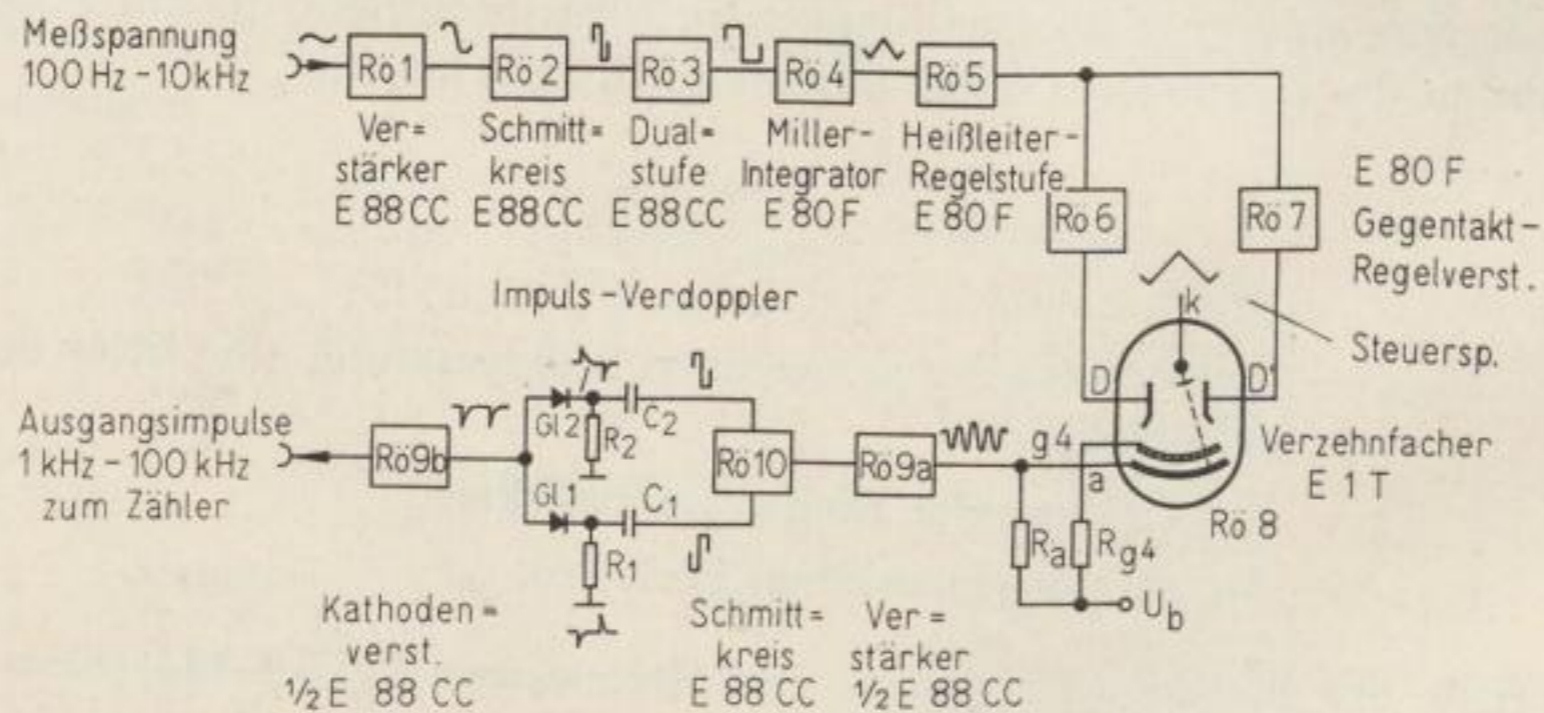


Bild 45. Frequenzvervielfacher nach MITTERER (entnommen aus [78])

Die Erhöhung der Frequenzen f_1 und f_2 um zwei, vielleicht sogar um drei Zehnerpotenzen erscheint deshalb durchaus real. Die dann zu erwartenden Meßzeiten sind in Tabelle 8 den Ergebnissen bei 1000 Hz Grundfrequenz gegenübergestellt.

Aus der Tabelle folgt, daß die dynamische Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten bei hoher Genauigkeit recht große Meßzeiten erfordert, was die Anwendung eines solchen Verfahrens bei Messungen in bewegten Systemen ausschließt und bei Punktmessungen einschränkt.

Tabelle 8. Die Meßzeiten t_M in [s] für verschiedene Frequenzen f_1 für eine Periodendauer

g_z [E]	f_1 [Hz]	10^3	10^5	10^6
3086		6360	63,6	6,36
50		$3,92 \cdot 10^5$	$3,92 \cdot 10^3$	$3,92 \cdot 10^2$
10		$1,96 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^4$	$1,96 \cdot 10^3$

Um schließlich aus der gemessenen Frequenzdifferenz auf die Größe des Vertikalgradienten schließen zu können, ist die Kenntnis von f_1 und g im Meßpunkt notwendig. In erster Näherung wird es ausreichend sein, die an einem Eichpunkt bestimmten Werte zu benutzen. Für sehr genaue Messungen müßte der Schwerewert an jedem Meßpunkt bestimmt werden, was sich dadurch sehr einfach verwirklichen ließe, daß ein Meßsystem gleichzeitig als Gravimeter arbeitet.

Aus der bisher bei weitem nicht vollständig aufgezeigten Problematik kann der Schluß gezogen werden, daß die Verwirklichung eines dynamischen Meßprinzips bei der Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten zwar mit den größten Schwierigkeiten verbunden ist, aber für mittlere Genauigkeiten ($\pm 500 \dots \pm 100$ E) durchaus im Bereich des Möglichen liegt.

6. Die topographische Korrektur der Meßwerte des gravimetrischen Vertikalgradienten

6.1. Allgemeine Betrachtungen

Die Abschätzung der gravimetrischen Wirkung eines Massenelementes in Abhängigkeit vom Neigungswinkel des Richtstrahls nach dem Massenelement, wie sie von HAALCK [40, 44] vorgenommen wurde, zeigt, daß der gravimetrische Vertikalgradient sehr wesentlich von in horizontaler Entfernung liegenden Masse beeinflusst wird. Zum Glück ist diese Wirkung absolut genommen nur halb so groß wie diejenige in gleicher Entfernung senkrecht unter dem Beobachtungspunkt liegender gleich großer Massen. Die von BODEMÜLLER [16] im Harz und im Schwarzwald mit einem North-American-Gravimeter vorgenommenen Gradientenmessungen zeigen tatsächlich sehr starke topographische Merkmale (s. a. Tab. 7). Während die normalen Schweregradienten im Bereich ± 1400 E liegen, weichen die topographisch reduzierten Werte nur um ± 300 E vom Normalwert ab. Wie zu erwarten, wurden in tiefen V-Tälern die kleinsten, in der Ebene und am Hang mittlere und auf den Bergen die größten Werte gemessen. Dabei spielte nicht die Massigkeit, sondern die Form der Störmassen die entscheidende Rolle.

Die topographische Korrektur der von einem Flugzeug aus gemessenen Vertikalgradienten ist von außerordentlicher Wichtigkeit, weil der von den Oberflächenformen hervorgerufene Gradient etwa in der gleichen Größenordnung wie der

von einem gewöhnlichen Störkörper verursachte liegt. Dafür lieferte CHINNERY [20] ein überzeugendes Berechnungsbeispiel.

Der gravimetrische Vertikalgradient berechnet sich für den Fall einer schrägen Stufe (Bild 46) nach der Formel

$$-g_z = 2 k^2 \rho \left[\sin^2 i \left(\tan^{-1} \frac{x + h \cot i}{z} - \tan^{-1} \frac{x}{d} \right) - \frac{\sin i \cos i}{2} \ln \frac{z^2 + (x + h \cot i)^2}{(x^2 + d^2)} \right]. \quad (103)$$

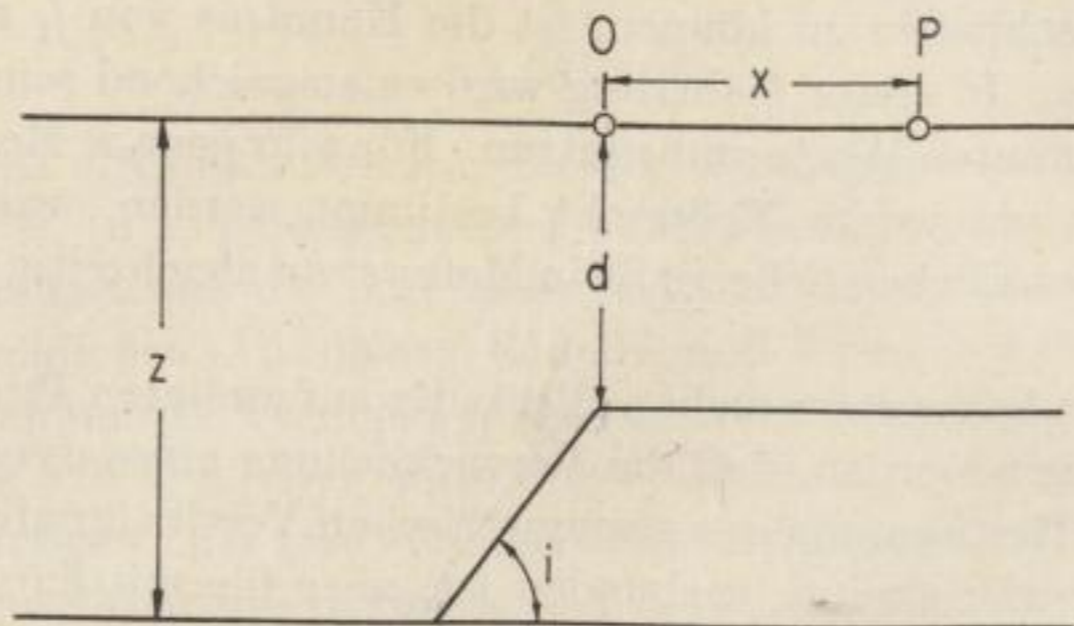


Bild 46. Der gravimetrische Vertikalgradient für eine schräge Stufe (umgezeichnet nach CHINNERY [20])

Es bedeuten:

- h — Dicke der Struktur
- d — Höhe der Meßebeue über der Struktur
- ρ — Dichtedifferenz

Durch Kombination zweier solcher Formeln kann die topographische Wirkung einer Struktur vom Typ eines Rückens hergeleitet werden.

Wie Bild 47 zeigt, nimmt die Geländewirkung besonders für niedrige Flughöhen recht beachtliche Werte an. Dennoch empfiehlt es sich nicht, recht große Flughöhen zu wählen, da ja auch der wahre Störwert, verursacht durch die Masseninhomogenitäten im Untergrund, ebenfalls mit der dritten Potenz der Entfernung abnimmt. Dies macht sich um so mehr bemerkbar, je flacher die Einlagerung liegt.

Aus diesen Gründen muß eine optimale Flughöhe gewählt werden, die sowohl den Geländeeffekt weitgehend unterdrückt als auch den eigentlichen Meßwert nicht zu klein werden läßt, weil dies eine noch größere Meßgenauigkeit verlangen würde. Außerdem muß eine hinreichende Flugsicherheit gewährleistet sein. Flughöhen zwischen 100 bis 300 m werden diesen Forderungen am ehesten gerecht.

Die topographische Reduktion des gravimetrischen Vertikalgradienten sollte bei einer vorläufig angestrebten Meßgenauigkeit von ± 5 E auf 0,1 E erfolgen. Unter diesem Gesichtspunkt wurden auch die Reduktionstabellen berechnet.

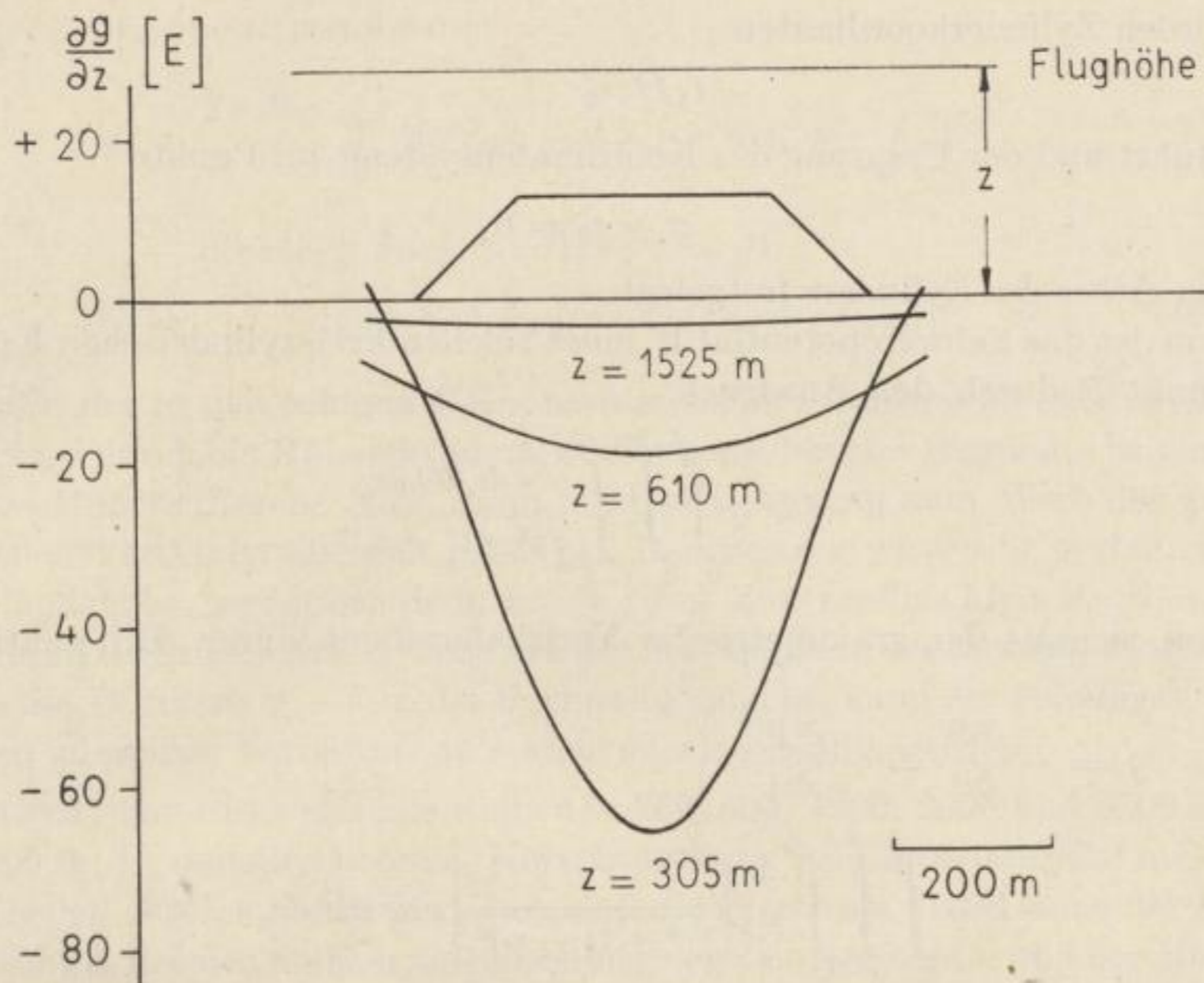


Bild 47. Die topographische Wirkung eines Rückens auf die g_z -Werte in Abhängigkeit von der Flughöhe (umgezeichnet nach CHINNERY [20])

Die bedeutendste Fehlerquelle bei der Geländekorrektur ist die ungenaue Kenntnis der Dichte. Einer genauen Dichtebestimmung im Meßgebiet muß deshalb größte Aufmerksamkeit gewidmet werden.

6.2. Die Berechnung der Geländekorrektur für vom Flugzeug gemessene Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten nach CHINNERY

Um die topographische Wirkung des Geländes auf den Meßpunkt P berechnen zu können, wird nach Bild 48 das Terrain unter der Station in eine Anzahl von Kreiszyklindern zerlegt.

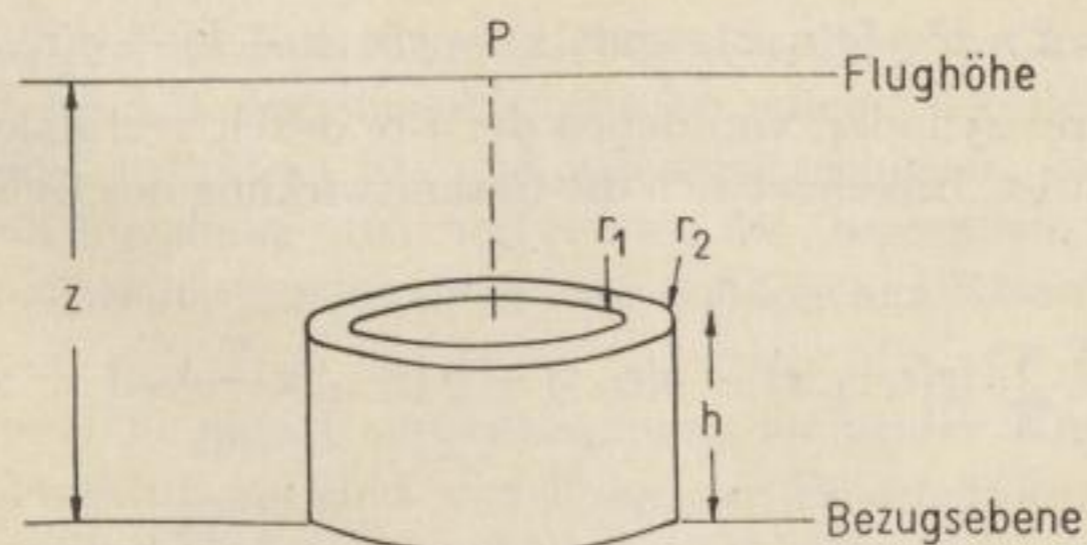


Bild 48. Zur Berechnung der Geländekorrektur (umgezeichnet nach CHINNERY [20])

Es werden Zylinderkoordinaten

$$r, \Theta, z_0$$

eingeführt und der Ursprung des Koordinatensystems im Punkte

$$z = z_0 = 0$$

auf der Achse des Zylinders festgelegt.

Dann ist das Schwerepotential W eines solchen kreiszylindrischen Körpers im Punkt P durch den Ausdruck

$$W = k^2 \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr d\Theta dz_0}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} \quad (104)$$

gegeben, woraus der gravimetrische Vertikalgradient durch Differentiation zu

$$\begin{aligned} g_z &= -\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 W}{\partial z_0^2} \\ &= -k^2 \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} \right] r dr d\Theta dz_0 \\ &= -k^2 \rho \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{z - z_0}{[r^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right]_{z_0=0}^{z_0=h} r dr d\Theta \end{aligned} \quad (105)$$

gewonnen wird.
Setzt man

$$f(r, z) = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

so gilt ebenfalls

$$\int f(r, z) r dr = -\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -g(r, z).$$

Unter Einführung dieser Abkürzung erhält man für Gleichung (105)

$$\begin{aligned} g_z &= -2\pi k^2 \rho \int_{r_1}^{r_2} [f(r, z) - f(r, z - h)] r dr \\ &= 2\pi k^2 \rho [g(r_1, z) - g(r_2, z) - g(r_1, z - h) + g(r_2, z - h)]. \end{aligned} \quad (106)$$

Für n solche Kreiszyylinder, von denen der i -te durch vertikale Schnitte in m Segmente geteilt ist, berechnet sich die Gesamtwirkung des Geländes in Punkt P zu

$$g_z = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_m [g(r_{i-1}, z) - g(r_i, z) - g(r_{i-1}, z - h_{mi}) + g(r_i, z - h_{mi})]. \quad (107a)$$

Diese Formel nimmt eine etwas andere, für die praktische Benutzung günstigere Form an, wenn die Integration über die Kreiszone mit den Radien

$0, r_1, r_2, \dots, r_n, \infty$ erstreckt wird:

$$g_z = \frac{2 \pi k^2 \rho}{m} \sum_n \{ [g(r_1, z - h_{m_1}) - g(r_1, z - h_{m_2})] \\ + [g(r_2, z - h_{m_2}) - g(r_2, z - h_{m_3})] \\ + \dots + [g(r_n, z - h_{m_n}) - g(r_n, z - h_{m_\infty})] \}. \quad (107b)$$

Die Größe der in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichung (107b) wird durch die Höhendifferenz zweier benachbarter Segmente bestimmt. Ist diese Höhendifferenz Null, dann wird kein Beitrag zum Wert des gravimetrischen Vertikalgradienten geliefert. Der Beitrag wird sehr gering, wenn die Geländehöhe gegenüber dem zugehörigen Zonenradius klein ist, d. h., die Topographie in großer Entfernung von der Station kann vernachlässigt werden. Da nur die Differenz $z - h$ in die Rechnung eingeht, kann ein beliebiges, aber in einem günstigen Verhältnis zu h stehendes z gewählt werden.

CHINNERY berechnete für die Radien 0, 250, 500, 1000, 2000 und 5000 ft bei $z = 1000$ ft die entsprechenden Korrekturwerte in Einheiten 10^{-6} mGal/ft. Die Tabellen wurden derart gestaltet, daß die Werte als Funktionen der mittleren Höhe h_1 des der Station am nächsten gelegenen Segmentes und der Höhendifferenz $h_2 - h_1$ zum nach außen benachbarten Segment dargestellt sind. Das erweist sich für die praktische Verwendung der Tabellen als großer Vorteil, weil sofort aus der Höhendifferenz auf die Wichtigkeit eines Beitrages geschlossen werden kann. Die Zahl der Segmente betrug $m = 8$. Die Fläche zwischen dem äußersten Radius und ∞ wird als ein Segment gezählt.

Da eine Umrechnung der Tabellen von CHINNERY in das cgs-System zu un-bequemen gebrochenen Zahlenwerten führt, wurden diese nach der Formel

$$g_z = \frac{2 \pi k^2 \rho}{m} \left[\frac{z - h_1}{\sqrt{r^2 + (z - h_1)^2}} - \frac{z - h_2}{\sqrt{r^2 + (z - h_2)^2}} \right] \quad (108)$$

für die Radien 75, 150, 300, 600 und 1500 m bei $z = 300$ m, $m = 8$ und $\rho = 1$ g pro cm^3 neu berechnet. Der große Rechenaufwand gestattete nicht, daß von CHINNERY vorgeschlagene Tabellenschema zu verwenden. Es liegen deshalb die Korrekturwerte nur für positive h_1 und h_2 im Bereich 0 bis 260 m neu vor.

Die Zuverlässigkeit des Korrekturverfahrens wurde von CHINNERY in Ermangelung praktischer Meßergebnisse an theoretischen Beispielen geprüft. Die Ergebnisse sind in den Bildern 50a und 50b wiedergegeben. Dabei wurde die „Meßkurve“ nach Gleichung (103) hergeleitet; die „berechnete Kurve“ wurde unter Anwendung des in diesem Abschnitt besprochenen Korrekturverfahrens gewonnen.

Man stellt eine recht gute Übereinstimmung der beiden Kurven fest. Die geringfügigen Abweichungen sind eine Folge der Einschränkung des Berechnungsbeispiels auf zwei Dimensionen und des Abbruchs der Summierung beim Radius $R = 1525$ m.

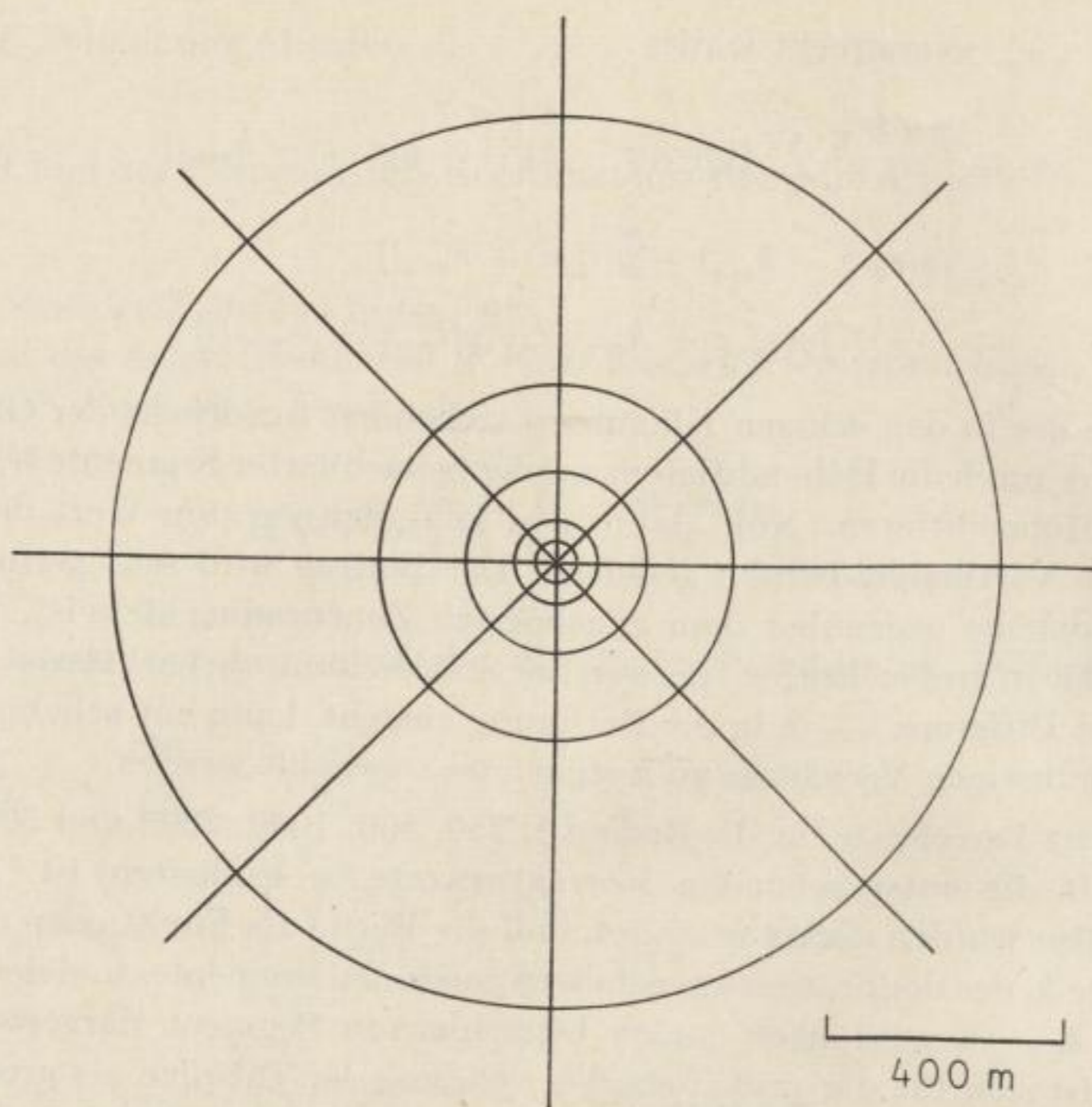


Bild 49. Das neue Auswertnetz für die Geländekorrektur nach CHINNERY

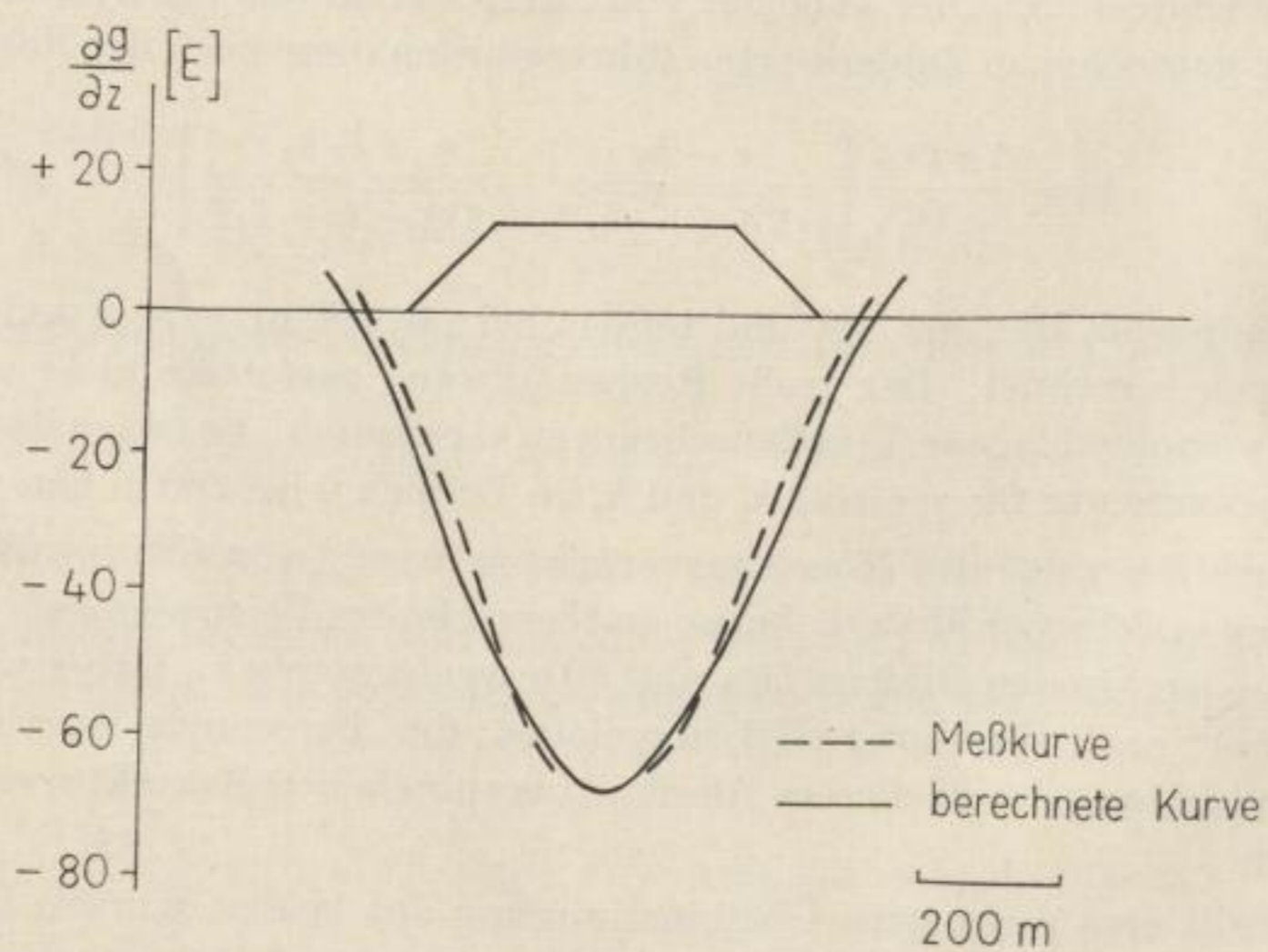


Bild 50a. Vergleich der Meßkurve mit der berechneten Kurve für eine zweidimensionale Struktur (umgezeichnet von CHINNERY [20])

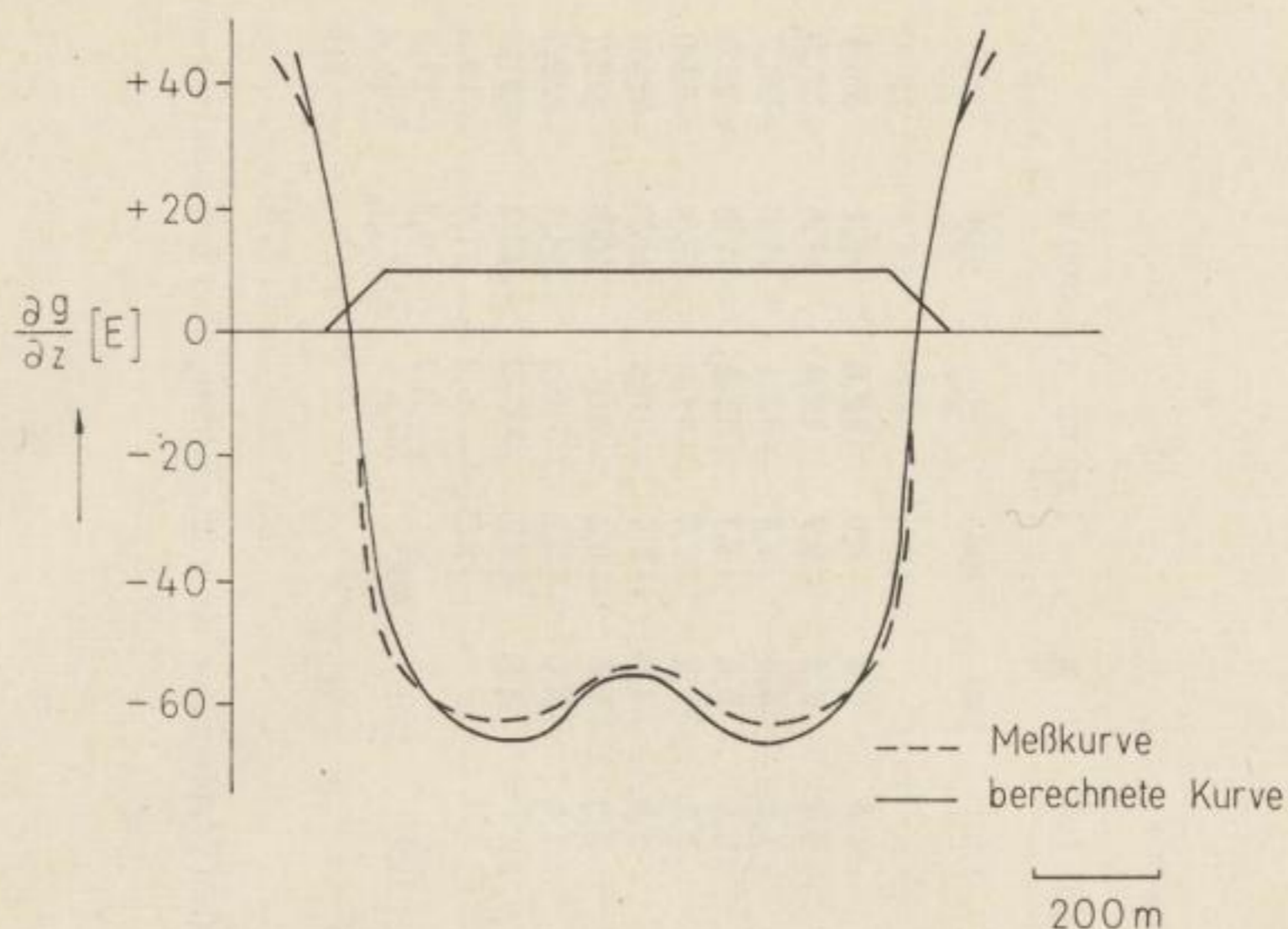


Bild 50b

6.3. Die topographische Korrektur der unmittelbar auf der Erdoberfläche gemessenen Werte des gravimetrischen Vertikalgradienten nach BALAVADZE

Aus dem Potential einer unendlich dünnen zylindrischen Schicht der Dicke dz im Punkte P , der sich im Abstand z von der Zylinderachse befindetet,

$$W = 2\pi k^2 \mu \left[-z + r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{r^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{r^6} - \dots \right) \right], \quad (109)$$

erhält man durch zweimalige Differentiation nach z unter Einführung der Raumdichte ρ statt der Flächendichte μ nach

$$\mu = \rho dz$$

und Integration in den Grenzen 0 bis H die gravimetrische Wirkung eines Zylinders der Höhe H auf den Vertikalgradienten zu

$$g_z = -2\pi k^2 \rho \left(\frac{H}{r} - \frac{1}{2} \frac{H^3}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{H^5}{r^5} - \dots \right). \quad (110)$$

Diese Gleichung gestattet, den Einfluß des i -ten Zylinders mit der mittleren Höhe h_i auf g_z nach

$$g_z = -2\pi k^2 \rho \left[h_i \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right) - \frac{h_i^3}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1}^3} - \frac{1}{r_i^3} \right) + \frac{3 h_i^5}{8} \left(\frac{1}{r_{i+1}^5} - \frac{1}{r_i^5} \right) - \dots \right] \quad (111)$$

abzuschätzen.

Tabelle 10. Geländekorrektur nach CHINNERY

		r = 150 m													
h_2 \ h_1	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	
0	×	-0,7	-1,5	-2,4	-5,0	-5,0	-6,6	-8,6	-11,1	-14,1	-17,8	-22,2	-27,4	-33,3	
20		×	-0,8	-1,8	-2,9	-4,3	-5,9	-8,0	-10,4	-13,4	-17,1	-21,5	-26,7	-32,6	
40			×	-1,0	-2,1	-3,5	-5,1	-7,1	-9,6	-12,6	-16,3	-20,7	-25,8	-31,8	
60				×	-1,1	-2,5	-4,2	-6,2	-8,7	-11,7	-15,4	-19,8	-24,9	-30,9	
80					×	-1,4	-3,0	-5,1	-7,5	-10,5	-14,2	-18,6	-23,8	-29,8	
100						×	-1,7	-3,7	-6,2	-9,2	-12,8	-17,2	-22,4	-28,4	
120							×	-2,0	-4,5	-7,5	-11,2	-15,6	-20,8	-26,7	
140								×	-2,5	-5,5	-9,2	-13,6	-18,7	-24,7	
160									×	-3,0	-6,7	-11,1	-16,3	-22,2	
180					+					×	-3,7	-8,1	-13,3	-19,2	
200											×	-4,4	-9,6	-15,5	
220												×	-5,2	-11,1	
240													×	-6,0	
260														×	

Tabelle 11. Geländekorrektur nach CHINNEY

$h^2 \backslash h_1$		r = 300													
		0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
0	×	-1,3	-2,7	-4,3	-6,0	-8,0	-10,1	-12,4	-14,9	-17,6	-20,4	-23,5	-26,7	-30,1	
20		×	-1,4	-3,0	-4,8	-6,7	-8,8	-11,1	-13,6	-16,3	-19,2	-22,2	-25,4	-28,8	
40			×	-1,6	-3,3	-5,2	-7,3	-9,6	-12,1	-14,8	-17,7	-20,8	-24,0	-27,4	
60				×	-1,7	-3,7	-5,8	-8,1	-10,6	-13,3	-16,1	-19,2	-22,4	-25,8	
80					×	-1,9	-4,0	-6,3	-8,8	-10,5	-14,4	-17,5	-20,7	-24,0	
100						×	-2,1	-4,4	-6,8	-9,6	-12,5	-15,5	-18,8	-22,1	
120							×	-2,3	-4,8	-7,5	-10,4	-13,4	-16,7	-20,0	
140								×	-2,5	-5,2	-8,1	-11,1	-14,4	-17,7	
160									×	-2,7	-5,6	-8,6	-11,9	-15,2	
180										×	-2,9	-6,0	-9,2	-12,5	
200					×						×	-3,1	-6,3	-9,6	
220												×	-3,2	-6,6	
240													×	-3,3	
260														×	

Die topographische Korrektur der Meßwerte

Tabelle 12. Geländekorrektur nach CHINNEY

		r = 600 m													
h_2	h_1	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
0	×		-1,3	-2,6	-4,0	-5,4	-6,9	-8,4	-9,9	-11,5	-13,1	-14,8	-16,5	-18,2	-19,9
20			×	-1,3	-2,7	-4,1	-5,6	-7,1	-8,6	-10,2	-11,9	-13,5	-15,2	-16,9	-18,7
40				×	-1,4	-2,8	-4,3	-5,8	-7,3	-8,9	-10,5	-12,2	-13,9	-15,6	-17,3
60					×	-1,4	-2,9	-4,4	-6,0	-7,5	-9,2	-10,8	-12,5	-14,2	-16,0
80						×	-1,5	-3,0	-4,5	-6,1	-7,8	-9,4	-11,1	-12,8	-14,5
100							×	-1,5	-3,1	-4,7	-6,3	-7,9	-9,6	-11,3	-13,1
120								×	-1,6	-3,1	-4,8	-6,4	-8,1	-9,8	-11,6
140									×	-1,6	-3,2	-4,9	-6,6	-8,3	-10,0
160					+					×	-1,6	-3,3	-5,0	-6,7	-8,4
180											×	-1,7	-3,3	-5,1	-6,8
200												×	-1,7	-3,4	-5,1
220													×	-1,7	-3,4
240														×	-1,7
260															×

Tabelle 13. Geländekorrektur nach CHINNEY

		r = 1500 m													
$h_2 \backslash h_1$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	220	260	
0	×	-0,7	-1,3	-2,0	-2,7	-3,3	-4,0	-4,7	-5,4	-6,1	-6,8	-7,5	-8,2	-8,9	
20		×	-0,7	-1,3	-2,0	-2,7	-3,4	-4,1	-4,7	-5,4	-6,1	-6,8	-7,5	-8,2	
40			×	-0,7	-1,3	-2,0	-2,7	-3,4	-4,1	-4,8	-5,5	-6,1	-6,8	-7,5	
60				×	-0,7	-1,4	-2,0	-2,7	-3,4	-4,1	-4,8	-5,5	-6,2	-6,9	
80					×	-0,7	-1,4	-2,0	-2,7	-3,4	-4,1	-4,8	-5,5	-6,2	
100						×	-0,7	-1,4	-2,1	-2,7	-3,4	-4,1	-4,8	-5,5	
120							×	-0,7	-1,4	-2,1	-2,8	-3,4	-4,1	-4,8	
140				+				×	-0,7	-1,4	-2,1	-2,8	-3,4	-4,1	
160									×	-0,7	-1,4	-2,1	-2,8	-3,5	
180										×	-0,7	-1,4	-2,1	-2,8	
200											×	-0,7	-1,4	-2,1	
220												×	-0,7	-1,4	
240													×	-0,7	
260														×	

Die topographische Korrektur der Meßwerte

Zerlegt man das Gelände um den Meßpunkt herum in n Zylinder und durch vertikale Schnitte in m Segmente, dann ist der Gesamteinfluß des Geländes auf g_z

$$g_z = -\frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \left[h_{ik} \left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i} \right) - \left(\frac{h_{ik}^3}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1}^3} - \frac{1}{r_i^3} \right) + \frac{3h_{ik}^5}{8} \left(\frac{1}{r_{i+1}^5} - \frac{1}{r_i^5} \right) - \dots \right) \right]. \quad (112a)$$

Mit der Nebenbedingung

$$\frac{h}{r} < 0,1$$

erhält man die Korrekturformel nach BALAVADZE [10] zu

$$g_z \approx \frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \left(h_{ik} \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i r_{i+1}} \right). \quad (112b)$$

Gleichung (112b) kann auch nach dem Verfahren von CHINNERY unter Vernachlässigung kleiner Größen hergeleitet werden. Ausgangspunkt bildet Gleichung (107a), in der $z = 0$ gesetzt wird:

$$g_z = \frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} \left[\frac{-1}{(r_i^2 + h_{ik}^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r_{i-1}^2 + h_{ik}^2)^{1/2}} \right] \dots$$

Es kann jetzt die Reihenentwicklung der Wurzeln vorgenommen werden, da

$$r_i \gg h_{mi}$$

ist. Diese liefert unter Vernachlässigung kleiner Größen

$$\begin{aligned} g_z &\approx \frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} \left[-\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i-1}} \right] \\ &\approx \frac{2\pi k^2 \rho}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} \left[\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i r_{i-1}} \right] \equiv \text{Gleichung (112b)} \end{aligned}$$

Die Reduktionsmethode von CHINNERY kann somit auch auf solche Gradientenwerte ausgedehnt werden, die direkt an der Erdoberfläche gemessen werden, wenn in den Formeln $z = 0$ gesetzt wird.

Da keinerlei Angaben über die Größenordnung der Geländekorrektur vorlagen, wurde Gleichung (112b) in einem sehr breiten Höhenbereich tabelliert. Die Kreiseinteilung ist gleich der von SCHLEUSENER für die topographische Reduktion der Schwerewerte gewählt; zusätzlich wurden für die Nahkorrektur die Radien 1, 1,5 und 2 m eingeführt. Für negative Höhen sind in der ersten Stelle nach dem Komma auf- bzw. abgerundet worden.

6.4. Die Berücksichtigung des Niveauunterschiedes in der Anordnung der Meßsysteme bei einer genauen Geländekorrektur

Die Korrekturverfahren nach CHINNERY und BALAVADZE sind unter der Voraussetzung hergeleitet worden, daß der gravimetrische Vertikalgradient in

Tabelle 14. Die Geländekorrektur des gravimetrischen Vertikalgradienten in [E] für ein Segment nach der Formel von BALAVADZE

		$m = 8; \quad \varrho = 1 \text{ g/cm}^3; \quad h_{ik} \text{ in [m];} \quad r_i, r_{i+1} \text{ in [m]}$							
h_{ik}	r_i	1	1,5	2	3	5	10	20	30
	r_{i+1}	1,5	2	3	5	10	20	30	50
0,5		8,7	4,4	4,4	3,5	2,6	1,3	0,44	0,35
1		17,4	8,7	8,7	7,0	5,2	2,6	0,87	0,70
2		34,9	17,4	17,4	14,0	10,5	5,2	1,7	1,4
3		52,3	26,2	26,2	21,0	15,7	7,9	2,6	2,1
5		87,2	43,6	43,6	34,9	26,2	13,1	4,3	3,5
10		174,4	87,2	87,2	69,8	52,3	26,2	8,7	7,0
20					139,5	104,7	52,3	17,4	14,0
30					209,3	157,0	78,5	26,2	20,9
40					279,1	209,3	104,7	34,9	27,9
50					348,8	261,7	130,8	42,8	34,9
60							157,0	52,3	41,9
70							183,2	61,1	48,8
80							209,3	69,8	55,8
90							235,5	78,5	62,8
100							261,7	87,2	69,8

einem Punkt einer Lotlinie mit Hilfe eines Meßgerätes bestimmt worden ist. In Wirklichkeit kann aber der Vertikalgradient nur durch zwei in verschiedenen Niveaus angeordnete Meßsysteme gemessen werden. So benutzt man z. B. bei Gradientenmessungen mit Hilfe statischer Gravimeter Niveauunterschiede von einigen Metern bis einigen zehn Metern. Es ist deshalb von größter Wichtigkeit, den Einfluß dieses Niveauunterschiedes auf eine genaue Geländekorrektur abzuschätzen.

Bezeichnet man mit g_1 und g_2 die in den Niveaus 1 und 2 gemessenen Schwerewerte, mit g_{t1} und g_{t2} die zugehörigen topographischen Korrekturen und mit a den Niveauunterschied zwischen den beiden Meßsystemen, dann ergibt sich der topographische korrigierte gravimetrische Vertikalgradient $g_z]_t$ zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_1 - g_2}{a}]_t &= \frac{g_1 - g_2}{a} + \frac{g_{t1} - g_{t2}}{a} \\ g_z]_t &= g_z + \frac{g_{t1} - g_{t2}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Das Gelände um den Meßpunkt herum wird wie üblich in Zylinderringsegmente aufgeteilt. Nach HELMERT [s. in 88] gilt für die vertikale Anziehungskomponente eines Zylinderringschnittes die Formel:

$$g_t = \frac{2 \pi k^2 \varrho}{m} (r_a - r_i + \sqrt{r_i^2 + h^2} - \sqrt{r_a^2 + h^2}),$$

Tabelle 14 (Fortsetzung)

h_{ik}	r_i	50	70	100	200	500	1000	2000	3000	5000
	r_{i+1}	70	100	200	500	1000	2000	3000	5000	10000
0,5		0,15	0,11	0,13						
1		0,3	0,22	0,26	0,15					
2		0,6	0,45	0,52	0,31	0,10				
3		0,9	0,67	0,79	0,57	0,16				
5		1,5	1,1	1,3	0,79	0,26	0,13			
10		3,0	2,2	2,6	1,6	0,52	0,26			
20		6,0	4,5	5,2	3,1	1,0	0,52	0,17	0,14	0,10
30		9,0	6,7	7,9	4,7	1,6	0,78	0,26	0,21	0,16
40		12,0	9,0	10,5	6,3	2,1	1,1	0,35	0,28	0,21
50		15,0	11,2	13,1	7,9	2,6	1,3	0,44	0,35	0,26
60		18,0	13,5	15,7	9,4	3,1	1,6	0,52	0,42	0,31
70		20,9	15,7	18,3	11,0	3,7	1,8	0,61	0,49	0,37
80		24,0	17,9	20,9	12,6	4,2	2,1	0,70	0,56	0,42
90		26,9	20,2	23,6	14,1	4,7	2,4	0,78	0,63	0,47
100		29,1	22,4	26,2	15,7	5,2	2,6	0,87	0,70	0,52
150		44,9	33,6	39,3	23,6	7,9	3,9	1,3	1,05	0,78
200		59,8	44,9	52,3	31,4	10,5	5,2	1,7	1,4	1,04
250						13,1	6,5	2,2	1,7	1,3
300						15,7	7,9	2,6	2,1	1,6
350						18,3	9,2	3,1	2,4	1,8
400						20,9	10,5	3,5	2,8	2,1
450						23,5	11,8	3,9	3,1	2,4
500						26,2	13,1	4,4	3,5	2,6

Berücksichtigung des Niveauunterschiedes

die sich für $h \ll r$ zu

$$g_t = \frac{k^2 \pi h^2 \rho}{m} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$$

vereinfacht.

Es bedeuten:

- m — Zahl der Kreisschnitte
- ρ — mittlere Dichte
- k^2 — Gravitationskonstante
- r_{i+1} — äußerer Radius des Zylinderringes
- r_i — innerer Radius des Zylinderringes
- h — mittlere Geländehöhe; bezogen auf Stationsniveau

Dieser Ausdruck wird in Gleichung (113) eingesetzt:

$$g_z]_t = g_z + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\pi k^2 \rho}{m} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right) (h_{ik_1}^2 - h_{ik_2}^2) \cdot \frac{1}{a}. \quad (114)$$

Aus Bild 51 entnimmt man

$$h_2 = h_1 - a.$$

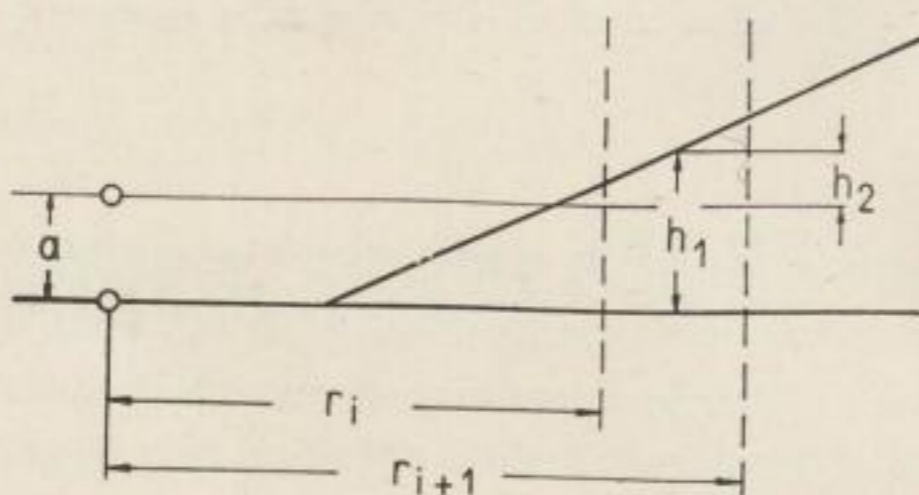


Bild 51. Zur Ableitung der Gleichung (115)

Die Schlußformel ergibt sich dann zu

$$g_z]_t = g_z + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\pi k^2 \rho}{m} \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1} r_i} \right) (2 h_{ik} - a), \quad (115)$$

wenn h_{ik} die mittlere Höhe, bezogen auf Stationsniveau, für das Segment „ ik “ bedeutet. Das Korrekturglied wird, wie erwartet, für $h_{ik} = 0$ praktisch Null, weil für die Dichte ρ die Luftdichte gesetzt werden muß.

Gleichung (115) wurde für den Niveauunterschied $a = 1$ m und für positive und negative Höhen bis $h_{ik} = 200$ m berechnet. (Tabellen 15a, b). Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Werten der Tabelle 14, so zeigt sich selbst bei den Segmenten zwischen den Radien $r_i = 200$ m und $r_{i+1} = 500$ m eine Abweichung von $\pm 0,08$ E.

Die Untersuchung bringt das Ergebnis, daß für eine genaue Geländekorrektur der gravimetrischen Vertikalgradienten auf $\pm 0,1$ E der Niveauunterschied zwischen den Meßsystemen in dem hier behandelten Beispiel bis 500 m Ent-

Tabelle 15a. Die Geländekorrektur des gravimetrischen Vertikalgradienten in [E] für ein Segment unter Berücksichtigung des Niveauunterschiedes zwischen den Meßsystemen

		positive Höhen											
		$m = 8; \rho = 1/g \text{ cm}^3; h_{ik} \text{ in [m]}; r_i, r_{i+1} \text{ in [m]}$											
h_{ik}	r_i	1	1,5	2	3	5	10	20	30	50	70	100	200
	r_{i+1}	1,5	2	3	5	10	20	30	50	70	100	200	500
1		8,7	4,4	4,4	3,5	2,6	1,3	0,44	0,35	0,15	0,11	0,14	0,08
2		26,2	13,1	13,1	10,5	7,9	3,9	1,3	1,1	0,45	0,34	0,39	0,24
3		43,6	21,8	21,8	17,4	13,1	6,5	2,2	1,7	0,75	0,56	0,65	0,39
5		78,5	39,3	39,3	31,4	23,6	11,8	3,9	3,1	1,3	1,0	1,2	0,71
10		165,7	82,9	82,9	66,3	48,7	24,9	8,3	6,6	2,8	2,1	2,5	1,5
20					136,0	102,1	51,0	17,1	13,6	5,8	4,4	5,1	3,1
30					205,8	154,4	77,2	25,7	20,6	8,8	6,6	7,7	4,6
40					275,6	206,7	103,4	34,5	27,6	11,8	8,9	10,3	6,2
50					345,3	259,1	129,5	43,2	34,5	14,8	11,1	13,0	7,8
60								51,9	41,5	17,8	13,3	15,6	9,3
70								60,6	48,5	20,8	15,6	18,2	10,9
80								69,3	55,5	23,8	17,8	20,8	12,5
90								78,1	62,44	26,8	20,1	23,4	14,1
100								86,8	69,4	22,8	22,3	26,0	15,6

Berücksichtigung des Niveauunterschiedes

Tabelle 15b. Die Geländekorrektur des gravimetrischen Vertikalgradienten in [E] für ein Segment unter Berücksichtigung des Niveauunterschiedes zwischen den Meßsystemen

		negative Höhen											
		$m = 8; \rho = 1 \text{ g/cm}^3; h_{ik} \text{ in [m]}; r_i, r_{i+1} \text{ in [m]}$											
h_{ik}	r_i r_{i+1}	1 1,5	1,5 2	2 3	3 5	5 10	10 20	20 30	30 50	50 70	70 100	100 200	200 500
	-1		26,2	13,1	13,1	10,5	7,8	3,9	1,3	1,0	0,45	0,34	0,39
-2		43,6	21,8	21,8	17,4	13,1	6,5	2,2	1,7	0,75	0,56	0,65	0,39
-3		61,1	30,5	30,5	24,4	18,3	9,2	3,1	2,4	1,05	0,79	0,92	0,55
-5		95,9	48,0	48,0	38,4	28,8	14,4	4,8	3,8	1,6	1,2	1,4	0,86
-10		183,3	91,6	91,6	73,3	55,0	27,5	9,2	7,3	3,1	2,4	2,7	1,7
-20					143,0	107,3	53,6	17,9	14,3	6,1	4,6	5,4	3,2
-30					212,8	159,6	79,8	26,6	21,3	9,1	6,8	8,0	4,8
-40					282,6	212,0	106,0	35,3	28,3	12,1	9,1	10,6	6,4
-50					352,3	264,3	132,2	44,1	35,3	15,1	11,3	13,2	7,9
-60								52,8	42,4	18,1	13,6	15,8	9,5
-70								61,5	49,2	21,1	15,8	18,5	11,1
-80								70,2	56,2	24,1	18,1	21,1	12,6
-90								79,0	63,2	27,1	20,3	23,7	14,2
-100								87,7	70,1	30,1	22,5	26,3	15,8

Alle Korrekturwerte sind negativ zu nehmen!

Die topographische Korrektur der Meßwerte

fernung vom Meßpunkt unbedingt berücksichtigt werden muß. Allgemein darf daraus der Schluß gezogen werden, den Niveauunterschied zwischen den Meßsystemen grundsätzlich bei Geländekorrekturen zu beachten. Bei Flugzeugmessungen wird dies nicht erforderlich sein, da der Niveauunterschied zwischen den Meßsystemen klein gegen die Flughöhe ist.

7. Die Entwicklung eines Gradientometers auf dem piezoelektrischen Prinzip

7.1. Das Zustandekommen des piezoelektrischen Effektes — die Darstellung der Grundformeln

Das Auftreten elektrischer Ladungen bei einem Kristall unter der Einwirkung elastischer Beanspruchung bezeichnet man als den direkten Piezoeffekt. Diese Erscheinung kann nur bei solchen Kristallen beobachtet werden, die eine oder mehrere polare Achsen bzw. polare Richtungen oder kein Symmetriezentrum besitzen.

Der piezoelektrische Kristall ist damit im unerregten Zustand unelektrisch. Unter dem Einfluß äußerer Kräfte tritt eine elektrische Polarisation ein, die sich als Flächen- oder Raumladung äußert; der Kristall besitzt dann ein elektrisches Moment.

Zur Klärung des Zustandekommens des direkten piezoelektrischen Effektes bei Quarz benutzen wir eine von MEISSNER [s. in 13] gegebene Darstellung. Die Silizium- und Sauerstoffatome des SiO_2 -Moleküls sind in erster Näherung in sechsseitigen Strukturzellen angeordnet. Jedes Si-Atom trägt 4 positive und jedes O-Atom 2 negative Einheitsladungen; innerhalb einer Strukturzelle sind die Ladungen gegenseitig abgesättigt.

Wirkt auf eine solche Zelle (Bild 52a) in Richtung der polaren Achse X_1 ein Druck, so rückt das Si-Atom 1 zwischen die O-Atome 2 und 6 und das O-Atom 4 zwischen die Si-Atome 3 und 5. Dadurch entsteht auf der Fläche A eine negative, auf der Fläche B eine positive Ladung (Bild 52b). Diese Erscheinung wird longitudinaler direkter Piezoeffekt genannt.

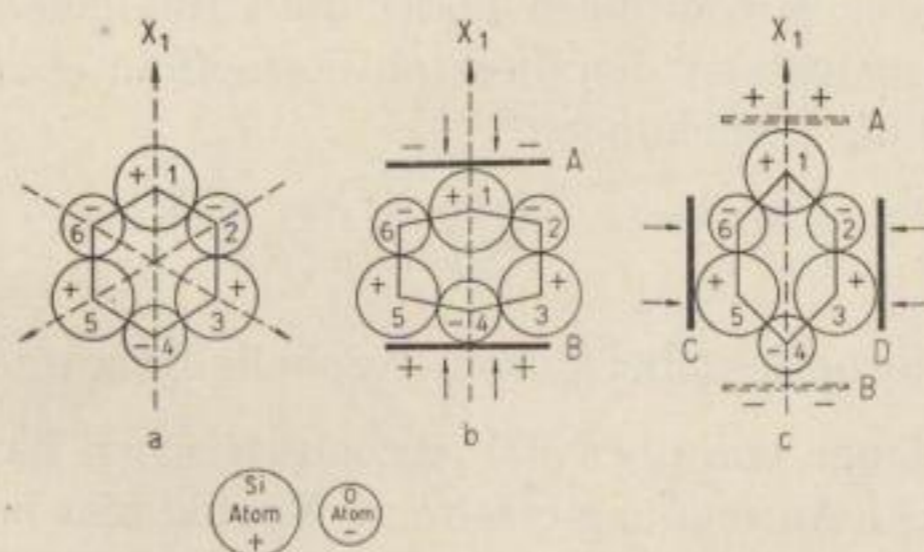


Bild 52. Das Zustandekommen des piezoelektrischen Effektes bei Quarz (entnommen aus BERGMANN [13])

Zur Vereinfachung sind die beiden jeweils ober- und unterhalb eines Si-Atoms angeordneten O-Atome zu einem Atom mit 4 Ladungen zusammengefaßt.

Wird dagegen senkrecht zur polaren Achse X_1 ein Druck erzeugt (Bild 52 c), so verschieben sich die Atome 2, 3, 5 und 6 gleichmäßig; auf den Flächen C und D entstehen keine Ladungen, auf den Flächen A und B werden dagegen Ladungen influenziert, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen wie im Fall a . Man spricht jetzt vom transversalen Piezoeffekt.

Um quantitative Aussagen machen zu können, müssen zunächst die Beziehungen zwischen den elastischen und piezoelektrischen Größen dargestellt werden. Den Betrachtungen wird ein Kristallkörper in der Form eines Parallelepipeds zugrunde gelegt, dessen Kanten parallel zu den rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z verlaufen.

Nach SCHEIBE [92] werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

P_x, P_y, P_z	—	Komponenten der elektrischen Polarisation	
X_x, Y_y, Z_z	—	Komponenten des elastischen Druckes	
Y_z, Z_x, X_y			
x_x, y_y, z_z	—	Komponenten der elastischen Deformation	
y_z, z_x, x_y			
c_{hk}	Elastizitätsmoduln	}	$h = k = 1 \dots 6$ $i = 1, 2, 3$.
s_{hk}	Elastizitätskoeffizienten		
e_{ik}	piezoelektrische Moduln		
d_{ik}	piezoelektrische Koeffizienten		

Die Kopplung zwischen Polarisation und Deformation beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} P_x &= e_{11} x_x + e_{12} y_y + e_{13} z_z + e_{14} h_z + e_{15} z_x + e_{16} x_y \\ P_y &= e_{21} x_x + e_{22} y_y + e_{23} z_z + e_{24} y_z + e_{25} z_x + e_{26} x_y \\ P_z &= e_{31} x_x + e_{32} y_y + e_{33} z_z + e_{34} y_z + e_{35} z_x + e_{36} x_y. \end{aligned} \quad (116)$$

Der Zusammenhang zwischen Polarisation und äußerem Druck ist über

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11} X_x + d_{12} Y_y + d_{13} Z_z + d_{14} Y_z + d_{15} Z_x + d_{16} X_y \\ P_y &= d_{21} X_x + d_{22} Y_y + d_{23} Z_z + d_{24} Y_z + d_{25} Z_x + d_{26} X_y \\ P_z &= d_{31} X_x + d_{32} Y_y + d_{33} Z_z + d_{34} Y_z + d_{35} Z_x + d_{36} X_y \end{aligned} \quad (117)$$

gegeben.

Dieses System linearer Gliederungen bildet die Grundlage aller weiteren Betrachtungen, da es quantitativ den direkten Piezoeffekt charakterisiert.

Außerdem bestehen die Beziehungen

$$d_{ik} = \sum_h e_{ih} s_{hk} \quad \text{und} \quad e_{ik} = \sum_h d_{ih} c_{hk}. \quad (118)$$

7.2. Der direkte Piezoeffekt bei Quarz, Rochelle-Salz und ADP-Kristallen

Aus der großen Menge von über 500 piezoelektrischen Kristallen haben nur wenige eine praktische Anwendung erfahren. Es sind dies besonders der Quarz und die synthetischen Kristalle Seignettesalz und ADP. Die mechanischen, chemischen und elektrischen Eigenschaften dieser Kristalle sollen untersucht werden, um daraus Schlußfolgerungen für ihre Verwendbarkeit in einem Gradientometer auf dem piezoelektrischen Prinzip ziehen zu können.

7.2.1. Der direkte Piezoeffekt bei Quarz

Der Quarz gehört der trigonal-trapezoedriscen Klasse des trigonalen Systems an. Der Kristall besitzt eine dreizählige, nicht polare Symmetrieachse, die optische Achse genannt und als Z -Achse bezeichnet wird und drei zweizählige ungleichwertige polare Achsen X_1 , X_2 , X_3 , die jeweils zwei gegenüberliegende Kanten des sechseitigen Prismas verbinden (Bild 53a).

Die zu piezoelektrischen Versuchen benutzten Stäbe und Platten werden derart aus dem Kristall herausgeschnitten, daß ein Flächenpaar stets senkrecht zu einer polaren Achse orientiert ist, weil maximal elektrische Ladungen nur an den Enden einer polaren Achse auftreten. Häufig wird der X -Schnitt gewählt (Bild 53b), wo bei einer rechteckigen Platte die Kante d parallel zur X -Achse (elektrische Achse e), die Kante b parallel zur Z -Achse (optische Achse o) und die Längsrichtung l parallel zur Y -Achse, auch neutrale Achse n genannt, verlaufen (Bild 53c).

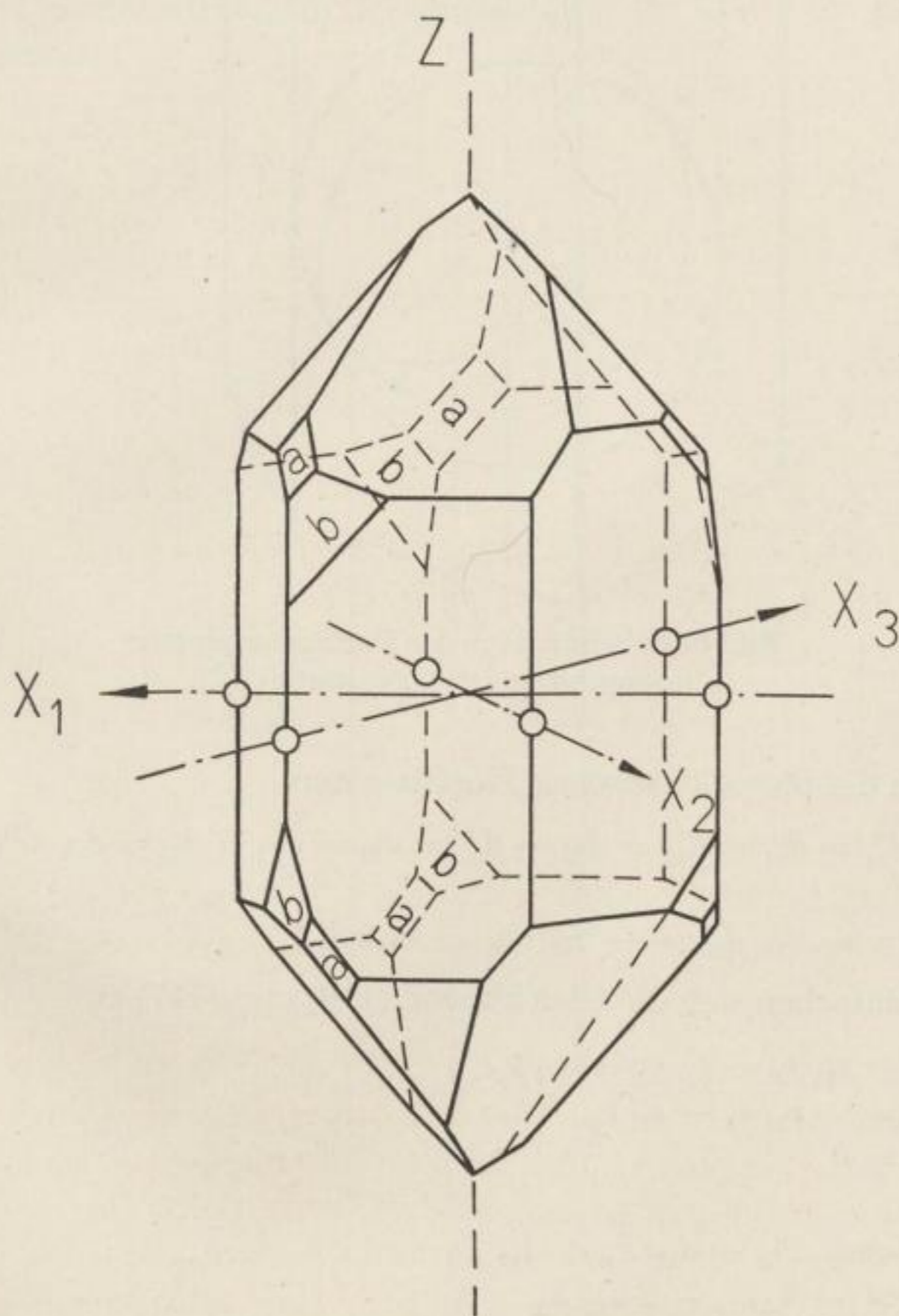


Bild 53a. Linksquarz

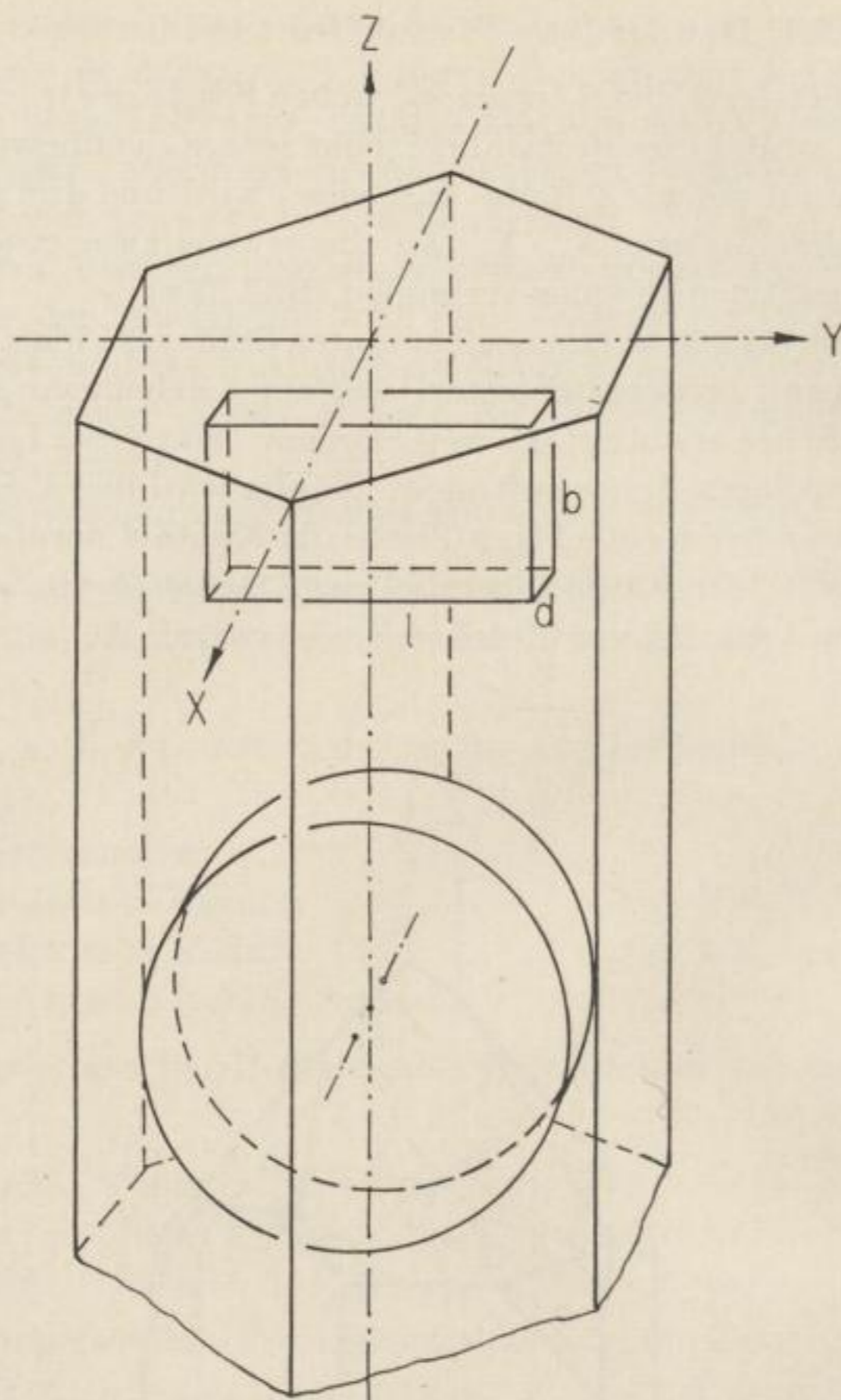


Bild 53 b. Schnittlage der Piezoquarzplatten
(entnommen aus BERGMANN [13])

Da bei Quarz die piezoelektrischen Koeffizienten

$$d_{13} = d_{15} = d_{16} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = d_{24} = d_{31} = d_{32} = d_{33} = d_{34} = d_{35} = d_{36} = 0$$

und

$$d_{12} = -d_{11}, d_{25} = -d_{14}, d_{26} = -2d_{11}$$

sind, so vereinfachen sich die Gleichungen (116) und (117) zu

$$\begin{aligned} P_x &= e_{11} x_x - e_{11} y_y + e_{14} y_z \\ P_y &= -e_{14} z_x - e_{11} x_y \\ P_z &= 0 \end{aligned} \tag{119}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11} X_x - d_{11} Y_y + d_{14} Y_z \\ P_y &= -d_{14} Z_x - 2d_{11} X_y \\ P_z &= 0. \end{aligned} \tag{120}$$

Bezeichnet man mit F_x und F_y die zur X - bzw. Y -Achse senkrechten Flächen, so sind die auf ihnen infolge einer mechanischen Deformation entstehenden Ladungen q_x und q_y durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} q_x &= F_x P_x = F_x = (d_{11} X_x - d_{11} Y_y + d_{14} Y_z) \\ q_y &= F_y P_y = -F_y (d_{14} Z_x + 2 d_{11} X_y) \end{aligned} \quad (121)$$

gegeben.

Läßt man nur Druck in X_x oder Y_y wirken, so bekommt man für den longitudinalen Piezoeffekt

$$q = d_{11} F_x X_x = d_{11} G_x \quad (122)$$

und für den transversalen Piezoeffekt

$$q_x = -d_{11} F_x Y_y = -d_{11} \frac{F_x}{F_y} G_y = d_{11} \frac{l}{d} G_y, \quad (123)$$

wenn G_x und G_y die wirkenden Gesamtdrucke und l und d die Kristallabmessungen bedeuten.

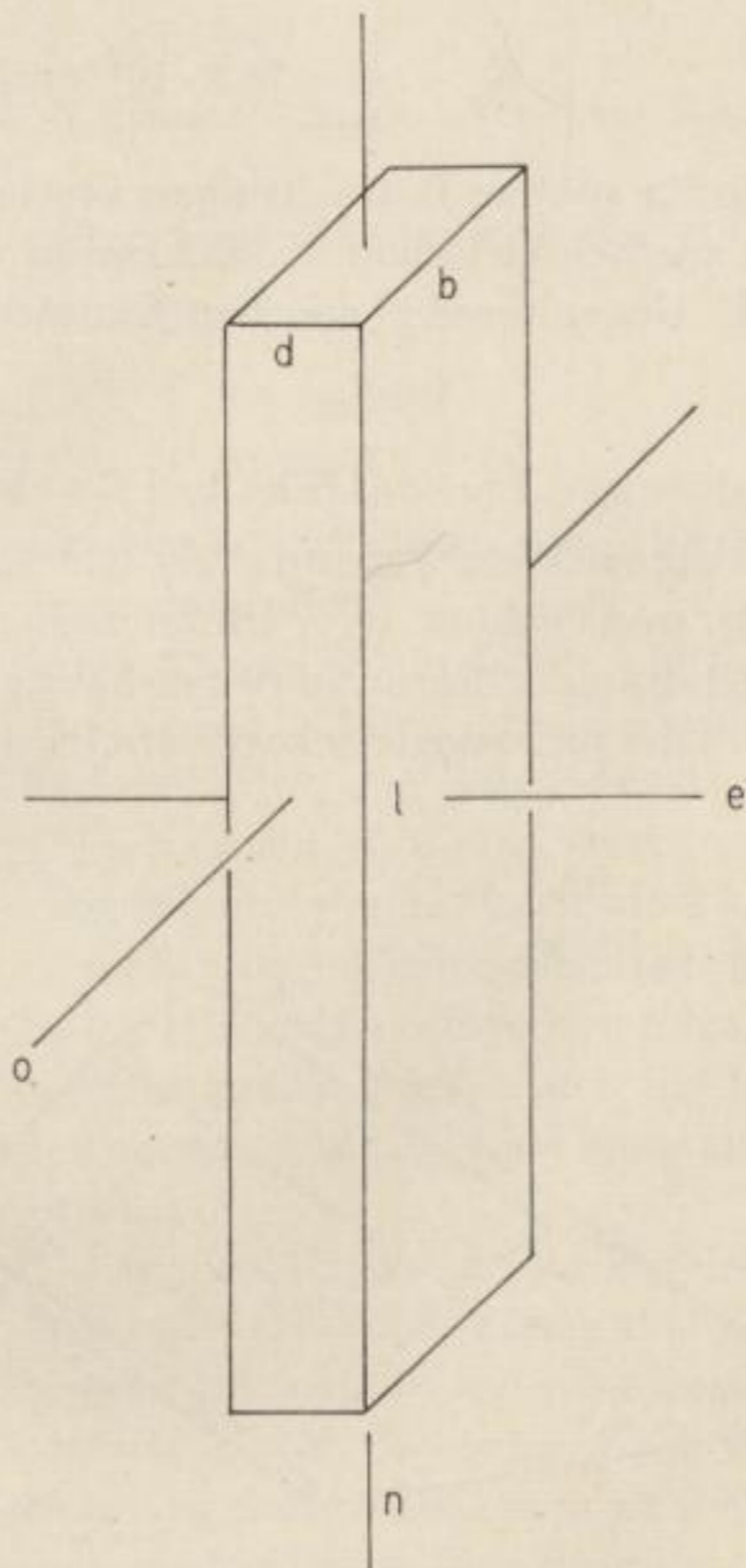


Bild 53c. Achsenorientierung bei einem X-Schnitt

Aus den Formeln folgt, daß nur beim transversalen Piezoeffekt die entstehende Ladungsmenge von den Kristallabmessungen abhängig ist. Die Ladungen entstehen in diesem Fall auf den Flächen $b \cdot l$; die Kraft wirkt in Richtung der Y -Achse. Die Ladungsmenge ist stets größer als beim longitudinalen Effekt.

Die numerischen Werte der Kristallkonstanten von Quarz sind in Tabelle 16 zusammengestellt.

Tabelle 16

Konstante	Wert	Literatur
piezoelektrischer Koeffizient	$d_{11} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ s}$	[13]
Temperaturkoeffizient des piezoelektrischen Koeffizienten	$T d_{11} = -2 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$	[65]
DK	$\epsilon_{11} = 4,5$	
spezifischer Widerstand	$10^{10} \dots 10^{14} \Omega\text{m}$	[44, 63]
Dichte	$\rho = 2,659 \text{ g/cm}^3$	
Youngscher Modul	$E_z = \frac{1}{s_{33}} = 105 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$	[13]
	$E_x = \frac{1}{s_{11}} = 78,7 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$	[13]

Als besonders wichtig für spätere Betrachtungen erscheint der niedrige Temperaturkoeffizient des piezoelektrischen Koeffizienten und der relativ hohe spezifische Widerstand. Gegenüber chemischen Einflüssen verhält sich Quarz vollkommen resistent.

7.2.2. Der direkte Piezoeffekt bei Rochelle-Salz

Rochellesalz, auch Seignettesalz genannt, ist ein Kalium-Natriumtartrat ($\text{Na KC}_4\text{H}_4\text{O}_6 + \text{H}_2\text{O}$) und gehört dem rhombischen Kristallsystem an. Bild 54a zeigt den Kristall in der Form, in der er häufig bei der Züchtung gewonnen wird; Bild 54b eine piezoelektrische Platte im 45° Y-Schnitt.

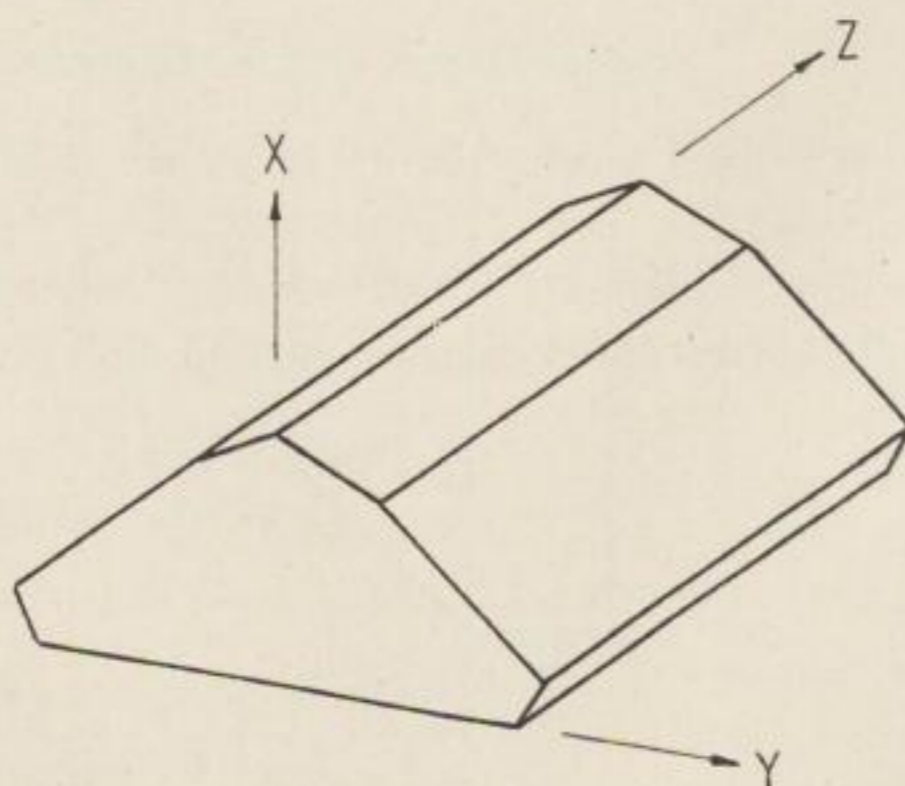


Bild 54a. Gezüchteter Seignettesalzkristall (umgezeichnet nach MASON [73])

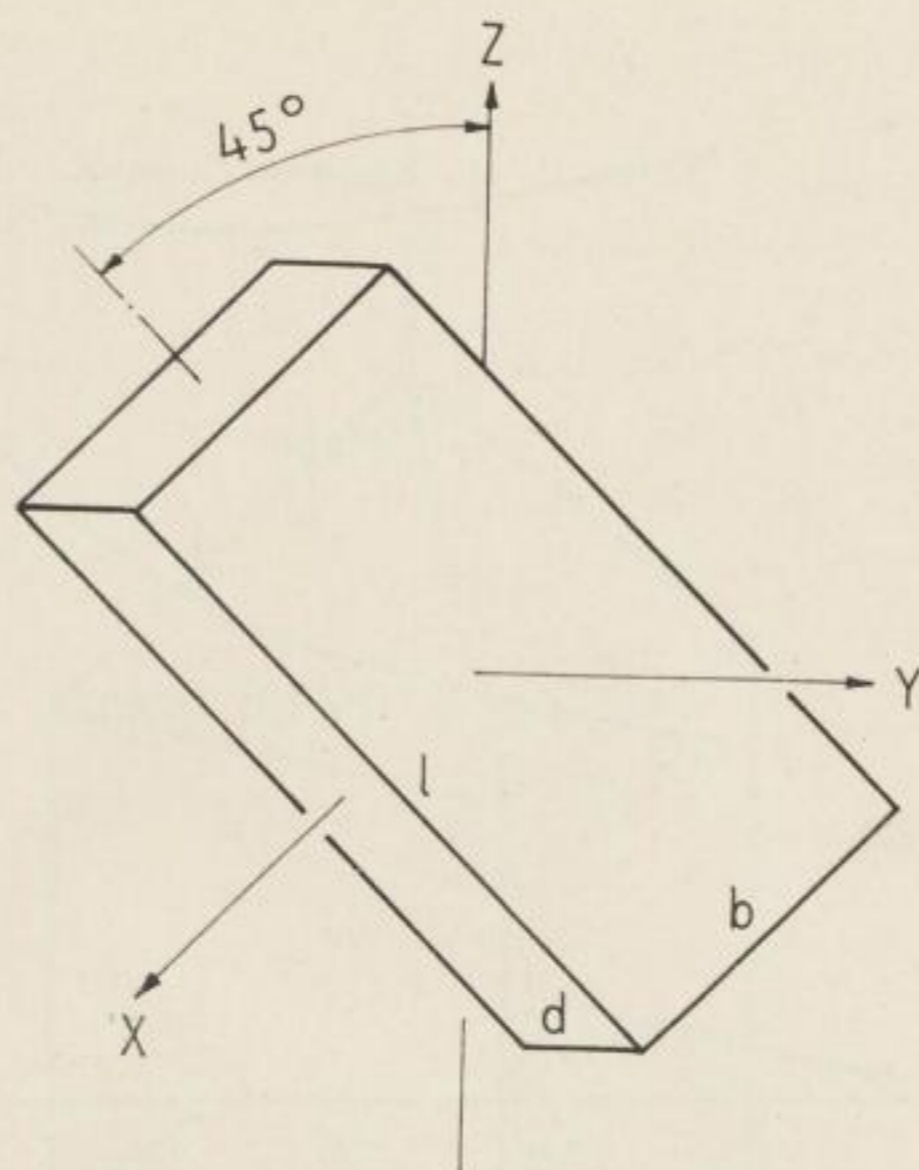


Bild 54b. 45°-Y-Schnitt (umgezeichnet nach HERRMANN [47])

Für das Seignettesalz gelten folgende piezoelektrische Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= d_{14} Y_z \\ P_y &= d_{25} Z_x \\ P_z &= d_{36} X_y, \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

wobei d_{14} , d_{25} und d_{36} die jeweils wirksamen piezoelektrischen Konstanten für den entsprechenden Schnitt darstellen.

Der Kristall ist nur zwischen 35 und 85% relative Luftfeuchtigkeit bei Zimmertemperatur stabil und zerfällt bei 55 °C in seine Bestandteile.

Die piezoelektrischen Eigenschaften von Seignettesalz sind eine Funktion des Druckes. HERRMANN [47] wies nach, daß bei Platten senkrecht Y die Proportionalität zwischen erzeugter Ladung und Druck bis 4 kp/cm besteht; über das Verhalten bei höheren Drucken liegen keine Angaben vor.

Aus der Größe der piezoelektrischen Koeffizienten folgt, daß der Y -Schnitt die größte piezoelektrische Wirksamkeit zeigt. Auch die hier gültige Dielektrizitätskonstante verhält sich normal und hängt bei konstantem Druck nicht merklich von der Temperatur ab.

Auf das unstetige Verhalten des Kristalles bei Erreichen der Curietemperaturen soll nur hingewiesen sein; die Verwendung des Kristalls in diesen Temperaturbereichen (−22; +35 °C) schließt sich von selbst aus.

Das Wachstum der Kristalle in der Richtung Y ist verhältnismäßig gering, so daß mit Kristallplatten länger als 5 cm kaum zu rechnen ist.

Die piezoelektrischen und mechanischen Konstanten von Rochellesalz sind in Tabelle 17 zusammengestellt.

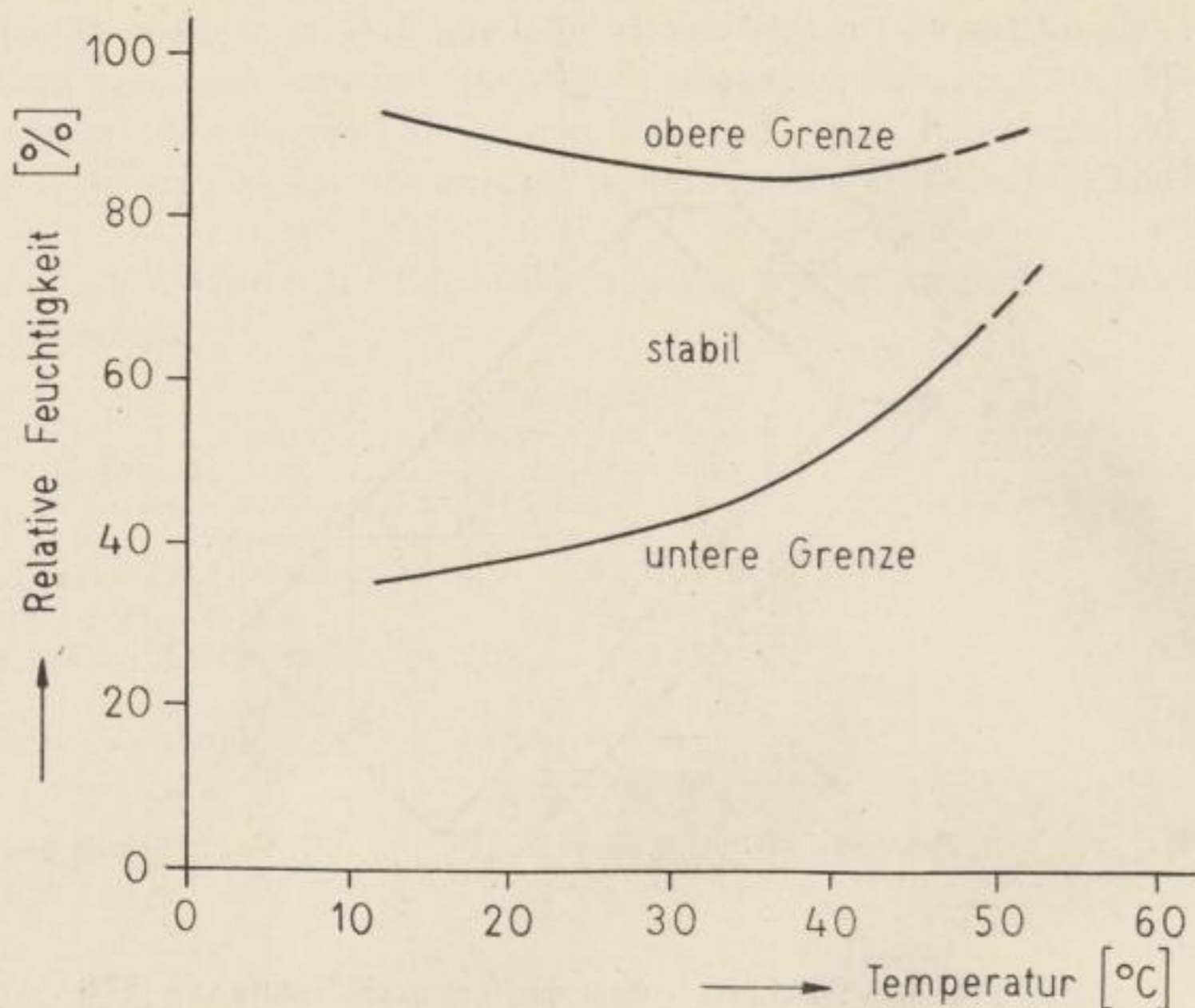


Bild 55. Der stabile Bereich des Seignettesalzkristalls
(umgezeichnet nach MASON [73])

Tabelle 17

Konstante	Wert	Literatur
piezoelekt. Koeffizient	$d_{25} = 138 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ s}$ bzw. $(-169 \cdot 10^{-8})$.	[65]
Temperaturkoeffizient des piezoelekt. Koeffizienten	$T d_{25} = -49 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$	[65]
DK	$\epsilon_{22} = 9,32$	[65]
Dichte	$\rho = 1,77 \text{ g/cm}^3$	[13]

7.2.3. Der piezoelektrische Effekt bei ADP-Kristallen

Auch die ADP-Kristalle (Amonium-Dihydrogen-Phosphate) sind synthetische Verbindungen. Sie gehören der tetragonalscalenoedrischen Kristallklasse an.

Es gelten folgende piezoelektrische Beziehungen:

$$P_x = -d_{14} Y_z, P_y = -d_{14} Z_x, P = -d_{36} X_y. \quad (125)$$

Die piezoelektrische Wirksamkeit ist für den Z- bzw. 45° Z-Schnitt besonders groß.

Der spezifische Widerstand des Materials liegt bei Zimmertemperatur in der Größenordnung $10^{10} \dots 10^{11} \Omega \text{ cm}$; er nimmt mit zunehmender Temperatur ab.

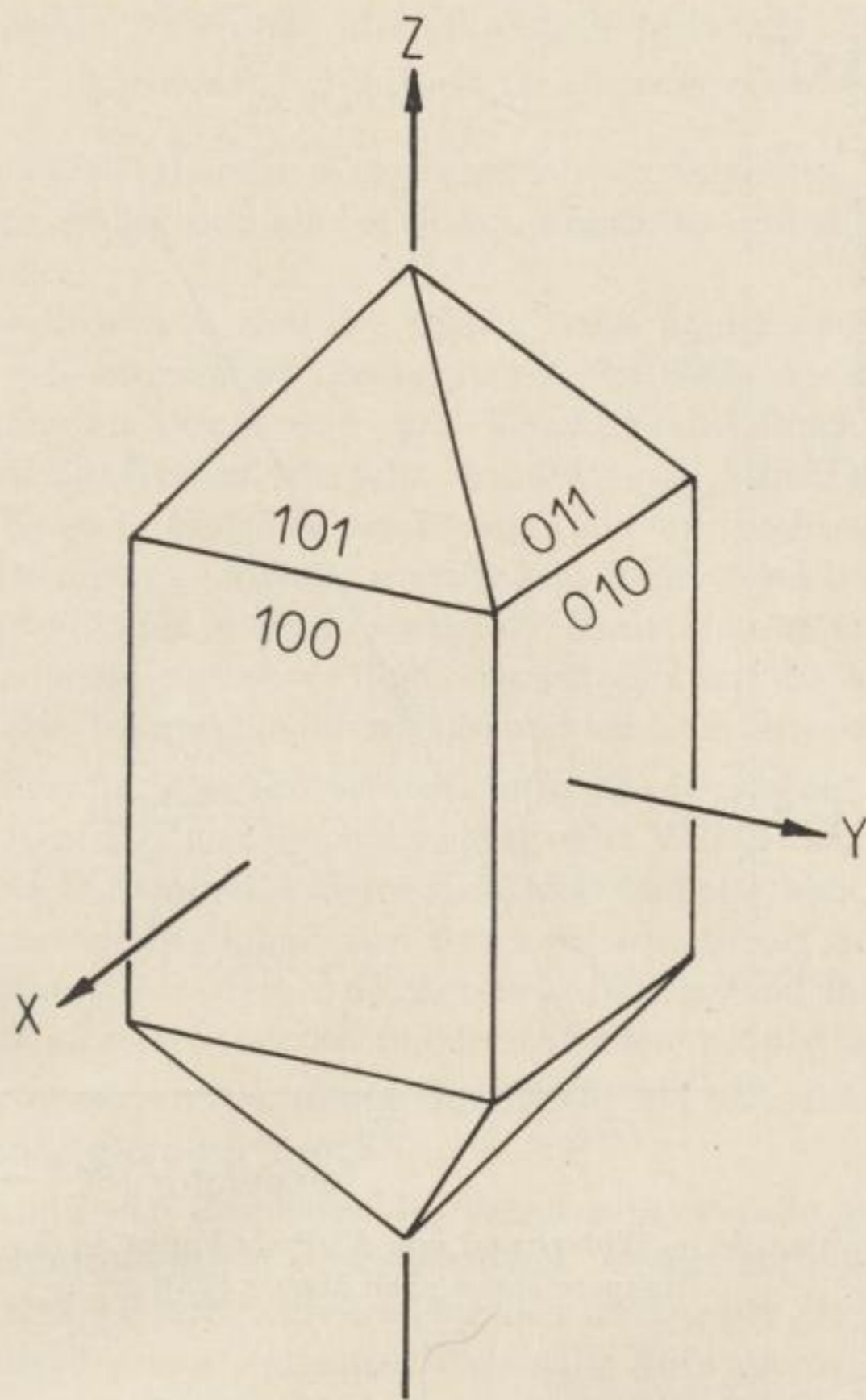


Bild 56a. Kristallform eines ADP-Kristalls (entnommen aus BERGMANN [13])

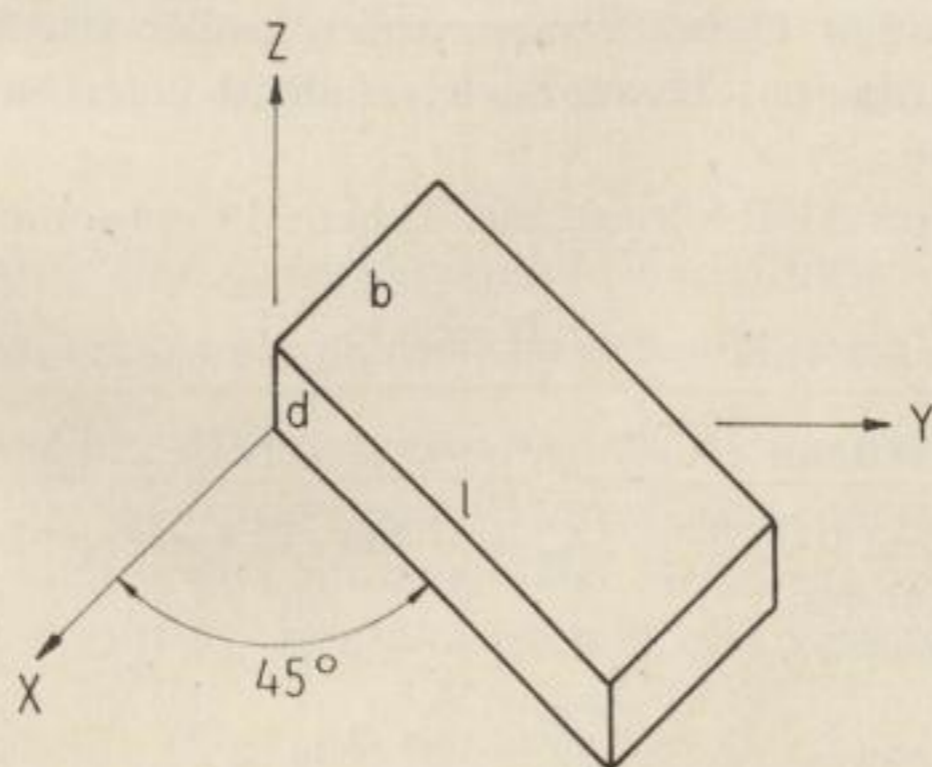


Bild 56b. 45°-Z-Schnitt

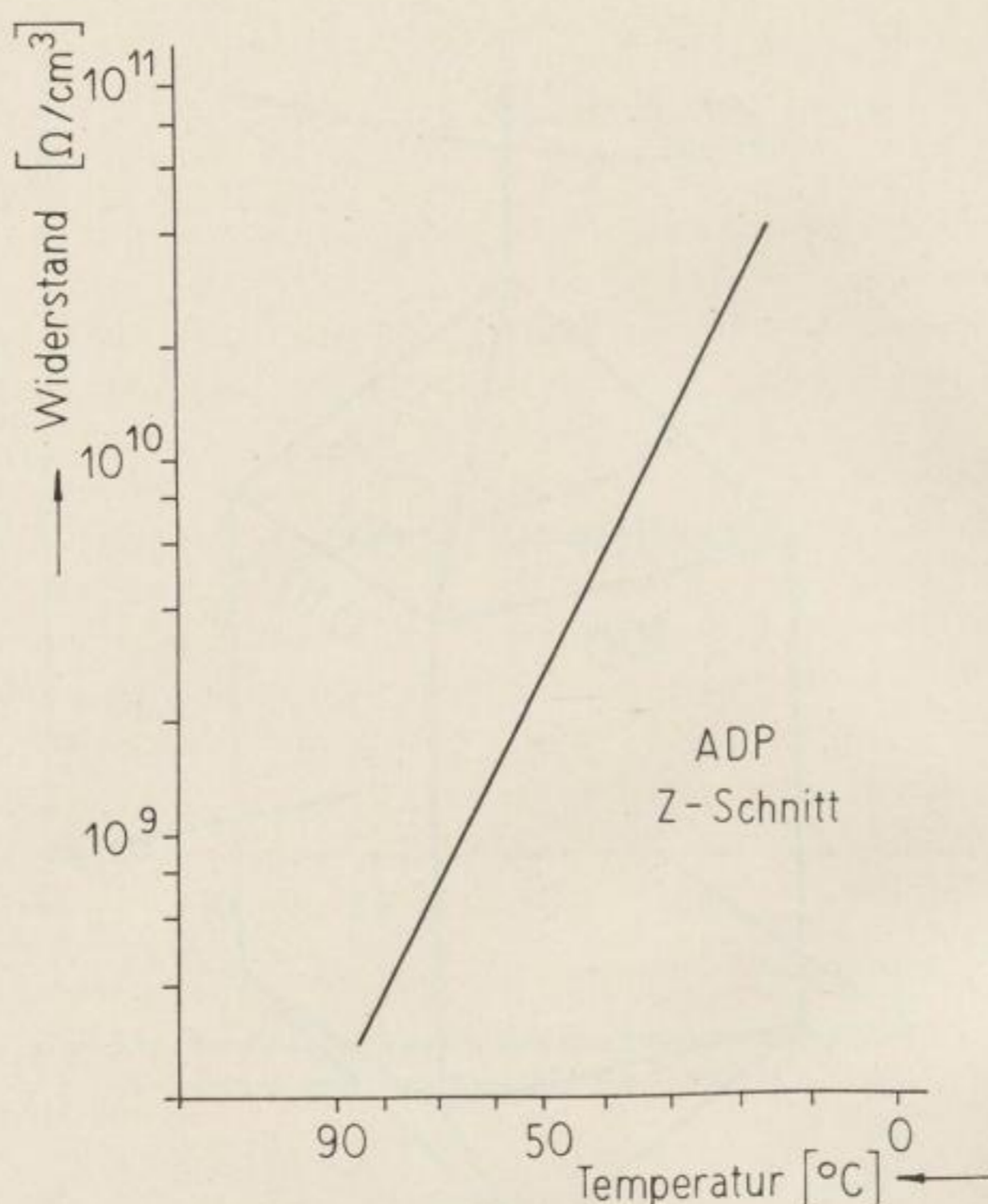


Bild 57. Der spezifische Widerstand von ADP als Funktion der Temperatur (umgezeichnet nach MASON [73])

ADP-Kristalle besitzen in ihrem Aufbau kein Kristallwasser. Bei 93% relativer Luftfeuchtigkeit zergehen sie und werden von der Atmosphäre aufgenommen. Aus diesem Grund müssen die Kristalle unter Öl oder in feuchtigkeitsgeschützten Behältern benutzt werden. Die Schmelztemperatur des Materials liegt bei ≈ 190 °C, bei Temperaturen größer 100 °C wird aber bereits Ammonium abgeschieden. Dieser Sachverhalt ist beim Aufdampfen der Elektroden zu beachten.

Die Konstanten von ADP können aus Tabelle 18 entnommen werden.

Tabelle 18

Konstante	Wert	Literatur
piezoelekt. Koeffizient	$d_{36} = -148 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ s}$	[65]
Temperaturkoeffizient des piezoelekt. Koeffizienten	$T d_{36} = -20,3 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$	[65]
DK	$\epsilon_{33} = 15,8$	[65]
spezifischer Widerstand	$10^{10} \dots 10^{11} \Omega \text{ cm}$	[73]
Dichte	$1,8 \text{ g/cm}^3$	[65]

7.2.4. Die Verwendung von Quarz als piezoelektrischer Indikator in einem Gradientometer

Obwohl die piezoelektrischen Koeffizienten von Seignette- und ADP-Kristallen wesentlich größer sind als bei Quarz, zeigen diese Stoffe aber auch wesentliche Nachteile.

Bei Seignettesalz wirken sich der relativ hohe Temperaturkoeffizient des piezoelektrischen Koeffizienten, die begrenzte Stabilität des Materials innerhalb eines bestimmten Temperatur- und Feuchtigkeitsbereichs und die recht geringe Festigkeit des Kristalls als sehr nachteilig aus. Hinzu kommt der Umstand, daß der Kristall infolge seines Ionengitters eine recht hohe elektrische Leitfähigkeit, also einen zu kleinen spezifischen Widerstand besitzt, was seine Verwendung als Indikator in einem statischen Meßverfahren ausschließt.

ADP-Kristalle haben gegenüber dem Seignettesalz nur die Vorteile, daß sie etwas fester sind als diese und in ihrem Aufbau kein Kristallwasser enthalten.

Bei Quarz sind der niedrige Temperaturkoeffizient der piezoelektrischen Konstanten, die niedrige DK und der hohe spezifische Widerstand besonders vorteilhaft. Man erreicht damit eine kleine Kapazität und eine hohe Zeitkonstante. Die hohe mechanische Festigkeit von Quarz erlaubt, selbst dünne Stäbe mit einigen Kilogramm zu belasten. Die chemische Widerstandsfähigkeit des Materials macht keine zusätzlichen Schutzeinrichtungen notwendig.

Aus diesen Gründen wurden dünne Quarzstäbe als piezoelektrische Indikatoren für das Gradientometer benutzt.

Die Untersuchung wäre unvollständig, würde nicht auf die piezoelektrischen Keramiken (Bariumtitanate u. a.) hingewiesen. Diese Stoffe haben zwar sehr große piezoelektrische Koeffizienten, leider aber auch große Dielektrizitätskonstanten. Eine allgemeine quantitative Erfassung ihres piezoelektrischen Verhaltens ist nur schwer möglich, da einmal unvollständiges Formelmaterial vorliegt und zum anderen die Eigenschaften der piezoelektrischen Keramiken von der elektrischen Feldstärke abhängen, bei der sie „piezoelektrisch wirksam gemacht wurden“. Ihre Verwendung als Indikatoren in einem piezoelektrischen Gradientometer soll nicht ausgeschlossen werden, erfordert aber noch ausführliche Untersuchungen an konkreten Materialien.

7.3. Die Abschätzung des zu erwartenden Meßeffektes bei Verwendung von Quarz als piezoelektrisches Material

Wie bereits in Abschnitt 7.2.1 nachgewiesen wurde, kann ein Gradientometer nur unter Ausnutzung des transversalen Piezoeffektes gebaut werden, da bei optimalen Kristallabmessungen ein maximaler Meßeffekt erhalten wird. Die entstehende Ladungsmenge berechnet sich im elektrostatischen Maßsystem nach der Gleichung

$$q = d_{11} \frac{l}{d} P. \quad (126a)$$

Die Umrechnung in Elementarladungen erfolgt unter Beachtung der Beziehungen

$$1 \text{ A} \cdot \text{s} = 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1}$$

$$1 \text{ EL} \hat{=} 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}.$$

Also gilt:

$$q = d_{11} \frac{1 \cdot P}{4,8 \cdot d} \cdot 10^{10} [\text{Elementarladungen}]. \quad (126 \text{ b})$$

Entsprechend erhält man für die Meßspannung

$$U = \frac{d_{11} \cdot \frac{1}{d} \cdot P \cdot 300}{C_{kr} + C_A} = \frac{d_{11} \cdot P \cdot 300 \cdot 4 \pi}{\varepsilon b + 4 \pi C_A \frac{d}{1}} [\text{V}], \quad (127)$$

wenn

$$C_{kr} = \frac{\varepsilon \cdot b \cdot 1}{4 \pi d}$$

die Kristallkapazität und C_A die Außenkapazität (Summe der Kapazitäten der Zuleitungen und des Spannungsmessers) bedeuten.

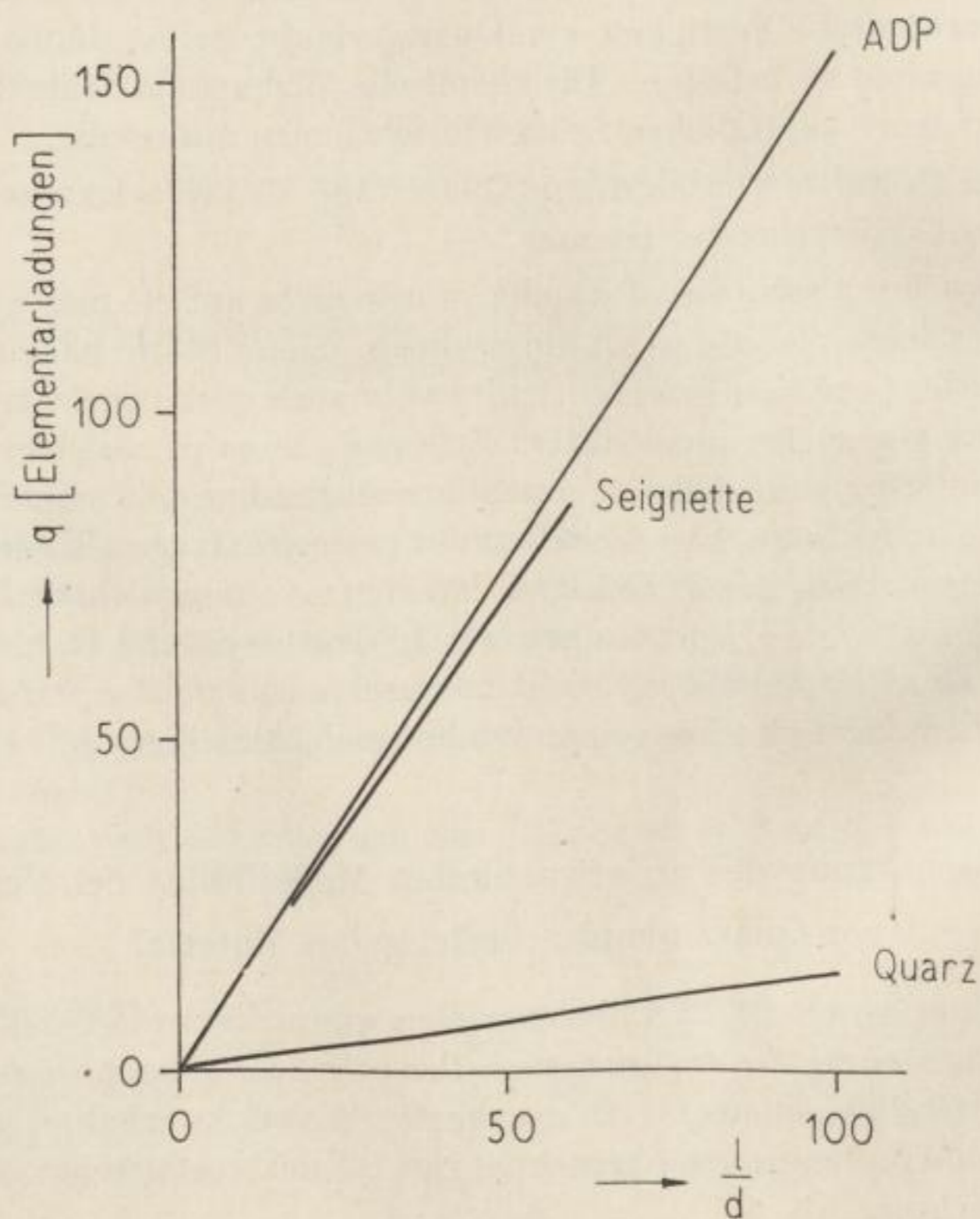


Bild 58. Die entstehende Ladungsmenge bei Quarz, Rochellesalz und ADP für $M = 1 \text{ kg}$, $h = 1 \text{ m}$ und $g_z = 10 \text{ E}$

Die Kraft $P = M \cdot h \cdot g_z$ muß in [dyn] eingesetzt werden. M ist die Masse des Belastungsgewichtes in [g], h der Höhenunterschied der Meßsysteme in [cm] und g_z die Größe des gravimetrischen Vertikalgradienten in Eötvös [E].

Aus den Formeln folgt, daß die entstehende Ladung und Spannung um so größer werden, je größer das Belastungsgewicht und das Verhältnis zu d bzw. je kleiner b sind. Die EULERSche Knicklast läßt es ratsam erscheinen, b nicht kleiner als 4 mm und d nicht kleiner als 1 mm zu machen, wobei aus Gründen der Sicherheit auf eine allseitige Führung des Kristallstabes nicht verzichtet werden darf.

Unter Vernachlässigung der äußeren Kapazität wurden für die Parameter

$$\begin{aligned} M &= 1 \text{ kg} \\ h &= 1 \text{ m} \\ g_z &= 10 \text{ E} \end{aligned}$$

die entstehende Ladung und die Meßspannung berechnet und in den Bildern 58 und 59 dargestellt. Zum Vergleich sind auch die Werte von Seignettesalz und ADP-Kristallen aufgeführt; diese können nur unter Vorbehalt beurteilt werden, da sich derartige Kristallabmessungen in der Praxis nicht verwirklichen lassen.

Die entstehende Spannung ist außerordentlich klein; sie wird durch die hinzugeschalteten Zusatzkapazitäten noch geringer.

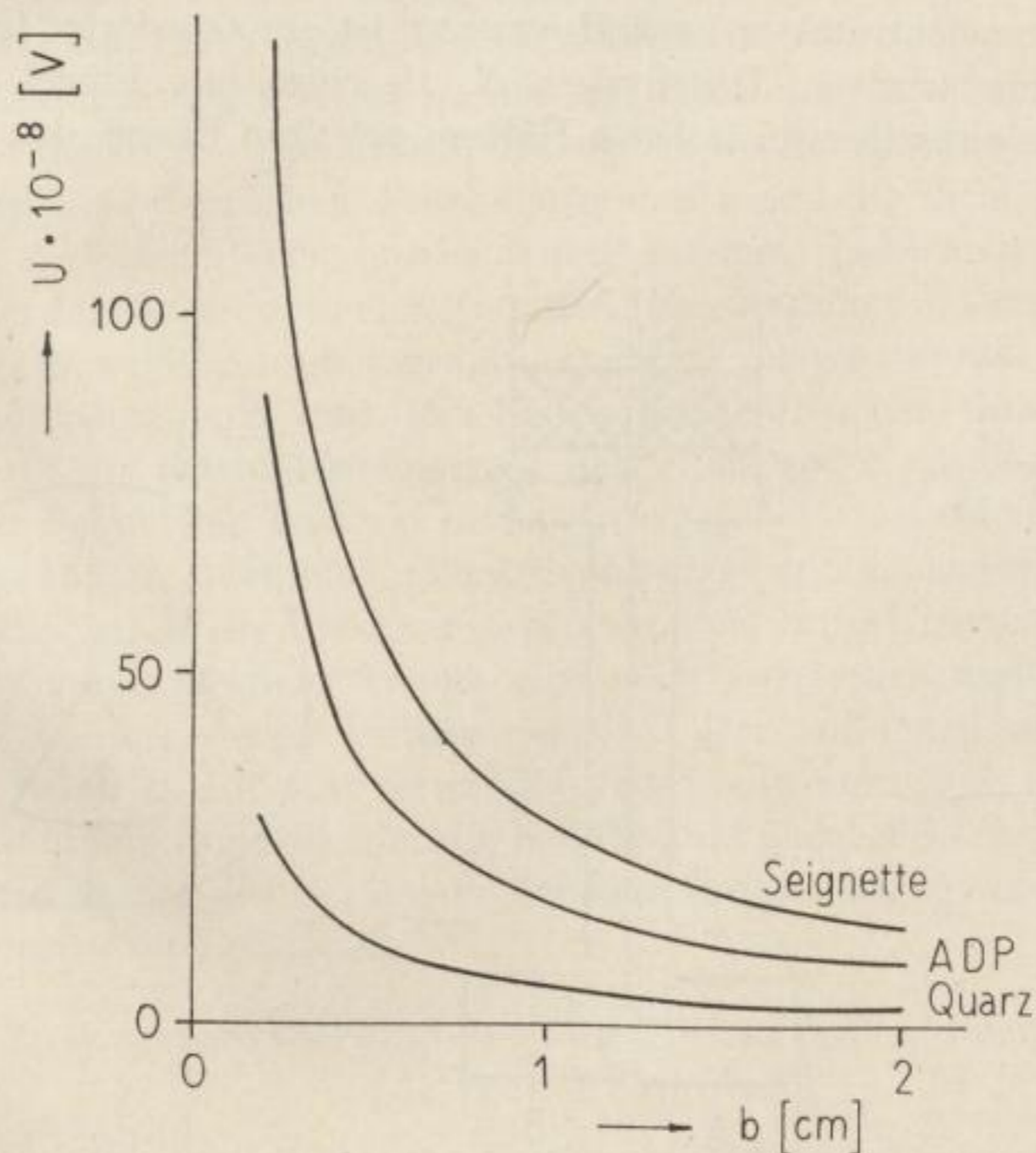


Bild 59. Die entstehende Spannung bei Quarz, Rochellesalz und ADP für $M = 1 \text{ kg}$, $h = 1 \text{ m}$ und $g_z = 10 \text{ E}$

Eine Spannungserhöhung durch Verwendung von Kristallbiegern zu erzielen, bringt keinen Vorteil, weil die Belastung durch die zulässige Biegespannung des Kristallstabes recht eng begrenzt wird.

Zunächst müssen daher die Möglichkeiten untersucht werden, solche kleinen Spannungen (bzw. Ladungsmengen) zu messen. Erst dann können Aussagen über die zu wählenden Abmessungen und Belastungen und die zu erwartende Empfindlichkeit eines Gradientometers auf dem piezoelektrischen Prinzip gemacht werden.

7.4. Die Messung kleinster Ladungsmengen bzw. Spannungen mit Hilfe des Duantenelektrometers nach HOFFMANN

Es darf vorangestellt werden, daß selbst bei günstigster Dimensionierung eines piezoelektrischen Gradientometers die zu messende Ladungsmenge einige 100 bis 1000 Elementarladungen bzw. die Spannung einige Mikrovolt nicht überschreiten werden. Die statistische Messung solcher Effekte fällt in das Gebiet der Grenzelektrometrie; hier kann nur das Duantenelektrometer nach HOFFMANN [49, 50] mit Erfolg eingesetzt werden.

7.4.1. Beschreibung des Instrumentes

Das Duantenelektrometer nach HOFFMANN ist ein astasiertes Gerät, das in Nadelschaltung arbeitet. Das System *N*, als einseitiger Flügel ausgebildet, schwebt über einer in zwei isolierte Hälften geteilten Ebene, den Duanten *A* und *B*.

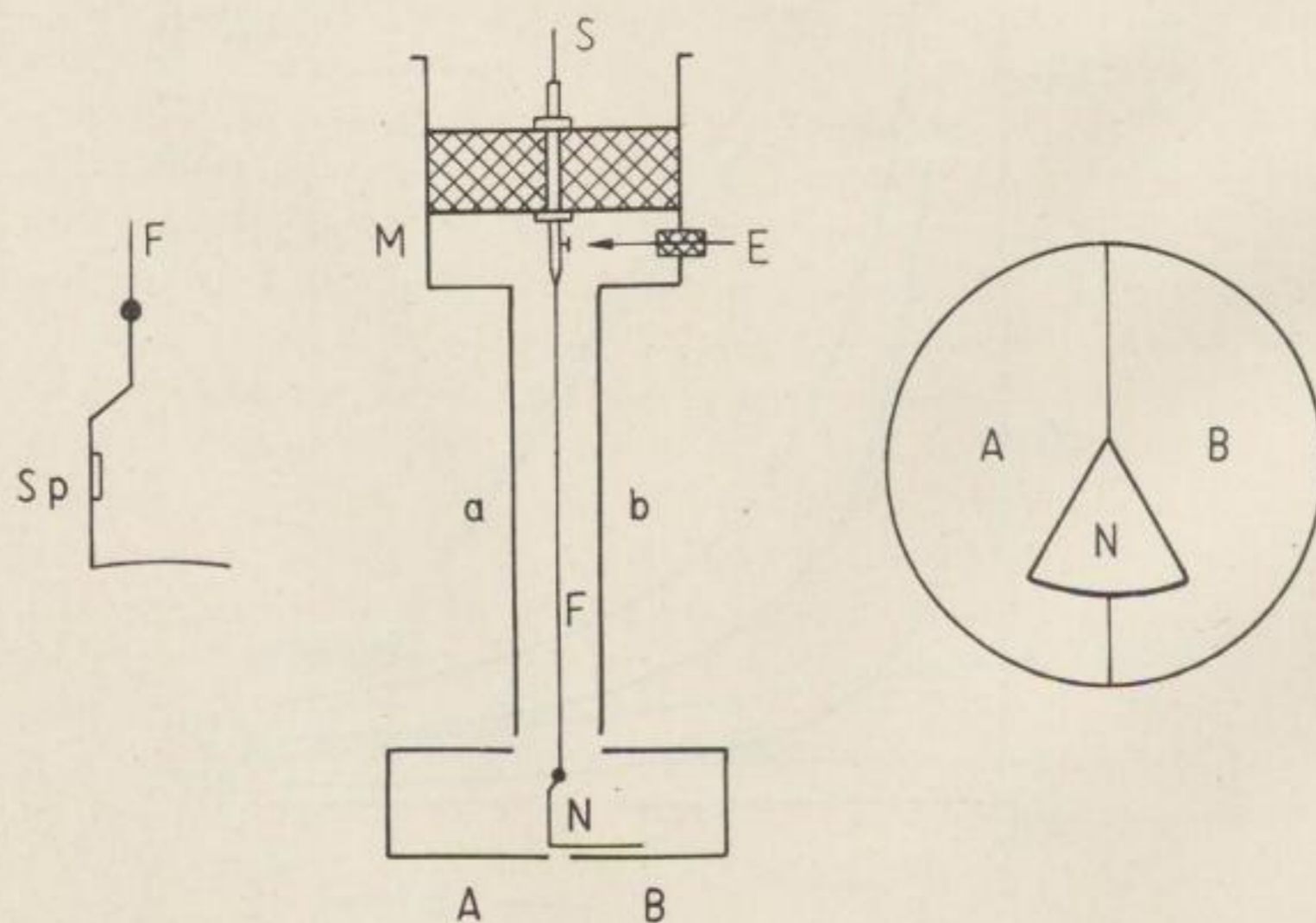


Bild 60. Funktionsskizze des Duantenelektrometers (umgezeichnet nach HOFFMANN [49]). Die Systemstellung ist um 90° verdreht gezeichnet

Die Meßspannung wird dem System über den Anschlußstift S und dem 3 bis 4 mm starken Wollastonsfaden F zugeführt; den anderen Pol bildet die Erde. Deshalb muß der Faden hochisoliert im Kopfteil M des Gerätes befestigt und hier zugleich in Azimut und Abstand von den Duanten verstellbar sein. Der Suspensionsdraht wird von einer aus zwei Hälften (a , b) zusammenklappenden engen Röhre, die auf Nullpotential liegt, umgeben. Da das System sich in einem geschlossenen Feld bewegen soll, sind die Duanten dosenförmig ausgebildet.

Luftströmungen im Gerät als Folge ungleichmäßiger Erwärmung werden durch eine gute Wärmeisolation (Kupfermantel, Hartgummi) verhindert. Die Wirkung von Kontaktpotentialen wird dadurch ausgeschlossen, daß auch die Duantenflächen platinisiert und das Gerät vollständig luftdicht geschlossen ist. Damit keine unbeabsichtigten Ladungen auf den Mittelkörper übertreten, wird das ganze Instrument evakuiert. Die Evakuierung gestattet zugleich, eine günstige Dämpfung einzustellen.

Das System soll klein, leicht und doch starr sein. Von HOFFMANN wurde Platin-Iridium-Folie als Systemmaterial verwendet, weil diese Metallegierung erlaubt, einzelne Teile durch Schweißen fest und dauerhaft miteinander zu vereinigen. Dennoch ist die Verwendung von Aluminium deshalb erstrebenswert, weil dadurch das Trägheitsmoment des Flügels weitgehend verringert werden kann. Um dem Flügel mehr Festigkeit zu geben, kann sein Rand mit Draht umrandet werden; oder aber man preßt die Folie in einer Zinnform mit einem Muster von Erhöhungen und Vertiefungen.

Die Bewegungen des Systems werden mit Hilfe eines Lichtzeigers über den Spiegel $Sp.$ registriert. Zu diesem Zweck ist die Duantendose durchbohrt. In Erzielung einer deutlichen Ablesemarke muß eine helle Lichtquelle benutzt werden, da die Spiegelfläche nur ca. 5 mm^2 beträgt. Zieht man das Spaltbild an der Stelle der Skala durch eine Zylinderlinse zusammen, so können auch die Elektrometerbewegungen photographisch aufgezeichnet werden.

Die Duantenspannung wird dem Elektrometer über eine Quecksilberwippe zugeführt, die die Duantenklemmen A und B entweder mit der Nullklemme oder mit den Polen einer Batterie, deren Mitte geerdet ist, verbindet. Die Hilfspennungen an den Duanten sind entgegengesetzt und gleich groß.

In den Kopfteil M des Elektrometers kann eine Influenzierungsvorrichtung eingesetzt werden, die dem System eine nach Vorzeichen und Größe genau abmeßbare Ladung durch Influenz erteilt. Der Influenzierungskoeffizient wird durch Vergleich mit einer Normkapazität bestimmt; er ist eine konstante Größe, wenn immer zum Anschluß ein Kupferdraht gleicher Stärke benutzt wird.

Der in das Innere des Gerätes eingebaute Erdschalter E wird durch elektrische Fernschaltung betrieben.

7.4.2. Zusammenstellung der für die Duantenelektrometer gültigen Formeln

Die Theorie des Gerätes, die von HOFFMANN [49, 50] entwickelt wurde, geht von einer Potenzreihenentwicklung für die Kapazitätskoeffizienten der beteilig-

ten Leiter nach dem Drehwinkel der Nadel aus. Bei Beschränkung auf lineare Glieder, für die der Kapazitätsfaktor a maßgebend ist, wird das lineare Elektrometer mit homogener Skala erhalten. Bei Hinzunahme der quadratischen Glieder, denen der Astasierungsfaktor b entspricht, erhält man das astasierte Elektrometer mit inhomogener Skala.

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

- S_0 — Spannungswert eines Skalenteils } in der Symmetrielage des
 L_0 — Ladungswert eines Skalenteils } Systems
 R_0 — mechanische Richtkraft der Systemaufhängung [dyn cm bzw. $1/300^2$ dyn cm]
 V — Potentialdifferenz der Duanten [V]
 a — Kapazitätsfaktor des Systems [cm]
 b — Astasierungsfaktor [cm]
 D — Abstand der Skala vom Systemspiegel [mm]
 C_0 — Kapazität des Systems und aller mit ihm verbundenen Apparateile [cm].

Für das astasierbare Elektrometer gelten die Formeln

$$S_0 = \frac{R_0 - 1/2 b V^2}{2 D a V} \quad (128)$$

$$L_0 = C_0 \frac{R_0 - 1/2 b V^2}{2 D a V} + \frac{a V}{2 D} \quad (129)$$

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad V = \sqrt{\frac{2 R_0}{b}} = P. \quad (130)$$

Die elektrische Astasierung ist dadurch verwirklicht, daß die mechanische Richtkraft durch eine mit dem Quadrat der Hilfsspannung wachsende elektrische Richtkraft vermindert wird.

Durch die Astasierung wird die Spannungsempfindlichkeit schon für einen endlichen Wert von V unendlich (130).

Die Schwingungsdauer wird ebenfalls gesteigert und wird für $V = P$ unendlich.

Für $V > P$ wird S_0 negativ; die Nadeleinstellung ist für die Symmetrielage und die Nachbarschaft labil.

Die Zerlegung von (129) in

$$L_0 = \left[C_0 + \frac{a^2 V^2}{R_0 - \frac{b}{2} V^2} \right] S_0 = K \cdot S_0 \quad (131)$$

zeigt, daß für $V > P$ die Elektrometerkapazität negativ werden kann.

Bei genügender Größe von b

$$b < \frac{2 a^2}{C_0}$$

kann die Gesamtrichtkraft mit Erhöhung der Hilfsspannung abnehmen. Für endliche V kann so $L_0 = 0$ werden; die Ladungsempfindlichkeit ist beliebig steigerungsfähig.

Für

$$b > \frac{2a^2}{C_0}$$

durchläuft L_0 ein Minimum. Aus Bild 61 folgen:

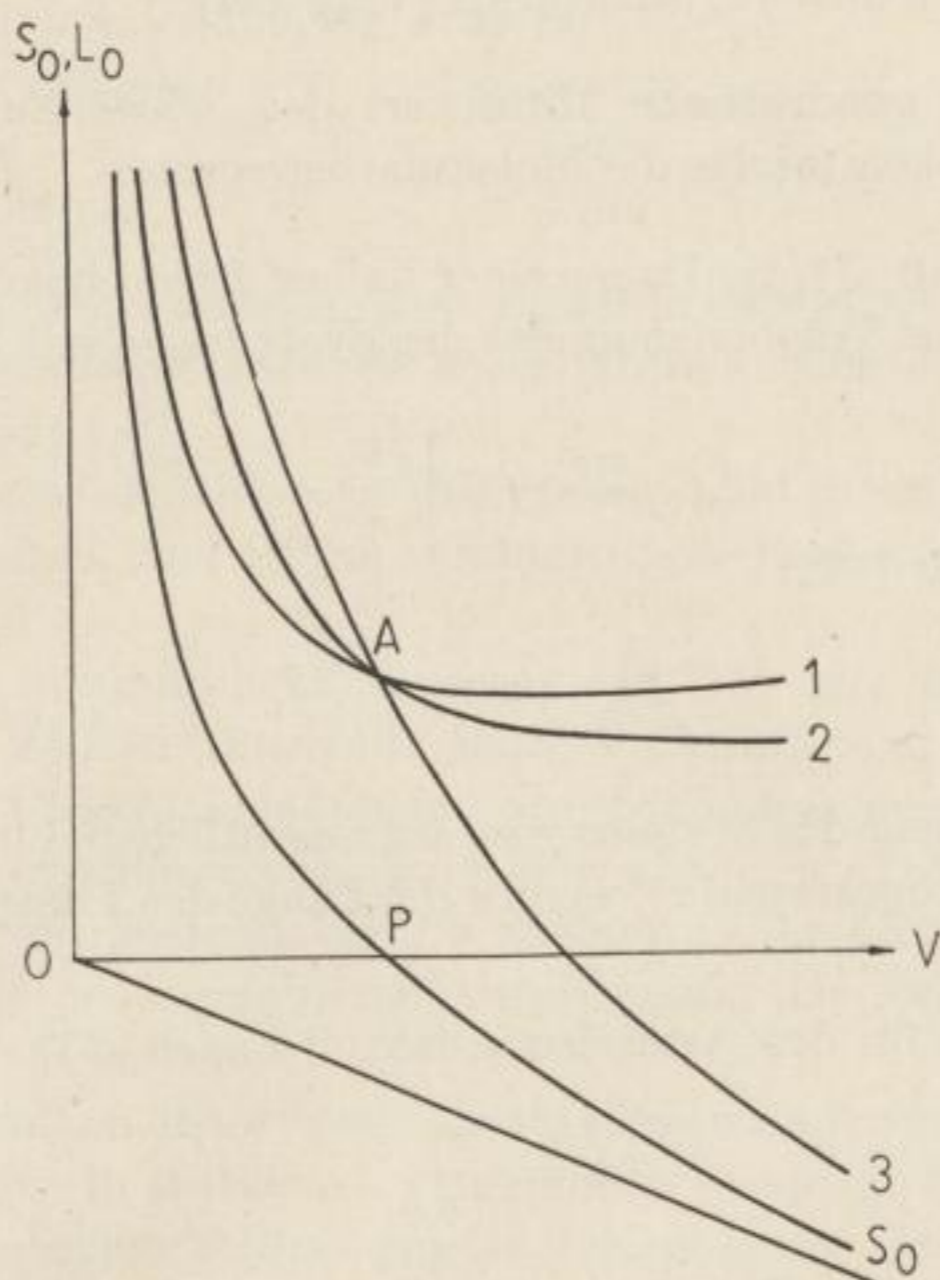


Bild 61. Veranschaulichung des astasierten Elektrometers
(umgezeichnet nach HOFFMANN [50])

Alle L_0 -Kurven schneiden sich im Punkte A für die Abszisse $V = P$.

Für $V < P$ ist das Instrument für konstante Potentiale stabil; die Ladungsempfindlichkeit wird um so kleiner, je größer die Kapazität C_0 ist.

Für $V > P$ ist das Instrument für konstante Potentiale labil; die Ladungsempfindlichkeit wird um so größer, je größer C_0 ist. Dieser Fall ist für die Praxis von besonderem Interesse.

7.4.3. Die Möglichkeiten der Leistungssteigerung beim Nachweis kleinster Ladungen

Nach ENGEL [25] ergibt sich die natürliche Grenze der Ladungsempfindlichkeit des Elektrometers als die Zahl der Elementarquanten, die den selben Ausschlag hervorruft wie er durch die BROWNSche Molekularbewegung im Mittel bedingt ist:

$$\Delta e_3 = c_{33} \frac{R}{aV} \sqrt{\varphi^2} = c_{33} \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 300}{aV} \sqrt{R} . \quad (132)$$

Es bedeuten:

Δe_3 — die der Nadel zugeführte Ladung [Volt cm]

c_{33} — die Kapazität der Nadel [cm]

R — die reduzierte Richtkraft [Volt² cm]

$\sqrt{\bar{\varphi}^2}$ — der quadratische Mittelwert der Schwankung des Ausschlagwinkels infolge der Molekularbewegung.

Bezeichnet man mit T^* die Dauer einer halben freien ungedämpften Schwingung und mit Θ das Trägheitsmoment des Systems, so gilt bekanntlich

$$T^* = \pi \sqrt{\frac{\Theta}{R}}. \quad (133)$$

Hier erhält man für (132)

$$\Delta e_3 = \text{const} \frac{\sqrt{\Theta}}{aV\tau}. \quad (134)$$

Das Trägheitsmoment des Systems wird im wesentlichen durch das des Flügels bestimmt; es ist proportional r^4 , wenn r die Länge des Flügels vom Drehpunkt bedeutet.

Andererseits gilt für den Astasierungsfaktor a nach [25]

$$a = \frac{r^2}{8\pi h},$$

wenn h den Abstand des Flügels von den Duanten darstellt.

Damit nimmt die Gleichung (134) die Form

$$\Delta e_3 = \text{const} \frac{h}{V T^*} \quad (135)$$

an.

Nach Formel (135) wird ein kleiner Wert von Δe_3 bei kleinem T^* (was bei entsprechender Dämpfung auch eine kleine Einstellzeit des Systems bedeutet) nur für möglichst große Werte des Verhältnisses V zu h erreicht. Wenn aber hohe Hilfsspannungen benutzt werden, muß der Labilisierungskoeffizient b klein sein, damit die Nadel nicht schon bei niedrigen Hilfsspannungen labil wird.

Die Schwingungsdauer T^* kann dadurch verkleinert werden, daß einmal durch entsprechende Dimensionierung des Systems das Trägheitsmoment Θ verkleinert wird, oder aber man vergrößert die mechanische Richtkraft, indem ein stärkerer Aufhängefaden verwendet wird.

Eine Vergrößerung der mechanischen Richtkraft muß aber praktisch ausgeschlossen werden, da dies im Widerspruch mit dem Erreichen einer hohen Empfindlichkeit steht.

7.4.4. Schlußfolgerungen für den Systembau und die Anwendung des Gerätes

Aus den systematischen Untersuchungen von DIEBNER [23] ergeben sich als optimale Abmessungen für den Systembau:

Öffnungswinkel des Flügels	etwa 60°
Radius des Flügels	etwa 3 mm
Foliendicke	$5 \mu\text{m}$
Suspensionsdraht	$\varnothing 4 \mu\text{m}$.

Diese geringen Dimensionen des Elektrometerflügels erfordern exakte Parallelität der Duantenflächen, da deren Abstand vom Flügel nur etwa 1/10 bis 2/10 mm beträgt.

Um Ladungsempfindlichkeiten bis etwa 1500 Elektronenladungen pro Skalenteil zu erhalten, sind Hilfsspannungen von durchschnittlich 25 bis 35 V erforderlich.

Die natürliche Empfindlichkeitsgrenze Δe_3 für ein derartig bemessenes System liegt bei 45 Elektronenladungen. Praktisch sind Empfindlichkeiten von einigen 100 Elektronenladungen pro Skalenteil erreicht worden. Die Handhabung des Instruments ist dann sehr schwierig. Trotz der hohen Empfindlichkeit liegt die Einstelldauer des Systems in der Größenordnung einiger Sekunden, was die photographische Aufzeichnung der Ausschläge bei hohem Auflösungsvermögen ermöglicht.

Ausdrücklich muß an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß das Duantenelektrometer nur in stationärer Aufstellung in einem erschütterungsfreien und temperaturisolierten Raum benutzt werden kann. Seine Verwendung als Meßgerät in einem piezoelektrischen Gradientometer bleibt deshalb vorerst nur auf Voruntersuchungen im Labor beschränkt.

7.5. Die Weiterentwicklung des Duantenelektrometers zu einem Spannbandgerät

Die Vergrößerung der Hilfsspannung V führt zu einer höheren Empfindlichkeit des Elektrometers, da die auf das System wirkenden Drehkräfte gesteigert werden. Zugleich bemerkt man aber ein Kippen des Systems um eine Horizontalachse. Man müßte jetzt das System beschweren, wodurch aber das Trägheitsmoment und damit die Einstelldauer vergrößert würden.

Es liegt deshalb der Gedanke nahe, den Elektrometerflügel an einem vertikal fest ausgespannten Draht zu befestigen. Das Kippen des Flügels ist dann ausgeschlossen und dieser kann jetzt so leicht gemacht werden, wie es die Festigkeitseigenschaften nur zulassen. Die Hilfsspannung kann auf etwa 200 V erhöht werden.

HOFFMANN [52] verwirklichte das Spannfaden-Duanten-Elektrometer und erreichte mit einem Flügel aus Aluminium-Folie bei einer Hilfsspannung von 200 V und einem Abstand des Flügels von den Duanten von 1 mm die recht

große Empfindlichkeit 300 Elementarladungen/mm bei hoher Einstellgeschwindigkeit des Systems.

Im folgenden soll versucht werden, die Problematik eines Spannbandgerätes quantitativ aufzuzeigen.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet Formel (129), die wir jetzt in der Form

$$L_0 = C_0 \frac{R_0 + V^2 \left(\frac{a^2}{C_0} - \frac{b}{2} \right)}{2 D a V} \quad (136)$$

schreiben. Der reziproke Wert von L_0 , also $1/L_0$, wird als die Ladungsempfindlichkeit bezeichnet.

Maximale Ladungsempfindlichkeit erreicht man dadurch, daß die Gesamtrichtkraft

$$R = R_0 + \left(\frac{a^2}{C_0} - \frac{b}{2} \right) V^2$$

klein gemacht wird. Dies verlangt eine möglichst kleine mechanische Richtkraft R_0 und die Erfüllung der Beziehung

$$b > \frac{2 a^2}{C_0}.$$

Dieser Sachverhalt ist zu beachten, wenn zwischen einem Spanndraht- und einem Spannbandgerät entschieden werden soll. Um die Abschätzung der günstigeren Verhältnisse vornehmen zu können, vergleicht man am besten die mechanischen Richtkräfte eines Spanndrahtes und eines Spannbandes gleichen Querschnitts miteinander.

Sind $F_D = \frac{\pi d^2}{4}$ der Querschnitt des Drahtes und $F_B = x y = x^2 \lambda$ mit $y = \lambda x$ der Querschnitt des Bandes, so ergeben sich die mechanischen Richtkräfte zu

$$R_0^B = \frac{G F_D^2}{2 \pi l} \quad \text{und} \quad R_0^D = \frac{G F_B^2}{3 l \lambda}$$

bzw. deren Verhältnis

$$\frac{R_0^B}{R_0^D} \Big|_{F_D=F_B} = \frac{2 \pi}{3} \cdot \frac{l}{\lambda} = 2,1 \cdot \frac{l}{\lambda}.$$

Tabelle 19

λ	$\frac{R_0^B}{R_0^D}$
10	0,21
20	0,105
50	0,042

Für verschiedene λ ist das Verhältnis $\frac{R_0^B}{R_0^D}$ in Tabelle 19 dargestellt.

Mit zunehmenden Werten für das Seitenverhältnis des rechteckigen Bandquerschnittes nimmt die Richtkraft R_0^B stark ab. Die mechanische Richtkraft eines Bandes ist somit stets kleiner als die eines Drahtes gleichen Querschnittes; das Elektrometer muß deshalb als Spannbandgerät ausgebildet werden.

Da bei einem Spannbandgerät bei beiderseitig unbeweglicher Klemmung bekanntlich nur die Hälfte der freien Länge des Bandes eingeht, so könnte man durch Verwendung besonders langer Bänder R_0^B weiter verkleinern. Damit die

Geräteabmessungen nicht zu groß werden, sind diesem Weg einer Verringerung der mechanischen Richtkraft bald Grenzen gesetzt.

Um die mechanische Eigenschwingzeit bzw. die Schwingzeit bei Astasierung für das Elektrometersystem berechnen zu können, ist die Kenntnis des Trägheitsmomentes Θ des Flügels notwendig. Diese ergibt sich nach HOFFMANN [49] aus

$$\Theta = d \cdot \gamma \cdot \frac{r^4}{4} \cdot \alpha^* \text{ [g cm}^2\text{]}. \quad (137)$$

Es bedeuten:

- r — Radius des Elektrometerflügels
- α^* — Öffnungswinkel des Flügels
- d — Dicke des Flügels
- γ — spezifisches Gewicht des Flügelmaterials.

Für $r = 0,4 \text{ cm}$, $\alpha^* = 60^\circ$, $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ und $\gamma = 2,7 \text{ g/cm}^3$ (Aluminium) berechnet sich das Trägheitsmoment des Flügels zu $\Theta = 9,05 \cdot 10^{-6} \text{ g cm}^2$.

In Tabelle 20 sind die für verschiedene Spannbandgestaltungen sich ergebenden Werte der mechanischen Richtkraft und der mechanischen Eigenschwingzeit zusammengestellt. Bewußt wurde der Bandquerschnitt nicht gleich demjenigen des Drahtes gewählt, weil sich sehr dünne Bänder mit der notwendigen Konstanz ihrer Abmessungen schwer herstellen lassen.

Tabelle 20

Bezeichnung	G [kp/cm ²]	Querschnitts- dimensionen	wirksame Länge [cm]	R_0 [dyn cm]	T_0 [s]
Wollaston-Spannfaden	$0,62 \cdot 10^6$	$2r = 3 \cdot 10^{-4}$	5	$9,7 \cdot 10^{-5}$	1,9
Wollaston-Spannband	$0,62 \cdot 10^6$	$10^{-4} \times 10^{-2}$	5	$40,6 \cdot 10^{-5}$	0,9
Phosphorbronzeband	$0,445 \cdot 10^6$	$10^{-4} \times 10^{-2}$	5	$29,1 \cdot 10^{-5}$	1,1

Wenn wir jetzt eine Abschätzung des Ladungswertes pro Skalenteil als Funktion der Hilfsspannungen geben wollen, so muß darauf hingewiesen werden, daß dies exakt überhaupt nicht möglich ist, weil die Kapazität des Gerätes und der Astasierungsfaktor nur durch das Experiment bestimmt werden können. Es müssen deshalb plausible Werte für diese Größen vorgegeben werden. Die Ergebnisse dürfen deswegen auch nicht überbewertet werden; sie sollen lediglich die Größenordnungen aufzeigen und auf die Möglichkeiten hinweisen, die ein Spannbandgerät eröffnet.

Der Kapazitätsfaktor a berechnet sich nach der Formel

$$a = \frac{r^2}{8\pi h}$$

für einen Abstand zwischen Flügel und Duanten von $h = 5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ zu

$$a = 0,127 \text{ cm}.$$

Die Kapazität des Gerätes betrage $C_0 = 5 \text{ cm}$.

Der Astasierungsfaktor wurde gemäß der Bedingung

$$b > \frac{2 a^2}{C_0}$$

mit

$$b = 0,01 \text{ cm} \quad \text{angenommen.}$$

Die mechanische Richtkraft beträgt für das Phosphorbronzeband $R_0 = 26,2$ Volt² cm. Der Abstand zwischen Skala und Spiegel soll 2000 mm groß sein.

Die nach Formel (136) berechneten Werte der reziproken Ladungsempfindlichkeit sind in Tabelle 21 zusammengestellt. Dabei ist die Umrechnung des Skalenwertes von der Einheit $\left[\frac{\text{Millivolt cm}}{\text{mm}} \right]$ in Einheiten $\left[\frac{\text{Elementarladungen}}{\text{mm}} \right]$ gemäß der Vorschrift 1 Millivolt cm \simeq 7060 Elementarladungen erfolgt. Die Schwingzeit T gilt für das astasierte System. Außerdem wird nach der Formel von PFLIER [83] die kürzest mögliche Beruhigungszeit des Systems bei ungünstigster Dämpfung ($\alpha = 0,6 \dots 8,85$)

$$t_B = 0,625 T$$

angegeben.

Tabelle 21

Hilfsspannung [V]	Gesamtrichtkraft [Volt ² cm]	L_0 $\left[\frac{\text{Milli-Volt cm}}{\text{mm}} \right]$	L_0 $\left[\frac{\text{Elementarladungen}}{\text{mm}} \right]$	T [s]	t_B [s]
50	21,8	4,29	30287	1,2	0,76
100	8,46	0,83	5800	1,95	1,2
120	0,65	0,053	374	7,04	4,4

Anmerkung: Auch die genauen Beruhigungszeiten des Systems können nur durch das Experiment gewonnen werden

Aus den Betrachtungen folgt: Ein Spannbandelektrometer auf dem Prinzip des Duantenelektrometers erlaubt eine recht hohe Ladungsempfindlichkeit bei brauchbaren Einstellzeiten des Systems zu erreichen. Darüber hinaus besitzt ein Spannbandgerät eine höhere mechanische Festigkeit, was die Weiterentwicklung des Gerätes für nichtstationäre Aufstellung in Aussicht stellt. Vielleicht kann ein derartiges Instrument auch bei der Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten Anwendung finden.

7.6. Der Aufbau und die Wirkungsweise eines Piezoquarzgradientometers

In zwei verschiedenen Punkten einer Lotlinie werden zwei möglichst gleichdimensionierte Quarzstäbe angeordnet. Die Flächen $b \times l$ dieser Kristalle sind mit einer metallischen, nicht oxydierenden Belegung versehen, die als Elektroden dienen. Um die Bruchgefahr der Kristalle bei großer Belastung auszuschalten, empfiehlt es sich, die Piezoquarze allseitig zu führen. Als Material

für die Quarzstabeinbettungen kommt nur ein hochwertiger Isolator, z. B. Polystyrol (spezifischer Widerstand: 10^{16} – $10^{17} \Omega\text{cm}$; Oberflächenwiderstand $> 10^{14} \Omega$) in Frage. Die Einbettungen sind beidseitig zentrisch durchbohrt, damit dort die Abnahmevorrichtungen für die entstehende Piezospannung angebracht werden können.

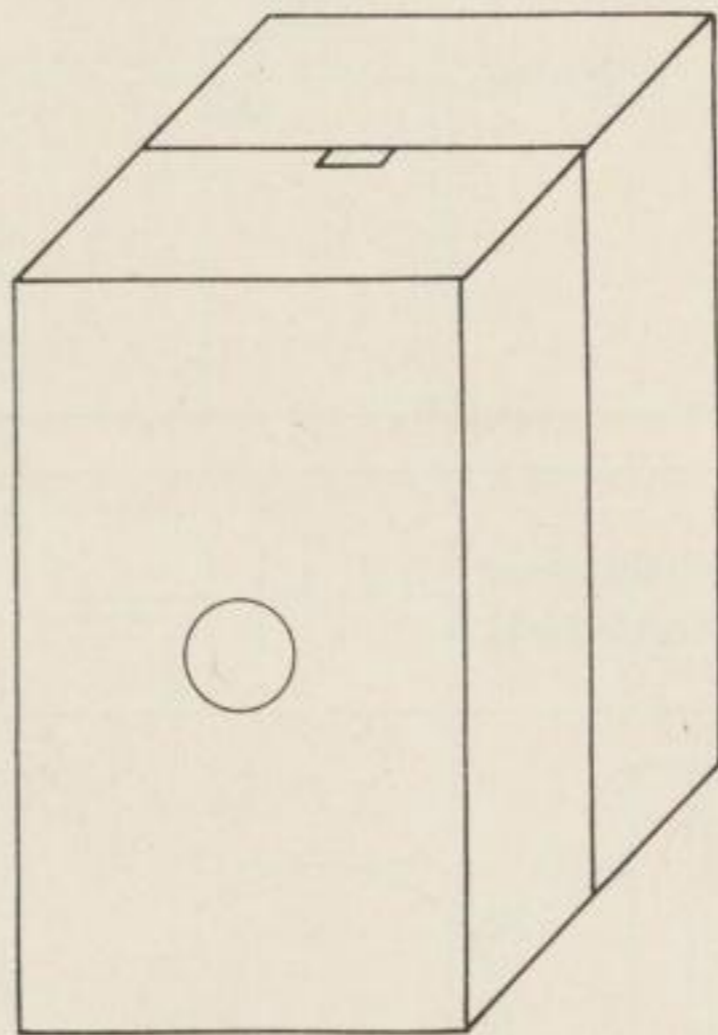


Bild 62. Quarzeinkittungen aus Polystrol

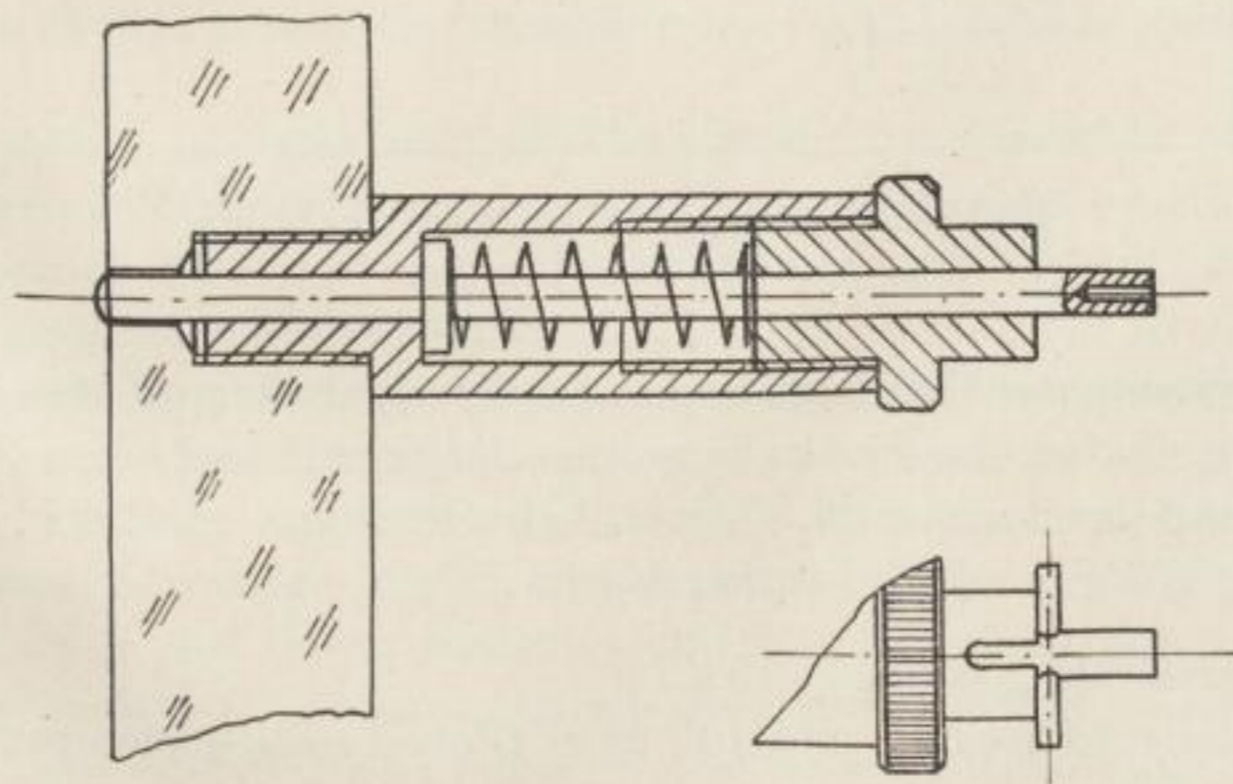


Bild 63. Abnahmevorrichtung für die entstehende Piezospannung

Bei der Belastung der Kristallstäbe mit Hilfe von Gewichten muß auf eine gleichmäßige Kraftübertragung auf die Kristallfläche $b \times d$ geachtet werden. Deshalb wird zwischen die Last und den Kristall eine plankonvexe Linse gelegt.

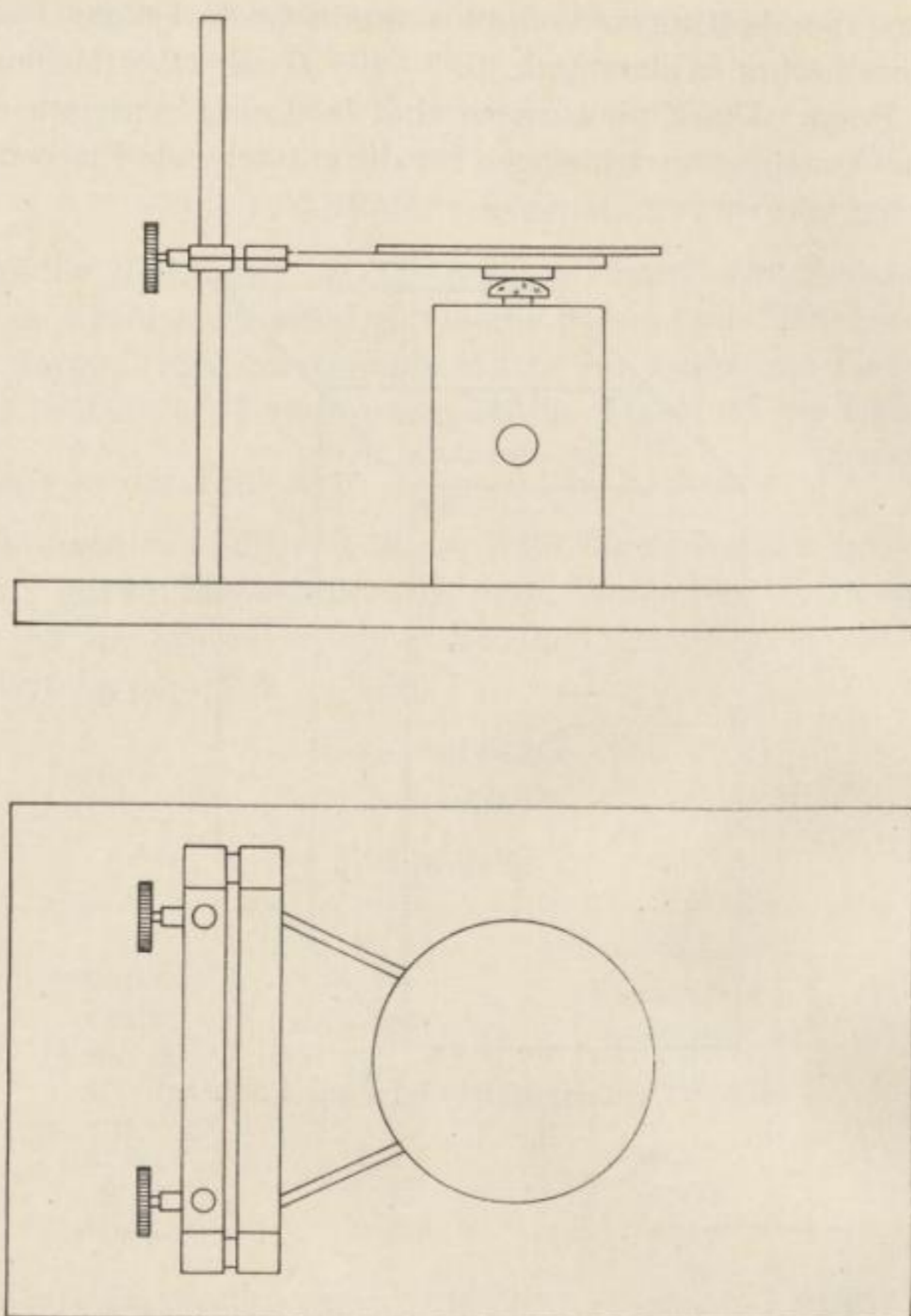


Bild 64. Vorläufige Belastungsvorrichtung

Die Übertragung der Piezospaltung von den Quarzen zum Meßgerät erfolgt über ein Spezialkabel, das eine sehr geringe Kapazität und einen hohen Isolationswiderstand besitzen muß. Diese Anforderungen erfüllt u. a. die HF-Schaltleitung 405.1 des Kabelwerkes Vacha:

Kapazität: $13,2 \text{ pF/m} \pm 10\%$

Isolationswiderstand: $\text{min } 10^{11} \Omega \text{ m}$ (Polystyrol-Glockenperle).

Bedeutend vorteilhafter wäre jedoch die Verwendung von starren und abgeschirmten Verbindungen.

Die beiden Piezokristalle sind elektrisch gegeneinander geschaltet, d. h., die + Belegung von Kristall 1 ist mit der - Belegung von Kristall 2 verbunden; eine Leitung davon ist die Erde. Kristall 1 und 2 und der Spannungsmesser (Elektrometer) sind parallel geschaltet.

Um die Wirkung von äußeren Störspannungen auszuschließen, müssen alle Geräteteile vollständig abgeschirmt werden. Die Anordnung der piezoelektrischen Indikatoren unter einem „Faraday-Käfig“ und die Verwendung von abgeschirmten Kabeln und Steckern erscheinen ausreichend, um die Störspannungen auf einem minimalen Wert zu halten.

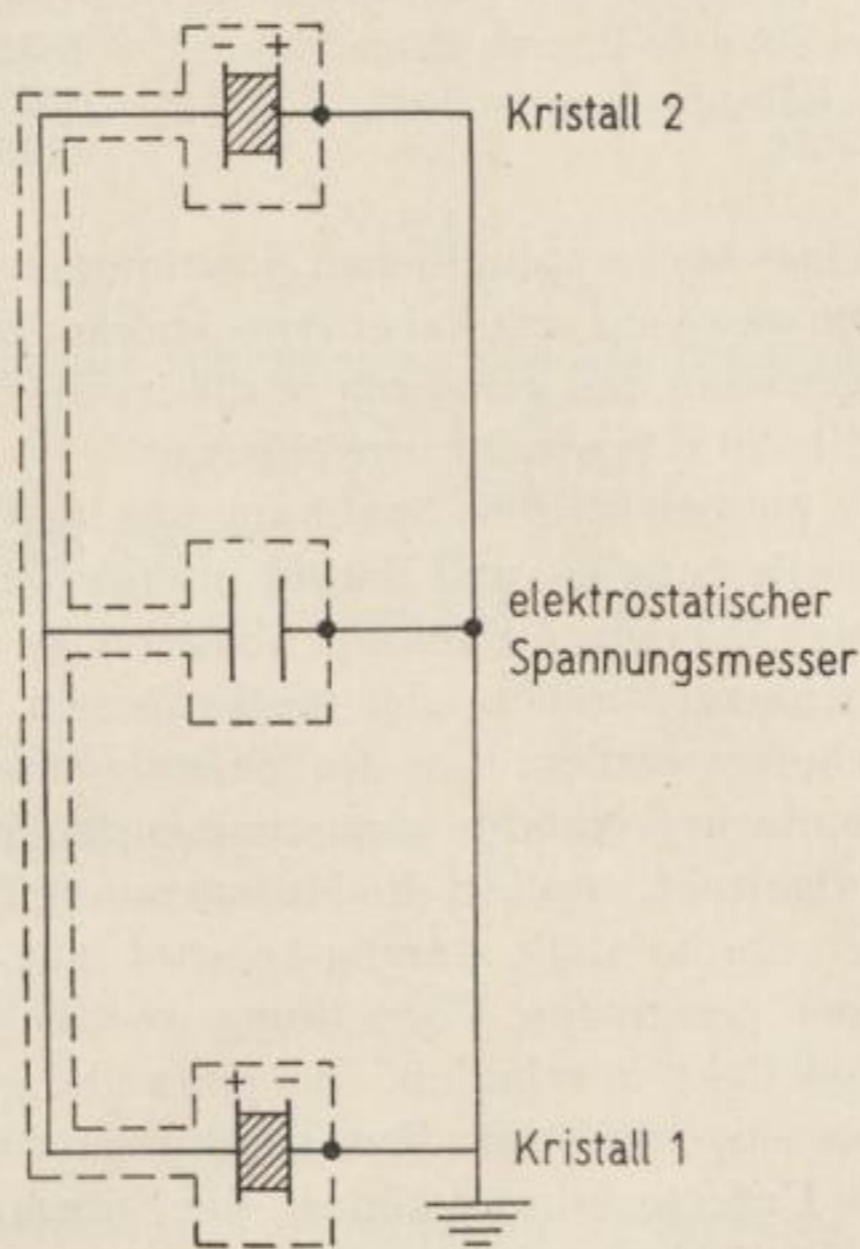


Bild 65. Das prinzipielle Schaltbild eines Piezoquarzgradientometers

Im Augenblick des gleichzeitigen Aufsetzens der Gewichte auf die gleichdimensionierten Kristallstäbe entstehen Piezospannungen beachtlicher Größe. So ergibt sich nach Gleichung (127) eine Spannung von 343 V pro Kristall bei 10 kg Belastung, einer Schaltkapazität $C_A = 50 \text{ pF}$ und den Kristallabmessungen $l = 10 \text{ cm}$, $d = 0,1 \text{ cm}$ und $b = 0,4 \text{ cm}$. Die Gegenschaltung der Kristalle erlaubt, diesen Gewichtseffekt unter bestimmten Voraussetzungen zu beseitigen. Übrig bleibt eine Spannung, die durch den Gewichtsunterschied der beiden Belastungsmassen infolge der Schwereabnahme mit der Höhe (gravimetrischer Normalgradient) und deren Störung (gestörter gravimetrischer Vertikalgradient) verursacht ist. Ersterer Anteil kann durch Auflegen eines Zusatzgewichtes kompensiert werden; letzterer stellt die Meßspannung dar. Für die bereits angeführten Parameter und bei einem Abstand der beiden Meßsysteme von $h = 2 \text{ m}$ sind die nach der Gleichung

$$U = \frac{d_{11} \cdot M \cdot h \cdot g_z \cdot 300 \cdot 4 \pi}{\epsilon b + 4 \pi C_A \frac{d}{l}}$$

berechneten Meßspannungen in Tabelle 22 dargestellt.

Tabelle 22

vertikaler gravimetrischer Störgradient [E]	Meßspannung [μ V]	zu messende Ladungs- menge [Elementarladung]
10	0,7	288
50	3,5	1438
100	7	2875
3086	215,5	88723

Bei Verwendung eines hochempfindlichen Spannungsmessers wie des Duantelektrometers kann somit ein vertikal gravimetrischer Störgradient von 50 E mit Sicherheit nachgewiesen und gemessen werden; eine weitere Empfindlichkeitssteigerung auf 10...20 E erscheint erreichbar.

Da bekanntlich die piezoelektrische Spannung nur im Moment der Be- bzw. Entlastung der Kristalle entsteht und darum infolge der endlichen Entladekonstante des Systems nach einer e -Funktion abnimmt, so müssen die Gewichte mit Hilfe einer elektromagnetischen oder mechanischen Vorrichtung ständig aufgesetzt bzw. abgehoben werden. Vor der Messung ist es jedoch notwendig, beide Indikatorelemente aufeinander abzustimmen, d. h., beide Systeme in demselben Niveau aufgestellt, ergeben die Meßspannung Null.

Wenn man dagegen die Kristalle ständig belastet läßt, dann müssen beide Kristalle mittels einer geeigneten Vorrichtung vertikal auseinanderbewegt werden, um einen Meßeffect zu erhalten. Bei einer kleinen Zeitkonstante des Systems erfordert dies eine sehr große Bewegungsgeschwindigkeit.

Nur experimentelle Untersuchungen können die Entscheidung zwischen den beiden aufgezeigten Möglichkeiten herbeiführen.

So gestattet also ein Piezoquarzgradientometer die statische und absolute Direktmessung des gestörten gravimetrischen Vertikalgradienten.

7.7 Die Eigenschaften und das Verhalten eines Piezoquarzgradientometers

7.7.1. Über die mögliche Beeinflussung des Meßwertes durch die BROWNSche Molekularbewegung in den Quarzstäben

Wegen der zwischen den Gitterbausteinen eines Kristalls wirkenden quasi-elastischen Bindungskräfte sind zwischen ihnen Schwingungen möglich. Dabei handelt es sich um inharmonische Schwingungen, wie aus dem unsymmetrischen Verlauf der Potentialkurve folgt. An den Schwingungen ist der gesamte Kristall beteiligt; man spricht deshalb von Gitterschwingungen, die man sich im stationären Fall als stehende Wellen vorstellen kann. In jeder Wellenlänge der betrachteten stehenden Wellen existieren zwei verschiedene Schwingungsformen verschiedener Frequenz: die elastischen oder akustischen Schwingungen, die vollständig den Schwingungen eines Kontinuums gleichen, und die optischen Schwingungen. Bei gleicher Wellenlänge ist die Frequenz der opti-

schen Schwingung stets größer als die der akustischen. Da nun der untere Grenzwert der akustischen Schwingung die Grundschwingung des Quarzstabes ist, brauchen die optischen Schwingungen wegen ihrer noch höheren Frequenzen nicht betrachtet zu werden.

Unter gegebenen Temperaturbedingungen soll ein Quarzstab infolge der BROWNSchen Molekularbewegung Schwingungen parallel X ausführen. Nach LAWSON und LONG [67] liefert dies nach dem Gleichverteilungssatz für diesen Freiheitsgrad die Energie $1/2 kT$, wodurch eine Änderung der elastischen Spannungskomponente

$$X_x^2 = \frac{2 k T}{b d l} \cdot \frac{1}{s_{11}} \quad (138)$$

erfolgt. Die Folge ist eine Spannung an den Flächen senkrecht Y :

$$U_v^2 = \frac{32 \pi^2 b}{l d} \frac{d_{11}^2}{\epsilon^2 s_{11}} kT. \quad (139)$$

Gleichung (139) gilt nur für

$$h_v \ll k T.$$

Gibt man

$$s_{11} = 12,95 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}$$

$$d_{11} = 6,9 \cdot 10^{-8} \text{ cgs}$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

$$d = 0,1 \text{ cm}$$

$$b = 0,4 \text{ cm}$$

vor, dann ist

$$U_v^2 = 0,284 \cdot 10^{-12} T. \quad (140)$$

Die Spannung ergibt sich in Volt, wenn die Temperatur in Grad Kelvin [$^{\circ}\text{K}$] eingesetzt wird.

Bei einer Temperatur von 10°C berechnet sich die durch die BROWNSche Molekularbewegung verursachte elektrische Spannung zu

$$U_v \approx 9 \mu\text{V}.$$

Die Untersuchungen von COOK, GREENSPAN u. a. [21] brachten das Ergebnis, daß sich diese Spannung auf Frequenzen nahe der Resonanzfrequenz, in unserem Fall bei ca. 27 kHz, konzentriert. Im Gegensatz zu dem recht großen theoretischen Wert schätzen sie die Störspannungen auf etwa $0,6 \mu\text{V}$ für einen Quarzglasstab mit 36,6 kHz Grundfrequenz bei Zimmertemperatur.

Die auf den Elektroden entstehenden Ladungen können sich im statistischen Mittel zwischen beiden Kristallen aufheben oder aber sie werden als hochfrequente Wechselspannung wirksam, auf die das Meßinstrument nicht reagiert (s. Abschnitt 7.7.7.).

7.7.2. Der Einfluß der Temperatur auf den Meßvorgang

Der Temperaturkoeffizient des piezoelektrischen Koeffizienten d_{11} beträgt für Quarz nach Tabelle 16

$$T d_{11} = \frac{1}{d_{11}} \frac{\partial d_{11}}{\partial T} = -2 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C}.$$

Eine Temperaturänderung um $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ verändert den Wert des piezoelektrischen Koeffizienten um $-0,2\%$. Die dadurch bedingte Verfälschung der Meßergebnisse bei der Bestimmung des gestörten Vertikalgradienten fällt wesentlich unter die Nachweisgrenze; selbst die Meßanzeige des vertikalen Normalgradienten weicht infolge des Temperatureffektes nur um ca. 6 E vom Normalwert ab.

Die Meßsysteme des Piezoquarzgradientometers verlangen deshalb keine besonderen Maßnahmen zur Temperaturgestaltung am Meßort. Hierin liegt ein bedeutender Vorteil der Verwendung von Quarzstäben als piezoelektrische Indikatoren.

Im Gegensatz dazu wird der hochempfindliche Spannungsmesser eine gute Wärmeisolation verlangen, da Temperaturschwankungen zu einer Nullpunktsdrift führen.

7.7.3. Die Entladekonstante des Systems

Es bedarf keiner weiteren Erklärung dafür, daß die Entladekonstante des gesamten elektrischen Systems möglichst groß sein muß, um den vollen Wert der Meßindikation bestimmen zu können.

Die Entladekonstante τ des Systems berechnet sich als Produkt aus Gesamtwiderstand R und Gesamtkapazität C :

$$\tau = R \cdot C . \quad (141)$$

Der Maximalwert von τ kann nur bei größtem Isolationswiderstand R erreicht werden, da die Kapazität im Hinblick auf eine optimale Meßspannung klein zu machen ist.

Rechnet man mit einem spezifischen Widerstand des Quarzes von $\rho_Q = 10^{12}\ \Omega\text{m}$ (die Angaben in der Literatur schwanken zwischen $10^{10}\dots 10^{14}\ \Omega\text{m}$ [44, 63]), so beträgt der Isolationswiderstand des in Abschnitt 7.7 beschriebenen Quarzstabes $R_Q = 2,5 \cdot 10^{12}\ \Omega$.

Der Isolationswiderstand des Kabels liegt in der gleichen Größenordnung; der der elektrostatischen Spannungsmesser ist allgemein $> 10^{15}\ \Omega$.

Da alle Widerstände parallel geschaltet sind, ergibt sich der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste Einzelwiderstand, also zu $\sim 10^{12}\ \Omega$. Bei einer Gesamtkapazität von ca. 50 pF wird die Entladekonstante 50 s betragen, wobei Werte $\tau = 50\dots 150\ \text{s}$ praktisch erreichbar erscheinen.

Legt man den Betrachtungen eine Entladekonstante von 100 s zugrunde, dann ist der Meßwert nach 1 s um ca. 1% abgeklungen. Soll ein Störgradient von 300 E auf 10 E genau bestimmt werden, dann muß der Meßvorgang in 3,4 s erfolgen, da in dieser Zeit der Meßwert gerade um die Indikation von 10 E gesunken ist. Die Meßzeit verkürzt sich auf ca. 0,3 s, wenn der Normalgradient auf 10 E bestimmt werden soll.

Mit der Entladekonstante der Anordnung hängt das Problem des Aufsetzens der Gewichte auf die Kristallstäbe eng zusammen. Der „Gewichtseffekt“ kann durch die Gegenschaltung der Kristalle nur dann restlos aufgehoben werden, wenn die Gewichte gleichzeitig auf die piezoelektrischen Indikatoren

aufgesetzt werden. Geringste Zeitverzögerungen führen zu Restspannungen, die den Meßeffect um ein Mehrfaches übertreffen. Bei einer Zeitkonstante von 100 s und einem „Gewichtseffect“ von 343 V darf die Zeitverzögerung nicht größer als $2 \cdot 10^{-7}$ s betragen, damit die Restspannung kleiner als die Meßindikation bei 10 E ist. An eine mechanische oder elektromagnetische Vorrichtung zum Aufsetzen der Gewichte müssen deshalb allerhöchste Anforderungen gestellt werden.

Läßt man dagegen die Kristalle dauernd belastet, dann entfällt das Belastungsproblem. Die Kristalle müssen jetzt in 3,4 s 1 min in entgegengesetzten Richtungen auseinanderbewegt werden, um bei einer Zeitkonstante von 100 s einen Störgradienten von 300 E auf 10 E bestimmen zu können. Zusätzlich muß vorausgesetzt werden, daß auftretende Zusatzbeschleunigungen in beiden Systemen gleich groß und gleich gerichtet sind. Auch diese Art des Messens beinhaltet einige technische Schwierigkeiten hinsichtlich der Ausbildung des Bewegungsmechanismus und des elektrischen Kreises (Isolation, Konstanz der Gesamtkapazität).

7.7.4. Der Luftdruckeffekt bei der Gradientenmessung

Die Belastungsgewichte erleiden in Luft einen Auftrieb, wodurch die Piezoquarze in geringem Maße entlastet werden. Da durch die Gegenschaltung die direkte Gewichtswirkung der Belastungsmassen herausfällt, die geringfügige Druckabnahme mit der Höhe kann vernachlässigt werden, braucht der Auftrieb nur in dem Ausdruck $M h g_z$ Berücksichtigung zu finden. Demnach vermindert sich die auf die Piezoquarze wirkende effektive Kraft gemäß

$$M h g_z \left(1 - \frac{d_L}{d_m} \right), \quad (142)$$

wenn d_L die Luftdichte und d_m die Dichte der Belastungsgewichte bedeuten (GRAF [36]).

Eine Abschätzung, die für Bleigewichte ($d_m = 11,34 \text{ g/cm}^3$) im Druckbereich 780 bis 680 mm Hg und im Temperaturbereich 0 bis 30° für Gradientenwerte bis 3000 E erfolgte, zeigte keinen meßbaren Einfluß auf das Meßresultat.

Aus diesem Grunde erscheint die Unterbringung der Meßelemente in druckdichten Gehäusen unnötig. Im Gegensatz zur Schweremessung mit Gravimetern ist die Gradientenmessung in weiten Grenzen unabhängig von Luftdruckänderungen und adiabatischen Effekten.

7.7.5. Das Verhalten der piezoelektrischen Indikatoren beim Auftreten von Störbeschleunigungen

An den piezoelektrischen Indikatoren können vertikale Zusatzbeschleunigungen bis zum zweifachen Betrag der Erdbeschleunigung auftreten, die zu beträchtlichen Piezospansungen führen. Es darf angenommen werden, daß die durch Erschütterungen und Vibrationen verursachten Ladungs- bzw. Spannungsschwankungen durch die Gegenschaltung der Kristalle aufgehoben werden, wenn die Erregungen an beiden Systemen in Amplitude und Phase

gleich sind. Diese Voraussetzung wird praktisch weitgehend verwirklicht sein, da die beiden Indikatoren durch Haltevorrichtungen und Gehäuse starr miteinander verbunden sind.

Bekanntlich erzeugt ein in Richtung der elektrischen Achse X wirksamer Gesamtdruck auf der dazu senkrechten Fläche F_x piezoelektrische Ladungen (longitudinaler piezoelektrischer Effekt). Dieser Fall liegt vor, wenn auf die Kristalle horizontale Beschleunigungen, verursacht durch Erschütterungen oder durch das Abbremsen des Meßfahrzeuges, einwirken. In die Berechnung geht jetzt die träge Masse der Kristalle ein. So entstehende Störspannungen schließt man einmal dadurch aus, daß die Kristalle mit ihren elektrischen Achsen senkrecht zur Wirkungsrichtung der Störbeschleunigungen orientiert werden. Andererseits gelten auch hier die bereits bei den vertikalen Beschleunigungen gemachten Bemerkungen.

Die Neigung des Gradientometers führt zu einer Abweichung von der Lotrichtung und zu einer Verringerung des senkrechten Abstandes der Piezoindikatoren. Infolge der starren Verbindung erfahren beide Systeme dieselbe Neigung, was die Beseitigung des Effektes der Schwerkraftverminderung mittels der elektrischen Gegenschaltung erlaubt.

Die Verkleinerung des Wertes der Vertikalgradienten um $g_z \cos \alpha$ und die Verringerung des senkrechten Abstandes der Piezoindikatoren um $h \cdot \cos \alpha$ führt zu einer Ladungsverminderung um

$$\Delta q = d_{11} \frac{1}{d} M_z g h \cos^2 \alpha, \quad (143a)$$

wenn α der Neigungswinkel ist.

Setzt man die Neigung periodisch mit

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega_0 t$$

an, dann berechnet sich der mittlere Wert der Ladungsverminderung für kleine Winkel über eine Periode zu

$$\Delta q = d_{11} \frac{1}{d} M g_z h \frac{\alpha_0^2}{2} = q_0 \frac{\alpha_0}{2}. \quad (143b)$$

Die Werte Δq für statische und periodische Neigungen sind unter Verwendung der bereits der Tabelle 22 zugrunde gelegten Parameter in den Tabellen 23a und 23b zusammengestellt.

Tabelle 23a

Neigungswinkel α [Grad]	Ladungsverminderung Δq [Elementarladungen] bei statischer Neigung für g_z			
	10 [E]	50 [E]	300 [E]	3086 [E]
2	—	2	10	106
4	1	7	41	426
6	3	16	95	976
8	6	28	167	1712
10	9	43	260	2671

Tabelle 23b

Neigungswinkel α_0 [Grad]	Ladungsverminderung Δq [Elementarladungen] bei periodischen Neigungsbewegungen für g_z			
	10 [E]	50 [E]	300 [E]	3086 [E]
2	—	1	5	54
4	—	4	21	216
6	2	8	47	486
8	3	14	84	863
10	4	22	132	1351

Anmerkung: Die Zahlenwerte in den Tabellen sind auf ganze Zahlen gerundet

Die Abschätzung weist aus, daß die Messung des gestörten gravimetrischen Vertikalgradienten sowohl von der statischen Neigung als auch von periodischen Neigungsbewegungen weitgehend unabhängig ist. Soll dagegen der Normalgradient auf 10 E bestimmt werden, dann dürfen im ersten Falle maximal 3° , im zweiten 4° Neigung zugelassen werden. Der Fehlereinfluß durch Neigung wird geringer, wenn die beiden Indikatorsysteme in einem Rahmen kardanisch aufgehängt werden, mit denen nur noch eine Verringerung des senkrechten Abstandes der Systeme erfolgen kann. Eventuell könnten auch Kristallhohlzylinder als piezoelektrische Indikatoren verwendet werden, da diese bei geeigneter Anordnung keine Reaktion auf Neigungen zeigen (BALABUŠEVIČ [6]). Die hier gemachten Betrachtungen können dann von erheblichem Interesse sein, wenn das Gradientometer in Flugzeugen eingesetzt wird.

7.7.6. Die Berücksichtigung eines Fortbewegungseffektes bei Gradientenmessungen in bewegten Systemen

Als Hauptschranke bei der Erreichung einer hohen Meßgenauigkeit bei Schweremessungen auf Schiffen und besonders in Flugzeugen erwies sich der Eötvös-Effekt, da Kurs und Geschwindigkeit des Meßfahrzeuges mit hoher Genauigkeit bestimmt werden müssen. Außerdem sind die schon bei ruhigem Flug auftretenden Beschleunigungen recht bedeutend (0,01 bis 0,1 g).

Im Gegensatz dazu, gestattet die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe von Gradientometern auch den Eötvös-Effekt durch die Gegenschaltung den Indikator auszuschließen, da dieser auf beide Meßelemente in gleicher Weise wirkt. Da ebenfalls alle Art von Zusatzbeschleunigungen, wie oben ausgeführt, eliminiert werden, liegt hier der wesentliche Vorteil der Gradientenmessung gegenüber einer Schweremessung im Hinblick auf deren technische Ausführung begründet.

7.7.7. Die Wirkung periodischer Spannungsschwankungen an den Piezoquarzen und von Erschütterungen auf dem hochempfindlichen Spannungsmesser

Periodische Erschütterungen erzeugen an den Piezoquarzen Ladungs- bzw. Spannungsschwankungen, die dann nicht restlos durch die elektrische Gegen-

schaltung aufgehoben werden können, wenn die Bedingungen der Gleichphasigkeit und gleicher Amplituden unerfüllt sind.

Die Theorie zeigt, daß bei einem Elektrometer in Fadenschaltung mit Hilfsspannung ($U_A = -U_B = V$, $U_M \ll V$) die Auslenkung des Elektrometersystems der Meßspannung nahezu proportional ist. Bei einem derartigen Meßinstrument bewirken Wechselspannungen somit keine Anzeige. An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß unter Verwendung einer von ENGEL und PFORTE [26] angegebenen Schaltung und der Voraussetzung, daß Meßspannung und Hilfsspannung synchron verlaufen, das Duantenelektrometer auch für Wechselspannungsmessungen bei hoher Empfindlichkeit und linearer Anzeige zu benutzen geht.

Aufhängefaden und Elektrometernadel stellen ein schwingungsfähiges System dar. Man erhält deshalb nur dann eine ruhige Einstellung, wenn die Frequenz der auftretenden Spannungsschwankungen groß gegenüber der mechanischen Eigenfrequenz des Elektrometersystems ist.

Werden hochempfindliche Schwingungskondensatorelektrometer als Anzeigeeinstrumente verwendet, dann kann der Einfluß von Störspannungen durch entsprechende Gestaltung des Durchlaßbandes herabgesetzt bzw. beseitigt werden.

Gegenüber mechanischen Erschütterungen sind die Spannungsmeßgeräte allgemein sehr empfindlich. Das trifft besonders für das Vakuumduantenelektrometer und für die Schwingkondensatorelektrometer, etwas weniger für Spannbandgeräte, zu. Es müssen deshalb Maßnahmen ergriffen werden, die die Übertragung von Schwingungen auf das Meßgerät verhüten.

7.8. Experimentelle Voruntersuchungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden vom Institut für Angewandte Geophysik der Bergakademie Freiberg einige experimentelle Voruntersuchungen durchgeführt, bei denen es nicht um die Gewinnung eines Meßresultates als vielmehr um die Lösung grundlegender Probleme, wie die Bestimmung der Entladekonstante, des Isolationswiderstandes der Meßanordnung und der Ausarbeitung von Maßnahmen zu einer wirksamen elektrostatischen Abschirmung, ging.

Die direkte Messung von Widerständen in der Größenordnung $10^{12} \Omega$ erfordert höchsten apparativen Aufwand. Aus diesem Grunde erschien es angebracht, den Isolationswiderstand der in Bild 66 dargestellten Versuchsanordnung indirekt aus einer Messung der Entladekonstante und der Kapazität zu bestimmen.

Als elektrostatische Spannungsmesser dienten das Zeiß-Einfadenelektrometer in Fadenschaltung (Eigengaswiderstand 10^{15} bis $10^{16} \Omega$, Kapazität etwa $7,5 \text{ pF}$ [114]) und das Schwingkondensatorelektrometer VA-J-50 (Eingangswiderstand bei offenem Eingang = $10^{15} \Omega$, Eingangskapazität ca. 27 pF , empfindlichste Meßbreite 10 mV [98]). Zur Kapazitätsmessung wurde die LCR-Meßbrücke Typ 1008 vom Funkwerk Erfurt benutzt, die die Kapazität auf $\pm 0,1 \text{ pF}$ zu bestimmen gestattet. Belastungsvorrichtung, Quarzstabein-

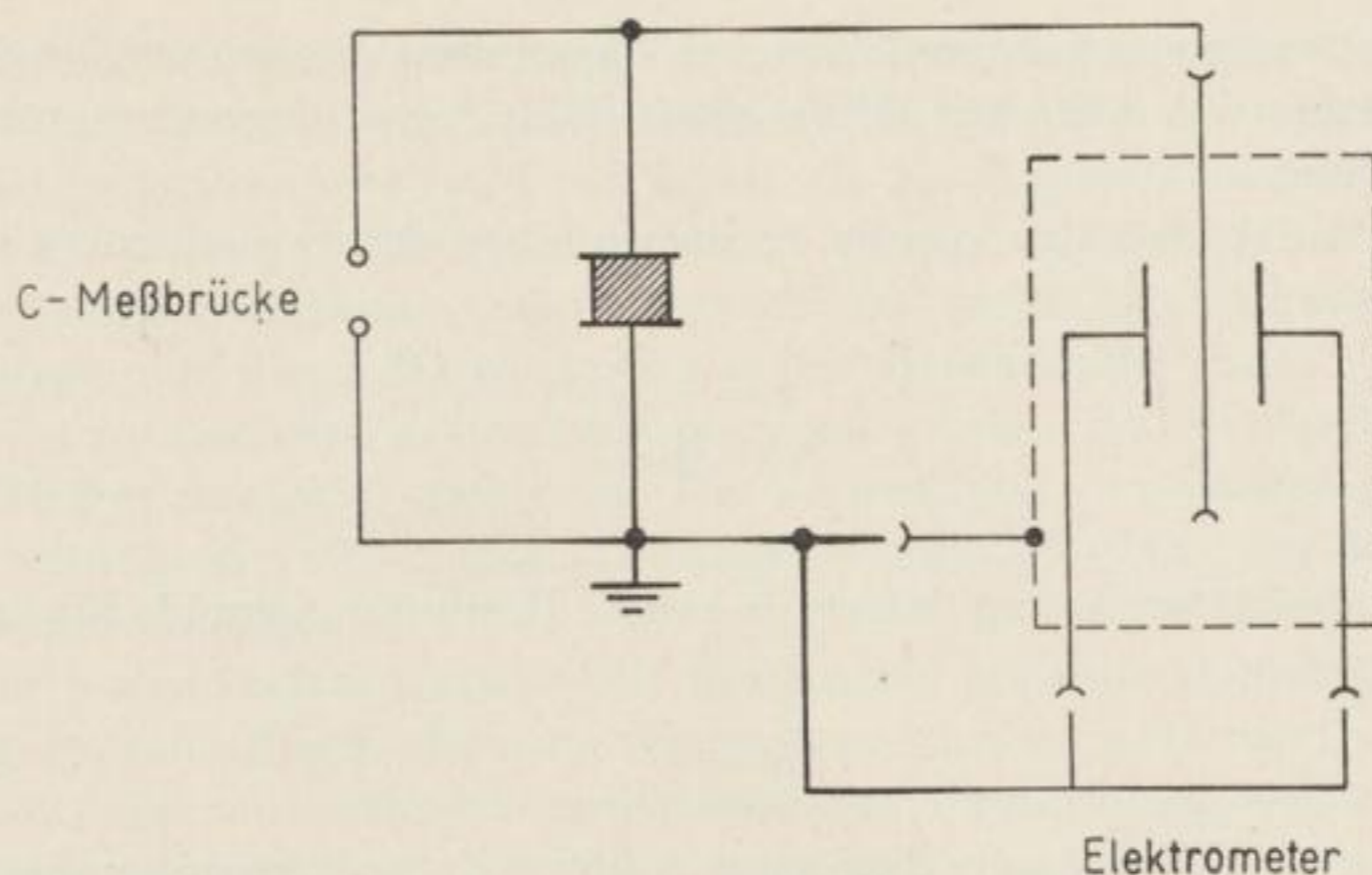


Bild 66. Das elektrische Schaltbild der Versuchsanordnung bei Verwendung des Zeiß-Einfadenelektrometers als elektrostatischer Spannungsmesser

bettungen und Spannungsabnahmevorrichtungen wurden bereits in Abschnitt 7.6. beschrieben.

Anstelle der Kapazitätsmeßbrücke wurde zunächst eine Gleichspannungsquelle geschaltet und damit eine Spannung U_0 an die Anordnung gelegt. Nach Abschalten der Ausgangsspannung mit Hilfe eines abgeschirmten Schalters wurde der zeitliche Verlauf des Entladevorganges

$$U = U_0 e^{-t/\tau}$$

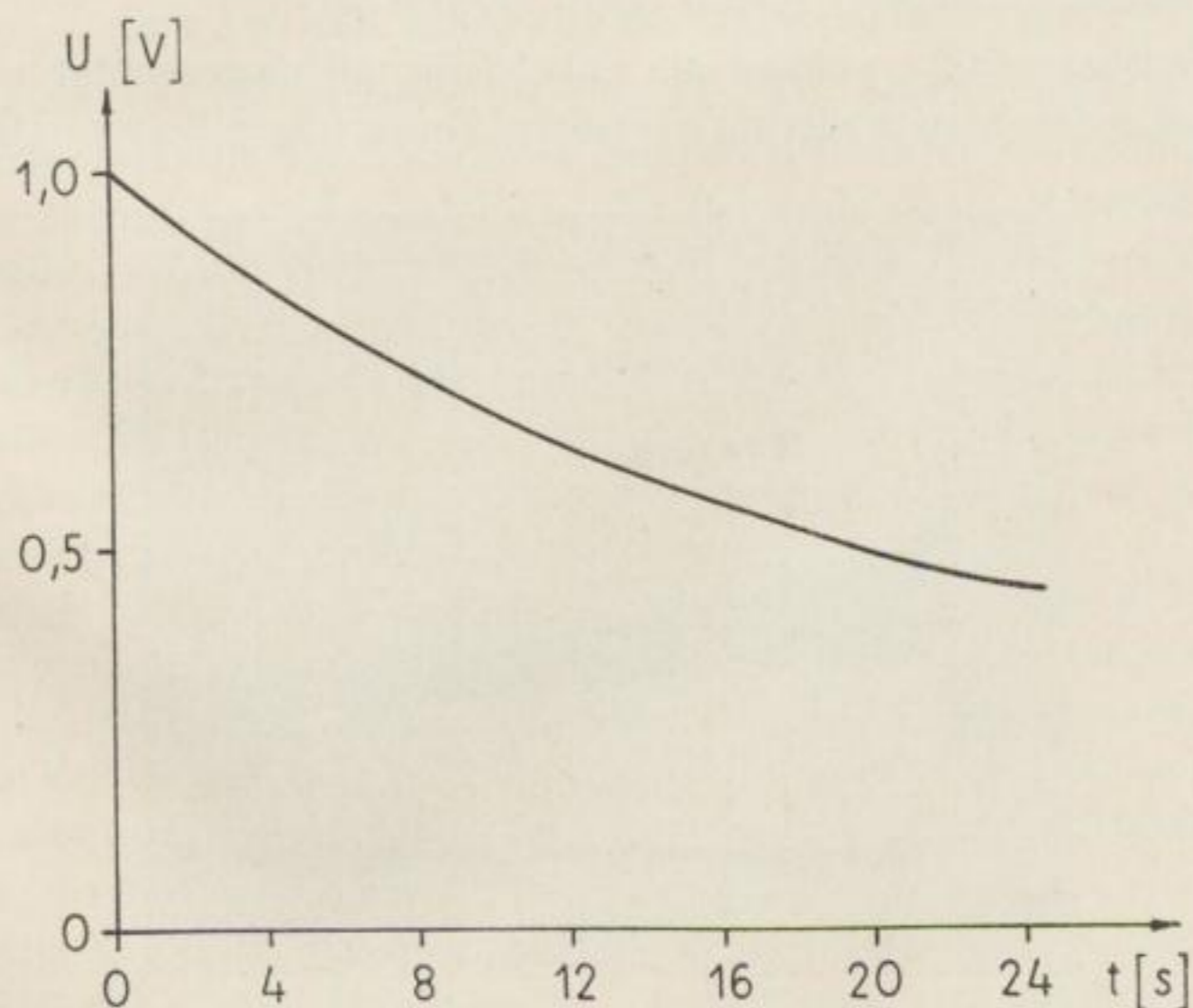


Bild 67. Entladekurve für die Anordnung Quarz 1-Schwingkondensatorelektrometer, konstruiert aus einer oszillographischen Aufzeichnung

in Zeitabständen von 2 s visuell bzw. bei Verwendung des Schwingkondensatorelektrometers VA-J-50 mit Hilfe eines Schleifenzillographen fortlaufend aufgezeichnet.

Die Entladekonstante τ wurde rechnerisch aus der Entladekurve nach der Gleichung

$$\tau = \frac{t}{\ln \frac{U_0}{U}}$$

bestimmt.

Eine Kapazitätsmessung liefert die zweite Bestimmungsgröße für den Isolationswiderstand

$$R = \frac{\tau}{C}.$$

In gleicher Weise wurden die Registrierungen von piezoelektrischen Belastungsversuchen ausgewertet.

Der Aufzeichnung in Bild 68 ist eine durch den Ringdemodulator des Schwingkondensatorelektrometers bedingte Störfrequenz von $f_s = 200$ Hz überlagert. Die bei der Entladung des Quarzstabes entstehende Piezospannung führt infolge der sehr starken Gegenkopplung der Endverstärkerstufen zu einem bedeutenden Überschwingen bei der Registrierung. Der Maximalwert der entstehenden Piezospannung kann deshalb nur durch Extrapolation auf den Zeitpunkt der Entlastung *A* aus der Entladekurve gewonnen werden.

Aus einer Vielzahl von Messungen wurden folgende Ergebnisse erhalten:

Entladekonstante $\tau = 20 \dots 30$ s

Isolationswiderstand $R = 5 \cdot 10^{11} \dots 7 \cdot 10^{11} \Omega$.

Die Versuchsergebnisse müssen als unbefriedigend eingeschätzt werden, da sie noch unter den bereits niedrig gestellten Forderungen liegen. Dabei ist zu

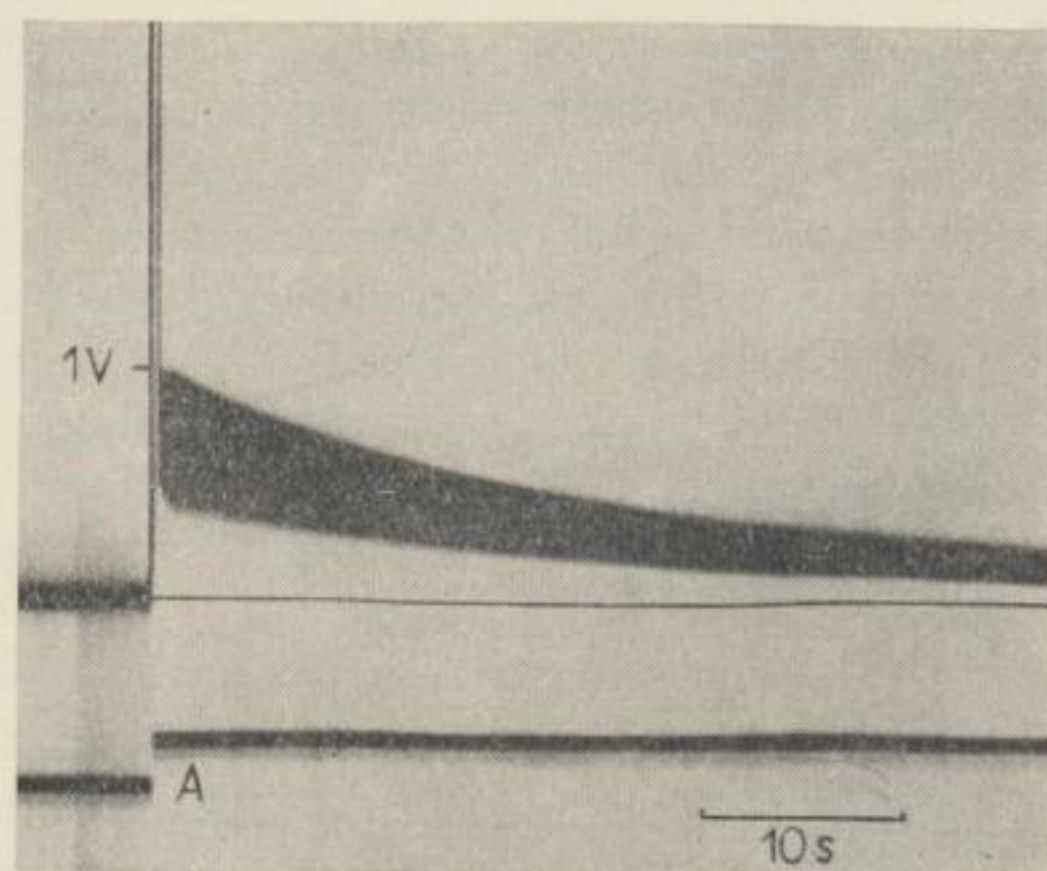


Bild 68. Registrierung eines piezoelektrischen Belastungsversuches, Meßinstrument: Schwingkondensatorelektrometer VA-J-50

beachten, daß bei der Verwendung von zwei Meßsystemen eine weitere Verschlechterung eintritt. Die Ursache dieses Sachverhaltes ist in dem relativ schlechten Isolationswiderstand begründet, da die Kapazität der Anordnung in einer vertretbaren Größenordnung (einige zehn pF) liegt.

Die Isolationsverhältnisse könnten durch eine sorgfältige Behandlung der Einbettungen und durch Hydrophobieren der Kristallstäbe etwas vergrößert werden. Außerdem muß dafür Sorge getragen werden, daß die Luftfeuchtigkeit am Meßort möglichst gering ist. Die Verwendung von optimal dimensionierten, luftisolierten elektrischen Leitungen erlaubt ebenfalls, den Isolationswiderstand zu erhöhen.

Bei den Vorversuchen traten recht bedeutende Influenzerscheinungen auf. Die Steigerung der Empfindlichkeit des Spannungsmessers erfordert unbedingt eine vollständige und wirksame elektrostatische Abschirmung. Deshalb wurde die Belastungsvorrichtung, das Belastungsgewicht und der Quarz mit seiner Einbettung unter einer Glocke, die aus Pappe gefertigt und mit mehreren Lagen Aluminiumfolie durch Epoxydharz umklebt war, angeordnet. Sie enthielt nur zwei kleine Öffnungen für das abgeschirmte Kabel und für eine Schnur, um von außen das Gewicht aufsetzen zu können. Auf diese Weise gelang es, Influenzerscheinungen weitestgehend zu beseitigen. Trotz dieser Abschirmung wurden mit dem Schwingungskondensatorelektrometer VA-J-50 stark schwankende Störspannungen im Größenbereich 1 mV festgestellt, die sowohl auf das Elektrometer selbst als auch auf äußere Einflüsse (Netz, Luftpoletrizität, Schalt- und Zündstörungen) zurückzuführen waren.

8. Die Problematik einer direkten Messung der zweiten Ableitung der Schwerkraft g_{zz}

Ordnet man drei Meßsysteme übereinander an, schaltet diese mechanisch gegeneinander und belastet das mittlere doppelt so hoch wie die beiden anderen, dann kann auch die zweite Ableitung der Schwerkraft g_{zz} experimentell bestimmt werden, da die Wirkung der Schwerkraft und die des vertikalen Gradienten kompensiert wird. Auf dieser Grundlage schlägt LUNDBERG [72] ein Gerät zur direkten Messung von g_{zz} vor, das in Bild 69 dargestellt ist.

In ähnlicher Weise wie oben könnten auch drei piezoelektrische Indikatoren übereinander angeordnet und so ein Gerät zur Messung von g_{zz} auf dem piezoelektrischen Prinzip geschaffen werden.

Bekanntlich nimmt die 3. Ableitung des Potentials mit der 4. Potenz der Entfernung vom Störkörper ab. Der Meßeffect pro Meter wird daher sehr klein, und zwar angenähert 10^3 cgs kleiner als bei der Messung des gestörten gravimetrischen Vertikalgradienten unter gleichen Voraussetzungen, sein. Solche geringe Kraftwirkungen sind mit Hilfe einer piezoelektrischen Anordnung mit Bestimmtheit nicht mehr zu erfassen.

Die für die Erforschung oberflächennaher Strukturen so wichtige 3. Ableitung des Potentials kann vorläufig nur durch Berechnung aus Schwerewerten oder über eine indirekte Messung nach dem Verfahren der Pseudoableitungen (PHAM VAN NGOK [84]) gewonnen werden.

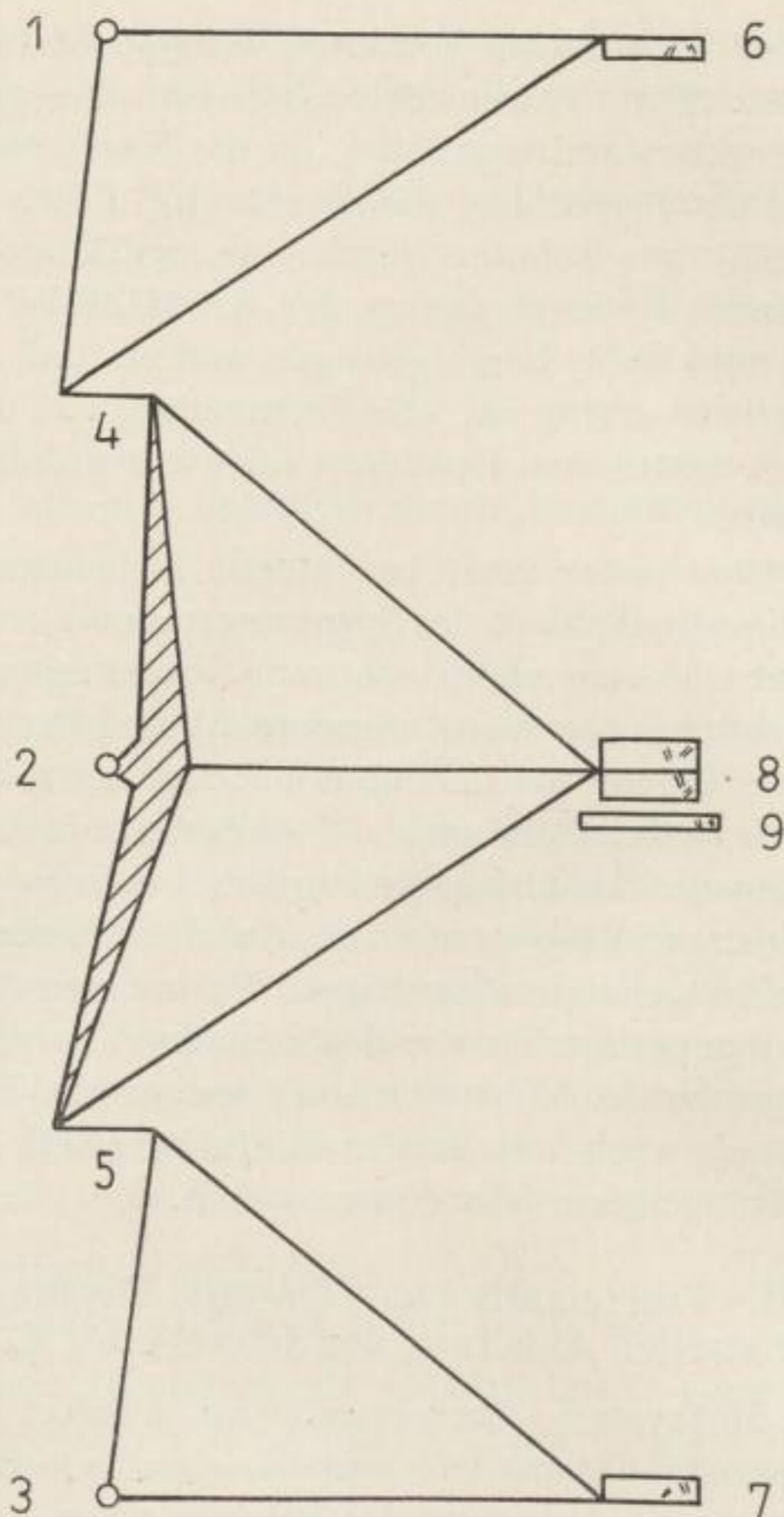


Bild 69. Gerät zur direkten Messung von g_{zz} nach LUNDBERG
(umgezeichnet nach [72])

- 1, 2, 3 — Kreuzfeldergelenkaufhängung
- 4, 5 — elastische Blattfedern
- 6, 7, 8 — Massen
- 8, 9 — Meßkondensator

9. Zusammenfassung

Nach einigen grundlegenden Bemerkungen zum Begriff des gravimetrischen Vertikalgradienten erfolgt eine ausführliche Zusammenstellung der Formeln, die die Berechnung dieser Größe über einfach geformten Massen gestatten.

Die Bedeutung des gravimetrischen Vertikalgradienten für die angewandte Geophysik und für die Geodäsie rechtfertigt zweifellos die Ausarbeitung geeigneter Methoden zur rechnerischen Ermittlung von $\frac{\partial g}{\partial z}$ aus Drehwaagenmeßgrößen und Schweremessungen. Die Entwicklung von Geräten zu einer direkten

Messung dieser Größe kann nur dann vertreten werden, wenn durch höchsten Meßfortschritt und höchste Genauigkeit ein wesentlicher Vorteil gegenüber den Berechnungsverfahren erzielt wird.

Die Berechnungsverfahren werden weniger von der theoretischen als mehr von der praktischen Seite her dargestellt. Alles erreichbare Material über die experimentelle Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten wird nach dem neuesten Stand zusammengestellt und diskutiert. Für das neue LUNDBERG-Gradientometer wird eine vereinfachte Theorie vorgelegt, die gestattet, bei vorgegebenen Gerätedimensionen die Grenzen eines praktischen Einsatzes des Instrumentes aufzuzeigen.

Ein dynamisches Verfahren zur Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten wird vorgeschlagen. Ordnet man zwei Saitengravimeter in verschiedenen Höhen an, so gestattet ein Frequenzvergleich zwischen beiden Geräten den Wert der Schwereänderung pro Längeneinheit zu bestimmen. Die Untersuchung des Gedankens zeigt, daß eine genaue Gradientenmessung eine sehr lange Meßzeit verlangt, die die Verwirklichung und Anwendung des Verfahrens einschränkt.

Etwas über den gestellten Problemkreis hinausgehend wird die topographische Korrektur gemessener Gradientenwerte behandelt. Die Verfahren von CHINNERY und BALAVADZE werden ausführlich diskutiert und die Rechenformeln tabelliert. Unter Berücksichtigung des Niveauunterschiedes zwischen den beiden Indikatorsystemen bei einer Gradientenmessung wird eine neue Formel hergeleitet und ebenfalls tabelliert. Die Beachtung dieses Höhenunterschiedes bis zu einer Entfernung von 500 m vom Meßpunkt erwies sich für eine genaue Geländekorrektur auf $\pm 0,1$ E als notwendig, wenn die beiden Meßelemente 1 m voneinander entfernt sind.

Ausführlich wird ein statisches Verfahren zur experimentellen Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten auf dem piezoelektrischen Prinzip untersucht. Es wird nachgewiesen, daß Quarz wegen seines hohen Isolationswiderstandes, der niedrigen DK, des niedrigen Temperaturkoeffizienten, des piezoelektrischen Koeffizienten, der hohen mechanischen Festigkeit und chemischen Widerstandsfähigkeit das geeignetste Material für die piezoelektrischen Indikatorsysteme ist.

Die Abschätzung des bei einer Gradientenmessung zu erwartenden Meßeffektes bei Verwendung von Quarz als piezoelektrisches Material erbringt Ladungsmessungen in der Größenordnung einiger Hundert Elementarladungen bzw. Spannungen von einigen Mikrovolt. Der Nachweis und die statische Messung solch geringer Effekte bewegt sich hart an der Grenze einer Meßmöglichkeit überhaupt und gehört somit in das Gebiet der Grenzelektrometrie. Aus diesem Grunde wurde das Vakuum-Duantenelektrometer nach HOFFMANN einer genauen Betrachtung unterzogen. Es zeigte sich, daß dieses Gerät im Laborbetrieb die Messung des gravimetrischen Vertikalgradienten auf ± 10 E gestattet. Im Hinblick auf eine vielleicht nichtstationäre Aufstellung wurde das Grundprinzip dieses Elektrometers auf ein Spannbandgerät ausgedehnt. Höhere Hilfsspannungen in der Größenordnung von 100 V lassen auch hier die elektrische Labilisierung und so höchste Empfindlichkeit bei relativ kurzen Ein-

stellzeiten (einige Sekunden) erreichen. Andere elektrostatische Meßgeräte scheiden wegen zu geringer Empfindlichkeit und ungeeigneter elektrischer Eigenschaften aus. Eventuell kann zur Messung des normalen gravimetrischen Vertikalgradienten ein Schwingkondensatorelektrometer verwendet werden.

Mit der praktischen Verwirklichung eines piezoelektrischen Gradientometers wurde durch die Entwicklung der Quarzstabeinbettungen aus Polystyrol, der Abnahmevorrichtungen für die entstehende Piezospaltung und der Belastungsvorrichtungen begonnen. Das elektrische Schaltbild, das durch die elektrische Gegeneinanderschaltung der Piezokristalle charakterisiert ist, wird vorgelegt. Anhand konkreter Gerätedimensionen wird der zu erwartende Meßeffect angegeben. Hinsichtlich der Erzielung eines Meßeffectes werden zwei Möglichkeiten unterschieden: gleichzeitige Belastung der in unterschiedlichen Niveaus angeordneten Piezosysteme und vertikale Auseinanderbewegung der ständig belasteten Systeme mittels einer geeigneten Vorrichtung.

Die ausführliche Untersuchung der Eigenschaften und des Verhaltens eines Piezoquarzgradientometers zeigt, daß alle Art von Störeinflüssen infolge der elektrischen Eigenschaltung, der Art der Messung (statisch) und der dem piezoelektrischen Material innewohnenden Eigenschaften zu beseitigen gehen bzw. direkt herausfallen.

Über einige experimentelle Voruntersuchungen, die bereits die praktischen Schwierigkeiten der Elektrometrie sehr deutlich zeigten, wird berichtet.

Für weitere Untersuchungen sind folgende Probleme von grundsätzlicher Bedeutung zu lösen:

- Entwicklung eines höchstempfindlichen statischen Spannungsmessers;
- Vergrößerung der Entladekonstante der Anordnung durch Erhöhung des Isolationswiderstandes;
- Verbesserung der elektrostatischen Abschirmung;
- Entwicklung einer geeigneten Belastungsvorrichtung.

Um das Bild der experimentellen Bestimmung der höheren Potentialableitungen abzurunden, wird die Problematik einer direkten Messung der zweiten Ableitung der Schwerkraft $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ kurz gestreift.

Dank

Nach Abschluß meiner Diplomarbeit ist es mir ein aufrichtiges Bedürfnis, meinem sehr verehrten Lehrer,

Herrn Prof. Dr. phil. O. MEISSER,

für die Stellung des Themas, für seine wertvollen Ratschläge beim Anfertigen dieser Arbeit und für die großzügige Bereitstellung von Mitteln und Einrichtungen seines Instituts herzlich zu danken.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn Dipl.-Geophys. H. GAST verpflichtet, der mir viele wertvolle Hinweise und eigene Erfahrungen vermittelte und den Fortgang der Arbeit stets tatkräftig unterstützt hat.

Desgleichen danke ich allen Institutsangehörigen, die mir mit ihren Erfahrungen stets hilfreich zur Seite standen.

Herrn Dr.-Ing. W. FÖRSTER (Institut für Technische Mechanik der Bergakademie Freiberg) danke ich für die Mitteilungen über die Theorie des Lundberg-Gradientometers.

Literatur

- [1] ACKERMANN, H.; DIX, H.: The first vertical derivate of gravity. *Geophysics* **20** (1955), S. 148–154.
- [2] ACKERMANN, H. A.: Apparatus for determining horizontal and vertical gradients of gravity. *United States Patent Office* (1960) 1, S. 1–3.
- [3] ACKERMANN, R.: Grundlagen zur experimentellen Bestimmung des vertikalen Schweregradienten. Unveröffentlichte Diplomarbeit aus dem Institut für Angewandte Geophysik der Bergakademie Freiberg (1961).
- [4] ALFANO, L.: La correzione per il gradiente verticale anomalo in gravimetria. *Quaderni di geofiscia applicata* Vol. **XX** (1959), S. 42–57.
- [5] ANGERER v., E., EBERT, H.: Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen. Abschnitt: Dünne Drähte. Friedrich Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1957.
- [6] BALABUŠEVIĆ, I. A.: O nekotorych prinzipach sozdanija vertikalnych gradientometrov i gravitacionnočuvstvitelnych elementov dlja semok v dviženii (Über einige Prinzipie bei der Schaffung von Vertikalgradientometern und schwereempfindlichen Elementen für die Messung in der Bewegung). *Geofiz. sbornik, vypusk 1* (3), Kiew (1962), S. 44–49.
- [7] BALAVADZE, B. K.; SENDELAJA, G. S.: K voprosu ob eksperimentalnom opredelenii vertikalnogo gradienta sily tjažesti (Zur Frage einer experimentellen Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten). *Dokl. Akad. nauk SSSR, Moskau* **95** (1954), S. 69–71.
- [8] BALAVADZE, B. K.: K medotike opredelenija vertikalnogo gradienta sily tjažesti (Zur Bestimmung des Vertikalgradienten der Schwerkraft). *Izv. Akad. nauk SSSR, Ser. geofiz., Moskau* (1955) 1, S. 45–55.
- [9] BALAVADZE, B. K.: K voprosu o vyčislenii vertikalnogo gradienta sily tjažesti (Über die Berechnung des vertikalen Schweregradienten). *Izv. Akad. nauk SSSR, Ser. Geofiz., Moskau* (1955) 5, S. 425–434.
- [10] BALAVADZE, B. K.: O vlijanii topografičeskich mass na vertikalnyj gradient sily tjažesti (Über den Einfluß topographischer Massen auf den vertikalen Schweregradienten). *Soobščeniya Akad. nauk Gruz. SSSR, Tbilissi* **19** (1957) 1, S. 29–32.
- [11] BARANOV, V.: Calcul du gradient vertical du champ de gravité ou du champ magnétique mesuré à la surface du sol. *Geoph. Prosp.* (1953) 1, S. 171–191.
- [12] BARANOV, V.; TASSENCOURT, J.: Some remarks on the errors in the calculation of the vertical gradient of gravity. *Geoph. Prosp.* (1954) 2, S. 285–289.
- [13] BERGMANN, L.: *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*. S. Hirzel-Verlag Zürich (1954), S. 85–104.
- [14] BERROTH, A.: Eine vertikal schwingende Drehwaage. *Ztschr. f. Instr.* **40** (1920), S. 210–211.
- [15] BODEMÜLLER, H.: Der Schwereunterschied in korrespondierenden Punkten über und unter Tage. *Ztschr. f. Verm.-Wesen, Stuttgart* (1954), S. 263–268.

- [16] BODEMÜLLER, H.: Beitrag zur Messung und Auswertung vertikaler Schweregradienten. *Ztschr. f. Verm.-Wesen*, Stuttgart **85** (1960) 4, S. 101–102.
- [17] BOITNOTT, B. D.: Gerät zum Feststellen und Messen von Änderungen des Gradienten der Vertikalkomponente des Erdschwerekraftfeldes aus der Luft und vom Boden aus. DBPa 1 123 838 vom 27. 11. 57, ang. 15. 2. 62.
- [18] BREMER, H.: Dichtebestimmungen aus Schachtgravimetermessungen. Unveröff. Diplomarbeit am Inst. f. Angew. Geophysik der Bergakademie Freiberg (1957).
- [19] BRJUSOV, B. A.: K metodike sostavlenija anomalij vertikalnogo gradienta sily tjažesti. *Naucn. Dokl. Vyss. Skoly, Geol.-Geogr. nauki* (1958) 1, S. 238–242.
- [20] CHINNERY, M. A.: Terrain corrections for airborne gravity gradient measurements. *Geophysics* **26** (1961) 4, S. 480–489.
- [21] COOK, R. K.; GREENSPAN, M.; WEISSLER, P. G.: Thermal voltage of Quarz crystals. *Phys. Rev.* **72** (1947) 2, S. 175.
- [22] CRAFTON, P. A.: Instrumentation requirements for the measurement of gravitational field intensity from a moving vehicle. Progr. First Western National Meeting. Los Angeles, Dec. 27–29 (1961) S. 26.
- [23] DIEBNER, K.: Erweiterung der Grenzen für die Anwendung des Vakuum-Duanten-Elektrometers. *Zeitschrift für Physik*, **85** (1933), S. 373.
- [24] DIMITROV, L. V.: Grafičeskij sposob vyčislenija značenija vtoroj vertikalnoj proizvodnoj potenciala sily tjažesti. (Graphische Methode zur Berechnung der zweiten Ableitung des Schwerepotentials). *Izv. Akad. nauk SSSR, Ser. geofiz.* (1959) 4, S. 617–620.
- [25] ENGEL, K.: Zur Theorie des Duantenelektrometers. *Ann. der Physik*, **396** (1930), S. 575–606.
- [26] ENGEL, K.; PFORTE, W. S.: Ein vereinfachtes Duantenelektrometer und sein Benutzung zu Wechselfspannungsmessungen. *Phys. Zeitschrift* **32** (1931), S. 81–84e
- [27] EÖTVÖS, R.: Gesammelte Arbeiten (Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwaage). *Akademiai kiado, Budapest* (1953), S. 91–160.
- [28] EVJEN, H. M.: The place of the vertical gradient in gravitational interpretations. *Geophysics* **1** (1936), S. 127–136.
- [29] FEDYNSKIJ, V. V.: O razrabotke apparatury dlja gravimetričeskich izmerenij v. dviženii (Die Entwicklung einer Apparatur für gravimetrische Messungen in der Bewegung). *Izv. Akad. nauk SSSR, ser. geofiz., Moskva* (1959) 1, S. 146–152.
- [30] FINKELNBURG, W.: Einführung in die Atomphysik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954, 3. Auflage.
- [31] FORSBERGH, P. W.: Piezoelectricity, Elektrostriction and Ferroelectricity. *Flügge Handbuch d. Physik*, Bd. XVII, S. 265 ff. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (1956).
- [32] FÖRSTER, W.: Persönliche Mitteilungen zur Theorie des neuen LUNDBERG-Gradientometers. Inst. für Mechanik der Bergakademie Freiberg.
- [33] FRÄNZ, H.: Elektrostatische Messungen, in F. Kohlrausch *Praktische Physik* Bd. 2, S. 1–22. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart (1956).
- [34] FRITSCH, V.: Hochfrequenztechnische Bestimmung kleiner Wege: I, II. *ATM*, V 1121–4, 1949.
- [35] GILBERT, R. L. G.: A dynamic gravimeter of novel design. *Proc. Phys. Soc., Sect. B.*, London (1949) 445, 62 Nr. 355 B.
- [36] GRAF, A.: Gravimeter (Meßprinzipien, Aufbau, Meßtechnik). *Dt. Geodät. Kommission bei der Bayrischen Akad. d. Wissensch., Reihe B, Angew. Geodäsie*, Heft Nr. 30 (1957).
- [37] GRAVE, H. F.: Elektrische Messung nichtelektrischer Größen. *Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. Leipzig* (1962), S. 27–31, 128–130, 227–230.

- [38] GROSSE, S.: Gravimetrische Auswerteverfahren für höhere Potentialableitungen. Freib. Forsch.-H. C 40 (1957).
- [39] HAALCK, H.: Die Frage der Messung des vertikalen Schweregradienten. Gerlands Beiträge zur angewandten Geophysik 9 (1942) 1, S. 107-120.
- [40] HAALCK, H.: Welche gravimetrischen Bestimmungsstücke ergeben durch die Darstellung ihrer örtlichen Verteilung das deutlichste Bild von dem die Schwere störung verursachenden Dichtungsgleichheiten im Untergrund. Gerlands Beiträge zur angew. Geophysik 10 (1943) 2, S. 21-29.
- [41] HAALCK, H.: Erwiderung auf die kritischen Bemerkungen zum vertikalen Schweregradienten von A. Schleusinger. Gerlands Beiträge zur angew. Geophysik 10 (1943) 2, S. 147-149.
- [42] HAALCK, H.: Die vollständige Bestimmung örtlicher Gravimetrischer Störungsfelder aus Drehwaagemessungen mit Berechnungsbeispiel. Veröff. d. Geodät. Inst. Potsdam 4 (1950), S. 1-43.
- [43] HAALCK, H.: Über den gegenwärtigen Stand der Entwicklung der Gravimetrie und ihre Aufgaben. Gerlands Beiträge zur Geophysik (1950), S. 257-71.
- [44] HAALCK, H.: Lehrbuch der Angewandten Geophysik, B. I u. II. Verlag Gebrüder Borntraeger, Berlin (1958).
- [45] HAMMER, S.: Investigation of the vertical gradient of gravity. Trans. Americ. Geophysic. Union (1938), S. 72-82.
- [46] HERRMANN, A.: Empfindlichkeitssteigerung bei piezoelektrischen Beschleunigungsmessern. Hecker-Festschrift, Beiträge zur Angewandten Geophysik 4 (1934) 3, S. 296-301.
- [47] HERRMANN, A.: Piezoelektrische Beschleunigungsmesser hoher Empfindlichkeit ohne Verstärker. Veröff. der Reichsanstalt für Erdbebenforschg. Jena 34 (1938), S. 25-72.
- [48] HOFFMANN, G.: Über ein hochempfindliches Elektrometer und den hiermit möglichen direkten Nachweis der Ionisation des einzelnen α -Teilchens. Phys. Ztschr. 13 (1912), S. 480-85.
- [49] HOFFMANN, G.: Über ein Elektrometer hoher Empfindlichkeit. Ann. d. Physik 42 (1913), S. 1196.
- [50] HOFFMANN, G.: Über ein Elektrometer hoher Empfindlichkeit. Ann. d. Physik 52 (1917), S. 665.
- [51] HOFFMANN, G.: Über eine Neukonstruktion des Vakuumduantenelektrometers. Physik. Ztschr. 37 (1936), S. 35.
- [52] HOFFMANN, G.: Grenz-Elektrometrie und ihre Anwendung. Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akademie d. Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse 92 (1940), S. 133-138.
- [53] HOFMANN, W.: Untersuchungen über den Vertikalgradienten der Schwere im Hinblick auf seine Anwendung in der Erdmessung und in der praktischen Geophysik. Dissertation; Universität Bonn, (1948).
- [54] HOFMANN, W.: Über die Anwendung einer Formel zur Berechnung des Vertikalgradienten der Schwere. Geofisica p.e.a. 14 (1949), S. 145-162.
- [55] DE JONG, W. F.: Kompendium der Kristallkunde. Springer-Verlag Wien (1959), S. 202-205.
- [56] JOLLY v.: Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Ann. der Physik und der Chemie (1881), Bd. 13 und 14.
- [57] JUNG, K.: Schwerkraftverfahren in der Angewandten Geophysik. Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. Leipzig (1961).
- [58] KANTAS, K.: The gravitational potential and its vertical derivatives. Geof. p.e.a. 44 (1959), S. 20-24.
- [59] KICHLING, K.: Über eine Drehwaage zur Messung von W_{zzx} und W_{zzy} . Gerl. Beitr. zur Geophys. 61 (1950), S. 181-183.

- [60] KLUGE, J.; LINCKE, H.: Piezoelektrische Messungen von Druck- und Beschleunigungskräften. Ztschr. VDI **73** (1929), S. 1311–1314.
- [61] KLUSCHIN, J. G.: K voprosu geologičeskoj interpretazii anomalii vertikalnogo gradienta sily tjažesti. (Zur Frage der geologischen Interpretation der Anomalien des gravimetrischen Vertikalgradienten). Prikladnaja geofizika **17** (1957), S. 178–185.
- [62] KOSBAHN, B.: Über die Berechnung sämtlicher Feldgrößen aus der Vertikalintensität und deren Anwendung auf die Auswertung von Schwerebildern. Geofisica p.e.a. **14** (1949), S. 27–36.
- [63] KRAJEW, A. P.: Grundlagen der Geoelektrik. VEB Verlag Technik Berlin (1957), S. 47.
- [64] KUMAGAI, N.; ABBE, E.; YOSHIMURA, Y.: Measurement of vertical gradient of gravity and its significance. Bolletino di geofisica **2** (1960) 8, S. 607–630.
- [65] LANDOLT-BÖRNSTEIN: Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik. 6. Auflage, Bd. I, 4. Teil — Kristalle. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- [66] LANGE, W.: Seegravimetrie. Freib. Forsch.-H. C 109 (1961), S. 38–40.
- [67] LAWSON, A. W.; LONG, E. A.: On the possible use of Brownian motion for low temperature thermometry. Phys. Rev. **70** (1946), S. 220–221.
- [68] LOZINSKAJA, A. M.: Strunnyj gravimetr. dlja izmerenija sily tjažesti na more. (Ein Saitengravimeter für Schweremessungen auf See). Izv. Akad. nauk SSSR, Ser. geofiz., Moskva (1959) 3, 398–409.
- [69] LUNDBERG, H.: Airborne gravity surveys. Can. Min. J. **78** (1957) 6, S. 121.
- [70] LUNDBERG, H.; RATCLIFFE, J. H.: Airborne gravity-meter. Transaction of the Can. Inst. of Mining and Metallurgy **60** (1957), S. 251–259.
- [71] LUNDBERG, H.: Airborne gravity-meter; Description and preliminary results. Mining Engeneering **11** (1959) 8, S. 817–820.
- [72] LUNDBERG, M. H. T. F.: Procédé et instrument pour mesurer par voie acrienne des derivées du champ de gravité terrestre (Methode und Instrument zur Messung der Ableitungen des Schwerefeldes). Franz. Patent Nr. 1. 240. 368 vom 25. 7. 1960.
- [73] MASON, W. P.: Piezoelektric crystals and their application to ultrasonics. New York (1959), S. 78–165.
- [74] MEISSER, P.; WOLF, F.: Geophysikalische Messungen unter Tage. Ztschr. f. Geophys. **6** (1930), 13–21.
- [75] MEISSER, O.; HERMANN, A.: Ein piezoelektrischer Beschleunigungsmesser. Ztschr. f. Geophysik **11** (1935), S. 152–153.
- [76] MEISSER, O.: Praktische Geophysik. Verl. von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig (1943).
- [77] MEISSER, O.; JUNG, H.: Magnetische Prospektorgeräte. Geofis. p.e.a. **19** (1951) 1, S. 1–19.
- [78] MITTERER, R.: Ein aperiodischer Frequenzvervielfacher für den Tonfrequenzbereich. Frequenz **14** (1960) 1, S. 14–16.
- [79] MITTERER, R.: Bestimmung von Frequenzschwankungen mit einer Unsicherheit von 10^{-13} bis 10^{-9} durch digitale Periodendauer-Messung einer Schwebung. Frequenz **14** (1960) 5, S. 157–162.
- [80] NISSEN, H. F.: Aufzeichnung kleiner Kapazitätsänderungen mit Hilfe einer Brückenordnung. ATM, V 3531–2 (1934).
- [81] NUMEROV, B.: Interrelation between local gravity anomalies and the derivated of the potential. Ztschr. f. Geophys. (1928) 5, S. 58–62.
- [82] PATERSON, N. R.: An integration technique for airborne gravity gradient measurements. Geophysics **26** (1961) 4, S. 474–479.
- [83] PFLIER, P. M.: Elektrische Meßgeräte und Meßverfahren. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (1951) S. 10, S. 132–143.

X

- [84] PHAM VAN NGOC: Gravimetric prospecting by direct measurement of the vertical derivatives of the intensity of gravity. Akad. Sci. (Paris) Comptes Rendus, B. 251 (1960) 18, S. 1889–1891.
- [85] REISCH, S.: Über eine Möglichkeit zur Empfindlichkeitssteigerung der Hebelwaage und ihre Anwendung zur Messung des vertikalen Gradienten der Schwerkraft. Gerl. Beiträge zur angew. Geophysik (1934), S. 134–151.
- [86] RICHARZ, F.; KRIGAR-MENZEL, O.: Bestimmung der Gravitationskonstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde durch Wägungen. Abh. der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, (1898).
- [87] RIKITAKE, T.: Analysis of geomagnetic field by use of HERMITE, funktions. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 30 (1952), S. 293–304.
- [88] RISCHE, H.: Dichtebestimmung im Gesteinsverband durch Gravimeter- und Drehwaagemessungen unter Tage. Freib. Forsch.-H. C 35 (1957).
- [89] ROSENBAACH, O.: Ein Verfahren zur Berechnung des Horizontalgradienten aus Schwerewerten. Ztschr. f. Geophysik, Sonderband (1953) S. 37–45.
- [90] SCHEEL u. DIESELHORST: Best. der Änderung der Schwere mit der Höhe auf dem Grundstück der Phys.-Techn. Reichsanstalt. Wiss. Abh. der Phys.-Techn. Reichsanstalt (1895), S. 185–201.
- [91] SCHEIBE, A.: Piezoelektrizität des Quarzes. Th. Steinkopf, Dresden 1938.
- [92] SCHLEUSENER, A.: Nomogramme für die Geländeverbesserung von Gravimetermessungen der angewandten Geophysik. Beitr. z. Angew. Geophysik 8 (1940), S. 415–430.
- [93] SCHEUSENER, A.: Einige kritische Bemerkungen über die Bedeutung des vertikalen Gradienten für die Lagerstättengeophysik. Beitr. z. Angew. Geophysik 9 (1942), S. 303–314.
- [94] SCHLEUSENER, A.: Bemerkungen zur vorstehenden Erwiderung von H. Haalek. Gerlands Beitr. z. Angew. Geophys. 10 (1943), S. 150–153.
- [95] SCHMERWITZ, G.: Erhöhung der Empfindlichkeit der Hebelwaage durch ein Horizontalpendel. Ztschr. f. Geophysik 7 (1931), S. 104–108.
- [96] SCHMERWITZ, G.: Berechnungen zu einer Hebelwaage für Schweregradientenmessungen. Gerlands Beiträge z. Angew. Geophysik 4 (1934), S. 274–295.
- [97] SCHUBERT, G.: Schwingkondensatorelektrometer VA-J-50 zur Messung kleiner Gleichströme. Kernenergie 4 (1961) 10/11, S. 821–825.
- [98] SCHULWAS-SOROKIN: Piezoelektrische Eigenschaften von Seignettesalzkristallen. Ztschr. f. Physik, 73 (1932), S. 700–706.
- [99] SCHWEYDAR, W.: Gravitationsmesser zur Messung des vertikalen Gradienten der Erdschwere. Patentschrift Nr. 456484, Kl. 42c, Gr. 44–1926.
- [100] SOROKIN, L. V.: Gravimetrija i gravimetričeskaja pažvedka (Gravimetrie und gravimetrische Erkundung). Gostoptechizdat (1953), S. 279–282.
- [101] THIESEN, M.: Determination de la variation de la presam tuer aves la hauteur au pavillon de Bretevil Trav. et mem. d. Bureau Intern. de Poids et Mes 7 (1890).
- [102] THOMPSON, L. G.; LA COSTE, L.: Aerial gravity measurements. J. geophys. Res. 65 (1960) 1, S. 305–322.
- [103] v. THYSSEN-BORNEMICZA, St.: Verfahren zur Feststellung der örtlichen Verschiedenheiten des vertikalen Schweregradienten innerhalb großer Gebiete. Patentschrift 742 332, Kl. 42c, Gr. 44 (1939).
- [104] v. THYSSEN-BORNEMICZA, St.: Über die Möglichkeit, den vertikalen Schweregradienten mit Gravimetern zu messen. Beitr. z. Angew. Geophysik 11 (1964), S. 36–43.
- [105] v. THYSSEN-BORNEMICZA, St.: Observation of the vertical gradient of gravity in the field. Geophysics 21 (1956) 3, S. 771–779.
- [106] v. THYSSEN-BORNEMICZA, St.: Das zweistufige Gravimetermeßverfahren. Erdöl und Kohle 10 (1957) 1, S. 8–9.

- [107] TJAPKIN, K. JU.: K. voprosu grafičeskogo vyčidenija V_{zz} no rezultatam izmerenij Δg . (Zur Frage der graphischen Berechnung von V_{zz} aus den Ergebnissen von Δg -Messungen). Prikladnaja geofizika, vypusk 16 (1957) S. 167-174.
- [108] TOMADA, Y.: On the difference between $\frac{dg}{dz}$ obtained from vertical distribution of gravity and that obtained from horizontal distribution. Geophysical. Notes 12 (1959) 1, S. 79-83.
- [109] TSUBOI, CH.; KATO, M.: The first and second vertical derivatives of gravity. J. of physics of the Earth 1 (1952) 2, S. 95-96.
- [110] VESELOV, K. E. Primenenie vtoroj vertikalnoj proizvodnoj potenciala sily tjačesti pri geologičeskom istolkovanii gravimetrovoj cemki. (Die Verwendung der zweiten Ableitung des Schwerepotentials bei der geologischen Interpretation der gravimetrischen Aufnahme) Prikladnaja geofizika, vypusk 11 (1954) S. 152-162.
- [111] VISARION, H.: Contributti la Determinarea Gradientului Vertical al Gravitatii cu Gravimetrul Static (Bestimmung des gravimetrischen Vertikalgradienten mit Hilfe statischer Gravimeter). Studii si secretari de Geologie 5 (1960) 2, S. 383-399.
- [112] WEGENER: Bemerkungen zum vertikalen Gradienten der Schwere. Ztschr. f. Geophys. 15 (1939), S. 247-249.
- [113] Zeiß-Einladenelektrometer. Gebrauchsanleitung.
- [114] ZIPPRICH, B.: Über eine Neukonstruktion des Vakuumduantenelektrometers. Phys. Ztschr. 37 (1936), S. 36.

M

M

Bücherei
• Bergakademie •
Freiberg i. Sa.

