Magisches Quadrat der 25.
Bildungsgesch!

~~[illegible]~~

176

167

164 Seiten und 1 kleines loses Blatt

bereits starker Papierzerfall !
sofort zum Mikrofilm nach Dresden !

... abitrag parte aequationis ...

Manuscripte von E. W. v. Tschirnhaus.

Algebraische Studien.

(unvollständig.)

Prof. Dr. Reinhardt
Meissen 1903.

I

154 Seiten und 1 kleines loses Blatt

bereits starker Papierzerfall
sofort zum Mikrofilm nach Dresden!

ab ∞ 2? Non secus reducetur sequens quantitas $\sqrt{y} \infty \sqrt{\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa}}$ multi-
plicata n. utraque aequationis parte in se exhibebit sequens $y \infty \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa}$ trans-
lata autem in alteram partem $\tfrac{1}{2}b$ utraque quae proveniunt in se rursus ab utra-
que parte multiplicatis sequens $yy - by + \tfrac{1}{4}bb \infty \tfrac{1}{4}bb + aa$; majoris gratia
sit ergo sit $\sqrt{a} \infty \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ubi quadrando utramque partem aequationis
prodit aequatio $a \infty b + 2\sqrt{\ldots}d + 2\sqrt{dc} + c + d$; sitque brevitatis ergo
$\underline{a-b-c-d} \infty e \infty \sqrt{\ldots} + \sqrt{dc} + \sqrt{\ldots}$ cum hae quantitates signo radicali care-
ant, ~~...~~ b ad alteram aequationis partem reducatur eritque $\sqrt{b} \infty \frac{e - 2\sqrt{dc}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}$ quadrem-
us rursus utramque partem $b \infty \frac{ee - 2e\sqrt{dc} + dc}{c + 2\sqrt{cd} + d}$ ac $bc + 2b\sqrt{cd} + db \infty ee$
$- 2e\sqrt{dc} + dc$ unde si ~~itam~~ brevitatis causa ponamus $\frac{ee + dc - bc - db}{2b + 2e} \infty f$
sit $f \infty \sqrt{dc}$ ac rursus quadrando inveniemus $ff \infty dc$ quae aequatio ab omnibus signis ra-
dicalibus liberata exhibetur in hoc reductam quae ~~fadi~~ in casu ... ubi
est, ac ad instar hujus plures regulae formari.

Multiplicatio per crucem hujus nota ab una aut utraque parte fractio vel plures
reducitur autem ad aliam aequationem instituta per crucem multiplicatio-
ne sic $\frac{ab}{c} \infty \frac{cx}{d}$ reducitur ad $abd \infty ccx$ & $\frac{abb}{c} \infty \frac{dx}{\ldots}$ ad $abb \infty cdx$. si vero plures ...

Subtractio haec quantitates ~~...~~ ab utraque aequationis parte ejusdem
generis ac iisdem signis contentae tolluntur: sit $ab + 4ax - 4cd \infty 2ab$
$- cd + 3ax$ ablatis hac conditione quantitatibus erit $ax - cd \infty 2ab$

Additio qua adhibendum aliquid juxta generale intentum reductionis
... in alteram partem ~~...~~ transferendum, haec n. confert ut incogni-
...ta abest ... vocem ... x aut similis litera nullo signo interjecto ad
... constant incognitis) ab una parte, cognitae ab al-
+hk, sive ... −d ... sitque hoc quantitates per contraria signa (si adhibet
alteram partem transferendo sic $x - 3 \infty 12$ erit $x \infty 15$
intermiss $ee \infty$ ... $x \infty 9$, quod si vero talis sit resolvenda aequatio
... tam cognitae quam incognitae
+ gghh + ggkk + h ... transferri, ... faciendum sit valor datam
−2kk − hk in e ... sic hinc o fieri potest aequatio $2x - bx \infty cc - ab$ cum
gghh + ggkk + h ... sed $ab - cc \infty bx - 2x$, quod si vero facta resolutione
$\frac{ac}{2}$ constet d minorem esse ... mutatione omni-
... integrari ita ut evadat in praesenti exemplo $x \infty \frac{cc - ab}{2 - b}$
... (quales jam denominari) ab una parte cognitis
~~...~~ reductionis desideratur, dividendo incogni-
hkk + ... signis efficit, sit $ax + bx - cx \infty dd$ erit $x \infty \frac{dd}{a + b - c}$
... hhkk − r ...
~~...~~ incognitam plurium di-
reducit ... ab utraque parte aequationis

radicem dimensionum numero convenientem sit e.g.: $x^2 = 144$ et $y^3 = 512$
extractis radicibus hic quadrata ibi cubica erit $x = 12$ et $y = 8$; item $xx = ab$
erit $x = \sqrt{ab}$; quanquam autem hactenus recensitae species procedendo quae-
situm obtineant id tamen non semper brevissima expeditius via; siquidem
~~in~~ unaquaque modo enarratae reductionis specie divisionem (subtractionem, extractionem) posse adhiberi pos-
sibile est, quae si omittatur ubicunque fieri potest infallibiliter quaestionem ad
simplicissimos terminos reducet; sit n: $\frac{x^3}{xx+aa} = \frac{ax+aa}{x+a}$ divisis denominat-
oribus per $x+a$ numeratoribus per a erit $\frac{x^3}{x+a} = ax+aaa$ ex isto autem $xx =$
erit $x = aa$. item $abx + xda + bxx = axx$ erit $ab + da + bx = ax$ deleta ubi-
que quantitate x; nec aliter si sit $xx - 2dx + dd = \frac{ab^4}{cc - 2cd + dd}$ deleta ubique a,
$xx - 2dx + dd = \frac{b^4}{cc - 2cd + dd}$ ac extracta radice $x - d = \frac{bb}{c-d}$ cum vero an
in compositis quantitatibus non ita statim pateat, num aequationes a-
mittant vel divisionem vel extractionem idque sit maximi usus, paucis hoc
nam; pro cognoscendo divisore sit $d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$ pro extractione
radicis $c^4 - 4c^3d + 6ccdd - 4cd^3 + d^4 + b^4 + 2bbcc - 4bbcd + 2bbdd$, jam sic procede pro
quantitatis (seu aequationis considero n. haud secus ac aliam) termini eo ordi-
ne sit gradatim instar incognitae considerandae quantitatis (quae esse poterit
a, b aut d, quae ~~...~~ incognitae instar considerabimus dimensiones
secundum, eoque ratione ut omnes simul sumpti aequivaleant 0 (prout facti
videre in priori exemplo in posteriori n. non necessarium) tunc una vel
plures cognitae literae (quae prioris sunt exempli) supponantur vel aequales 0 (sic
$b = 0$ erit $d^3 - add = 0$ in posteriori sit $c = 0$ et erit $d^4 + b^4 + 2bbdd$ sit $d = 0$ :: $c^4 + b^4$
$+ 2bbcc$ sit $b = 0$ :: $c^4 - 4c^3d + 6ccdd - 4cd^3 + d^4$ sit c et $b = 0$ :: d^4 sit et $d = 0$ :: b^4
$b = 0$ :: c^4) vel unitati (si $a = 1$ $b = 1$ erit $d^3 - dd - 2d + 2$
exemplo sit $b = c = 1$, $d = 1$ :: 1. sit $c = 1$ et $d = 1$ :: b^4
$a = 1$ $b = 2$ erit $d^3 - dd - 4d + 4 = 0$ in posteriori sit b
vel quantitati ad libitum sumendae si $2a = b$ erit
posteriori sit $4bbcd = 2bbcc$ si: $4d = 2c$ et $4d = c$ et
$+ b^4 + 2bbcc - 2bbcc + \frac{bbcc}{4}$ si: $\frac{c^4 + 8bbcc + 16b^4}{16}$
ratione tentata quantitas proveniens poterit di-
qualiscunque sit: (prout hoc in quibusdam hic fieri
possibilitatem indicabit; ~~quod~~ sicut et quandoque
stum erit, ~~...~~ ac radicis tum divisoris tum
(uti hic facile apparet divisorem esse $d - a$ radi
$- 2cd + dd$)

Quantitatum restitutio de qua regula sequens
mel inventis sita ut hae ab una parte aequivale-
utendum si forte opus sit pro illis aequivalenti

Aequationum comparatio haec ex subjectis anno

Hac omnia comprehendit, in omni quaestionum genere necessaria ad aequationem ita praeparanda ut constructioni locus sit &c.

+hk, sive [illegible]

in terminis ex g^4+g [illegible]danda quaestione in eo est ut incognitam ab una [illegible] alteram obtineat quod ut assequatur primo ordine

$^4+gghh+ggkk+h^4$ terminorum secundum diminutionem dimensionis

$-rrk-rhk$ in e z [illegible] judicium, relicta interim ad convenientem

$+gghh+ggkk+h$ [illegible] primum applicare conabimur reductioni

[illegible] dinationis terminorum efficit ut aequationes

[illegible] similes evadant iis ex sequentibus formulis

$hkk+$ [illegible]

$r^4hhkk-r^4hhg$ [illegible]

[illegible] in terminis [illegible]

$$a-d \propto \sqrt{\frac{aabb+2abd+ccdd \mp aaxx-2abxx-bbxx+aadd-2a^3d+a^4}{aa}}$$

$a-d$

$$aa-2ad+dd \propto \frac{aabb+2abd+ccdd \mp aaxx-2abxx-bbxx+aadd-2a^3d+a^4}{aa}$$

$$\frac{aa-2ad+dd}{1} \propto \frac{aabb+2abd+ccdd \mp aaxx-2abxx-bbxx+aadd-2a^3d+a^4}{aa}$$

$$\cancel{a^4-2a^3d+aadd} \propto aabb+2abd+ccdd \mp aaxx-2abxx-bbxx\ \cancel{+aadd-2a^3d+a^4}$$

F. fractiones sint: eg.

$$0 \propto aabb+2abd+ccdd \mp aaxx-2abxx-bbxx$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad + \qquad +$$

$$2abxx+bbxx+aaxx \propto aabb+2abd+ccdd$$

$$xx \propto \frac{aabb+2abd+ccdd}{aa+2ab+bb}$$

als

tuti

abjec onno

$x \propto \frac{ab+cd}{a+b}$

Modus tollendi signa radicalia ex qualibet aequatione proposita

Proponatur verbi gratia: aequatio $n \propto e+g+h+k+m$ etc: in qua n^o quaelibet litera quantitatem designet, signo radicali (tionem radicum intelligo) vel: affectam; Multiplicetur utraque pars quadrate et evanescet signum quantitatis n; Quoniam autem reliquae literae $e\,g\,h\,k\,m$: aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale in quantum duas habent, evanescet; manifestum est obtineri posse aequationem, in qua e aequalis aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quae aequatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratice, evanescet pariter signum radicale ipsius e et quoniam in hac ultima aequatione tunc reliquae literae habebunt aut 1, aut 2 aut 3 aut 4 dimensiones; ac ipsae in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, et quantum ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandae sunt tanquam una duntaxat dimensione constantes, cum duae signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse aequationem in qua g sit aequalis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Qua aequatione denuo quadrata sublatum itidem erit signum radicale ipsius g. Atque ita facile est intelligere, qualibet quadratione unum signum radicale tolli. Majoris perspicuitatis sit sequens operatio exempli $n \propto e+g+h+k$ ubi quadrando utramque partem aequationis prodit aequatio $nn \propto ee+gg+hh+kk+2eg+2eh+2ek+2gh+2gk+2hk$ brevitatis autem causa pro: $nn-ee-gg-hh-kk$ scribatur yy cum hae quantitates signo radicali careant et fit $yy \propto eg+eh+ek+gh+gk+hk$, sive $e \propto \frac{yy-gh-gk-hk}{g+h+k}$ Unde quadrando rursus utramque partem invenitur $ee \propto \frac{g^4+gghh+ggkk+hhkk-2yygh-2yygk-2yyhk+2gghk+2ghhk+2ghkk}{gg+hh+kk+2gh+2gk+2hk}$ seu

$g^4+gghh+ggkk+hhkk-2yygh-2yygk-2yyhk+2gghk+2ghhk+2ghkk-gg-hh-kk-2gh-2gk-2hk$ in $e \propto 0$ supponatur ut ante brevitatis causa.

$g^4+gghh+ggkk+hhkk-gg-hh-kk$ in $ee \propto g^4$ sive $g^4+rrgh+ffgk+tthk \propto 0$

$+2kk-2yy-2ee \propto rr$

$+2hh-2yy-2ee \propto ff$

$+2gg-2yy-2ee \propto tt$

et $\frac{g^4+tthk}{rrh+ffk} \propto -g$

et $\frac{g^8+t^4hhkk+2g^4tthk}{r^4hh+f^4kk+2rrffhk} \propto gg$ unde

$g^8+t^4hhkk+2g^4tthk-r^4hh-f^4kk-2rrffhk$ in $gg \propto 0$ supponatur rursus brevitatis causa $t^4hhkk-r^4hhgg-f^4kkgg \propto u^8$ et $2g^4tt-2rrffgg \propto w^6$ fietque et invenietur $u^{16} \propto w^{12}hhkk$ quae aequatio ab omnibus signis radicalibus liberata est: vid:

O dicitur q̃ tot dimensiones habere ~~[illegible]~~ quotis dimensionibus incognitae quan-
titatis terminus (constat ~~ex coniugendo est~~ [illegible]

~~O~~ multiplicatione ortum turpisse putandum est)

F unde ut hoc obiter notes existente in aequatione duarum dim[illegible]
una ~~[illegible]~~ earum cognita alteram obtinebis ~~[illegible]~~, et in binum dimensi[illegible]
quatione duabus tertiis est:

6

1. termini æquationum jam inventarum ~~ab~~ una parte ita ordinantur, ut eidem quantitati ab altera parte positæ æquales evadant tunc n. hæ ipsæ (juxta x. axioma) junctæ ibidem æquationem constituunt (102.) contingit autem hic quandoque ut æquatio proveniens ex solis cognitis constet (92, 28.) id quod indicat cognita tali ratione esse assumenda ut æquationi satisfiat, vel quoque in alia redu[illegible]

2. ibidem quandoque æquationes aut ad se invicem adduntur vel à se subtrahuntur, ctione lon[illegible] aut in se multiplicantur vel per se dividuntur (103: 2/3/104.) 105: 106: 107: 108 quo una incognitarum habetur quantitatum ab altera parte obtineatur, id quod inprimis fieri solet, si pro incognitis assumamus $x+y$ et $x-y$:

3. si duæ sint æquationes ex quarum utraque tam x quam y (nota duo x vel xx aut x^3, ut n: $yy \propto xy - ay - ax + \frac{aa}{2}$ tunc extrahenda prius erit radix, juxta sequentia de æquationibus quadraticis et æquatio ita ordinando ut y ab una parte obtineatur, fietque $y \propto \frac{x-a}{2} + \sqrt{\frac{xx - 6ax + 3aa}{4}}$ s: $y \propto \frac{3x-2a}{2}$ vid 64.) aut plures incognitas ad unam partem reducere licet (64) id ipsum in utraque efficitur et tunc hæ quantitates inter se comparantur, qua quidem ratione fieri potest ut sæpe nulla ~~fit~~ opus quantitatum restitutione; quam ~~quamvis sæpe~~ præstat unam ex his eamque calculo simpliciorem ad alteram æquationis partem tantum reducere ~~quam ipsa comparatione et alia æquatione inventa altera restituendo omittitur~~ (29. 30 et 8

Post operationem resoluta jam æquatione probationem ejus instituere poteris (in auxilium vocando abbreviationem terminorum infra de constructione indicandam, si multis constet terminis et plurium dimensionum æquatio) eamque legitimam esse scies, si substitutis jam inventas quantitates pro incognitis, easque juxta quæstionis indicationem præparatas, quæsito satisfacere cognoscas: (

Particularis quæ agit de æquationum ~~Quadraticarum~~, Cubicarum ac plurium dimensionum resolutione, sit autem (talismodi considerata) æquationes ~~inventa~~ summa ex pluribus terminis partim cognitis partim incognitis composita quam aliis ~~et~~ æquales vel etiam ~~[illegible]~~ qui omnes simul considerati ~~et~~ nihilo æquales. Sic supponatur $x \propto a$ hoc est $x - a \propto 0$ et rursus $x \propto b$ h. e. $x - b \propto 0$ ibidem $x \propto c$ h. e. $x - c \propto 0$ itemque $x \propto d$, $x - d \propto 0$ his in se invicem multiplicatis ac terminis ad alteram æquationis partem translatis exsurget æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abxx & - abcx & + abcd \propto 0 \\ - b & + bc & - abd & \\ - c & + ac & - bcd & \\ - d & + ad & - acd & \\ & + b & & \\ & + d & & \end{array}$$

unde quæ jam dicta fuere patent ac insuper ~~[illegible]~~ explicare licet, pota rationem in qualibet æquatione plures radices habere ~~characterum semper ex tali et~~ (quod ex sequentibus clarius fiet) quantitas cognita termini æqualis sit summæ omnium radicum et quantitas cognita termini æqualis summæ productorum ex singulis binis et quanti[illegible] ~~[illegible]~~ termini æqualis summæ productorum ex singulis ternis et ita porro 7

at vero quantitas cognita ultimi termini, aequalis ~~summae productorum~~ producto ex omnibus
cumque ex hoc fere solo sequentium fundamenta dependeant, maxime no-
tandum erit ac praeterea advertendum, ipsa aequatione ordinari debere juxta
incognitae quantitatis dimensionum numerum, collocando nim: (velut ex
praesenti exemplo patet) ultimo loco terminum, nulla incognita quantitate
adfectum, penultimo terminum adfectum quantitate incognita unius di-
mensionis, post a duarum dimensionum, tum trium atque sic porro, deficientibus
autem uno vel pluribus terminis, substituendo eos per totidem asteriscos, ipse
sic qualibus considerandae veniunt, hujus aequationis Radices, ~~[illegible]~~ [illegible]atio;
ac ipsa Reductio:

Radices quae inventionem propositae quaestionis determinant hic in con-
siderandae erunt Species, Numerus ac Variationes.

Species est triplex

~~Verae (quae quantitatem [illegible]~~
Falsae (~~verae~~ [illegible] quantitatis defectum) ~~significant~~ de his notandum quod verae in
$(x \infty 3)$
Arithmeticis designent quantitatem aliquam, majorem quam nihil, et fal-
sae defectum alicujus quantitatis $(x \infty -3)$ si quando nihilo sunt minores; in
Geometricis vero communiter verae lineas designent, sensu illo quales in-
veniendae proponuntur, at vero falsae sensu contrario adeo ut si verae accipien[tur]
in data recta, indefinita a dato puncto versus aliquod in ea punctum designatum
progrediendo, falsae in ipsa ab eodem puncto sumi debeant versus contrarium
punctum regrediendo, quo fit ut ad plenam alicujus problematis solutionem
perveniamus sicut nullus usquam existat quo [illegible] ejus determinatio-
nem inveniamus

Imaginariae sunt verae ac falsae non sunt reales hoc est quantitatem aliquam aut
defectum quantitatis denotent, cujus valor nec Arithmetice nec Geometrice
potest exprimi dicuntur imaginariae hoc est tales quidem in qualibet aequatione
radices (ut postmodum indicetur) imaginari licet, verum nulla interdum est quan-
titas quae illis quas imaginamur respondet.

Numerus hic est

et tot quamlibet aequationem admittere radices, quot ipsa habet dimen-
siones si: x supponatur $\infty 2$ si: $x-2 \infty 0$ et rursus $x \infty 3$ si: $x-3 \infty 0$ et multi-
plicatis $x-2 \infty 0$ per $x-3 \infty 0$ habebitur $xx-5x+6 \infty 0$ quae aequatio est, in qua quantitas
valet 2 ac praeterea etiam 3, quod si supponatur $x \infty 4$ ita ut data
$x-4 \infty 0$ haec multiplicata per $xx-5x+6 \infty 0$ producet $x^3-9xx+26x$ [illegible]
quae est alia aequatio in qua x habens 3 dimensiones 3 quoque habet va-
lores: 2 3 et 4 et ~~quidem ex eis verae omnes radices [illegible]~~
denique x supponamus designare defectum alicujus quantitatis ut sup-
ponatur $x \infty -5$ si: $x+5 \infty 0$ eadem ratione multiplicando per x^3-
$9xx+26x-24 \infty 0$ obtinebitur $x^4-4x^3-19xx+106x-120 \infty 0$ in qua
quatuor dimensiones [illegible] habet radices tres veras 2, 3, 4 et
5 atque sic porro.

Nota hic ut probe noscamus verarū falsarū ac Imaginarū radicū naturam, exemplū pag: 310, usq ad initiū 315, in Commentarijs Schotenii super Geometriā Des Carts.

Deinde ponatur unaquaque litera aequationis, sit exempli gratia $n \propto e + g + h$ est: de signa-
re quantitatem signo radicali $\sqrt{C}$ affectam. In hac igitur si loco quadratae multiplica-
tionis utraque pars multiplicetur cubice, evanescet signum radicale ipsius unaquaeque reliquarum
literarum, quae tunc est acquirat 1. 2 aut 3 dimensiones. In quantum autem 3 dimensiones ha-
bent, in tantum etiam carent signo radicali, adeo ut hac ratione obtineri queat aequatio
in qua e non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce
terminos per e obtinebitur aequatio in qua e praeter 1. 2. 3. dimensiones habere nequit. In
quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac pro-
inde, ipsa e in hac aequatione etiam non nisi 1 vel 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si quae-
ratur hujus aequationis quaesitus valor ipsius e, isque in locum eius praecedentibus substituatur, obti-
nebitur aequatio in qua e ~~pariter~~ unam tantum dimensionem habebit; atque ideo inveniri poterit e
aequalis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quae aequatio si deinde cu-
betur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius e prorsus evanescet. vel potest
rursum per e multiplicari, et valor eius de novo inveniri, qui iterum ut antea potest
loco eius haberi valorem ipsius e: alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem compara-
ti, aequationem dabunt in qua $\sqrt[3]{}$ ipsius e non reperietur. Atque sic omnia alia signa radi-
calia ex aequatione tolli possunt; quod facillime perficietur, si tantum advertamus: quod verbi gra-
$g\ gg\ g^4\ g^5\ g^7\ g^8\ g^{10}\ g^{11}\ g^{13}\ g^{14}$ est: solummodo habenda sint pro g, gg cum quibus signum radi-
cale deponatur. Quo autem magis perspicua fiant sequentem operationem adjungere visum est.
sit exempli gratia: $n \propto e + g$ unde $n^3 \propto e^3 + 3eeg + 3egg + g^3$ unde demum $n^3 - e^3 - g^3 \propto 3eeg + 3egg$
sit jam brevitatis causa $n^3 - e^3 - g^3 \propto f^3$ quoniam ipsa asymmetria carent, fietque $f^3 \propto 3eeg +$
$3egg$. et $f^3e \propto 3e^3g + 3eegg$ et $\frac{f^3e - 3e^3g}{g} \propto 3eeg$ invento valore ipsius $3eeg$ in eius
locum in aequatione praecedente subrogato habebitur $f^3 \propto \frac{f^3e - 3e^3g}{g} + 3egg$ et
$f^3g \propto f^3e - 3e^3g + 3eg^3$ / $f^3g + 3e^3g \propto f^3e + 3eg^3$ et $\frac{f^3g + 3e^3g}{f^3 + 3g^3} \propto e$ denique pon-
brevitatis causa $f^3 + 3e^3 \propto p^3$ et $f^3 + 3g^3 \propto q^3$ cum singula signum radicale deponant
eritque $\frac{p^3g}{q^3} \propto e$ et $\frac{p^9g^3}{q^9} \propto e^3$ quae aequatio ab Asymmetria libera est vel hoc modo
Multiplicetur $\frac{p^3g}{q^3} \propto e$ per e eritque $\frac{p^3ge}{q^3} \propto ee$ et quoniam inventa est $f^3 \propto 3gee + 3gge$
seu $\frac{f^3 - 3gge}{3g} \propto ee$ erit $\frac{p^3ge}{q^3} \propto \frac{f^3 - 3gge}{3g}$ ergo $e \propto \frac{q^3f^3}{3ggp^3 + 3g^3q^3} \propto \frac{p^3g}{q^3}$ et tandem
$q^6f^3 \propto 3g^3p^6 + 3g^3p^3q^3$ quae aequatio itidem ab omni signo radicali libera est.

2 Et tot in quâlibet aequatione veras haberi radices, quot reperiuntur variationes signorum + et − et tot falsas quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa + et − quae se invicem sequuntur. Sic in ultima quia post $+x^4$ habetur $-4x^3$ quae est una variatio signi + in − et post $-4x^3$ habetur $-19xx$ quae sunt duo signa similia et $-19xx$ habet $+106x$ et post $+106x$ habetur -120 quae sunt adhuc duae aliae variationes; cognoscitur quod illa 3 admittat veras radices et unam falsam.

3 Ut quoque in aequatione termino vel pluribus deficiente verarum ut et falsarum numerum definire valeas, sequentia intuere exempla, quorum unum est. Si habeatur $z^3 * - 5z + 9$ scribo $z^3\ 0zz + 5z - 9 \propto 0$ deinde supponendo $0zz$ esse signo + affectum, invenio propter terminos $+z^3$ et $+0zz$ similiter propter $+0zz$ et $+5z$ has duas radices falsas esse ac denique prop. term. $+5z - 9$ reperienda est una vera radicem; Eodemmodum supponendo $0zz$ ~~[illegible]~~ signo − affici, erunt propter terminos $+z^3$ $-0zz$ et $-0zz + 5z$ denique $+5z - 9$ diversis signis notatos 3 verae radices, Quas ut et priores inventos sic designo $\frac{f}{f}\ \frac{v}{v}$ inter sese conferendo deprehendo duas esse tum consentientes, easque veras $\frac{f}{v}-\frac{v}{v}$ reliquas autem quacunque ratione collatas neque ita consonare, hinc concludo aequationem propositam explicabilem tantum esse de una radice vera et reliquas duas esse imaginarias. Eodem modo si adhibeatur $z^3 * - 5z - 9$ s: $z^3\ 0zz + 5z + 9 \propto 0$ in supositione 3 falsas radices, e posteriori duas veras et unam falsam; Quibus inter se $\frac{f}{v}$ collatis ut consensus horum appareat, invenio aequationem propositam ~~veram~~ tantum admittere radicem ~~veram~~ falsam duasque reliquas esse imaginarias, ac proinde non posse produci Multiplicatione 3 radicum.

Similiter si fuerit $z^3 * + 5z + 9$ s: $z^3\ 0zz - 5z - 9 \propto 0$ quoniam e priori et posteriori positione invenio duas falsas et unam veram radicem $\frac{f}{f}\times\frac{v}{f}$ cognosco aequationem propositam multiplicatione trium radicum quarum duae sint falsae et una vera produci posse.

Nonsecus si habeatur $z^3 * + 5z - 9$ s: $z^3\ 0zz - 5z + 9 \propto 0$ video in priori ac posteriori positione reperiri duas veras radices et unam falsam $\frac{f}{v}\times\frac{v}{f}$ adeo ut concedendum sit ipsam generari posse ex multiplicatione trium radicum quarum duae sint verae et tertia falsa:

2 [illegible] ratione ut etiam verae evadant falsae et falsae contra verae, fit ante permutando signa omnia + et − quae in secundo, 4to, 6to etc: locis reperiuntur, quae numeros pares designant, reliquis 1, 3, 5 etc similiterque eorum quae impares numeros designant non mutatis. Ut si loco $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$ scribatur $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$ habebitur aequatio in qua una tantum radix vera sed 3 falsae 2, 3, 4, hoc idem locum habet in aequationibus [illegible], sic loco $z^3 * + 5z + 9$ scribitur $z^3 * + 5z - 9$ ubi quae in priori sunt verae radices falsae [illegible] contra, adeo ut unica tantum in his duabus constructione opus.

11

~~Variatio~~ ~~Praeparationes~~ quae aequationis reductionem ~~praeparatio~~ pro ~~praeparans~~ ~~ducebat~~ moventur; fiuntque hae ~~fictione~~ vel ratione ~~radicum~~ Radicum, Terminorum, ac dimensionis ratione

Radicum harum investigatis quisque cognitis vel

Auctio et Diminutio quantitate aliqua cognita fitque hoc tantum in locum incogniti termini substituendo alium qui eadem hac quantitate major sit vel minor, eumque ubique primi loco subrogando, Ut si augere velimus ternario radicem hujus aequationis $x^4+4x^3-19xx-106x-120 \propto 0$ sumenda est y loco x et cogitandum quantitatem hanc y majorem esse quam x expressum 3 ita ut $y-3$ sit ipsi $x \propto$ loco autem xx scribendum est quadratum ex $y-3$ quod est $yy-6y+9$ et loco x^3 sumendus est ejus cubus qui est $y^3-9yy+27y-27$. et denique loco x^4 ponendo est ejus [illegible] qui est $y^4-12y^3+54yy-108y+81$ unde si scribamus summam praecedentem substituendo ubique y pro x invenietur

$$
\begin{array}{lll}
y^4-12y^3+54yy-108y+81 & \text{loco} & x^4 \\
+4y^3-36yy+108y-108 & \propto & 4x^3 \\
-19yy+114y-171 & \propto & -19xx \\
-106y+318 & \propto & -106x \\
-120 & \propto & -120
\end{array}
$$

$y^4-8y^3-yy+8y \; \cancel{*} \propto 0$ seu dividendo ubique y

$y^3-8yy-y+8 \propto 0$ ubi vera radix quae erat 5 jam est 8 propter ternarium ipsi additum, notandum autem 3 unam ex radicibus falsis esse, cum aequatio inde una dimensione minor evadat; si vero contra radicem ternario ejusdem aequationis diminuere velimus facienda est $y+3 \propto x$ et $yy+6y+9 \propto$ [illegible] atque ita porro ita ut loco

$x^4+4x^3-19xx-106x-120 \propto 0$ scribatur

$$
\begin{array}{lll}
y^4+12y^3+54yy+108y+81 & \propto & x^4 \\
+4y^3+36yy+108y+108 & \propto & 4x^3 \\
-19yy-114y-171 & \propto & -19xx \\
-106y-318 & \propto & -106x \\
-120 & \propto & -120
\end{array}
$$

$y^4+16y^3+71yy-4y-420 \propto 0$ e quibus ipsis [illegible] fieri in hac [illegible] ratione singulis in seriebus loco terminorum aequationis propositae substitutis, nulla variatione quoad terminos sed quoad signa posita est, et eo loco quisque qui contrarijs in ijs est denotantur; hinc quoque colligere licet [illegible] dum verae radices alicujus aequationis augentur falsas eadem quantitate minui et contra (ut hic augendo ternario ~~quaelibet~~ veram radicem quae [illegible] minuitur 3nario quaelibet ex falsis, ita ut illa quae erat 4 est valeat [illegible] quam x et quae erat 3 sit ipsa 0 et quae erat 2 facta sit [illegible] +3 [illegible] x) Adeo ut in hac aequatione y^3-8yy [illegible] $+8 \propto 0$

12

$$\begin{array}{r|rrrr} +5 & -2 & -3 & -4 & +5 \\ +3 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ \hline +8 & -5 & -6 & -7 & +2 \end{array}$$

Quae divisio quoque inservit si tale aequationem ope Parabolae ac [illegible] [illegible]
placet, sin ad omnes aequationes unica tantum parabola [illegible] quantitate
invitati assumamus, saepe accidet quod hoc ob radicum magni[tudinem] radice [illegible]
[illegible] quas hac divisione diminuitur ingenerare licebit 4 o valeat o

[illegible] sit

[illegible] + [illegible]

14

quam 3 radices, inter quas duæ veræ existunt utpote 1 et 8 et una falsa
quæ etiam est 1 et in hoc altera $y^4+16y^3+71yy-4y-420 \infty 0$ una tantum vera
quæ est 2 (quia +5 −3 facit +2) et 3 falsæ quæ sunt 5, 6, 7. Et quidem tum has tum
illas promptè transmutare si quantitate ipsis æquali diminuantur, si vero quan-
titate ipsas superante tum ex veris falsas evadere et ex falsis veras.

<u>Multiplicatio et Divisio</u>. Sit æquatio $x^3-axx+bx-c \infty 0$ valorque x per f multi-
plicandus ponamus $y \infty fx$ hinc $\frac{y}{f} \infty x$ et $\frac{yy}{ff} \infty xx$ ac $\frac{y^3}{f^3} \infty x^3$ restitutis jam
hisce quantitatibus in priori æquatione erit $\frac{y^3}{f^3}-\frac{ayy}{ff}+\frac{by}{f}-c \infty 0$ utque tollantur
fractiones omnibusque multiplicatis per f^3 provenient $y^3-fayy+ffby-f^3c \infty 0$. Hinc
talis poterit deduci regula; supponatur quantitas incognita, multiplicata aut
divisa per quantitatem quæ multiplicare aut dividere debet radices esse æqualem
alicui alteri; deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam secun-
di termini per hanc ipsam quæ multiplicare aut dividere debet radices ~~esse æqualem~~
~~alicui alteri~~; et per ipsius quadratum quantitatem tertij et per ipsius cubum quantitatem
4ti atque sic porro usque ad ultimum, id quod inservire posse ut ad integros et ra-
tionales numeros reducantur fracti aut surdi etiam ~~integri~~ irrationales in æquationum
terminis reperiundi. Ut si habeatur $x^3-xx\sqrt{3}+\frac{26}{27}x-\frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0$ et ipsius loco alia
desideretur cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur oportet suppo-
nere $y \infty x\sqrt{3}$ et multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam secundi termini quæ est quoque
$\sqrt{3}$ et per ipsius quadratum quod est 3 quantitatem 3tij quæ est $\frac{26}{27}$ et per ipsius cubum qui est $3\sqrt{3}$
quantitatem ultimi id est $-\frac{8}{27\sqrt{3}}$ id quod facit $y^3-3yy+\frac{26}{9}y-\frac{8}{9} \infty 0$. Deinde
si hujus loco adhuc alia desideretur in qua quantitates omnes cognitæ ~~solum~~ integris
numeris exprimantur supponendo $z \infty 3y$ et multiplicando 3 per 3, $\frac{26}{9}$ per 9 et
$\frac{8}{9}$ per 27 fiet æquatio $z^3-9zz+26z-24 \infty 0$ ubi cum radices sint 2, 3, et 4, juxta
superiora sequitur alterius radices esse $\frac{2}{3}$, 1 et $\frac{4}{3}$ et prioris æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ et
$\frac{4}{9}\sqrt{3}$. Ubi porro notandum quod postquam æquatio quælibet à fractionibus aut
surdis numeris liberata fuerit, fieri non potest ut ulla ex hujus radicibus sive falsis si-
ve veris sit numerus aliquis fractus (quod ex pr. 7 elementi demonstrari potest) adeo
ut si illa deinde dividi (infra) ostendetur non dividi posse concedendum sit, nullam
ex radicibus sive falsis sive veris numero explicari posse, sed omnes esse irratio-
2 nales; similiter si proponatur æquatio hoc modo $y^6 \infty y^4 - 433\frac{1}{3}yy - 125\,92\frac{16}{27} \infty 0$
supposito $zz \infty \frac{3}{10}yy$ multiplicentur per numeros 1, $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{27}{1000}$
3 $z^6 \infty * + 39z^4 + 3{,}40$ cujus radix zz ad præcedentis $\overset{15}{}$ radicem yy est ut 3 ad 10;
contingit quoque interdum æquationes quando tam proximos numeros conti-
nent, ut resolutio non nisi operosiorem industriam requirant in faciliorem
redigere beneficio divisionis. Ut si fuerit æquatio
$x^3 + 203125x + 234375000$ dividenda ipsa est hoc pacto;
$x^3 - 50xx - 203125x - 234375000 \infty 0$ per numeros proportionales
x 125. 15625. 1953125 et prodibit æquatio
vel $y^3 \infty * 13y + 12$ cujus radices sunt +4 −3 et −1 quibus

15

+125 multiplicatis exsurgent radices prioris +500 −375 & −125

Ubi denique operae pretium est observare de imaginarijs radicibus, ut quamvis illae augeantur, diminuantur, multiplicentur aut dividantur sicut jam expositum est, tamen non nisi imaginariae fieri possint.

Falsarum vero mutatio verarum in falsas ~~mutatio~~ conversio quod fit augendo, juxta priora valorem verarum radicum quantitate majore aliqua ex falsis, ubi insuper fit ut quantitas cognita tertij termini quadrato semissis secundi major sit. Ut si habeatur

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 1296n^5x - 7776n^6 \propto 0$$

faciendo $y - 6n \propto x$ invenietur

$$\left.\begin{array}{l} y^6 - 36n \\ \quad + n \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{l} +540nn \\ -30nn \\ -6nn \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} -4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} +19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\right\} y \begin{array}{l} +46656n^6 \\ +7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \end{array}$$

$$y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4yy - 27216n^5y * \propto 0$$

Quod exemplum quidem instar canonis esse potest, simile quid in quibusvis ejusmodi aequationibus exsequendi, ac idcirco ad inveniendam quantitatem qua verae radices augendae sunt, si in exempli causa proposita sit aequatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \propto 0$ oportet neglectis omnibus terminis in quibus signa + et − diversa sunt ab ijs quae in canone reperiuntur, neque b, c, f, considerare tantum omnes reliquas a, d, e, ut potest $+ax^5$ quia in canone habetur $+nx^5$ et $-dxx$ propter $-216n^4xx$ nec non $+ex$ quia in canone ~~habetur~~ $+1296n^5x$. Quae quidem seorsim consideranti est quaerenda quantitas n quae non sit minor quam a quia in canone habetur n, ubi in data aequatione est a, et cujus quadrato-quadratum non sit minus quam $\frac{1}{216}d$ quia in canone habetur $216n^4$ ubi in data aequatione d, nec non cujus quadrato-solidum non sit minus quam $\frac{1}{1296}e$ quia in canone habetur $1296n^5$ ubi in data aequatione est e. Quae taliter inventa, manifeste ex ipsa operatione demonstrabitur si ponatur $y - n \propto x$ inventum in ~~aequationem~~ quae in prioribus …

Terminorum quidem vel

\# Certorum terminorum ablatio ~~quidem~~ huc referenda

x quae docent secundi termini ablationem, quod quidem fit diminuendo veras radices quantitate cognita secundi termini divisa per numerum dimensionum primi, si unus ex istis duobus terminis notatus fuerit + et alter signo −, aut augendo illas eadem quantitate si uterque eodem signo fuerit adfectus, sic ad tollendum secundum terminum aequationis

$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$ diviso 16 per 4 propter quatuor dimensiones termini y^4 provenient 4, hinc facio $z - 4 \propto y$ et scribo

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 - 16z^3 & +96zz & -256z & +256 \\ +16z^3 & -192zz & +768z & -1024 \\ & +71zz & -568z & +1136 \\ & & -4z & +16 \\ & & & -420 \\ \hline z^4 * & -25zz & -60z & -360 \end{array}$$

Ubi vera radix quae erat 2 fit 6 et falsae quae erant 3, 5, 7 modo 1, 2, 3, quia illa ... diminutae +4 …

16

Eodem modo si tollere velimus secundum terminum aequationis:

$x^4 - 2ax^3 + \begin{smallmatrix} 2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$ quoniam divisis 2a per 4 quotiens fit $\frac{1}{2}a$ faciendum est $z + \frac{1}{2}a \propto x$ ac scribendum

$$\begin{array}{llll} z^4 + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 \\ - 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 \\ & + 2aazz & + 2a^3z & + \frac{1}{2}a^4 \\ & - cczz & - accz & - \frac{1}{4}aacc \\ & & - 2a^3z & - a^4 \\ & & & + a^4 \end{array}$$

Ubi postquam innotuit valor ipsius z addendo ipsi $\frac{1}{2}a$ habebitur valor radicis x.

$$z^4 * \begin{smallmatrix} + \frac{1}{2}aa \\ - cc \end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix} - a^3 \\ - acc \end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix} + \frac{5}{16}a^4 \\ - \frac{1}{4}aacc \end{smallmatrix} \propto 0$$

Hac methodo adjuti aequationes cubicas auferendo secundum terminum ad tres sequentes formulas reducemus: $y^3 \propto * - py + q$, $y^3 \propto * + py + q$ et $y^3 \propto * + py - q$. sic si habeatur $x^3 + axx + bx + c \propto 0$ cujus aequationis radices omnes ~~quadratae~~ efficiunt $-a$ hinc si uniuscujusque radicis valori trientem a aliquam summa harum radicum $\propto$ erit 0 unde ponatur $y - \frac{1}{3}a \propto x$ et pro xx $yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$ atque sic porro ~~ut sequitur habebitur~~ et scribamus summam praecedentem substituendo ubique y pro x inveniemus

$$\begin{array}{llll} y^3 - ayy & + \frac{1}{3}aay & - \frac{1}{27}a^3 \\ + ayy & - \frac{2}{3}aay & + \frac{1}{9}a^3 \\ & + by & - \frac{1}{3}ab \\ & & + c \\ \hline y^3 * & \begin{smallmatrix} - \frac{1}{3}aa \\ + b \end{smallmatrix} y & \begin{smallmatrix} + \frac{2}{27}a^3 \\ - \frac{1}{3}ab \\ + c \end{smallmatrix} & \propto 0 \end{array}$$

si jam habeatur $x^3 - 4xx - 15x + 18 \propto 0$ erit $a \propto -4$ $b \propto -15$ et $c \propto 18$ hinc loco literarum substitutis literis obtinetur

$$\begin{array}{lll} y^3 * & - \frac{16}{3}y & - \frac{128}{27} \propto 0 \\ & - 15y & - 20 \\ & & + 18 \\ \hline y^3 * & - 20\frac{1}{3}y & - 6\frac{20}{27} \propto 0 \end{array}$$ et $y + \frac{4}{3} \propto x$

Hisce sic expositis eliciemus regulam generalem tollendi in quavis aequatione cubica secundum terminum.

Si habeatur $x^3 .\ axx .\ bx .\ c. \propto 0$ ponatur loco hujus

$$+y^3 * \quad \begin{smallmatrix} - \frac{1}{3}aay \\ b \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} \frac{2}{27}a^3 \\ \frac{1}{3}ab \\ c \end{smallmatrix}$$

Signa autem autem quae hic omissa tali modo collocentur

1 si sit $\left\{\begin{smallmatrix} +a \\ +b \end{smallmatrix}\right\}$ ponatur $\left\{\begin{smallmatrix} +\frac{2}{27}a \\ +b \end{smallmatrix}\right\}$ [illegible] $-$

2 si sit $\left\{\begin{smallmatrix} +a & +b \\ -a & -b \end{smallmatrix}\right\}$ ponatur $-\frac{1}{3}ab$ si vero una quantitas sit $+$ et altera $-$ si prior $-$ et posterior $+$ ponatur $+\frac{1}{3}ab$.

3 si sit $+c$ ponatur $+$ contra $-$ sive sit $+a$ tunc $x \propto y - \frac{1}{3}a$ alias $x \propto y + \frac{1}{3}a$

Exempli loco erit $x^3 - 1xx - 36x - 324 \propto 0$ loco ejus scribatur:

$$\begin{array}{lll} y^3 & - \frac{1}{3}y & - \frac{2}{27} \\ & - 36 & - 12 \\ & & - 324 \\ \hline * & - 36\frac{1}{3}y & - 336\frac{2}{27} \propto 0 \end{array}$$ et $y + \frac{1}{3} \propto x$ sive valori ipsius y addendum $\frac{1}{3}a$ ad obtinendum x.

17

Ultimo ex iisdem exhibebimus regulam eadem ratione [quaesitam] inventam ad tollendum in aequationibus quadrato quadraticis secundum terminum. Sit
$+x^4 . \overset{c}{a}x^3 . \overset{2}{b}xx . \overset{1}{c}x . d \propto 0$ loco hujus ponatur:

$$y^4 * \begin{matrix} -\frac{3}{8}aayy \\ b \end{matrix} \begin{matrix} \frac{1}{8}a^3y \\ \frac{1}{2}ab \\ c \end{matrix} \begin{matrix} -\frac{3}{256}a^4 \\ \frac{1}{16}aab \\ \frac{1}{4}ac \\ d \end{matrix} \propto 0$$

signa hic omissa tali ratione apponantur:

si sit $\begin{matrix} -a \\ +a \end{matrix}$ ponatur $\begin{matrix} -\frac{1}{8}a^3 \\ +\frac{1}{8}a^3 \end{matrix}$

si sit $\begin{matrix} -a-b \\ -a+b \\ +a+b \\ +a-b \end{matrix}$ ponatur $\begin{matrix} -b-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{16}aab \\ +b+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}aab \\ +b-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}aab \\ -b+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{16}aab \end{matrix}$

si sit $\begin{matrix} -a-c \\ -a+c \\ +a-c \\ +a+c \end{matrix}$ ponatur $\begin{matrix} -c-\frac{1}{4}ac \\ +c+\frac{1}{4}ac \\ -c+\frac{1}{4}ac \\ +c-\frac{1}{4}ac \end{matrix}$ si sit $\begin{matrix} +d \\ -d \end{matrix}$ ponatur $\begin{matrix} +d \\ -d \end{matrix}$

et si sit $\begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix}$ ponatur $\begin{matrix} y-\frac{1}{4}a \propto x \\ y+\frac{1}{4}a \propto x \end{matrix}$

Exempli gratia sit $x^4 + \overset{a}{4}x^3 - \overset{b}{3}xx - \overset{c}{8}x + \overset{d}{4} \propto 0$ loco hujus ponatur

$$\begin{matrix} y^4 * & -6yy & +8y & -3 \\ & -3 & +6 & -3 \\ & & -8 & +8 \\ & & & +4 \end{matrix}$$

$$y^4 * -9yy + 6y + 6 \propto 0$$ et $y - 1 \propto x$ atque hac ratione in omnibus procedendum erit.

2 **Quae docent ultimi termini ablationem.** Hunc primum auferendus est secundus terminus modo jam indicato et progrediendum tali ratione. Sit
$x^4 * -qxx + rx - s \propto 0$ ponatur ultimus terminus $s \propto xz$ ergo $\frac{s}{x} \propto z$
et $\frac{s}{z} \propto x$ et $\frac{ss}{zz} \propto xx$ et $\frac{s^4}{z^4} \propto x^4$ hinc substituto x in aequatione erit
$\frac{s^4}{z^4} * -\frac{qss}{zz} + \frac{rs}{z} - s \propto 0$ multiplicatis omnibus per z^4 proveniet
$s^4 * -qsszz + rsz^3 - sz^4 \propto 0$ hanc ordinando ut z^4 primum locum obtineat
caeterisque divisis per s obtinebis $z^4 - rz^3 + qszz * -s^3 \propto 0$ invento itaque
valore z valor x quoque invenitur cum z sit $\propto \frac{s}{x}$ atque ita in aliis.

Ablatorum terminorum restitutio fit per hoc augendo dimensionum numerum alicujus aequationis ut e.g. $x^5 * * * * -6 \propto 0$ et desideretur aequatio in qua omnes termini sint completi utque ea insuper ad 6 dimensiones ascendat [illegible] numerum pro $x^5 * * * * -6 \propto 0$ scribere $x^6 * * * * -$ [illegible] eundem facit
$y - a \propto x$ habebis $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a$ [illegible] nullum [illegible] obliquet
quod quantula etiam supposita fuerit quantitas a [illegible] nulla [illegible]
definiant esse repleta. [illegible]

18

$z^4 * -25zz - 60z - 500$ [illegible] $+ 0 \propto 0$

Divisorum ultimi termini ~~in~~ aequationis inventio: triplex hic occurrit casus vel n:

1 Ultimus terminus aequationis unius est membri (sit bc^3dd) tum eundem per quantitatem primitivam quae non nisi per unitatem aut seipsam divisibilis est, divide et quotientem per hanc eandem aut aliam primitivam, donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam quae per seipsam est dividenda, prout ~~hoc~~ hoc subjectum exemplum docet: $c^3bdd\{c^2bdd\{cbdd\{bdd\{dd\{d\} \mid x$; c, c, c, b, d, d.

Quibus factis divisores sequenti ratione collocatos per se invicem multiplicato:

x

c c

cc

c, c³

b, bc, bcc, bc³

d, dc, dcc, dc³, db, dbc, dbcc, dbc³

d, dd, ddc, ddcc, ddc³, ddb, ddbc, ddbcc, ddbc³.

2 Plurium membrorum, tum supponendo ipsum ∞0 (sit eo: $x^4 - 14aaxx + 32aacx + a^4 \infty 0$; $+4acd$, $-16add$; $-10aacc$, $-2acd$, $+4add$, $+4ac^3$, $+4a^3c$, $+8caa$, $+24acdd$, $+4cdd$, $+4cd^3$, $+c^4$, $+8c^3$; $+4ac$, $+2cc$, $+4dd$, $+dc$) atque pro libitu eligendo aliquam ex literis cum incognitam cujus respectu fictitialis aequatio in ordine redigatur (et sit ea a) erit:

$a^4 + 4ca^3 - 10ccaa - 2cda + 4cd^3$; $+4dd$, $+4c^3$, $+4cdd \infty 0$; $+dc$, $+24cdd$, $+c^4$; $+dc^3$

fiat per regulas de reductione studendum, utrum per aliam rationalem dividi possit, si est possibile, certum est hanc nullos rationales divisores admittere, si vero sit divisibilis, quaerantur rursus eodem modo quaerendi divisoris hujus et quotientis atque ita ex prioribus evidens erit, quo pacto omnes rationales aequationes hanc fictam dividentes inveniri queant, quae quidem divisores erunt ultimi termini aequationis propositae.

3 Si ultimus terminus fictae aequationis plurium membrorum sit (ut hic) rursus is ut ante supponitur ∞0 eodem modo in eodem procedendo ut dictum est donec inveniatur aequatio cujus vel rationales divisores per aliquam sequentium regularum de reductione facillime inveniuntur, vel cujus ultimus terminus tantum unius membri existit, quoniam per modo dictas regulas inveniri possunt aequationes omnes ultimum hanc fictam dividentes, ubi notandum per solas regulas omnes divisores ultimi termini inveniri posse quod tamen et per regulas saepe ~~facillime~~ faciliori ratione obtineri poterit.

(Sumendo c pro incognita erit $c^4 + 8dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0$ quae divisa per c exhibet $c^3 + 8dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$.)

Quantitatis cognitæ alicujus termini in æquatione alicui alteri

datæ adæquatio sic si habeatur $z^3 = * bbz.$ c^3 ac illius loco aliud desideretur cujus penultimus terminus habeat a at ultimus aa fiat ut $a \pi b \pi b \pi$ ad 4tam quæ vocetur erit $a = bb$ rursus fiat ut $aa \pi cc \pi$ sic πz ad 4tam quæ sit y sive etiam quod eodem redit ut $a \pi c$ sic c ad 3tiam quæ vocetur d ac denuo ut $a \pi d$ sic $c \pi d$ erit $aay = c^3$ Unde pro priori scribi poterit $z^3 = * ast. aay$ sive sumendo a pro unitate $z^3 = * st. y$ Nec aliter fit si habeatur $z^4 = * bbzz. c^4, d^4$ substituto n. as in locum bb et aay in locum c^3 (ut ante) faciendum est ut $a \pi d$ sic d ad 4tam quæ vocetur e erit $ae = dd$ ideoque $aaee = d^4$ Ubi rursus si fiat ut a ad e ita e ad 4tam quæ vocetur r erit $ar = ee$ ac proinde $a^3r = d^4$ ita ut pro priori ~~[illegible]~~ reponi possit $z^4 = * astt. aay^2 a^3r$ sive sumendo a pro unitate $z^4 = * stt. y^2 t. r.$

Dimensionis hic docemur quarum ratione inquisitio instituenda, utrum æquatio aliqua ad minores dimensiones sit reducibilis, quod ex triplici genere regulæ quædam enim ostendunt vel non esse reducibilem, quædam quantum, quædam quæ ... sit reducibilis quoad

1. Si in æquatione literali (sit exemplum ex fractione carens $x^3 - 3axx + 3bbx - 3a^3$ $- b$ $+ 3ab - b^3$ $+ 4aa - 6aab$ $- 9bba$ $\} = 0$ et fractiones includens $x^5 * * * * + 4aab - 10a^4b - \frac{3a^3bb}{a-b} - \frac{2}{3}b^3aa = 0$ 3. cui insint quantitates irrationales $x^5 * * + xx\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} * a^3b\sqrt{c.\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}ab} = 0$) una vel plures literæ seu quantitates cognitæ supponuntur $= 0$ (ut in 1. exemplo $a = 0$ erit $x^3 - ... xx + ... bbx - b^3 = 0$ sit in 2do $a = 0$: $x^5 * * * * - c^4b = 0$ sit in 3tio $a = 0$ erit $x^5 + ... = 0$ sive $x + b = 0$) vel pro una vel pluribus vel omnibus literis seu quantitatibus cognitis supponantur numeri (sit in 1. $a = 1$ $b = 1$ erit $x^3 - xx + 10x - 15 = 0$ sit in secundo $a = 2$ $b = 1$, $c = 3$: $x^5 - 3x - \frac{564}{3} = 0$ sit denique in tertia $a = 1$ $b = 1$: $x^5 + xx\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{c.\frac{11}{54}} = 0$) vel alia quantitates ad libitum (ut in 1mo $a = b$: $x^4 - 4axx + 9aax - 15a^3 = 0$ in 2do $4aabb = \frac{3a^3bb}{a-b}$ s. $b = \frac{1}{4}a$: $x^5 - \frac{490}{96}a^5 = 0$ sit in 3tio $\frac{1}{4}aa + bb = 0$ s. $bb = -\frac{1}{4}aa$ et resultabit $x^5 + a^3b\sqrt{c.\frac{25a^3}{216}} = 0$) — atque eo ultimus terminus non evanescat (quod hic est sit exceptio in □) neque æquatio quæ hinc resultat reducibilis sit (quod hic in omnibus exemplis patet) certum est neque propositam reducibilem fore; at vero si ultimus evanescat (sit exempli gratia $x^4 + 4ax^3 + ...xx - 4bbcx \pm b^4 = 0$ sit $a = 1$ $b = 1$ erit $x^4 + 4xx + x - 4 = 0$ sit 2do $x^3 - \frac{1}{4}ab\sqrt{xx + aa - bb} + 3axx + \frac{1}{4}abx - \frac{aab}{+bb}\sqrt{3aa + bb} = 0$ supponatur $aa - bb = 0$ s. $a = b$ erit $x^3 + 3axx$ ~~+ 3aaxx + ...~~ $= 0$ quæ pariter est pauciorum dimensionum quam proposita) ... dimensiones cuilibet æquationi adscribendæ quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet dempto omni signo radicali) atque etiam inde resultans æquatio non existat reducibilis (ubi hoc est æquatio proposita ad pauciores dimensiones quam ista resultans ~~æquatio~~ reductio non ...) ... in aliquando ad eundem dimensionum numerum est reducibilis sit $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 = 0$ supponendo $a = 0$ erit $x^3 + 2b^3 = 0$ quæ non potest reduci et tamen æquatio proposita est reducibilis per $x - 2a = 0$) Nota aut.

1 hanc regulam non tantum usum habere in inquirendo, utrum aequatio aliqua
literalis reducibilis sit, verum etiam eodem modo inquiri posse, num aequatio
illa vel etiam quantitas quaevis composita (de quorum prioribus) per aliam aequatio-
nem vel quantitatem quae rationalis sit dividi possit, num eadem admittat
radicem quadratam, cubicam vel aliam; num denique duae aut plures aequatio-
nes admittant communem aliquem divisorem
Ut intelligas quid velim, per aequationem ex proposita resultantem scien-
dum quando una pluresve literae vel quantitates $\propto 0$ sunt, nullae omnes quan-
titates ex multiplicatione harum per alias productas etiam aequales nihilo fieri
Sed si literales fractiones adsunt, tunc fractionis numeratore $\propto 0$ existente
tollenda est ista fractio at denominatore $\propto 0$ existente oportet terminos o-
mnes aequationis datae primo per ejusmodi denominatorem multiplicare, quo
facto, tunc delendae sunt fractiones quorum denominator $\propto 0$ propositus fuit

sit $xx - \frac{cc}{a}x + cc \propto 0$ sit $c \propto 0$ et erit $xx - bx + aa \propto 0$
$\quad\ +b \qquad -aa \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +ab$
$\qquad\qquad -\frac{cb}{a}$ sit $a \propto 0$ et erit $-ccx - ccb \propto 0$ seu $x + b \propto 0$
hoc $\qquad +ab$ sit $b \propto 0$ et erit $xx - \frac{cc}{a}x + \frac{cc}{aa} \propto 0$

2 Sequentes regulae docent quae se tantum ad aequationes in quibus nec signa
radicalia neque literales fractiones extendunt quam

1 Si in aequatione proposita reperiatur litera cognita quae in ultimo termino
non contineatur si illa non nisi semel in aequatione extat, vel semel tantum
reperiatur secundum eundem dimensionum numerum (ut in aequatione
$x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2abbx + aabb \propto 0$ in qua dd semel duntaxat re-
$\quad -cc \quad +bb \qquad -2acc$
$\qquad\quad +4ac$ peritur duas habens dimensiones) aequatio est
per indivisibilis erit per x aut xx etc. + vel − quantitate quavis cognita
atque rationali

2 Si plures in aequatione proposita reperiantur literae cognitae quae in ultimo
termino non contineantur si illa ubique eodem signo + vel − affecta, dimensiones
incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimensiones
habentem, multiplicata aequatio illa semper indivisibilis erit per x + vel
− vel per xx, x^3 etc. − quantitate quavis cognita atque rationali, ut haec
aequatio $x^4 + 4cx^3 - ddxx + 4bbcx + b^4 \propto 0$ in qua c bis tantum reperitur
affecta signo + ac multiplicata per x cujus est sua dimensionum aut haec
$x^6 - ax^5 + ffx^4 - c^3x^3 - c^4xx - ddccax + c^4d^3 \propto 0$ ubi a ter invenitur
$\quad +b \quad -dd \quad -add \quad +ddff \quad +d^3bb$
affecta ubique signo − aut b bis signo + et ducta utraque in x, ubi
habentes dimensiones impares; aut in qua etiam f bis reperitur affecta
signo + et ducta in x, ubique pares dimensiones habentem.

3 Si in aequatione proposita reperiatur litera cognita quae in nullo a-
lio quam in ultimo termino contineatur, si ejus dimensionum numerus
si minor numero dimensionum incognitae quantitatis ad ...
considerabo

4

O4 Assumpto valore aliquo pro x datae aequationis (sit $x^5 - 6abx^3 + 30aabxx$
$- 24a^3bx + 120ab^4 \propto 0$, ponatur $x \propto a$) eoque subrogato ubique in locum x
$+10a^4$

$x^5 \propto a^5$	
$-6abx^3 \propto -6a^4b$	
$+30aabxx \propto 30a^4b$	
$-24a^3bx \propto -24a^4b$	
$+10a^4x \propto 10a^5$	
$120ab^4 \propto 120ab^4$	
aggreg: $11a^5 + 120ab^4$	

aggregati hinc provenientis si ~~pauciores~~ ~~dimensionum~~ divisores ~~ultimi termini~~ nullos divisores praeter unitatem ac se ipsum aggregatum exhibet, aequatio proposita indivisibilis erit, id est aequatio nunquam divisibilis fiet per aequationem rationalem, cujus dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicujus ex divisoribus ultimi termini vel dicti aggregati; quocirca si aequatione existente 6 dimensionum divisores non nisi 2 et 5 dimensionum fuerint erit ea indivisibilis per aequationem 2, 3, 4 dimensionum, et si divisores tantum 2 et 4 dimensionum fuerint erit ipsa indivisibilis per aequationem 2, 3 et 5 dimensionum atque ita de aliis; notandum autem hic per hunc modum facillime aequationem in aliam transmutari posse, in qua ultimus terminus pauciores habet divisores, supponendo tantum $x \propto z +$ assumpto ipsius x valore eoque ubique in locum x substituto (sit $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \propto 0$ sit $x \propto z$ fiet

cujus divisores multo pauciores existunt quam ipsius -600

Hinc ponendo $x \propto z + 1$

$x^5 \propto z^5 + 5z^4 + 10z^3 + 10zz + 5z + 1$
$2x^4 \propto \ldots\ 2z^4 + 8z^3 + 12zz + 8z + 8$
$-58x^3 \propto \ldots\ -58z^3 - 174zz - 174z - 58$
$-49xx \propto \ldots\ -49zz - 98z - 49$
$-50x \propto \ldots\ -50z - 50$
$-600 \propto \ldots\ -600$

$z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754$.

$x^5 \propto +1$	
$+2x^4 \propto 2$	
$-58x^3 \propto -58$	
$-49xx \propto -49$	
$-50x \propto -50$	
$-600 \propto -600$	
$+3 - 757 \propto -754$	

) Quod si vero obtineatur aggregatum nimis adhuc multos divisores admittens, ponendo $x \propto z - 1$, vel $x \propto z + 2$, $x \propto z - 2$ etc. ita porro ~~usque~~ dum obtineatur quaesitum; vel etiam assumptis nonnullis terminis ut si supponatur $\propto 0$ (e.g. in aequatione allata: $x^5 + 2x^4 \propto 0$ atque sic invenire $x \propto -2$ quaerendo tantum ultimum aggregati reliquorum terminorum $-58x^3 - 49xx - 50x - 600$) ubi ex operatione notandum aequationem in qua ultimus terminus pauciores habet ~~dimensiones~~ divisores indivisibilem existere si proposita sit indivisibilis at divisibilem si divisibilis et praeterea ex aequationibus ipsa dividentibus facile quoque inveniri aequationes propositam dividentes (sic praecedens potest dividi per $zz + 3z - 58 \propto 0$ unde si in ea substituatur $x - 1$ obtinebitur $xx + xx - 60 \propto 0$ quae propositam quoque dividit.

Reductio quae bipliciter consideratur ratione Dimensionis, Ordinis ac Radicationis
Dimensionis, hic exhibebimus regulas aequationes ad minimas dimensiones reducendi quarum
1 Examinandae ordine omnes quantitates quae absque fractione ultimum terminum dividere possunt et videndum an non aliqua ex ipsis juncta cum quantitate

nis reductio

~~F Hic aequatio duobus modis considerari potest vel absolute ad eam faciendam exhibendo varias regulas quae utiles esse possunt: vel relative in quantum scilicet illa ad aliquod problema e quo originem ducit referre licet.~~

(ut in hac $x^6 - bbx^4 + \begin{matrix} b^3c \\ -bbc^2 \end{matrix} xx + \begin{matrix} bcd^4 \\ +2bd^5 \end{matrix} \propto 0$ in qua d tantum in ultimo termino contineatur habens ad summum 5 dx plures nim: 6 dim:) certum è illam æquationem per x + vel − quantitate quavis rationali atque cognita esse indivisibilem; si ejus dimensionum numerus sit minor semisse numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati (ut in eodem exemplo si loco ultimi termini $bcd^4 + 2bd^5$ ponatur $bc^3dd + 2bd^3$) certum è illam æquationem per xx + vel − quantitate quavis rationali atque cognita indivisibilem existere: si ejus dimensionum numerus sit minor triente numeri dimensionum incognitæ quantitatis ad summum considerati, certum è illam æquationem per x^3 + vel − etc. non posse dividi atque ita porro in infinitum.

3 hoc ipsum hac regula manifestum fit: si quantitas quædam æquationis cujusdam divisor existat, restituendo per ipsam æquationem termini se destruunt ut sit $x^3 - bxx + abx - abc \propto 0$ ~~[illegible]~~ cognoscatur num per $x - b \propto 0$ dividi
$\begin{matrix} -axx + bcx \\ -cxx + acx \end{matrix}$ hic possit institui restituatur æquatio procedens per $x - b \propto 0$ ponendo loco x^3, b^3 cum x sit $\propto b$ et loco $-bxx$ $-axx$ et $-cxx$, $-b^3 - abb$ ~~[illegible]~~ $- cbb$, tandem loco abx, bcx, bcx et $-abc$ $abb + cbb + acb - abc$ ~~[illegible]~~ additis invenit $0 \propto 0$ quod indicat æquationis divisionem hoc divisore fieri posse: id quod idem in numeralibus quæstionibus locum habet

Reductio quæ duplex consideratur ratione Dimensionis, ~~[illegible]~~ ac Radicum ratione

Dimensionis hic exhibebimus x regulas quæ utiles esse poterunt ad æquationes ad minimas dimensiones reducendas quæ hoc ordine commode adhiberi possint quoad ejus fieri fit

1 Examinentur ordine omnes quantitates quæ absque fractione ultimum terminum dividere possint et videndum è num aliqua ex ipsis juncta cum quantitate incognita per signum + vel − componere possit binomium, quod dividat totam summam, hoc si contingit dimensiones ejus in tantum diminuuntur, ipsaque quantitas cognita binomii erit una ex radicibus hujus æquationis, quod si vero aliquot ultimi termini divisores juncti cum quantitate incognita per sig: + vel − non ita dividant totam æquationis summam indicio è eas non esse ejusdem radices, sic in hac æquatione $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$ dividi quidem potest per $x - 2$ per $x - 3$ per $x - 4$ et per $x + 5$ sed nullo modo per x vel − quacunque alia quantitate id quod ostendit ipsam non posse admittere alias radices ex:

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0}{x - 2} \left\{ \frac{x^3 - 2xx - 23x + 60 \propto 0}{x - 3} \left\{ \frac{xx + x - 20}{x - 4} \right\} x + 5 \right.$$

è quibus quoque ejusdem dimensionis diminutio percipi poterit, cum id quod multiplicatione compositum sit ex prioribus constat nisi divisione resolvatur.

Non aliter procedendum erit si habeatur $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$, cum n. 64 divisores sint 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64 ordine examino hanc æquationem num dividi possit per aliquod ex binomiis $yy - 1$, $yy + 1$, $yy - 2$, $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$ et invenio dividi posse per $yy - 16$ hoc modo

$\left\{\begin{matrix} y^6 + aa\,y^4 - a^4\,yy - a^6 \\ + cc \quad + c^4 \quad - 2a^4c \\ \quad\quad\quad\quad\quad - aac^4 \end{matrix}\right. \propto 0$ $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$ $\left\{ y^4 + 8yy + 4 \right.$ $yy - 16$

Si vero quantitas aliqua superfuisset vel aliquis praecedentium terminorum absque fractione dividi non potuisset, manifestum fuisset divisionem nullo modo fieri potuisse; similiter si habeatur $y^6 \begin{matrix} + aa \\ - cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} - a^4 \\ + c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} - a^6 \\ - 2a^4cc \\ - aac^4 \end{matrix} \propto 0$ ultimus terminus absque fractione dividi ~~potest~~ per a, aa, aa+cc, a^3+acc et similes, sed duas sufficit ex illis considerare, nempe aa et aa+cc, aliae enim cum in quotiente plures pauciores~~ve~~ dimensiones exhibeant, quam quidem in quantitate cognita penultimi termini reperiuntur, impedirent ut divisio fieri posset, examinando igitur binomium yy−aa−cc invenitur divisionem per illud fieri, ac existente quotiente $y^4 \begin{matrix} + 2aa \\ - cc \end{matrix} yy \begin{matrix} + a^4 \\ + aacc \end{matrix} \propto 0$ id quod etiam monstrat radicem quaesitam esse aa+cc. Verum cum ratio allata valde prolixa sit alias tradenda methodus et quidem 1. construitur aequatio Geometrice juxta praecepta infra tradenda constructionis, tum si nulla inveniuntur radices ~~[illegible]~~ impossibilis erit, si inveniantur in lineis tum explorentur quibus numeris ex inventis divisoribus his lineis proxime accedat, ut seligantur per quos divisio sit tentanda, neglectis reliquis, quod si hoc cum nulla tali modo aliorumve numerorum fieri possit, indicat aequationem propositam nullam admittere radicem rationalem. 2 sit data aequatio $x^3 - xx - 30x + 72 \propto 0$, quaerantur divisores ultimi termini qui erunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, tunc augendae sunt radices verae certa quadam quantitate, ad quod quidem commodissime 1 et 10 sumendo ponendo $y \propto x + 1$ seu $x \propto y - 1$ exsurget aequatio $y^3 - 4yy - 25y + 100$ cujus verae radices unitate majores, inquiro hic itidem in ultimi termini divisores, erunt autem sequentes 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 diminuti autem unitate 0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99 quos conferendo cum primo inventis divisoribus intelligo in utrisque horum convenire inter se 1, 3, 4, 9, 24, hos seorsim pono et tum minuendo veras radices aequationis propositae sumendo nimirum $z \propto x - 1$ seu $x \propto z + 1$ invenio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \propto 0$ cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, hic unitate aucti efficiunt divisores

— — 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, Jam vero cum ex prioribus quinque 1, 3, 4, 9, 24 bini tantum sint utpote 3 et 4 qui cum binis horum consentiunt necesse erit divisionem tentare per x−3 vel per x−4 aut ad obtinendas falsas quae hac deminutione veram unitate sunt auctae per x+2 et x+6. Tunc cum $x^3 - xx - 30x + 72 \propto 0$ dividendo per $x - 3 \propto 0$ oriatur $xx + 2x - 24 \propto 0$ cujus radices +4 −6, dividendo autem per $x - 4 \propto 0$ proveniet $xx + 3x - 18 \propto 0$ cujus radices ~~+6~~ +3 [illegible] sequitur radices propositae aequationis esse +3 +4 et −6. ~~[illegible]~~

O. per $x + 6 \propto 0$ et resultat $xx - 7x + 12 \propto 0$ cujus radices +4 +3.

5 ~~Si quantitas~~ nulla in aequatione data $\left(x^5 + 10bx^4 + 30b^3xx + 34ab^3x + 20ab^4\right.$ aliquam literam ~~$\propto 0$ vel unitatem vel~~ dispensare $\begin{matrix} + bb \\ + a^4 \\ \overline{bb} \end{matrix} \begin{matrix} - 10abb \\ - \dfrac{2a^4}{b} \end{matrix} + 2a^4 + 10ab^6$

~~[illegible]~~ sit $a \propto 0$ et erit $x^3 + bbx + 3 \ldots$

tunc videatur num proveniens cum data aequatione [illegible]

salvat [illegible]

26

diminutio atq[ue] inde his hac aliqualem adhuc laborem involvat, breviorem omnem hic poteris assequi; in superioribus aequationibus $3y^3 - 4yy$
$-25y + 100$ et $k^3 + kk - 2yk + 42$, ultimi tantum termini 100 et 42 in
dijsing; has sic facillime invenies, supponas primo xxx tum in prima aequatione $x^3 \ldots -30x + 72$ hoc valore ubiq[ue] in locum x subrogato
obtinebis 42 tum $xx - x$ quo valore denuo in eadem substituto
relinquetur hic inventus terminus superioribus patent:

$$x^3 - x$$
$$-xxx - x$$
$$-30xx + 30$$
$$+72x \quad 72$$
$$102 - 2 \quad 100$$

$$x^3 \quad x$$
$$-xx \quad -x$$
$$-30x \quad -30$$
$$72 \quad 72$$
$$73 - 31 : 42$$

Hic tertio adjungemus methodum hos divisores ad inveniendum ad modum dictam. tunc primo collige in aequatione data adhuc cognitas servatis signis in unam summam (sit $x^3 - 9xx + 26x - 24$ po cuius cognitae $x. -9. +26. -24$, addita autem $x - 6$) quod si se multo destitutum aut (qd hic non fit) aequatio divisibilis erit per $x - x$ (quod hic proinde non fieri potest) sin minus, divisores ultimi termini invenienda (hic est 24. cuius divisores $x. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24$) quibus singulis adde unitatem
$(\overset{1}{2}.\ \overset{1}{3}.\ \overset{1}{4}.\ \overset{1}{6}.\ \overset{1}{8}.\ \overset{1}{12}.\ \overset{1}{24})$ hi solum ex illis literae x signo $+$ jungendi
$3.\ 4.\ 5.\ 7.\ 9.\ 13.\ 25$
qui simul sic aucti divisores ~~[illegible]~~ antea cognitam summam (nim 6) existunt (sunt hic $x. 2. 1.$ qui aucti unitate efficiunt 2 et 3 divisores antea inventae summae) qua proinde tali modo annotan[dum] $0 : x + x.$ et $x + 2$) tum iisdem divisoribus diminutis unitate $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix}6 & 8 & 12 & 24 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ hi solum ex illis literae x signo $-$ jungendi, qui $\ 0\ 1\ 2\ 3$
$5\quad 7\quad 11\quad 23$ simul sic diminuti divisores modo inventae summae (6) existunt
(sunt hic $x. 2. 3. 4$ qui diminuti unitate ~~efficiunt~~ 0. 1. 2. [illegible] divisores 6 quae proinde tali modo annotandi $x - 1, x - 2, x - 3, x - 4$) atq[ue] sic jam inventis divisoribus solum tentandae erit divisio (sunt hic $x + x, x + 2, x - x, x - 2$
$x - 3, x - 4$) observatis tamen signis quales aequatio contineat radices, quo quandoq[ue] operatio non nihil adhuc brevior ~~[illegible]~~ (sic hic manifestum est in aequatione proposita tres veras falsas continere, divisio ex superioribus in aequatione $x + x$ et $x + 2$ tuto omitti potest, utq[ue] ita tantum quatuor divisores nimirum $x - x$
$x - 2, x - 3, x - 4$ relinquantur quorum ex superioribus solum divisores $x - x$ et ita adhuc remanent $x - 2, x - 3, x - 4$, quorum numerorum producto cum sit 24, summa tamen 9 facile ex superioribus patet absq[ue] ullo divisionis labore subeundo hos 3 dividere fore aequationis radices esse.

quod, si in aequationibus literae cognitae reperiantur quae in ultimo termino non tantum res atque ea divisibilis sit per x, xx, x^3 etc. $+$ vel $-$ aliqua quantitate rationali et cognita facile fiet beneficio alterius aequationis dictum divisorem invenire: ut in hac aequa: $x^5 - fx^4 + bfx^3 \ldots \frac{1}{2}bbfx - \ldots po$
$+ 1\frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}bf$

27

ponendo

28

habeat, si non habeat, supponatur denuo litera aequalis alicui $\propto 0$ ~~in reliquis quantitatibus indicatis~~ atque sic porro usque dum communis divisor tam datae quam provenientis sit inventus quem desideramus erit divisor (uti hic $xx - 3bx + 10bb \propto 0$ quae c. d. provenientis $x^3 + 6bx + 30b^3 \propto 0$ ac datae aequationis) Tandem si divisor rationalis existat, poterit hac methodo quoque inveniri modo pro litera assumatur quantitas irrationalis. ~~Adde~~

Suppono omnes propositae aequationis (uti $x^4 - 6ax^3 + 4bcxx - 16abcx + 16bbca \propto 0$

$\begin{array}{llll} & +4ac & -16aac & +48aabc \\ & +16aa & -8aab & +32a^3c \\ & +4ab & -16a^3 & \end{array}$

quantitates in quibus eadem litera reperitur quaeque simul sic dividi possunt ut litera illa evanescat $\propto 0$ (uti hic primo in a erit $-16a^3x + 32a^3c \propto 0$ quae omnes quantitates per a^3 divisibiles facta divisione per a^3 oritur $-16x + 32c \propto 0$ sive $x - 2c \propto 0$) atque hoc in singulis literis instituo ~~factaque~~ semper ~~divisione~~ inquisitione num propositae aequatio resultantem dividi possit (uti hic $x - 2c$), quod si fieri possit ubi est hic haec ($x - 2c \propto 0$) ab omni fractione libera esset (quod semper si nulla fractio insint propositae aequationi fieri debet) ad aliam literam transire (puta b) quoniam autem hic una tantum quantitas existit $16bbca$ quam nullus valor ipsius x obtinere potest, nec haec ultimum terminum propositae aequationis dividere valet, ideo hanc transeo ac considero c ponendo $4bc\,xx - 16abcx + 16bbac$
$4ac \quad -16aac \quad +48aabc \propto 0$ dividendo
per $4bc + 4ac$ oritur $xx - 4ax + \frac{4ab}{4aa} \propto 0$ quam tentando invenit divisionem $+32a^3c$
fieri posse) idque in singulis literis vel unico tantummodo fieri potest (quod hic factum) quamquam alia quantitates in aequatione reperiantur, quae sic dividi possunt ut litera a nobis evanescat utpote supponendo $16aaxx - 16aacx + 48aabc \propto 0$
$-8aab$
itemque $-6a^3x^3 + 4ac\,xx - 16abx + 16bb \propto 0$ tantum id unico modo tentari
$+4ab$
nequit quippe interdum variis modis fieri potest et tunc illi prae aliis eligendi sunt, qui facillimas aequationes subministrant ~~vel quibus omnium brevissime ad quae~~ (breviorem viam ingressus essem assumendo quantitatem $-6ax^3 + 4acxx - 16abx + 16bbca \propto 0$ primo enim intuitu apparet eam per 6b dividi non posse sine fractione hanc suppositionem nulli usui futuram) vel quibus omnium brevissime ad quaesitum pervenire licet) vel modis omnibus quibus id fieri potest idque in singulis literis (quod quando ratione fieri debeat ex superioribus patet) ut autem statim cognoscam an propositae aequatio ejusmodi fieri divisibilis sit, tali modo procedo, sit $x^3 + \frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x - \frac{1}{2}a^3 \propto 0$ primum inquiro, ~~omnes illi~~ in illis

alias quantitates $+2b \quad + \frac{3}{4}aa \quad + \frac{1}{2}acc$ tes, in quibus haec ablata litera reliquas
$-cc \quad +2ab \quad -2cbb$ illa dividi possunt, ut ea ubique
$+ab \quad +2aab$
evanescat, ipsasque quae ibi sunt in unam summam colligo $-2bcc$ (uti $2bxx + abx + 2aab - 2bcc \propto 0$ div: per 2b
fit $xx + \frac{1}{2}ax + \frac{aa}{-cc} \propto 0$ itemque $\frac{2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + \frac{2abb}{-2cbb} \propto 0$ div: per $\frac{2bb}{a+c}$ fit xx

$+\frac{1}{2}ax \pm \frac{aa}{cc} \infty\ o$) quo facto si quotiens o idem sit cum praecedenti, quod diuisio examinetur, concludo hanc diuisionem fieri o posse (sive contrarium quidem
cum nobis sit $xx + \frac{1}{2}ax \pm \frac{aa}{cc} \infty\ o$) deinde si nullas amplius quantitates sunt in quibus dicta litera (b) reperitur, diuido nobismet illa ficta (xx
$+ \frac{1}{2}ax \pm \frac{aa}{cc} \infty\ o$) aequatione omnes reliquas quantitates, in quibus litera
illa o reperitur (ubi $x^3 + \frac{3}{4}\frac{aax}{cc} - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}acc$ ~~[illegible]~~) quae simul
per dictam fictam divisibiles sint futurae (ubi hic fit proveniens $x - \frac{1}{2}a$) signum
de in proposita aequatio quam divisibilis existat (Quotiens vero est
$x - \frac{1}{2}a + \frac{2bb}{a+c} + 2b \infty\ o$ ~~abundanti~~ manifestus) Eandem si diuisor
forte irrationalis existat eadem ratione inveniri potest, posita modo pro
litera (ubi nos hic dominus) quantitate irrationali. ~~[illegible]~~

4 Si in aequatione proposita litera cognita reperiatur quae in ultimo termino
o contineatur atque ea diuisibilis sit per x^4, xx, x^3 etc: + vel − aliqua quantitate ra-
tionali et cognita, facile erit beneficio alterius aequationis dictum diuisorem in-
venire (sit $x^5 - fx^4 + bfx^3 - 6bcdxx + \frac{1}{2}bbcfx - \frac{1}{2}bcf\ dbb \infty\ o$ ubi tantum opus
est ut omnes quantitates, in quibus f aeque multas habent dimensiones, ni-
hilo aequales ponantur, atque porro investigetur utriusque inventae scilicet et propo-
sitae aequationis communis diuisor, quocirca posita $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfxx + \frac{1}{2}$
$bbcfx \infty\ o$ si: $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bbc \infty\ o$ invenietur pro communi diuisore xx
$+ \frac{1}{2}bc \infty\ o$ sic etiam si proponatur haec aequatio $x^4 \begin{smallmatrix} -a \\ -b \\ +c \end{smallmatrix} x^3 \begin{smallmatrix} +aa \\ +ab \\ -ac \end{smallmatrix} xx + c^3x \begin{smallmatrix} -bc^3 \\ -baa + c^4 \\ +bac \end{smallmatrix} \infty\ o$
in qua a ultimo o continetur, posito $-ax^3$
$+abxx - acxx \infty\ o$ erit $x - b + c \infty\ o$ diuisor, utrique tentanda $x - b + c \infty\ o$ quoniam
nullus praeter hunc communis diuisor haberi potest. Eundem diuisorem obti-
nuissemus si quantitates omnes in quibus a est duarum dimensionum posuissemus
$\infty\ o$

Regula in eo consistit, ut, cum ultimam aequationem, quae omnes pro-
blematis conditiones comprehendat, praeterea ad hanc aliam sed alia
methodo investiges quae eidem omnes conditiones includat (experien-
tia n. constat in omnibus problematibus multos esse eorum diversos modos
ultimam aequationem inveniendi et ad pauciorum dimensionum aequatio-
nes si hunc quam si alium modum sequaris perveniendi, imo o tantum diversa
sed etiam eadem methodo utendo tandem in aequationem plurium aut pauciorum
dimensionum pervenies) adeo ut cum duas aequationes eandem incognitam
quantitatem includentes obtinueris earum communem diuisorem
inveniās; quemadmodum ex exemplo patebit.

Haec modum docet reducendi omnem aequationem rationalem Fractione et 2do termino carentem, quae dividi possit per aliam cujus 2dus terminus sit rationalis.

1. Experior num dividi possit per x + vel − aliquo divisore ultimi termini si vero hoc succedat, facio aequationem ejusdem formae, quam multiplicatione 2dae duo ex tot alijs paribus quot paria ibi sumi queunt, ~~ut productum totidem dimensiones quot paria ita sumi queunt~~ ut productum totidem habeat dimensiones quot proposita aequatio, non annumerando aequationem unius tantum dimensionis. ex: si aequatio proposita habeat 8 dimensiones considero duas aequationes habentes 2 et 6, 3 et 5, 4 et 4 dimensiones, aut si 9 dimensiones habeat, duas quae 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5 dimensionum fuerint ex quarum multiplicatione proposita possit produci ~~3tio~~

2do Post hoc transmuto propositam aequationem in aliam cujus incognitae quantitates desiguet quantitatem 2di termini unius harum duarum aequationum, quae (si inaequalium dimensionum fuerint) pauciores dimensiones habeat

3tio r[illegible] num inventa aequatio divisibilis sit per incognitam quantitatem + vel − aliquo divisore ultimi sui termini

~~[illegible]~~ patebit

Sumamus eg. aequationem 4tuor dimensionum unde qua ratione in alijs procedendum sit

$x^4 * + pxx + qx + r \propto 0$ quam ponamus ortam esse ex multiplica: sequentium

$xx + yx + t \propto 0$

$xx - yx + u \propto 0$

$$\begin{array}{l} x^4 + yx^3 + txx \\ \quad - yx^3 - yyxx + ytx \\ \qquad + uxx + uyx + ut \\ \hline x^4 * \quad + pxx + qx + r \propto 0 \end{array}$$

Hinc proveniunt 3 aequationes

$p \propto t - yy + u$ 1ma.

$q \propto - yt + uy$ 2da.

$r \propto ut$ 3tia.

Ex primam fit $t \propto p + yy - u$

qui valor in locum ipsius t in reliquis aequationibus subrogetur habebitur

pro 2da $q \propto - py - y^3 + 2uy$ ex 2da fit $u \propto \frac{q + py + y^3}{2y}$ qui in

tertia $r \propto uy + uyy - uu$

Cor in reliqua aequatione substitutus exhibet

$y^6 + 2py^4 + \underset{-4r}{pp}yy - qq \propto 0$. cum autem antea supponebatur

propositam aequationem resultasse ex multiplicatione

$xx + yx + t \propto 0$ si jam loco $\left\{\begin{array}{l} t \\ u \end{array}\right.$ ponatur $\begin{array}{l} \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \\ \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \end{array}$ habebitur

$xx - yx + u \propto 0$

$xx + yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ et hanc aequatio nem ~~[illegible]~~ aliciter regula omnes re

$xx - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \propto 0$ ~~regula, aequationes quidem~~ ducibiles

ita quadraticas reducendi ~~[illegible]~~

~~aequationis~~: tali modo

si sit $x^4 * pxx\ qx.\ r \propto 0$ ponatur haec cubica aequatio

$y^6\ 2py^4 + \underset{4r}{pp}yy - qq \propto 0$ quoad signa ~~[illegible]~~ − hic o appo

sita haec ita assumantur:

33

Si sit $\begin{smallmatrix}+q\\+r\end{smallmatrix}$ ponatur $\begin{smallmatrix}+2p\\-4r\end{smallmatrix}$ alias $\begin{smallmatrix}-2p\\+4r\end{smallmatrix}$ e.g. quibus si habeamus

$x^4 * -4xx - 8x + 35 \infty 0$ scribatur $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ itemque si habeamus

$x^4 * -17xx - 20x - 6 \infty 0$ scribatur $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \infty 0$ non aliter

si habeamus $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$ auferendo secundum terminum

juxta priora erit $z^4 * \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^3\\-acc\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix} \infty 0$ loco cujus ponendum erit

$y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty 0$ quia p est $\frac{1}{2}aa - cc$ et pp est $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$ et $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$ ac tandem $-qq$ est $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$

Jam ex hac cubica aequatione quaerendus est valor yy methodo jam explicata. Quod si vero non inveniri possit non opus erit ulterius progredi, infallibiliter enim sequitur Problema esse Solidum; Si autem inveniatur poterit ejus beneficio aequatio praecedens in duas alias dividi, in quarum utraque incognita quantitas duas tantum dimensiones habeat, quarumque radices eaedem illis radicibus non differant. Nimirum loco Aequationis

$x^4 * pxx . qx . r \infty 0$ scribendae sunt duae aliae

$xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . -\frac{q}{2y} \infty 0$ signa + et − non apposita sic collocabis:

$xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p \; \frac{q}{2y} \infty 0$

si habeatur $\begin{smallmatrix}+p\\+q\end{smallmatrix}$ ponatur in utraque $+\frac{1}{2}p$ alias $-\frac{1}{2}p$: ceterum contra $+\frac{q}{2y}$ in qua $-yx$ est ubi $+yx$ scribatur $-\frac{q}{2y}$ et sic aliter

e.g. quia pro $x^4 * -17xx - 20x - 6 \infty 0$ ponendo $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \infty 0$ invenitur $yy \infty 16$ hinc loco prioris aequationis scribendae sunt hae duae aequationes

$xx - 4x - 3 \infty 0$ et $xx + 4x + 2 \infty 0$ e quibus binis aequationibus si extrahuntur radices invenientur eaedem omnes quae dicuntur ex ea in qua habetur x^4.

Nimirum una vera $\sqrt{7} + 2$ et tres falsae $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$.

Similiter si habeatur $x^4 * -4xx - 8x + 35 \infty 0$ quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ est 16 hinc scribere oportet

$xx - 4x + 5 \infty 0$ et $xx + 4x + 7 \infty 0$ radices autem harum aequationum omnes erunt imaginariae, atque adeo conclusio impossibilis. Non secus si habemus

$z^4 * \begin{smallmatrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^3\\-acc\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{smallmatrix} \infty 0$ quia pro yy invenitur $aa + cc$

scribendum est $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$ et

$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$ unde cognoscitur

34 valorem ipsius z esse $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ vel

denique siquidem fuerit $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ et quoniam

$z + \frac{1}{2}a \infty x$ invenitur $x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Vide exemp.:

Notanda hic quaedam

1 hac eadem ratione aequationibus plurium dimensionum applicare prode[st]. autem scire hanc positionem $xx - yx - u \propto 0$ paulo faciliorem reddere operationem:

2 quomodo eadem Regula pro aequationibus tali modo constitutis alia ad hunc methodum veniantur. nimirum: sit aequatio prop: $x^4 * pxx + qx + r \propto 0$ & inquiratur num dividi possit per aequationem cui nullus terminus deficit, ut nempe $xx + yx + u \propto 0$ si itaque per eam divisibilis sit erit $xx \propto -yx - u$ quo valore ipsius xx ubique in locum xx subrogato, resultabit aequatio in qua x unam tantum habebit dimensionem nimirum:

$xx \propto -yx - u$
$xx \propto -yx - u$

$x^4 \propto yyxx + 2uyx + uu$ f: $-y^3x - yyu$
$+2uyx + uu$
$pxx \propto$ - - - - - - - - - $-pyx - pu$
$qx \propto$ $+qx + r$

Deinde pono singulos terminos $\propto 0$ adeo ut binas habeam

has duas aequa: $-y^3 + 2uy - py + q \propto 0$ & $-yyu + uu - pu + r \propto 0$ easdem quae praecedenter reda[?] ita ut per eodem modo ibi per primam inventa ac in secunda restituta manifestaris $y^6 + 2py^4$ &c.

3 Quod ~~eadem~~ Regula etiam inveniri possint reducendi tali modo aequationes licet secundus terminus non ablatus fuerit, ex exemplo ostendemus in Quadrato quadratis, unde qua ratione in aliis sit procedendum facile colligetur. sit

$x^4 + px^3 + qxx + rx + s \propto 0$ supponimus eam esse ex multiplicatione harum

$xx + ux + e \propto 0$
$xx + tx + f \propto 0$

$x^4 + ux^3 + exx$
$+ tx^3 + utxx + etx$
$+ fxx + ufx + ef$

$x^4 + px^3 + qxx + rx + s \propto 0$

hinc obtinemus aequationes
$p \propto u + t$
$q \propto e + ut + f$
$r \propto et + uf$
$s \propto ef$:

ponamus $e + f \propto y$ hinc cum prima sit $u \propto p - t$ hoc ubique subrogato in locum u habebis

$q \propto y + pt - tt$ & $t \propto \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}$ cumque jam positum hinc $u \propto \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}$

sit $e + f \propto y$ erit $y - f \propto e$ quo subrogato in locum e ac ~~t~~ u loco inventarum quantitatum & u. erit

$r \propto \frac{1}{2}py + y\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} - 2f\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}$ ac

$\frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \propto f$ ac $\frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \propto e$

hinc $s \propto \frac{1}{4}yy - \frac{\frac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y}$ quae resoluta erit.

$y^3 - qyy - 4sy - pps \atop {\quad\quad\;\; + pr \;\; + 4qs \atop \quad\quad\quad\quad\quad - rr} \infty 0$ hinc loco $xx + yx + e \infty 0$ / $xx - yx + f \infty 0$ scribantur

$$xx + \tfrac{1}{2}px - x\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} + \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0$$

$$xx + \tfrac{1}{2}px + x\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0$$

Quod si vero valor quaesitus y non sit ∞ alicui ex divisoribus ultimi termini $-pps + 4qs - rr$ non poterit aequatio proposita ulterius quam ad tres dimensiones reduci:

Hinc talis elicitur regula ad omnes reducibiles quadrato quadratas aequationes reducendi: si habeatur

$x^4 \; px^3 . \; qxx . \; rx . \; s . \infty 0$ scribatur

$y^3 \; qyy . \; {4sy \atop pr} . \; {pps \atop {4qs \atop -rr}}$ signa huius aequationis hac ratione assumantur.

si sit ${+q \atop +s}$ ponatur ${-q \text{ alias } + \atop -4s \text{ et } -pps \text{ alias ubique } +}$

si sit ${+p \atop -p}{+r \atop -r}$ ponatur $+pr$ signis vero existentibus $+$ et altero $-$ priori $-$ posteriori $+$ ponatur $-pr$

Tandem si sit ${+q \atop -q}{+s \atop -s}$ ponatur $+4qs$: signis vero diversis $-4qs$:

tum scribatur

$$xx \; \tfrac{1}{2}px + x\sqrt{\tfrac{1}{4}pp . q . y} \;\; \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}yp . r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp . q . y}} \infty 0$$

$$xx \; \tfrac{1}{2}px - x\sqrt{\tfrac{1}{4}pp . q . y .} \;\; \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}yp . r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp . q . y}} \infty 0$$

si adsit ${+p \atop +q}$ ponatur ${+\tfrac{1}{2}p \atop -q}$ alias $-$

si valor y inventus vera ponatur $+y$ et $+\tfrac{1}{2}y$ alias y

si sit ${+y \atop -y}{+p \atop -p}$ ponatur $+\tfrac{1}{2}yp$ signis vero diversis $-\tfrac{1}{2}yp$:

Sic si habeantur $x^4 * * - 12x - 5 \infty 0$ obtinebimus

$y^3 * + 20y - 144 \infty 0$ nam $p \infty q \infty r \infty -12$ $s \infty -5$ hoc divisibilis est per $y - 4 \infty 0$ itaque loco duarum aequationum habeantur.

$xx + 2x + 5 \infty 0$ et $xx - 2x - 1 \infty 0$

Similiter si proponatur aequatio literalis

$x^4 - 2ax^3 {+2aa \atop -cc} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$ erit $p \infty -2a$ $q \infty 2aa - cc$

$r \infty -2a^3$ $s \infty a^4$ unde scribenda $y^3 {-2aa \atop +cc} yy * - 4a^4cc \infty 0$ quae divisibilis est per $y - 2aa \infty$ ita ut loco duarum aequationum habeantur:

$xx - ax + x\sqrt{aa + cc} \; + aa \infty 0$

$xx - ax - x\sqrt{aa + cc} \; + aa \infty 0.$

8 Ex prioribus jam satis efficitur est aliud aequationes plurium Dimensionum ~~tali~~ semper conjiciendae ex multiplicatione duarum vel plurium aequationum arbitrariarum

si jam certas conditiones harum quas illa esse multiplicatas supponimus nobis notae

sit hoc ad reductionem earum adjumento esse poterit, nihil aliud faciendo, quam multiplicatis aequationibus taliter conditionatis comparationes instituendo inter terminos hinc provenientis aequationis et alicujus alterius assumptae vel propositae quod jam exemplis in prioribus illustratum ac iisdem deinceps clarius explicandum videbitur, ~~sit jam regula~~ cubicam hac vice regulam docebo

ad reducendum omnem aequationem sive literalem sive numeralem, quae per aliam cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest; ostendetque hoc exemplo unde regula generalis facile elici potest

sit $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 = 0$ debetque illam dividi posse per aequationem duarum dimensionum cujus ultimus terminus -2 sit illa $xx + yx - 2 = 0$ seu: $xx = -yx + 2$

hunc valorem ipsius xx ubique substituo in ejus locum in priori ac obtineo:

$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5$ in x, $-2y^3 - 8yy - 16y - 16 = 0$ quod sequens operatio manifestat

$xx = -yx + 2$

$x^4 = yyxx - 4yx + 4$ seu $-y^3x + 2yy - 4yx + 4$

$x^5 = -y^3xx + 2yyx - 4yxx + 4x$ seu:

$-4x^4$

$+4x^3 = -4yxx + 8x$ seu:

$1\frac{1}{2}xx$

$-7x - 3$

$+y^4x - 2y^3$
$+2yyx + 4$
$+4yyx - 8y$
$+4yyx - 8y$
$+4y^3x - 16$
$+16yx - 8yy$
$+4yyx - 8y$
$+4x$
$-1\frac{1}{2}yx + 3$
$-7x - 3$

Summa:

$y^4x - 2y^3$
$4y^3 - 8yy$
$19yy - 16yy$
$14\frac{1}{2}y - 16$ $= 0$

jam considero utrumque terminum separatum aequationis hujus deductae $= 0$ et cum hic duntaxat terminis habebo inde duas aequationes

$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5 = 0$

$-2y^3 - 8yy - 16y - 16 = 0$

seu: $y^3 + 4yy + 8y + 8$.

Quarum quaero aequationum communem Divisorem maximum: quaeretur invenietur $y + 2 = 0$ ita ut proposita aequatio cum y sit $= -2$ divisibilis sit per $xx - 2x - 2 = 0$

Eodem modo proponatur haec aequatio

$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$ ($-cc$) debetque dividi posse per aequationem duarum dimensionum cujus ultimus terminus aa, esto aequatio illa $xx + yx + aa = 0$ adeoque $xx = -yx - aa$

quae restituta in priori exhibet $-y^3x - aayy = 0$ ($-2ayy - 2a^3y$, $+ccy + aacc$) cujus si unumquemque separatim terminum considero $= 0$ habebimus duas aequationes

~~$-yy - 2ay + cc = 0$~~

$-y^3 - 2ayy + ccy = 0$ et $-aayy - 2a^3y + aacc = 0$

seu: $-yy - 2ay + cc = 0$ seu $-yy - 2ay + cc = 0$

harum igitur communis mensura est $-yy - 2ay + cc = 0$ quaero hinc valorem y invenioque $y = -a \pm \sqrt{aa+cc}$ ac proinde aequationem propositam divisibilem per $xx - a \pm \sqrt{aa+cc}$ in $x + aa = 0$.

Similiter si debeat haec aequatio

$x^5 * + bbx^3 + 3aabbxx * + 2ab^4 \propto 0$ esse divisibilis per aliam 3 dimens.
$\quad\ + ab \quad - 2a^3$

sionum cujus 3tius terminus sit $+2aax$ pono pro ipsa

$x^3 + yxx + 2aax + z \propto 0$ s. $x^3 \propto -yxx - 2aax - z$, quo valore ubique in

locum x^3 in proposita aequatione subrogato obtinebitur

$$\begin{array}{llll} -zxx & +yzx & +aaz & \\ +3aay & +2a^4 & -yyz & \propto 0 \\ -y^3 & -2aayy & -bbz & \\ -bby & -2aabb & +2ab^4 & \\ +3aab & & & \\ -2a^3 & & & \end{array}$$

Quoniam autem haec aequatio 3 habet separatos terminos habebuntur inde 3 aequationes.

1ma

$-z + 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3 \propto 0$

2da — 3tia

$yz + 2a^4 - 2aayy - 2aabb \propto 0$ aut $aaz - yyz - bbz + 2ab^4 \propto 0$ hinc per

1mam sublata z quae est $3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$ invenietur pro 2da

$-y^4 * + aayy + 3abby - 2aabb \propto 0$ pro 3tia $y^5 * - 4aay^3 + 2a^3yy + 3a^4y + 5a^3bb \propto 0$
$\qquad - bb \quad - 2a^3 \quad + 2a^4 \qquad\qquad + 2bb \quad - 3abb \quad - 4aabb \quad - 2a^5$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^4 \quad - ab^4$

quarum duarum maxima communis mensura est $y - a \propto 0$ ideoque y pa-

cuius est sit $\propto 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$ erit inde $z \propto 2abb$ aequatio per quam

proposita dividi potest erit $x^3 + axx + 2aax + 2abb \propto 0$ atque ita de omnibus ae-

quationibus sive rationalibus sive irrationalibus, sive fractiones haben-

tibus sive etiam atque etiam sive ultimus terminus sive aliquis alius quemlibet

datus fuerit, sive alicui quantitati (ut in his exemplis) sive nihilo $\propto$ sit.

idem comparatione aequationum invenitur.

¶ Haec modum docet reducendi omnes aequationes sive literales sive nu-

merales sive fractiones sive signa radicalia habuerint, quae produci pos-

sunt ex Multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus plures-ve

termini deficiunt

Praevitatis ergo quantitate cognita 2di termini adfecta suis signis $+$

et $-$ vocabo f 3tius g, 4ti, 5ti, sabit hic deinceps. eg: in hac aequatione

$x^4 - 2ax^3 - 4bbxx + 6abbx - 4a^4 \propto 0$ erit $-2a + 3b \propto f$ $-4bb \propto g$ $+6abb$
$\quad\ + 3b \qquad\qquad + 2aab$

$+2aab \propto r$ $-4a^4 \propto s$ et $+2a - 3b \propto -f$ $+4bb \propto -g$ etc.

2 Pars.

Si aliqua aequatio 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit

ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis,

altera vero uno pluribusve terminis careat; erit ejus formula aliqua ex

sequentibus et poterit dividi vel per unamquamque aequationem sibi adjunctam

si habet coexistentes formulam et vel per aliquam harum ubi distinguuntur per

regulam vel, quo vero constat ~~gradi~~ ratio easdem inveniendi, unico

vel altero exemplo hoc enucleabimus

Multiplicatio in se invicem duabus sequentibus aequationibus

$x^3 + exx + fx + g \propto 0$

$x + h \propto 0$

$x^4 + ex^3 + fxx + gx$

$+ hx^3 + hexx + hfx + gh$

Provenit $x^4 + px^3 + qxx + rx + s \propto 0$

Ponatur jam $e \propto 0$ et erit

$p \propto h$ hinc $r \propto g + pq$

$q \propto f$ et $g \propto r - pq$

$r \propto g + hf$ ∴ $s \propto hr - hpq$

$s \propto gh$

unde $h \propto \frac{s}{r - pq}$

si jam ~~hasce~~ inventas quantitates loco h substituamus habebimus $x + p$ et $x + \frac{s}{r - pq}$ quibus aequatio $x^4 + px^3 + qxx + rx + s \propto 0$ dividi potest.

Ponatur 2do $f \propto 0$ et erit

1 $p \propto h + e$ hinc ex 4ta et 3tia $s \propto rh$ et $h \propto \frac{s}{r}$

2 $q \propto he$ item $e \propto p - h$

3 $r \propto g$ unde 2da $q \propto hp - hh$

4 $s \propto gh$ et $h \propto \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$

Divisores itaque erunt

$x + \frac{s}{r} \propto 0$

$x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q} \propto 0$

Ponatur e et f $\propto 0$ et erit

1 $p \propto h$ propter 2dam 3tia

2 $r \propto g$ erit $s \propto ph$

3 $s \propto gh$ unde $h \propto \frac{s}{r}$

hinc Divisores erunt

$x + p \propto 0$

$x + \frac{s}{r} \propto 0$

Cum itaque nullae literae in aequatione $x^3 + exx + fx + g \propto 0$ supponi possint 0 quippe quae hac ratione ad pauciores dimensiones redigere (sint n: f et g $\propto 0$ erit $x^3 + exx \propto 0$ s: $x + e \propto 0$ itemque et $x^3 + exx + fx \propto 0$ s: $xx + ex + f \propto 0$) atque divisores $x + p$ et $x + \frac{s}{r}$ in omni fere suppositione occurrant, sequitur aequationem taliter conditionatam posse dividi ~~[illegible]~~ per aliquem harum quod alias existentibus iisdem in omni suppositione quamquam harum fieri potuisset. Ad clariorem sequentium intelligentiam: sit quoque $f \propto 0$ et $p \propto 0$ hinc

$p \propto e + h \propto 0$ et $e \propto -h$

$q \propto eh$ s: $q \propto -hh$ s: $\sqrt{-q} \propto h$

$r \propto g$

$s \propto gh$ s: $s \propto rh$ et $\frac{s}{r} \propto h$

Unde divisores inventi erunt restituto h

$x + \sqrt{-q} \propto 0$

$x + \frac{s}{r} \propto 0$

atque ita de aliis omnibus

$x^3 . pxx . qx . r \propto 0$ per $x + p \propto 0$ et $x + \frac{r}{q} \propto 0$

$x^4 . px^3 . qxx . rx . s \propto 0$ per $x + p \propto 0$ vel $x + \frac{s}{r} \propto 0$

$x^4 * . qxx . rx . s \propto 0$ per $x + \frac{s}{r} \propto 0$ et $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$

$x^4 . px^3 . * . rx . s \propto 0$ per $x + p \propto 0$ et $x + \frac{s}{r} \propto 0$

$x^4 . px^3 . qxx . * . s \propto 0$ per $x + p \propto 0$ et $x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} \propto 0$

$x^5 . f x^4 . g x^3 . r xx . s x . t \propto 0$ $f x + \frac{t}{s} \propto 0$ vel $x + \frac{t}{s} \propto 0$ vel $x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$

$x^5 . * . g x^3 . r xx . s x . t \propto 0$ $f x + \frac{t}{s} \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$

$x^5 . f x^4 . * . r xx . s x . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{t}{s} \propto 0$

$x^5 . f x^4 . g x^3 . * . s x . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{t}{s} \propto 0$

− $x^5 . f x^4 . g x^3 . r xx . * . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$

$x^5 . * . * . r xx . s x . t \propto 0$ $f x + \frac{t}{s} \propto 0$ $\partial x + \sqrt[c]{r} \propto 0$.

1 $x^5 . * . g x^3 . * . s x . t \propto 0$ $f x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$ 2

2 $x^5 . * . g x^3 . r xx . * . t \propto 0$ $f x + \frac{t}{s} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ 1

$x^5 . f x^4 . * . * . s x . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ $\partial x + \frac{t}{s} \propto 0$.

− $x^5 . f x^4 . * . r xx . * . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$

$x^5 . f x^4 . g x^3 . * . * . t \propto 0$ $f x + f \propto 0$ $\partial x + \sqrt[c]{\frac{t}{g}} \propto 0$

$x^6 - f x^5 . g x^4 . r x^3 . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$
vel $x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$
vel $x + \frac{t}{2s} \; \delta \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{u}{s}} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . r x^3 . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ vel $x + \frac{t}{2s} \; \delta \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{u}{s}}$

$x^6 . f x^5 . * . r x^3 . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x + \frac{t}{2s} \; \delta \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{u}{s}} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . * . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{u}{t}$ vel $x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . r x^3 . * . t x . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . r x^3 . s xx . * . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-\frac{u}{s}} \propto 0$ vel $x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$

$x^6 . * . * . r x^3 . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x + \sqrt[c]{r} \propto 0$.

$x^6 . * . g x^4 . * . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . r x^3 . * . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . r x^3 . s xx . * . u \propto 0$ $f x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-\frac{u}{s}} \propto 0$.

$x^6 . f x^5 . * . * . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + f$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . * . r x^3 . * . t x . u \propto 0$ $f x + f$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . * . r x^3 . s xx . * . u \propto 0$ $f x + f$ vel $x \; \delta \sqrt{-\frac{u}{s}} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . * . * . t x . u \propto 0$ $f x + f$ vel $x + \frac{u}{t} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . * . s xx . * . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ vel $x \; \delta \sqrt{-\frac{u}{s}} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . r x^3 . * . * . u \propto 0$ $f x + f$ vel f ubrig ~~duarum~~ duarum $x + \sqrt[c]{\frac{u}{r}} \propto 0$
$x + \frac{1}{2} f \; \delta \sqrt{\frac{1}{4} ff - g} \propto 0$

$x^6 . * . * . * . s xx . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ $\partial x - \frac{ft^3}{u^3} \propto 0$ $\partial x \; \delta \frac{u}{t} \sqrt{-s} \propto 0$
$\partial x - \sqrt[c]{\frac{st}{u}} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . * . * . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . r x^3 . * . * . u \propto 0$ $f x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{= g} \propto 0$

$x^6 . * . * . r x^3 . * . t x . u \propto 0$ $f x + \frac{u}{t} \propto 0$ $\partial x + \frac{u}{gr} \propto 0$ $\partial x + \sqrt[c]{r} \propto 0$

$x^6 . * . * . r x^3 . s xx . * . u \propto 0$ $f x - \frac{rs}{u} \propto 0$ ∂ ~~$x \; \delta \; \frac{u}{s}$~~ $\propto 0$ $x \sqrt[c]{r} \propto 0$

$x^6 . * . g x^4 . * . s xx . * . u \propto 0$ $f x \; \delta \sqrt{-g} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{-\frac{u}{s}} \propto 0$ $\partial x + \sqrt[c]{r} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . * . * . * . t x . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{= \frac{u}{t}} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . * . * . s xx . * . u \propto 0$ $f x + f$ $\partial x + \frac{u}{t} \propto 0$ $\delta \sqrt{= \frac{u}{s}} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . * . r x^3 . * . * . u \propto 0$ $f x + f$ $\partial x + \sqrt[c]{\frac{u}{r}} \propto 0$ $\partial x + \frac{u}{ffr} \propto 0$

$x^6 . f x^5 . g x^4 . * . * . * . u \propto 0$ $f x + f \propto 0$ $\partial x - \frac{u}{g} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{= \frac{u}{g}} \propto 0$ $\partial x \; \delta \sqrt{\sqrt{-\frac{u}{g}}}$

42

Quæ etiam breviter sic disponi potuissent: e

$x^3 . pxx . qx . r . ꝏ 0$ ꝑ $x + p ꝏ 0$ ∂ $x + \frac{r}{q} ꝏ 0$

A. $x + p ꝏ 0$ B $x + \frac{s}{r} ꝏ 0$

C $x ∂ \sqrt{-\frac{s}{q}} ꝏ 0$ D $x ∂ \sqrt{-q} ꝏ 0$

Si in æquatione x^4 nullus terminus deficit potest dividi ꝑ a et b si deficit

p. ꝑ a et d

q. a et b

r a et c

A $x + q ꝏ 0$. B $x + \frac{t}{s} ꝏ 0$

C $x + \frac{1}{2}p ∂ \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} ꝏ 0$

D $x ∂ \sqrt{-\frac{t}{r}} ꝏ 0$ E $x ∂ \sqrt{-q} ꝏ 0$

F $x + \sqrt{c}\,\frac{t}{q} ꝏ 0$ G. $x + \sqrt{c}\, r ꝏ 0$

Si in æquatione x^5 nullus terminus deficit potest dividi ꝑ a, vel b vel c si deficit:

p - - - - - - - b vel d

q - - - - - - - a vel b

r - - - - - - - a vel b

s - - ꝑ - - - - a vel d

p.q - - - - - - b et g

p.r - - - - - - e et d

ps - - - - - - b et e

qr - - - - - - a et b

qs - - - - - - a et d

rs - - - - - - a et f.

A $x + p ꝏ 0$. B $x + \frac{u}{t} ꝏ 0$. C $x ∂ \sqrt{-q} ꝏ 0$

D. $x + \frac{1}{2}p ∂ \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} ꝏ 0$. E. $x + \frac{t}{4} ∂ \sqrt{\frac{tt}{16} - \frac{u}{s}} ꝏ 0$

F $x ∂ \sqrt{-\frac{u}{s}} ꝏ 0$ G $x + \frac{u}{s} ꝏ 0$ H $x + \sqrt{c}\, r ꝏ 0$

I $x + \sqrt{c}\,\frac{u}{r} ꝏ 0$ K $x - \frac{st}{u} ꝏ 0$ L $x ∂ \frac{t}{u}\sqrt{-s} ꝏ 0$

M $x - \sqrt{c}\,\frac{st}{u} ꝏ 0$ N $x ∂ \sqrt{\sqrt{-s}} ꝏ 0$ O $x - \frac{u}{qr}$

P. $x \sqrt{c}\, r ꝏ 0$ Q. $x - \frac{rs}{u} ꝏ 0$ R $x + \frac{u}{ppr} ꝏ 0$

S $x - \frac{u}{p^3 q} ꝏ 0$ T $x ∂ \sqrt{-\frac{u}{ppq}} ꝏ 0$ V. $x ∂ \sqrt{\sqrt{-\frac{u}{q}}} ꝏ 0$

Si in æquatione x^6 nullus terminus deficit potest e. dividi ꝑ a vel b vel d, vel e, si deficit

p - - - - - - - b vel c vel e

q . . . . a vel b vel e

r . . . . a vel b vel d

s - - - - - - - a vel b vel d

t - - - - - - - a vel f vel d

pq - - - - - - g vel h

pr - - - - - - b vel c

ps - - - - - - b vel c

pt ꝑ - - - - c vel f.

qr . . . . . . a vel b

qs - - - - - - a vel b

qt . . . . . . a vel f

qſ . . . . . . a vel b

rſ . . . . . . a vel f

ſ.t . . . . . . a vel i et d.

pqr . . . . . b et k et l, et m et n.

pqs . . . . . b et r.

pqt . . . . . g et f et g:

prs . . . . . b et t

prt . . . . . f et f

pst . . . . . c et d et h.

qrs . . . . . a et b

qrt . . . . . a et f

qst . . . . . a et i et r

rst . . . . . a et s et t et n.

43

2da Pars

Si aliqua aequatio 6 aut pauciores dimensiones habens, produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit duarum vel plurium dimensionum, ac duorum tantum terminorum, erit ejus formula aliqua ex sequentibus, positis iisdem prout antea dictum.

x f xx & quantitate aliqua cognita

$x^3 \cdot fxx \cdot gx \cdot r \cdot \propto 0$	$f\ xx + y \propto 0$ (vel $x + y \propto 0$);
$x^4 \cdot fx^3 \cdot gxx \cdot rx \cdot s \cdot \propto 0$	$f\ xx + \frac{r}{g} \propto 0$ vel $xx + \frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$
$x^4 \cdot$ [illegible] $\cdot gxx \cdot$ [illegible] $\cdot s \propto 0$	$f\ xx + \frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$ vel $xx + \frac{1}{2}g - \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$
$x^4 \cdot fx^3 * \cdot rx \cdot s \propto 0$	$f\ xx + \frac{r}{f} \propto 0$ vel $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$
$x^4 * \cdot * \cdot * \cdot s \propto 0$	$f\ xx + \sqrt{-s} \propto 0$ vel $xx - \sqrt{-s} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 \cdot gx^3 \cdot rxx \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx + \frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$ vel $xx + \frac{r}{2g} \pm \sqrt{\frac{rr}{4gg} - \frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 \cdot gx^3 \cdot rxx \cdot * \cdot t \propto 0$	$f\ xx + y \propto 0$ vel $xx + \frac{r}{2g} \pm \sqrt{\frac{rr}{4gg} - \frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 \cdot gx^3 \cdot * \cdot * \cdot t \propto 0$	$f\ xx + g \propto 0$ vel $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 \cdot$ [illegible] $\cdot gx^3 \cdot rxx \cdot * \cdot t \propto 0$	$f\ xx + g \propto 0$ vel $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 * \cdot * \cdot rxx \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx + \frac{t}{r} \propto 0$ vel $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$
$x^5 * \cdot gx^3 \cdot rxx \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx + \frac{t}{r} \propto 0$ vel $xx + \frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 * \cdot * \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$ vel $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 \cdot * \cdot rxx \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$ vel $xx + \frac{r}{2g} \pm \sqrt{\frac{rr}{4gg} - \frac{t}{g}} \propto 0$
$x^5 \cdot fx^4 \cdot gx^3 \cdot * \cdot sx \cdot t \propto 0$	$f\ xx \pm \sqrt{-\frac{t}{g}} \propto 0$ vel $xx + \frac{1}{2}g \pm \sqrt{\frac{1}{4}gg - s} \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot * \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	... $\frac{r}{2g} \pm \sqrt{\frac{rr}{4gg} - \frac{t}{g}} \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot$ [illegible] $\cdot rx^3 \cdot * \cdot tx - u \propto 0$	... vel $xx + \sqrt{c}\, u \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot * \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot * \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot * \cdot * \cdot u \propto 0$	$f\ xx + \frac{r}{g} \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot * \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot * \cdot rx^3 \cdot * \cdot * \cdot u \propto 0$	... vel $\sqrt{c}\, u \propto 0$
$x^6\ \cancel{*} \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 * \cdot * \cdot rx^3 \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 * \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0$	$f\ xx + \frac{t}{r} \propto 0$
$\cancel{x^6 \cdot gx^4 \cdot rx^3 \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0}$	
$x^6 \cdot * \cdot * \cdot rx^3 \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0$	... vel $xx + \sqrt{c}\, u \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot * \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot gx^4 \cdot * \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0$	$f\ xx \pm \sqrt{-\frac{t}{g}} \propto 0$
$x^6 \cdot fx^5 \cdot * \cdot * \cdot sxx \cdot tx \cdot u \propto 0$	
$x^6 \cdot fx^5 \cdot * \cdot * \cdot * \cdot tx \cdot u \propto 0$	.. vel $xx \pm \sqrt{c}\, u \propto 0$
$x^6 * \cdot gx^4 \cdot * \cdot sxx * \cdot u \propto 0$	$f\ xx + y \propto 0$ existente $y^3 - gyy + sy - u \propto 0$.
$x^6 * \cdot * \cdot * \cdot sxx * \cdot u \propto 0$	$f\ xx + y \propto 0$ existente $y^3 * sy - u \propto 0$
$x^6 * \cdot gx^4 \cdot * \cdot * \cdot * \cdot u \propto 0$	$f\ xx + y \propto 0$ existente $y^3 - gyy * - u \propto 0$
$x^6 * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot * \cdot u \propto 0$	$f\ xx + \sqrt{c}\, u \propto 0$.

2do si x^3 cum quantitate aliqua cognita $\propto 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ — si $x^3 + r \propto 0$ vel $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$ (vel $x + p \propto 0$)

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ — si $x^3 + r \propto 0$, $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$ vel $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ (vel

$x^5 * qx^3 rxx * t \propto 0$ — si $x^3 + r \propto 0$ vel $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ (vel $xx + q \propto 0$)

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ vel $x^3 + \frac{1}{2}r$ cS $\sqrt{\frac{1}{4}rr - u} \propto 0$

$x^6, px^5, qx^4 *, sxx, tx, u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ vel x^3 cS $\sqrt{-u} \propto 0$

$x^6, px^5 * * sxx * u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$ vel x^3 cS $\sqrt{-u} \propto 0$

$x^6, px^5 * rx^3 sxx * u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$ vel $x^3 + \frac{1}{2}r$ cS $\sqrt{\frac{1}{4}rr - u} \propto 0$

$x^6 *, qx^4 * * tx, u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ vel x^3 cS $\sqrt{-u} \propto 0$

$x^6 *, qx^4, rx^3 * tx, u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$ vel $x^3 + \frac{1}{2}r$ cS $\sqrt{\frac{1}{4}rr - u} \propto 0$

$x^6 * * rx^3 * * u \propto 0$ — si $x^3 + \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - u}$ vel $x^3 + \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - u}$

$x^6 * * * * * u \propto 0$ — si $x^3 + \sqrt{-u} \propto 0$ vel $x^3 - \sqrt{-u} \propto 0$

3tio si x^4 cum quantitate aliqua cognita $\propto 0$

$x^5, px^4 * * sx, t \propto 0$ — si $x^4 + s \propto 0$ vel $x^4 + \frac{t}{p} \propto 0$ (vel $x + p \propto 0$).

$x^6, px^5, qx^4 *$ sxx ~~$tx\,u \propto 0$~~ — si $x^4 + s \propto 0$, $x^4 + \frac{t}{p}$ vel $x^4 + \frac{u}{q} \propto 0$

$x^6 * qx^4 *$ sxx ~~tx~~ $u \propto 0$ — si $x^4 + s \propto 0$ vel $x^4 + \frac{u}{q} \propto 0$ ($xx + q \propto 0$)

4to si x^5 cum quantitate aliqua cognita $\propto 0$

$x^6, px^5 * * * tx, u \propto 0$ — si $x^5 + t \propto 0$ vel $x^5 + \frac{u}{p} \propto 0$ (vel $x + p \propto 0$).

Quo autem ratio haec inveniendi constet sit

$$x^3 + exx + fx + g \propto 0$$
$$xx + h \propto 0$$
$$x^5 + ex^4 + fx^3 + gxx + hx^3 + ehxx + fhx + gh$$
$$x^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t \propto 0$$

eritque $p \propto e$
$q \propto f + h$ s: $q - h \propto f$
$r \propto g + eh$ s: $r - ph \propto g$
$s \propto fh$ s: $s \propto qh - hh$ s: $h \propto \frac{1}{2}q$ cS $\sqrt{\frac{1}{4}qq - s}$
$t \propto gh$ s: $t \propto rh - phh$ s: $h \propto \frac{r}{2p}$ cS $\sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}}$

hinc restituto jam invento h habebimus $xx + \frac{1}{2}q$ cS $\sqrt{\frac{1}{4}qq - s}$ vel $xx + \frac{r}{2p}$ cS $\sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto 0$ per quas quantitates data $x^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t \propto 0$ dividi poterit.

Sit denuo $f \propto 0$ et

erit $p \propto e$
$q \propto h$
$r \propto g + eh$ s: $r - ph \propto g$
$t \propto gh$ s: $t \propto rh - phh$ s:

$h \propto \frac{r}{2p}$ cS $\sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}}$ hinc $xx + \frac{r}{2p}$ cS $\sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}}$ erit desideratus divisor datae aequationis atque sic de aliis.

3tia pars.

Si aliqua aequatio 5 dimensionum producta fuit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat habeat duas dimensiones et nullum terminum $\propto$ altera vero aliquem terminum $\propto$, erit ejus formula aliqua ex sequentibus et poterit dividi ~~vel~~ per eam ut in prioribus vel per unamquamque aequationem sibi adjunctam vel per aliquam earum. Quo autem fundamenta sequentium ~~exphaisfecta~~ fiant, praemittamus haec:

45

$x^3+exx+fx+g \propto 0$ si utraque ponantur $\propto 0$ erit

$xx+yx+z \propto 0$

$f \propto y$

$x^5+ex^4+fx^3+gxx$ $\quad g \propto f+z \;\; f: g-z \propto f$

$\cancel{+yx^4}+\cancel{eyx^3}+\cancel{fyxx}+\cancel{gyx}$ $\quad r \propto g+yf \;\; f: r-fg+fz \propto g$

$+zx^3+ezxx+\cancel{fzx}+gz$ $\quad s \propto gy+fz$

$x^5+px^4+qx^3+rxx+sx+t \propto 0 \quad t \propto gz \;\; f: t \propto rz-pqz+pzz$. et

$z \propto \frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{qr}{2p}+\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}}$ si jam inveniatur quantitates

restituantur loco y et z, poterit aequatio dividi per $xx+px+\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \pm$

$\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{qr}{2p}+\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}} \propto 0$

Si autem ibidem $e \propto 0$ $g \propto 0$ et $s \propto 0$ erit quoque

$f \propto y$

$g \propto f+z \propto 0 \;\; f: -z \propto f$

$r \propto g+yf \;\; f: r+fz \propto g$

$s \propto gy+fz \propto 0 \;\; f: pr+ppz+pzz$ et $z \propto \frac{1}{2}pp+\sqrt{\frac{1}{4}p^4+pr}$

$t \propto gz$ et $t \propto rz+pzz$ et $z \propto -\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}}$

Ibidem aequatio $xx+px+\frac{1}{2}pp \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^4+pr} \propto 0$ ac $xx+px-\frac{r}{2p} \pm$

$\sqrt{\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}} \propto 0$ dividi poterit atque ita in aliis procedendum erit: jam

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0 \quad xx+px+\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \square k+\frac{t}{p}} \propto 0$

vel $xx+\frac{1}{2}p+\frac{t}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{t}{2p} \square k-q} \propto 0$ in $x^3+\frac{yt}{s} \propto 0$

vel $x^3+r \propto 0$

$x^5. px^4. \cancel{qx^3}. rxx. sx. t \propto 0 \quad xx+px-\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}} \propto 0$ vel $xx+p+\frac{t}{s}$ in $x+\frac{yt}{s} \propto 0$

$x^5, px^4, \cancel{qx^3}\, \cancel{rxx}\; sx, t \propto 0 \quad xx+px+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{t}{p}} \propto 0$ vel $xx+\frac{qx}{t}x+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq+s}$

$x^5, px^4 *. *. sx. t \propto 0 \quad xx+px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \propto 0$ vel per utramque harum duarum

$xx+p+\frac{t}{s}$ in $x+\frac{yt}{s} \propto 0$

$xx \pm \frac{t}{s}\sqrt{s}$ in $x \pm \sqrt{s} \propto 0$

$x^5, px^4, qx^3, rxx, \cancel{sx}. t \propto 0 \quad xx+px+\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{1}{2}q-\frac{r}{2p} \square k+\frac{t}{p}} \propto 0$

et $xx+qx+\frac{t}{2r} \pm \sqrt{\frac{tt}{4rr}-\frac{pt}{r}} \propto 0$

$x^5, px^4 *, rxx *, t \propto 0 \quad xx+px-\frac{1}{2}pp \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^4+pr} \propto 0$ et $xx+px+\sqrt{c\,pt} \propto 0$

et $xx+px-\frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp}+\frac{t}{p}} \propto 0$

$x^5, px^4, qx^3, *, *. t \propto 0 \quad xx+px+pp \propto 0$

$x^5, px^4 *. *. * t \propto 0 \quad xx+px+pp \propto 0$ et $xx+px+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{t}{p}} \propto 0$

$x^5 * qx^3. rxx, sx. t \propto 0 \quad xx+\frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss}-q}$ in $x+\frac{yt}{s} \propto 0$ et $xx+px \pm \sqrt{\frac{t}{p}} \propto 0$

$x^5 * * rxx, sx, t \propto 0 \quad xx+\frac{t}{s}x+\frac{tt}{ss} \propto 0$

$x^5 *. qx^3 * sx. t \propto 0 \quad xx+\frac{qt}{s}x+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq+s} \propto 0$ et $xx \pm \sqrt{\frac{t}{s}}$ in $x+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq+s}$

et $xx+\frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss}-q}$ in $x+\frac{yt}{s} \propto 0$

et $xx+x\sqrt{c\,\frac{tt}{s}}+\sqrt{c\,\frac{tt}{s}} \propto 0$

$x^5 * \ldots\ sx.t \propto 0$ sive $xx - \frac{s}{t}\sqrt{t}$ in $x - \sqrt{5} \propto 0$ et sive $xx - \sqrt{W}x$ in $x - \sqrt{5} \propto 0$

et sive $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0$ et sive $xx + \sqrt{c}\frac{ss}{t}$ in $x + \sqrt{c}\frac{tt}{s} \propto 0$

et sive $xx + \sqrt{\beta}t$ in $x + \frac{tt}{ss} \propto 0$

Notandum autem hic circa praecedentia; quod si non constet an proposita aequatio ex duabus aliis requisitas conditiones habentibus produci possit, quod hoc ut plurimum facillimo negotio experiri posse, quotiescunque non (sit eg: $x^6 * * * - xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{4}x + 10\frac{1}{8} \propto 0$ quae hujus est formulae $x^6 * * * sxx, tx\, u \propto 0$) divisores quibus pro unitate et cognitis (uti hic pro parte $x + \frac{u}{t} \propto 0$, $xx - \sqrt{W} - 5 \propto 0$, $x - \frac{t}{u}\sqrt{-5} \propto 0$ $x - \sqrt{c}\frac{tt}{u} \propto 0$ ac $x - \frac{tt^3}{u^3} \propto 0$) inter se non secundum omnes terminos conveniant (uti hic $x + \frac{u}{t} \propto 0$ et $x - \sqrt{-5} \propto 0$ quorum ille rationalem et $\sqrt{-5}$ irrationalem numerum designat) concludendum est propositam aequationem ita produci non posse, adeo ut eo in casu divisio irrita foret ~~[illegible]~~ similiter indivisibilitas saepe uno intuitu ex variis significet constat ut eg: si loco $-\sqrt{3}$ habuissemus $+\sqrt{3}$ quo casu $\sqrt{a-5}$ ex statim non potuisset: majoris ~~significatur~~ significati ergo sit alterum exemplum juxta 3tiam partem $x^6 * * * sx.t \propto 0$ cujus divisores $xx - \frac{s}{t}\sqrt{x}$ in $x - \sqrt{5} \propto 0$: $xx - \sqrt{W5}$ in $x - \sqrt{5} \propto 0$. $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0$. $xx + \sqrt{c}\frac{ss}{t}$ in $x + \sqrt{c}\frac{tt}{s} \propto 0$ et $xx + \sqrt{\beta}t$ in $x + \frac{tt}{ss} \propto 0$, si jam comperiatur $-\frac{s}{t}\sqrt{5}$ non esse $\propto \sqrt{W5}$ vel $\frac{t}{s}$ vel $\propto \sqrt{c}\frac{ss}{t}$ vel $\propto \sqrt{\beta}t$ quae sunt quantitates cognitae secundi termini, vel ultimos terminos $-\sqrt{5}$ et $+\frac{tt}{ss}$ etc: non inter se convenire: indicio est aequationem propositam minime tali modo produci posse.

4ta Pars:

Si aequatio aliqua 6 Dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones et nullus terminus $\propto 0$ altera vero unum plures ve terminos $\propto 0$ erit ea divisibilis per $xx + yx + z \propto 0$ cujus y et z valores per sequentes aequationes ac sequenti modo sunt inveniendi.

Aequationem propositam sive in ea aliquis terminus deficiat sive non sic designabo $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + u \propto 0$

Quo vero fundamenta sequentium pateant praemittemus sequentia:

$x^4 + ex^3 + fxx + gx + h \propto 0$ ponamus $p \propto 0$ et erit

$xx + yx + z \qquad \propto 0$

$x^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 + hxx$

$+ yx^5 + eyx^4 + fyx^3 + gyxx + hyx$

$+ zx^4 + ezx^3 + fzxx + gzx + hz$

$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + u \propto 0$

$p \propto y$

$q \propto f + z$ sive $q - z \propto f$

$r \propto g + fy$ sive $r - qy + zy \propto g$

$s \propto h + gy + fz$ sive $s \propto \frac{u}{z} + ry - qyy + yyz + qz - zz$

$t \propto hy + gz$ sive $t \propto \frac{uy}{z} + rz - qyz + yzz$ sive $\frac{t}{y} \propto \frac{u}{z} + \frac{rz}{y} - qz + zz$,

$u \propto hz$ sive $\frac{u}{z} \propto h$ si jam addamus inventas quantitates s et $\frac{t}{y}$ provenit $s + \frac{t}{y} \propto \frac{2u}{z} + ry - qyy + yyz + \frac{rz}{y}$ quae aequatione si per z multiplicata $\frac{t}{y} + zy$ dividamus obtinebis.

$zt - \frac{ft}{g} + ru \propto o$ et $y \propto g$ restitutis itaque his inventis quantitatibus loco y et t, data aequatio dividi poterit
$-f$
$+rp$
$-sgy$
$\frac{r}{g} + gg$ sit denique $\propto o$.

$g\, xx + yx + t \propto o$.

Si jam ponamus $e \propto o$ et $l \propto o$ erit per primam Multiplicationem

$xx + ex + f \propto o$
$xx + gx + h \propto o$

$x^4 + ex^3 + fxx$
$\quad + gx^3 + egxx + fgx$
$\quad\quad + hxx + ehx + fh$

$x^4 + kx^3 + lxx + mx + n \propto o$
$xx + yx + t \propto o$

$x^6 + kx^5 + lx^4 + mx^3 + nxx$
$\quad + yx^5 + kyx^4 + lyx^3 + myxx + nyx$
$\quad\quad + tx^4 + ktx^3 + ltxx + mtx + nt$

$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + u \propto o$

$k \propto g$
$l \propto f + h \propto o$ et $h \propto -f$
$m \propto fg$
$n \propto fh$

ac per secundam
$p \propto k + y$
$q \propto ky + t$
$r \propto m + kt$
$s \propto n + my$
$t \propto ny + mt$
$u \propto nt$

Si jam loco k ponamus g, loco m fg, et denique pro n, fh, habebimus

$p \propto g + y$ s. $p - y \propto g$
$q \propto gy + t$ s. $q - py + yy \propto t$
$r \propto fg + gt$ s. $\frac{r}{p-y} - q + py - yy \propto f$ ac $fg \propto r - pq + ppy - 2pyy + y^3 + qy$
$s \propto fh + fgy$ s. $s - fgy \propto fh$.
$t \propto fhy + fgt$ s. $\frac{t - fgt}{y} \propto fh$.
$u \propto fht$ s. $\frac{u}{t} \propto fh$.

Ex his ea jam obtinemus tres aequationes $\propto fh$ unde fit ulterius

$s - fgy \propto \frac{t - fgt}{y}$ et $sy - fgyy + fgt - t \propto o$,

quantitatibus jam fg multiplicata per $-yy + t$, hoc est in locum $-fgyy + fgt$ posita (omnibus divisis) per $-g$ et proveniet

$y^4 - \frac{s}{p}y^3 + 3qyy - \frac{t}{p}y + \frac{t}{p} \propto o$
$\quad -q \quad + ss \quad - 2qq \quad + qq$
$\quad\quad - \frac{qq}{p} \quad - \frac{rq}{p}$
$\quad\quad + r$

Unde restitutis quantitatibus y et t suo loco aequatio proposita divisibilis erit per $xx + yx + t \propto o$

Jam ipsam rem aggredientes dicimus, quod si nulli termini in aequatione proposita sint poterit dividi per aliquam harum sequentium A.B.C. e. f. g:

Quando $p \propto o$ per aliquam harum B.D.g.

q	A.B.C.f.g.
r	A.B.C.
s	A.B.C.e.f.
t	A.C.e.
p.q	B.D.g.
p.r	B.D.
p.s	B.D.
p.t	B.D.

Si q r o per aliquam harum A.B.C.

q.s.	A.B.C.f.
q.t	A.C.
r.s.	A.B.C.
r.t.	A.C.
s.t.	A.C.e.
p.q.r	B.D.
p.q.s	B.

Si p. r. s sint $\propto 0$ & aliqua harum B. D. | si r. s. t. sint $\propto 0$ & aliqua harum A. C
s. r. t — — — — — — — — D | s. g. r. s. — — — — — — B
g. r. s. — — — — — — — — A. B. C | s. g. s. t. — — erit $y^6 * * + ry^3 * * + u \propto 0$
g. r. t. — — — — — — — — A. C | $z \propto yy$
g. s. t — — — — — — — — A. C | g. r. s. t. — — — — — — A.
| s. g. r. s. t — — erit $y^6 * . * . * . * . * + u \propto 0$
| $z \propto yy$

Aequationes autem quarum hic mentio fit sunt sequentes:

A. $zz - 2gz + syy \propto 0$ $\quad zz - \frac{t}{s}z + uu \propto 0$ $\quad y \propto s$

$$\frac{-\frac{ty}{s} \quad -\frac{ry}{s}}{+\frac{r}{s} \quad +\frac{g}{s} \quad -\frac{t}{s}} \qquad \frac{-g \quad +\frac{ty}{s} \quad -syy}{\frac{r}{s}+sy}$$

$\quad 2$

B. $y^3 - syy + gy - r \propto 0$ $\quad zz - \frac{gt}{u}z + \frac{tt}{u^3} \propto 0$ $\quad z \propto \frac{yu}{t}$
$\quad -\frac{ru}{t} + \frac{su}{t}$ $\quad -s \quad + \frac{rt}{u}$
$\quad + \frac{rtt}{uu}$
$\quad - \frac{t^3 s}{u^3}$

$\quad 2$

C. $y^4 - \frac{g}{s}y^3 + 3gyy - \frac{t}{s}y + \frac{t}{s} \propto 0$ $\quad y^4 - \frac{t}{s}y^3 + syyy - 2gyy + gg \propto 0$
$\quad -2y. \quad + \frac{ty}{s} - \frac{ty}{s} - \frac{ug}{s}$
$\quad +2g. \quad + \frac{ug}{s}$

$-\frac{t}{s}y^3 + \frac{ty}{s}yy - \frac{ty}{s}y - \frac{ug}{s} \propto 0$ $\quad z \propto -2y + yy + g$
$+\frac{g}{s} \quad -g \quad + \frac{ug}{s} \quad - \frac{t}{s}$
$\quad + \frac{t}{s} \quad + \frac{ty}{s}$
$\quad + \frac{gg}{s}$
$\quad - r$

D. $+ yy^3 * + sy - t \propto 0$ $\quad + sy^4 - ty^3 + 2gsyy - tyy + ggs \propto 0$
$\quad + gg + rg$ $\quad - ug$
$\quad z \propto yy + g$

e.	f.	g
$y \propto s.$	$y \propto s$	$y \propto \frac{t}{s}$
$z \propto g.$	$z \propto g - \frac{r}{s} \propto \frac{us}{t}$	$z \propto \frac{u}{s}$

Nota autem hic

Ergo pro A vel B vel C assumere licet vel unam aequationem juxta positam quam libuerit, quaerendo eius beneficio valorem ipsius y vel z vel duas eandem quantitatem incognitam habentes quaerendoque ut supra ostensum communem divisorem, qui si nullius dimensionis fuerit, habebitur valor ipsius y vel z. si plurium, eundem ex hoc l. D. investigare oportet.

49

2 si primo g capitales sive majusculas A.B. C.D. explorare velimus, reli-
qua e. f. g. &c. necessaria sed ô vice versa.
Exempli gratia proponatur

$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 5 \text{ ∞ } 0$

cum nullus terminus hic deficiat examinanda aequatio per A. B. C. e. f. g. d. quae
deinde forment si a minusculis g. k. incipiamus, vel minusculis omissis cum
capitalibus id hic faciemus ac primum pro A assumere licet aequationem

$\frac{2}{8}t - 2qt + qqq$ vel $2t - \frac{ft}{}+ uu \text{ ∞ } 0$ vel utramque, si primum sumamus

obtinebimus pro ipsa (quoniam $f \text{ ∞ } 2$, $g \text{ ∞ } -3$, $r \text{ ∞ } 7$, $s \text{ ∞ } -3$, $t \text{ ∞ } -13$ et u ∞ -5) $2tt + 5$
$\frac{1}{2}t - 22\frac{1}{2} \text{ ∞ } 0$ sin alterum obtinebimus $7\frac{1}{2}tt$

$+ 35\frac{1}{2}t - 10 \text{ ∞ } 0$ quarum communis divisor est $t + 5 \text{ ∞ } 0$ cum vero y ∞
∞ 2 dividendum est per $xx + yx + t \text{ ∞ } 0$ vel $xx + 2x + 5$ invenietur pro quotien-
te $x^4 * + 2xx + 3x + 1 \text{ ∞ } 0$ Et manifestum est non etiam alterutra tantum
duarum illarum aequationum uti posse; facilior itaque via eligenda, non-
semper illa per C. D. breviore neque longior, verum haec praerogativa gaudet facere
parva quodnam: multiplices radices absciendas, prout sequenti exemplo pate-
bit: sit aequatio $x^6 * - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 9x - 1 \text{ ∞ } 0$ existente autem hic per ∞ 0
est reductio tentanda per B. D. g incipiendo a B invenietur pro prima y^3 -
$+ 9y - r \text{ ∞ } 0$ haec aequatio $y^3 - \frac{1}{2}yy - 2y - 3 \text{ ∞ } 0$ et pro secunda $yy -$

haec $yy + 230y - 305 \text{ ∞ } 0$ est u: $g \text{ ∞ } -2$ $r \text{ ∞ } 3$, $s \text{ ∞ } -3$
$t \text{ ∞ } -5$ et $u \text{ ∞ } -1$ Unde cum hic nullus C. D. desit pa-
tet divisionem per B fieri non posse hinc transeo ad D ubi
pro prima aequatione $gy^4 * + fy$ &c: invenio $-2y^3$
$* + 1y - 1 \text{ ∞ } 0$ et pro secunda $fy^4 - ty^3$ &c: invenio $-2y^4 + 5y^3 + 12yy$
$- 10y - 14 \text{ ∞ } 0$ Quarum aequationum Com: Divisor est $y + 1 \text{ ∞ } 0$ adeoque est ∞
$yy + 9 \text{ ∞ } - 1$ ita ut divisio sit facienda per $xx + yx + t \text{ ∞ } 0$ vel $xx - 1x - 1$
cujus quotiens $x^4 + x^3 * + 4x + 1 \text{ ∞ } 0$ Ubi notes magis equidem usui
esse inquisitionem hanc communis alicujus divisoris in altioribus aequationibus
non vero tantum cum solummodo 2 aut etiam trium dimensionum, sic in aequatio-
ne superiori $-2y^3 * + 1y - 1 \text{ ∞ } 0$ ubi probitas apparet y est ∞ -1 adeoque si ipsa
dividatur per $y + 1 \text{ ∞ } 0$ prodibit $-2yy + 2y - 1 \text{ ∞ } 0$ cujus radices quoniam impos-
sibiles solum sunt est y ∞ -1 adeo ut divisio aequationis propositae tentanda
sit per $xx - 1x + 1 \text{ ∞ } 0$
Sic si habeatur aequatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \text{ ∞ } 0$ comperiebis
divisionem ejus fieri posse beneficio aequationum ipsius D ubi pro una in-
venies $2yy - 5y + 3 \text{ ∞ } 0$ et pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \text{ ∞ } 0$ et pro communi Diviso-

50

$zy - x \propto 0$ et quoniam t est $\propto \frac{yu}{t}$ per erit $xx + yx + t \propto 0 \propto xx + 2x + 1 \propto 0$ per quam igitur si proposita æquatio dividatur fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx$ $* + 1 \propto 0$

Sit deinde data æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 * + 1xx + 19x + 2 \propto 0$ in qua $r \propto 0$ oportet ipsam examinare per A. B. C. Incipiendo autem ab A loco æquationis $tt - 2qt + ssq$ etc: invenitur $tt - 4t + 1 \propto 0$ et loco æquationis $tt - \frac{st}{p}$ etc: invenitur eadem $tt - 4t + 1 \propto 0$ ex qua quia utriusque communis divisoris radices invenire oportet quæ sunt $t \propto 2 + \sqrt{3}$ et $t \propto 2 - \sqrt{3}$ unde cum $y \propto p$ hoc est 2 pro $xx + yx + t \propto 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \propto 0$ et $xx + 2x + 2 - \sqrt{3}$ per quas igitur si proposita æquatio divisa fuerit, conveniet ipsam producere ex multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \propto 0$ $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \propto 0$ et $xx - 2x + 2 \propto 0$

5ta pars:

Si æquatio aliqua 6 Dimensionum produci possit multiplicatione duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant in quarum alterutra unus plurésve termini desint $\propto 0$ erit ipsa divisibilis vel per æquationem tantum 2 terminorum juxta 2dam partem vel per æquationem $x^3 + yxx + tx + w \propto 0$ in qua tantum alterutra vel y vel t est $\propto 0$; quarumque y. t. w. valores inveniuntur per sequentes æquationes. Quando itaque nulli termini in æquatione proposita sunt $\propto 0$ illa dividi potest per aliquam harum subsequentium A. B. C. F.

Quando $p \propto 0$ per aliquam harum	C.D.
q	A.B
r	A.B.e.f.
s	A.B.
t	A.D.
pq	C.B.
pr	C.B.
ps	B
pt	C.D.
qr	A.B.
qs	A.B.
qt	A
rs	A.B.
rt	A.D.

Quando prs $\propto 0$ per aliquam harum	A.B.
p.q.r	C.D.
p.q.s	B.C
p.q.t	B.C
p.r.t	C.D
p.s.t	D
q.r.s	A.B
q.r.t	A.D.
q.s.t	A
r.s.t	A.D
p.q.r.s	D
q.r.s.t	A
p.r.s	B.

Æquationes autem sunt

A: $t^3 - 3qtt - rpt - sq \propto 0$ $+qqtt + qsq\,t - qss \propto 0$ ubi $y \propto \frac{s + tt - qt}{p}$
$+pp \quad +2s \quad +tp$ $\quad +p^4 \quad -3pqr \quad -qppu$
$+qq$ $\quad -4s \quad -2pps \quad +qpsu$
$\quad +2pr \quad +2tp \quad +sqq$
$\quad -q^3 \quad -s^2q$
$\quad -2p^3 \quad -sqps$
$\quad +qqps \quad +tp^3$

B: $y^4 - \frac{qt}{u}y^3 + \frac{sqt}{u}yy - \frac{tt}{u}y - qy \propto 0$ $\quad y^4 - 2py^3 + qyy - ry + pr \propto 0$ ubi $t \propto \frac{t}{q - sy + yy}$
$-s \quad +ss \quad -\frac{tt}{u}$ $\quad +\frac{2u}{t} \quad +sp \quad -py \quad -s$
$-\frac{qqt}{u} + \frac{rty}{u}$ $\quad -\frac{3pu}{t} + \frac{2qu}{t} - \frac{squ}{t}$ $\quad z \propto 0$
$\quad +\frac{ppu}{t}$

C $tt - 9t + 8 \propto 0$ $ww - rw + u \propto 0$ $y \propto 0$
$ww - rw + u \propto 0$ $z \propto 0$
D $yy - 8y + 9 \propto 0$
e $t \propto y$ $w \propto \frac{f}{8}$ $y \propto 0$
f $y \propto 8$ $w \propto \frac{f}{9}$ $t \propto 0$

Renovabis hic eijsdem quae in praecedenti ~~aliis~~ indicavimus duabus aliis tentationibus ~~reliqua~~ et exempla illustrabimus.

Sit ex: $x^6 + ux^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \propto 0$
Quoniam nulli termini desunt reductio tentanda erit per A. B. e. f incipiendo a minimis, ac primum ab e habebimus $t \propto 9$, $y \propto 4$ et $w \propto \frac{f}{8} \propto 5$ adeoque pro $x^3 + yxx + zx + w \propto 0$ fiet $x^3 * + 4x + 5 \propto 0$ Cum vero proposita aequatio per hanc dividi nequeat, transeo ad f obtineoque $y \propto 8$, $t \propto$ $w \propto \frac{f}{9} \propto \frac{11}{4}$ $z \propto 0$ et in locum $x^3 + yxx + zx + w \propto 0$ obtineo $x^3 + 1xx * + \frac{11}{4} \propto 0$ Et cum proposita per hanc quoque non divisibilis transeo ad A et pro $t^3 + 39tt$ etc: obtineo $2t^3 + 11tt + 18t - 9 \propto 0$ cuius radices sunt $+3$. $+x$ et $+1\frac{1}{2}$ Quia autem omnes hae radices sunt rationales ac aequatio proposita fractis numeris caret, non poterit nobis haec ultima radix inservire, Unde explorandum tantum restat per $t \propto 3$ et $t \propto x$ Sumendo autem $t \propto x$ reperimus divisionem fieri non posse, ac idcirco si sumamus $t \propto 3$ fiet $w \propto \frac{8 + tt - 9t}{t} \propto 2$ quoniam vero y et z $\propto 0$ pro $x^3 + yxx$ etc: obtinebimus $x^3 * + 3x + 2 \propto 0$ ~~Quae unam tantum rationalem~~ per quam si divisio propositae tentetur comperiemus ipsam fieri posse atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \propto 0$ Sed loco A aequationis juxta A sumere potuissemus secundam una dimensione depressiorem pro qua obtinuissemus $13tt - 66t + 63 \propto 0$ quae unam tantum radicem rationalem absolutam admittit quae ut supra est $+3$.

Et notandum quod, inventis duabus aequationibus (quaecunque sit per C. D. quaesitum obtinere volumus invenire debent) quaeri posse radices alterutrius aequationis, si nempe ea facilius sit inventu atque explorari, num et altera aequatio dictam radicem admittat, quo saepe nonnihil laboris abscindi potest.

Denique usus huius regulae se longe lateque extendit, ~~quando~~ non necesse sit vel fractiones vel cognitas quantitates surdas prius ex aequatione tolli et quot modis una eademque aequatio praesertim valde composita et multarum dimensionum ex multiplicatione duarum aliarum produci queat, tunc inter omnes illas ex quibus produci possit tantum una requiri in qua unus pluresve termini deficiant ut reductio per has regulas inveniatur:

3. ~~[illegible]~~ Haec regula ~~[illegible]~~ modum docet inveniendi omnes aequationes rationales, duos tantum terminos habentes quibus aequatio quaevis rationalis et fractione carens ~~sive~~ literalis sive numeralis ~~[illegible]~~, dividi possit tali modo.

Fiat aliqua aequatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus aut etiam terminis propositae aequationis (sit $x^3 - 21axx - bbx + 20abb \propto 0$ suppono $x^3 \propto 21axx$ vel $bbx \propto 20abb$ vel ad libitum quemlibet pro x valorem puta a vel b) atque juxta hanc suppositionem inveniatur valor pro x (sit $x - 20a \propto 0$ ∴ $x \propto 20a$) Deinde substituto hoc valore ficto ipsius x ~~[illegible]~~ (cubis $8000a^3 - 8400a^3 - 20ab^6 + 20abb$ $+400aa$ $\propto 0$ vel eo quam ex aequatione ficta inveni (uti fit supponendo $x^3 \propto 21axx$ sive $x \propto 21a$ quo substituto ubique in locum x in aequatione proposita (rejiciendo brevitatis causa terminos: ex

52 cubis in locum ipsius x aequationis propositae:

quibus aequatio facta est conflata, cum ipsi dum nihilo sunt aequales, posthibi necessario evanescant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $-21abb+21,$ $20a^3+20abb$ vel $-abb+21,20a^3$) si termini se mutuo destruere reperiantur erit proposita aequatio divisibilis per $x-$ hoc ficto valore $\propto 0$ (ubi hic fit in suppositione $xx-20ax \propto 0$ unde proposita per eandem divisibili provenit $xx-ax-bb\propto 0$)
si autem termini se mutuo non destruant, quaerantur divisores aggregati horum omnium terminorum (qualis hic est ex suppositione $x^3 \propto 21axx$ seu $x \propto 21a$) ~~est~~ $-abb$ $+21,20a^3$: cuius divisores hi quatuor existunt $+a$ et $-a$; $-bb+21,20aa$ et $+bb-21,20aa$) atque ab unoquoque divisore unius dimensionis auferatur valor ficti ipsius x at ab unoquoque divisore duarum dimensionum auferatur eiusdem valoris quadratum et hic de majori (subducto hoc ficto valore $21a$ ab utroque priorum et ab utroque duorum sequentium eiusdem valoris quadrato (quorum ipsi duarum sunt dimensionum) relinquuntur $-20a$, $-22a$; $-bb-21aa$, $bb-41,21aa$) ~~duo pacto~~ ~~dividentur ... nomen aliquid ...~~ si aliqui horum reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi termini aequationis propositae indicio est aequationem propositam per aliam duos terminos habentem seu per x aut xx cum $+$ vel $-$ quantitate quavis cognita atque rationali esse ~~incognita~~ divisibilem si vero aliqua consentiant (ubi hic solummodo $-20a$) oportet facto unoquoque consentiente $+x$ earundem dimensionum $\propto 0$ explorare per quam harum aequationum aequatio proposita dividi possit (ubi hic ad $-20a$ addita x unius dimensionis siquidem $-20a$ ~~tantum~~ unius dimensionis habet tunc divisione facta invenietur xx $-ax-bb\propto 0$ ut supra) si n. per nullam ipsarum divisibilis sit, erit quoque proposita per x aut xx cum $+$ vel $-$ quavis quantitate indivisibilis.

Hic autem quaedam notanda erunt quae breviter saltem indicabimus
1. per hanc viam omnes aequationes duorum terminorum quibus aequatio proposita dividi possit eadem operatione inveniuntur
2. valorem quem x affingimus brevitatis causa ~~ita~~ fingi posse, ut eo substituto inde resultet tale aggregatum cuius divisores faciles sint inventu ac pauci numero.
3. tot enim numero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi termini aequationis propositae quaerantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quae restabant reliqua, ex divisoribus aggregati et ex assumpto valore ipsius x et xx facta haec erant quatuor $-20a, -22a, -bb-21aa, +bb-41,21aa$ quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi termini $20abb$ aequationis propositae cum duo membra habeant, atque hic terminus tantum unum, deinde patet etiam quod $22a$ divisor esse non possit ipsius $20abb$, ~~quamquam~~ atque ea propter considerandum tantum oportet $-20a$. Possumus quoque eodem modo quando divisores ultimi termini aequationis propositae cogniti sunt, invenire divisores omnis aggregati qui nobis inservire queunt, reliquis quae inutiles sunt relinquendis (uti ex ultimis circa praecedentem regulam patet: ea n. ab hoc nullatenus differt nisi quod haec universalior sit ut antecedenti ostenditur)
4. Cum ex prioribus constet, inter eos qui proveniunt divisores, dum ita valorem x ab singulis aggregati divisoribus subtrahimus, contineri, qui juncti x propositam aequationem dividant, possumus, siquidem plures numero existant, nihilominus affingendo alium valorem x denuo operari et ut antea et congruentes

53

solum cum antea inventis divisoribus annotare (obiter notes simul cum quibus congruant certum esse aequationem per x aut xx cum + vel − quantitate cognita absque rationali esse indivisibilem) si quae adhuc nimis multi fuerint eodem modo denuo quidam rescindi possint. sed hoc raro accidit in aequationibus literalibus

5 Si aequatio proposita fractionibus carens sit divisibilis per aliam aequationem rationalem, duos tantum terminos habentem, opus est ad inveniendum hunc divisorem omnia signa radicalia ex proposita aequatione auferre sed ea solummodo quae in ultimo termino reperiuntur.

6 Hinc ~~denuo~~ facilis methodus patet resolvendi numerales: haec nimirum: addantur adhaerentes ~~[illegible]~~ terminis aequationis numeri servatis signis (sit $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ eritque tale numerorum aggregatum -6 si qui termini desiderantur ~~aequat~~ hic deficit) aequatio divisibilis erit per $x - 1$ si numerus ~~[illegible]~~ singulis divisoribus huius aggregati (hic erunt $-1\ -2\ -3\ -6$) subtractus $+1$ (remanebunt $-2\ -3\ -4\ -7$) proveniant ~~[illegible]~~ qui simul divisores ultimi termini aequationis datae extiterint junguntur x ~~[illegible]~~ atque his sic junctis x divisio tentanda (ubi hic per $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, non autem per $x - 7$ cum 7 non divisor sit 24) haec regula qua ratione cum priori consentiat et quo illa sit elicita non poterit non illis penitus inspicienti ignotum esse:

10 ~~Quaerendo~~ docet inveniendi omnes aequationes rationales quibus quaevis aequatio rationalis et fractione carens sive literalis sive numeralis sit dividi possit;

Aequatio talis divisibilis erit per aequationem nullo termino carentem et quidem unius dimensionis (quod regulis 2da ac tertia ostensum) si proposita sit 3 dimensionum, vel per aliquam unius vel duarum dimensionum si proposita sit 4 et 5 dimensionum vel per aliquam 1, 2, 3 si proposita sit 6 et 7 dimensionum vel per aliquam 1, 2, 3, 4 dimensionum si proposita habeat 8 vel 9 dimensiones et sic in infinitum

Efficiendum nunc quantitatem cognitam 2di termini, adfectam suis signis + et − vocare p, 3tii q, 4ti r, 5ti s, 6ti t, 7timi v at divisorem ultimi termini similiter suis signis adfectum h, quo autem usu pateat cuilibet sequentia indagandi ac qua ratione inventa fuerint delegendi his praeibimus:

sit aequatio $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$ supponamus hanc ex multiplicatione duarum sequentium provenisse, ~~quae~~ termini ante unius h sit cognitus:

$$\begin{array}{l} xx + dx + l = 0 \\ xx + kx + h = 0 \\ \hline x^4 + dx^3 + lxx \\ \quad + kx^3 + dkxx + lkx \\ \quad\quad + hxx + dhx + hl \\ \hline x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0 \end{array}$$

Hinc quatuor obtinemus aequationes

$p = k + d$ hoc est $k = p - d$

$q = l + kd + h$

$r = ld + kh$

$s = hl$ hoc est $l = \frac{s}{h}$ restitutis in secunda et tertia aequatione k et l et proveniet $d\frac{s}{h} + ph - dh = r$ et $d = \frac{rh - phh}{s - hh}$ hoc est $d = \frac{r - ph}{\frac{s}{h} - h}$ hoc si substituas in locum z habebitur $xx + \frac{r-sh}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto 0$ per quam proposita dividi potest

si ponamus $l \propto h$ hoc est $\sqrt{s} \propto l$ sit h tunc $g \propto$ bis $2h + kt$ ac restituto k, erit $2ht + gt - tt \propto g$ et $t \propto \frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg + 2h - g}$ unde proposita aequatio dividi poterit hisce min: conditionibus existentibus per $xx + \frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg + 2h - g}$ in $x + h \propto 0$:

Hisce sic declaratis sit primo

Regula pro Aequationibus quatuor dimensionum.

Si aequatio proposita divisibilis sit per aequationem rationalem, plures quam unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, erit eadem divisibilis per $xx + \frac{r-hs}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto 0$

Excepto tantum cum $\frac{s}{h}$ est $\propto h$ ac simul $r \propto hg$ id est $h \propto \sqrt{s}$ et $h \propto \frac{r}{g}$. tunc n. divisibilis erit per $xx + \frac{1}{2}g + \sqrt{\frac{1}{4}gg + 2h - g}$ in $x + h \propto 0$

Et cum aequatio proposita sit liberata ab omnibus fractis et surdis quantitatibus atque dividi queat per aequationem rationalem, sequitur $\frac{r-hs}{\frac{s}{h}-h}$ habere integram seu quantitatem rationalem. Habet etiam s nunquam esse posse $\propto hh$ nisi s quadratum fuerit ac r per g dividi possit.

2 Sufficiet etiam illos solum divisores ultimi termini qui ipsius v.g. non excedunt considerare ~~...~~ nimirum: si aequatio sit numeralis; sed si sit literalis opus tantum erit divisoribus ubi duarum dimensionum vel 6 dimensionum qui 3tii si octo qui 4tuor et sic porro. atque ex his saltem alterutro tantum duorum talium quorum productum constituit ultimum terminum, quae animadversio locum etiam obtinet in omnibus aequationibus parium dimensionum quas dividere tentamus per aliam dimidium praecedentium dimensionum numerum habentem.

Exempli gratia si proponatur haec aequatio $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \propto 0$

Quia igitur hic est $g \propto -3$, g non indigemus $r \propto -30$ $s \propto -200$ tunc erit $xx + \frac{r-hg}{\frac{s}{h}-g}x + h \propto 0 \propto xx + \frac{-30+3h}{\frac{-200}{h}-h}x + h \propto 0$ sumantur divisores ultimi termini radicem quadratam non excedentes: seu valores ipsius $h \propto +x$ vel $-x$

Unde sumendo $h \propto +x$ erit $\frac{-30+3h}{\frac{-200}{h}-h}$ fractio similiterque si sumatur $h \propto -x$ $\propto +2$ $\propto -2$ $\propto +4$ $\propto -4$ et $\propto +5$ At si sumatur $h \propto -5$ obtinetur $-x$ ac proinde tentanda erit divisio per $xx - xx - 5 \propto 0$ Quoniam autem per hanc fieri nequit, transeo ad alium valorem ipsius h puta $+8$ sed cum hic nihilominus praedicta quantitas fractio evaderet, ut et quando pro h assumitur -8 transeo ad $h \propto +10$ Quia vero r sit $\propto hg$ ac idcirco $xx + h \propto 0$ non poterit similiter hic valor nobis inservire, ita ut nobis solum restet $h \propto -10$ unde obtinetur aequatio $xx - 2x - 10 \propto 0$ per quam proposita dividi potest.

+2	−2
+4	−4
+5	−5
+8	−8
+10	−10

Eodem modo, si proponatur aequatio literalis

$$x^4 + x^3 \begin{matrix} -bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +4abb \\ -a^3 \\ -4b^3 \\ +aab \end{matrix} x \begin{matrix} -4b^4 \\ +2aabb \end{matrix} \propto 0$$

Quoniam $g \propto 2$, $r \propto +4abb - a^3 - 4b^3 + aab$, $s \propto 2aabb - 4b^4$

erit $xx + \frac{r-hg}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto 0$.

$xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + 4aab}{\frac{2aabb - 4b^4}{h} - h}\, x + h \propto 0$ Divisores ultimi termini, duas

habentes dimensiones seu valores ipsius h: sunt

$$\begin{array}{ll} +bb & \text{et } -4bb + 2aa \\ -bb & +4bb - 2aa \\ +2bb & +2bb + aa \\ -2bb & -2bb - aa \end{array}$$

Quorum tantum prioribus 4 indigemus nam

$+bb - bb, +2bb - 2bb$ quoniam reliqui per se multiplicati ultimum term. minimum producunt

Sumendo autem $hx + bb$ eius terminus erit fractio. Sine transeundo ad $h \propto$ ~~$+bb$~~ $+bb$ eius terminus erit fractio. Hinc transeundo ad $h \propto +2bb$ obtinebimus aequatio $xx \begin{smallmatrix} +b \\ a\end{smallmatrix} x + 2bb \propto 0$ per quam propositam dividi posse invenimus n: pro quoli- ente haec $xx \begin{smallmatrix} +a \\ -b \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} -2bb \\ +aa \end{smallmatrix} \propto 0$.

Regula pro Aequationibus 5. dimensionum

Itaque sit aequatio ~~hab~~ conditionibus ~~[illegible]~~ quale in prioribus desideravimus divisibilientur

$$xx - \frac{\frac{f}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}g \text{ et } \sqrt{-\frac{\frac{f}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}g}\ \Box k - g + h + \frac{s}{h} \text{ in } x + h \propto 0$$

Et cum aequatio haec esse debeat rationalis quae nullas admittat fractiones sequitur eius terminum debere esse integrum quantitate rationale

Exemplum

Proponatur haec aequatio

$$x^5 * * \begin{array}{l} +8aab \\ -63a^3 \\ +8abb \\ -b^3 \end{array} xx \begin{array}{l} +2ab^3 \\ +16a^3b \\ +15aabb \\ -b^4 \\ -4a^4 \end{array} x \begin{array}{l} -b^5 \\ +a^4b \\ -ab^4 \\ +a^3bb \end{array} \propto 0$$

Quantitates cognitae

$f \propto 0$

$g \propto 0$

r nullus hic in usu

$s \propto 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t \propto -b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb$

Et divisores ultimi termini duas dimensiones habentes seu valores ipsius h sunt $\propto ab + bb$ vel $-ab - bb$ vel $bb - aa$ vel $-bb + aa$ vel $ab - bb$ vel $-ab + bb$ vel $aa + ab + bb$ vel $-aa - ab - bb$

Hinc si h sumatur $\propto ab + bb$ obtinebimus

$$xx - \frac{\frac{f}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}g \text{ et } \sqrt{-\frac{\frac{f}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}g}\ \Box k - g + h + \frac{s}{h} \text{ in } x + h \text{ aequale}$$

$xx - 4ax \begin{smallmatrix} +ab \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ per quam si tentetur inveniet divisionem fieri posse

De ac omni $x^3 + 4axx \begin{smallmatrix} +16aax \\ -ab \\ -bb \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} -b^3 \\ +a^3 \end{smallmatrix} \propto 0$

Potuit quoque idem sequenti modo reperiri, Quaerendo communem divisorem duarum aequationum

$yy \begin{smallmatrix} +\frac{f}{hh} \\ -g \end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix} +g_h \\ -\frac{s}{h} \end{smallmatrix} \propto 0$ et $yy - \frac{fh}{t} y \begin{smallmatrix} -hhg \\ +\frac{h^3}{t} \end{smallmatrix} \frac{-t + rh}{\frac{t}{h}} \propto 0$ et cum eo...

locum ipsius y erit proposita aequatio divisibilis per $xx + yx + h \propto 0$

Notanda autem hic quaedam

1 quod hanc regulam non solum sciri posse quae in prioribus indicavimus sed etiam ubi ipsa divisibilis sit sit ~~per~~ rationale in qua aliquis terminus deficiat verum id est facilius cognoscitur per 9 regulam

2 Quoniam usus hujus regulam vel eo major est quo pauciores divisores ultimus terminus propositae aequationis admittit, haud inconsultum fuerit hic ubi modo quem in prioribus indicavimus quo plerumque levi negotio propositam aequationem in aliam transmutare licet, in qua ultimus terminus pauciores habet dimensiones, quaeque indivisibilis sit si proposita sit indivisibilis aut divisibilis si proposita divisibilis fuerit et ex cujus aequationibus ipsam dividentibus facile quoque inveniri possint aequationes propositam dividentes ut suo loco declaravimus, et rarò continget quin per hanc transmutationem aequationis propositae in aliam aliquod commodum consequimur ab opere plurimum sublevaturi simus.

3 ~~Notandum~~ advertendum quoque hanc regulam se ~~quoque~~ extendere ad illas aequationes in quibus signa radicalia et fractiones reperiuntur, hoc tantum excepto quod non sint in ultimo termino, ~~et~~ eodem modo illis regulis utendum omnibus illis particularibus rejectis quae originem duxerunt ex eo quod necesse fuerit ut illae aequationes ex quibus proposita aequatio produci potest sint rationales quod hic non requiritur sit ex: gratia $x^4 - 2ax^3 + \begin{array}{l}2aa\\-cc\end{array}xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$ quoniam

per $p \propto -2a,\ q \propto 2aa - cc,\ r \propto -2a^3$ et $s \propto a^4$ hinc erit

$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \propto xx \frac{-2a^3 + 2ah}{\frac{a^4}{h} - h}x + h \propto 0$ sunt autem divisores ultimi termini s. valores ipsius h $+aa$ et $-aa$ unde sumendo $h \propto aa$ obtinebitur $\frac{a^4}{h} - h \propto 0$ ac etiam $-2a^3 + 2ah \propto 0$ (hoc est $\frac{s}{h} \propto h$ et simul $r \propto hp$) ac proinde tentanda erit divisio per $xx + \frac{1}{2}px$ et $\sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}\,x + h \propto 0$ hoc est $xx - ax + \sqrt{aa+cc},x + aa \propto 0$ vel per $xx - ax - \sqrt{aa+cc},x + aa \propto 0$ quae divisio per utramque succedit.

xx Quia omnes rationales aequationes quae nullas fractiones continent etc. reduci possunt, reducantur, si ponendo unam aut plures literas $\propto 0$ aut $\propto$ alii quantitati quam libuerit, talis inde aequatio resultet, quae una tantum dimensione minor et irreducibilis

Ex: si habeatur haec aequatio

$x^3 - 5axx + \begin{array}{l}6bb\\-9bc\\-9aa\end{array}x \begin{array}{l}-18abb\\-9a^3\\+27abc\end{array} \propto 0$

in qua si a ponatur $\propto 0$ exsurgit haec $x^3 + 6bbx - 9bcx \propto 0$

s: $xx \begin{array}{l}+6bb\\-9bc\end{array} \propto 0$ quae non potest reduci

Regula vero per quam reductionem propositae aequationis jam instituo talis:

Dividatur ultimum terminum expositae aequationis si non ex diversis partibus aut membris constet vel alias per unum membrum ultimi termini quodcunque liberent (quemadmodum hic + 6bb vel − 9bc) omnia membra ultimi termini propositae aequationis, quae cum + illud dividi possunt, ~~ab illud quotiens~~ (sit hic dividendo 18abb + 6bbb oritur − 3a; vel si assumamus − 9bc ac dividendo 27abc oritur item − 3a) ab illud quotiens (− 3a) sive unum sive plura fuerint addatur quantitati x (erit x − 3a) et per hanc summam proposita aequatio dividi poterit (ut hic fit).

12 Hactenus Regulae quas tradidimus, respexerunt aequationes in quibus una tantum incognita quantitas quam x nominavimus inveniebatur. Iam unum verbo adhuc adjiciam: Quod in proposita aequatione quamlibet cognitam pro incognita et vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu reductionis considerare liceat; considerentur itaque omnes sine discrimine literae ut cognitae, ejusmodi ex illis eligere et pro incognita supponere integrum erit quae ad reductionem facillime expediendam (et praecedentes regulas maxime conducere judicabitur; nec hactenus ~~traditam non~~ traditarum regularum utilissima est, et quam ... tum reductiones ultimam aequationum quae omnes propositi problematis conditiones includunt ope regularum supra explicatarum saepe compendiosissime invenimus, sed etiam propinqua ad ultima deveniatur quamplurimae reductiones reserendi et simplicissimae aequationes haberi possunt, unum aut alterum tantum exemplum subjungemus

Quo modo reducere possis omnem rationalem aequationem quae per aliam rationalem, non cognitis ultimi termini divisoribus, dividi queat remanente etiam si placet omni fractione, quae in illa reperitur; nam si in aequatione illa, aliqua litera sive cognita sive incognita reperiatur secundum quam aequatio ordinata pauciores, quam altior dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur pauciores habens quam x vel x et 2, vel x, 2 et 3, vel x, 2, 3 et 4 dimensiones vel etiam plures sed quae ex his derivari possint; id quod semper ex investigatione valoris hujus literae quae vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit uno casu excepto, quem postea indicabo:

x Exemplum in quo litera b ubique unam tantum dimensionem habet.

Esto aequatio proposita $\begin{matrix} x^4 & -2ax^3 & +aaxx & +a^3x & -a^4 \\ & +b & -ab & & +ba^3 \end{matrix} \infty 0$

divis: per $x^3 - \cancel{axx} + a^3$ Ergo $bx^3 - abxx + ba^3 \infty -x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4$

fit $b \infty -x + a$ et $x - a + b \infty 0$ Aequatio per quam proposita divisibilis

2dum exemplum

Esto aequatio proposita $\begin{matrix} x^3 & -20bxx & +60aax & -120a^3 \\ & -2a & +70ab & -60aab \end{matrix} \infty 0$

Ergo $-20bxx + 70abx - 60aab \infty -x^3 + 20axx - 60aax + 120a^3$

et fit $b \infty \dfrac{-x^3 + 20axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}$ hujus autem maximus communis divisor per ~~$20xx + 70ax$~~ methodum ante adscriptam est $x - 2a$ per quam si fractio abbrevietur fiet $b \infty \dfrac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}$ vel $\dfrac{xx + 60aa}{20x - 30a}$

Seu quod idem est $xx - 20bx + 30ab + 60aa \infty 0$ ita ut aequatio proposita pro hanc et praecedentem $x - 2a \infty 0$ divisa sit

3 Exemplum in quo quantitas c tantum 1 et 2 habet dimensiones.

Esto aequatio proposita $x^4 * \begin{smallmatrix}8acxx\\-aa\end{smallmatrix} - 4aacx + 12aacc \infty 0$

Ergo $12aacc \infty \begin{smallmatrix}-8axxc\\+4aaxc\end{smallmatrix} \begin{smallmatrix}-x^4\\+aaxx\end{smallmatrix}$

et $cc \infty \frac{ax - 2xx}{3a}$ in $c + \frac{aaxx - x^4}{12aa}$

Unde extracta radice invenies $c \infty \frac{-ax - xx}{2a}$ hoc est $xx - ax + 2ac \infty 0$

vel $c \infty \frac{-ax - xx}{6a}$ hoc est $xx + ax + 6ac$

Atque aequatio proposita in hasce duas sit divisa, quoniam autem in ea quantitas x et 2 tantum dimensiones habet potuisset idem etiam quaerendo valorem ejus investigari; ubi notari potest, si litera talis sit plures habet dimensiones quam 1 et 2 vel 2 et 4 vel 3 et 6 etc: posita $xx.\ px.\ q \infty 0$ si px statuatur pro 2do et q pro ultimo termino, erit semper valor ejus $x \infty \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$ ut infra dicetur +et c.

4 Exemplum.

Hic eadem ratione si binas litera assumpta sit x et 3 dimensionis, radix extrahi debet juxta infra dicenda caeteris ut antecedenti peractis, Quanquam autem saepe in hoc 4to casu reducendo contingat, ut quaesitum per aliquam ex aliis regulis facilius inveniatur, poterit tamen interdum hac regula, praesertim in aequationibus numeralibus, ubi divisores ultimi termini complures existunt aut difficiles inventu cum fructu usurpari

Quibus praemissis poterimus generalem regulam commodius exprimere quae talis est

Si in aequatione proposita, quae in duas alias rationales est divisibilis, quaeratur valor quantitatis incognitae vel alicujus alterius, quae ut incognita consideratur poterimus ipsam aut dividere (sicut in primo exemplo) aut fractionem inde ortam per communem aliquam divisorem abbreviare (sicut in secundo exemplo) aut denique radicem quadratam (sicut in 3tio exemplo) aut radicem cubicam extrahere sicut in 4to exemplo tantum ubi $\frac{1}{4}qq$ majus quam $\frac{1}{27}p^3$ quod infra declarabitur signo + affecta existunt

Nota hic quaedam:

1 Eam Methodus haec ubi incognita quantitas vel quae ut incognita consideratur trium vel 4tior dimensionum est, aliquando paulo longior praestat regula ubi valebit regula 1 Si modo aliqua litera quae ejus loco libuerit tanquam incognita et reliquae omnes ut incognitae considerentur

2 Saepe autem satis breviter reductio aequationum quae tantummodo per irrationales reduci possunt inveniri posse exempli gratia: si habeas hanc aequationem $x^4 - 2ax^3 \pm 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0$ considerando cum incognita

$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$ addas utrinque quantitatem

59

aliquam per xx multiplicatam (cum ab altera parte habeas ee in xx) talem nempe ut radix quadrata ex altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies esse aaxx ideoque utrimque hoc +aaxx addito et radice quadrata extracta invenies $xx - ax + aa \propto x\sqrt{aa+cc}$ atque ideo proposita aequatio ex multiplicatione duarum sequentium aequationum resultare poterit.

$$xx \begin{array}{l} -ax \\ -\sqrt{aa+cc} \end{array} + aa \propto 0 \quad \text{et} \quad xx \begin{array}{l} -ax \\ +\sqrt{aa+cc} \end{array} + aa \propto 0$$

3 Magnum quoque usum habent aliae quaedam regulae tam in reducenda aequatione quae per rationales quam quae tantummodo per irrationales reduci possunt. Sic ex gr: per regulam omnes aequationes reduci poterunt, ~~quae~~ solutionem difficiliores habeat prout ibi ~~propositum~~ consideratur, id est si consideretur secundum incognitam quantitatem sed etiam si tantum quaevis alia litera, sive cognita sive incognita, reperitur quae ut incognita consideratur, et aequatio secundum illam in ordinem redacta talis sit ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt. Sic quamvis sequens aequatio

$$x^3 - 2axx + 3abx \begin{array}{l} +6a^3 \\ +6abb \end{array} \propto 0$$

$$\text{et} \quad x^3 + 2axx \begin{array}{l} +4aax \\ +2ab \end{array} \begin{array}{l} -4a^3 \\ -8b^3 \end{array} \propto 0$$

Product: x^6 est: produci possit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, si scilicet x ut incognita quantitas consideretur, poterit tamen ex duabus aliis produci si vel a vel b ut incognita quantitas consideretur ut ex aequationibus ex quibus producta est, patet; ac proinde aequatio illa proposita per regulam reduci poterit.

~~Haec~~ Et itaque sunt quae concernunt ~~aequationum~~ regulas de reductionem ~~eas absolute considerando jam eas prout relative referuntur ad problema ex quo deducuntur~~ ~~proponamus~~ jam ordinem quo commodissime adhiberi videntur, sunt quae sequuntur: Primo per primam regulam videndum ut minima aequatio obtineatur, quod si non fieri possit ~~ac quantitates cognitae quae in ea reperiuntur numeros fractos continent ad integros~~ inquirendum per regulam quae ostendunt aequationem vel non esse reducibilem vel in quantum vel per quales, ~~sic~~ non reducibiles sint primo hoc plerumque intuitu pareat aut saltem magna ex parte adeo ut multi labor sit tali in casu praescindatur. At si hoc non ita appareat transeundum est ad regulam 9 Cum primis si ultimus aequationis terminus multos divisores vel qui inventu difficiles sunt admittat, vel si aequatio surdos aut fractos quantitates contineat) per quam omnes reduci possunt quae divisibiles sunt per alteram in qua una aut plures quantitates desunt sive aequationem in ordinem redigas respectu incognitae sive respectu alicuius cognitae quae ut incognita desideratur et sic omnes paene ~~numera~~biles et irreducibiles aequationes ut et quamplurimae numerales reduci possunt. Si vero nec hoc pacto succedat reductio eam per caeteras regulas inquirenda auferendo si quas sit fractos et similiter surdos quantum possibile ad rationales reducendo.

~~Ex~~tractio Radicum ~~q~~ hac intentum reductionis hactenus adhibita, incognitam nimis: ad alteram æquationis partem transferendi impetramus, quod cum varie ~~hoc~~ fieri possit, necessarias ad id efficiendum regulas trademus ~~[illegible]~~ quarum

1 Quæ docet, qua ratione æquationis radices inveniendæ, si summa duarum radicum sit cognita;

Si habeamus æquationem $x^3 + pxx - qx + r \propto 0$ ubi valor duarum radicum additarum sit $\propto b$, supponamus æquationem hanc ortam esse ex Multiplicatione sequentium

$$x - y \propto 0$$
$$x - b + y$$
$$xx - bx + by - yy \propto 0$$
$$x + n \propto 0$$
$$x^3 - bxx + byx + byn$$
$$+ nxx - yyx - yyn$$
$$- bnx$$
$$x^3 + pxx - qx + r \propto 0$$

Hinc oriuntur 3 æquationes

$p \propto n - b \quad \therefore p + b \propto n$

$-q \propto by - yy - bn \quad \therefore \dfrac{by - yy + q}{b} \propto n$

$by - yy \propto r \qquad \dfrac{r}{by - yy} \propto n$

hinc $p + b \propto \dfrac{by - yy + q}{b}$ et $yy - by + pb + bb - q \propto 0$.

ac proveniet $y \propto \frac{1}{2}b + \sqrt{q - \frac{3}{4}bb - pb}$

et $b - y \propto \frac{1}{2}b - \sqrt{q - \frac{3}{4}bb - pb} \propto 0$

2 Eadem ~~ratione~~ ~~poterunt~~ regula inveniri pro inveniendis radicibus si radicum ~~aut~~ differentia sit data vel productum sive quotiens

2 Quæ docet, qua ratione æquationis radices inveniendæ, si sint in proportione Arithmetica;

Supponamus x esse $\propto y + t$ pro primo
$x \propto y - t$ 2do
$x \propto y$ tertio

hinc
$$\left.\begin{aligned} x - y - t \propto 0 \\ x - y + t \propto 0 \end{aligned}\right\} M.$$
$$xx - 2yx + yy - tt$$
$$x - y \propto 0$$
$$x^3 - 3yxx + 3yyx - y^3 \propto 0$$
$$- ttx + ytt$$
$$A.\ x^3 - pxx + qx - r \propto 0$$

unde tres æquationes

$3y \propto p$; $3yy - tt \propto q$; $-y^3 + ytt \propto -r$

$y \propto \frac{p}{3}$ restituto y erit $-y^3 \propto -\dfrac{p^3}{27}$

$\dfrac{pp}{3} - tt \propto q$ $\qquad ytt \propto \dfrac{ppy}{3} - qy$ $\qquad$ S: $\dfrac{p^3}{9} - \dfrac{pq}{3}$

$\sqrt{\dfrac{pp}{3} - q} \propto t$

$$\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} \propto -r$$

$r \propto \dfrac{pq}{3} - \dfrac{2p^3}{27}$ id quod indicat, si æquatio aliqua cubica habeat radices in proportione Arithmetica fore $r \propto \dfrac{pq}{3} - \dfrac{2p^3}{27}$

radices autem erunt $x \propto y + t \propto \dfrac{p}{3} + \sqrt{\dfrac{pp}{3} - q}$ et $x \propto y - t \propto \dfrac{p}{3} - \sqrt{\dfrac{pp}{3} - q}$

ac $x \propto y \propto \dfrac{p}{3}$: eadem ratione regulæ in aliis æquationibus hac conditione existente inveniri poterunt; ~~vide alibi~~ si tres radices in proportione Geometrica aut quacunque alia sint vide duabus versis paginis ~~§~~

3 Quæ docet solvere æquationem, in qua radices datam rationem inter se habent;

Si habeamus $y^3 - pyy - qy + r \propto 0$ ac radices duæ rationem inter se servant talem qualis e inter x et a pono unam ex his radicibus $y \propto e$ ergo altera $y \propto ae$ ac operor ut sequitur

$$\begin{array}{l} y-e \\ y-ae \propto 0 \\ \hline yy \begin{smallmatrix}-e\\-ae\end{smallmatrix} y + aee \propto 0 \\ y+z \\ \hline y^3 \begin{smallmatrix}-e\\-ae\\+z\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}+aee\\-ez\\-aez\end{smallmatrix} y + aeez \\ \hline y^3 - pyy - qy + r \propto 0 \end{array}$$

oriuntur hinc 3 æquationes

$-p \propto -e - ae + z$ et $e + ae - p \propto z$

$-q \propto + aee - ez - aez$ $\quad \frac{q+aee}{e+ae} \propto z$

$+r \propto aeez$ $\quad \frac{r}{aee} \propto z$

Unde est

$z \propto \frac{e+ae-p}{1} \propto \frac{q+aee}{e+ae} \propto \frac{r}{aee}$

$ee + aee + aaee - pe - pae - q \propto 0$

Si jam y ponamus loco e erit $yy + ayy + aayy - py - pay - q \propto 0$ id quod indicat ejusdem conditionis æquationem statim obtineri posse ex data æquatione, Multiplicando eandem per talem progressionem ut sequitur

$$\begin{array}{lllll} & y^3 & -pyy & -qy & +r \propto 0 \\ \text{Mult.} & x+a+aa, & x+a & x & 0 \\ \hline \text{Differen:} & aa, & a. & x & D \end{array}$$

provenit $y^3 + ay^3 + aay^3 - pyy - apyy - qy * \propto 0$

i: $yy + ayy + aayy - py - apy - q \propto 0$

Progressio autem per quam hæc multiplicata talem differentiam servat quam indicavimus, adeo ac hoc medio obtinetur $y \propto e$

sit $x^3 - 3xx - 28x + 60 \propto 0$ ac habet duas radices in ratione [illegible] itaque

$$\begin{array}{lllll|llll} & x^3 & -3xx & -28x & +60 \propto 0 & x^3 & -3xx & -28x & +60 \propto 0 \\ \text{Mult.} & 13. & 4 & x & 0 & 0 & -x & -1\frac{1}{3} & -x\frac{4}{9} \\ \hline \text{Diff:} & 9 & 3. & x. & & x. & \frac{1}{3}. & \frac{1}{9} & \end{array}$$

$13x^3 - 12xx - 28x * \propto 0$ $\quad 3xx + 37\frac{1}{3}x - 86\frac{2}{3} \propto 0$

$13xx - 12x - 28 \propto 0$ $\quad$ s. i: $9xx + 112x - 260 \propto 0$

Hinc obtinemus duas æquationes, Multiplicando primam per 9 secundam per 13 habebimus $117xx - 108x - 252 \propto 117xx + 1456x - 3380$ ac $x \propto 2$

Si vero in priori inventa æquatione $ee + aee + aaee - pe - pae - q \propto 0$ ponamus loco e quod hoc est $\frac{y}{a} \propto e$ et $\frac{yy}{aa} \propto ee$ obtinebit $\frac{yy}{aa} + \frac{yy}{a} + yy - \frac{py}{a} - py - q \propto 0$

hæc omnia Multiplicata per aa exhibet $yy + ayy + aayy - apy - aapy - aaq$ ejusdem conditionis æquatio ante statim praestita est si eandem Multiplicemus per sequentem progressionem talem differentiam habentem ubi in D annotavimus

$$\begin{array}{lllll} & y^3 & -pyy & -qy & +r \\ \text{Mult:} & x+a+aa & a+aa. & aa. & 0 \\ \hline \text{Diff:} & x & a & aa & D \end{array}$$

erit $y^3 + ay^3 + aay^3 - apyy - aapyy - aaqy * \propto 0$

i: $yy + ayy + aayy - apy - aapy - aaq \propto 0$

62

hoc medio obtinetur ~~valor~~ $2x \propto y$ p ac. si jam denuo assumamus p q ex regula

$x^3 - 3xx - 28x + 60 \propto 0$ $\qquad$ $x^3 - 3xx - 28x + 60 \propto 0$

Multo. x. 4. 13 $\qquad$ $1\frac{4}{9}$ x $\frac{1}{3}$ x 0

x 3 9 $\qquad$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ x

$-3xx - 112x + 780 \propto 0$ $\qquad$ $1\frac{4}{9}x^3 - 4xx - 28x * \propto 0$

$\qquad$ $f: 13xx - 36x - 252 \propto 0$

Si jam harum duarum ~~aequationum~~ rationum primam multiplicamus per 13, secundam per -3 habebimus: $-39xx - 1456x + 10140 \propto -39xx + 108x + 756$ & $x \propto 6$

Ex quibus omnibus sequitur si ponatur aequationem quamvis duas aequales radices habere, quae sunt in ratione x ad x: eam tantum multiplicandam esse per arithmeticam progressionem ~~ascendentem ut sequitur~~ ...

sit $y^3 - pyy - qy + r \propto 0$ $\qquad$ si harum aequationum primam multiplicamus per 3 secundam per $-p$, habebitur

Mult. p. 0 x 2 3

3 2 1 0

provenit ~~x~~ $-pyy - 2qy + 3r \propto 0$ $\qquad$ $-3pyy - 6qy + qr \propto -3pyy + 2ppy + pq$

ac $3y^3 - 2pyy - qy * \propto 0$ $\qquad$ ac. $qr - pq \propto 2ppy + 6qy$ ac $\frac{qr - pq}{2pp + 6q} \propto y$

4. Quae docet ~~quadraticas aequationes resolvere; quibus radix vel radix vel~~ ~~Exeundo ex dimensionum: sit~~ quadraticas aequationes resolvere:

si habeatur $xx : px . q . \propto 0$ ~~scribatur~~ scribatur $x \propto \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp \,\&\, qq}$ pro una radice pro altera $x \propto \& \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp \,\&\, q}$ quod sic patet: sit ~~primus~~

$x \propto y + \frac{z}{2}$ unde $x - y - \frac{z}{2}$
$2x \propto y - \frac{z}{2}$ $\qquad$ $x - y + \frac{z}{2} \propto 0$ $\qquad$ unde $p \propto 2y$ $\qquad$ $yy - zz \propto q$ seu

$xx - 2yx + yy - zz \propto 0$ $\qquad$ $y \propto \frac{p}{2}$ $\qquad$ restituto y

$\qquad$ $\frac{pp}{4} - zz \propto q$

$xx - px + q \propto 0$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{pp}{4} - q} \propto z$

unde $x \propto y + \frac{z}{2} \propto y + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$

$x \propto y - \frac{z}{2} \propto y + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$ $\qquad$ vide 7 versus paginis: O-O

idem obtineri potest auferendo in tali aequatione secundum terminum

5. Quae docet Cubicas aequationes resolvere:

si habeatur $x^3 . pxx . qx . r \propto 0$ ~~scribatur~~ ablato prius secundo termino

si obtineatur $x^3 \propto qx + r$ scribatur $x \propto \sqrt{C.\ \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$

si sit ~~x^3~~ $x^3 \propto qx - r$ $\qquad$ $x \propto \sqrt{C. -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C. -\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$

$x^3 \propto -qx + r$ $\qquad$ $x \propto \sqrt{C.\ \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$

$x^3 \propto -qx - r$ $\qquad$ $x \propto \sqrt{C. -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C. -\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$

Quod ibidem sic constat sint $\quad x^3 \propto * + px + q$
$x^3 \propto * + px - q$
$x^3 \propto * - px + q$
$x^3 \propto * - px - q$:

ut itaque ejusdem formae aequationem ~~obtineamus~~ multiplicando
ponamus $x \propto y + z$, quod si ab utraque parte cubice multiplicetur habebimus
$x^3 \propto y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3$ tum ponatur x loco $y + z$ et obtinebitur
$x^3 \propto 3zyx + y^3 + z^3$ si hanc aequationem comparemus cum primo casu
resultabunt hinc duae aequationes:

$p \propto 3zy$ sive $\frac{p}{3z} \propto y$ | ponatur $\frac{p}{3z}$ in locum y habebitur $\frac{p^3}{27z^3} \propto q$
$q \propto y^3 + z^3$ et $y^3 \propto q - z^3$ | $-z^3$ sive $p^3 \propto 27qz^3 - 27z^6$ et $z^6 - qz^3$
$+\frac{1}{27}p^3 \propto 0$ ponatur jam $u \propto z^3$ et erit $uu - qu + \frac{1}{27}p^3 \propto 0$ ac $u \propto z^3$
$\propto \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ hinc $q - z^3$ erit $\propto y^3 \propto \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$
Unde erit $z \propto \sqrt{C\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ et
$y \propto \sqrt{C\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ ~~ergo~~ $y + z$ sive:
$x \propto \sqrt{C\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ eadem ratione
procedendum in ~~aliis~~ ceteris casibus ac aequationibus ~~aliarum~~ pluriumm Dimensio-
num:

6 Qua ratione valorem radicum, alicujus aequationis, sic aliter non invenire
liceat quaeramus per approprinquationem sic si habeamus:
$x^3 + 2xx - 23x - 70 \propto 0$ sive: $x^3 + 2xx \propto 23x + 70$ ponamus primo $x \propto x$ hoc est
unitatem in locum x sed comperietur nimis parva esse unde ponamus $x \propto 10$ hoc est 10
in locum x 100 loco xx ac 1000 loco x^3 provenit justo nimium assumo itaque
$x \propto 5$ provenit justo minus hinc pono $x \propto 6$ provenit justo nimium, eligo
$x \propto 5.5$, hoc est $5\frac{5}{10}$ provenit ibidem justo nimium; pono itaque $x \propto 5, 2$, provenit
item plus unde pono $x \propto 5.$ x exsurgit minus hinc iterum inter utrumque repono
$x \propto 5, 15$ resultat plus et $x \propto 5.15$, obtinebitur plus pono $x \propto 5, 138$, habebitur plus
et $x \propto 5, 134$ provenit minus ut itaque valor x ~~excedit~~ excedit $5\frac{134}{1000}$ ac minus est
$5\frac{135}{100}$ ~~sive~~ hac ratione progrediendo ~~ulterius~~, tam prope ad verum valorem accedere
possumus quantum volumus erit.

7 Qua Methodo sciri possint, limites, inter quos valor radicum comprehendi
possit: si habeamus $x^3 \ast - qx + r \propto 0$ sive: $x^3 + r \propto qx$ tunc certo qx majus est quam
r utrumque per q dividendo obtinemus x majus $\frac{r}{q}$ eadem ratione qx majus
est x^3 ac q majus xx hinc $\sqrt{q}$ majus x, invenimus itaque x majorem esse quam $\frac{r}{q}$
et minorem $\sqrt{q}$
Si habeamus $x^3 \ast + qx - r \propto 0$ sive: $x^3 + qx \propto r$, erit r majus qx et $\frac{r}{q}$ majus x
hinc etiam r majus x^3 et $\sqrt{C\, r}$ majus x unde $x\sqrt{C\, rr}$ majus x^3 ~~unde~~ itaque
$x\sqrt{C\, rr} + qx$ majus r et x majus $\frac{r}{\sqrt{C\, rr} + q}$ invenimus itaque x majorem
$\frac{r}{\sqrt{C\, rr} + q}$ et minorem $\frac{r}{q}$
Si habeamus $x^3 - pxx + qx - r \propto 0$ hoc est $x^3 - pxx \propto r - qx$ si sit ~~sive~~ majus ~~sit~~ p

Si autem radices sint in proportione geometrica hoc modo commode resolutio patet:

Sit 1ª $x \propto \frac{y}{z}$ jam ibus

2ª $x \propto y$

3ª $x \propto yz$

$$\left.\begin{array}{l} x - \frac{y}{z} \propto 0 \\ x - y \end{array}\right\} M$$

$$\left.\begin{array}{l} xx - \frac{yx}{z} + \frac{yy}{z} \propto 0 \\ \quad - yx \\ x - yz \propto 0 \end{array}\right\} M$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - \frac{yxx}{z} + \frac{yyx}{z} - y^3 \\ \quad - yxx + yyx \\ \quad - yzxx + yyzx \end{array}\right\} \propto 0$$

$x^3 - pxx + qx - r$ hinc comparatio:

p

$\frac{y}{z} + y + yz \propto p$

$y + yz + yzz \propto pz$

$y \propto \frac{pz}{1 + z + zz}$

q

$\frac{yy}{z} + yy + yyz \propto q$

$yy + yyz + yyzz \propto qz$

$yy \propto \frac{qz}{1 + z + zz} \propto$ ex priori $\propto \frac{ppzz}{\cancel{1 + 2z + 3zz + 2z^3 + z^4}}$ $1 + z + zz$

$q + qz + qzz \propto ppz$

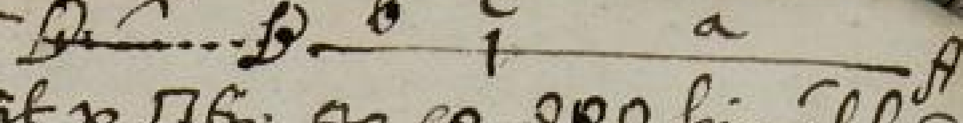
$zz \propto \frac{ppz - qz}{q} - 1$

$z \propto \frac{pp - 2q}{2q} + \sqrt{\frac{p^4 - 4ppq + 4qq}{4qq}} - 1$

$z \propto \frac{pp - q}{2q} + \sqrt{\frac{p^4 - 2ppq - 3qq}{4qq}}$

3

$y^3 \propto r$ unde $y \propto \sqrt{c.\, r}$:

~~Sit~~ propositũ data linea AB divisa 
in C ita producere in D ut □ à CD sit $\propto$ □bis AC, CB, & BD simul sum-
ptis; sit AC $\propto$ a, BC $\propto$ b & DB $\propto$ x unde juxta hypothesin

$\cancel{bb} + 2bx + \cancel{xx} \propto \cancel{xx} + \cancel{bb} + aa$ jam si velimus hujus rei probationẽ
& $x \propto \frac{aa}{2b}$ in numeris integris exhibere, sic proce-
dendũ erit reductis omnibus quantitatibus quae Problemati explicando in-
serviunt ad eandẽ denominatorem, sic hic $\frac{AC}{a}$ $\frac{CB}{b}$ $\frac{BD \propto x}{\frac{aa}{2b}}$ quo ablato

erit $\overline{2ab \quad 2bb \quad aa}$ ~~sit itaque~~

~~a $\propto$ x~~ & jam ~~quantitates~~ numeri ~~pro~~ pro a & b assumi poterunt, qui si ita praeparentur
... ut AC $\propto$ evadat 2ab, CB $\propto$ 2bb BD $\propto$ aa semper hi quaesito satisfacient:
sit a $\propto$ x & b $\propto$ x unde AC $\propto$ 2 CB $\propto$ 2 BD $\propto$ x

2	3	12	18	6
x	2	4	8	2

atque sic porro poterunt
& hinc omnium qui ~~minimi~~ esse possunt minimi in integris inveniri.
sint ~~sit~~ ~~eisdem~~ porro eadem quae prius data, oportet BA ita producere in D, ut ▭ sub
ADB sit $\propto$ □ DC; hoc ẽ $bb + \cancel{2}bx + \cancel{xx} \propto ax + \cancel{bx} + \cancel{xx}$

$\overline{bb \propto ax - bx}$ & $x \propto \frac{bb}{a-b}$, si jam velimus pro
a & b tales numeros eligere, ut DB sit integer; Quantitatibus
$\frac{DB}{\frac{bb}{a-b}}$ $\frac{BC}{b}$ $\frac{CA}{a}$ ad eandẽ denominatorẽ reductis & ergo ablato

erit $\overline{bb \propto DB}$ $BC \propto ab - bb$ $CA \propto aa - ab$; unde si assumpti numeri ~~juxta~~ sub hac
determinationẽ ~~inventarum quantitatum~~ ut ab major sit bb, ita quod aa quantitate
bb, efficiant supra inventis; jam ultimo quantitatibus; ~~qui~~ qui ~~prove~~ hinc veniunt numeri
quaesito satisfacient; sit a $\propto$ 4, b $\propto$ 3, erit quod bb $\propto$ 9 $\propto$ DB, ab − bb $\propto$ 3 $\propto$ BC ulti-
mo aa − ab $\propto$ 4 $\propto$ CA; ▭ sub ADB & □ sub DC $\propto$ 144. ~~et~~ et idẽ in aliis locum habent.

—

66

erit $\frac{r}{q}$ majus quam x verum si p majus x erit x majus $\frac{r}{q}$, invenimus itaque valorem x esse inter p et $\frac{r}{q}$.

Si habeamus $x^3 - pxx - qx + r \propto 0$ hoc est $x^3 + r \propto pxx + qx$, apparet itaque $pxx + qx$ majus quam r ac x majus quam $\frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$ porro $pxx + qx$ majus est quam x^3 hoc est $px + q$ majus est quam xx hinc $\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$ majus est quam x invenimus itaque x majus quam $-\frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$ ac minus quam $\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

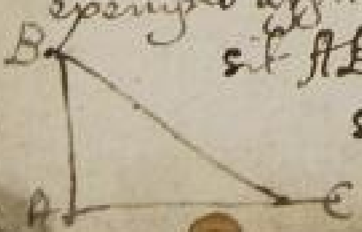
Idem aliter $x^3 + r \propto pxx + qx$ unde $px + q$ majus est xx, ~~itaque~~ cum x majus sit $\sqrt{q}$ ergo quoque $px + x\sqrt{q}$ majus erit xx et $p + \sqrt{q}$ majus x, sique $\sqrt{q}$ majus x, erit $p + \sqrt{q}$ multo majus quam x; porro $pxx + qx$ excedit r, unde cum $p + \sqrt{q}$ majus est x etiam $ppx + px\sqrt{q}$ majus erit pxx, ergo $ppx + px\sqrt{q} + qx$ majus r et x majus $\frac{r}{pp + p\sqrt{q} + q}$ invenimus itaque x majus esse $\frac{r}{pp + p\sqrt{q} + q}$ ac minus $p + \sqrt{q}$

Si habeamus $x^4 ~~x~~ - qxx - rx ~~x~~ \propto 0$ erit $x^4 - qxx \propto rx + s$ ergo xx majus q et x quam $\sqrt{q}$ et $x^3\sqrt{q}$ quam qxx porro $x^4 - rx$ est $\propto qxx - s$ unde est x^3 majus rx, majus $\sqrt{C.r}$, et $x^3\sqrt{C.r}$ majus rx, denique $x^4 - s$ est $\propto qxx + rx$ unde x^4 majus s; et x quam $\sqrt{qq.s}$ ac $x^3\sqrt{qq.s}$ quam s: etiam $x^4 \propto qxx + rx - s$ unde $x^3\sqrt{q} + x^3\sqrt{C.r} + x^3\sqrt{qq.s}$ majus x^4 et $\sqrt{q} + \sqrt{C.r} + \sqrt{qq.s}$ majus x invenimus itaque x majus $\sqrt{q}$ s. $\sqrt{C.r}$ s. $\sqrt{qq.s}$ verum minus $\sqrt{q} + \sqrt{C.r} + \sqrt{qq.s}$ et ~~Nostris~~ ~~ita~~ cum alijs procedendum erit

~~Propria~~ haec ~~ago~~ ~~de~~ pendit quasi solutione aequationum possibilium, impossibilium ac Indeterminatarum sunt observanda: et quidem quoad ~~Possibiles seu determinatas~~ quaedam hic annotanda veniunt.

1. Si quaestiones ~~propositae~~, ut in numeris saepius fieri solet occurrant, in quibus quantitates certa operatione in alias transformantur, hae sic transformatae iterum in alias alij sic porro, tandem quid ultimo proveniat indicatur: refert eas ad calculum abbreviandum in certas partes ~~resolvendo~~ dispescendo, resolvere ~~___~~. vid:

2. Multis quaestionibus resolvendis inservit si sciamus, fractiones in integros, irrationales autem in ~~irrationales~~ ~~promovere~~ convertere; primum sic fit, ~~omnes~~ quantitates ~~communis~~ ~~fractiones~~ in integris exhibendae ad communem denominatorem reducantur quo ablato numeratores quaesito satisfacient: ~~___~~ ~~secundo~~ ~~___~~ sit $x \propto \sqrt{yy + a}$ jam talis quantitas loco y invenienda ut $yy + a$ rationale quadratum designet; supponendo itaque radicem hujus quadrati $y + b$ pro libitu erit $yy + 2yb + bb \propto yy + a$ unde $y \propto \frac{a - bb}{2b}$ ubi notandum operationem hanc ita institui debere, ut $y \propto$ proveniat quantitati rationali ut hic factum, sive idem ut y post reductionem in aequatione simpliciter remaneat non autem eius quadratum vel cubus s. altioris dimensionis, ~~nec~~ tali ratione ut prorsus tollatur. hinc non assumemus $yy + b$ nec by; sit denique $x \propto \sqrt{y + a}$ observamus itaque jam indicatas conditiones video assumere posse loco radicis b unde $bb \propto y + a$ et $y \propto bb - a$, quae hactenus diximus exemplo applicabimus: sit propositum rationalia Rectangula invenire



sit $AB \propto x$ $AC \propto y$ unde $BC \propto \sqrt{xx + yy}$ necesse itaque ita ut $\sqrt{xx + yy}$ rationale sit, assumendo itaque pro radice $x + b$ erit $yy ~~+xx~~ \propto ~~xx~~ + 2bx + bb$ unde

1

$x \propto \frac{yy-bb}{2b}$ erunt latera AB $\frac{yy-bb}{2b}$ AC y BC $x+b$

$S: yy-bb. \quad 2by. \quad yy+bb$ ponendo $\frac{yy-bb}{2b}$

pag. ab hinc 3. in locum x ac quantitatibus ad communem denominatorem reductis, eoque ablato; vid: 18 et 12 ~~ibum~~ ad majorem illustrationem sint sequentia:

3 ~~Alterum~~ inventio supponendi duas ejusdem formae aequationes ad comparandum separatim omnes terminos alterius, ut exinde ex una sola nascantur plures. alia ejus exempla in prioribus vidimus et adhuc in sequentibus quaedam tradentur infinitis aliis problematibus inservire possit; hic exempli loco adjungemus (cum saepe usu sit) quomodo absque ulla divisionis operatione scire possimus si nobis nota sit aequatio proposita dividenda, quid post divisionem sit illa in quotiente relinquatur sic si habeamus

$x^4 + px^3 + qxx + rx + s \propto 0$ quod dividi posset per $x+b \propto 0$ poterit quotiens sine ulla divisione obtineri tali modo; suppono aequationem ortam esse ex multiplicatione sequentium aequationum.

$$\begin{array}{l} x^3+kxx+lx+m \propto 0 \\ x+b \propto 0 \\ \hline x^4+kx^3+lxx+mx \\ \quad +bx^3+bkxx+blx+bm \\ \hline x^4+px^3+qxx+rx+s \propto 0 \end{array}$$

erit que $p \propto k+b$ et $k \propto p-b$

$q \propto l+bk$ ac k restituto $l \propto q-pb-bb$.

$r \propto m+bl$ ac l restituto $m \propto r-qb+pbb-b^3$

$s \propto bm$ ac $m \propto \frac{s}{b}$

si jam in aequatione $x^3+kxx+lx+m \propto 0$ loco k, l, ac m, subrogamus inventas quantitates provenient

$$x^3 \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +q \\ -pb \\ +bb \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +r \\ -qb \\ +pbb \\ -b^3 \end{smallmatrix} \propto 0 \quad \text{vel} \quad x^3 \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +q \\ -pb \\ +bb \end{smallmatrix} x + \frac{s}{b} \propto 0$$ cum valor [illegible] utriusque eiter obtineri [illegible].

sit exempli gratia $x^4 - 10x^3 + 27xx - 6x - 24 \propto 0$ hoc dividi potest per $x-4 \propto 0$

erit itaque $x^3 \begin{smallmatrix} -10 \\ +4 \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +27 \\ -40 \\ +16 \end{smallmatrix} x - \frac{24}{-4} \propto 0$ $S: x^3 - 6xx + 3x + 6 \propto 0$ quotiens quaesitus

porro, si p sit $\propto 0$ erit $x^3 - bxx \begin{smallmatrix} +q \\ +bb \end{smallmatrix} x + \frac{s}{b} \propto 0$ si $q \propto 0$ $x^3 \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -pb \\ +bb \end{smallmatrix} x + \frac{s}{b} \propto 0$

si $s \propto 0$ simul $\propto 0$ erit ac habebitur $xx \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +q \\ -pb \\ +bb \end{smallmatrix} \propto 0$ $S: xx \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} x + \frac{r}{b} \propto 0$

si r et s sit $\propto 0$ etiam l ac m aequabitur 0 et obtinetur $x \begin{smallmatrix} +p \\ -b \end{smallmatrix} \propto 0$ $S: x + \frac{q}{b} \propto 0$

atque ita de aliis:

4 Si occurrunt quaestiones sive problemata, de inveniendis Tangentibus, Determinandis maximis ac minimis, ac inveniendis centris similibusque quaestionibus, hinc beneficio sequentium Methodorum ~~quae~~ ~~[illegible]~~ commode inveniri poterit quarum 1 fit ~~suppositione duarum ejusdem formae~~ aequationum comparatione, quod exemplis clarius fiet quam ~~quando~~ exhibebimus

De inveniendis Tangentibus sit

1 Data linea curva CE oporteatque per punctum C rectam lineam ducere CF facientem cum ipsa angulos rectos vid: 1 figur. $\neq$

2 ~~sit ipsa Tangens CT investiganda~~

3 sit ex puncto O (in eadem figura) supra axin vel diametrum data ducenda recta linea OC quae curvam tangat ita ut satisfiat tali modo instituenda erit operatio

1. Datum rationale □tum in duo rationalia quadrata dividere. ponamus

Rationale □tum aa ac unam partem xx, unde altera $aa-xx$ nihil itaque

superest quam ut $aa-xx$ rationale □tum sit, ad quod obtinendum ponamus radicem

esse $bx-a$; assumsi autem a ad tollendam quantitatem aa quia tunc omnia per

x poterunt dividi; assumsi quoque $-$ nec $+$ quia tunc $-$ pro $+$ et $+$ pro $-$

du; assumsi denique x non ~~sed~~ sed bx quia xx ~~...~~ non potest generaliter tolli

cum hic ~~..~~ signum adsit et quaevis alia quantitas in se multiplicata $+$ produ-

cat, etiam hanc ob rationem quod assumendo $x-a$ sive $a-x$ x pro a invenietur

pars ... quod absurdum, ab dictis itaque rationibus retinentur $bx-a$ quadratum

est $bbxx-2bax+aa$ pro erit $aa-xx$ unde $-xx$ pro $bbxx-2bax$ et $-x$ pro $bbx-2ba$

unde tandem x pro $\frac{2ba}{bb+1}$ dato itaque aa pro 16 ac supponendo b pro 2 erit x pro $\frac{16}{5}$

partes itaque □ti erunt $\frac{256}{25}$ et $\frac{144}{25}$ easdem quantitates obtinemus sumendo b pro 3

verum b pro 7 sumendo partes erunt $\frac{784}{625}$ et $\frac{9216}{625}$ hinc eadem ratione datum

quadratum in datam summam rationalium □torum dividi potest, habemus n;

jam duo rationalia quadrata, si jam horum alterum eadem ratione in duo altera

dividamus obtinemus tria, jam iterum alterum rationale □tum vel quodcunque

ex his tribus in alia duo relinquuntur etc. et sic porro idem de cubis aut aliis

quibusvis potestatibus intelligendum.

2. Duo Triangula Isoscelia invenire, aequalis areae ac ambitus

ponamus BD pro $2xy$ Hoc n. ex iis quae modo habuimus de triangulis rationalium laterum inveniendis patet

AD pro $xx-yy$

unde AB pro $xx+yy$

Item GH pro $2tu$ existunt itaque omnia rationalia

FH pro $tt-uu$ Ambitus erit $4xx$ et $4tt$ horum vero area $2x^3y-2xy^3$

ac FG pro $tt+uu$ et $2t^3u-2tu^3$ unde erit ex hypothesi quaestio-

nis $4xx$ pro $4tt$ et x pro t item $2x^3y-2xy^3$ pro $2x^3u-2xu^3$ diviso utrique per $2x$

erit ——— $xxy-y^3$ pro $xxu-u^3$

sive $xxy-xxu$ pro y^3-u^3 et diviso utrique per $y-u$

erit xx pro $yy+yu+uu$; nihil jam itaque superest

quam ut $yy+yu+uu$ rationale □tum sit, ~~unde~~ ~~ut~~ ergo x rationale obtinebitur

quemadmodum itaque $b-y$ pro radice hujus □ti ~~erit y p~~ invenimus y pro $\frac{bb-uu}{2b+u}$

si hinc assumamus b pro 10 u pro 5 invenietur y pro 3 et x pro 7 unde AB 58

AD pro 40 et FG pro 74 FH pro 24 area ~~ac ambitus~~ utrobique 1680 ac ambitus

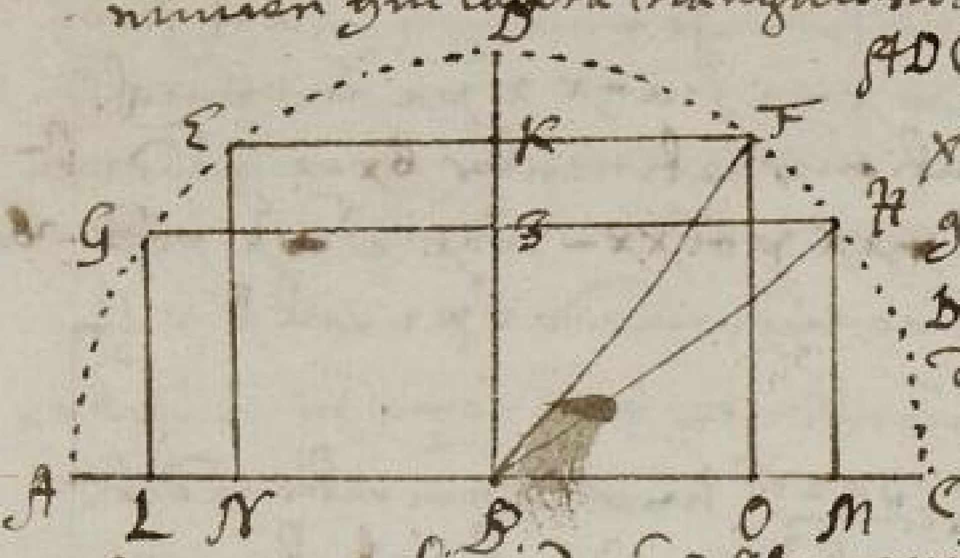
196. Nonsequitur in aliis applicationibus applicandis operationibus instituetur.

69

3 ~~O~~ sit jam $y \propto 2$ $b \propto x$ erit AB AC BC (assumendo 2 et 3, 4 et 5, 6 et 3 etc.:)

		3	4	5
3	x	8	6	10
4	x	15,	8	17 atque sic porro, ubi, mirum
5	x	24	10	27 circa hanc proprietatem

notes, quod si assumantur quicunque numeri ac unitate, tollerac efficiantur tales numeri qui latera triangulorum Rectangulorum constituant; si tunc in circulo ADC, radius BD in tot partes dividatur quot continet partes numerus, DK autem et DI tot assumantur quot reliqui speciatim continent. (sit e.g: $BD \propto 5$ $DK \propto 4$, $DI \propto 3$ vel $BD \propto 10$, $DK \propto 8$ et $DI \propto 6$ etc.) duo $\square$la LGHM et NEFO habere ibidem rationalia latera et quoad aream fere similes



fere aequalia; id quod sit experiendo sit inveniendum quod dixi, et BD plane assumatur a, $\propto$ BF seu BH, DI vero $\propto y$ $DK \propto x$ unde et 47 lib. I $BO \propto \sqrt{aa-xx}$ et $BM \propto \sqrt{aa-yy}$ hinc $2\sqrt{aa-xx} \propto NO$ et $2\sqrt{aa-yy} \propto LM$ multiplicantur.

$$\overline{2x} \qquad \overline{y}$$

eritque $\square$ NEFO $\propto 2x\sqrt{aa-xx} \propto 2y\sqrt{aa-yy} \propto \square$ LGHM:

$$aaxx - x^4 \propto aayy - y^4$$
$$+ \qquad - \qquad +$$

\# unde hoc solum restat ut $aa-yy$ sit rationale quadratum unde assumendo quod radice $ay-a$ erit

$aa-yy \propto aayy - 2aay + aa$

$\mp y \propto aay \mp 2aa$.

$x^4 \propto aaxx + y^4 - aayy$

$x \propto \sqrt{\frac{aa}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} + y^4 - aayy}}$

$x \propto \sqrt{\frac{aa}{2} + \frac{aa}{2} - yy}$

$x \propto \sqrt{aa-yy}$ \#

nota hic radix tantum valet

$y \propto \frac{2aa}{aa+x}$ unde $x \propto \frac{a^3-a}{aa+x}$ et Radius BC $\propto a$ his quantitatibus ad communem denominatorem reductis eoque ablato habebis

$y \propto 2aa$ $\quad x \propto a^3-a$ $\quad$ Radius BC $\propto a^3+a$ seu divisis ubique per a

$y \propto 2a$ $\quad x \propto aa-x$ $\quad$ BC $\propto aa+x$ sitque

a $\propto$ 2 unde 2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17 atque sic porro ~~quod~~

unde id ita se habere quod antea insinuavimus facile liquet

70

1 Suppono rem tanquam factam, lineamque quaesitam esse ~~vel~~ CL, tunc facio CM $\propto$ x et MA $\propto y$ ~~ut habeam aequationem aliquam quae mihi relationem~~ inter x et y explicet deinde facio
PC $\propto s$ et PA $\propto v$ unde PM $\propto v-y$ tunc propter $\triangle$ rectang: PMC invenio ~~PMC~~ $\boxed{ss}$ $\propto$
$xx+vv-2vy+yy$ $\square$ tis laterum PM, MC. hoc est invenio $x \propto \sqrt{ss-vv+2vy-yy}$ et $y \propto$
$v-\sqrt{ss-xx}$

2 Assumo proprietatem aliquam curvae lineae quae cum illa sit reciproca sit. eg: haec curva Parabola ejusque latus rectum $\propto r$ erit ex natura Parabolae $ry \propto xx$ quae aequatio mihi relationem inter x et y in hac curva explicat; tunc restituendo x ejusque pro invento erit $ry \propto ss-vv+2vy-yy$ vel si velimus y ~~restit~~ auferre subrogando eandem in ~~[illegible]~~ modo inventa habebimus
$rv-r\sqrt{ss-xx} \propto xx$ S: $x^4 \begin{matrix}-2rvxx \\ +rrxx\end{matrix} \begin{matrix}+rrvv \\ -rrss\end{matrix} \propto 0$

$Fyy \begin{matrix}+ry \\ -2vy\end{matrix} \begin{matrix}+vv \\ -ss\end{matrix} \propto 0$

3 Cum autem tales aequationes semper duas aequales radices obtinerent (vid: Geometri: Der Cartes pag: 44 et 45.) formanda erit aequatio ejusdem formae, hoc est quae aequales duas radices habeat et totidem dimensionum sit, ut tunc comparatio inter hujus ac alterius aequationis terminos institui possit, fit autem ~~talis~~ supponendo $y \propto e$ atque multiplicando $y-e \propto 0$ in se exsurgit nempe $yy-2ey+ee \propto 0$ quam si comparemus cum aequatione $yy \begin{matrix}+ry \\ -2vy\end{matrix} \begin{matrix}+vv \\ -ss\end{matrix} \propto 0$ cum totidem quoque sit dimensionum ~~[illegible]~~ conferendo nempe singulos terminos unius cum singulis alterius sequentes resultabunt aequationes $\overset{x}{r}-2v \propto \overset{+}{-}2e$ et $vv-ss \propto \overset{2}{e}e$
et $v \propto \frac{2e+r}{2}$ restituto jam vv et ee erit
S: ~~restituendo~~ y pro e $v \propto y+\frac{1}{2}r$ $\quad$ $yy+ry+\frac{1}{4}rr \overset{-ss}{\propto} yy$
$\qquad s \propto \sqrt{ry+\frac{1}{4}rr}$

invenimus itaque ex priori ad ducendam rectam PC opus tantum esse dividere latus rectum bifariam atque ita assumere PM $\propto$ dimidio lateris recti; ex posteriori si inter $y+\frac{1}{4}r$ et r media proportionalis quaeratur inventum iri $s \propto$ PC; si autem aequatio proveniens plurium dimensionum sit ubi hic fit assumendo $x^4 \begin{matrix}-2rvxx \\ +rrxx\end{matrix} \begin{matrix}+rrvv \\ -rrss\end{matrix} \propto 0$ tunc ut aequatio ejusdem formae obtineatur quo comparatio inter singulos terminos hujus et alterius fieri possit; primo eodem prorsus ut dictum est modo supponendum $x \propto e$ unde fit prius $xx-2ex+ee \propto 0$ haec autem tunc casu multiplicanda erit per $xx+fx+gg \propto 0$ (si inventa aequatio 3 dimensionum fuisset per $x^3+fxx+ggx+h^3 \propto 0$ si 6 per $x^4+fx^3+ggxx+h^3x+k^4 \propto 0$ atque sic porro)

Et provenit $x^4 \begin{matrix}-2ex^3 \\ +fx^3\end{matrix} \begin{matrix}+eexx \\ -2efxx \\ +ggxx\end{matrix} \begin{matrix}+eefx \\ -2eggx\end{matrix} + eegg$
$x^4 \; * \; \begin{matrix}-2rvxx \\ +rrxx\end{matrix} \; * \; \begin{matrix}+rrvv \\ -rrss\end{matrix}$

~~hinc~~ jam quatuor dedeuntur aequationes cum totidem sint incognitae, f, g, v, s quodque semper fieri solet cujuscunque generis curva proposita sit: itaque

$\overset{1}{-2e+f \propto 0}$ $\quad$ $\overset{2}{ee-2ef+gg \propto -2rv+rr}$ $\quad$ $\overset{3}{fee-2egg \propto 0}$ $\quad$ $\overset{4}{eegg \propto rrvv-rrss}$ restituendo $eegg$
$f \propto 2x$ $\quad$ $-3xx+gg \propto -2rv+rr$ $\quad$ $fx \propto 2gg$ $\quad$ $3x^4+rrxx-2rvxx \propto rrvv-rrss$
$gg \propto 3xx+rr-2rv$ $\quad$ ~~$xx \propto gg$~~ $\quad$ restituendo $-2rvxx$ erit
$xx \propto \frac{3xx+rr-2rv}{2}$ $\quad$ $x^4 \propto rrvv-rrss$
restituto $rrvv$ erit
atque ita rursus alio modo invenimus quantitatem v ac s quas quidem ~~[illegible]~~ hic primo inventis etiam ~~[illegible]~~ inconsistere licuisset erat enim
$v \propto \frac{2xx}{r}+\frac{r}{2}$ $\quad$ ~~$4x^4 \propto 9x^4+4rrxx+r^4-4rrss$~~
$\qquad\qquad\qquad\qquad 4$
$v \propto y+\frac{1}{2}r$ sed $y \propto \frac{xx}{r}$ ut facile patet unde $v \propto \frac{xx}{r}+\frac{r}{2}$ $\quad$ $4ss \propto 4xx+rr$
prout jam invenimus nec aliter ~~[illegible]~~ $s \propto \sqrt{ry+\frac{1}{4}rr}$ substituto pro y $\frac{xx}{r}$ obtinetur modo inventa quantitas $s \propto \sqrt{xx+\frac{1}{4}rr}$. $\quad$ $s \propto \sqrt{xx+\frac{1}{4}rr}$

Quod si vero ipsam Tangentem TC invenire volupe sit id quoque facile fiet. sit ~~AT~~ AT = u, AS = s; caeteris ut ante suppositis; tunc propter triangula similia TAS et TMC erit ut AT = u ad AS = s sic TM = u + y ad MC = x unde us + sy = ux hinc $x = \frac{us+sy}{u}$ et $y = \frac{ux-us}{s}$ adeoque juxta naturam Parabolae erit $ry = xx$ atque ita restituto y erit $rux - rus = sxx$ et $xx - \frac{rux}{s} + ru = 0$ ~~substituendo~~ substituendo autem x obtinebis $ry = \frac{uuss + 2ussy + ssyy}{uu}$ sive $yy + 2uy - \frac{uury}{ss} + uu = 0$ unde ad comparationem instituendam fiat primo $xx - 2ex + ee = 0$ ut ante acceperit N

x: $2e = \frac{ru}{s}$ | z: $ee = ru$, $xx = 2sx$, $\frac{x}{2} = s$ #

$2xs = ru$

ac $u = \frac{2sx}{r}$

restituto s erit $u = \frac{xx}{r}$

Non secus comparatio erit instituenda inter $yy + 2uy - \frac{uury}{ss} + uu = 0$ et $yy - 2ey + ee = 0$ eritque

x: $2u - \frac{uur}{ss} = -2e$

sive $2uss - uur = -2ssx$

$ss = \frac{uur}{2u + 2x}$

z: $uu = ee$

sive $u = y$ unde jam u restituto $ss = \frac{yyr}{2y + 2y}$

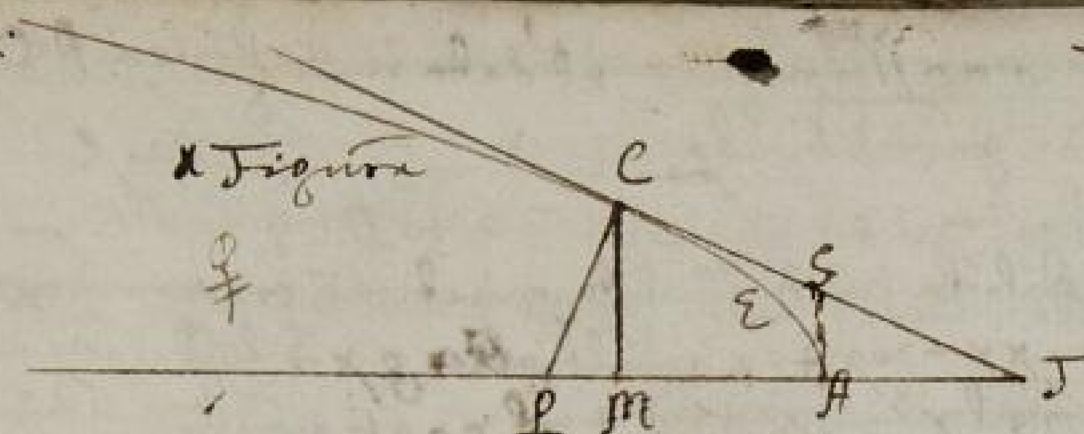
sive $s = \sqrt{\tfrac{1}{4} yr}$

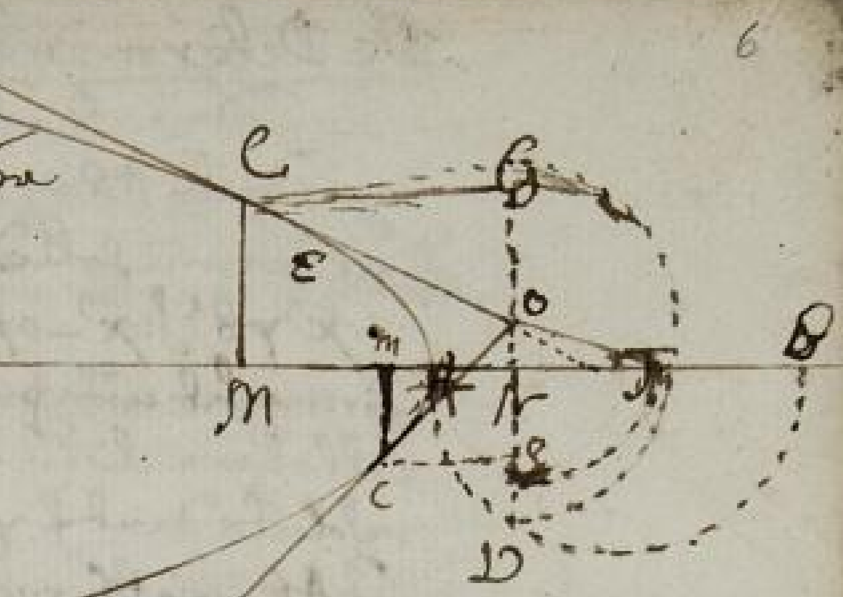
sive $s = \frac{1}{2}\sqrt{yr}$

Hactenus octo diversis modis obtinuimus Tangentem ad datum in Curva punctum quod item in aliis omnibus applicari potest.

~~Ad~~ Ad haec si denique desideres Tangentem ex puncto O (vid: 2dam figuram) extra axim vel Diametrum datam ducere; quae Parabolam (idem in aliis curvis fieri poterit) CE contingat, ponatur sit primo latus rectum = r MA = y MC = x AN = a et NO = b eritque ex jam inventis MT aequale 2y et NT = y − a. Deinde cum propter similitudinem triang: MCT et NOT, MC ad MT hoc est x ad 2y sicut NO = b ad NT = y − a erit xy − ax productum sub extremis = producto sub mediis 2by, cum vero ex natura Parabolae ry ut supra aequalis xx hoc est $y = \frac{xx}{r}$ hinc si in aequatione inventa $xy - ax = 2by$ in locum y substituamus $\frac{xx}{r}$ habebimus $\frac{x^3}{r} - ax = \frac{2bxx}{r}$ hoc est dividendo ubique per x et multiplicando per r invenietur $xx - ar = 2bx$ sive $xx = 2bx + ar$ quae est aequatio ut in prioribus annotavimus admittens unam veram radicem quae est $b + \sqrt{bb + ar}$ et unam falsam sive minorem quam nihil quae est $b - \sqrt{bb + ar}$. cujus utriusque usus porro hic eleganter elucet vid. E

572





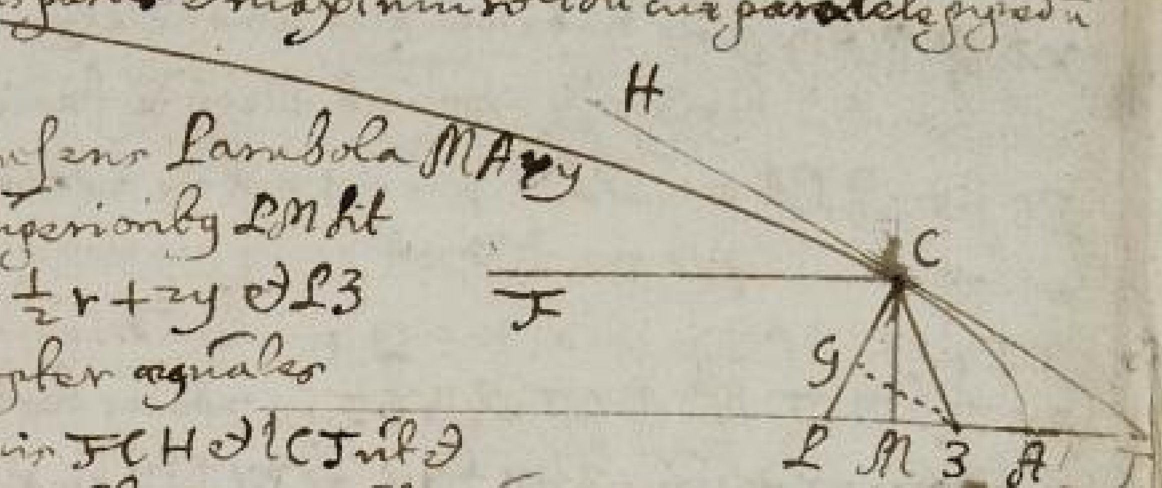
1 Suppono rem tanquam factam lineamque quaesitam esse vel CL vel CT vel denique OC in 2da Figura tunc facio CM $\propto x$ et MA $\propto y$ ut habeam aequationem aliquam quae mihi relationem inter x et y explicet, Deinde facio LC $\propto s$ et LA $\propto u$ et LM $\propto u - y$ vel in 2do casu AS $\propto s$: AT $\propto u$ in 2da autem figura ac tertio casu AN $\propto a$ NO $\propto b$ eritque ex inventione priorum casuum ut mox patebit MT $\propto y$ et NT $\propto y - a$ denique propter triangula LCM in 1a et propter similia △ AST et MCT item MCT et NOT in 2do ac tertio casu invenio sequentes tres aequationes $ss \propto xx + uu - 2uy + yy$ et $\frac{sy+su}{u} \propto x$ denique $xy - ax \propto 2by$.

2 Assumo proprietatem aliquam curvae lineae quae cum illa sit reciproca sit: ex. gr. haec curva sit Parabola cujus latus rectum $\propto r$ tunc juxta 11 propos. lib: 1 Conic: erit $ry \propto xx$ tunc subrogando ubique valorem x et xx ~~aequationem quae relationem~~ in prioribus inventis invenietur 1mo $ry \propto ss - uu + 2uy - yy$ 2do $\frac{ssyy + 2ssuy + ssuu}{uu} \propto ry$ in tertia vero subrogando y habebimus $\frac{x^3}{r} - ax \propto \frac{2bxx}{r}$ sive deleto ubique x et multiplicando per r invenietur $xx \propto 2bx + ar$

3 Invenienda est aequatio duas aequales habens radices ~~statuit~~ supponendo $y \propto e$ atque multiplicando $y - e \propto 0$ in se talis exsurgit $yy - 2ey + ee \propto 0$ deinde si aequatio in prioribus inventa plures dimensiones habeat e.g. 6 multiplicanda erit $yy - 2ey + ee$ per aliam summam hic nimirum $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4 \propto 0$ sic ut aequatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit (vid.) cum autem in praesenti exemplo aequationes inventae ad duas saltem dimensiones ascendant, singuli termini aequationum priorum cum singulis aequationis hujus $yy - 2ey + ee$ conferendi erunt, nimirum juxta primam inter $r - 2u$ et $-2e$ invenietur $u \propto e + \frac{1}{2}r$ vel $u \propto y + \frac{1}{2}r$ et inter $uu - ss$ et ee seu substituto jam invento u inter $ee + er + \frac{1}{4}rr - ss$ et ee invenietur $s \propto \sqrt{yr + \frac{1}{4}rr}$ juxta secundam autem inter $2uy - \frac{uur}{ss}$ et $-2e$ et ee invenietur $u \propto e$ s. y et inter $2uy - \frac{uur}{ss}$ et $-2e$ et fiet substituto prior valore u, $s \propto \sqrt{\frac{yr}{2}}$ tertia autem aequatio $xx \propto 2bx + ar$ duas admittit radices unam veram $b + \sqrt{bb + ar}$ alteram falsam $b - \sqrt{bb + ar}$ cujus utriusque usus eleganter elucet. Nam si ad ducendam OC assumpta ND $\propto r$ hoc est latere recto Parabolae super tota AB describatur semicirculus secans ON productam in D erit ND $\propto \sqrt{ar}$ quae posita ab N ad F si jungatur OF erit ipsa $\sqrt{bb + ar}$ Ac proinde si centro O intervallo OF circulus describatur secans NO hinc inde productam in punctis G, g designabit NG verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$ et Ng valorem falsum $b - \sqrt{bb + ar}$ unde ducendo ex punctis G, g rectas GC, gc ipsi AM parallelas donec Parabolae occurrant (vid.) obtinebuntur duo simul puncta C, c in quibus rectae ex O ducendae eandem contingent.

73

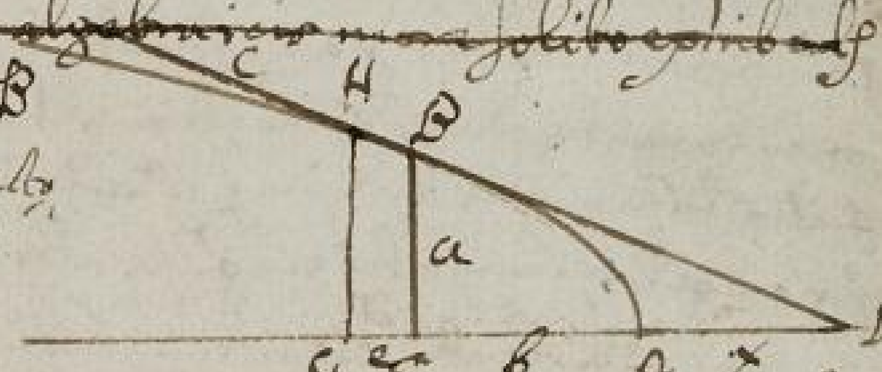
De Determinandis Maximis ac Minimis. sit data recta linea AC secanda in B ut parallelepipedum quod fit sub A x B a−x C quadrato AB in BC sic omnium factorum sit maximum. Esto AC $\propto$ a, AB $\propto$ x, maximum solidum sit $\propto b^3$ et instituta juxta quaesita operatione, provenit $axx - x^3 \propto b^3$ s: $x^3 - axx * + b^3 \propto 0$. jam $xx - 2ex + ee$ multiplicata per $x + f$ ut ejusdem formae sit cum praecedente et exsurgit $x^3 \begin{smallmatrix}-2exx\\+fxx\end{smallmatrix} \begin{smallmatrix}+eex\\-2efx\end{smallmatrix} + eef \propto 0$, ex quarum mutua collatione eliciuntur hae tres aequationes $-2e+f \propto -a$, $ee - 2ef \propto 0$ et $eef \propto b^3$ quae resolutae dant $f \propto \frac{1}{2}e$ et $x \propto \frac{2}{3}a$ ac $b^3 \propto \frac{4}{27}a^3$ quod docet AC ita esse dividendam ut AB ipsius AC contineat duas tertias partes et maximum solidum cui parallelepipedum adaequari potest esse $\frac{4}{27}a^3$. vid:



De investigandis centris sit praesens Parabola MACy et SA $\propto$ 8 quibus positis cum ex superioribus LM sit $\propto \frac{1}{2}r$ et AT sive AM s: y erit LT $\propto \frac{1}{2}r + 2y$ et L3 $\propto \frac{1}{2}r + y - 8$ quoniam autem propter aequales angulos incidentiae et reflexionis FCH et 3CT, sit et recta LC ipsi Tangenti HT perpendicularis anguli quoque FCL et LC3 sunt aequales atque horum quidem angulus FCL angulo CL3 aequalis; erunt pariter anguli LC3 et CL3 aequales, lineaque 3G ipsi LC perpendicularis rectam LC bifariam dividens in G. Quibus sic existentibus cum et hinc L3 ipsi 3T sit aequalis erit $r + 2y - 28 \propto \frac{1}{2}r + 2y$ unde demptis utrinque 2y et reliquis per 2 divisis invenitur 8 $\propto \frac{1}{4}r$ vide de aliis etiam judicium.

Tota Methodus fit in sequentem modum per exempla declarabimus

1 ~~[illegible] algebraicis [illegible]~~
sit exempli gratia A x C a−x B linea AB dividenda in C ut rectangulum ACB omnium sit factorum maximum; sit AC $\propto$ x AB $\propto$ a unde BC $\propto$ a−x rectangulum autem ACB $\propto ax - xx$
~~sit~~ 2do in Parabola ABC Tangens ducenda per D data DE et EA; sit DE $\propto$ a, EA $\propto$ b AD $\propto$ x ~~unde~~ ~~[illegible]~~



~~[illegible]~~ Jam hac ratione progredimur

2 ~~[illegible]~~ : supponitur in primo casu (~~[illegible]~~ fiet hoc applicatis applicandis in aliis exemplis) lineam AB alio in loco praeter C secari esse minimi: in D spatiumque interjectum CD $\propto$ 0 ponatur $\propto$ e AD $\propto$ erit x − e et DB e + a − x unde his inter se multiplicatis exsurgit rectangulum ADB $\propto ax - xx - 2ex + ae - ee$ ~~[illegible] ACB~~ in secundo exemplo ibidem alia GH ad Tangentem DH ferire supponitur spatiumque interjectum GE $\propto$ 0 $\propto$ e, unde erit propter triangula similia DEB et DGH, DE $\propto$ b + x ⸗ EB $\propto$ a sic DG $\propto$ x + b + e ⸗ HG quae proinde erit $\propto \frac{ab + ae + ax}{b + x}$

3 in primo exemplo aequatio fit inter rectangula bis inventa et erit rectangulum ACB $\propto ax - xx \propto ax - xx - 2ex + ae - ee \propto$ rectangulo ADB, hinc demptis utrinque partibus aequalibus remanet $0 \propto -2ex + ae - ee$ tum delebis quae in omnibus terminis inveniuntur, ut hic e, erit $0 \propto -2x + a - e$, tum deleto e aut

Illud Multiplicatis relinquitur $x \propto \frac{a}{2}$ in 2do exemplo Substituatur ad aequationem obtinendam proprietas aliqua reciproca ubi hic in Parabola, ut nimirum

$AE \propto b$ sit $AG \propto b + x + c$ sic $\square\, KE\ aa\ \pi\ \square\, HG \propto \frac{aabb + 2aacb + 2aabx + 2aacx + aacc + aaxx}{bb + 2bx + xx}$ Multiplicatis itaque extremis ac medijs inter se proveniunt

$\frac{aab + aac}{1} \propto \frac{aab^3 + 2aacbb + 2aabbx + 2aabcx + aaccb + aabxx}{bb + 2bx + xx}$ unde

$\cancel{aab^3} + \cancel{aabbc} + \cancel{2aabbx} + \cancel{2aabcx} + \cancel{aabxx} + aacxx \propto \cancel{aab^3} + 2aacbb + \cancel{2aabbx} + \cancel{2aabcx} + aaccb + \cancel{aabxx}$

ablatis jam iisdem aequalibus ab utraque parte remanet $aacxx \propto aacbb + aaccb$ + ~~c~~ deletis ~~ubique~~ quae in omnibus terminis inveniuntur ut hic aac, relinquitur $xx \propto bb + cb$; tandem ablatis terminis ubi c remanet $xx \propto bb$ s: $x \propto b$.

3tia Methodus ~~[illegible]~~ commodissima Huddenij, est talis. Si habeatur aequatio (sive ea sit numerica sive literalis sive fractiones aut surdas quantitates includat modo incognita quantitas inter surdas non contineatur) quae omnes problematis conditiones includat in qua incognita quantitas (aut alia quaevis quae ut incognita consideratur) ad duas adhuc ~~[illegible]~~ aequales radices sit determinanda (ut ex: $x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$) Multiplicandi sunt per Arithmeticam progressionem quamlibet (hoc est cujus incrementum vel decrementum sit vel x (quae semper optima) 2 vel 3 etc: et cujus primus terminus sit 0 vel + vel − ita ut semper ejus ope talis terminus aequationis tolli possit qualem quis voluerit collocando tantum sub eo 0 sit n:

$A\ x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$ $C\ x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$ $E\ x^3 - 4xx + 5x - 2 \propto 0$
$\quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$ $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$ $\quad +1 \quad 0 \quad -1 \quad -2$

$B\ 3x^3 - 8xx + 5x * \propto 0$ $D\ * - 4xx + 10x - 6 \propto 0$ $F\ x^3 * - 5x + 4 \propto 0$

Nimirum x terminum aequationis per x terminum progressionis 2dum terminum aequationis per 2dum progressionis: et sic deinceps et productum quod inde fit erit $\propto 0$ (ut ex modo appositis exemplis patet) deinde cum sic duas habeam aequationes (ut hic A et B, C et D, E et F) quaero harum communem divisorem maximum (qui hic ubique est $x - 1 \propto 0$) qui licet inter omnes diversas operationes semper idem sit, alia tamen alijs praeferenda quandoquidem unius termini destructione saepenumero facilius ad finem pervenitur qua alterius et compendiosius quoque est duo hujusmodi producta sibi eligere ad communem illorum divisorem inveniendum quam ubi uno aliquo producto et aequatione proposita sit sumendo vel B et D vel D et F vel denique (B et F) atque hujusque aequationem propositam toties divido quoties id fieri potest. Ubi sciat quod quandoque quaesitum ex sola producta aequatione uno intuitu videri possit sit $yy + \frac{gr - 2gu}{g - r}y + \frac{guu - grr}{g - r} \propto 0$ et fit $2yy + \frac{gr - 2gu}{g - r}y \propto 0$ et reducta Multiplic. $\frac{g}{r}$ aequatione $r - \frac{ry}{g} + \frac{1}{2}r \propto u$ At vero hoc saepe non ita inveniri potest quare sit investigandum per quid per hanc aequationem haec alia progressio nem erit multiplicanda cujus beneficio ex illa primus terminus aliquis pro libitu (exceptio eo qui per primam progressionem est sublatus) tolli potest (ex

$$yy + \frac{gr - 2gu}{g-r} + \frac{guu - gss}{g-r} \approx 0$$

$\&$ 4 n 0 $-x$

obtinebis $yy * -\frac{guu + gss}{g-r} \approx 0$ ac reducta aequatione $s \approx \sqrt{-yy + \frac{ryy}{g}} + uu$) hinc subrogandus erit valor ipsius s in prima aequatione invenibus et innotescet inde quantitas s, quod si vero neutra quantitas sine altera inclusione inveniri possit hinc sequenti modo procedes: sit aeq:

$y^4 * -6ttyy - 12t^3y + 9t^4 - 9aatt \approx 0$ in qua y est incognita et y ad 2 aequales radices determinari debet aequatione instituo ut sequitur

Multip. 0. 1. 2. 3. 4

fit $+12tty - 36t^3y + 36t^4 - 36aatt \approx 0$ et reducta aequatione erit

$yy \approx -3ty + 3tt - 3aa$ similiter Multiplicetur proposita

$y^4 * -6tt - 12t^3y + 9t^4 - 9aatt \approx 0$

$\&$ 4. 3. 2. * 0

fit $4y^4 * -12ttyy - 12t^3y * \approx 0$ et fit ordinata aequatione $y^3 * -3tty - 3t^3 \approx 0$

substituendo jam valorem ipsius yy supra inventum in eius locum habebis

$y^3 \approx -3tyy + 3tty - 3aay$ seu $9tty - 9t^3$
$+3tty + 9aat$
$-3aay$

$-3tty - 3t^3 \approx$ $-3tty - 3t^3$

Summ: $+9tty - 12t^3$
$-3aay + 9aat$

$y \approx \frac{4t^3 - 3aat}{3tt - aa}$ Quo circa substituendo rursus hunc valorem ubique in locum in priori aequatione $yy \approx -3ty + \frac{3tt}{-3aa}$ exsurget ex inde aequatio in qua nulla incognita quantitas praeterquam tangentis quaque cura porro inveniri potest

Denique quicquid hic de duabus aequalibus radicibus dictum eodem etiam modo de 3bus aut pluribus est intelligendum si n. in proposita aequatione 3 aequales fuerint, Multiplico illam Arithmetica progressione ut antea exinde productum ≈ 0 Hoc productum rursus multiplico Arithmetica progressione cuius hoc secundum productum ≈ 0 si aequatio proposita 4 radices aequales habeat ter multiplico si 5 quater et ita porro obtinebuntur tot aequationes quot radices aequales in aequatione proposita continentur. Exempli gratia detur aequ: $x^4 * -6xx + 8x - 3 \approx 0$ ~~...~~ habens 3 aequales radices, primo Multip: per 0. 1. 2. 3. 4

Hoc productum iterum Multiplic: per et fit $-12xx + 24x - 12 \approx 0$

0 1 2

cuius communis divisor: $x - n \approx 0$ ita ut haec proposita aequatio habeat has 3 tres r et prodit $24x - 24 \approx 0$

76

O—O sit $x = y$ jam itaque $x - y = 0$ vel $x - y - t = 0$ Mult:

$x = y + t$

$$xx - 2yx + yy - tx + yt = 0$$

$$xx - fx + g$$ hinc duae aequationes:

$$2y \pm t = f \qquad y = \frac{f - t}{2}$$

$$yy + yt = g$$

$$yy = \frac{\cancel{ff - 2ft + tt}}{4} \quad \text{et}$$

$$yt = \frac{\cancel{ft - tt}}{2}$$

$$ff \mp tt = \pm 4g$$

$$t = \sqrt{ff - 4g} \quad \text{unde} \quad y = \frac{f - \sqrt{ff - 4g}}{2}$$

hinc itaque $x = y = \frac{f}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ff - 4g}$

vel $x = y + t = \frac{f}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{ff - 4g}$

Aliter

sit $x = y + t$ und $y = x - t$

et $xx = yy + 2yt + tt$

restituto $2yt = 2xt - 2tt$ fit:

$yy + tt$

$$xx = 2tx + yy - tt \qquad \text{erit } 2t = f \qquad yy - tt = g$$

$$xx = fx + g \qquad t = \frac{f}{2} \qquad + \frac{ff}{4}$$

$$y = \sqrt{\frac{ff}{4} - g}$$

unde $x = \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - g}$ et altera radix

$x = \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - g}$.

Adhuc aliter

constat in aequatione $\cancel{xx} - gx + 9 \propto 0$ $g \propto$ binarum radicum dictum unde $\frac{g}{2} \propto$ dimidio; si itaque radicum (nativarum) excessus aut defectus huius dimidij y erit

major radix $\propto \frac{g}{2} + y$ unde $\left.\begin{matrix} x - \frac{g}{2} - y \\ x - \frac{g}{2} + y \end{matrix}\right\} \propto 0$ M

minor $\propto \frac{g}{2} - y$

$$\begin{matrix} xx & -\cancel{\frac{gx}{2}} & +\frac{gg}{4} \\ & -\cancel{yx} & +\cancel{\frac{gy}{2}} \\ & -\cancel{\frac{gx}{2}} & -\cancel{\frac{gy}{2}} \\ & +\cancel{yx} & -yy \end{matrix} \propto 0$$

sequens aequatio

$$\frac{gg}{4} - yy \propto 9$$
$$+$$

$$y \propto \sqrt{\frac{gg}{4} - 9}$$

$$\left.\begin{matrix} xx - gx + \frac{gg}{4} \\ - yy \end{matrix}\right\} \propto 0$$

$$xx - gx + 9 \quad \text{unde}$$

unde $x \propto \frac{g}{2} + y \propto \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} - 9}$

$x \propto \frac{g}{2} - y \propto \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} - 9}$

Denuo aliter

sit $xx - gx + 9 \propto 0$ si itaque $x \propto y + t$ una radix altera $x \propto y - t$

unde $xx \propto yy + 2yt + tt$
$-gx \propto -gy - gt$
$9 \propto +9$

hinc duae aequationes:

$2yt - gt \propto 0$ (?) $tt - gt + 9 \propto 0$ $+yy$

$2t \propto \frac{gt}{y}$ $\quad tt \propto \frac{gg}{4}$

$t \propto \frac{g}{2}$ $\quad -gt \propto -\frac{gg}{2}$

$+9 \quad +yy$

$$-\frac{gg}{4} + 9 + yy \propto 0$$
$$+ \quad -$$

$$y \propto \sqrt{\frac{gg}{4} - 9} \ \cancel{0}$$

~~0~~ patet itaque

$x \propto \frac{g}{2} + y$ hoc est $\propto \frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} - 9}$

$x \propto \frac{g}{2} - y \quad \propto \frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} - 9}.$

78

Item

sit $xx - px + q = 0$ et $x = \frac{p}{2} + t$ et $x = \frac{p}{2} - t$ hoc restituendo in priore aequatione habebis

$$xx = \frac{pp}{4} + pt + tt$$
$$-px = -\frac{pp}{2} - pt \qquad = 0$$
$$q = q$$

Hinc itaque $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$ et $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$.

$$tt \mathop{-}\limits_{+} \frac{pp}{4} \mathop{+}\limits_{-} q = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$$

Item.

sit $xx - px + q = 0$ et $xx - px = -q$
addatur tt $\qquad tt$

fiet $xx - px + tt = tt - q$ si itaque tt talis quantitas esset ut $xx - px + tt$ quadratum evaderet, ut extracta radice x tantum remaneret, absque 3tio aequale fieri quantitati cui x adhaereret, totum negotium absolutum est, hoc vero sic obtinebis ponatur radix quadrati ex $xx - px + tt = x - t$ unde

$$\cancel{xx} - \cancel{px} + \cancel{tt} = \cancel{xx} - 2xt + \cancel{tt}$$
$$\frac{p}{2} = t \text{ et } \frac{pp}{4} = tt \text{ hinc itaque}$$

ad $xx - px = -q$ addatur utrinque $\frac{pp}{4} = \frac{tt}{4}$ et erit

$xx - px + \frac{pp}{4} = \frac{pp}{4} - q$ extractaque ab utraque parte radice et remaneret $x \mathop{-}\limits_{+} \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$

$$\text{et } x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$$

79

productes x. x. x. & −3 & sic de alijs omnibus. Est haec generalis Methodus parti-
culares autem quae hinc resultant sequentes sunt quidem

1 Cum Algebraici termini datae aequationis non nisi unam incognitam quantitatem contineant et nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, multiplico tantum unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitae quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur et Summae productorum $\propto 0$

E.g. sit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \propto 0$

Multiplic. per $3 \quad . \quad 3 \quad . \quad 1$

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \propto 0$ vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \propto 0$

Juxta generalem Methodum erit $3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \propto 0$

Multipli: per $3. \quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0$

Et fit utrobique $9ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x \propto 0$ s.i. $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \propto 0$

2 Cum Algebraici termini unam tantum incognitam quantitatem comprehendunt atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, exemplo institui poterit hoc pacto; Primo deleo omnes quantitates cognitas. Deinde si reliquae quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo facto considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitae istius membri, postquam ab eodem numero est ablatus dimensionum numerus incognitae quantitatis, quae in hoc membro denominatoris reperitur; productaque per hoc membrum denominatoris multiplicata erunt omnia ejusmodi producta simul $\propto 0$ ut ex sequentibus exemplis clarius patebit

1 Exemplum

Esto $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \propto 0$ deleta quantitate cognita $+ab$, reliquisque terminis sub communem denominatorem reductis obtinebitur

$\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4}{x^3} \propto 0$

Multiplic. per $-3. \; -2. \; +2 \; +1 \; +1$

fit $-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$ Multiplicatum per $x^3 \propto 0$ dividendo per $x^3 \propto 0$ fit

$-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4 \propto 0$

Juxta generalem Methodum erit $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \propto 0$

idem $4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4 + abx^3 \propto 0$ seu ordinata aequatione

$x^5 \begin{smallmatrix} -a \\ +b \end{smallmatrix} x^4 + abx^3 * + 5a^3x + 4aab^3 \propto 0$

$+2. \; +1. \quad 0. \; \cancel{-1} \; \cancel{-2} \; . \; -3$

$2x^5 \begin{smallmatrix} -a \\ +b \end{smallmatrix} x^4 . * . * - 10a^3x - 12aab^3 \propto 0$

81

115

2dum Exemplum:

Esto $\dfrac{baaxx + aaxx - bx^3 - x^4}{baa + x^3} - a + x \propto 0$ deleta quantitate cognita a &c quia sub l. denominatore reducta habebis $\dfrac{-baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$ porro pro

$\dfrac{\overset{+1}{2baax} + \overset{+2}{aaxx} - \overset{+3}{bx^3}}{baa}$ scribo $2baax + 2aaxx - 3bx^3$ in baa

pro $\dfrac{\overset{-2}{2baax} + \overset{-x}{aaxx} - \overset{0}{bx^3}}{x^3}$ scribo $-4baax - aaxx - x^3$ in x^3 $\Big\} \propto 0$

Dividendo per aax habebis $2baa + 2aax - 3bxx$ in b $\Big\} \propto 0$
$-4bx - xx$ in xx

adeoque $-x^4 - 4bx^3 - 3bbxx + 2aabx + 2bbaa \propto 0$

sic & si tertio fuerit $\dfrac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3ax - c^3} \propto 0$

pro $\dfrac{\overset{-2}{2baax} + \overset{-x}{aaxx} - \overset{0}{bx^3} + \overset{-3}{a^4}}{4x^3}$ scribo $-4baax - aaxx - 3a^4$ in $4x^3$

pro $\dfrac{\overset{1}{2baax} + \overset{0}{aaxx} - \overset{+x}{bx^3} + \overset{-2}{a^4}}{2bxx}$ $\quad -2baax - bx^3 - 2a^4$ in $2bxx$

pro $\dfrac{\overset{+x}{2baax} + aaxx - \overset{+2}{bx^3} + \overset{-x}{a^4}}{-3ax}$ $\quad aaxx - 2bx^3 - a^4$ in $-3aax$ $\quad \Bigg\} \propto 0$

pro $\dfrac{\overset{x}{2baax} + \overset{2}{aaxx} - \overset{3}{bx^3} + \overset{0}{a^4}}{-c^3}$ $\quad +2baax + 2aaxx - 3bx^3 + c^3$

Juxta generalem Methodum erit $\dfrac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto z$. pula ali cui maximo &c statim declarabitur

$2baax + aaxx - bx^3 \propto baaz + x^3z$

seu $-bx^3 + aaxx + 2baax - baaz \propto 0$
$-z$

Arithm. prop. 3. 2. 1. 0

$-3bx^3 + 2aaxx + 2baax \propto 0$ hoc est $\dfrac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} \propto z$:
$-3z$

ac proinde $\dfrac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto \dfrac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$ & ut supra

$x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \propto 0$

Usus constat hujus methodi applicatio in ~~inveniendis~~ determinandis Maximis ac Minimis ac inveniendis tangentibus:

Et sic facile possunt quotcunque quantitatibus maximum aut minimum designantibus ordinatae in ordine multiplicantur per progressionem Arithmeticam ~~[illegible]~~ & caeteris quae ibi dictum observatis: notandum tantum si quantitates dictae $\propto 0$ ponuntur seu maximo ac minimo quod hunc agerunde, juxta generalem methodum denique in terminis aequationis talis possunt quaelibet multiplicando illum tantum per 0. Atque ita valor ipsius x per unam progressionem simplicius obtineri poterit quam

82

quam & aliam ut si in praecedenti exemplo ubi Multiplicantis $\frac{m}{e}$ 3. 2, 1. 0. Multiplicatis vero 0. 1. 2. 3. obtinuissemus $aayx + 4baay - 3baax \propto 0$ seu $\frac{xx + 4bx}{3b} \propto e$ 18

Unde apparet ipsam quantitatem e (sive maximum vel minimum) si x cognita supponatur, inveniri atque exprimi posse multis diversis modis, e quibus faciliores pro constructione eligere licebit: Sicut si e cognita supponatur poterit x totidem diversis modis inveniri. Porro considerando e & x ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam aequationem instituere inter duos ex simplicissimis valores ubi in superiore exemplo inter $e \propto \frac{-3byx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $e \propto \frac{xx + 4bx}{3b}$ ubi notandum in hisce quod nimirum si termini Algebraici, Maximum aut minimum designantes plures una quantitate incognita includunt, supponenda sunt x & e & hanc aequationem & ceteras datas seu quae ex natura Problematis manant (quaeque simul si omnes Problematis conditiones includunt, tot numero existunt, quot incognitae quantitates, una excepta habentur, nimirum summum tantum Maximum aut minimum inter infinitas magnitudines quaeritur non autem inter infinita Maxima) reducendo aequationes omnes ad unam, in qua necessario duae quantitates incognitae continebuntur & inter eas e; cumque tunc sola e ad Maximi aut minimi inventionem nota esse debeat, manifestum est in eum finem duntaxat concipiendum esse, alteram quantitatem incognitam duas aequales radices habere.

Sumamus exempli gratia (sint) has 3 aequationes

$x \cdot 1^a$ aeq. $y^3 - nyx + x^3 \propto 0$

2^a aeq. $u - x \propto y$

3^a aeq. $\frac{1}{2}u - y \propto e$ maximo

sintque y, x, u incognitae quantitates ac e maximo; substituto jam valore ipsius

y 2dae aeq: in locum ipsius y, in 1ma & 3tia habebitur

pro x in 1ma aeq: $v^3 - 3vvx + 3vxx \propto vnx - nxx$

3tia aeq. $x \propto e + \frac{1}{2}v$.

subrogato autem valore ipsius x tertiae aequat: in ejus locum in prima fiet pro

B x in 1ma aeq: $\frac{1}{4}v^3 + 3vee \propto \frac{1}{4}nvv - nee$ &

$\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3eev + nee \propto 0$ quae Multiplicis ad obtinendum e progress: $\frac{3 \quad 2 \quad 1 \quad 0}{}$

obtinemus $\frac{3}{4}v^3 + \frac{1}{2}nvv + 3eev * \propto 0$

vel $3ee \propto \frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv$. hinc subrogato valore ee jam invento in ejus locum in praecedenti B obtinebitur $vv \propto \frac{1}{3}nn$ si Arithmetica progressio fuisset 0. 1. 2. 3: invenissemus $3ee \propto \frac{nvv}{8v + 4n}$ si: 2, 1, 0, -1 habuissemus $3ee \propto \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$ quae tamen in priori B restituta vel inter se adaequata ponendo $\frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv \propto \frac{nvv}{8v + 4n}$ vel $\propto \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$ obtinebitur semper $vv \propto \frac{1}{3}nn$.

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factae hic parum inter se differunt, potest tamen saepe numero ut supra monui contingere ut una multa prolixior ac difficilior sit quam alia quo quidem casu commodiorem viam, quae facile est in promptu, eligere facile erit.

85

Quod jam secundum concernit, ratio nim: inveniendi Tangentes, haec respiciendi superiorem ~~[illegible]~~ Manifesta enim videntur ex ante ejus exempla supra tradita

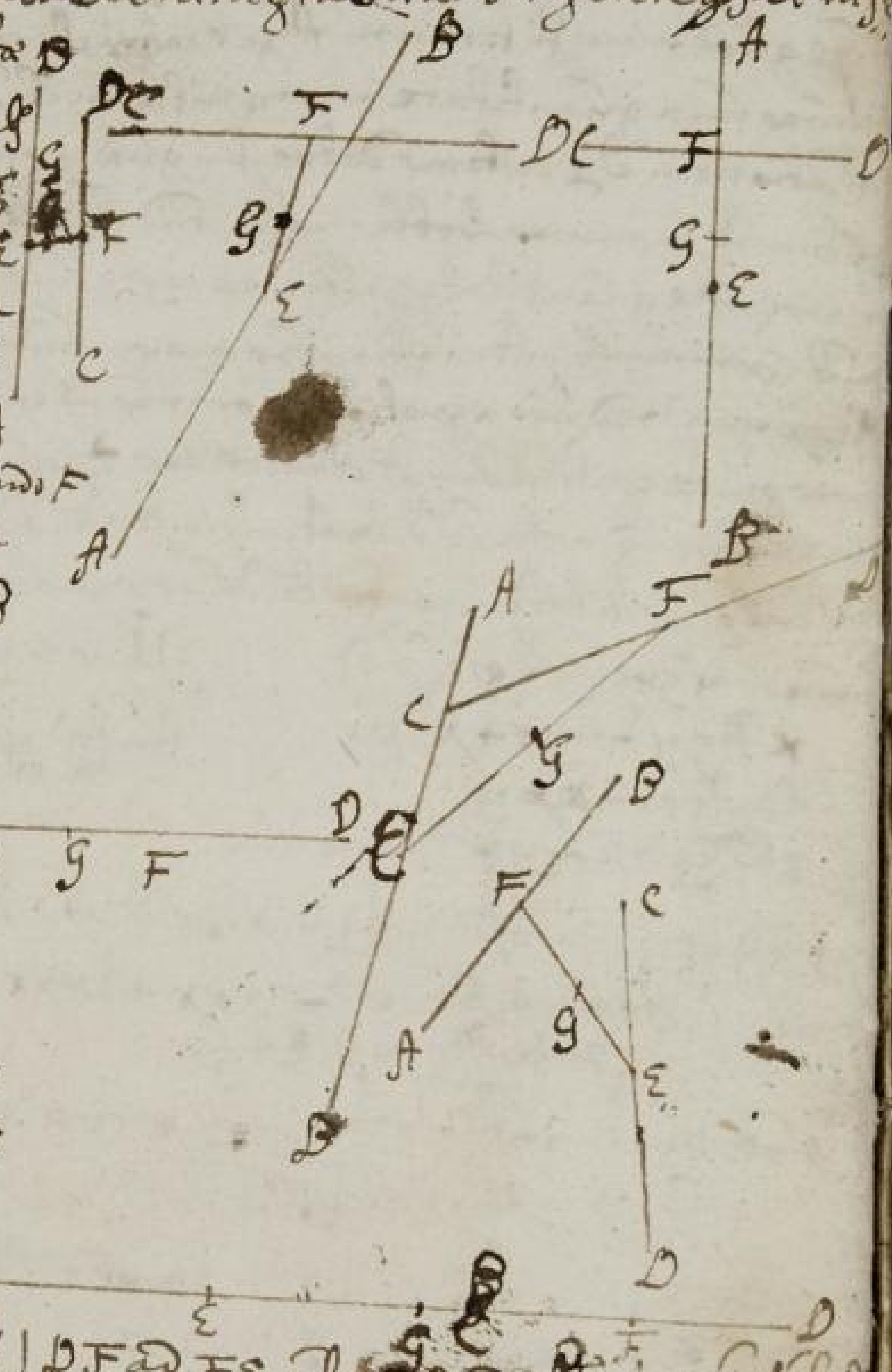
5 Investigatio centrorum gravitatis. Ad haec obtinenda tradentur regulae quia datum jam ~~x lineam~~ ... ... sufficienti etiam corporum assignare docet centrum gravitationibus earum ~~[illegible] quidem invenire docet~~ quoad.

F de sumptis ex fundamento hic in eo, ~~[illegible]~~ magnitudines ex distantiis eandem quantitatum proportionem habentibus ut gravitates aequiponderant

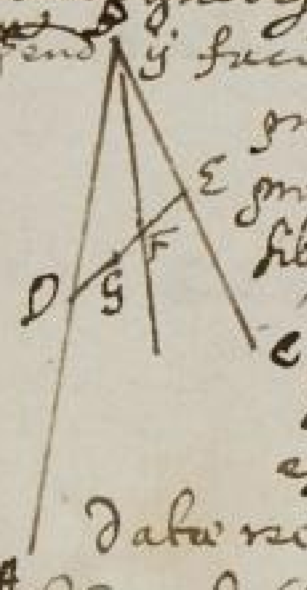
x linearum centrum gravitatis assignatur id quod discitur ex tribus subjectis propositionibus

Prima est Datae rectae lineae centrum gravitatis assignare; id quod fit, secando eam bifariam, erit n. hinc sectionis punctum centrum quaesitum

Secunda Binarum rectarum commune centrum gravitatis reperire quod fit in sequentem rationem, sint datae rectae AB et CD, hinc inveniantur ex praecedenti illarum centra, sectionum quae sunt E et F, junganturque recta EF, quae secetur in G ita ut EG sit GF ut contra CD ad AB erit punctum G centrum quaesitum



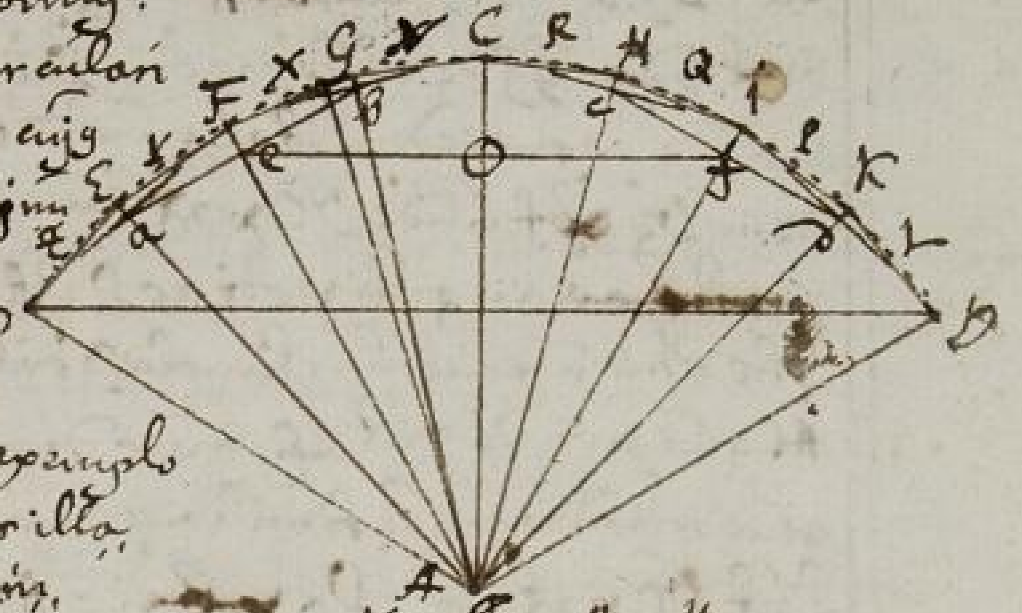
Nota autem quod expediat aliquando ~~[illegible]~~ conjugendi et facilitatis causa praesertim in praxi pro singularibus casibus singulares tribuere regulas qualis eg. esse potest si



datae rectae angulum constituerent ut hic rectae AB et DC quam contra DE recta DE juncta, diviso angulo DBE bifariam recta DF, accipiatur EG ... DF erit punctum G centrum quaesitum. Est n. ... DF ad FE ut BD ad BE hoc est BA ad BC Ergo translata DF ex E in G proportio est mutata, atque adeo G centrum commune rectarum AB et BC; Atque tales aliae particulares regulae exhiberi poterunt ... calculi Algebraici exhiberi:

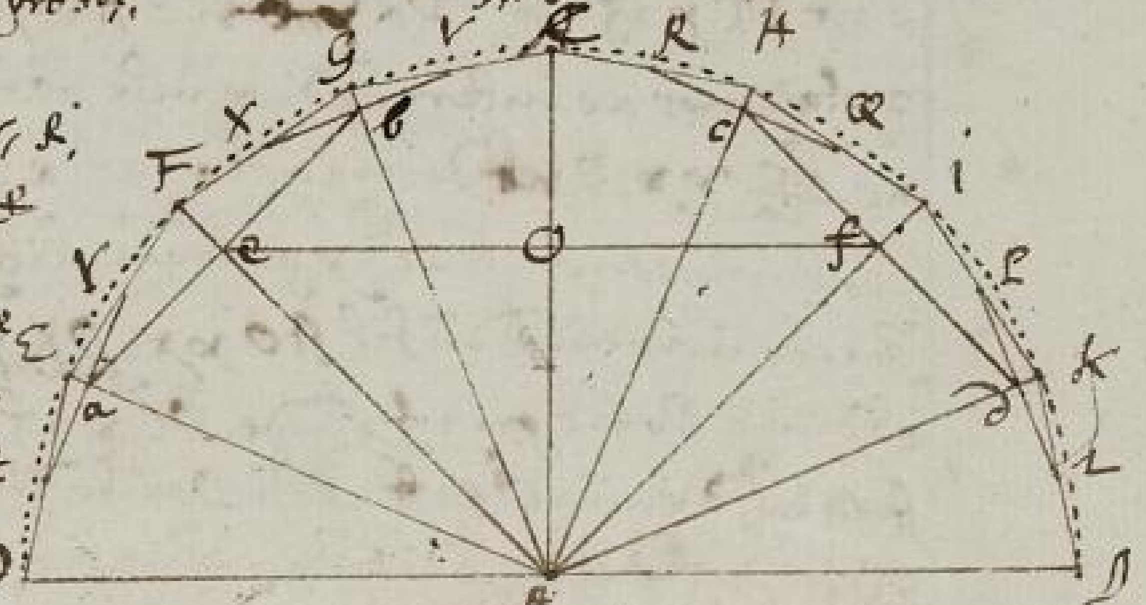
Fluit omnibus et singulis unica satisfaciat regula

Tertia Plurium rectarum linearum commune centrum gravitatis assignare singularum linearum centris seorsim inventis assignetur per praecedens problema binarum quarumcunque centrum gravitatis commune: Hoc centrum sit tanquam unius lineae centrum et cogitetur recta cum centro tertiae lineae, in qua recta (per idem problema) habebitur centrum commune trium linearum. Hoc rursus instar unius lineae centrum acceptum, in recta quae id cum centro quartae lineae conjungit (per idem problema) habebitur centrum gravitatis quatuor lineis commune et sic deinceps. Vel cogitentur bina et bina deinde bina conjuncta, junganturque linea in qua per antecedens problema centrum quatuor linearum habebitur atque ita de alijs; Manifestum autem est hinc è regulâ hanc inveniendi centrum gravitatis pluribus lineis commune, locum habere non solum in rectis sed et in curvis et compositis quibuslibet; modo sint prius data centra particularia linearum. Immò hoc posito eandem regulam esse communem omnibus perimetris, quarumlibet figurarum planarum ut et earum centrum investigetur gravitatis ut patet, potentibus ex hac regula generali pro singularibus casibus singulares admitti regulas, adhibito opus calculo Algebraico, quarum unam et alteram exhibebimus:

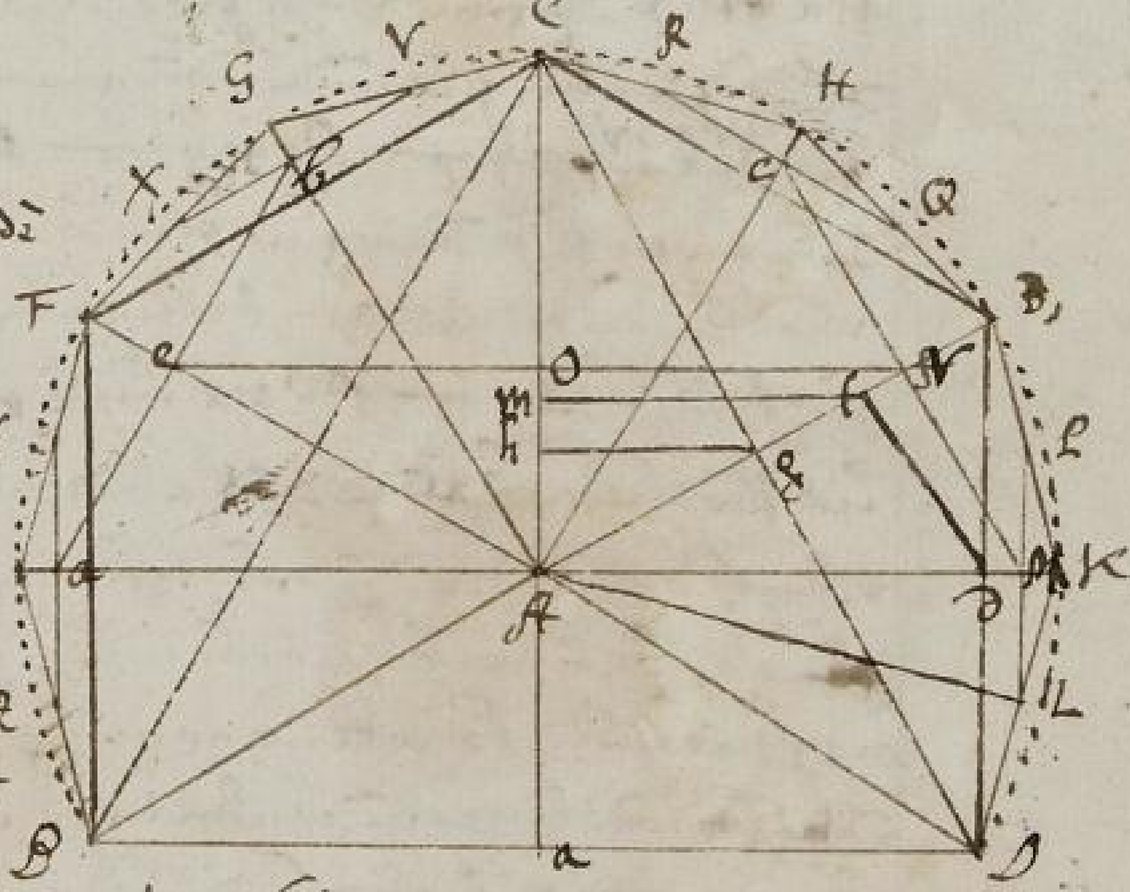


Sit segmentum circularis peripheriae semicirculari vel majus vel minus vel etiam aequale BCD cujus vertex C, subtensa sive basis extrema conjungens BD, centrum ex quo peripheria descripta punctum A huic segmento inscriptae sint ordine rectae aequales BE, EF, FG, GC, CH, HI, IK, KD numero scilicet pariter pares octo in exemplo nostro. Oportet commune centrum gravitatis illarum reperire, hinc et eliciemus regulas pro inveniendo harum centro:

Primo bisecentur lineae datae hic in Z, Y, X, V, R, Q, L, L, I tum ducantur ex centro A radij ad terminos harum linearum ut hic AB, AE, AF, AG, AC, AH, AI, AK, AD; post ducantur lineae ZY, XV, RQ, IL, ~~deinde~~, a b c d ubi, nunc e f, dico O esse centrum quaesitum:



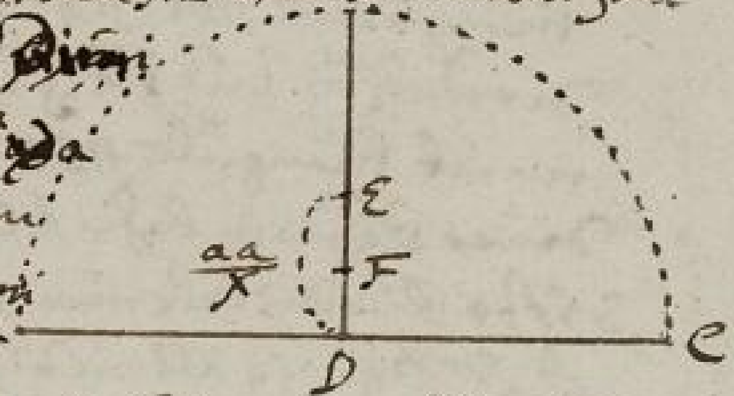
2da, Bisecta primò altera quae ad extremitatem peripheriae sive basin segmenti consistit DK hic nempe in L huic educantur ex centro circuli radij ad terminos primae, secundae, 4tae, octavae et sic deinceps in progressione dupla (hic AK, AI, AC) usque ad segmenti verticem; deinde è medio puncto (hic L) primae ad primum radium (AK) ducatur perpendicularis et ex puncto in quo haec secat suum radium (ubi hic in d) alia aequalis perpendicularis (de f) ad sequentem radium (AB) et ubi haec rursus suum secat relatum radium (in f) ex eo puncto ad proxime sequentem radium rursus perpendicularis ducatur linea (hic f) et sic deinceps, donec ad radium qui verticem ~~transit~~ transit ubi in ... a sua secatur perpendiculari ibi erit centrum quaesitum. haec autem quae jam diximus ita se habere, callenti regulam quam ante diximus generalem, non dubium esse poterit quare ad tertiam progrediamur



3tiam calculo Algebraico elicere conabimur; quia autem linearum multitudo confusionem pariat, quid dicturi sumus solum 3tio schemati applicabimus ubi segmentum circularis peripheriae, semicirculari majus est; ea tamen ratione ut et ad caeteros facillime transferri possit, sit ergo primum ... de binis tantum li

[...] quarum centrum gravitatis commune ex praecedentibus est punctum h, si
itaque Ah ∝ x. CD ∝ a, Da ∝ b et Ag ∝ c: cuncta linea data sint jam autem tria-
ngula CaD et ghA sunt similia ob aequales angulos D et A (angulus n. aDC hoc est
DC ad peripheriam dupla insistit peripheriae ~~DC~~ et ~~ghA~~ angulus ad centrum hoc est
CAI insistit simpla (quare ~~[...]~~ ubi sunt aequales) et rectos ad h et a unde erit
ut CD sic a — Da sic ~~bc~~ Ag sic c — Ah ∝ x ~~[...]~~ hinc bc ∝ ax et $\frac{bc}{a}$ ∝ x
~~sint~~ Idque casu de quatuor rectis DI, IC, CF, FB quarum centrum gravitatis com-
mune ex praecedentibus est punctum M. sit DI ∝ a Da ∝ b Ad ∝ c Am ∝ x ac tan-
dem Dg ~~[...]~~ f unde DC ∝ 2f jam propter Δ similia Dgl et AlC (A ~~[...]~~ n. g et
l ~~[...]~~ anguli recti ac D et A item aequales, ille n. ad peripheriam insistit du-
pla et hic ad centrum simpla) erit ut DI ∝ a ~~ad~~ Dg ∝ f ~~sic~~ Ad ∝ c ad th[...]
Al quae proinde erit $\frac{fc}{a}$ hinc denuo propter triangula similia CaD, gmA
quae ostenduntur esse similia quemadmodum in primo casu triangula CaD et ghA
erit ut DC ∝ 2f — Da ~~[...]~~ sic Al ∝ $\frac{fc}{a}$ ~~[...]~~ Am ∝ x hinc multiplicando
extremos ac intermedios inter se obtinetur $\frac{bfc}{a}$ ∝ 2fx ergo deleto f $\frac{bc}{a}$ ∝ 2x
ac $\frac{bc}{2a}$ ∝ x; sint denique octo rectae DK, Ki, iH, HC, CG, GF, FE, EB quarum
centrum commune ex praecedentibus est punctum O; ~~[...]~~ id est vero calculo Alge-
braico inveniendum sit AO ∝ x DK ∝ a AL ∝ c Da ∝ b, Dd ∝ g unde DI ∝ 2g
et denique Do ut prius f unde DC ∝ 2f; jam propter triangula similia DdK,
AML (d enim et M sunt recti, D autem et A ibidem sunt aequales illa n. ad peripheriam in-
sistit dupla et hic ad centrum simpla) erit ut DK ∝ a — Dd ∝ g — AL ∝ c —
ita AM ∝ $\frac{gc}{a}$ hinc rursus propter triangula similia DgI et ANM (quae osten-
duntur similia quemadmodum ~~quemadmodum~~ in secundo casu triangula Dgl et
Alm) ut DI ∝ 2f — Dg ∝ g — AM ∝ $\frac{gc}{a}$ — AN ∝ $\frac{gfc}{2af}$ s. deleto f ∝ $\frac{gc}{2a}$
Tandem propter triangula similia CaD NOA (ostenduntur similia quemad-
modum in primo casu triangula CaD et ghA) erit ut DC ∝ 2g — Da ∝ b
sic AN ∝ $\frac{gc}{2a}$ — AO ∝ x unde propter extremorum et intermediorum aequa-
lia producta $\frac{bgc}{2a}$ ∝ 2gx ac deletis g $\frac{bc}{2a}$ ∝ 2x et $\frac{bc}{4a}$ ∝ x. Non longius
reliquum procedendum erit; retinentur n. ~~[...]~~ semper eadem similia triangula in pri-
~~[...]~~oribus inventa, ac duo inter se semper accedunt ut hoc ex priorum observati-
one perspicuum esse poterit, ac inde qua ratione regula generalis elici possit
ad ~~[...]~~ quodlibet linearum centra invenienda; cum n. in primo casu fuit ut a —
b — c — x in secundo ut 2a — b — c — x, in tertio ut 4a — b si-
c — x ac in sequentibus eandem progressionem calculus (ut operanti patebit
erit) continuet; Regula generalis talis erit; si fiat ut numerus
rectarum datarum (hic in ultimo casu CH, HI, IK, KD) ad semissem ejus
quae segmento circularis peripheriae subtenditur (Da) ita perpendicularis
e centro, ex quo peripheria descripta est in unam rectarum propositarum ducta (hic
in ultimo casu AL) ad ~~[...]~~ alia [...] quae inter idem centrum et centrum gravitatis.

quod quæritur interjicitur (hic in ultimo casu AO) ubi notes hinc etiam regulam obtineri ad inveniendum centrum gravitatis cujuslibet circularis segmenti ~~semi~~circulari vel majoris minoris aut æqualis, cum n: latera continua bisectione his segmentis inscripta ac in infinitum continuata ~~sint~~ in circulum degenerent, ac perpendiculares AG, AD, AL in infinitum ~~sunt~~ decrescentes ibidem hinc radio æquales futuræ, erit proinde in sequentibus semicirculari majoribus aut minoribus ut semiperipheria DIC ad semi subtensam AD ~~ita~~ semidiametrum AC ad ~~rectam~~ quæ inter idem centrum gravitatis quod quæritur, interjicitur in ~~peri~~pheria autem semicirculari æquali ut Quadrans periferiæ DC ad radium AC sic idem radius AC ad quæsitam AO: vides igitur quod regulas ex generali indicata deduxerimus id quod similiter in alijs applicatis applicandis fiet. Tandem unicum hic exemplum adjicimus qua ratione curvarum et rectarum ~~centrum~~ centrum gravitatis possit inveniri; quod quidem ex regula generali satis liquet attamen majoris claritatis ergo in semicirculo ABC applicabimus: sit itaque centrum gravitatis totius perimetri semicircularis $ABCD$ inveniendum; primo juxta regulam generalem inveniendum erit centrum gravitatis semicirculi ABC, hoc B autem jam obtinetur ex hactenus explicatis dicendo videlicet ut DC ~~diam~~ diam semicirculi ABC $= x$ ad DC $= a$ sic eadem DC $= a$ ad DE quæ proinde erit $= \frac{aa}{x}$ ac E centrum quæsitum deinde supponendo juxta regulam generalem ~~...~~ centro gravitatis lineæ AC, punctum D, lineæ DE ita secanda erit in F, ut peripheria ABC sit ad basin AC ut reciproce DF ad FE ~~existente~~ itaque ABC peripheria $= 2x$, ac supposita $DF = y$, $EF = \frac{aa-xy}{x}$ erit ut $2x$ —— $2a$ = AC sic y —— $\frac{aa-xy}{x}$ unde ob extremorum et intermediorum æqualia producta $2ay$ = erit $aa-xy$ ac $2ay+xy = aa$ unde tandem $y = \frac{aa}{2a+x}$ ~~Regula~~ Regula autem inveniendi centrum F quæsitum talis est ut $2a+x$ —— a sic a —— quæsitam DF

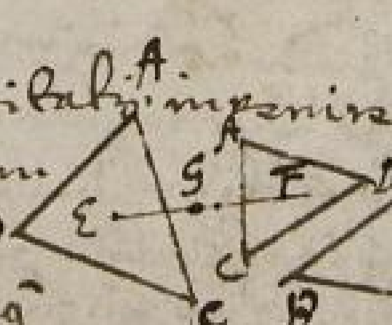


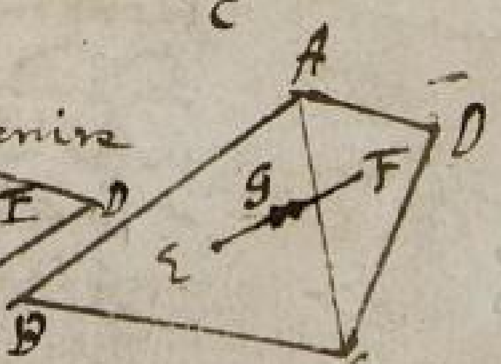
2do sufficiemus centrum gravitatis assignare ostendemus primo quidem superficierum rectilinearum, deinde figurarum quæ in alteram partem deficiunt tum demum perimetri corporum:

1 Superficierum rectilinearum centrum gravitatis elicietur observando sequentes propositiones

1 Dati trianguli centrum gravitatis invenire; hoc in proxime sequenti agentes de centro gravitatis superficierum ad alteram partem deficientium ostendemus (vid interim) rectum sit quod nimis si in triangulo (ABC) bisectis duabus lateribus (AB et BC in E et D) concurrant ductæ ab angulis ad dimidia latera (hic AD et EC in F) punctum concursus (F) esse centrum gravitatis ejusdem, item si AF sit dupla FD vel FC dupla FE eadem ratione F est centrum gravitatis ejusdem, Tertio; si AG et AH duplæ sint GB et HC in ducta GH est centrum:

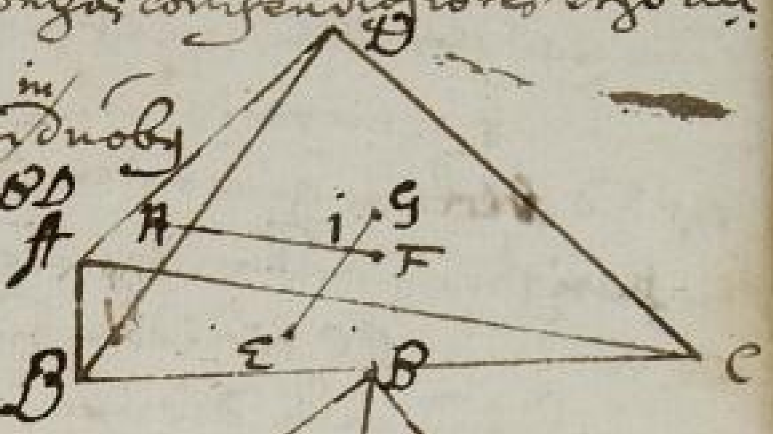
2 Binorum triangulorum communis centrum gravitatis invenire sint duo triangula ABC et ACD quomodocunque ad invicem sita inveniantur per proxime antecedentem propositionem triangulorum centra seorsim quæ sint puncta E et F junctaque



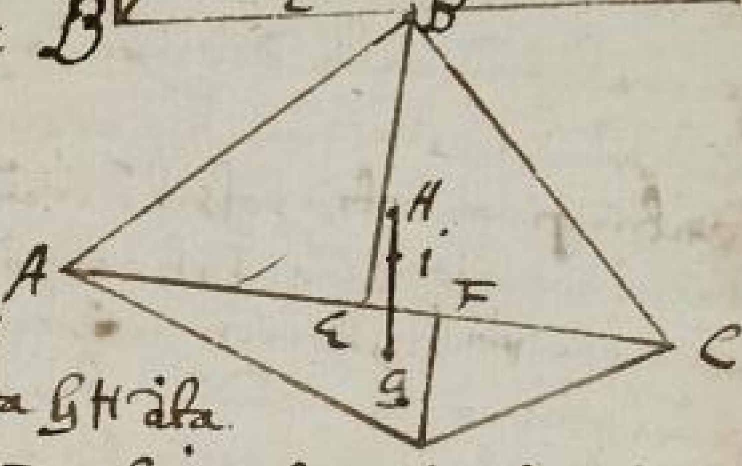


EF secetur in G ita ut EG sit ad GF ut contra Triangulum ADC ad Triangulum ABC ad triangulum ADC eritque punctum G centrum commune utriusque trianguli; quomodo autem fiat ut triangulum ad Triangulum ita linea ad lineam siquis rogabit, sciendum si triangula transformentur in rectangula aeque alta (p. 45 lib. 1) quod tunc ut dorum rectangulorum basis ad basin ita erit triangulum ad Triangulum. Est autem haec ratio ~~paulo~~ longa; compendiosiores ergo aliquas afferemus. sit

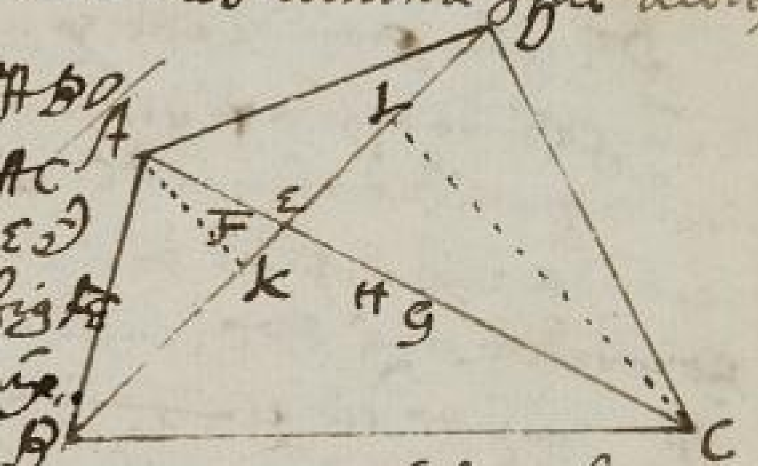
1 talis in quadrilatero ABCD (seu quod idem in duobus triangulis ADC et ABC) ductis diametris AC, BD inveniantur centra gravitatis triangulorum ABC, BCD, CDA et DAB puncta scilicet E, F, G et H, jungantur que opposita recta EG et HF ipsae n. se intersecabunt in puncto I, centro



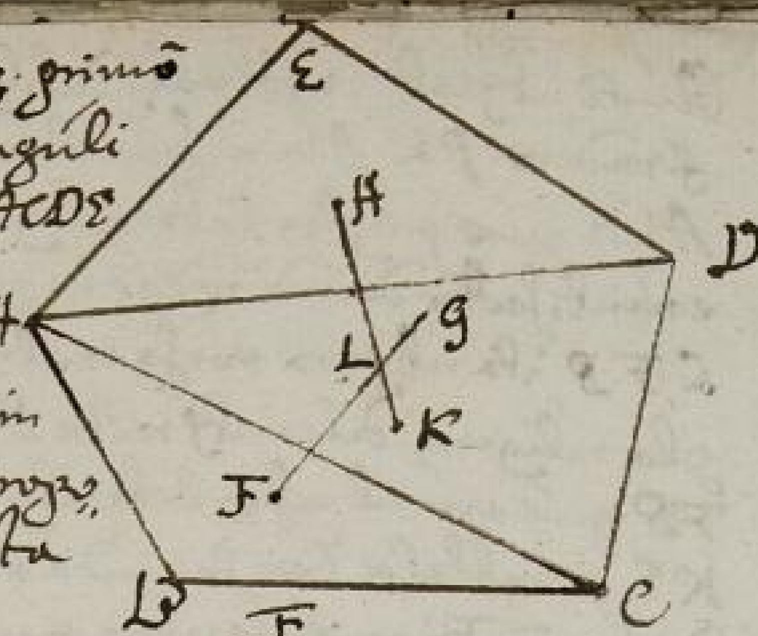
2 In Quadrilatero ABCD ducta altera tantum diametro AC atque in eam ex angulis oppositis perpendicularibus BE et DF junctisque centris G et H triangulorum ADC, ABC prius inventis juncta GH ita dividatur in I ut sit GI ad IH sicuti BE ad DF erit I centrum quaesitum; Est n. ut triangulum ABC ad Triangulum ADC ita BE ad DF cum sint altitudines eadem basis AC



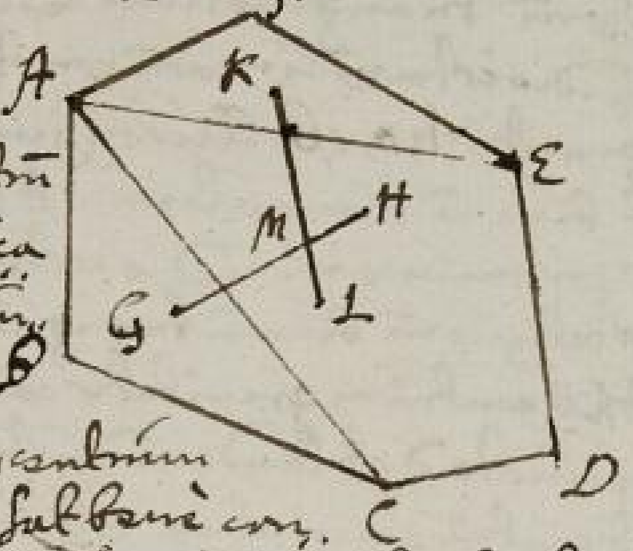
3 Esto Quadrilaterum ABCD (sive duo ΔΔ ABD et BCD) cujus altera diameter, verbi gratia AC alteram tantum BD bisecet in E ~~[illegible]~~ rectae AE et EC secentur in tres partes aequales ita ut AF ipsius et EG ipsius GE sint dupla (~~[illegible]~~ eruntque superiora F et G centra gravitatis triang. ABD et BCD) deinde ex GE majori abscindatur GH minori EF aequalis erit punctum H centrum quaesitum est n. ut GH ad HF sic FE ad EG hoc est ut AE ad EC hoc est (propter Δ similia AKE et CLE) ut AK ad CL hoc est denique ut Triangulum ABD ad Triangulum BCD.



~~4~~ 3 Plurium Triangulorum centrum gravitatis determinare; Singulorum Triangulorum centris seorsim inventis, assignetur binorum quorumcunque Triangulorum centrum commune; Hoc sit tanquam unius trianguli centrum et copuletur recta cum centro tertij Trianguli, quae recta divisa ut segmenta inter se sint permutatim ut tertium illud Triangulum ad priora duo erit divisionis ~~punctum~~ punctum centrum gravitatis commune tribus propositis triangulis. Hoc centrum rursus instar unius trianguli centrum acceptum in recta quae id cum centro 4ti trianguli conjungit ~~[illegible]~~ eadem arte habebitur centrum gravitatis 4tuor triang. commune et sic deinceps. Aut copulentur binae et binae, ~~binae deinde copulae jungantur lineae~~ deinde cum binis copulis eodem modo procedendo ut diximus. Cum itaque omnis figura rectilinea resolvi possit in triangula patet hinc regula universalis ad inveniendum cujusvis figurae planae et rectilineae; locum etiam habet haec regula in alijs quibusvis figuris, si loco triangulorum acquirantur partes in quas figura resolvitur, ostenduntur ibidem et hic ex hac generali regula pro singularibus casibus singulares adinveniendi regulae, si perfectum ...



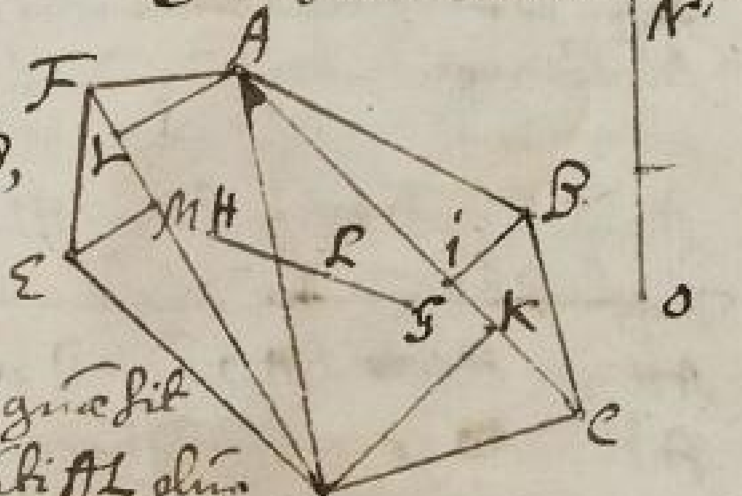
Huc adhibeamus calculum Algebraicum. Sit ergo primo Pentagonum ABCDE, et ducantur rectae AC, AD, trianguli autem ABC centrum gravitatis sit F et quadrilateri ACDE sit centrum G: per figuram dictam in centrum et jungatur FG. Rursus trianguli ADE centrum sit H et quadrilateri ABCD centrum K et ducatur HK secans FG in L. erit punctum L centrum gravitatis pentagoni propositi. Est n. centrum illud in recta FG sed et in recta HK ergo in communi sectione L.



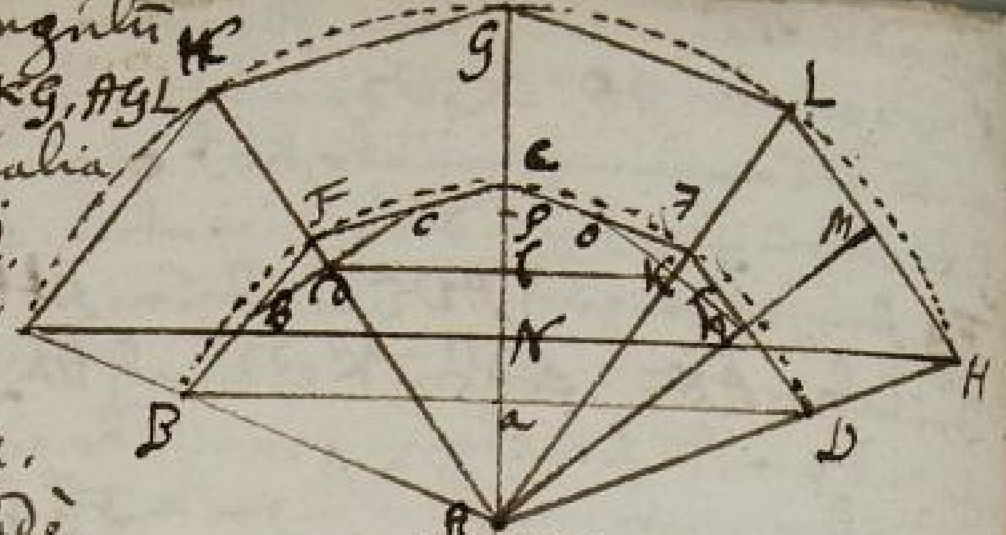
Sit denuo Hexagonum ABCDEF et ducantur AC, AE sitque trianguli ABC centrum gravitatis G et pentagoni ACDEF centrum sit punctum H ducaturque GH. Rursus centrum trianguli AEF sit K et pentagoni ABCDE sit L et ducatur KL quae secet ipsam GH in M erit eadem ratione punctum M centrum gravitatis totius Hexagoni propositi.

Non aliter in Heptagono, octogono et in aliis deinceps centrum inveniatur gravitatis, atque haec ratio praxi geometricae satis bene convenit; quia vero methodus sequens facilius accommodatur calculo algebraico eam hic subjicere placuit; Esto igitur pentagonum ABCDE, in tria resolutum triangula, in quibus ad bases ex angulis oppositis ductae sint perpendiculares EK, BI, DH et sit quadrilateri ACDE centrum F trianguli vero ABC punctum G jungaturque FG. Fiat deinde ut AD ad AC ita DH ad aliam quae sit LM ergo si FG secetur in N ita ut GN sit ad NF sicut BI, EK simul ad LM erit punctum N centrum gravitatis quaesitum. Demonstratio dependet a 23 lib. 6ti

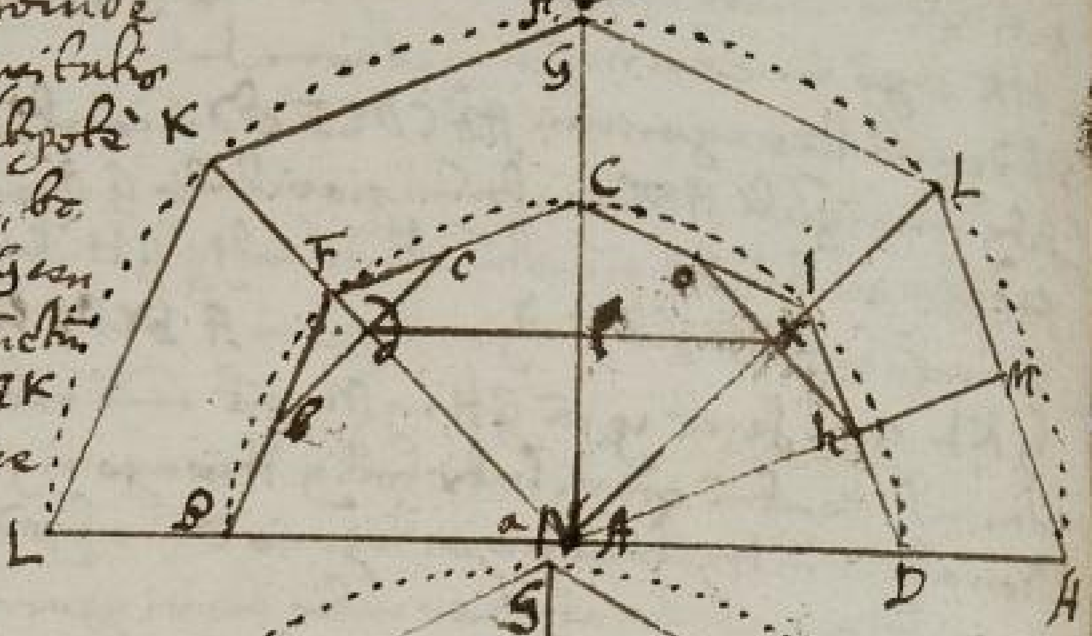
~~Sit~~ denique Hexagonum cum diagonijs in quatuor divisa triangula et quadrangulorum ADCB, ADEF gravitatis centra G H juncta per rectam GH ductisque perpendicularibus BI, AL, EM et DK. His peractis fiat ut FD ad AC ita BI plus KD ad aliam quae sit NO; deinde secetur GH in L ita ut sit GL ad LH, sicuti AL plus EM ad NO erit punctum L centrum Hexagoni propositi; Atque ita deinceps in reliquis figuris multangulis.



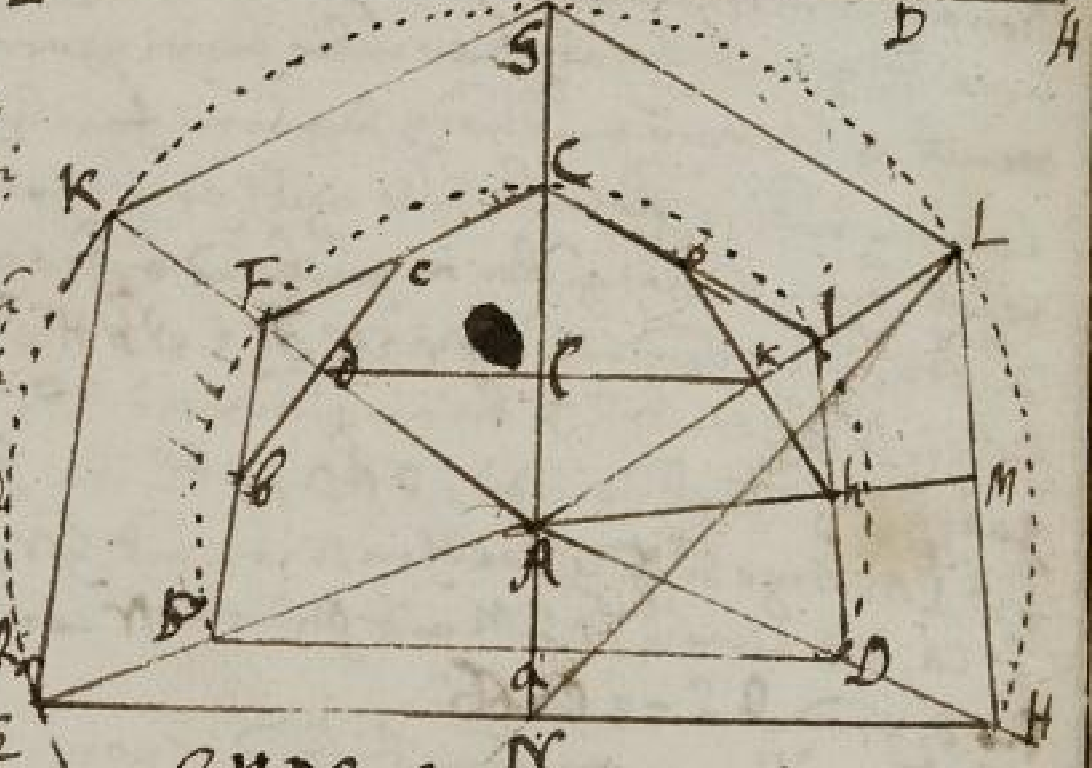
Sit tandem adhuc exempli loco majoris difficultatis Multangulum ~~AKGL~~ H (~~...~~ sectorem circulorum majus ac aequale repraesentant) cujus bina latera AE, AH circuli sint radij, reliqua vero inter se aequalia numero pariter paria et ejusdem circuli peripheriae inscripta (EK, KG, GL, LH) centrum gravitatis inveniendum; ~~Quadrilat~~ ~~[illegible]~~ linea AH, ~~AL, AG, AK~~, AE, ita dividantur in D ut AD sit dupla DH. describatur circularis segmento ADCB radio AD sitque AB ac du[illegible] perpendiculares DI, IC, CF ac FB ~~constat [illegible]~~, in harum medio K, o, L, B, centra gravitatis triangulorum ALH, AGL, ~~AKG~~, AEK; ~~[illegible]~~ vero in his [illegible] tandem ~~dk~~ in L centrum gravitatis totius Multanguli ~~existere~~;



Quod ut fiat resolvatur datum multangulum per radios AK, AL in sua Δla, AEK, AKG, AGL ALH, quae propter latera aequalia aequalia erunt, sectis deinde radiis in punctis D, I, C, F, B, ita ut pars versus centrum A sit dupla reliquae, ducanturque rectae DI, IC, CF FB quae erunt ipsis lateribus HL, LG, GK, KE, parallelae (ex secunda 6ti) ac proinde dictorum triangulorum centra gravitatis in medio istarum linearum consistent utpote in punctis k, o, c, b. Quare junctis ko, bc erit binorum triangulorum AHL ALG centrum commune in medio rectae ko puncto l et reliquorum binorum triangulorum AEK

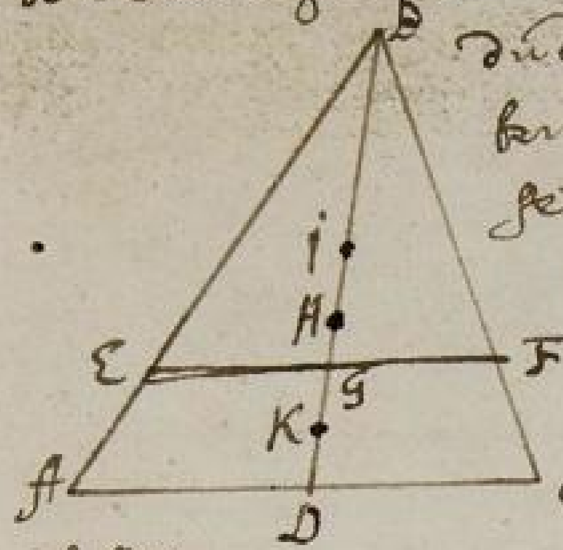


et AKG centrum gravitatis commune in puncto d et tandem ducta dl erit centrum commune 4 triangulorum hoc est totius multanguli propositi in puncto medio lineae dl, sed hoc nihil aliud quam si juxta priora, invenissemus centrum gravitatis commune linearum DI, IC, CF, FB, circulari segmento DCB adscriptarum ut attendenti manifestum, unde primo patet regulas ibi traditas posse etiam adhiberi ad inveniendum centrum gravitatis multanguli, secundo idem licet



alia via indagare, sit n: HL $\propto a$, AM $\propto b$, HN $\propto c$, Al $\propto x$: unde Ak $\propto \frac{2b}{3}$ et cum sit ut AM $\propto b$ — HL $\propto a$ — Ak $\propto \frac{2b}{3}$ — 3D erit haec $\propto \frac{2a}{3}$ et cum ~~AD~~ ~~[illegible]~~ triang: similia: ANH et AaD sit ut AH — HN sic AD ad aD erit etiam permutando ut AH/AD; sic NH ad aD sed AH ad AD ex constructione est ut 3 — 2 ergo HN ad aD unde e aD $\propto \frac{2c}{3}$ jam sic Ak $\propto \frac{2b}{3}$ — Al $\propto x$ unde propter extremorum ac intermediorum aequalia producta erit $\frac{4bc}{9} \propto \frac{4ax}{3}$ deletis delendis multiplicationeque facta per 3 erit cum $bc \propto 3ax$ unde $\frac{bc}{3a} \propto x$ specialis itaque regula pro inveniendo centro gravitatis praesentis multanguli erit ut latus figurae LH $\propto a$ ad tertiam partem subtensae ND $\propto \frac{c}{3}$ sic perpendicularis AN $\propto b$ ~~ad~~ quaesita Al $\propto x$: eadem itaque ratione infinitae regulae pro specialibus casibus inveniri possunt, ponendo tantum pro CI + ID $\propto \frac{4a}{3}$ si multangulum duarum laterum $\frac{2a}{3}$ si ~~[illegible]~~ $\frac{8a}{3}$ si deinde $\frac{16a}{3}$ atque ita porro ~~[illegible]~~ quo ad reliqua calculum ut antea continuo. Regula autem generalis ~~pro quali~~ [illegible] erit; si fiat ut tertia pars laterum aequalium (in praesenti casu ut $\frac{2a}{3}$) ad tertiam partem basis EH $\propto$ huic $\frac{2c}{3}$

♁ X centrum gravitatis trianguli ABC inveniendum



ducatur EF parallela AC, tum BD per medium anguli B transeuntem ~~[illegible]~~ erunt centra gravitatis trian: EBF, ABC ac trapezii EFCA in hac linea BD juxta positionem Stevini libro 2do de Arte Statica: assumatur itaque H pro centro gravitatis trianguli ABC, i trianguli EBF ac K trapezii AEFC:

juxta 4am ~~[illegible]~~ lib: 6 Euclidis

$\overset{AD}{b} : \overset{EG}{c} :: \overset{BD}{a} : \overset{BG}{\frac{ac}{b}}$ unde

sit BD = a
AD = b
EG = c
BH = x
HK = y

$\Delta ABC = ab : \frac{acc}{b} = \Delta EBF$ ut $bb : cc$

seu dividendo ΔEBF ad $AEFC$ ut $cc : bb-cc$

Porro cum BD et BG proportionaliter per centra gravitatis dividantur

erit $\overset{BD}{a} : \overset{BH}{x} :: \overset{BG}{\frac{ac}{b}} : \overset{Bi}{\frac{cx}{b}}$ hoc subtractum ex $BH = x$

remanet $Hi = \frac{b-c}{b},x$

Denique juxta regulam aequiponderantium erit ut

$\overset{HK}{y} : \overset{Hi}{\frac{b-c}{b},x}$ sic $\overset{\Delta EBF}{cc} : \overset{AEFC}{bb-cc}$ unde

$\overline{bb-cc}\,y = \overline{b-c},\frac{ccx}{b}$ hoc diviso per $b-c$

erit $\overline{b+c}\,y = \frac{ccx}{b}$ et $\overline{bb+bc}\,y = ccx$ hoc est resolvendo aequationem in proportionem x erit ad y ut $bb+bc$ ad cc ponendo jam $b = c$ cum $AD = EG$ cadunt i in H ac K in D atque ita $HD = y$.

Ergo $\overset{BH}{x} : \overset{HD}{y}$ sicut $bb+bc$ ad cc

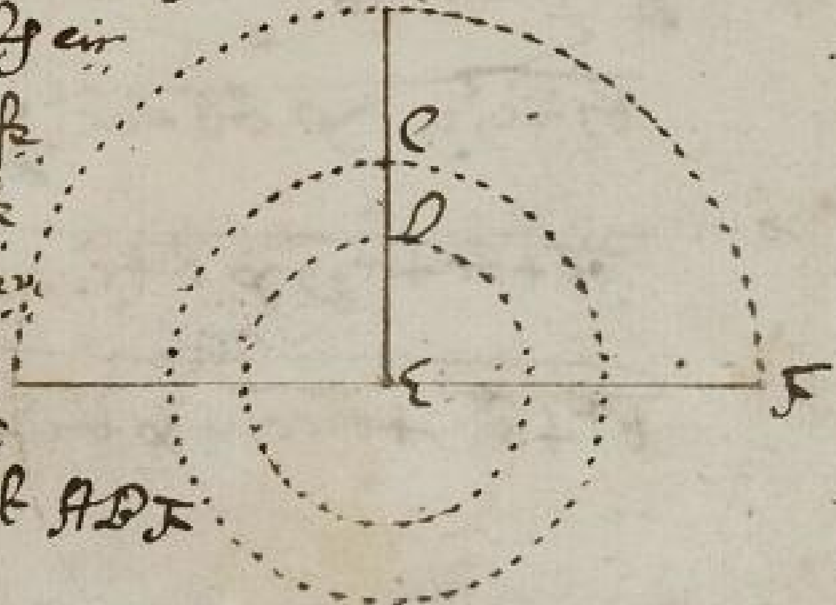
i.e. $2bb : bb$

seu $2 : 1$

sic duæ tertiæ partes perpendicularis hic $\frac{2b}{3}$ ad quæsitam AL hic $\propto x$: hinc etiam constat, quod cum ~~latera~~ triangula continua bisectione his segmentis inscriptaæ in infinitum continuata, in circulum degenerent, ac perpendiculares in infinitum crescentes, ibidem tunc radio æquales futuræ, regulam pro inveniendo centro gravitatis sectorum semicirculo majorum aut minorum esse, ut tertia pars circularis peripheriæ EGH ad tertiam partem subtensæ EH, ita duæ tertiæ radii AG ad rectam AL: pro semicirculo autem, ut tertia pars circularis peripheriæ EGH ad AD duas tertias radii AH sic eadem duæ tertiæ radii AH ad quæsitam AK; si quis vero desiderat centrum gravitatis figuræ EKGLHNE invenire hoc ibi; inventa primum totius figuræ EKGLHA in L centro, tum trianguli EAH quod est in a tunc assumatur ~~AK p L erit p centrum quæsitum omnis figuræ, ... ex L~~ versus G in f, ut quæ ad La eandem habeat proportionem, quam habet magnitudo trianguli HAE ad figuram EKGLHNE eritque f centrum quæsitum figuræ EKGLHNE:

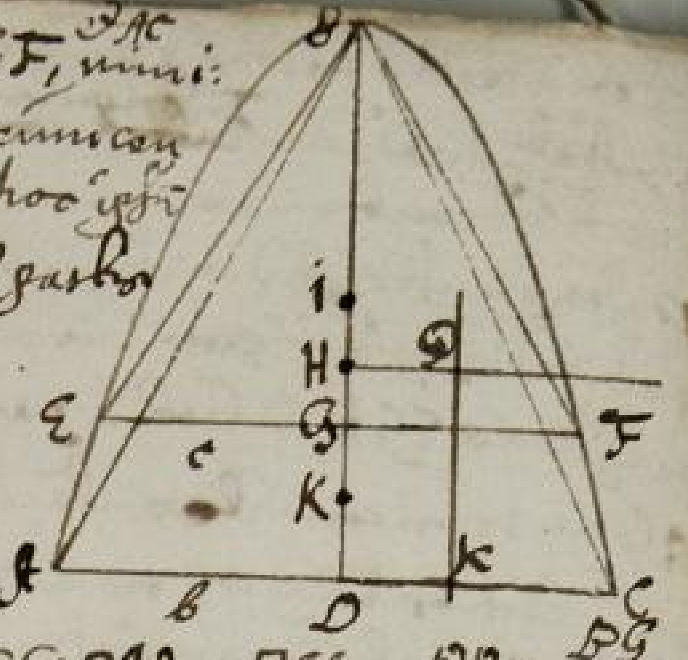
F sive Multanguli parte aut sectoris subintelligas ~~...~~ idem erit

Hic est omittere possum quin breviter insinuem, miram circa hasce inventa proprietatem; descripto enim semicirculo ABF, sique centra gravitatis C et D peripheriæ ABF et semicirculi EBDF in D describantur circuli CE et DE, erit Diameter AF ad circumferentiam circuli CE ut $x \pi 2$, circumferentia autem circuli DE ad circumferentiam circuli CE ut $2 \pi 3$ tandem Diameter AF ad circumferentiam circuli DE ut $3 \pi 4$; quod facile probari poterit; sit ABF circumferentia $\propto x$: EF $\propto a$; inde est ut



BF $\propto \frac{x}{2} \pi \overset{EF}{a} \pi \overset{EF}{a} \pi \frac{2aa}{x} \propto$ EC et denuo ut tertia pars circumferentiæ ABF $\propto \frac{x}{3} \pi \frac{2a}{3}$ ex EF sic $\frac{2a}{3} \pi \frac{4aa}{3x} \propto$ ED cum itaque juxta Archimedem circumferentiæ circulorum sint ut radii eorum erit EF $\propto a$ ~~ad~~ totam circumferentiam $\propto 2x$, ut CE $\propto \frac{2aa}{x}$ ~~ad circ~~ circumferentiam ejusdem $\propto 4a$; eadem ratione; erit ut EF $\propto a$ ~~ad~~ totam circumferentiam $2x$, sic ED $\propto \frac{4aa}{3x}$ ad ejusdem circumferentiam $\propto \frac{8a}{3}$ ratio proinde Diametri AF et circumferentiæ circuli CE erit ut $2a$ ad $4a$ hoc est ut $x \pi 2$, ratio autem circumferentiæ DE ad circumferentiam CE erit $\frac{8a}{3} \pi 4a$, hoc est ut $2 \pi 3$ et tandem ratio Diametri AF ad circumferentiam DE erit ut $2a \pi \frac{8a}{3}$ hoc est 3 ad 4 quod erat ostendendum imo quod magis; id etiam quod diximus verum esse comperieris existente peripheria aut ejusdem plano majore vel minore ABF; applicatis modo quæ diximus de diametro subtensæ ejusdem peripheriæ aut plani, vides igitur et hic quot regulas ex generali indicata.

Quoad figuras eorum quæ in alteram partem circa axim æqualiter deficiunt gravitatis centrum attinet ubique propositionibus exprimemus specialiter, id quidem applicando ad certa exempla ~~...~~ ita tamen ut generalis methodus ~~inde~~ qua ratione in aliis hujus generis sit procedendum facile derivari possit; sit itaque primo centrum gravitatis ~~in~~ Parabolæ inveniendum; ~~sit ...~~ itaque ABCAL a



ad quas EF parallela ad AC, hunc per medium EF, nimi: ad AC
G ducta BD qui itaque diameter Parabolæ erit et cum cen-
trum gravitatis Parabolæ sit in Diametro ponamus H hoc ipsum
esse, I vero centrum gravitatis Parabolæ EBF ac K parti-
AEFC, sit jam

$BD \propto a$ supponamus itaque Parabolam EBF
$AD \propto b$ esse ad Parabolam ABC ut $c^3 \;\pi\; b^3$
$EG \propto c$ unde Parabola EBF ad AEFC
$BH \propto x$ ut $c^3 \;\pi\; b^3 - c^3$ quod qua ratione
$HK \propto y$ inveniri possit infra traderemus jam ponimus Parabola esse ut $\frac{\square AD}{bb} \;\pi\; \frac{\square EG}{cc} \;\pi\; \frac{BD}{a}$ ad $\frac{BG}{\frac{acc}{bb}}$
porro cum axes Parabolarum per centra gravitatis proportionaliter dividantur
erit $\frac{BD}{a} \;\pi\; \frac{BH}{x} \;\pi\; \frac{BG}{\frac{acc}{bb}} \;\pi\; \frac{BI}{\frac{ccx}{bb}}$ hoc subtractum ex $BH \propto x$ restat $HI \propto \frac{bb-cc,x}{bb}$

ac ultimo cum fit ut HK ad HI sic Parabola EBF ad AEFC erit

$y \;\pi\; \frac{bb-cc,x}{bb}$ sic $b^3 \;\pi\; b^3-c^3$ ~~bbc~~ est

$\overline{b^3-c^3},y \propto \overline{bb-cc},\frac{c^3x}{bb}$ unde est x est ad y sic $b^4+b^3c+bbcc$ ad bc^3+c^4

$b-c$ $\overline{bb+bc+cc},y \propto \overline{b+c},\frac{c^3x}{bb}$ supponamus jam $b \propto c$ hoc est $AD \propto EG$ tunc erit
i in H et K in D ac $HD \propto y$ unde

$\overline{b^4+b^3c+bbcc},y \propto \overline{bc^3+c^4},x$ bb

BH HD
$x \;\pi\; y$ sic $b^4+b^3c+bbcc \;\pi\; bc^3+c^4$
seu ut $3b^4 \;\pi\; 2b^4$
seu ut $3 \;\pi\; 2$:

~~Cum autem EBF Parabola sit ejusdem naturæ cum ABC ...~~
F cum autem BD posita a erit $BH \propto \frac{3a}{5}$ et $HD \propto \frac{2a}{5}$ id quod indicat BD in H ita esse secandam ut BH sit ad HD ut 3 et 2 ~~...~~
existente tunc in H centro gravitatis Parabolæ ABC; eadem ratione inveniri
poterit.
1 Centrum gravitatis Parabolæ EBF in I, secando BG in I ut BI sit ad IG
ut 3 ad 2; ~~unde cum BD posita a erit BH, $\frac{3a}{5}$ et HD $\frac{2a}{5}$~~
2 Centrum gravitatis AEFC: Frusti parabolici cum n. jam I, H nota sit, est
n. juxta priora $\frac{bb-cc}{bb}$ in x, hoc est $\frac{bb-cc}{bb}$ in $\frac{3a}{5}$ ~~...~~ fiat itaque
ut Frustum Parabolicum AEFC s: $b^3-c^3 \;\pi\;$ Parabolam EBF s: b^3 sic $\frac{bb-cc}{bb}$
in $\frac{3a}{5}$ ad HK eritque K centrum gravitatis:
3 Centrum gravitatis Parabolæ BDC ad DC duplicata in K, ponendo ut di-
ctum est inveniatur DC ita secandam esse in K ut KC sit ad KD ut $5 \;\pi\; 3$:
~~4 Demonstratione~~
4 Ad centrum gravitatis Semiparabolæ DBC inveniendum, Diameter BD se-
cetur in H ut BH sit ad HD ut 3 ad 2, unde ex priora H est centrum gravitatis para-
bolæ ABC et consequenter centrum æquilibrij Semiparabolæ DBC appensæ secun-
dum BD (quod n. est centrum gravitatis semiparabolæ DBC duplicata est centrum æ-
quilibrij simplæ) ergo si ducatur HO indefinite et parallela DC, in ea erit centrum
gravitatis semiparabolæ; pariter CD sic secetur in K, ut CK sit ad KD ut $5 \;\pi\; 3$ ...

33

100

priora in K erit centrum aequilibrij semiparabolae DBC acceptae secundum rectitudinem BC. Ergo si ducatur KD indefinita et parallela AD in ipsa erit centrum gravitatis semiparabolae DBC; ~~sed~~ autem hoc etiam sit in HO erit id ipsum in intersectione earum in O:

3 Sit centrum gravitatis residui semiparabolae ADC ~~inveniendi~~.

dempto ab ea triangulo inscripto ADC, ABC videlicet assignandum fiat CF dupla FD eritque F centrum ~~gravitatis~~ aequilibrij trianguli ADC juxta rectam DC appensi; pariter sit DC divisa in E ut CE ad ED sit ut 5 ─ 3 eritque juxta priora E centrum aequilibrij totius semiparabolae acceptae secundum rectitudinem DC, tunc fiat ut trianguli ADC ad figuram ABCA (quae hic est 4 ─ 3 ut infra ostendetur) sic FE ad EG eritque G centrum aequilibrij figurae ABC acceptae secundum DC, unde si ducatur GK in ea erit centrum gravitatis predictae figurae; eadem ratione in AD fiat L centrum aequilibrij trianguli ADG AL dupla LD assumendo ac M centrum aequilibrij semiparabolae secundum eandem rectitudinem dividendo AD in M ut AM sit ad MD ut 3 ─ 2, tandem fiat ut FE ad EG sic LM ad MN eritque N ibidem centrum aequilibrij figurae ABC ~~juxta~~ eandem rectitudinem, ac proinde si ducatur NQ normaliter ad AD, in hac ipsa erit centrum gravitatis figurae ABC, sed cum idem sit in GK erit utique in harum intersectione hoc est in Q.

Iam quoad Perimetrum congeriem, ~~horum~~ centrum ut assignetur ~~ratio~~ alia ratione quam hactenus indicatum operando ~~id~~ ipsum obtinebitur; exemplum ~~addi~~ tribuimus quo clarum ~~fiet~~ qua id ratione in alijs assequi liceat, sit Pyramis, cujus centrum gravitatis sit indagandum; e.g. ABCD inventio igitur juxta priora centro gravitatis H trianguli ~~alicujus ex predictis triangulis~~ ABD ~~ducatur~~ item trianguli ADC in I ducta autem HI ita secetur in O ut triangulum ABD sit ad triangulum ADC reciproce IO ad OH: eritque punctum O commune centrum gravitatis utriusque dictorum triangulorum, ~~consequens~~ existente

K centro gravitatis ABDC, ducta KO centrum jam inventum connectens ita secanda erit in P ut A ADC est ad duo triangula ABD et DAC sic OP ad PK eritque P centrum gravitatis trium dictorum triangulorum. Nec aliter ducta PE connectens centrum jam inventum P et E Ali BDC, dividatur in F ut EF sit ad FP si reciproce ACA ABD, DAC ac BAC ad aream BDC hoc ipsum F erit centrum gravitatis ~~Pyramidis~~ totius Pyramidis, haec que ita dicta sunto, juxta generalem regulam breviter hic obtinetur: si ~~F~~ centrum gravitatis alicujus trianguli eg: ABD in H agatur planum parallelum plano basis BDC; ~~hujus ex~~ ~~simili~~ linea tunc EL connectente MNO centra gravitatis divisa in F ut EF sit ad FL sic ~~Pyrami~~ planum MNO ad BDC, erit F centrum totius Pyramidis eruitur; poterit ~~enim~~ ~~aliud~~ autem hic si opus calculus Algebraicus adhiberi ad eliciendas ex hac generali regula speciales ~~tali~~ negotio inservientes; Manifestum insuper est eodem plane modo et haberi et ostendi posse inventionem centri gravitatis perimetri cujusvis Pyramidis quorumcumque laterum et quaecumque basi rectilineis contenta existente quoque axi ad ea vel recta vel obliqua, unde patet idem cono applicari posse. siquidem basis sit ~~figura~~ ~~regularis~~ ~~polygona~~ ~~ac~~ ~~cum~~ ~~paralleli~~ ~~quant~~

aliqua ex figuris polygonis quas regulares vocant, nulla aliam esse quae ad inveniendum centrum gravitatis totius perimetri basi excepta quam ut ipsi earundem ita dividatur ut pars ad verticem sit ~~dupla~~ ad reliquam dupla: Ut[?] corporis centrum gravitatis invenire; haec si planis superficiebus constent poterunt ad imitationem [omnia] fieri ~~praeterea~~ dictorum; Nam sicuti in prioribus figura plana, rectilinea, resolvitur in sua triangula, ita hic solidum in suas Pyramides distinguendum est, aucto commodo aliquo puncto ~~ex~~ communi vertice aut pluribus etiam; Deinde duarum plurimum invenia[tur] [commune] centrum gravitatis commune, donec corporis propositi exhauriatur totum. vide quae habet Stevinus ad propos: 21, aut tentandum nunc Theoremata quae statim adjungemus; Sed poterit ceterum in quam plurimis corporibus tam planis quam curvis, aut ex his mixtis centrum gravitatis inveniri poterit agendo sequenti ratione; exempla ostendemus in Conoide [Parabolico et Pyramide] unde qua ratione in aliis sit applicandum facile colligetur, fit autem hoc ad imitationem ejus, quod diximus de Parabolae [ac triangulo] inveniendo centro gravitatis; [F. Nec aliter] invento n. ut BDq trig BD

x acc [erit] Conoidis ~~autem~~ Parabolica EBF est ad Conoidem Parabolicam ABC ut c^4 π b^4 unde dividendo ~~frustum~~ frustum Conoidis AEFC π Conoidem EBF ut b^4-c^4 π c^4

Porro erit iH

$$\frac{bb-cc \text{ in } x}{bb} \;\pi\; \overset{HK}{y} \;\pi\; \overset{AEFC}{b^4-c^4} \;\pi\; \overset{EBF}{c^4}$$

$$\frac{bbc^4-c^6 \text{ in } x}{bb-cc} \;\infty\; \frac{b^6-bbc^4 \text{ in } y}{bb-cc} \quad +b^4cc$$

$$c^4 \text{ in } x \;\infty\; b^4+bbcc \text{ in } y \quad \text{unde}$$

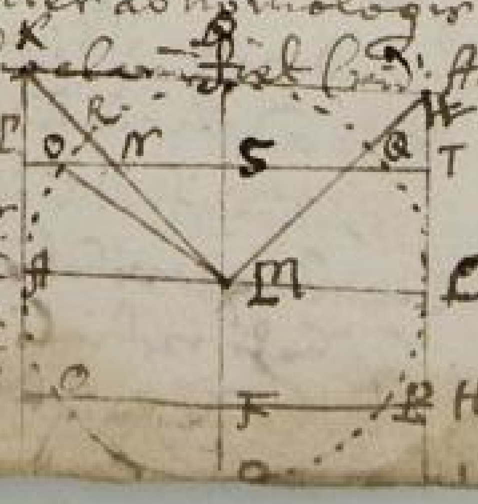
x π y π b^4+bbcc π c^4 ac supponendo $b \infty c$ erit

ut $2b^4$ π b^4

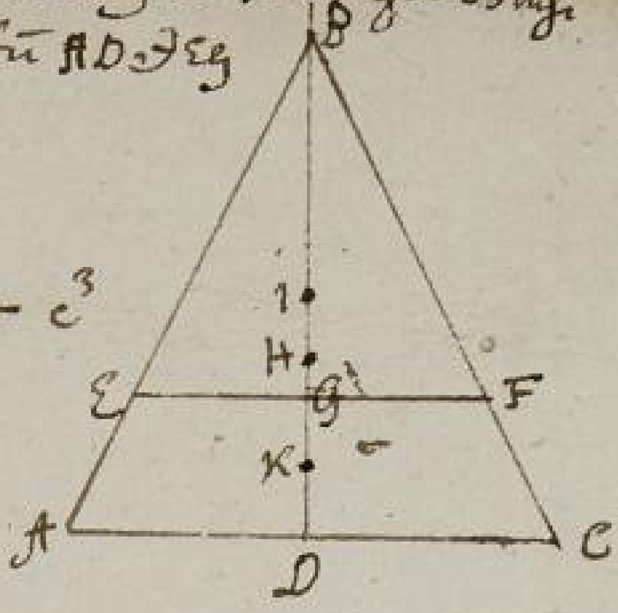
s: ut 2 π x; linea itaque BD in H secanda ut BH ad HD sit 2 π 1

Eadem ratione porro in aliis procedendum, ~~placuit~~ et hic uti circa Parabolam fecimus, inveniri centrum gravitatis Conoidis EBF, frusti AEFC, item Conoidis DCD duplicatae ad partes DC; Nec aliter ipsius semiconoidis DBC ac residui supplementi semi DBC videlicet BFC, cum vero ad centra gravitatis invenienda egregia a Mathematicis Theoremata exculta sint, horum ~~quaedam~~ unicum hic exhibebimus ~~quum~~ pro ceteris ad ~~convenientiore~~ convenientiorem locum rejectis de dimensione figurarum.

~~Binum[?] est Magnitudines proportionaliter analogae et proportionaliter aequales~~ Est Potamferum[?] tale.
~~gravitate~~ si duo quaecunque gravia fuerint proportionaliter analoga in gravitate, eorum gravitatis centra aberunt proportionaliter ab homologis terminis ipsorum; quae qua ratione intelligenda sint exemplo ~~clarum~~ fiet (vide Angeli de infinitis parabolis p: 378) Esto OBL portio sphaerae OBL juxta Archimedem erit superficies totius sphaerae ad superficiem portionis OBL ut est DB ad BF sed ut DB ad BF ita parallelogrammum KL ad parallelogrammum KH, Ergo superficies ad superficiem est ut parallelogrammum ad parallelogrammum;



Operatio haec nullo modo differt ab operatione adhibita in prioribus de Triangulis, nisi quod hic opportet ad obtinenda Pyramidum EBF et ABC axem ubi AD et EG multiplicare per BD et BG: prout sequitur.



$\frac{AD}{b} \pi \frac{EG}{c} \pi \frac{BD}{a} \pi \frac{BG}{\frac{ac}{b}}$ unde.

Pyramis EBF ad Pyramid: ABC ut $abb \pi \frac{ac^3}{b}$ seu ut $b^3 \pi c^3$

unde dividendo Pyramis EBF π frustum pyramidis AEFC

ut $c^3 \pi b^3 - c^3$ unde

$\underset{\frac{b-c}{b}x}{HI} \;\; \underset{y}{HK} \;\; \pi \;\; \overset{\text{Frusti AEFC}}{b^3-c^3} \;\; \pi \;\; \overset{\text{Pyra: EBF}}{c^3}$ hoc est

$b^3-c^3, y \propto b-c, \frac{c^3x}{b}$ dividendo utrinque per $b-c$

obtinetur $bb+bc+cc, y \propto \frac{c^3x}{b}$ seu: $b^3+bbc+bcc, y \propto c^3x$ seu resolvendo aequationem in proportionem

x ad $y \pi b^3+bbc+bcc \pi c^3$ ponendoque $b \propto c$ erit

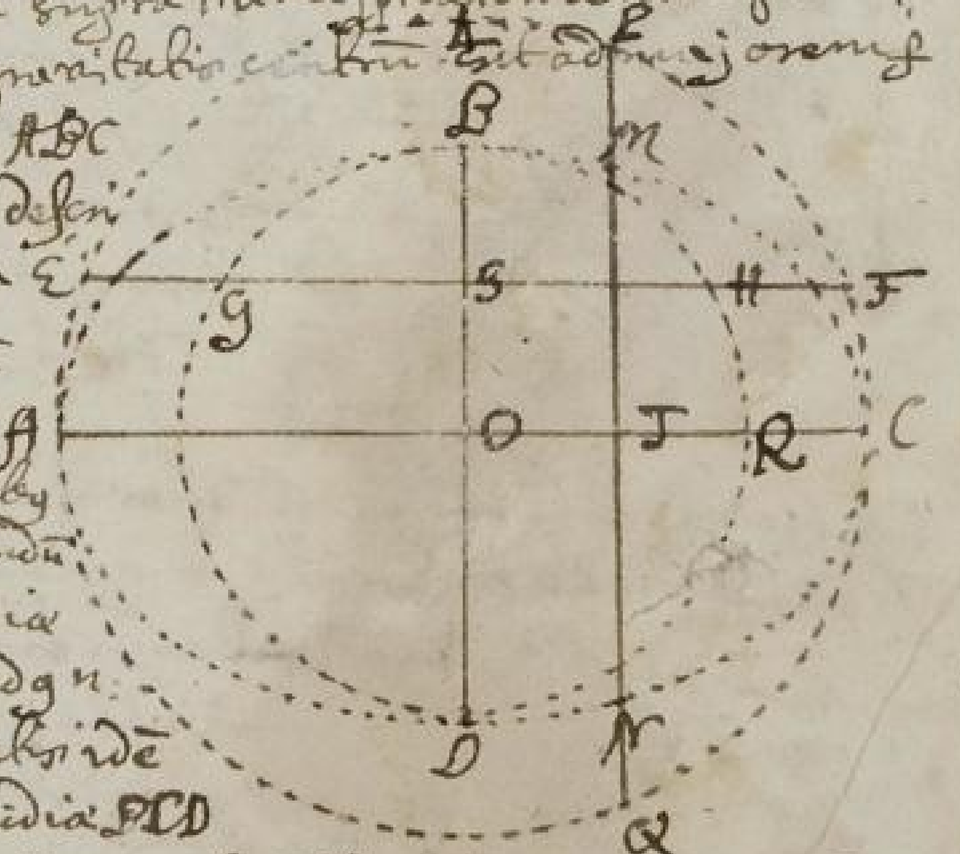
$\underset{BH}{x} \pi \underset{HD}{y}$ ut $3 \pi 1$, hinc patet axem BD etiam in H esse dividendam ut

BH sit tripla HD, quod eodem modo de Cono quocunque ABC, ac eius portione EBF intelligendum, cum Pyramides et portiones ~~EBF~~ tandem facta continua bisectione laterum in infinitum in has desinant:

F. Eadem ratione Hemisphaerij centrū gravitatis determinari p[ote]st. vid. Toricell: de □ [quadrando]: p: 60.

Sic probabitur de quibuscunque alijs portionibus. Ergo superficies sphaerica DABC et parallelogrammum KL sunt quantitates proportionaliter analogae (quantitates n. has conditiones habentes sic nominamus) tam in magnitudine, quam in gravitate, tam secundum totum quam secundum partes proportionales. Ergo centra gravitatis ipsorum eodem modo secabunt partes axis correspondentes, juxta in prioribus dicta, cum autem centrum gravitatis parallelogrammi v.g. KH dividit EF bifariam etiam centrum gravitatis portionis superficiei sphaericae OBS dividet EF bifariam invenimus itaque cujuscunque portionis superficiei sphaericae centrum gravitatis. F

Volvantur in praecedenti schemate circa DM ~~quadrans AB~~ quadrans ABM rectanguli AB bi angulum MKB gignitur Hemisphaerium ab ~~ABC~~ ARB cylindrus ab AB, conus ab KBM: sunt positis circuli sunt ut quadrata radiorum, sit qualibet LS ad arbitrium assumpta quadratum LS vel AM vel OM (ob aequalitatem radiorum) adaequat $\square$ta SO et SM, i: ob aequalitatem LS, NS; igitur circulus a LS adaequatur circulis a OS et NS unde si auferatur e circulo LS circulus OS remanet armilla circularis LOQT aequalis circulo NS sed punctum S ad libitum assumptum fuit unde omnes armillae circulares LOQT hoc est excessus cylindri KACH supra Hemisphaerium ABC est aequalis omnibus circulis NS hoc est cono KMH; unde ex demonstratione manifestum est excessum cylindri supra Hemisphaerium et conum praedictum esse quantitates magnitudine et gravitate analogas quoniam eadem aequalitas quae demonstrata in ~~[illegible]~~ integris eodem etiam modo demonstratur in partibus earum proportionalibus et ideo earum centra gravitatis eodem modo dividunt rectam DM: cum autem, ut in prioribus de pyramide vidimus, centrum gravitatis coni notum sit ac cujuscunque quoque partis ad verticem ut hic NMQ, sequitur quoque correspondentibus partibus dicti excessus cylindri supra Hemisphaerium centrum gravitatis obtineri patet cum idem utrobique sit gravitatis centrum. Sit ad majorem facilitatem Ellipsis ABCD si dimidia ABC centrum gravitatis inveniendum velimus, describendus circulus intervallo OB ejusdemque centrum gravitatis in recta DO designandum quod si segmenti EDF desideremus: GBH circularis segmenti modo juxta in prioribus determinata centrum gravitatis inveniendum. Nec aliter si volumus sit Ellipseos dimidia DCD centrum ~~gravitatis inquirere~~ describendus circulus intervallo OC cujus centrum gravitatis idem erit cum centro gravitatis Ellipseos dimidiae BCD



Non secus circularis segmenti LCQ ac segmenti Elliptici MCN idem est centrum gravitatis in axe CI, prius autem dato unde nec alterum ignotum esse poterit, ratio autem horum omnium quod ut infra circa figurarum dimensionem ostendemus Circuli hi ac Ellipses sunt quantitates magnitudine et gravitate analogae, quorum (ut ibi ostendetur) eadem ratio quae demonstratur in integris eodem modo demonstratur in partibus earum proportionalibus et ideo earum centra gravitatis aequaliter axem secant.

De Impossibilibus patet autem si aequatio proveniat impossibilitate involuta, hoc est cum jubemur aliquid ~~[illegible]~~ praestare quod fieri nullo modo potest; ex: g: si x sit ∞ 3x, vel xx $\frac{bb-aa}{b}$ atque aa major sit bb item y − yy ∞ x.

41

<u>De indeterminatis</u> fit autem hoc si totidem non inveniantur quod supposita fuere incognita, nec tamen quicquam eorum omissum quae in quaestione nobis indigitata fuere hoc est si omnibus datis conditionibus satisfactum sit; ~~assumi autem hinc~~ ~~[illegible] quae contingit, in eodem loco sit [illegible]~~ tuncque assumi possunt cognita quantitates pro incognitis quibus nulla aequatio respondet ratione modo explicanda; assumptis autem aliis atque aliis cognitis, aliae semper ac a prioribus differentes pro incognitis quantitates resultant; cumque tunc infinita ~~[illegible]~~ puncta existant quae satisfacere possunt iis quae quaerimus; ~~quae [illegible] illa simul sumpta constituent vel linea vel superficie vel solidum locus~~ quae linea illa superficies aut corpus in qua omnia haec puncta ~~reperiuntur~~ locus dicitur, unde vulgo quaestiones indeterminatae quaestiones de locis ~~[illegible]~~ appellantur: assumuntur autem cognitae quantitates pro incognitis ~~quantitates~~ quibus nulla aequatio respondet vel cum determinatione quadam, aut nulla, aut in quibusdam cum determinatione in quibusdam non;

Quoad ad x: assumuntur enim ~~[illegible]~~

<u>Determinatione quadam</u> cum qua ratione ~~[illegible]~~ cujusmodi quantitates ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ indicatur per ultimam aequationem; potest [illegible] vel duae aut plures conditiones deficere ut quaestio penitus sit determinata, vel unica; primum solum in Arithmeticis quaestionibus locum habet, posterius ~~tam~~ in Geometricis quam Arithmeticis; paucis primum quid in Arithmeticis ad quaestionum solutionem requiratur aperiemus [illegible] in Geometricis fiet;

Sit propositum invenire 3 numeros ita ut primus et secundus octies plus faciant quam tertius; et secundus et tertius simul aequentur primo per 6 multiplicato

$$\text{sit } \cancel{\text{primus}} = x \qquad \text{jam juxta tenorem quaestionis operando}$$
$$2^{us} = y \qquad \text{erit } x+y = 8t$$
$$3^{us} = t \qquad \frac{x+y}{8} = t$$
$$\text{add } y$$
$$\frac{9y+x}{8} = \frac{6x}{1}$$
$$9y+x = 48x$$
$$y = \frac{47}{9}x \; \#$$

jam restituto valore ipsius y in aequatione $\frac{x+y}{8} = t$ erit $t = \frac{7}{9}x$, cumque jam omnibus datis conditionibus sit satisfactum, nec tamen x alio modo inveniri possit ~~patet~~ quaestionem non penitus esse determinatam; cum hic unica desit conditio; hi[...]

Sit propositum invenire duos numeros qui additi tantundem faciant ac si multiplicati sint x et y, erit itaque juxta tenorem quaestionis

$$x+y = xy$$
$$x = xy - y$$
$$\text{divi. } \frac{x}{x-n}$$
$$\frac{x}{x-n} = y$$

~~[illegible]~~ cum sic omnibus conditionibus datis sit satisfactum nec tamen ulla aequatio pro x inveniri possit quae illius explicaret quantitatem patet quaestionem sit penitus determinata [illegible] unicam conditionem deficere, proinde pro x quemvis possumus assumere numerum modo determinationi inventae aequationis sit conveniens, hoc est ut sit major unitate est $n . x - x$ ac ut $\frac{x}{x-n}$ sit $= y$: assumendo itaque

$$\cancel{\text{pro}}\; x = 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$
$$\text{erit } y = 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{9}{8}$$

aliique sic porro infinitos invenire licet:

Sit secundo talis quaestio: cerevisiarius habet triplicem cerevisiam 6 8 et 9 flor: pro vase vult illam permiscere ut pro singulo vase accipiat 7 flo: Q: quot vasa de singulis cerevisiis capere tenetur, sint vasa pro 6 flo: $= x$ pro 8 fl: $= y$ ac pro 9 fl $= t$: unde $6x+8y+9t = 7x+7y+7t$ s: $y+2t = x$ vel

Ejusdem ordinatio sive altera incognitam ad duas dimensiones (sit eg. y) yy unam æquationis partem constituat, altera ejus pars ex termino in quo y sola sine x reperitur quem sequatur y cum x et postea x sine y et tandem terminus in quo nec x nec y reperitur, quamquam aliqui horum saepe absint, si vero ad rectangulum illorum alter [illegible] dit hoc unum æquationis partem constituat altera pars ordinatur a termino ubi x sine y altero ubi y sine x tertio denique ubi reperitur nec x nec y.

Terminorum abbreviatio fit cum multis dimensionibus multiplicatis sic eg. in ultimo superiorum exemplo pro $yy \propto \dfrac{\begin{matrix}-dek\,zz & -dezzx & +bcfglx\\ +cfglz\,y & -cfgl\,xy & -bcfgxx\\ +bcgzx & & \end{matrix}}{ez^3 - cgzz}$ ponamus et quidem vel in numeris $yy \propto 2y - xy + 5x - xx$ et pro radice $y \propto x - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$ supponendo $EA \propto 3$, $AI \propto 5$, $AB \propto BL$, $BS \propto \frac{1}{2}BE$, $GB \propto BT$, $CD \propto \frac{3}{2}CR$, $CF \propto 2CS$, $CH \propto \frac{2}{3}CT$ et quod angulus ABR sit 60 graduum, vel in literis $yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$ et pro radice $y \propto m - \frac{nx}{z} \pm \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$ et rursus abbreviandi causa $y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Neque vero difficile est ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis existentibus facile est tales assumere quae sint æquales iis omnibus quae eandem habent radicis denominationem vel etiam ei quod designatur per fractionem. Atque hinc fit quod loco terminorum ubi y reperitur eadem denominationis, loco autem eorum ubi y et x simul reperiuntur (si quidem necessariae habere debeat) ponitur $\frac{2n}{z}xy$ ut sic designentur fractiones quae similem habent radicis denominationem. Quod vero loco my et $\frac{n}{z}xy$ sumatur $2my$ et $\frac{2n}{z}xy$ id [illegible] fit ut facilius ad æquationis radicem perveniatur. Sicut supponens ordinis tunc [illegible] substitutis extrahitur radix juxta in prioribus explicata et sumitur m^2 pro omnibus [illegible] in vinculo in quibus x non reperitur, ejus quantitatibus vel eadem vel diversa esse potest [illegible] ea extra vinculum, et hoc si contingat tunc praestat aliam assumere; post praeter terminos in quibus x absque y reperitur nihil reducendum restat, pro iis autem in quibus x simpliciter scribitur ox pro iis autem in quibus xx fractio $\frac{p}{m}xx$ assumitur cum x duas habeat dimensiones. Considerare hic praeterea oportet quod si in æquatione reperiatur m^2 denominatorem hujus fractionis $\frac{p}{m}xx$ tum esse æqualem ipsi m quantitatibus m^2 id quod ~~[illegible]~~ nec utique [illegible], etiam si alia fractio habeatur modo supponatur m esse adeo sicut denominator hujus fractionis ad sumi numeratorem, si vero in ea ejus quo habeatur terminus m^2 [illegible] fractionem ipsi x^2 adhaereat supponere oportet $p \propto m$.

Quantitatum indeterminatarum ablatio fit hoc supponendo alteram harum nihilo ac delebis utique terminis quibus ea adhaeret, sic eg. in hac $yy \propto -ax + bb$ supponendo $y \propto 0$ erit $x \propto \frac{bb}{a}$ supponendo autem $x \propto 0$ erit $y \propto b$ et in illa $yy \propto ax - bb$ supponendo $y \propto 0$ $x \propto$ erit $\frac{bb}{a}$ sed supponendo $x \propto 0$ y respondet quantitati explicabili et denique in hac $yy \propto ax$ una supposita $\propto 0$ reliqua nullo modo potest exprimi.

Loci ejusdem designatio hic consideranda, loci determinatio, determinatio descriptio demonstratio

45

Loci determinatio Equidem ratione ablationis quantitatum indeterminatarum Reductionis ad aliquam formulam ac denique ratione inventionis ceterorum ad locum requisitorum

Ablatio quantitatum indeterminatarum fit autem hoc tripliciter

1 cum nulla quantitatum indeterminatarum poterit = supponi 0 hic sciar locum hunc esse infinitum extensione, utramque incognitam posse ~~indefi~~ libitae longitudinis assumi

2 Cum utraque illam poterit = supponi 0 hic sciar locum hunc esse finitum, utramque incognitam longitudinem intra certum terminum contineri, quarum quidem maximam longitudinem ex ipsa aequatione unaillarum hypothesibus 0 reliqua ad formam aequationis, ac una ejusdem parte reducta colligere licet eriturque quantitates hic in utraque hypothesi provenientes si locus sit circumferentia circuli aequales semidiametro hujus circuli; si vero diversae ac locus Ellipsis aequales, major quidem semidiametro majori minor minori, duplicata autem majori quantitate habebitur latus transversum hujus Ellipsis eos hinc et ejusdem lateris recti = prop. 13 lib. 1 conic. quantitates constabit, si vero sint denique diversae et locus sit vel linea recta vel parabola vel hyperbola vel quaecunque alia linea exhibebuntur termini = quos dicta linea describenda

3 Altera tantum incognitarum poterit supponi 0 hic sciar locum hunc esse finitum et alteram tantum quantitatem indeterminatarum libitae magnitudinis assumi posse quae nimirum poterit supponi 0 reliquam determinatione indicari alterius ~~supposita~~ neque ad alteram aequationis parte reducta

Reductio ad aliquam sequentium formularum quarum

1 $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ sit

eg: $AB = x$ cui altera $BC = y$ in dato vel assumpto angulo ABC conjungatur ut utraque hujus constructio juxta jam exhibitam formulam determinetur tria in ea considerandam, 1 si locus sit linea recta ~~hunc 3 casus occurrunt~~

2 si sit in aliqua trium sectionum conicarum ~~quidem sint~~ 3 si locus incidat in circuli peripheriam

Si locus est linea recta hunc 3 casus occurrunt

a. si in formula termini $LC = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ nulli sint sed solum adsint termini $m - \frac{nx}{z}$ ubi si vel horum

1 Uterque adsit ducenda erit KI parallela et aequalis ipsi AB ita ut ex BC segmentum auferat BK = ipsi m quandoquidem hic habetur $+m$ quod quidem addendum ipsi BC ducendo hanc lineam IK ad alteram parte si illis sumptum $-m$ deinde ducenda IL ita ut linea IK sit ad KL sicut z ad n, hoc est cum IK est $= x$ KL sit $= \frac{nx}{z}$ Cujus hac ratione quod sequentibus inserviet innotescet etiam ratio quae est inter KL et IL quam pono eandem quae est inter n et a ita ut cum $KL = \frac{nx}{z}$ IL sit $= \frac{ax}{z}$ et facio ut punctum K cadat inter L et C siquidem hic habetur $-\frac{nx}{z}$ ubi alias L inveniri deberet inter K et C si habuisse $+\frac{nx}{z}$ cognoscoque punctum desideratum C sive locum quaesitum consistere in recta IL

2 Alter desit et quidem m hunc ducenda ubidem est linea IK ac proinde inveniatur LI postquam habetur $\frac{n}{z}x$ non referenda illa est ad IK sed ad AB eodem modo ipsa congruet IK. Quandoquidem facere oportebit ut AB sit ad BL sicut z ad

AB existente BL $\propto \frac{nx}{z}$ atq[ue] ut punctum L cadat ex parte puncti l si habeatur $+\frac{nx}{z}$
at ex altera parte si reperiatur $-\frac{nx}{z}$ quo facto ducenda est linea AL per puncta A et L quae
eadem erit quae LL in prioribus et quidem cognita sit linea AL cum linea AB et BL angu-
lusq[ue] ABL cognita sint atq[ue] ita pro AL accipere possumus $\frac{a}{z}x$
Alter deficit et quidem $\frac{nx}{z}$ tum haec quantitas in totum omittenda est cuius BK px sit
sit $+m$ vel ab altera parte huic aequalis sumpta si sit $-m$ ductaq[ue] linea AK loco
quaesita.

b si termini LC $\propto \sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx}$ tales sunt ut radix extrahi possit hoc est ut mm
et $\frac{pxx}{m}$ signo + notatis oo sit $\propto$ 4pm hoc est ut LC sit $\propto \sqrt{mm+\frac{pxx}{m}} - \ldots x \sqrt{\frac{p}{m}}$ ...
m ... $\sqrt{\frac{p}{m}}$ punctum l similiter in recta linea reperitur

c si termini quidam ex LC $\propto \sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx}$ ut mm et ox aut ox et $\frac{pxx}{m}$ fuerint
nulli, dummodo reliqui $\frac{pxx}{m}$ aut mm semper signo + adfecti sint, locus in hoc casu
ut etiam priori et primum a se inveniri poterit.

2 Si locus sit in aliqua trium sectionum conicarum et quidem si sit vel in Pa-
rabola, Ellipsi aut hyperbola:

Parabola fit hoc si terminus $\frac{pxx}{m}$ est repertus potuerintq[ue] hic esse 4tuor casus:

1 in qua linea LC una ex iis existit quae ordinatim ad diametrum ~~applicatur~~, quae
sensus in linea IL cadit applicatur et cuius vertex N linea ex altera parte puncti L
respectu puncti I linea LC existente $\sqrt{mm+ox}$

2 ubi vertex N in linea IL ex eadem parte puncti L sumendus est respectu puncti I linea
LC existente $\propto \sqrt{mm-ox}$

3 ubi vertex N in linea IL sumi debet inter puncta I et L linea LC existente $\sqrt{-mm+ox}$

4 ubi vertex N ~~linea~~ cadit in punctum I existente LC $\propto \sqrt{ox}$

Ellipsis fit hoc si terminus $\frac{pxx}{m}$ notetur signo − ut hic varii casus.

1 cum centrum M in linea IL ex eadem parte est sumendum puncti L respectu puncti I
linea LC existente $\sqrt{mm+ox-\frac{p}{m}xx}$

2 ubi centrum M in linea IL ex altera parte est sumendum puncti L respectu I linea
LC existente $\sqrt{mm-ox-\frac{p}{m}xx}$

3 ubi centrum M cadit in punctum I linea LC existente $\sqrt{mm-\frac{pxx}{m}}$

4 ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I sumi: inter puncta
I et L cum oo est major quam 4mp linea LC existente $\propto \sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$

5 ubi vertex N cadit in punctum I cum quantitas mm est reperta linea LC existente
$\propto \sqrt{ox-\frac{p}{m}xx}$

Hyperbola fit hoc si terminus $\frac{pxx}{m}$ notetur signo + suntq[ue] hic 7 casus:

1 in quo linea LC est una ex iis quae ad diametrum quae est in linea IL ordinatim
applicatur et ubi centrum M in linea IM ex eadem parte puncti L sumendum est respectu
puncti I cum quantitas oo est major quam 4mp linea LC existente $\propto \sqrt{mm-ox+\frac{pxx}{m}}$

2 ubi centrum M in linea IL ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I
cum oo est major 4mp linea LC $\propto \sqrt{mm+ox+\frac{pxx}{m}}$

3 ubi vertex N sumendus est inter puncta I et L linea LC existente $\sqrt{-mm+ox+\frac{pxx}{m}}$

4 ubi centrum M et vertex N sumi debent inter puncta I et L existente LC $\propto \sqrt{-mm+ox+\frac{pxx}{m}}$

5 ubi vertex N cadit in punctum I cum quantitas mm est reperta LC $\propto \sqrt{ox+\frac{pxx}{m}}$

6 ubi vertex N cadit in punctum I, LC $\propto \sqrt{-ox+\frac{pxx}{m}}$.

7 ubi centrum M cadit in punctum I cum quantitas ox nulla est LC $\propto \sqrt{mm+\frac{pxx}{m}}$.

8 ubi linea LC ē parallela Diametro ad quā illa quae ē in linea IL ordinatim applicatae. Ubi centrū M in linea IL ex eadem parte puncti L sumendū ē respectu puncti I cum quantitas oo minor ē quā mq linea LC $\propto \sqrt{mm - ox + \frac{lxx}{m}}$

9 Ubi centrū M in linea IL sumendū ē ex altera parte puncti L respectu puncti I cum oo ē minor quam ~~mq~~ mq linea LC existente $\propto \sqrt{mm + ox + \frac{lxx}{m}}$

10 Ubi centrū M cadit in puncto I cum quantitas oo nulla ē linea LC existente $\sqrt{mm + \frac{lxx}{m}}$

3 Si locq incidat in circuli periphaeria fietq hoc si $\frac{lxx}{m}$ signo − notetq sig insuq quantitas aam sit $\propto$ quantitati pt. ☐ angulq ILC rectq vel si hic angulq solū rectq nec omnino habeatq aam nec ~~pt~~ ☐q sic 5 casq

1 Cum centrū ejq M in linea IL ex eadē parte puncti L sumendū ē respectū puncti I linea LC existente $\propto \sqrt{mm + ox - \frac{l}{m}xx}$

2 Ubi centrū M in linea IL ex altera parte puncti L sumendū ē respectū puncti I linea LC existente $\propto \sqrt{mm - ox - \frac{l}{m}xx}$

3 Ubi centrū ~~M~~ cadit in punctq I cum quantitas ox nulla ē linea LC existente $\propto \sqrt{mm - \frac{lxx}{m}}$

4 Ubi vertex N cadit ad eandē partem puncti I nimirū inter puncta I et L cum quantitas oo ē major quā mq linea LC existente $\sqrt{-mm + ox - \frac{lxx}{m}}$

5 Ubi vertex N cadit in punctū I cu quantitas mm, o reperitq linea LC existente $\sqrt{ox - \frac{lxx}{m}}$.

2 formula $x \propto m - \frac{ny}{z} + \sqrt{mm + oy + \frac{pyy}{m}}$ hic tantū immutanda erunt nomina quantitatū indeterminatam ita ut appelletq y quā dicta fuit x et x quā dicta fuit ~~y~~ ut ad aliquā ex prioribq ~~formulis~~ formulis hanc liceat reducere et quoad figuram haec tali sibi erit assumenda ~~ubi~~ $\frac{m}{z}$ quantitati x respondeat eadē ratione quā antea applicabatq y; ~~existente~~ ~~[illegible]~~ IL ordinatim applicata, ubi prq ejqdē loco erit LC: ~~[illegible]~~

3 ubi xy tuncq locq semq ē ad hyperbolā ~~lineaq [illegible]~~ circa quas asymptotos; cum vero Hyperbola describi ~~possit~~ dato puncto intra angulum rectilineū quod transit asymptotorum anguli circa pro hujq hyperbola asymptotos, ~~[illegible]~~ 4 lib 2 Apollo: hoc interea supponentes videbimq quot hinc casq resultant.

Sit linea NC Hyperbola cujq asymptoti sunt MD et ML, occurrentes sibi in M; sit utq quoque NJ, LC parallela MD, N vero vertex hyperbola unde MJ $\propto$ NJ:

ponanq jā MJ f: JN $\propto$ k

ML $\propto$ z — cum itaq ☐ MLC $\propto$ tq ☐ MJN juxta 12 prop:

LC $\propto$ y — lib: 2 Apollonij unde $zy \propto kk$ f: $y \propto \frac{kk}{z}$

IL $\propto$ x

MI $\propto$ s

applicando jam punctum in ML vel producta ML invenienq sequentes aequationes

si puncti M sit in ~~altera~~ aut ~~eandem~~ parte ~~[illegible]~~ IeL	erit ML	unde erit	
	$z \propto x$	$y \propto \frac{kk}{x}$	1 casq
	$z \propto x - s$	$y \propto \frac{kk}{x-s}$	2
	$z \propto s - x$	$y \propto \frac{kk}{s-x}$	3
Altera parte IeL	$z \propto x + s$	$y \propto \frac{kk}{x+s}$	4.

Inventio caeterorū ad locū requisitorū ubi et axis, centrū, latq rectū ac transversū: ubi quidem in genere observandū quod ex terminis, qui hisce ver

F Sciendũ autẽ ex his duab9 quantitatibus x et y eam ad alterã æquationis
partẽ debere reduci quæ ad □tũ ascendit, si ambæ ad □tũ ascendant, y præ-
ferendam x:

pag. 33 Geometri Cartes: qua ratione numeris demonstratio fieri
possit

inveniendis inserviunt, & aliae literae expurgandae sint quam quae in aequatione
aliqua inventae reperiuntur, & quod reliquae literae eorundem terminorum & magis con-
siderandae quam si non haberentur. Caeterum hic sequentia notanda.

1 Quod si haec sectio sit Parabola, diameter semper in linea IL erit & hujus latus rectum erit $\frac{oz}{a}$, IN vero $\frac{amm}{oz}$ ex quibus ultimo casu quo evanescit

2 Quod si quaesita linea est Circulus aut Ellipsis aut denique hyperbola oportet primo invenire punctum M quod illius centrum est quodque semper in linea recta IL cadit, ubi invenitur sumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro IM postea figurae latus rectum sumendum erit $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ cum habetur $+nn$ ~~vel etiam~~ & quando quaesita linea est Circulus aut Ellipsis vel etiam cum habetur $-nn$ & linea est hyperbola vel denique $\frac{z}{a}\sqrt{oo-4mp}$ quando quaesita linea est Circulus aut Ellipsis ~~vel etiam~~ cum habetur $-nn$ vel etiam quando est hyperbola & quantitas oo major est quam 4mp & cum habetur $+nn$, Quod si vero quantitas nn est ~~negativa~~ absit latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$ & si ox nulla sit id ipsum erit $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$ deinde ad inveniendum latus transversum, debet inveniri linea quae sit ad hoc latus rectum ut aam ad pzz nempe: si habeatur latus hocce rectum $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ transversum erit $\frac{aam}{pzz}\sqrt{oo+4mp}$, atque in omnibus hisce casibus sectionis Diameter erit in linea IM eritque LC una earum quae ad ipsam ordinatim applicantur, ita ut si fecerimus MN aequale dimidio lateris transversi atque illam ex eadem parte puncti M sumpserimus qua punctum L habebitur punctum N pro vertice ipsius diametri

3 Si vero sectio sit hyperbola ~~actual~~ existente $+nn$ & quidem quantitas oo nulla sit aut minor quam 4mp oportebit ex centro M lineam ducere MOP parallelam ipsi LC nec non CP ipsi LM atque MO aequalem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$ aut etiam aequalem m si non reperiatur quantitas ox. Deinde considerare oportebit punctum O tanquam verticem hyperbolae cujus diameter sit OP & linea CP quae ad illam sit ordinatim applicata cujus latus rectum sit $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm-\frac{4oom}{p}}$ transversum vero $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$ Excepto tantum cum ox nulla est si quidem eo casu latus rectum sit $\frac{2aamm}{pzz}$ & transversum 2m

Determinati loci descriptio fit autem si Parabola per 52. 1 Conic: vel si circulus (qui quandoque ex ipsa constructione se exerit si ~~minimum~~ ad quadraticorum tertiam formulam pertineat) Ellipsis aut hyperbola per 2 aut 3 ejusdem existente autem xy hyperbola hunc describet per 4 prop lib 2 Conic: uti modo dictum; haec autem descriptio semper etiam ex ipsa aequationis inventae constructione patet quae etiam prout x vel y ad unam illius partem reducitur prout quoque ad diversas rectas fuerit relata, variat, hinc varias ac diversos modos has lineas describendi suppeditant ex quibus faciliores eligi possunt. Praeterea immo possunt quoque adeo describenda ~~[illegible]~~ ex ipsa constructionis methodo varia instrumenta excogitari, ipsi quibus aut motu [illegible] gendo nequaquam instrumenti applicationes certa linea descripta est, linea haec ~~quae~~ sit ~~aliqua~~ una ex sectionibus conicis aut sui generis generum calculus Algebraicus indicabit

~~Nulla determinatione~~ Descripti demonstratio potentibus hoc fieri juxta sensum 11, 12, 13 Theorema: 1 lib: Conico: vid

Nulla determinatione & tunc ad arbitrium quaecunque quantitates possunt assumi, quod dum evenit propositum problema theorema est. cognoscitur autem ex eo, quod ab utraque parte aequationis ultimo inventae aequales, aequalibus notis denotatae quantitates proveniant; notandum quoque quod si quaestio sit de loco aliquo inveniendo una conditione deficiente Theorema hocce pertinere ad lineas, duabus ad superficies, tribus denique ad solidum.

53

<u>Determinatione in quibusdam in quibusdam nulla</u>, tunc quasdam quantitates ad libitum assumere possumus caeteras juxta praescriptum aequationis et si quidem una incognita quantitas in toto desit ea ipsa erit linea indefinitae longitudinis; si vero duae constituentes superficiem aliquam haec ipsa ~~erit~~ superficies infinitae extensionis esse potent, quod idem de tribus constituentibus solidum, iisque plane deficientibus de solido colligendum.

<u>Constructio</u> hic consideranda veniunt inventa aequatio; media ad hoc efficiendum, ac ipsa constructio.

<u>Inventa aequatio</u> haec suppeditat materiam constructioni, ad quam facilitandam maxime conducit, varia ejusdem inventio, fractionum ad proportionem revocatione terminorum in eadem abbreviatio.

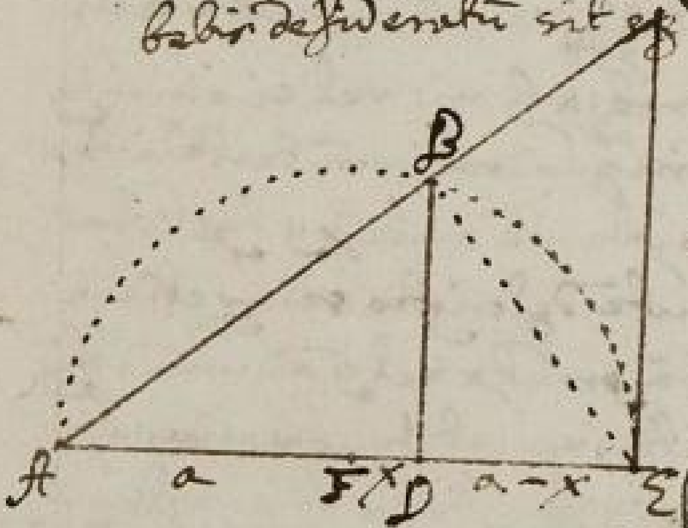
<u>Varia ejusdem inventio</u> quot modis n ea potest exprimi, tot diversas regulas ~~[illegible]~~ nobis suppeditat solvendi propositam quaestionem; et hoc quidem ut rarae obtineat, in stituenda erit (~~[illegible]~~ modo fieri potest) varia, quantitatum assumptio, aequationis inventio ac inventae resolutio

<u>Varia quantitatum assumptio</u> et quidem vel

<u>Datarum</u> sic secta linea AB A ——— C ——— B assumere possumus AB $\propto$ a vel AB $\propto$ a + b supponendo nimirum AC $\propto$ b et CB $\propto$ c

<u>Incognitarum</u> nota

x regulam sequentem loco quantitatum ex datis et non datis elicitam in omni problemate assumi potest x si incognita quantitas quo igitur plures data et incognita plures invenire possumus lineas eo solutionum ~~varietas~~ major erit, assumpta autem pro certa ex datis et non datis elicita quantitate x, ut quae proventura sit aequatio, scias, in quantitate modo indigitata (~~[illegible]~~ fractas incognitas si x consideres) restitue ex prima operationis inventa aequatione, quicquid est incognitum et habebis desideratum sit ex.



Dato semicirculo ADE ejus diametrum AD ita secare in D ut ductis BD et CE perpendicularibus ac transversa AB usque in C, EC sit aequalis AD

sit AF seu FE $\propto$ a,
FD $\propto$ x
AD $\propto$ a + x
DE $\propto$ a − x

AB $\propto \sqrt{2aa+2ax} \propto \sqrt{\dfrac{4a^3-4aax}{a+x}} \propto$ EC

ablatis signis, divisisque numeratoribus utrique per 2a erit $\dfrac{a+x}{1} \propto \dfrac{2aa-2ax}{a+x}$

per 8.6 Eucl. AB $\propto \sqrt{2aa+2ax}$
DE [AE] $\propto \sqrt{2aa-2ax}$
BD $\propto \sqrt{aa-xx}$

$aa + 2ax + xx \propto 2aa - 2ax$

$xx \propto -4ax + aa$

seu $x \propto -2a + \sqrt{4aa+aa}$

pro: A similia AEC et ADB erit ut AD / a + x — BD / $\sqrt{aa-xx}$ — AE / 2a — EC / $\sqrt{\dfrac{4a^4-4aaxx}{aa+2ax+xx}}$ seu $\sqrt{\dfrac{4a^3-4aax}{a+x}}$

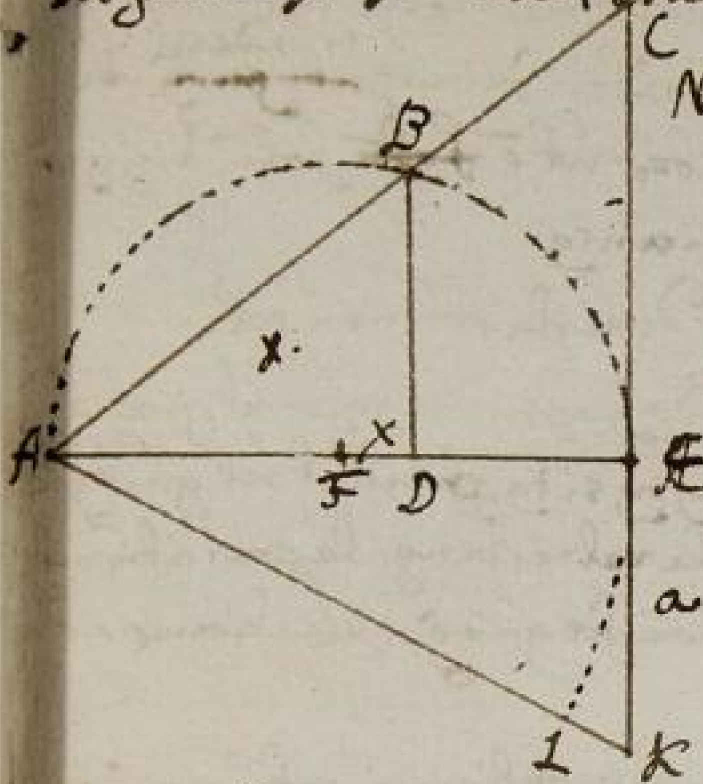
item ut AD / a + x — DE / a − x — AB / $\sqrt{2aa+2ax}$ — DC $\propto \sqrt{\dfrac{2a^3-2aax+2axx}{a+x}}$

Denuo ut AD / a + x — AB / $\sqrt{2aa+2ax}$ — AE / 2a — AC $\propto \sqrt{\dfrac{8a^3}{a+x}}$

inventum itaque est quod quaerebatur si pro AD aut DE aut AD aut DE etc: vel quacunque ex elicitis posuissemus x, ut jam statim scire quid tunc posuissemus invenire[?] repetito ut hactenus fecimus calculo id quidem ex hac ultima inventa $x \propto -2a \sqrt{4aa+aa}$ statim assequi licet; restituenda ubique hac quantitate x in elicitis quantitatibus AD, DE, EC, DB, AB, DC, AC, nec sim inaequaliter sic restit

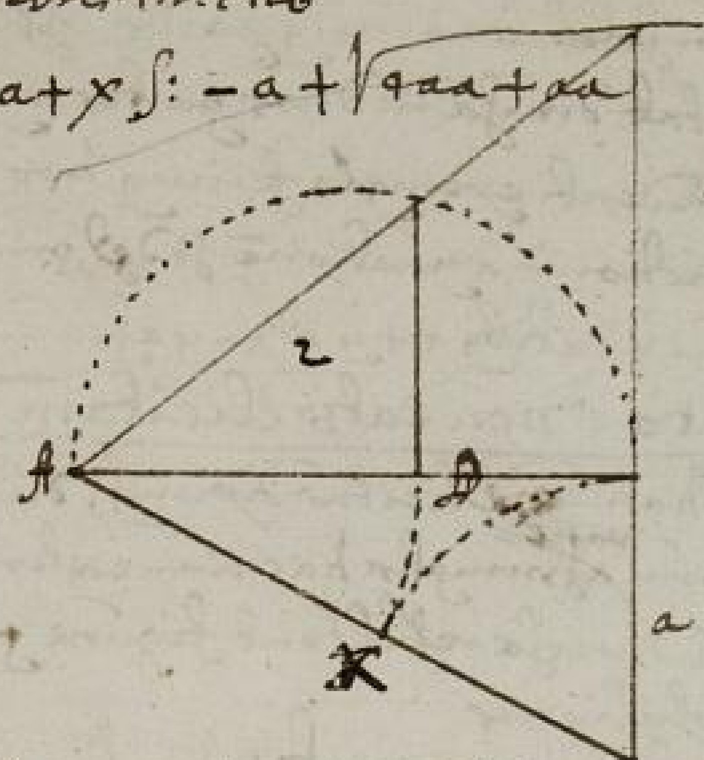
120

...dum exhibebimus una cum constructione:
Sit primo $x \propto -2a + \sqrt{4aa+aa}$ unde talis constructio

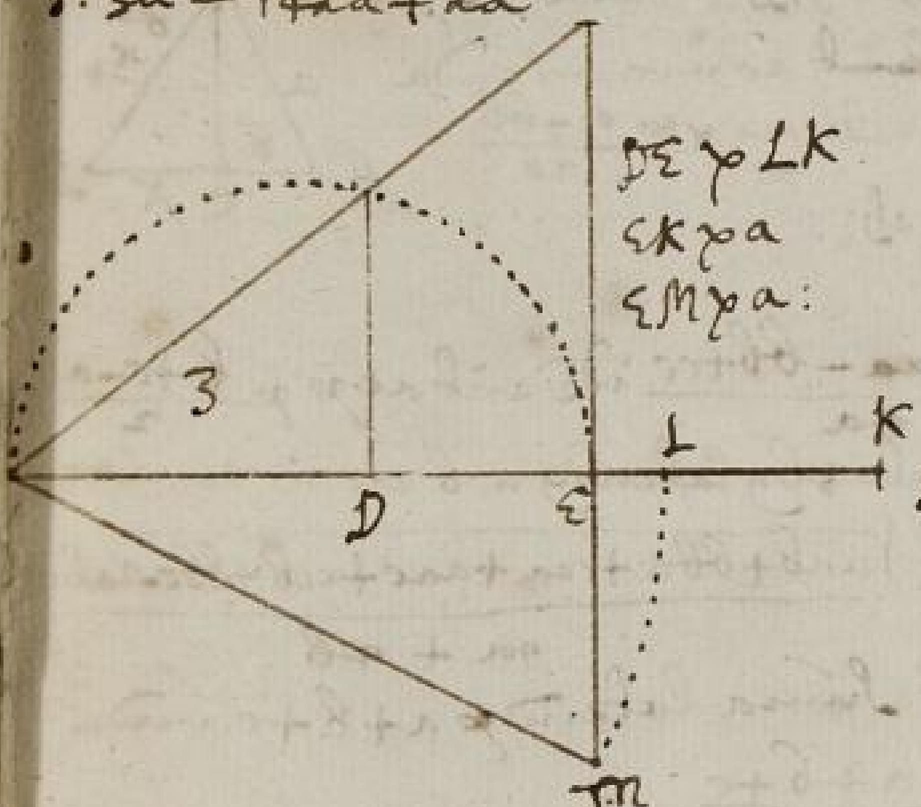


NB: $FD \propto LK$ | 2do $AD \propto a + x$ S: $-a + \sqrt{4aa+aa}$

$AK \propto AD$



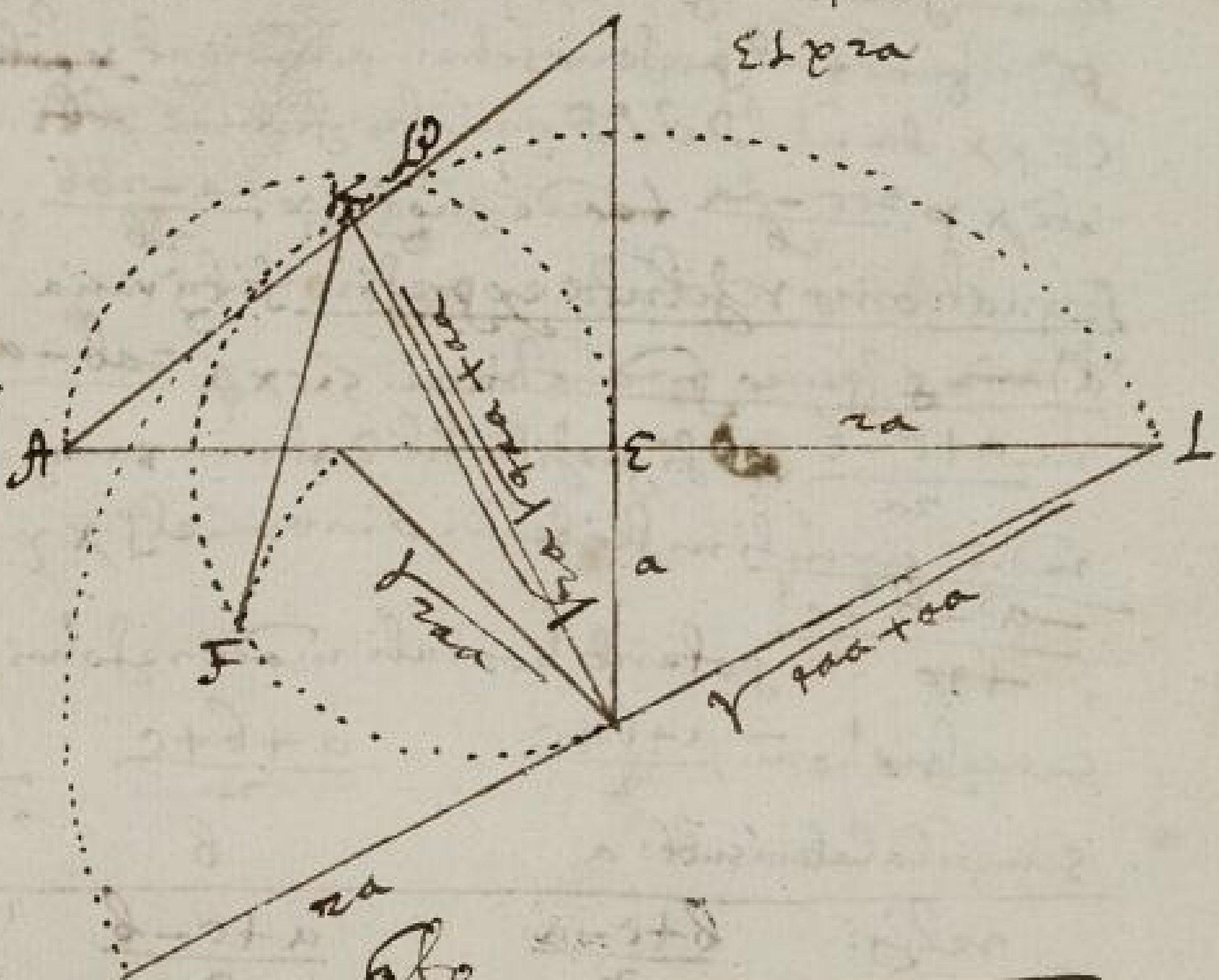
3tio $DE \propto a - x$
S: $3a - \sqrt{4aa+aa}$



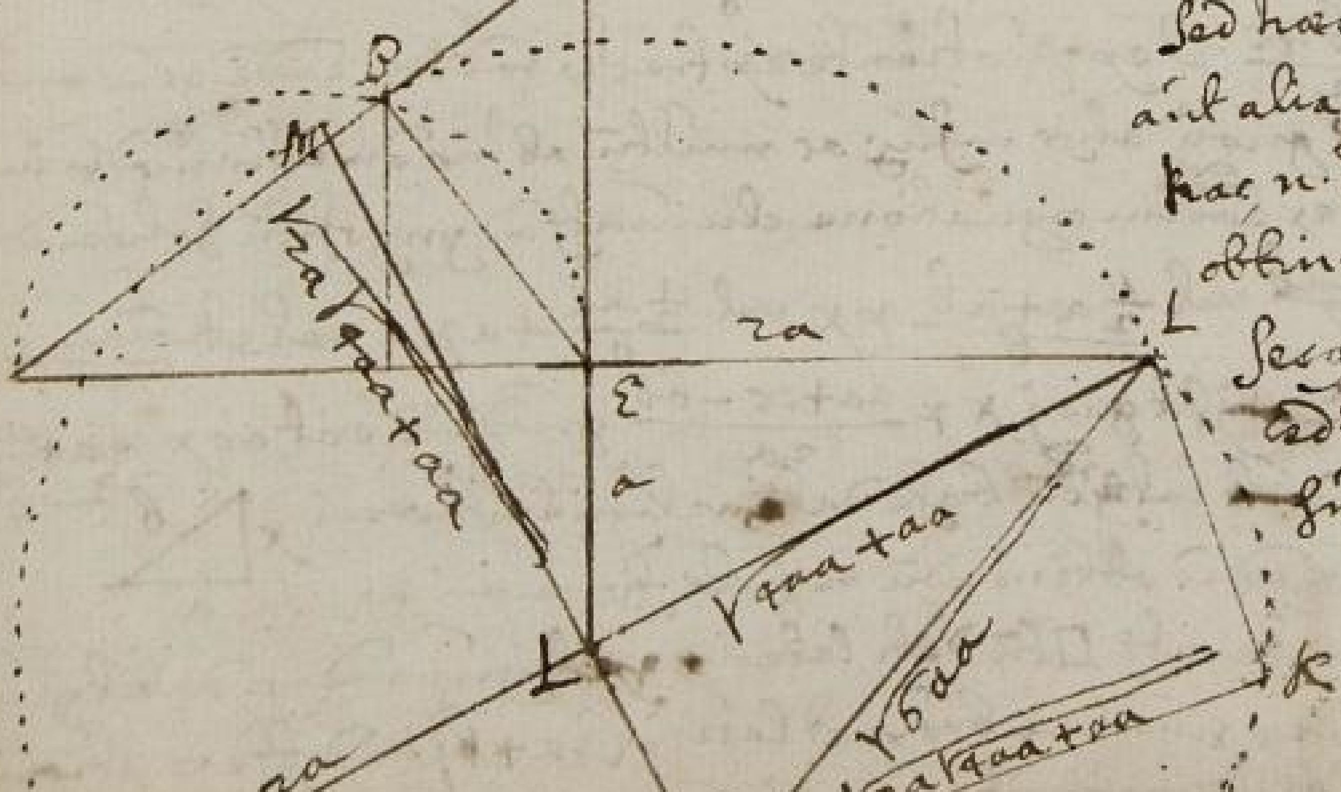
$DE \propto LK$
$EK \propto a$
$EM \propto a$:

4to $AE \propto \sqrt{2aa+2ax}$ S. restituto x
$\propto \sqrt{-2aa+2a\sqrt{4aa+aa}} \propto FK$

$EL \propto 2a$



5to
$DE \propto \sqrt{2aa-2ax}$ restituto x
$\propto \sqrt{6aa-2a\sqrt{4aa+aa}} \propto LK$ | $BKD \propto LM$



6to
$BD \propto \sqrt{-8aa+4a\sqrt{4aa+aa}}$
Sed haec non possunt construi nisi AD
aut alia aliqua ex prioribus data sit
hac non adhibita eadem hac ratione
obtineri poterunt quatuor: Nec
reliquum AC ...
Sequens cum aliis ~~omnibus~~ pro
addendum speciminis loco haec
sufficiant

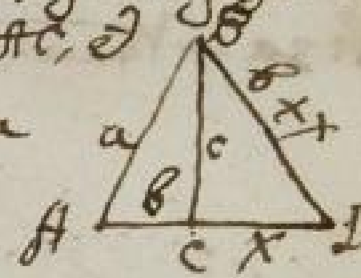
57

2 si determinata magnitudinis linea sit dividenda, potest haec velut alias fieri solet loco unius partis assumi x vel quod saepe constructione plurimum facilitat, divisa in duas partes aequales uni addi x quae alteri demitur ~~in aequ~~ ut in praecedenti exemplo, sicque hoc insuper commodi habentes ut non ~~fere~~ solum hujus constructionis aequationem, sed et prioris modi duas inveniamus.

3 quantitatibus $x+y$ et $x-y$ assumptis ~~con~~structio quoque diversa obtineri potest

Ex datis et non datis elicitam haec quoque variae quandoque assumi possunt, praesertim quae mechanice eliciuntur dixi, dum schematis sic comassuntur sitque, possibile, ut quibus ad libitum varie assumptis haec cum caeteris lineis varia triangula vel rectangula constituant unde diversae resultant figurae proprietates ac hinc diversae quoque aequationes ac harum solutiones.

Aequationis inventio haec si varia et diversa Theoremata obtineri potest varias quandoque exhibet constructiones quidem fiet, si aequationes plures fieri possint quam sunt incognitae, sit enim in triangulo ABD data AB, AC, et DC; signata ut praesens schema indicat ~~...~~ ac inveniendo CD ∞ x ita ut AD et DB aequales futurae obtinebimus $x \infty \frac{cc-bb}{2b}$ item $x \infty \frac{2cc-aa}{2b}$ tandem quoque $x \infty \frac{aa-2bb}{2b}$ etc.



Aequationis resolutae expressio sitque varia

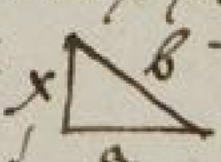
~~Varia~~ et species productione sic $x \infty \frac{2ab-aa-bb+cc}{4a}$ idem erit ac $x \infty \frac{b+c-a}{2}$ in $\frac{a+c-b}{2a}$ et si propositum sit datis in triangulo 3bus lateribus a, b et c invenire radium circuli inscribendi et inveniet $x \infty \sqrt{\frac{aab+bba+cca+aac+ccb+bbc-2abc-a^3-b^3-c^3}{4a+4b+4c}}$ potest hoc tali modo resolvi summa laterum ∞ $a+b+c$ unde

semissis horum	$\frac{a+b+c}{2}$	$\frac{a+b+c}{2}$	$\frac{a+b+c}{2}$
singula latera subt:	a	b	c
reliq:	$\frac{b+c-a}{2}$	$\frac{a+c-b}{2}$	$\frac{a+b-c}{2}$

his continue inter se multiplicatis proveniet $\frac{aab+abb+acc+ccb+bbc-2abc-a^3-b^3-c^3}{8}$ quo diviso per semissem laterum $\frac{a+b+c}{2}$ et ex quotiente extracta radice, eadem quae antea exsurget aequatio, quod quoque aliis insuper ac multum ab his diversis modis intra fieri: unde varia regulae ex eadem aequatione eliciuntur ad propositum solvendum.

Nec aliter sit $x \infty \frac{aa+2ab}{2b}$ vel $\frac{\frac{1}{2}aa+ab}{b} \infty x$ vel $\frac{\frac{1}{2}aa}{b}+a \infty x$ vel etiam $\frac{aa}{2b}+a \infty x$ aut denique $\frac{\frac{aa}{b}+2a}{2}$ sit quoque $x \infty \frac{aa+cc-bb}{2a}$ quod idem erit ac $x \infty a+\frac{\frac{cc-bb}{a}}{2}$.

Sit in $\triangle$ rectangulo ~~du~~ latere et base datis reliquum invenire sit aequale $\sqrt{bb-aa}$ dicere ad id obtinendum regula formari posset, x est $\sqrt{}$ $\square$ ti basis auferatur $\square$ tum dati lateris reliqui radix dabit quaesitum, 2 ~~...~~ producti, ex summa basis et lateris (i: $a+b$) in differentiam eorundem $b-a$ radix, quaesitum indicat.



124

59

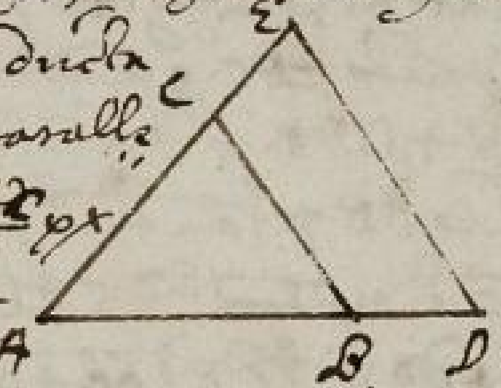
126

Eadē rationē ad obtinendū in regula detri 4tū, tres regulæ ex unica æquatione eliciuntur quam dua ultimæ magno cū compendio saepe adhibentur sunt 3 datæ a; b, c ultima f: 4tus $= x$ unde $x = \frac{bc}{a}$; idemē si primō secundū & tertiū multiplicamus ac productū abc & primū dividamus invenietur 4tus $= \frac{abc}{a}$ secundo primi ac secundi quotiens $\frac{b}{a}$ multiplicatus & reliquū c exhibet quæsitū $\frac{abc}{a}$, Tertio primi ac tertij quotiens $\frac{c}{a}$ multiplicatus & reliquum b 4tū elicit.

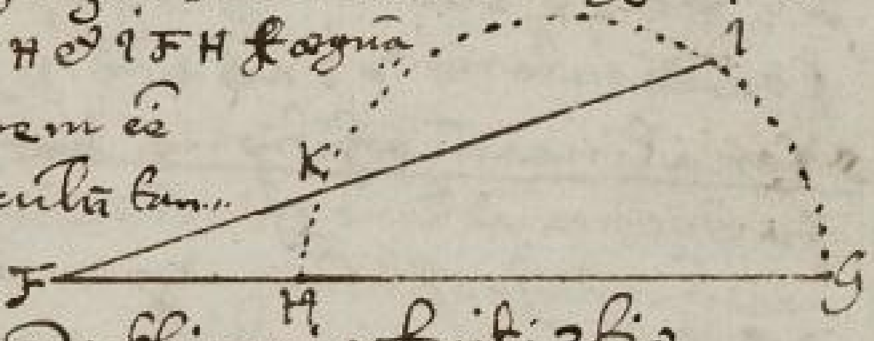
2 Valorū restitutione; sint $x = \frac{a+c-b}{2}$ $y = a-x$ et $z = b-a+x$ restitutæ erunt $x = \frac{a+c-b}{2}$ $y = \frac{a+b-c}{2}$ et $z = \frac{b+c-a}{2}$

3 Fractionum quæ adhibentur ad proportionē revocatione, de quibus statim id quod præcipue in progressione patet.

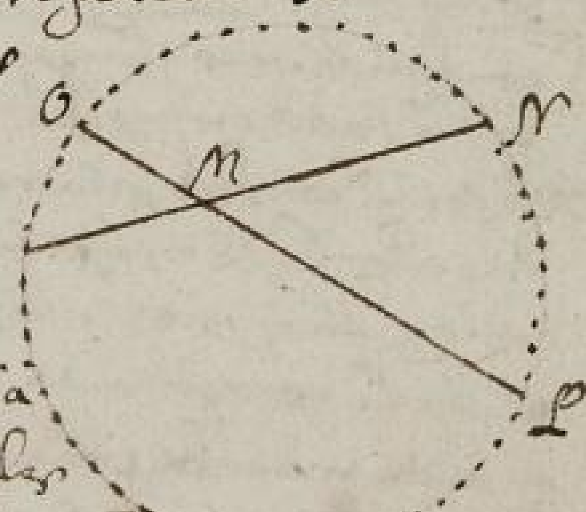
4 Varia ejusdē in lineis exhibitione sit n: $\frac{bc}{d} = x$ ~~quæ~~ seu alia quævis fractio variæ quidem constructiones ex quibus quædam magis quadrent proposito quam aliæ; tres saltem hic exhibebimus; sit primo talis, ~~ducatur~~ fiat $AB = d$, $AD = b$ tunc ducta linea AE ac assumpta $AC = c$ si ducatur BC ac huic parallela DE erit $AE = x$ ē n. ut $\underset{d}{AB}$ $\cdot\!\cdot$ $\underset{b}{AD}$ $\cdot\!\cdot$ $\underset{c}{AC}$ $\cdot\!\cdot$ $AE = \frac{bc}{d} = x$



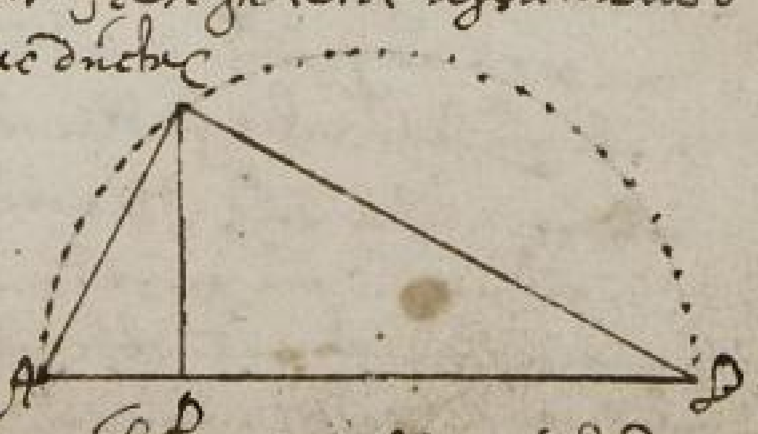
vel ponendo $AB = d$ $BD = b$ $AC = c$, ductis ut antea parallelis BC et DE, CE prodibit x, vel denique $AD = d$ $AB = b$, $AE = c$ unde ut supra ductis lineis $AC = x$ atque sic ~~eo~~ eo: rdo: ponamus $FG = b$ et $FH = c$, tunc super HG descripto semicirculo applicetur $FI = d$ unde $FK = \frac{bc}{d} = x$ ~~plan:~~ GFH et IFH ~~magna~~ ~~aequalia~~ lia $dx = bc$ f: $x = \frac{bc}{d}$ ubi notes d majorem eē oportere c, ac minorē b, si quidem FI semicirculū tangat FI media proportionalis erit inter



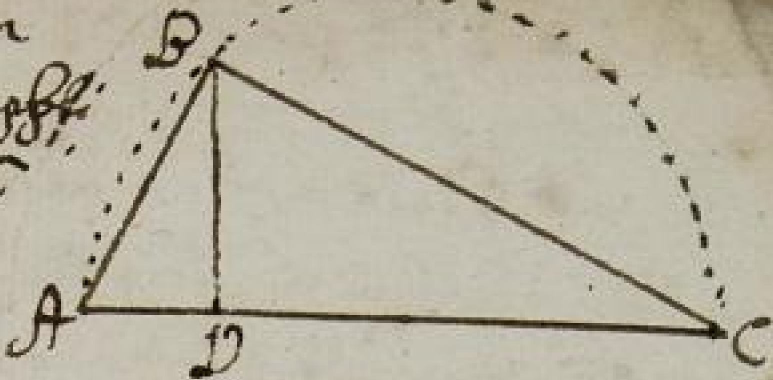
GF et FH, quæ si forte desideretur hac methodo obtineri poterit: 3tio sit $LM = b$ ac $MN = c$, hisque sic junctis in M, affigatur MO in quocunque angulo $= d$, tunc & tria puncta LON circulū ducendo producta MP prodibit x plan: OMP et LMN sunt hoc ē $bc = dx$ hoc ē $\frac{bc}{d} = x$ eadem ratione poterit inveniri Media proportionalis MO inter datas lineas LM et MN, si hæ sint æquales Diametro circuli MO vero perpendiculariter erecta.

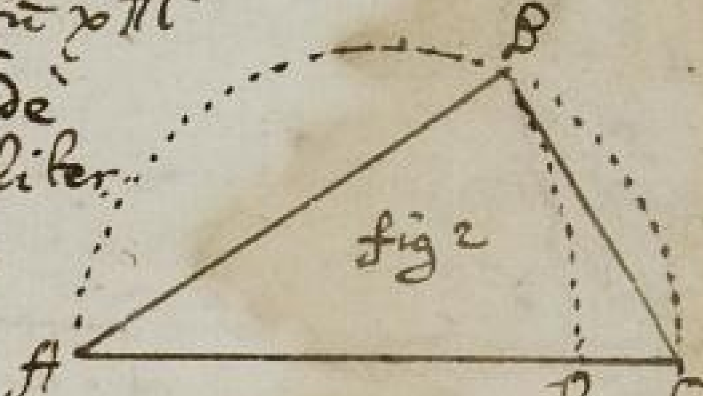
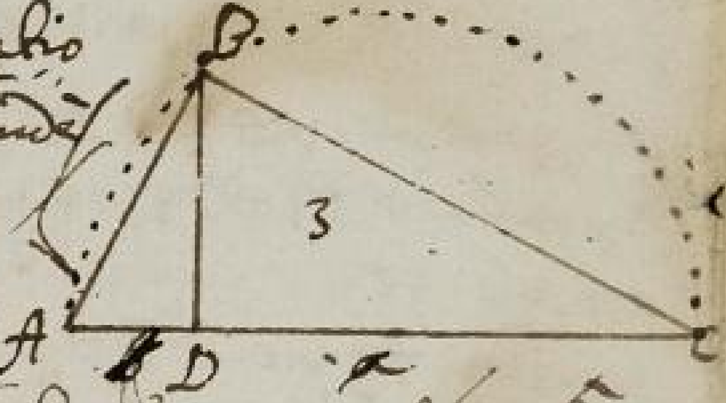


Nec aliter si habeatur $\frac{bb-aa}{b} = x$ constructio talis fieri poterit assumendo $AB = b$ in qua si describatur semicirculus ACB ac ducta $AC = a$, demissa perpendiculari DC $DB = x$ erit $\frac{bb-aa}{b} = x$ ē n: AB ad AC sic AC ad $AD = \frac{aa}{b}$ unde $DB = b - \frac{aa}{b}$ f: $\frac{bb-aa}{b} = x$ idē quoque aliter obtineri potest dicendo ut b $\cdot\!\cdot$ $\overline{\sqrt{bb-aa}}$ $\cdot\!\cdot$ $\sqrt{bb-aa}$ $\cdot\!\cdot$ $\frac{bb-aa}{b} = x$, in hac autem proportione itidem



61

$\sqrt{aa-bb}$ dupliciter construi potest fiat n. 
primo AC $\propto$ a unde semi circulo descripto appli-
cata AB $\propto$ b BC $\propto$ erit $\sqrt{aa-bb}$ $\square$tum AC
~~ae~~ $\square$to AB $\propto$ $\square$to BC hoc e aa − bb unde
BC radix quadrati hoc e $\propto$ $\sqrt{aa-bb}$, vel

2do sit DC $\propto$ a + b & AD $\propto$ a − b unde cum $\square$tum ADC $\propto$ $\square$to DB erit
DB $\propto$ $\sqrt{aa-bb}$ ~~unde datis~~ inventis jam in proportione hac ut b ~~...~~ $\sqrt{aa-bb}$ π
$\sqrt{aa-bb}$ π x tribus prioribus lineis atq3 modo dicta in primo exemplo
varie acquiritur. Sit quoq $\sqrt{bb+ab}$ $\propto$ x & fiat AD s: AB in semicirculo
fig: 2 ABC $\propto$ $\frac{1}{2}$a DC $\propto$ b erit DC $\propto$ $\sqrt{bb+ab}$ $\square$tum $\propto$ AC
$\propto$ $\frac{1}{4}$aa + ab + bb − $\square$to AB s: $\frac{1}{4}$aa $\propto$ $\square$to BC unde
radix BC $\propto$ $\sqrt{bb+ab}$ $\propto$ x ut desiderabatur vel aliter
fiat in 3tia fig: AD $\propto$ b & DC $\propto$ a unde descripto 
circulo ABC perpendicularis DB $\propto$ $\sqrt{ab}$ sed $\square$tum
DB + $\square$AD $\propto$ AB $\square$to ~~...~~ hoc e aa + ab
unde AB $\propto$ $\sqrt{aa+ab}$ $\propto$ x ~~...~~ aut ob hanc quoq ratio
ne e n. $\square$tum CAD hoc e bb + ab $\propto$ $\square$to AB unde 
iterdem AB $\propto$ $\sqrt{bb+ab}$ $\propto$ x: deniq adhuc aliter
ide fiet sumendo in 3tia figura AD $\propto$ b &
DC $\propto$ a + b erit n. descripto semi circulo DB
perpendicularis $\propto$ $\sqrt{ab+bb}$ $\propto$ x sit adhuc in his sequens exemplum;

5 Varia linearum positione ~~...~~ possunt n. de eadem ~~methodo~~ solutione adhibi
ta ijsdem ad hanc perficienda lineis retentis, varie prout cuiq lubet hae disponi
ac convenienter situari. vid: 7 annota: circa ultima

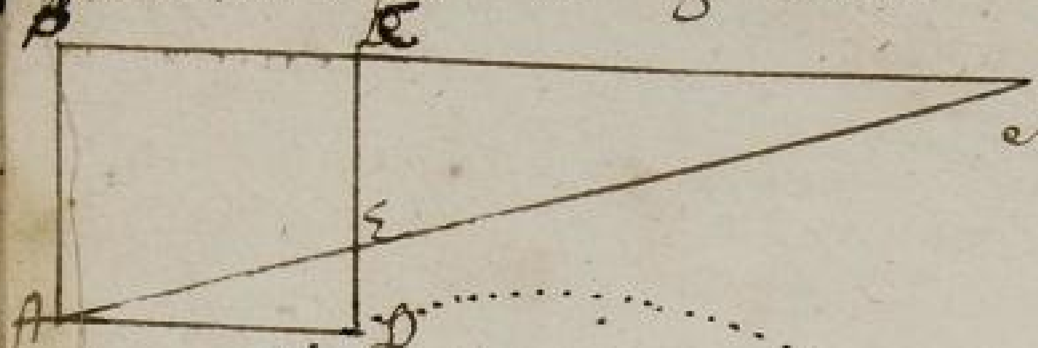
6 Solutionum conjunctione si nim: existentibus pluribus solutionibus bina simul
constructiones jungantur ~~ad idem~~ quo ~~...~~ quam varie sepe fieri possit
facile patet exemp: sit 29, 30.

7 At deniq constet qua ratione omnium problematum infinite possint esse constru-
ctiones: unde varijs inventis faciliores ad praxin seligi possint; praecipue ind-
cabimus quod nim inventa semel solutione alicujus problematis tum varia proble
mata esse excogitanda, in quibus ex quibus data dabis propositum sit, ~~...~~ & a-
qualem inventa prima ~~...~~ problematis solutionem; exemplo praebimus, sit
A $\overset{a}{\text{———}}$ B. linea data AB $\propto$ a ita producenda in C ut $\square$BC sit duplum $\square$ AB
procedentes primo juxta vulgarem methodum, supponentes BC $\propto$ x, invenimus
2aa $\propto$ xx ac proinde x $\propto$ $\sqrt{2aa}$; jam ut infinitas deducamus constructiones, excogitabimus sequentia problemata sit x tale

Si, normaliter sup AB erecta sit DB $\propto$ a $\propto$ AB versus E indefinite protracta, propo-
situm sit inquirere quanta BE futura sit, ut descripto circulo figura AE, a productum AB
in circuli peripheria abscindatur BC $\propto$ $\sqrt{2aa}$, sit itaq DE $\propto$ x unde cum BC media pro-
portio: inter DB & BE erit ut $\overset{DB}{a}$ π $\overset{BC}{\sqrt{2aa}}$ π $\overset{BC}{\sqrt{2aa}}$ π $\overset{BE}{x}$ & 2aa $\propto$ ax s: 2a $\propto$ x

128

Sit □tum ABCD, linea autem DC ita producenda in F ut ducta AF □tum dati ABCD ∞ sit Triangulo CEF:



sit AD latus quadrati dati ∞ a
CF ∞ x jam propter Triang. simili.
erit ut FB AB CF CE

$$a+x \;\pi\; a \;\pi\; x \;\pi\; \frac{ax}{a+x}$$

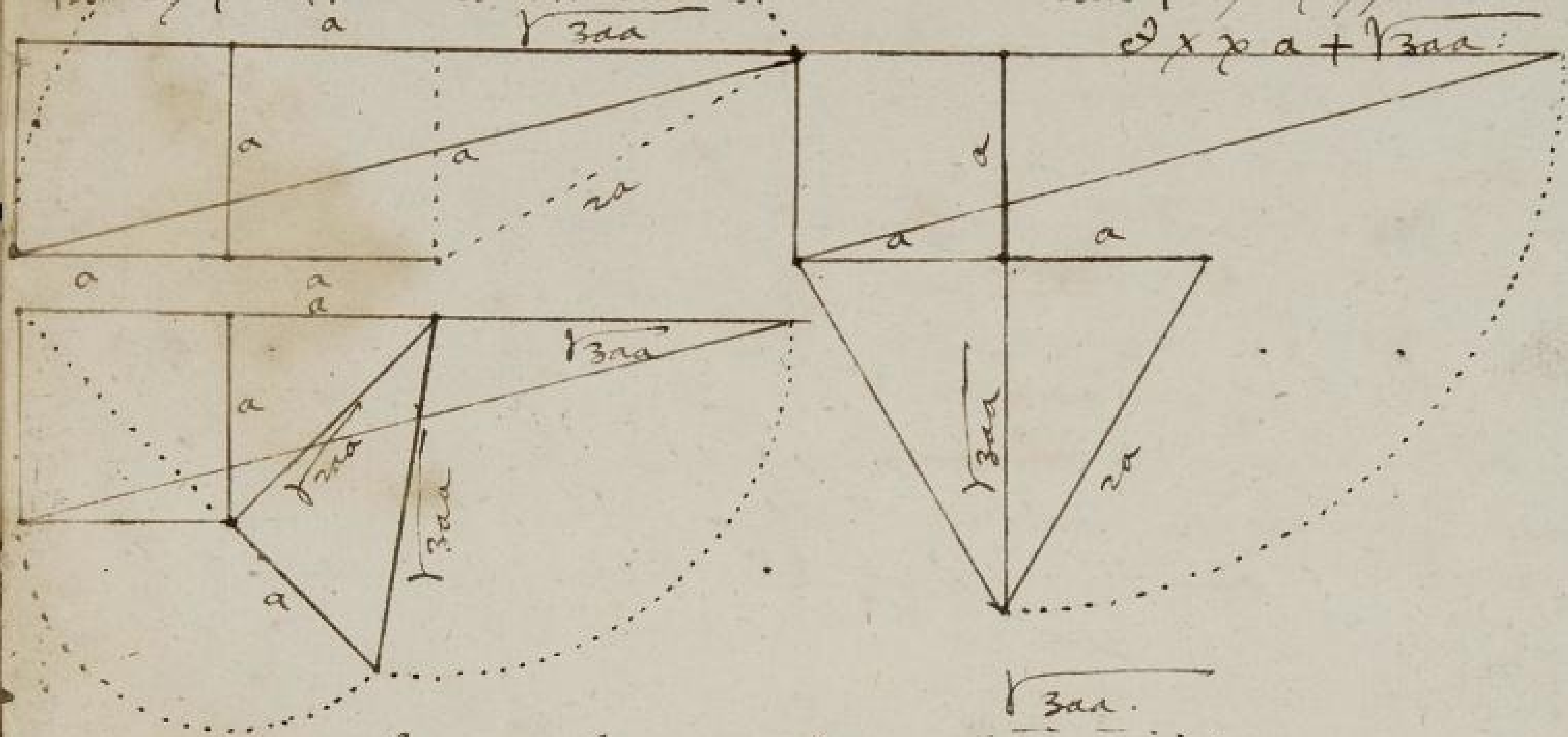
Multiplic. x ad dimid. fit productum

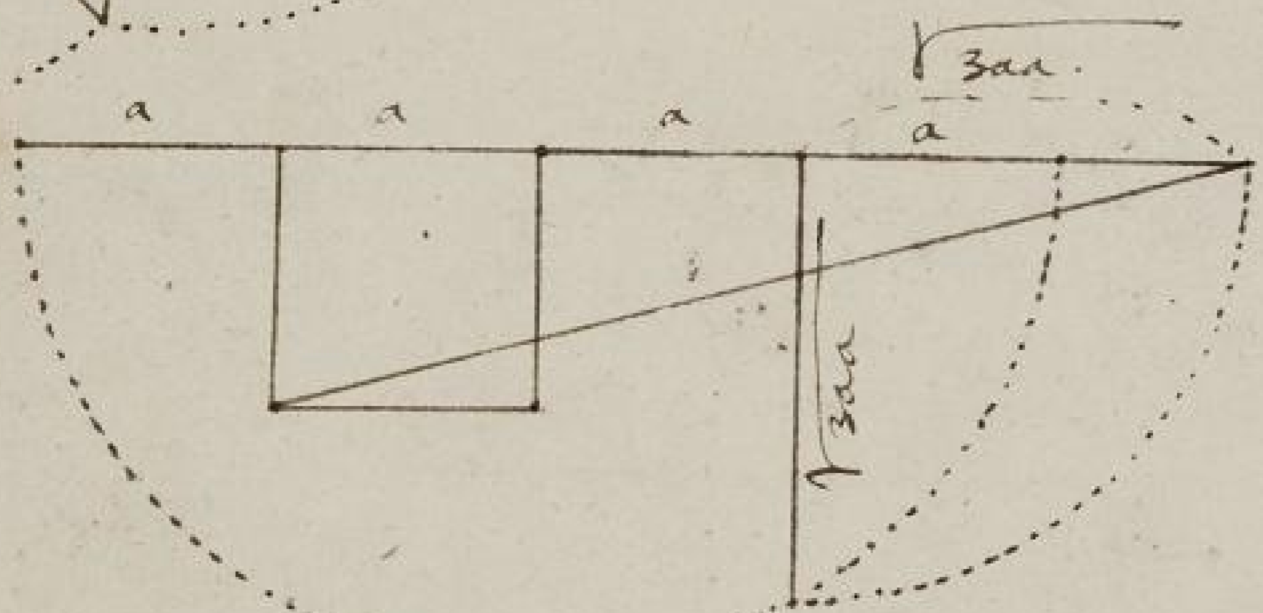
$$\square ABCD\ \frac{aa}{1} \infty \text{ triang. } \frac{axx}{2a+2x} \infty CEF$$

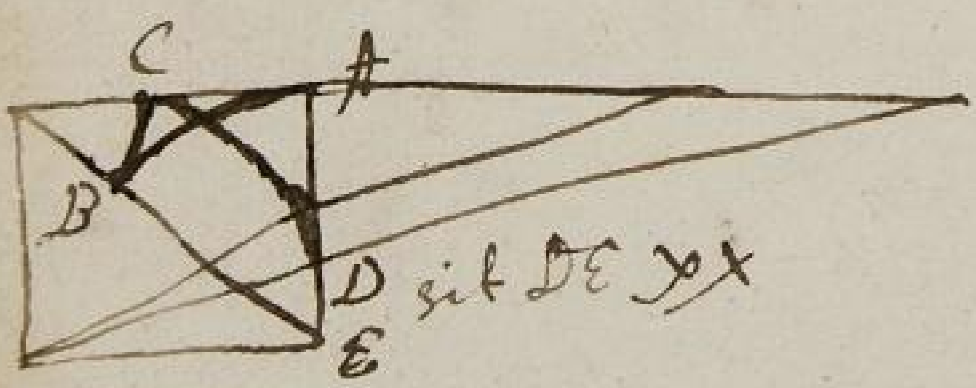
$$2aa+2ax \infty xx$$

$$\text{ergo } x \infty a+\sqrt{3aa}:$$

hinc sequentes ex unica inventa aequatione $x \infty a+\sqrt{3aa}$ constructiones:





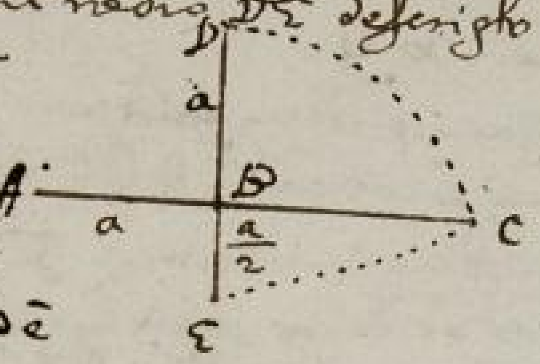


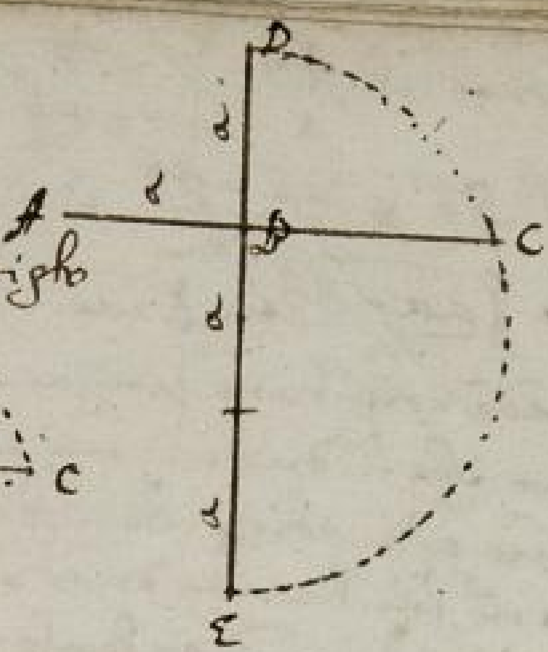
sit DE ∞ x

constructio ex praesenti schemate patet

2

sit iisdem ut antea positis propositum invenire quanta longitudo DE esse debeat ut radio DE descripto circulo DC abscindatur $\approx \sqrt{2aa}$





sit $DE \approx x$ jam $\square\, DC + \square\, EB \approx \square\, EC$ hoc est $2aa + xx \approx aa + 2ax + xx$

$a \approx 2x$ et $\frac{a}{2} \approx x$ unde

constructio patet:

3

sit in A normaliter erecta $AD \approx a$ propositum sit inquirere quanta producta DA, nempe $AE \approx x$ esse debeat ut descripto radio ED circulo producta AB in C ita intersecetur ut $BC \approx \sqrt{2aa}$ jam $\square$ tum $AE + \square\, AC \approx \square\, EC$ hoc est

$a + \sqrt{2aa} \approx BC$

$a + \sqrt{2aa}$

$3aa + 2a\sqrt{2aa}$

xx $\square\, EC$

$3aa + 2a\sqrt{2aa} \cancel{+xx} \approx aa + 2ax \cancel{+xx}$

$2a$

$a + \sqrt{2aa} \approx x$ huius constructio ex praesenti li-

quet:

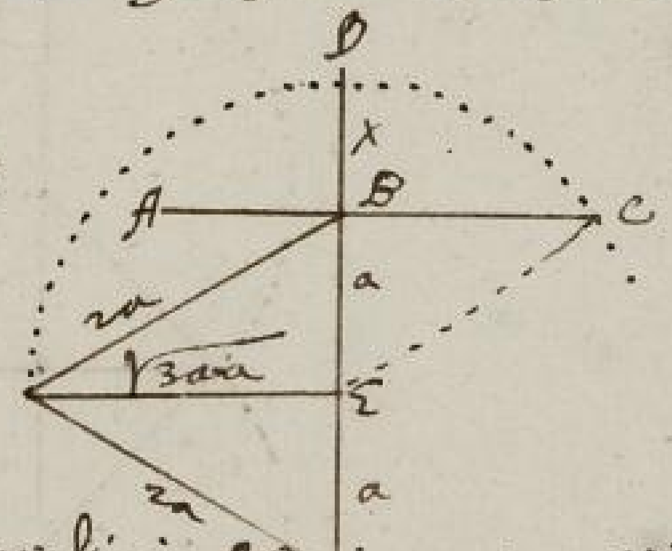
4

sit in B normaliter erecta $BE \approx a$ invenire producta EB in D tanta longitudinis ut centro E intervallo ED descriptus circulus abscindat $BC \approx \sqrt{2aa}$:

$DB \approx x$ $\square\, BC + \square\, BE \approx \square\, EC$ hoc est

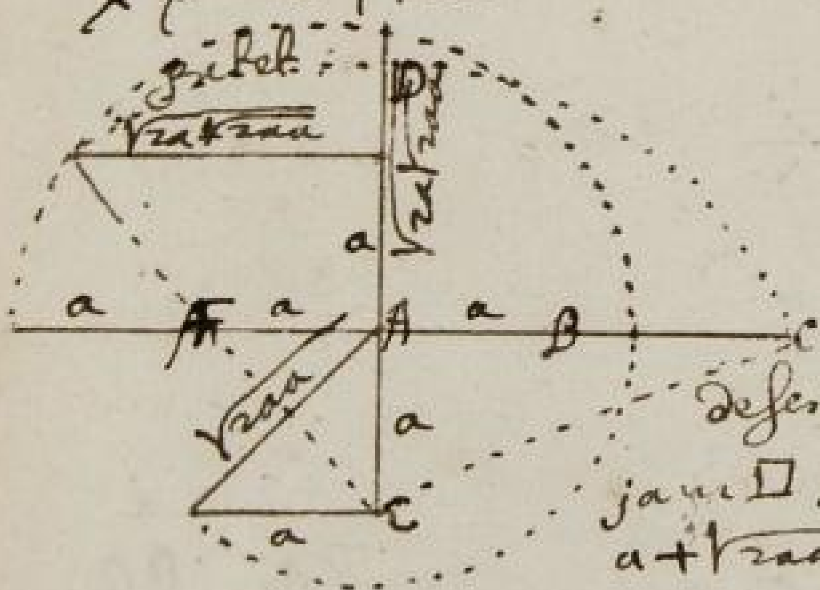
$3aa \approx aa + 2ax + xx$

$x \approx -a + \sqrt{3aa}$ constructio ex praesenti



patet:

5



sit AE normalis in AB invenire AD ita ut descripto radio ED, BC sit $\approx \sqrt{2aa}$: $AD \approx x$

jam $\square\, AC + \square\, AE \approx \square\, EDs: EC$

$a + \sqrt{2aa} \approx AC$ $\square\, AC \approx 3aa + 2a\sqrt{2aa}$

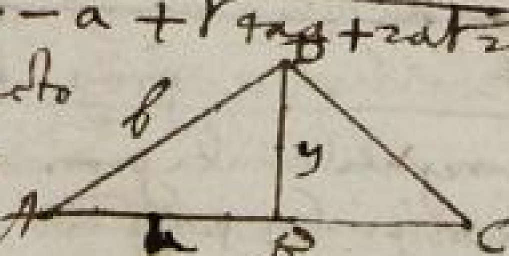
$\square\, AE \approx aa$ $\square\, EC$

$4aa + 2a\sqrt{2aa} \approx aa + 2ax + xx$

$x \approx -a + \sqrt{4aa + 2a\sqrt{2aa}}$:

6

Data AD quaecunque $\approx$ linea b invenire DB ita ut facto angulo $DBC \approx$ ang: ADB, BC abscindatur a producta



$AB \approx \sqrt{2aa}$; sit $DB \approx y$ jamque erit 6 ti

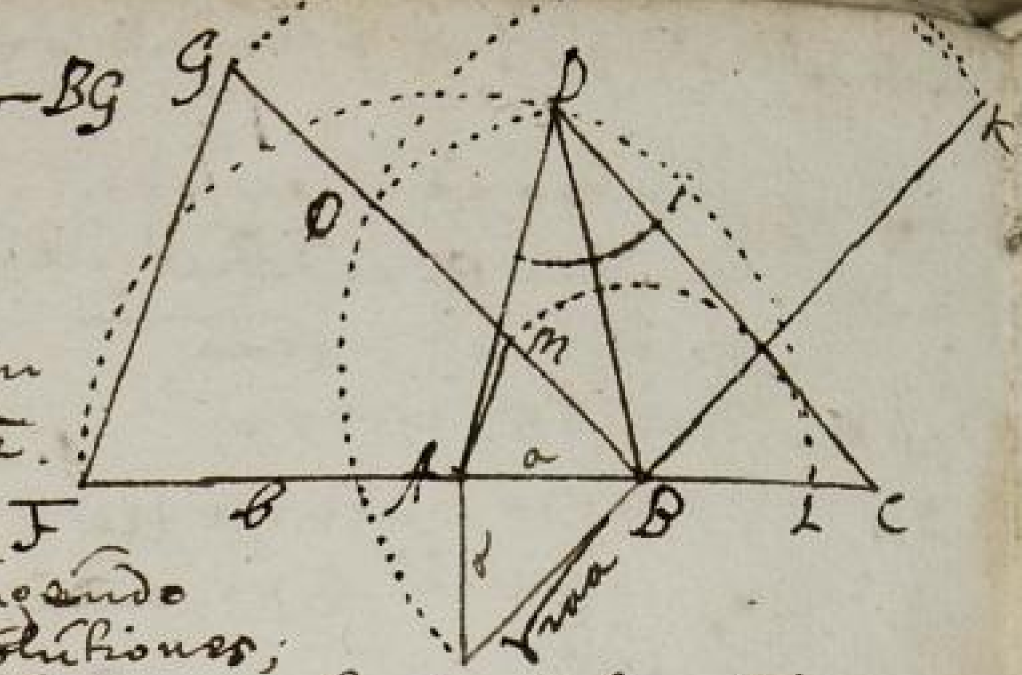
$\frac{AB}{a} \frac{BC}{\sqrt{2aa}} - \frac{AD}{b} - \frac{b\sqrt{2aa}}{a} \approx DC$ jam $\square\, DB + \square\, lo\, ABC \approx \square\, lo\, ADC$

hoc est $\frac{bb}{a}\sqrt{2aa} \approx \frac{bb}{a}\sqrt{2aa} + yy$ et $\sqrt{\frac{bb-aa}{a}}$ in $\sqrt{2aa} \approx y$ huius constructio sequens

Ē enim ut $\underset{a}{AB}$ ⫫ $\underset{a+b}{BF}$ ⫫ $\underset{a-b}{LB \text{ s: } BM}$ ⫫ BG

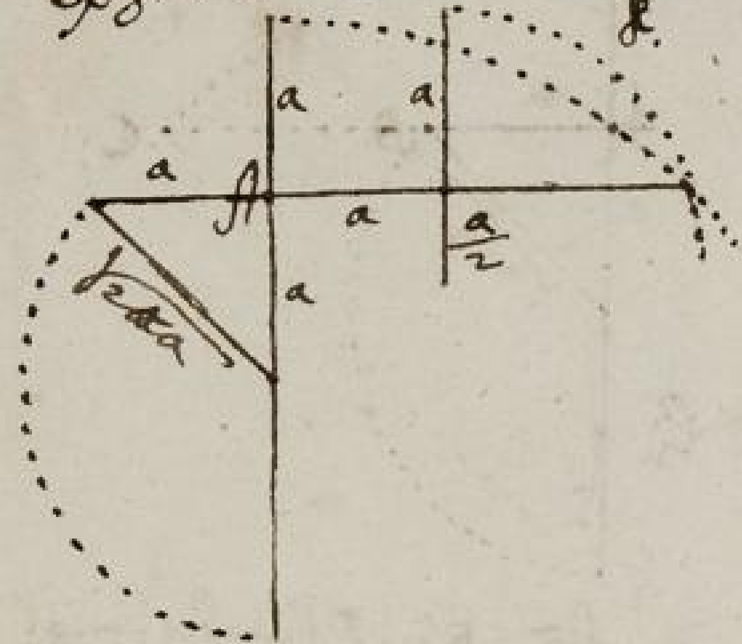
s: BK $\infty\ \frac{aa-bb}{a}$ unde BO s: BD

$\infty\ \sqrt{\frac{aa-bb}{a} \text{ in } \sqrt{raa}}\ \infty\ y$:

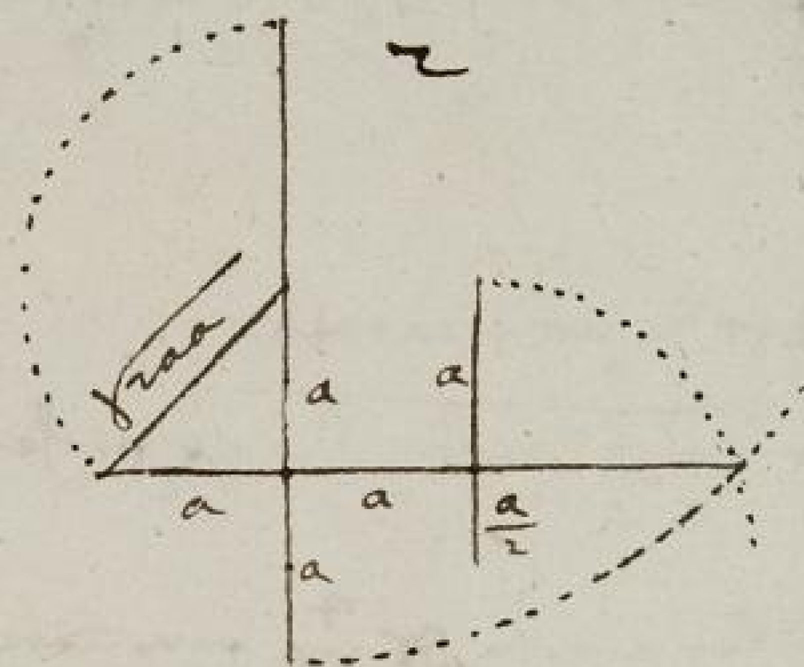


Unde constare jamjam putem, quae in prioribus indicaveram monendum saltem. Quo posse etiam beneficio jam inventarum solutionum duas ac duas conjungendo varias, hinc ad praesentem casum elici solutiones; exempli jungendo eadem constructio antiqua ~~[illegible]~~ constructio quale 1 Schema exhibet, vel situm schematis ut in prioribus dictum variantes quale 2dum ~~[illegible]~~ indicat; imo ex solo 3tio ~~tide~~ habebitur alia solutio quam 3tio: schemate expressam vides

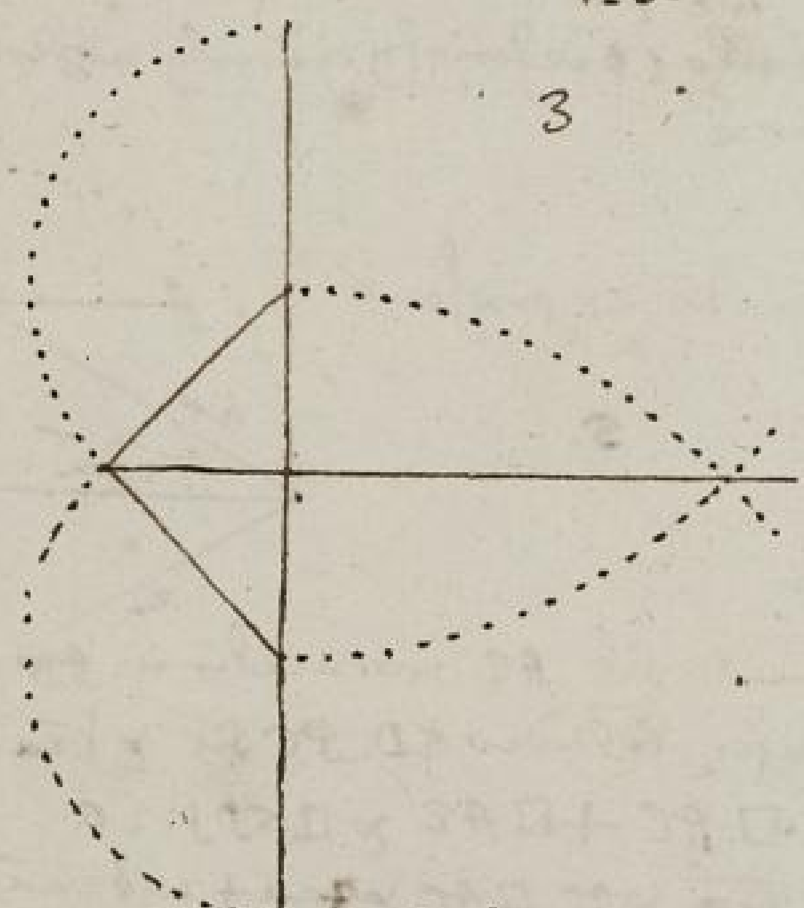
1.



2



3



Hic accedit quod, ~~[illegible]~~ intersectiones quae jam ope circuli vel lineae rectae ut in 6to casu factae etiam ope linearum superioris generis fieri possit; ~~[illegible]~~
~~quod ac praeterea varijs ijsque inter se diversis modis obtineri quae desideramus~~.

Fractionum ad proportionem revocatio ubi notes

1; Generaliter ita procedendum esse, operationem nim: instituendam juxta regulam proportionum, ponendo primo loco denominatorem fractionis, tum resoluto numeratore in partes quae inter se multiplicatae eundem restituant, unam ejus secundo, Tertio alteram reponendo atque erit quaesitus ∞ fractioni propositae, sit e.g. $\frac{ab+ad}{c+d}$

hinc dices ut $c+d$ π a π $b+d$ π $\frac{ab+ad}{c+d}$ eadem modo si sit $\frac{aa-bb}{d+c}$ erit $d+c$ π $a+b$ sic $a-b$ π $\frac{aa-bb}{c+d}$, si vero sit $\sqrt{\frac{a^4-b^4}{cc+dd}}$ dices ut □ hi ~~cc+dd~~ □ tum $aa-bb$ sic □ $aa+bb$ π □ hu $\frac{a^4-b^4}{cc+dd}$ unde radix quadr. p $\sqrt{\frac{a^4-b^4}{cc+dd}}$ ~~Neq aliter si habeamus~~ $\sqrt[3]{\frac{aab^4+2aab^3+bba^4}{c^3}}$ ~~erit ut cubus c^3 cubu a^3~~ ~~ab^3~~

2do si vero numerator non ita possit resolvi duabus viis poterimus ad ejus resolutionem pervenire; prima hic indicabimus altera sequenti 3tia annotatione, ponitur nim. primo denominator fractionis hinc secundo et tertio loco ~~numerator~~ radix ejus erit p fractioni propositae; sit $\frac{aa+bb}{a+b}$ dico ut $a+b$ π $\sqrt{aa+bb}$ sic $\sqrt{aa+bb}$ π est p $\frac{aa+bb}{a+b}$ ac sic de aliis.

3tio si numerator non ita possit resolvi ac praeterea quandoque denominatoris termini pluribus paribus dimensionibus implicati (ex: $\frac{acd-adg}{be-cd}$) in tali fractione ad proportionem fractionum revocanda et videndum quanam litera plurimum omnium in terminis propositae reperiatur (sic hic d quae se ter prodit, ubi reliqua non nisi bis offenduntur) et faciendum ut haec quantitas ad deprimendas dimensiones in omnibus terminis reperiatur in quem finem si primo loco ponatur ea quae pluries occurrit (hic d) secundo et tertio loco quales libet ad libitum qui illa carent (sic hic b et e) hinc operatione juxta regulam proportionis instituta 4tum eruemus (sit hic p f) qui ductus in primum (df) quod provenit (df) aequale erit producto numerorum (be) qui positi erant intermedio loco; si itaque producti hoc extremorum df in fractione substituatur loco producti intermediorum be habebimus quantitatem desideratam (d) in omnibus terminis existentem (sic $\frac{acd-adg}{df-cd}$) quae ubique deleta, fractio $(\frac{ac-ag}{f-c})$ juxta modo indicata in proportionem ulterius resolvitur (dicendo hic ut $f-c$ π a π $c-g$ π $\frac{ad}{}$ quaesitum ~~fractionem~~ p $\frac{ac-ag}{f-c}$) sic quoque existente $\frac{aa+bb}{a+b}$ quod modo alia via resolvimus hac quoque ratione ad proportionem reducitur dicendo ut a π b π b π quartum vocetur f, dummodo bb p af hoc restituto in fractione erit $\frac{aa+af}{a+b}$ ~~ac deleto~~ erit ulterius ut $a+b$ π a sic $a+f$ ad quaesitum p $\frac{aa+af}{a+f}$

Quod si vero hoc nondum fractio facilitat saepius iteratis depressionibus utendum, usque dum fractio penitus sit resoluta [sic ex: sit $\frac{addd-aacc}{d^3+acd}$ supponendo a π d ita d π 4tam p e erit ae p dd poterimus pro $\frac{addd-aacc}{d^3+acd}$ substituere $\frac{aace-aacc}{ced+acd}$ seu $\frac{ace-acc}{ed+cd}$ rursus statuendo esse ut $e+c$ π $e-c$ sic c ad 4tam p f fiet $\frac{ee-cc}{e+c}$ p f licebit pro $\frac{ace-acc}{ed+cd}$ reponere $\frac{af}{d}$ tandem dicas ut d π a sic f ad desideratum, item sit $\frac{cdef}{ade-agh}$ statuatque esse a π c π sic e ad 4tam quaesitum erit i p ce itaque pro $\frac{cdef}{ade-agh}$ scribi posset $\frac{adif}{ade-agh}$ seu $\frac{dif}{de-gh}$ rursus si ponamus esse ut d π g sic h ad 4tam quae appelletur k erit dk p gh itaque in locum $\frac{dif}{ade-agh}$ subrogari posset $\frac{dif}{de-dk}$ seu $\frac{if}{e-k}$ ubi si denuo fiat ut $e-k$ π i π f π ad 4tam quam vocabo x erit x p $\frac{cdef}{ade-agh}$ ut desiderabatur. Quod idem ubi et alia ejusdem generis exempla pluribus modis expediri licet; atque ita de caeteris. 137

Terminorum in eadem abbreviatio sic hic pro x^4 p $\frac{cde}{ab}x^3 + \frac{cdeb}{bbed}xx + \frac{acd^3}{cdg^3}x + bbd^4$

$\propto$ natus $x^4 \propto fx^3 + ggx^2 + g^3x + b^4$ sumendo nimirum pro uno termino omnes illos terminos, qui eandem quantitatis quam invenire volumus radicis aequationis appellamus denominationem sortiuntur, ob inventam aequationem multis terminis implicatam in minimis exhibendam atque ita quoad construendi methodum facilitandam.

Media per quorum constructio efficitur in Arithmeticis 5 que species sic vulgo dictae, in Geometricis eaedem sed in lineis exhibitae; Additio autem ac subtractio linearum facile patent; quoad Multiplicationem ac divisionem ad operationes hasce in lineis quoque instituendas atque numeris necesse est rectam lineam quae unitatis vicem gerat assumere et ad eandem reliquas referre; unitas autem hac vel quaelibet linea ad libitum assumpta esse potest vel quod melius ac compendiosius una ex datis; quo minor assumatur eo minores datae quae ad hanc referuntur satis in numeris notae esse debent, evadent quo major eo majores; Multiplicatio itaque hisce suppositis fiet si dicamus ut ~~fit~~ unitas ad alteram ~~multiplic~~ quae ~~[illegible]~~ esse multiplicari debent, sic altera earum ad aliam quae aequalis erit producto harum linearum: Divisio vero sic efficitur dicendo ut divisor ad unitatem sic dividendus ad aliam quae aequalem quotienti datam lineam; si vero inter unitatem et aliam quandam rectam inveniatur una aut duae plures ve mediae proportionales hoc idem est quod radicis Quadratae aut Cubicae etc. extractio, vid. Geometria Des Cartes p. 2 et 91 ac proinde per circinis exemplum seu organum quo quis per certam mediae proportionales inter datas invenire licet; Notandum hic praeterea quod fa^2 vel b^3 similesve communiter non nisi lineae omnino simplices concipi ~~[illegible]~~ debeant licet illis ut nominibus in Algebra usitatis utamur Quadrata aut Cubi appellemus, advertendum quoque quod omnes ejusdem lineae partes quando unitas in quaestione non est determinata aeque multis semper dimensionibus exprimi debeant, uti hic a^3 tot habet dimensiones quot abb aut b^3 ex quibus composita est linea quam nominamus $\sqrt{C.\,a^3 - b^3 + abb}$ sed si hoc non fiat unitas ubique subintelligi debet ubi vel nimis multae vel nimis paucae dimensiones reperiuntur, ut si radix cubica sit extrahenda ex ~~a~~ $aabb - b$, unitas hic erit subintelligenda quae sit c, nimirum si quantitas $aabb$ quae [illegible] abundat dimensione semel dividatur per c fiet $\frac{aabb}{c}$ at vero altera quantitas b [illegible] duabus deficit dimensionibus ut aequales numeros habeant bis multiplicetur per c hoc est per cc fiet bcc adeo ut tota quantitas sit $\frac{aabb}{c} - bcc$ ~~[illegible]~~

Ipsa constructio in hac fit materia ad Media applicatio est Problematum vel Planorum, Solidorum aut Linearium

Plana quae construi possunt intersectione circuli ac lineae rectae et quidem ~~[illegible]~~.

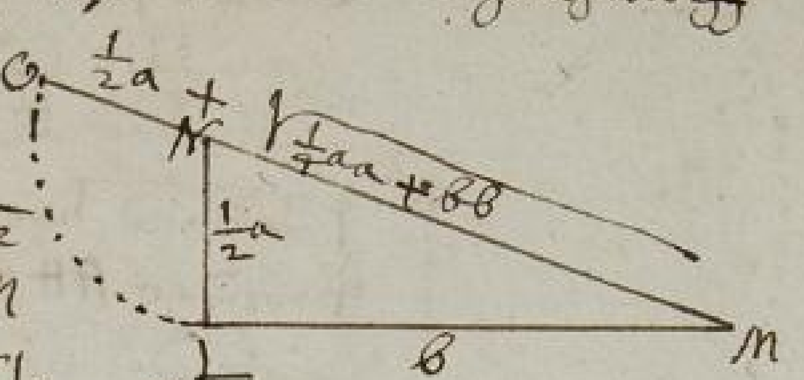
1 De Simplicibus cum habetur $x \propto b$ ~~talia~~ $x - b \propto 0$ problemata semper construi possunt ope trium sequentium figurarum  quae quoque in omni constructione semper maximum usum habent. 1 conducit ad multiplicandum et dividendum fundamentum hujus ex Theoremate triangula similia esse proportionalia. 2da ad radices quadratas extrahendas ibidem rectangulorum in Quadrata transmutatione ~~[illegible]~~ efficit fundamentum hujus Ordinatim applicata in semicirculo quadratum par ☐lo a segmentis Diametri 3 ex datis pluribus ☐tis radicem extrahere docet, imo et conjunctim additionem ac subtractionem promovet fundamentum hujus in Triangulo rectangulo ☐ basis par esse quadratis laterum.

2 De quadraticis cum habemus $xx \cdot ax \cdot bb \propto 0$ hac varie construi possunt nos convenientiores tradamus ad quidem

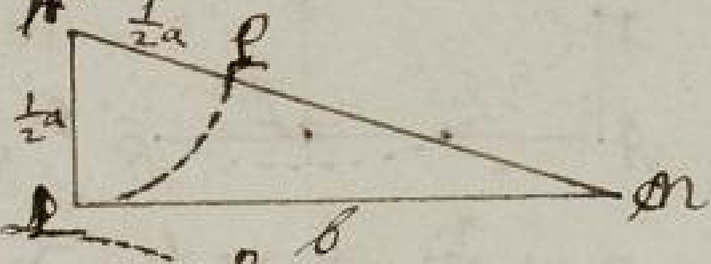
cum secundus terminus par ax tertius ☐ x ut bb, tres hic casus occurrunt

1 cum habetur $xx - ax - bb \propto 0$ tunc facio triangulum rectangulum NLM cujus unum latus LM sit $\propto b$, ~~[illegible]~~ unum latus LN $\propto \frac{1}{2}a$ deinde producta MN usque ad O

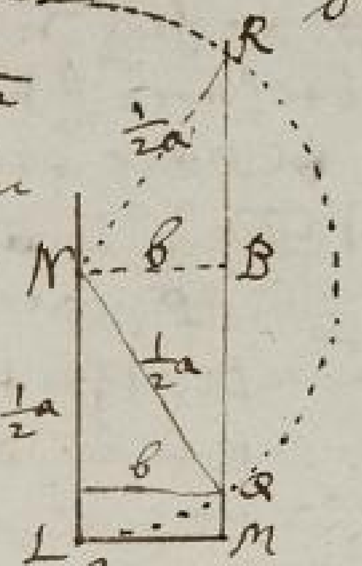
dantur QN sit $\infty \frac{1}{2}a$ s: NL erit tota OM $\infty x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ linea quaesita ~~cujus~~ ~~vero quadr~~: $\square$ ti NL + $\square$ LM ∞ $\square$ NM $\infty \frac{1}{4}aa + bb$ unde radix hujus quadrati s: linea NM $\infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$
et OM $\infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$



2do cum habetur $xx + ax - bb \infty 0$ tunc facio idem triangulum NLM, ac assumo NL ∞ NL unde LM quaesita linea $\infty x \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ Enim: $\square$ ti NL + $\square$ LM ∞ $\square$ NM hoc est $\frac{1}{4}aa + bb$ unde radix hujus $\square$ ti seu linea NM $\infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ et LM $\infty -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$



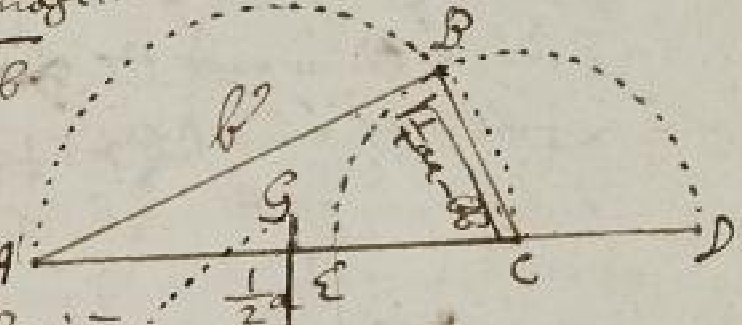
3tio si habeatur $xx - ax + bb \infty 0$ jam facio NL $\infty \frac{1}{2}a$
LM ∞ b ut ante deinde duco lineam ~~MQR~~ perpendicularem MQN ut in duobus alijs casibus sed duco MQR parallelam ipsi LN centroque N descripto per L circulo secante MQR in punctis Q et R erit MQ vel MR aequalis lineae quaesitae x hoc n. casu illa duobus modis exprimitur nam $x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \infty$ MR vel etiam $x \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \infty$ MQ
quod sic patet:



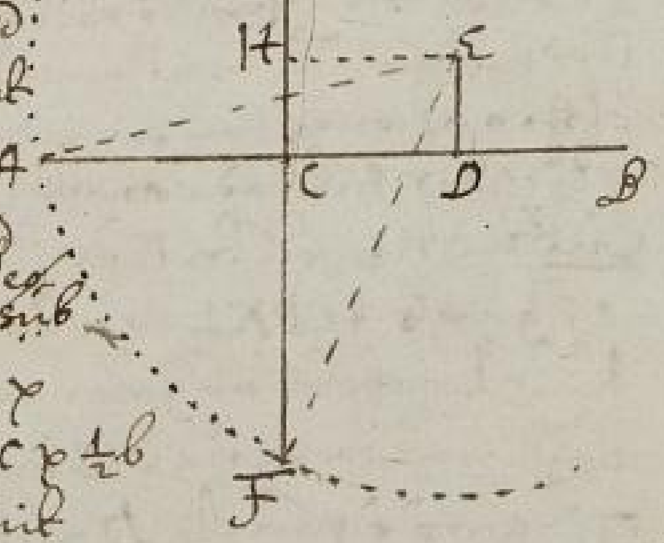
2do

juxta 47 libri: RB $\infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ cui addo BM $\infty \frac{1}{2}a$ erit } ~~et~~ BM $\infty \frac{1}{2}a$ et 47. lib: x: BQ $\infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ } sub:

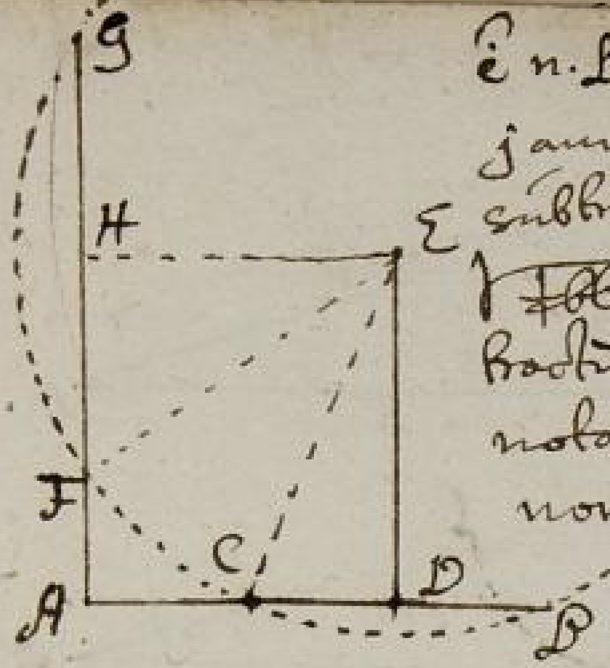
erit RM $\infty x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ erit MQ $\infty x \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.
Quod si vero LM major sit NL quaestio impossibilis erit: idem autem quoque ~~?~~ alia ratione obtinebimus, fiat triangulum rectangulum ABC itaut AC sit $\infty \frac{1}{2}a$ et AB ∞ b
jam descripto centro C radio BC circulo EBD erit AD s: AE quaesita linea:
erit AD $\infty x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ et AE $\infty x \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$
id quod vel ex intuitu praesentis figurae patet.



~~Circumscriptis~~ ternis terminis ex rectangulo sibi primo
1 $xx + bx - cd \infty 0$ ponamus AB ∞ c et AC ∞ d CB divisa bifariam in D tunc erecta perpendiculari DE $\infty \frac{1}{2}b$ ducatur per B vel C linea FG parallela DE, denique centro E radio AE describatur circulus secat FG in punctis F et G unde FC $\infty x \infty -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + cd}$.
2 $xx - bx - cd \infty 0$ operatio eadem prorsus erit verum CG pro x erit valor $x \infty +\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + cd}$, quia autem jam dicta sic constant BC ∞ c − d et CD s: HE $\infty \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ AD vero $\infty \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$
Addito jam $\square$ to AD s: DE $\infty \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}dd$ tunc subtrahatur $\square$ tum HE $\infty \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}dd$ relinquitur $\square$ tum HFS: HG ∞ $\frac{1}{4}bb + cd$ unde HF $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb + cd}$ a quo si subtrahamus HC $\infty \frac{1}{2}b$ erit CF $\infty -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + cd}$ vel addamus $\frac{1}{2}b \infty$ HC provenit CG $\infty \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + cd}$.

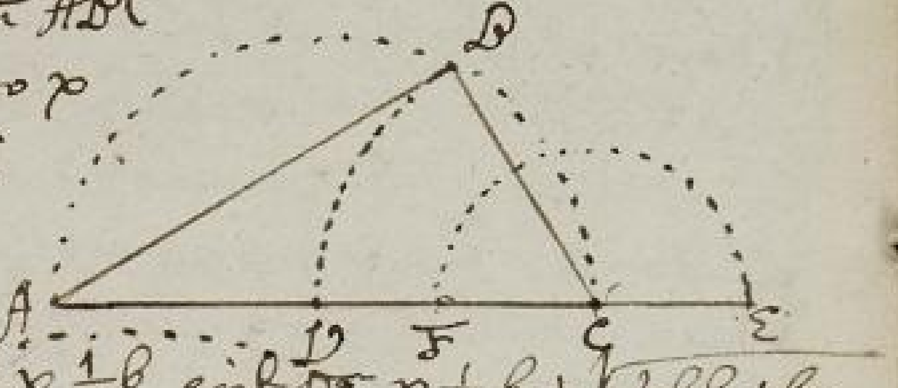


3 $xx - bx + cd \infty 0$ ponatur AB ∞ c et AC ∞ d tunc BC dividatur bifariam in D ac erecta perpendiculari DE $\infty \frac{1}{2}b$ ducatur AG parallela DE, denique centro E ac radio EC describatur circulus secat AG in F et G unde AG s: AF ∞ valori x ~~$\infty 0$~~ vel $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - cd}$ vel $\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - cd}$

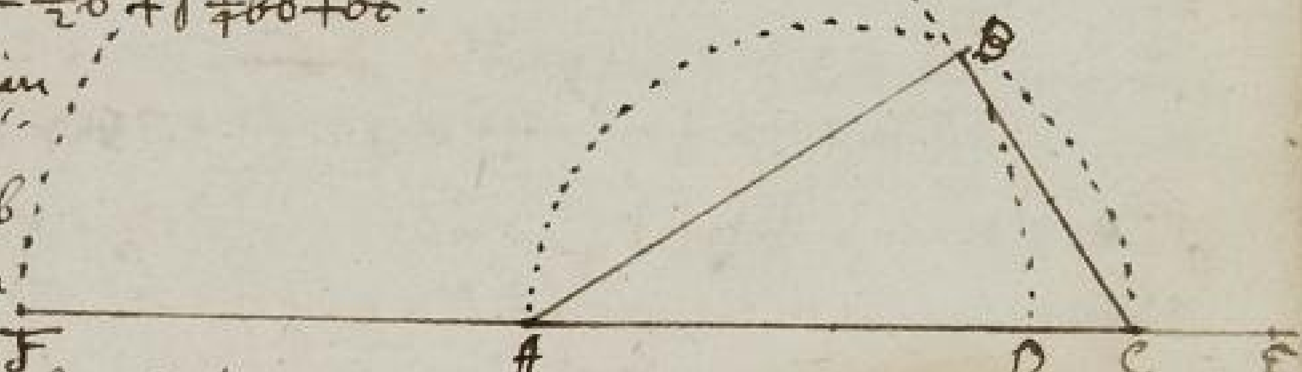


ē n. BC $\propto c - d$ ac CD $\propto \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ ~~unde~~ ita AD s: HE $\propto \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$ additis
jam □tis CD et DE erit □tum CE s: EF $\propto \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}dd$ ab hoc si
subtrahatur □ AD s: HE erit □ FH s: HG $\propto \frac{1}{4}bb - cd$ unde FH s: HG $\propto$
$\sqrt{\frac{1}{4}bb - cd}$ hoc addito AH $\propto \frac{1}{2}b$ erit AG $\propto x \propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - cd}$ vel sub-
tracto ex AH $\propto \frac{1}{2}b$ restat AF $\propto x \propto \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - cd}$
notandum ut constructio possibilis evadat necesse est ut $\sqrt{cd}$ mi-
nor sit $\frac{1}{2}b$:

3 Cum ~~cognita~~ incognita quantitas secundi termini est latus rectan-
guli ultimi termini et quidem si habeatur



1. $xx - bx - bc \propto 0$ fiat triangulum rectangulum ABC
AC sit $\propto \frac{1}{2}b + c$ (hoc est AF $\propto c$ et FC $\propto \frac{1}{2}b$) AB vero $\propto$
c, tunc factis CD et CE aequales CB et CF erit DE
$\propto x \propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + bc}$ / □tum n: AC $\propto \frac{1}{4}bb + bc + cc$
subtractum □tum AB $\propto cc$ remanet □ BC s: BC $\propto$
$\propto \frac{1}{4}bb + bc$ unde BC $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb + bc}$ huic si addamus CE $\propto \frac{1}{2}b$ erit DE $\propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + bc}$
2. $xx + bx - bc \propto 0$ fiat idem triangulum ABC ut antea, verum a DC auferatur FC $\propto \frac{1}{2}b$
unde reliquum DF $\propto$ valori $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + bc}$.



3. $xx - bx + bc \propto 0$ tunc fiat trian-
gulum rectangulum ABC ~~ubi AC~~
in quo AC $\propto \frac{1}{2}b - c$ (hoc est AE $\propto \frac{1}{2}b$
CE $\propto c$) BC vero $\propto c$ descripto jam
circulo FDB centro A intervallo F
AB erit FE s: DE $\propto$ valori $x \propto$ vel $\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - bc}$ vel $\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - bc}$, ratio hu-
jus est quia quadrato AC ~~$\propto$~~ $\frac{1}{4}bb - bc + cc$ subtracto quadrato BC remanet □ AB
$\propto \frac{1}{4}bb - bc$ unde AB $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb - bc}$ s: FA adde AE $\propto \frac{1}{2}b$ erit FE $\propto \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - bc}$, sub-
tracto vero ex AE $\propto \frac{1}{2}b$ AD reliquum DE aequale erit $\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - bc}$ prout antea di-
ximus: nota hic ibidem necesse esse ut c minor sit $\frac{1}{2}b$:

Solida vero construi possunt ~~per~~ intersectione circuli ac ~~ex~~ alicujus ex sectionibus co-
nicis puta Parabola, Hyperbola ac Ellipsis. ~~[illegible]~~

~~De Cubicis~~ Ubi posito ~~[illegible]~~ secundus aequationis terminus modo jam ~~[illegible]~~ sublatus abs-
erit atque ita aequatio reducta ad hanc formam $z^3 \propto * apz . aaq$. si incognita quantitas
tres tantum dimensiones habeat aut ad hanc $z^4 \propto * apzz . aaqz . a^3r$ si quatuor obtineat
dimensiones, seu sumendo a pro unitate ad hanc $z^3 \propto * pz . q$ aut ad hanc $z^4 \propto *$
$pzz . qz . r$ tum ad construendam aequationem

Cubicam seu trium dimensionum supponendum est Parabola FAG jam descriptam esse
cujus axis ACDKL latusque rectum a s: 1 cujus AC sit dimidium et denique punctum C esse intra
hanc Parabolam cujus vertex sit A; Oportet facere CD $\propto \frac{1}{2}p$ eamque sumere in linea AC
continuata versus C si in aequatione habeatur $+p$ sed versus alteram partem si habeatur
$-p$. porro est puncto D, aut ex puncto C si non habeatur quantitas p erigendo ad axim per-
pendicularem DE aequalem $\frac{1}{2}q$ oportet ex centro E circulum describere FG cujus semi-
diameter sit AE, quod si vero habeatur $z^3 \propto * + pz + q$ et quadratum semissis ultimi
termini non sit majus cubo trientis quantitatis cognitae penultimi termini suppo-
nendo circulum NQLN cujus semidiameter NO sit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ hoc est media proportionalis in-
ter trientem quantitatis datae p et unitatem; tum etiam supponendo lineam NL tunc ei

[illegible]

culo est inscriptam quae sit $\frac{3q}{p}$ hoc est quae sit ad alteram quantitatem q ut est uni-
tas ad trientem ipsius p, dividendusque tantum est uterque arcus NQL, NVL in tres aequales
partes, eritque NQ subtensa trientis unius arcus una cum NV subtensa trientis alterius aequa-
lis radici quaesitae, si autem habeatur $z^3 \propto * + pz - q$ et quadratum semissis ultimi ter-
mini non excedat cubum e triente quantitatis cognitae penultimi termini, tunc ijsdem
peractis ut ante erit NQ subtendens trientem arcus NQL una ex radicibus quaesitis
et NV subtendens trientem arcus NVL radix altera quod sic patet; sit $NO \propto m$
$NL \propto n$ et $NQ \propto x$ dicendo ut $NO \propto m$ π $NQ \propto x$ sic $NQ \propto x$ π $QR \propto \frac{xx}{m}$ atque porro
sic $\frac{xx}{m}$ π $\frac{x^3}{mm}$ pro SR porro $SR + NL \propto 3NQ$ hoc est $\frac{x^3}{mm} + n \propto 3x$ et $x^3 \propto 3mmx - mmn$.
si itaque habeamus $x^3 \propto px - q$ duae erunt aequationes, inter quorum terminos compa-
ratione instituendo resultabunt hinc sequentes aequationes:

$p \propto 3mm$ unde $\frac{1}{3}p \propto mm$ et $\sqrt{\frac{1}{3}p} \propto m$

$-q \propto -mmn$ et $\frac{q}{mm} \propto n$ restituatur mm et proveniet $\frac{3q}{p} \propto n$. atque ita in alijs
casibus hoc poterit explorari.

Quadratoquadraticam s. 4tuor dimensionum ijsdem ut modo in prioribus de para-
bola indicatum factis si insuper habeatur $* r$ et quidem signo + affecta oportet utrinque in hac
linea AE producta utrinque ex una parte sumere $AR \propto r$ et ex altera parte $AS \propto$ lateri
recto parabolae quod est 1 describereque circulo cujus diameter RS erigere AH perpendicularem
ad AE quae occurrat huic circulo RHS in puncto H, quod illud ipsum est per quod alter cir-
culus FHG transire debeat. Quod si vero habeatur $-r$ oportet insuper in alio circulo cujus
Diameter est AE inscribere AI aequalem inventae AH: inventumque erit punctum I per quod
primus circulus quaesitus FIG transire debet. Ubi sciendum quod circulus hic FG secare
vel tangere possit parabolam in 1, 2, 3, 4 aut punctis a quibus si ad axem perpendiculares de-
mittantur, habebuntur omnes aequationis radices tam verae quam falsae. Nimirum si
quantitas q sit affecta signo + verae radices erunt illae harum perpendicularium
quae ex eadem parabolae parte, qua est E circuli centrum reperientur ut FL et reliquae ut GK
erunt falsae. Sed contra si haec quantitas q notata fuerit signo − verae erunt illae quae
ex altera parte et falsae seu minores quam nihil quae ex parte illa ubi est centrum circuli
E. Et denique si hic circulus non secat nec tangit parabolam in aliquo puncto, indicio est aequa-
tionem nullam admittere radicem sive veram sive falsam sed tantum imaginarias. patet itaque
ex his quo pacto problemata omnia solida unius ejusdemque parabolae ope solvi possunt.

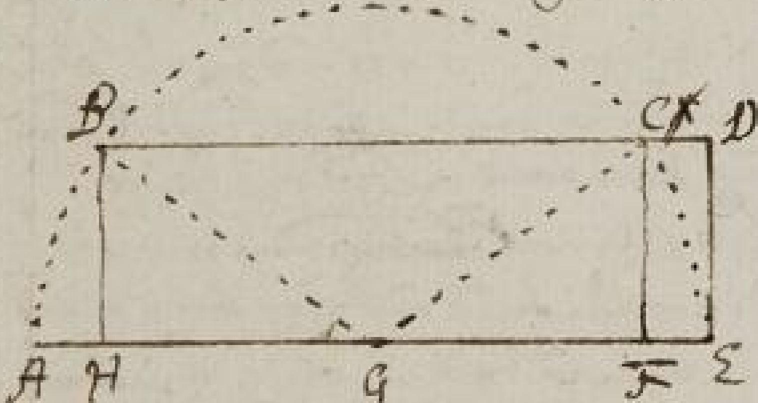
Linearium quae construi possunt intersectione circuli et lineae ~~tertij~~ gradum magis
compositarum; exemplum ostendemus in aequationibus 6 dimensionum ad tales itaque aequa-
tiones construendas, meminisse oportet quomodo augendo valorem radicum hujus aequationis
fieri semper possit ut radices hae omnes verae evadant ac simul ut quantitas cognita
tertij termini excedat quadratum a semisse quantitatis cognitae secundi termini
Et denique quo pacto si tantum ad surdesolidum ascendat ipsa ad quadratocubum attolli pos-
sit fierique ut nullus terminorum desit. Quocirca ut difficultates omnes quae quidem hic
occurrunt per eandem regulam resolvi queant ~~possint~~ desidero ut haec omnia fiant et hac ratione re-
ducantur semper ad aequationem hujus formae

$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0$ in qua quantitas vocata q major sit quadrato
a semisse ejus quam nominabis p.

Posthac ducta linea recta BK utrinque indefinita erectaque ad eandem ex puncto B
perpendiculari AB cujus longitudo sit $\frac{1}{2}p$ describenda est in plano aliquo separato
Parabola ut CDF cujus latus rectum principale $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$ quod brevitatis cau-

sa vocabo n. Tum ponendo planum in quo Parabola existit supra planum in quo sunt AB DK ita ut axis ejus DE omnino omnino congruat cum linea recta DK sumptoque segmento hujus axis quod inter puncta E et D intercipitur aequali $\frac{2Nu}{nn}$ adplicanda est longa regula ad punctum E ita ut postquam ad punctum H plani inferioris quoque est adplicata semper maneat adjuncta hisce duobus punctis, interea dum Parabola secundum lineam DK ad quam ejus axis est adplicatus vel elevatur vel deprimitur, qua quidem ratione Parabolae atque regulae intersectio quae fit in puncto C lineam curvam ACN designabit illam quippe qua ad propositi problematis constructionem indigebimus. Etenim ea sic descripta si fiat DL aequalis DE hoc est $\frac{2Nu}{nn}$ ita ut punctum L cadat in linea DK versus partem quae respicit Parabolae vertex, tum vero in eadem linea a puncto L versus D sumatur LH aequalis $\frac{t}{2nNu}$ et ex puncto H sic invento ad partem curvae ACN ducatur ad angulos rectos ipsi DK linea HI aequalis $\frac{r}{2n}+\frac{Nu}{nn}+\frac{st}{4nnNu}$ quam in abbreviandi causa nominabo $\frac{ra}{nn}$. Et postquam conjuncta H puncta L et I circulo LLI cujus diameter IL inscribatur linea LL $=\sqrt{s+\frac{stu}{nn}}$. Tandem ex centro I per punctum L sic inventum circulus describatur LCN: secabit hic circulus vel tanget lineam curvam ACN in tot punctis quot aequatio admittit radices, ita ut perpendiculares quae ex hisce punctis ad lineam DK deducentur Aequationis hujus futurae sint radices et nulla hac regula patiatur exceptionem neque defectum, verum ut et solum constet qua ratione haec inventa sint et ~~qua~~ redacta ratione ad infinitas alias diversas reduci, atque ita omnia infinitis modis resolvi possint hoc clarum fiet ex sequentibus annotationibus.

In genere notandum quod si linea et circulus se interserent in quibusdam partibus hoc inservire posse ad aequationes quadraticas construendas, si vero circulus aliquam primi generis ex curvis intersecet vel quaecunque duae aliae primi generis hoc inservire posse ad aequationes ~~triana~~ ~~et~~ tertiae et quartae dimensionum construendi; si vero circulus et aliquam secundi generis curvam se interserent vel quaecunque duae aliae secundi generis hoc inservire posse ad construendas aequationes 5ae et 6ae dimensionum atque ita porro in infinitum qua ratione autem inserviant ut ejusmodi aequationibus construendis inservire queant sequentia exempla exhibent.



sit datus circulus ABCE, ductis jam perpendicularibus DE et BD in AE et DE quaeritur quanta magnitudinis sit futura primo CD tum BD quoad

sit CD = x GE = a. DE = b s. CF. unde GF = a − x et s. FE

H.F s. BC = 2a − 2x et BD 2a − x jam ▭ BCD = □ DE

hoc est 2a − x = BD in CD = x

2ax − xx = bb et xx − 2ax + bb = 0 id quod indicat praesens schema ~~hi~~ inservire posse ad construendas aequationes quadraticas tertiae formulae quod ut fia-

sit xx − gx + g = 0 jam comparatione inter hujus et prioris aequationis terminos instituta erit g = 2a unde a = $\frac{g}{2}$ unde patet si ~~exsistente~~ aequatione quadra- 2do g = bb unde b = $\sqrt{g}$ tica ~~tertia~~ formulae hanc construi posse

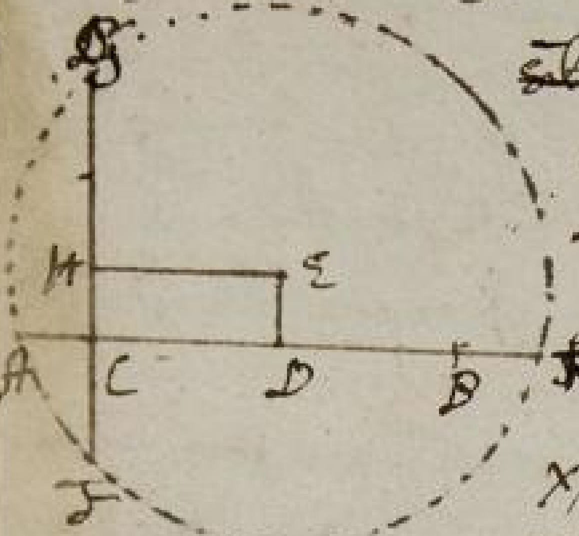
ope praesentis schematis, assumendo nimirum GE s. a = dimidio cognitae quantitatis secundi termini DE vero s. b = radici ultimi termini, id quod in prioribus indicatum fuit:

2

sit BD = x s. HE unde AH s. FE = 2a − x jam rectangulum BDC = □ DE hoc est 2ax − xx = bb et xx − 2ax + bb, ~~id~~ cum vero hic eadem aequatio inveniatur indicio hoc ac ~~aliae~~ infinitae ~~aliae~~ alia inveniri possint.

... poo & xx - lax tor, ~~..~~ tu vero hic eodē anno [illegible] ...
[illegible]

quod si aequationem taliter constitutam eadem diximus methodo construamus tunc DC quam DD fore hujus aequationis radicem.



~~sit AC ad AB DE = b tunc~~ describatur circulus centro E intervallo EA: ducta jam FG ~~perpendiculari~~ ad AB ad angulos rectos quae intersecantur FC et GC sit x FC = x

jam AC = d s: FK, AB = c s: CK. DE = b s: HC = GC = 2b + x

jam □ FCG = □ ACK hoc est $2bx + xx = cd$ et

$xx + 2bx - cd = 0$ ~~unde~~ jam fiat aequatio ejusdem formae

$xx + fx - g = 0$ unde inter se comparata erit

$2b = f$ $g = cd$, id quod indicat si aequatio quadratica sit talis formae qualem invenimus

et $b = \frac{f}{2}$ ut hac construatur assumendam esse dimidium quantitatis cognitae secundi termini = DE hoc est $b = \frac{f}{2}$ et AC ante AB tales quantitates quae in se invicem multiplicatae ultimum terminum producant hoc est ut sit $cd = g$

sit 2 GC = x:

unde $GH = x - b$ s: HF et $FC = x - 2b$ jam □ tum ACK = □ FCG hoc est $xx - 2bx = cd$ et $xx - 2bx - cd = 0$ unde si hujus ac alterius $xx - gx - g = 0$ terminos comparatio fiat erit $2b = g$ et $b = \frac{g}{2}$ $cd = g$: id quod itidem indicat: ad aequationem talis formae qualem invenimus construendam assumendam esse $DE = \frac{g}{2}$ s: dimidium quantitatis cognitae secundi termini; AC ante et AB s: CK tales ut inter se multiplicatae ultimum terminum producant hoc est ut sit $cd = g$ id quod etiam in prioribus circa has aequationes construendas dictum fuit, unde facile colligere licet qua ratione reliquae ibi indicatae constructiones inveniri possint

3

Intersecent se Parabola ac circulus prout praesens figura indicat, existente E centro circuli ac axe Parabolae AD, ponamus latus rectum Parabolae = a ac DA = b DE = f EH semidiametrum circuli = h. Sit jam propositum inquirere KG = x perpendicularem ex intersectionis Parabolae ac circuli puncto in axem Parabolae AD demissam. AK = erit $\frac{xx}{a}$ a quo subtrahatur AD, reliqua DK s: EM = $\frac{xx-ab}{a}$ hujus □tum $\frac{x^4 - 2abxx + aabb}{aa}$ si jam addatur ED s: MK ad KG erit $MG = f + x$ hujus □tum $ff + 2fx + xx$ quod subtractum ex □to EG remanet pro □to EM $-xx - 2fx - ff + hh$ = □to EM = $\frac{x^4 - 2abxx + aabb}{aa}$

hisce reductis proveniet

$$x^4 * \begin{matrix}-2abxx \\ +aaxx\end{matrix} + 2aafx \begin{matrix}+aabb \\ +aaff \\ -aahh\end{matrix} = 0$$

id quod indicat hanc operationem inservire posse ad construendas aequationes talis formae

$x^4 * - apxx + aaqx + a^3r = 0$ comparando

itaque terminos hujus cum terminis alterius ut variis in locis ostensum est

1: $-2ab + aa = -ap$ et $b - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}p$ = CD ponendo AC = $\frac{1}{2}a$

2: $2aaf = aaq$, $f = \frac{q}{2}$ = DE

3: $aabb + aaff - aahh = a^3r$ s: $bb + ff - hh = $ [illegible] hoc est □tum AE − □to AH = e □ AH terminum: AR sit = r et AB = a

atque hac ratione procedendum in caeteris casibus quas construenda in superioribus docuimus ut appareat quo hac ea inventa fuerint ac infinita ~~alia~~ alia inveniri possint.

147

Si loco Parabolae assumamus Parabolam ^{4} secundi generis, ubi cubi ordinatim applicatarum sunt in eadem ratione qua segmenta axeos, haec aequatio inserviret fuisset ad construendae aequationi 5 aut 6 dimensionum. Si n: ponamus in priori figura rursus $\frac{x^3}{aa}$ a quo subtrahatur AD remanet DK s. EM $= \frac{x^3 - aab}{aa}$ cujus □ $x^6 - 2aabx^3 + a^4bb$ = EM quod antea inveniebatur $= -xx - 2fx - ff + hh$ unde hisce reductis erit

$$x^6 * * - 2aabx^3 + a^4xx + 2a^4fx \begin{array}{l} + a^4bb \\ + a^4ff \\ - a^4hh \end{array} = 0$$

unde hoc inservire potest ad talem aequationem resolvendam nim: $x^6 * * - aagx^3 + a^3gxx + a^4rx + a^5s = 0$ jam comparatione restituta erit ~~...~~;

$2aab = aag$ et $b = \frac{1}{2}g$

$a^4 = a^3g$ et $a = g$

$2a^4f = a^4r$ et $f = \frac{1}{2}r$

$a^4bb + a^4ff - a^4hh = a^5s$ unde $bb + ff - hh = as$

Resumamus figuram qua usi fuimus in constructione aequationum ^{5} 6 dimensionum ac sit latus rectum Parabolae $= n$ DE s. BL $= b$ AD $= d$ LH $= f$ IH $= g$ IC semidiameter $= h$ CG $=$ linea quaerenda $= y$ erit DG $= \frac{yy}{n}$ et EG $= \frac{yy}{n} - b$ erit autem CG $= y$ :: EG $= \frac{yy}{n} - b$ sic AB $= d$ :: DE s. BL $= \frac{dyy}{n} - bd$ cui si addatur LH $= f$ tota DH erit $\frac{dyy}{n} - bd + fy$ a quo si subtrahatur DG $\frac{yy}{n}$ remanet GH s. CM $= \frac{dyy}{n} - bd + fy - \frac{y^3}{n}$ s. $\frac{-y^3 + dyy + fny - bdn}{ny}$ cujus □ est

$$\frac{\begin{array}{l} y^6 - 2dy^5 + ddy^4 + 2bdny^3 + ffnnyy - 2bdfnny + bbddnn \\ \qquad - 2fny^4 + 2dfny^3 - 2bddnyy \end{array}}{nnyy}$$

subtrahatur nunc CG s. MH $= y$ ex IH $= g$ remanet $g - y =$ IM; deinde subtrahatur □ eius IM ex □ to IC remanet $-yy + 2gy - gg + hh =$ □ CM cum autem hoc quoque in prioribus inventum sit, aequatione restituta ac reducta erit

$$\begin{array}{l} y^6 - 2dy^5 + ddy^4 - 2gnny^3 + ggnnyy - 2bdfnny + bbddnn = 0 \\ \qquad - 2fny^4 + 2bdny^3 - hhnnyy \\ \qquad + nny^4 + 2dfny^3 + ffnnyy \\ \qquad\qquad - 2bddnyy \end{array}$$

si ibi alia aequatio detur $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + u = 0$ ac homini termini inter se comparentur erit $-2d = -p$ s. $d = \frac{1}{2}p$ | $bbddnn = u$ restituatur $\frac{1}{2}p = d$ s. $bdn = \sqrt{u}$ erit $b = \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}pn}$ | $2bdfnn = t$ restituto bdd erit $\frac{fn\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} = t$ et $f = \frac{\frac{1}{2}t}{n\sqrt{u}}$.

$dd - 2fn + nn = q$, d et f sublatis fient $\frac{1}{4}pp - \frac{t}{\sqrt{u}} + nn = q$ et $n = \sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}pp}$ | $-2gnn + 2bdn + 2dfn = -r$ restitutis $b\,d\,f$ erit $2gnn = r + 2\sqrt{u} + \frac{\frac{1}{2}pt}{\sqrt{u}}$ et $g = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{u}}{nn} + \frac{\frac{1}{4}pt}{nn\sqrt{u}}$

$ggnn - hhnn + ffnn - 2bddn = s$ restitutis $2bdd$ ac omnibus divisis per nn proveniet $gg - hh + ff = \frac{s + p\sqrt{u}}{nn} =$ □ BL unde videre licet qua ratione Descartes haec invenerit, prout in prioribus insinuatum.

Si loco Parabolae CDF ponamus Parabolam ^{6} secundi generis, linea ACN curva erit tertii generis, inserviens constructioni aequationum 7 aut 8 dimensionum.

lineis n. eadem ratione assumptis ut antea erit $DG \propto \frac{y^3}{n}$ et $EG \propto \frac{y^3}{n} - b$ itaque ut $CG \propto y$ ad $EG \propto \frac{y^3}{n} - b$ sic $FD \propto d$ ad DE s: $DL \propto \frac{dy^3}{n} - bd$ adde $LH \propto f$ proveniet tota $DH \propto \frac{\frac{dy^3}{n} - bd + fy}{y}$ unde si subtrahamus $DG \propto \frac{y^3}{n}$ remanet GH s: $CM \propto \frac{dy^3}{n} - bd + fy - \frac{y^4}{n}$ s: in ordine coördinando redigendo $\frac{-y^4 + dy^3 + fny - bdn}{ny}$ hujus $\square$ tum

$$y^8 - 2dy^7 + ddy^6 - 2fny^5 + 2bdny^4 - 2bddny^3 + ffnnyy - 2bdfnny + bbddnn$$
$$+ 2dfny^4$$
$$\overline{\qquad nnyy \qquad}$$

subtrahatur quoque CG s: $MH \propto y$ a $pi\ IH \propto g$ remanet $g - y \propto IM$ unde $\square\ IM$ subtracto ex $\square$ to IC $\propto -yy + 2gy - gg + hh \propto \square\ CM$ quo cum idem antea invento aequatione habebimus quae reducta erit.

$$y^8 - 2dy^7 + ddy^6 - 2fny^5 + 2bdny^4 - 2bddny^3 + ffnnyy - 2bdfnny + bbddnn \propto 0$$
$$+ 2dfny^4 - 2gnny^3 + ggnnyy$$
$$+ nny^4 \qquad - hhnnyy$$

obtinemus itaque aequationem 8 dimensionum in qua omnes radices verae existunt si itaque supponatur aequatio

$$y^8 - gy^7 + gy^6 - ry^5 + fy^4 - ty^3 + uyy - wy + x \propto 0$$ ac hujus termini cum priori comparentur erit.

1	2	3	4
$-2d \propto -g$ $d \propto \frac{1}{2}g$	$dd \propto g$ $d \propto \sqrt{g}$	$bbddnn \propto x$ restituatur s: $bdn \propto \sqrt{x}$ $\frac{1}{2}g$ loco d erit $b \propto \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}gn}$	$-2bdfnn \propto -w$ restitutis $b\,d$ erit $\frac{fn\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} \propto w$ et $f \propto \frac{\frac{1}{2}w}{n\sqrt{x}}$

5	6
$-2fn \propto -r$ restituto f erit $\frac{w}{\sqrt{x}} \propto r$	$2bdn + 2dfn + nn \propto s$ restitutis $b\,d\,f$ proveniet $\sqrt{x} + \frac{\frac{1}{2}gw}{\sqrt{x}} + nn \propto s$ et $n \sqrt{s - 2\sqrt{x} - \frac{gw}{2\sqrt{x}}}$

7	8
$-2bddn - 2gnn \propto -t$ restitutis $b\,d\,d$ erit $g\sqrt{x} + 2gnn \propto t$ et $g \propto \frac{t - g\sqrt{x}}{2nn}$	$ffnn + ggnn - hhnn \propto u$ eritque $ff + gg - hh \propto \frac{u}{nn} \propto \square$ to KL:

Unde patet regulam hanc ~~Kinck~~ nullum usum habere nisi ejusmodi aequationis omnes radices verae sint atque insuper ubi $\frac{1}{2}g \propto \sqrt{g}$ et $\frac{w}{\sqrt{x}} \propto r$

2: si quis desideraret per parabolam ac circuli aequationem nullo termino deficientem resolvere id hoc modo fieri poterit, ducatur parallela axi linea OP ponamusque nunc $KN \propto d$ et $NG \propto z$ eritque $KG \propto x \propto d + z$ hoc subrogatum loco x ac quadratum loco xx etc porro (verum sit inter N et G existit ponendum $z - d$ loco x) inveniemus loco aequationis $x^4 * \;{-2abxx \atop +aapxx} + 2aafx \;{+aaff \atop {+aagg \atop -aahh}} \propto 0$ sequentem.

$$z^4 + 4dz^3 + 6ddzz + 4d^3z + d^4$$
$$+ aazz + 2aadz + aadd$$
$$- 2abzz\ {-4abdz} - 2abdd \qquad \propto 0$$
$$+ 2aafz + 2aadf$$
$$+ ~~4aadf~~$$
$$+ aaff$$
$$- aahh$$

si itaque ponamus

$$z^4 + gz^3 - agzz + aarz + a^3s \propto 0$$

sequentem comparationem instituta obtinebis aequationes:

149

83

$f \propto 4d$ et $\frac{1}{4}g \propto d$ | $-ag \propto bdd + aa - 2ab$ (2) restituto erit $b \propto \frac{3ff}{16a} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}g$ | $aar \propto 4d^3 + 2aad - 4abd + 2aaf$ (3) restitutis d et b erit $f \propto \frac{1}{2}r + \frac{g^3}{16aa} + \frac{gg}{4a}$

$a^3 s \propto d^4 + aadd - 2abdd + 2aadf + aabb + aaff - aahh$ (4)

unde est $as - \frac{d^4}{aa} - dd + 2\frac{bdd}{a} - 2df \propto bb + ff - hh$ hoc est $\square$ lineae L1; inventis itaque valoribus

loco d b et f erunt NG, ng vera ac FL fg falsae radices

si sit $-g$ ponatur ubique $-g$ loco $+g$ et lineae OL ad alteram partem erunt collocanda

si sit $+q$ ponatur ubique $+q$ in locum $-q$ et $-q$ in locum $+q$

si sit $-r$ ponatur $-r$ loco $+r$ et si denique sit $-s$ ponatur $-s$ loco $+s$,

si ultimus terminus $s \propto 0$ tunc linea OL transit intersectione g quod indicat

aequationem tres tantum admittere radices;

porro si terminus certus sit $\propto 0$ hoc semper aliquid facilitatis constructioni conciliat

qua in quantitate r. haec litera reperitur an quoque aequari nihilo patet.

videatur: Besluyt van de grond van de meetkunst p. 152 et sequ: item Geometria, Toegift

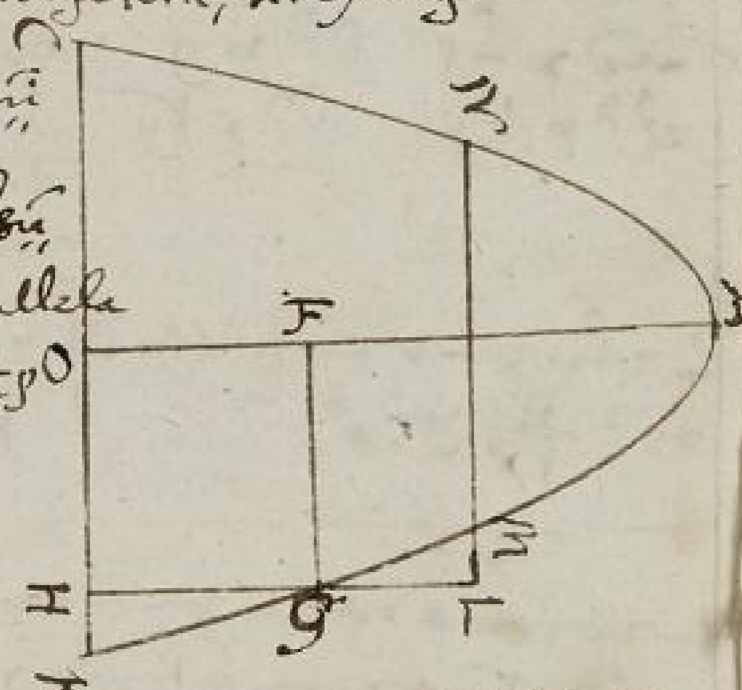
p. 159 et sequen: Kunstklighsen. item ejusdem Geometria parte 3tia p. 67 et sequentibus

3 aequationes omnes per curvas superiorum ~~quarum~~ generum construi possunt sed non per genus lineae ~~inferiorum~~

~~quam~~ simplicis quam natura earum permittit, unde si in proposita quaestione data aliqua

qua curva superioris generis aut eadem quam aequationis ~~natura~~ constructio requirit tunc semper

~~quam~~ ea ope illius data curva per solam regulam et circinum solvi potent, sit exemplum:



Ope parabolae aequationes quadraticas resolvere. Cum

ut si sit $xx - px - q \propto 0$ CAK

tunc descripta parabola latus rectum fiat $\propto \frac{1}{2}p$ ~~ad~~ seu

mathematicam AF $\propto \frac{1}{2}p$ eritque FO quoque $\frac{1}{2}p$ ~~AF~~ vero parallela

ducatur GH $\propto \frac{q}{\frac{1}{2}p}$ et FG linea CK eritque $CH \propto x \propto \frac{1}{2}p$

$+\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

si sit $xx + px - q \propto 0$ tunc HK $\propto$ valori x $\propto$

$-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$

si vero sit $xx - px + q \propto 0$ tunc GL ducenda est

ex his $\frac{q}{\frac{1}{2}p}$ extra parabolam ac parallela AF, item linea NL parallela ad CK

eritque valor x vel LN seu LM $\propto$ vel $\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$ vel $\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$:

Quod sic constat. sit n. data parabola CAK latus rectum $\propto a \propto$ AF seu FG ductaque

GH parallela AF $\propto b$ / seu FG: OH propositum sit inquirere quanta CH sit futura, ponatur $\propto x$

eritque $OC \propto CH - HO \propto x - a \propto OK$, jam $OK - OH$ seu $x - 2a \propto HK$ ex natura

autem parabolae $\square$ sub CHK $\propto$ $\square$ HG in latus rectum unde $xx - 2ax \propto ab$ atque

$xx - 2ax - ab \propto 0$ facta itaque inter hunc et alterius $xx - px - q \propto 0$ terminos comparatione

tione erit $2ax \propto px$ (2) $q \propto ab$ restituto a

et $a \propto \frac{p}{2}$ $\quad q \propto \frac{pb}{2}$ et $\frac{2q}{p} \propto b$ seu $\frac{q}{\frac{1}{2}p} \propto b$ eadem ratione in ceteris

formulis quaesitum obtinetur:

Z.

Desideratur ex dato puncto intra vel extra parabolam dato C recta linea CH quae

omnium inde ductarum sit minima:

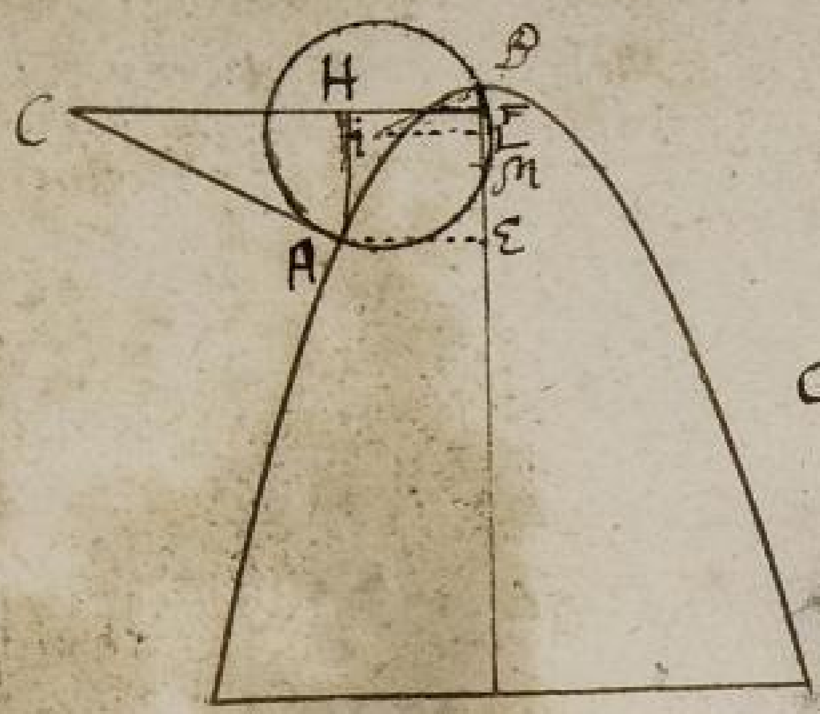
sit $DF \propto c$ perpendicularis $CF \propto d$ latus rectum $\propto r$ $AE \propto x$ unde $DE \propto \frac{xx}{r}$ et $CA \propto h$

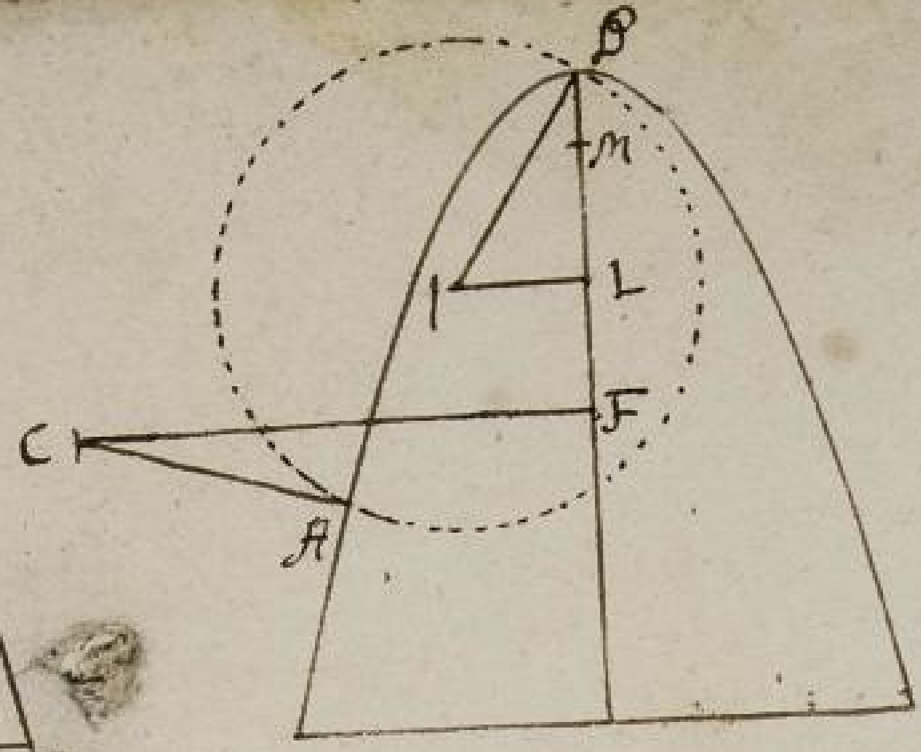
150

95

152

87





154

… cap. 10, ~~ut~~ cum vero hic eadem aequatio maximas minus noi-

Subtrahatur AL ∞ x ex LF ∞ d remanet LH ∞ d − x & DF ∞ c subtrahatur ex DE ∞ $\frac{xx}{r}$ remanet EF ∞ AH ∞ $\frac{xx}{r} - c$ jam □ti AH + □ CH ∞ □ CA hoc est:

$\frac{x^4}{rr} - \frac{2cxx}{r} + xx - 2dx + cc + dd \propto hh$ cum ante aequatio haec duas aequales radices obtineat Multiplicanda erit

per 4 2 2 1 0 0 0

$\frac{4x^4}{rr} - \frac{4cxx}{r} + 2xx - 2dx \propto 0$ omnibusque multiplicatis per rr ac divisis per 4x provenit

$x^3 * \begin{smallmatrix} -crx \\ +\frac{1}{2}rr \end{smallmatrix} - \frac{1}{2}drr \propto 0$ quae aequatio ope Parabolae ac circuli cum secundo termino absit solvi potest ut in prioribus sed ut haec ipsa Parabola ad solutionem serviat sic ulterius procedendum; ~~in prioribus~~ circa primam annotationem tertii exempli inveniebatur: $x^4 * \begin{smallmatrix} -2abxx \\ +aa \end{smallmatrix} + 2aefx \begin{smallmatrix} +aabb \\ +aaff \\ -aahh \end{smallmatrix} \propto 0$ cum ante haec tantum 3 dimensionum

bb + ff ∞ hh

hic nunc eo debeat ut aequatio ejusdem formae cum priori evadat ponatur ulterius terminus ∞ 0 erit $x^3 * \begin{smallmatrix} -2abx \\ +aa \end{smallmatrix} + 2aef \propto 0$ inter hanc et priorem $x^3 * \begin{smallmatrix} -crx \\ +\frac{1}{2}rr \end{smallmatrix} - \frac{1}{2}drr \propto 0$ comparatio instituatur eritque supponendo a ∞ r

$-2ab + aa \propto -cr + \frac{1}{2}rr$ | $2aef \propto -\frac{1}{2}drr$ cum ante hic inveniatur f ∞ $-\frac{1}{4}d$

unde b ∞ $\frac{1}{4}r + \frac{1}{2}c$ | et f ∞ $-\frac{1}{4}d$ quod indicat centrum circuli ea parte axis a quo assumendum ubi valor x invenitur:

Constructio jam talis erit fiat DM ∞ $\frac{1}{2}$ lateris recti ac in medio DM erigatur perpendicularis IL ∞ $\frac{1}{4}$ CF descripto jam circulo centro I intervallo ID quae secabit Parabolam in A, ducaturque linea CA

ubi notandum quod in tertia figura existente C intra parabolam circulum Parabolam praeterea adhuc secare in N et O cujusque ~~radio~~ CN centro C describantur circuli alter cum Parabola in O intrinsecus tangit alter extrinsecus in N; si vero ~~circulus~~ circulus parabolam in unico praeterea adhuc puncto intersecat ut in 4ta figura in L; circulus descriptus radio CA et centro C parabolam tangit intrinsecus et extrinsecus simul:

3

$x - 2t \propto y$ aut deniq; $\frac{x-y}{2} \propto t$, cuiusq; hic ibidem quaelibet sit satisfactum
nec ulla ex conaestis interfuisset attamen duae conditiones deficiunt aut
faciunt quaestionem esse indeterminatam, assumendo itaq; duas quantitates
tertia prodit: sub hac tamen determinatione ut sumendo x et t pro libitu
modo $2t$ ~~minus~~ minus sit x propter hanc aequationem $y \propto x - 2t$, atq; ut $x - 2t \propto$ fiat
y propter eandem, sumendo vero x et y ut y minus sumatur quam x propter hanc
aequationem $t \propto \frac{x-y}{2}$ et ut t sit $\propto \frac{x-y}{2}$ propter eandem. sed tandem y, et t prout
ut libet modo cum hac determinatione ut $y + 2t$ sit $\propto x$ propter hanc in superio-
rio ibi inventa aequatione

1				2				3			
sit itaq; $x \propto 6$, $t \propto 2$, $\therefore y \propto 2$				$x \propto 5$, $y \propto 3$, $\therefore t \propto 1$ Probe				sit deniq; $y \propto 2$, $t \propto 3$, $\therefore x \propto 8$			
6 in 6 fl	$\propto x$	36	fl	5 in 6 fl	$\propto x$	30		2 in 8 fl	$\propto y$	16	
2 — 9 fl	$\propto t$	18		3 — 8	$\propto y$	24		3 — 9	$\propto t$	27	
2 — 8	$\propto y$	16		1 — 9	$\propto t$	9		8 — 6	$\propto x$	48	
10		70 / 10	7	9		63 / 9	7	13		91 / 13	7

sit deniq; haec sequens
40 Personae, Viri, Mulieres et Pueri consumpserunt 12 fl ~~240 st~~. Vir solvit 10 st.
Mulier 5 st et Puer 3. Quaeritur numerus quorumlibet

Viri $\propto x$ — jam juxta quaestionis indicationem erit
Mulieres $\propto y$
$\therefore$ Pueri $\propto 40 - x - y$ sit t

$$\left.\begin{array}{l} 10x \\ 5y \\ 120 - 3x - 3y \end{array}\right\} \quad \frac{12 \text{ fl}}{20 \text{ st}} \text{ st}$$

$$120 + 7x + 2y \propto 240 \text{ st.}$$
$$2y \propto 120 - 7x$$
$$\text{et } y \propto 60 - \tfrac{7}{2}x$$

jam restituto valore y in aequatione Pueri sit $t \propto 40 - x - y$
erit $t \propto 2\tfrac{1}{2}x - 20$, ~~restituendo~~.
~~igitur quantitates~~ erunt igitur

Mulieres sive $y \propto 60 - \frac{7}{2}x$ sive $\frac{120 - 7x}{2}$ et pueri sit $t \propto 2\frac{1}{2}x - 20$ sive $\frac{5x - 40}{2}$ quia
igitur tantum x requiritur ut quantitatem horum sciam; sed illud non invenire possum
licet omnes conditiones mihi datas tentarim; colligere ex inde est quaestio
esse hanc indeterminatam esse ac proinde x pro libitu quamvis quantitatem as-
sumi posse, sub hac tamen determinatione ut ~~minus y sit 120 − 7x~~
primo x sit major quam 8 cuius ratio in aequatione puerorum $\left(\frac{5x - 40}{2}\right)$
et ut secundo non superet 16 propter aequationem mulierum $\left(\frac{120 - 7x}{2}\right)$ tertio quod numerus
assumi debeat par, propter divisionem per binarium cum hic tantum inte-
gri numeri desiderentur tandem ut $y \propto$ fiat $\frac{120 - 7x}{2}$ et $t \propto \frac{5x - 40}{2}$ pro x itaq;
tantum assumi poterit 10, 12, 14, 16. sit itaq;

1	2	3	4
$x \propto 10$	sit $x \propto 12$	sit $x \propto 14$	sit $x \propto 16$
$\therefore y \propto 25$	inde $y \propto 18$	$\therefore y \propto 11$	$\therefore y \propto 4$
$\therefore t \propto 5$	et $t \propto 10$	et $t \propto 15$	et $t \propto 20$

Cum autem in superiori inventa aequatione $2y \propto 120 - 7x$
tam y quam x ad alteram aequationis partem reduci poterit, eadem haec quae jam
inveniuntur alia quoque ratione obtineri potuissent, inveniendo x ~~[illegible]~~ tri.
x sic ad ~~unam~~ aequationis partem reducta $\propto \frac{120 - 2y}{7}$ unde hoc restituendo
in aequatione puerorum sit $t \propto 40 - x - y$ obtinetur $t \propto \frac{160 - 5y}{7}$. Demum itaq; as-

91

sumatur y pro libitu, sub hac determinatione ut sit minor quam 32 et qui talis quinquies assumptus et subtractus a 160 possit dividi absque reliquo propter aequationem $\frac{160-5y}{2} \propto$ quaeris et item sit talis quoque ut si bis assumatur et ex 120 subtrahatur reliquum ita per 7 dividi possit sine reliquo propter aequationem $\frac{120-2y}{7} \propto x$ ejusmodi numeri tantum sunt 25, 18, 11 et 4 tandem ut fiat $x \propto \frac{120-2y}{7}$

et ~~z~~ $x \propto \frac{160-5y}{2}$ Nec ~~seq~~ in aliis procedes ubi 3 aut plures conditiones deficiunt ut quaestio sit penitus determinata, existente autem quaestione Geometrica unica tantum deficere conditio poterit procedendo methodo statim explicanda cumque tunc ab inquirentibus dicta infinita semper ~~p~~ puncta sint quae satisfaciunt quaesitis locus ille in qua illa omnia reperiuntur ~~linea~~ sunt, ubi notandum

1 Locum illum existente linea recta aut circulari vocari planum, Parabola autem hyperbola aut denique Ellipsi solidum; Quod si vero linea quae hic quaesitum punctum determinat uno gradu magis quam sectiones conicae sit composita ipsum eodem modo sursolidum appellari atque ita de caeteris

2 Quod puncta omnia illarum ~~qua~~ linearum Geometricae appellari possunt hoc est quae sub mensura aliqua certa et exacta cadunt necessario ad puncta omnia lineae rectae certam quandam et exacta cadunt necessario ad puncta omnia lineae rectae certam quandam relationem habeant quae per aequationem aliquam omnia puncta respiciente exprimi possit ~~[illegible]~~ per motum aliquem ordinatum et continuum describi possunt aut per plures quibus cum sequuntur, quorumque posteriores a prioribus reguntur.

3 Quod cum aequatio haec non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum aut non ultra quadratum unius ex illis ascendit, linea curva tunc sit primi ac simplicissimi generis (sub quo tantum Circulus, Parabola, Hyperbola et Ellipsis sunt comprehensae) sed quod postquam aequatio ad 3tiam aut 4tam dimensionem duarum aut unius e duabus quantitatibus indeterminatis ascendit si quidem hic duae ad relationem unius ad alterum punctum explicandum requiruntur linea illa tunc sit secundi generis et quod prout ad 5tam aut 6tam dimensionem ascendit illa tunc sit 3tij generis et sic in infinitum de aliis; Ad haec loca autem recte indaganda ac rite determinanda necessaria est, Quaedam ad inveniendum locum requisita operatio. Aequationis inventae praeparatio, ~~ipsa~~ loci ejusdem designatio.

Quaedam ad inveniendum locum requisita operatio quae sequitur.

1 Eligo rectam aliquam ut ad diversa ejus puncta referam omnia puncta inveniendi loci ~~ac insuper in ea punctum (puta si id datum sit) ... quod ad ordiendum ... eligere, nam licet pluribus referatur~~ (Ut si scire cupiam cujus generis sit linea EL quam suppono descriptam esse per intersectionem regulae GL et plani rectilinei CNKL, cujus latus KN indefinite productum est versus C quodque dum movetur supra planum describitur in recta linea (hoc est ut diameter ejus KL per plano applicata reperiatur aliubi lineae BA utrinque indefinite continuatae) facit ut regula GL rotetur circa punctum G, quoniam ipsi continuo sic admovetur ut simul quoque transeat per punctum L; eligo rectam AB, ut ad diversa ejus puncta referam omnia puncta hujus curvae (E) ac insuper in ea punctum (puta si non datum sit) aliquod ad ordien

dum ab eo calculum (hic AB) dico autem me utrumque eligere nam licet plurimum referat quo pacto illa eligam, ut æquatio possit reddi et brevior et facilior tamen quocunque tandem modo sumantur fieri potest ut linea seu loci ejusdem generis appareat

2 Intelligo unam ex quantitatibus quam x voco ab illo certo ac immutabili initio (A) in ea ipsa linea recta positione data (AB) indefinite extendi ~~utrinque indeterminatæ~~ quoque longitudinis lineam (BC) quam y voco priori in extremitate in certo in dato vel assumpto (hic recto) angulo conjungi

3 Tandem etiam considero quantitates cognitas quæ hujus loci seu lineæ descriptionem determinant, ut ad æquationem possimus venire quæ mihi relationem inter x et y explicet. Quam in hoc casu AG voco a, KL b et NL parallelam ipsi GA voco c. Tum dico ut NL est ad LK ita CB est ad BK hoc est

ut $c \;—\pi—\; b \;—\pi—\; y \;—\pi—\; \frac{by}{c}$ ac proinde BL $\propto \frac{by}{c} - b$

et AL $x + \frac{by}{c} - b$ Denique ut CB est ad BL ita GA ad AL hoc est ut

$y \;—\pi—\; \frac{by}{c} - b \;—\pi—\; a \;—\pi—\; x + \frac{by}{c} - b$ adeo ut si

multiplicem secundam lineam per tertiam producatur $\frac{aby}{c} - ab$ quod æquale erit $xy + \frac{by^2}{c} - by$ ei scilicet quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque itaque æquatio quæ invenienda erat est hujusmodi $y^2 \propto cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$

Ex qua cognoscitur juxta modo dicta lineam EC esse primi generis, quemadmodum illa revera nulla alia est quam hyperbola; Quod si instrumento quod ipsi describendæ inservit, loco lineæ rectæ CNK sumatur inventa hæc hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet CNKL intersectio hujus lineæ et regulæ GL loco hyperbolæ EC aliam curvam describet quæ secundi erit generis. Ut si CNK fuerit circulus cujus centrum L describetur prima conchoidis veterum et si parabola fuerit cujus diameter KB describetur curva linea, quam infra adhibebimus ad construendas æquationes 6 dimensionum, sed si loco alicujus harum linearum primi generis sumatur quædam secundi quæ terminet planum CNKL describetur ejus ope alia tertii generis, aut si quædam tertii generis sumatur describetur aliqua quarti et sic in infinitum; ut ~~facile~~ calculo tentari ~~experiri~~ poterit, et quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ descriptionem quis imaginetur fuerit modo ex illarum numero ~~quas~~ quas Geometricas in prioribus appellavimus exhibere poterit semper inveniri æquatio qua omnia ejus puncta hac ratione determinantur. Exemplis aliquibus hactenus dicta porro illustrabimus;

Instrumentum hujusmodi Duæ regulæ aperiri possunt et claudi circa Y his insertæ sunt plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G. ea lege ut dum regulæ YZ, YX aperiuntur norma BC impellat normam CD in regula YZ et norma CD impellat normam DE in regula YX et DE impellat EF et EF impellat FG et sic deinceps. Cum vero regulæ YX et YZ clauduntur omnia puncta B, C, D, E, F, G incidunt in unum idemque punctum; jam vero dum sic aperiuntur anguli XYZ puncta D, F, H ubi regularum intersectiones fiunt describunt curvas AD et AF et AH; quarum ultima generis sunt lineæ, sit itaque pro indaganda natura lineæ AD YB seu YA $\propto a$, YC $\propto x$, CD $\propto y$ tunc fiat propter Triangula similia YCD et YBC ut

$\frac{YC}{x} \;—\pi—\; \frac{CD}{y} \;—\pi—\; \frac{YB}{a} \;—\pi—\; \frac{BC}{\frac{ay}{x}}$ jam □tum YB + □ BC $\propto$ □ YC hoc est $\frac{aayy}{xx} + aa \propto xx$

fit $aayy + aaxx = x^4$ unde e ex superioribus patet lineam hanc AD 2di generis esse

Sit 2do $YE = x$, $EF = y$ caeteris ut antea retentis erit propter triang: simil:

YEF et YDC ut $\frac{YE}{x} = \frac{EF}{y} = \frac{YD}{a} = \frac{DC}{\frac{ay}{x}}$ jam per 47. lib: 1 quadratum YD +

quadratum DC = quadratum YC unde $YC = \sqrt{\frac{aayy+aaxx}{xx}} = d$ jam fiat denuo per 8. 6ti ~~propter triang:~~

~~similia~~ ut $\frac{YD}{a} = \frac{YC}{d} = \frac{YC}{d} = \frac{dd}{a} = YD$ fiat denique propter triang:

sim: YEF et YDE ut $\frac{YE}{x} = \frac{EF}{y} = \frac{YD}{\frac{dd}{a}} = \frac{DE}{\frac{ddy}{ax}}$ jam quadratum YD + quadratum DE = quadratum YE

hoc est $\frac{d^4yy}{aaxx} + \frac{d^4}{aa} = xx$ omnibusque multiplicatis per $aaxx$ erit

$d^4yy + d^4xx = aax^4$ restitutoque jam d erit

$aay^6 + 3aaxxy^4 + 3aax^4yy + aax^6 = x^8$ unde e ex superioribus patet

lineam AF esse 3tii generis.

Sit 3tio $YG = x$, $GH = y$, erit itaque primo propter triang: simil: YGH et YDC ut

$\frac{YG}{x} = \frac{GH}{y} = \frac{YD}{a} = \frac{DC}{\frac{ay}{x}}$ jam quadratum YD + quadratum DC = quadratum YC unde est $YC = \sqrt{\frac{aayy+aaxx}{xx}}$ [illegible]

hincque per 8vam 6ti erit ut

$\frac{YD}{a} = \frac{YC}{d} = \frac{YC}{d} = \frac{dd}{a} = YD$ fiat propter triang: simi: YGH et YDE ut

$\frac{YG}{x} = \frac{GH}{y} = \frac{YD}{\frac{dd}{a}} = \frac{ddy}{ax} = DE$ jam denuo rectum YDE erit $YE = \sqrt{\frac{d^4yy+d^4xx}{aaxx}} = c$

hincque per 8vam 6ti erit ut

$\frac{YD}{\frac{dd}{a}} = \frac{YE}{c} = \frac{YE}{c} = \frac{acc}{dd} = YF$ tertio ~~[illegible]~~ propter triang: sim: YGH et YFG

$\frac{YG}{x} = \frac{GH}{y} = \frac{YF}{\frac{acc}{dd}} = \frac{accy}{ddx} = FG$ unde quadratum YF + quadratum FG = quadratum YG hoc est

$aac^4xx + aac^4yy = d^4x^4$ restitutoque jam c

erit $d^4x^6 + 3d^4y^4xx + 3d^4x^4yy + d^4y^6 = aax^8$ ~~restituta~~ [illegible] jam d

~~erit $aay^{10} + 10aay^8x^6 + 5aay^8xx + 5$~~

erit $aay^{10} + 5aay^8xx + 10aa$ [illegible] $+ 10aay^4x^6 + 5aay^2x^8 + aax^{10} = x^{12}$

Unde patet lineam hanc AH 4ti esse generis atque sic eadem prorsus ratione calculum continuantes congeriemus lineas proxime sequentes esse 8tavi generis, hinc 10 atque sic porro in infinitum: Obiter notare poteris Hoc instrumento inter duas datas non solum duas sed etiam 4tuor et 6 imo quotvis medias reperiri proportionales medijs atque e normis tribus pro medijs 4tuor 5 et sic deinceps. Minor datarum transferatur in regula YX et YD major in regula altera YE et YE. applicetur norma prima ad punctum D ibidemque firmetur et agerantur regulae donec norma tertia latus transeat per E, eruntque YC et YD mediae quaesitae; Demonstratur: manifestum est ex 8 6ti. Nam ex natura instrumenti in trigono YCD angulus ad C rectus ab eoque cadit CD perpendicularis in basin YD unde per dictam prop: erit ut YD est ad YC sic YC est ad YD, deinde quia in trigono YDE angulus ad D est rectus ab eoque cadit perpendicularis DC in basin YE erit ut YC ad YD sic YD ad YE, ~~[illegible]~~ Si inter duas YB et YG petantur 4tuor mediae, aperi regulas donec norma quinta latus FG transeat per G, eruntque YC, YD, YE, YF quatuor mediae in

a YE [illegible]

sitq[ue] ex curvis [FAC] talis naturae, ut ~~FAC~~ assumpto quolibet puncto C ducta perpendiculari BC ▭tu AC semper sit aequale ▭lo quod fit ab DE data quadam linea + AB in AB; quaeritur cujus generis sit curva, sit AB $\propto$ x BC $\propto$ y DE $\propto$ a unde ▭lum AB + DE in DE hoc est

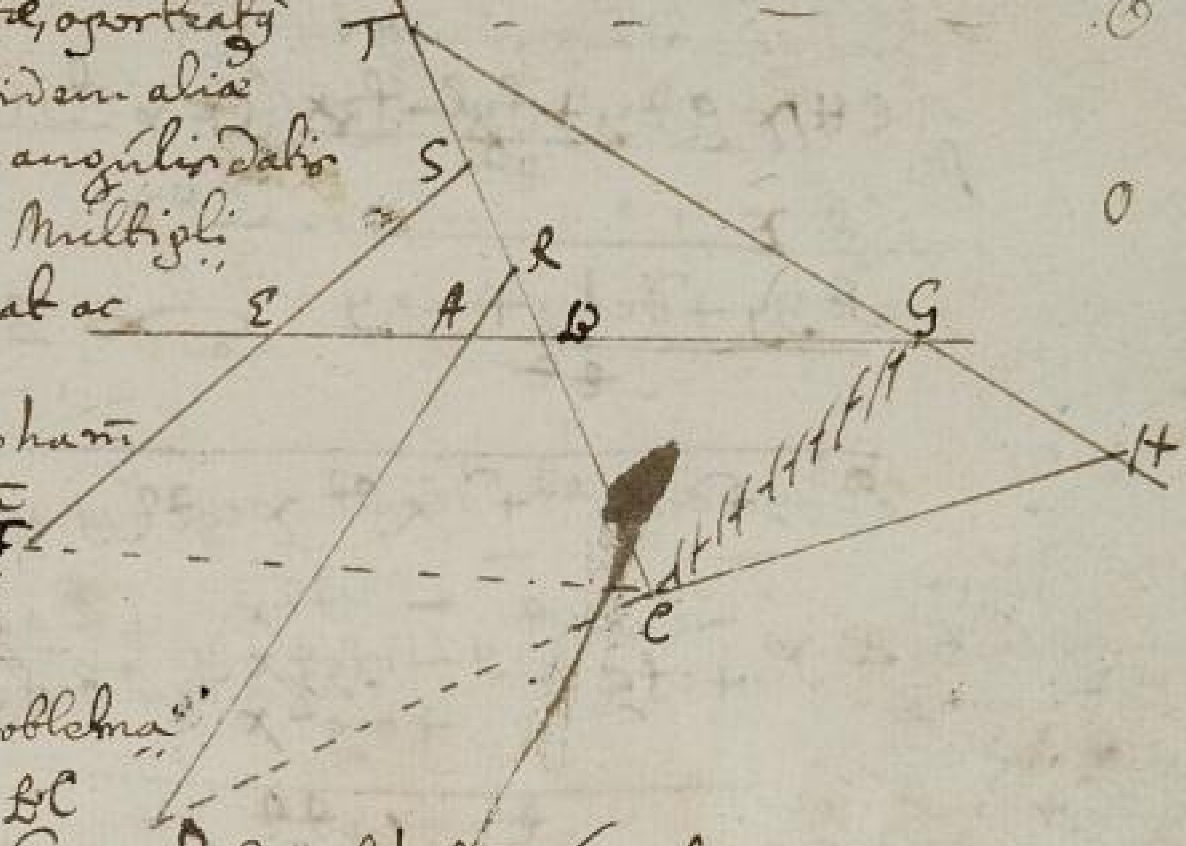
$ax + \cancel{xx} \propto$ erit $\cancel{xx} + yy \propto$ □to AC, quo 47. libr.

unde $ax \propto yy$ id quod indicat hanc esse

primi generis esse ea ipsa Parabola:

Sint tertio lineae AB, AD, EF et GH positione datae, oporteatq[ue] invenire punctum ut C a quo si ducantur totidem aliae ad positionem datas ut CB, CD, CF et CH in angulis datis CBA, CDA, CFE, CHG, ut hoc quod producitur ex Multiplicatione linearum CB et CF tantundem producat ac CD Multiplicata per CH:

Primo itaq[ue] rem ut jam factam suppono, atq[ue] ut ex hac omnium linearum confusione me expediam considero unam ex datis atq[ue] unam ex quaesitis exempli gratia AB ~~exempli gratia AB~~ et CB velut praecipuas, ad quas tota solutio problematis determinatur, ponendo nimirum AB vocari x BC



$\propto$ y aliasq[ue] lineas datas omnes productas esse donec secent hasce duas etiam productas si opus fuerit prout hic apparet illas secare: Deinde quia omnes anguli trianguli ARB dati sunt, data quoq[ue] erit ratio quae est inter ejus latera AB et BR quam pono ut z π b ita ut cum AB sit x RB futura sit $\frac{bx}{z}$ CR autem $y + \frac{bx}{z}$ siquidem punctum B cadit inter puncta [C et R] nam si R caderet inter C et B CR esset $y - \frac{bx}{z}$ sin vero C caderet inter B et R CR foret $-y + \frac{bx}{z}$ similiter dantur quoq[ue] tres anguli trianguli DRC unde et ratio quae est inter latera CR et CD quam pono ut z π c itaut cum CR sit $y + \frac{bx}{z}$ CD futura sit $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$ postea quia lineae AB, AD et EF positione datae sunt data quoq[ue] erit distantia puncti A a puncto E quam si nominetur k habebitur EB $\propto$ k + x foret autem ipsa k − x si punctum B caderet inter E et A at vero −k + x si E caderet inter A et B. Rursus quoniam anguli trianguli ESB omnes dantur, dabitur quoq[ue] ratio lateris BE ad BS quam si ponam esse ut z ad d BS fiet $\frac{dk + dx}{z}$ CS vero $\frac{zy + dk + dx}{z}$ quamquidem foret $\frac{zy - dk - dx}{z}$ si punctum S caderet inter B et C at vero $\frac{-zy + dk + dx}{z}$ si C caderet inter B et S porro dantur tres anguli trianguli FSC et consequenter ratio ipsius CS ad CF quae sit ut z π e unde tota CF erit $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$ eodem modo data est AG quam voco l unde BG erit l − x et quia in triangulo BGT ratio ipsius BG ad BT data est quam ~~fit~~ ut z π f erit BT $\propto$ $\frac{fl - fx}{z}$ et CT $\propto$ $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Rursus propter triangulum TCH data est ratio ipsius CT ad CH quam si ponam ut z π g habebitur CH $\propto$ $\frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$ ubi velim notes me ~~rationes~~ angulorum datorum ut z ~~ad~~ b, c, d, e, f, g ideo quia si rationes referantur in quibus Antecedenter semper eadem calculus br[...]dit, hoc [...] ratio angulorum [...] ut m π n, alterius trianguli [...] tertii [...] ut rationes hae ad tales referantur ut antecedentes

$m \;\pi\; n \;\pi\; z \;\pi\; \frac{nz}{m}$ | ~~[illegible]~~ obtinimus ita loco harum rationum $m \;\pi\; n$, $o \;\pi\;$
$o \;\pi\; s \;\pi\; z \;\pi\; \frac{sz}{o}$ | et $g \;\pi\; r$, sequentes $z \;\pi\; \frac{nz}{m}$, $z \;\pi\; \frac{sz}{o}$ et deinde $z \;\pi\;$
$g \;\pi\; r \;\pi\; z \;\pi\; \frac{rz}{g}$ | $\frac{rz}{g}$ cum autem $\frac{nz}{m}$, $\frac{sz}{o}$ et $\frac{rz}{g}$ notae sint ponantur $\propto b\; c$ [illegible]

et inde rationes angulorum horum Triangulorum erunt ut $z \;\pi\; b$, ut $z \;\pi\; c$ et ut t,
et sic de aliis; ~~[illegible]~~ significans autem z quasi incognita esset ~~[illegible]~~ litera aliqua
alphabeti quo melius ~~[illegible]~~ praesertim aliis internosceretur, jam ad solutionem propositae quaestionis re-
vertamur in qua nihil amplius desideratur quam ut CB per CH et CD per CF multiplicetur pro-
ductaque sibi adaequentur et sibi utraque

$$M\left\{\begin{array}{l} CH \propto \cancel{\frac{gzy + fgl - fgx}{zz}} \\ \cancel{CB \propto y} \end{array}\right. \quad M\left\{\begin{array}{l} CF \propto \frac{ezy + dek + dex}{zz} \\ CD \propto y \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} CD \propto \frac{czy + bcx}{zz} \\ CH \propto \frac{gzy + fgl - fgx}{zz} \end{array}\right\} M.$$

$$\frac{ezyy + deky + dexy}{\cancel{zz}} \propto \frac{cgzzyy + bgcxyz + cegflzy + bcfglx - fcgxyz - bcfgxx}{\cancel{zz}}$$

$$ez^3yy + dekyzz + dexyzz \propto cgzzyy + bgcxyz + cegflzy + bcfglx - fcgxyz - bcfgxx$$

salte si suppo-
namus quanti-
tatem et majorem
quam cg nam
si minor foret
mutanda essent
omnia signa
+ et − praeterea

$$yy \propto \frac{\begin{array}{l} -dekzz \\ +cfglz \end{array} y \begin{array}{l} -dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx \end{array} y \begin{array}{l} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{array}}{ez^3 - cgzz}$$

~~, notandum autem quaestionem parte adaequuenti aliorum linearum numerum explendi; posse;~~

etiam observandum quod nimi: si in hac aequatione quantitas y nulla sit
aut minor quam nihil posito punctum C supposuimus in angulo DAG exorbitet et il-
lud supponere in angulo DAE aut EAR aut etiam DAG mutando signa + et − prout ad
effectum hunc requiratur, Quod si vero in quatuor hisce positionibus valor ipsius y nullus
reperiatur indicio esset quaestionem esse impossibilem. ~~Adverte~~ Quod quoque licet quaestio
haec tantum de quatuor lineis exhibita eandem tamen ad omnem linearum numerum exten-
dere posse ~~[illegible]~~ ab simili methodo quam habemus ubi sumus ~~agerendo~~; ~~[illegible]~~ ubi ex praecedentibus
quaestionibus sicque una conditio deficiat sint prorsus determinata veluti ex praesentibus
videre licet, Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea
et sic quoque in infinitum alia atque alia pro linea x atque ita obtinebitur infinitus nu-
merus punctorum C quorum ope certa curva linea describitur. Sciendum quoque si tantum 3 et
recta deinde linea curva qua haec puncta reperientur aliqua esse primi generis et
cum non plures quam 8 lineae datae sint quaesita lineam ad summum secundi generis sit et quo-
niam non plures quam 12 lineae rectae datae sint quaesita linea ad summum tertii ge-
neris existat atque ita de reliquis. Cum etiam quoniam datarum rectarum positio omnifariam
variari posse et per consequens mutare tam quantitates cognitas quam signa + et −
ipsius aequationis modis omnibus qui sibi quis imaginari possit. evidens est nullam primi
generis curvam lineam reperiri quae ad hanc quaestionem non sit utilis quando illa in 4 lineis
est proposita, neque ullam secundi quae ibidem non inserviat quando in 8 lineis est proposita
~~[illegible]~~ nullam tertii quando illa in 12 lineis est proposita et sic de reliquis
[illegible] ulla curva linea quae sub calculum cadat atque in geometria recipi potest
quibus est ibidem ad aliquem linearum numerum non sit utilis.
ARE 4 inventa ~~[illegible]~~ ratio quoad ejusdem ordinationem, Terminorum [illegible]
donec data la[illegible] quantitatis [illegible] terminatam ablatione

Pro diminutione sequens schema:

$$\begin{array}{lllll}
y^4 & + 4ey^3 & + 6eey^2 & + 4e^3y & + e^4 \\
 & \pm ay^3 & \pm 3aey^2 & \pm 3aeey & \pm ae^3 \\
 & & \pm by & \pm 2bey & \pm be^2 \\
 & & & \pm cy & \pm ce \\
 & & & & \pm d
\end{array}$$

Notandum hic praeterea ea ipsa schemata inservire quoque tam auctioni quam diminutioni minoris di-mensionis aequationum

$m \;\pi\; n \;\pi\; t \;\pi\; \frac{nt}{m}$

$o \;\pi\; p \;\pi\; t \;\pi\; \frac{pt}{o}$

$q \;\pi\; r \;\pi\; t \;\pi\; \frac{rt}{q}$

~~[illegible]~~ obtinui[illegible] loco harum rationum $m \;\pi\; n$, $o \;\pi\; p$ et $q \;\pi\; r$, sequentes $t \;\pi\; \frac{nt}{m}$, $t \;\pi\; \frac{pt}{o}$ et eandem $t \;\pi\; \frac{rt}{q}$ cum ante $\frac{nt}{m}$, $\frac{pt}{o}$ et $\frac{rt}{q}$ notae substituantur a. b c

et inde rationes angulorum horum Triangulorum erunt ut $t \;\pi\; b$, ut $t \;\pi\; c$ et ut [illegible]

et sic de alijs. designavimus ante t quasi incognita esset ~~[illegible]~~ literam aliqua alphabeti quo melius ~~[illegible]~~ aliis interno[illegible], jam ad solutionem propositae quaestionis [illegible] vertamur in qua nihil amplius desideratur quam ut CB et CH et CD et CF multiplicatae [illegible] ductaque sibi adaequentur sibi[illegible]

$$M\left\{\begin{array}{l} CH \propto \frac{gty + fgl - fgx}{zt} \\ CB \propto y \end{array}\right. \quad M\left\{\begin{array}{l} CF \propto \frac{cty + dek + dex}{zt} \\ CD \propto y \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} CD \propto \frac{cty + bcx}{zt} \\ CH \propto \frac{gty + fgl - fgx}{zt} \end{array}\right\} M.$$

$$\frac{ctyy + deky + dexy}{zt} \propto \frac{cgttyy + bgcxyt + cgflty + bcfglx - fcgxyt - bcfgxx}{zt}$$

$$ct^3yy + dekytt + dexytt \propto cgttyy + bgcxyt + cgflty + bcfglx - fcgxyt - bcfgxx$$

$$yy \propto \begin{array}{l} -dekzt \\ +cfglt \end{array} y \begin{array}{l} -dettx \\ -cfgtx \\ +bcgtx \end{array} y \begin{array}{l} +bcfglx \\ -bcfgxx \end{array}$$

, ~~nos [illegible] quaestionem [illegible] ad inveniendum aliquem linearum numerum explendi [illegible]~~

salte si suppo[illegible] quanti[illegible] [illegible] et majore quae [illegible] si minor foret mutanda essent omnia signa [illegible] praeterea

Caeterum Auctio quam diminutio facillime juxta sequentia calculo expediuntur sit aequatio proposita $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$ pro qua sequens substituatur $x^4 * ax^3 . bx^2 . cx . d \propto 0$ Auctionis vel diminutionis quantitas sit $\propto e$ tum pro auctione sequens schema con[illegible]

$$\begin{array}{lllll} y^4 - 4ey^3 & + 6eey^2 & - 4e^3y & + e^4 \\ \pm\; ay^3 & \mp\; 3aey^2 & + 3aeey & \mp\; ae^3 \\ & \pm\; by & \mp\; 2bey & \pm\; be^2 \\ & & \pm\; cy & \mp\; ce \\ & & & \pm\; c \end{array}$$

quae primum in qua libet serie signa assumenda proposita aequatio ~~[illegible]~~bit; quae in sequentibus ejusdem seriei terminis praesens schema:

[illegible] plures quam 8 lineae datae sint quaesita linea ad summum [illegible] primi generis et [illegible] plures quam 12 lineae rectae datae sint quaesita linea ad summum tertij generis existat atque ita de reliquis. Cum etiam quoniam datarum rectarum positio [illegible] variari potest et consequenter mutare tam quantitates cognitas quam signa + et - ipsius aequationis modis omnibus quos sibi quis imaginari possit: evidens est nullam primi generis curvam lineam reperiri quae ad hanc quaestionem est utilis quando illa in 4 lineis est proposita; nec ullam secundi quae ibidem non inserviat quando in 8 lineis est proposita; nec ullam tertij quando illa in 12 lineis est proposita et sic de reliquis [illegible]

[illegible] illa curva linea quae sub calculum cadit atque in Geometria recipi potest [illegible] est ibidem ad aliquem linearum numerum non sit utilis.

[illegible] inventa ratio quoad ejusdem ordinationem, Terminorum [illegible]

donec [illegible] quantitatis [illegible] terminatarum ablatione