TRAITÉ DU MOUVEMENT, ET DE LA MESURE DES EAUX COULANTES ET JAILLISSANTES.

AVEC UN TRAITÉ PRELIMINAIRE du Mouvement en general.

Tiré des Ouvrages Manuscrits de feu Monsieur VARIGNON, *par M. l'Abbé* PUJOL.

Dedié à Monseigneur le Duc DE DURAS.

A PARIS,
Chez PISSOT Libraire, Quai des Augustins, à la descente du Pont-Neuf, à la Croix d'Or.

M. DCC. XXV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

A

MONSEIGNEUR

DE DURAS,

DUC ET PAIR DE FRANCE,

Lieutenant General des Armées du Roy, Commandant en Chef pour Sa Majesté dans la Province de Guyenne, &c.

MONSEIGNEUR,

Je prends la liberté de vous presenter ce Traité sur le Mouvement & la Mesure des Eaux. J'ai crû, MONSEIGNEUR, *qu'une matiere si agréable & si utile ne seroit pas indigne de votre attention. Les differens mouvemens des Eaux font aujourd'hui le plus bel agrément des principaux Jardins de la France & de l'Italie. La merveilleuse Machine de Marly & les Jets d'eaux sans nombre du magnifique Parc de Versailles, montrent assez que les plus grands Héros & les plus grands Rois en ont fait l'objet de leurs amusemens & de leurs plaisirs. Et pour l'utilité,* MONSEIGNEUR, *personne n'ignore ce que des Eaux bien conduites & bien ménagées peuvent porter dans un Pays, de richesses & d'abondance.*

Que ne m'est-il permis, MONSEIGNEUR, *de relever ici votre haute naissance & toutes vos grandes qualitez personnelles ? les Princes de la Maison souveraine de Foix dont vous descendez, & Monseigneur le Maréchal Duc de Duras, Chevalier des Ordres du Roy, votre illustre Pere, par toutes ses grandes actions dans l'Art militaire, ont rendu votre nom si celebre & si respectable dans la France, dans l'Italie & dans toutes les* *autres parties de l'Europe, que rien ne ſemble pouvoir augmenter ſon éclat.*

J'oſerai pourtant dire, MONSEIGNEUR, *qu'il reçoit de votre Perſonne un nouveau luſtre. Les marques de courage & de valeur que vous avez données dans la Guerre, & qui vous ont procuré la dignité de Lieutenant General des Armées du Roy, les ſervices que vous rendez continuellement à l'Etat avec tant de zele & d'attachement pour Sa Majeſté, & cette application infatigable aux affaires dans la Province dont le Roy vous a confié le Commandement; cet air aiſé & ces manieres gracieuſes & pleines de bonté qui vous attirent tous les cœurs, ſont autant de preuves de la gloire que vous ajoûtez chaque jour à celle de vos Ancêtres.*

Ce n'eſt pourtant pas la ſeule grandeur de votre nom, MONSEIGNEUR, *qui m'a engagé à vous offrir cet Ouvrage, né dans une Ville plus diſtinguée encore par l'honneur de votre preſence & de votre protection, que par l'agrément de ſa ſituation, & la politeſſe de ſes*

Habitans, pouvois-je me dispenser d'un si juste hommage?

Je suis avec un très-profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-
obéïssant serviteur,
l'Abbé PUJOL.

PREFACE.

LE petit Traité qu'on donne au Public, est tiré principalement de quelques Ouvrages manuscrits de feu M. Varignon ; ainsi il n'a pas besoin d'une longue Préface pour en relever le merite : le titre seul, & le nom d'un si grand Mathematicien suffisent pour faire l'éloge de l'Ouvrage, qui certainement est très-recommandable par l'importance de la matiere, puisqu'il n'y a peut-être point de Science naturelle qui fournisse aux hommes de plus grands avantages que celle qui traite du Mouvement & de la Mesure des Eaux. C'est par les connoissances qu'on en tire, que l'on a trouvé tant de Machines admirables pour faire servir les Eaux tant à notre utilité qu'à notre plaisir. Que de commoditez ne s'est-on pas procurées pour les usages les plus ordinaires de la vie, par le moyen de l'eau, suivant les differens emplois qu'on en a fait, après avoir connu les differens rapports entre les mouvemens, les vîtesses, les quantitez & les forces des eaux ? Que de spectacles gracieux a-t'on offert à la vûë dans les Jets d'eaux & dans les Cascades ? L'on voit à ce sujet un exemple bien sensible de l'utile & de l'agréable réünis ensemble dans les Jardins de Versailles, & à Marly dans cette fameuse Machine, où l'on peut assurer que l'Art a pleinement triomphé de la Nature.

Aussi quantité de grands Auteurs convaincus de l'utilité de cette matiere, se sont appliquez à l'éclaircir : mais les uns se sont contentez de rapporter les experiences, sans donner des démonstrations ; les autres voulant démontrer une matiere si necessaire, l'ont fait par la Géométrie seule ; ce qui a rendu leurs démonstrations très-difficiles & très-embarrassantes, par la multitude de lignes qu'il falloit tirer, l'attention s'en trouvant necessairement trop partagée, & par-là très-sujette à perdre de vûë le principal objet. D'ailleurs la Géométrie ne fournissant point de démonstrations generales, ces Auteurs ont été obligez d'en faire presque autant de nouvelles qu'il se rencontre de cas particuliers.

Pour éviter les inconveniens, l'on a employé le Calcul algébrique dans presque toutes les démonstrations de ce Traité : car cette derniere méthode de démontrer a de grands avantages par dessus l'autre. Premierement, les démonstrations par l'Algébre sont incomparablement plus aisées ; elles n'exigent pas de grandes contentions d'esprit, & il ne faut quelquefois que deux ou trois traits de plume pour les trouver. En second lieu, l'Algébre fournit des démonstrations generales, d'où l'on tire aisément par maniere de Corollaires tous les cas particuliers qu'il faudroit démontrer de nouveau par des lignes & des figures, en se

servant

ſervant de la Géométrie. Ce ſecond avantage de l'Algébre eſt ſi conſiderable, que l'on verra que d'une ſeule ou de deux propoſitions l'on a tiré ſans la moindre difficulté tout ce qui eſt contenu dans ce Traité, & que le Livre entier de Guillelmini, qui étant le plus achevé ſur cette matiere, & celui auquel on s'eſt ſur-tout attaché, ſuit très-clairement de très-peu de Corollaires de quelque propoſition fondamentale de notre Livre.

De plus les regles que nous avons données ſur le Mouvement & la Meſure des Eaux, ſont d'une fecondité ſi merveilleuſe, que l'on en pourroit tirer avec la même facilité toutes les queſtions particulieres dans tous les cas poſſibles, non ſeulement ſur le mouvement des Eaux & ſur leurs forces dans les differentes Machines que l'on peut conſtruire, mais même encore ſur le mouvement & l'équilibre des Liqueurs quelles qu'elles ſoient. L'on voit combien des regles ſi generales peuvent porter de lumieres ſur une grande partie de la Phyſique; il n'y a qu'à en faire l'application. La Méchanique des Animaux, par exemple, peut en recevoir un grand jour: car le corps de l'animal étant une vraye machine, où l'on ne voit que tuyaux & liqueurs, il eſt évident qu'en déterminant par nos regles les loix du mouvement de ces fluides, leur peſanteur & leurs forces, on pourroit par ce moyen arriver à une connoiſſance exacte & certaine des differentes fonctions du corps, c'eſt-à-dire, de l'économie animale.

Il eſt vrai que pour-cela il faut bien des recherches ſur la ſtructure des organes, & que l'on a bien plûtôt fait d'imaginer un acide & un alkali, & mille autres idées de cette eſpece, que d'examiner avec un ſoin ſcrupuleux la ſituation des tuyaux qui compoſent notre corps, leurs diamétres, leurs longueurs, leurs courbures, le poids des differens liquides qui coulent dans divers canaux, &c. Cela ſoit dit en paſſant, peut-être qu'un jour l'on pourra traiter cette matiere au gré de ceux qui aiment plus la verité que les ſyſtêmes.

Le Traité des Eaux tel que nous le donnons, demande donc une connoiſſance des regles de l'Algébre; mais comme on a voulu le rendre le plus élementaire qu'il étoit poſſible, on n'y a ſuppoſé le Lecteur que très-mediocrement inſtruit de ce Calcul. C'eſt pourquoi lorſqu'on a eu beſoin de quelques regles d'Algébre qui auroient pû paroître un peu difficiles à des gens qui n'en ſçavent que très-legerement les élemens, l'on a pris le parti d'expliquer ces regles par maniere de Lemme, afin de ne rien laiſſer qui pût embarraſſer les Commençans. C'eſt dans cette même vûë qu'ayant ſuppoſé que le Lecteur ſçût tout au plus les premiers élemens de la Géométrie des lignes & des ſurfaces, l'on a expliqué pareillement ce qui étoit neceſſaire à ſçavoir ſur la Géométrie des ſolides & les proprietez de la Parabole: & on l'a fait d'une maniere ſi claire, qu'on eſt perſuadé que ces propoſitions n'arrêteront perſonne.

Pour venir maintenant au Traité en lui-même ; l'on ſent aſſez qu'il eſt ſur le Mouvement & la Meſure des Eaux ; il faut pour l'entendre parfaitement avoir quelque connoiſſance du Mouvement en general : c'eſt pour cela que nous avons crû devoir mettre à la tête de notre Ouvrage un petit Abregé ſur cette derniere matiere. L'on ne s'eſt point borné dans cet Abregé à donner ſeulement ce qui eſt néceſſaire pour l'intelligence de notre Traité ; mais on a tâché d'expliquer tout ce qu'il y a de plus utile & de plus curieux à ſçavoir en general ſur le Mouvement uniforme, & ſur le Mouvement acceleré ; ainſi nous diviſons ce Traité préliminaire en deux Sections : Dans la premiere on explique tout ce qui regarde le Mouvement uniforme, c'eſt-à-dire, qui ſe fait avec des vîteſſes toujours égales. Dans la ſeconde on traite du Mouvement acceleré, c'eſt-à-dire, dont les vîteſſes vont toujours en augmentant ; c'eſt le Mouvement qui eſt propre aux corps graves, & dont Galilée a parlé le premier. Les regles que l'on a données ſur ces Mouvemens, ſont toutes démontrées par l'Algébre, & la plûpart d'entr'elles ſervent même de fondement à celles qui concernent le Mouvement & la Meſure des Eaux ; de maniere qu'il paroîtra que l'on a ſuivi par tout une même & unique méthode. Il n'eſt pas hors de propos de faire remarquer en paſſant que le grand usage que l'on fait de l'Algébre dans tout cet Ouvrage, apprendra aux Commençans, sans même qu'ils s'en apperçoivent, la maniere d'employer l'analyse simple dans les recherches que l'on peut faire sur toutes sortes de matieres; & cela seul n'est pas d'une petite utilité.

Dans le Traité des Eaux l'on donne, premierement, toute la théorie du Mouvement & de la Mesure des Eaux coulantes, & cela par des regles qui, comme on l'a déja remarqué, sont si universelles & si fécondes, qu'il n'y a point de proposition sur le mouvement & les forces des liquides qui n'y soit comprise, ou qui n'en puisse être déduite. Delà l'on passe à quelques Problêmes qui suivent naturellement des regles établies : l'on auroit pû de ces mêmes régles tirer encore bien d'autres Problêmes; mais la chose est si aisée, que l'on n'a pas crû devoir grossir le Livre de Propositions pratiques qui se trouvent dans tous les Auteurs, & dont la démonstration sautera aux yeux, par l'emploi que l'on fera de nos Formules algébriques. L'on parle ensuite des Eaux qui jaillissent; comme tout ce qui a été dit des Eaux coulantes, convient parfaitement aux jaillissantes, & y doit être rapporté; l'on se contente seulement d'expliquer ce qui regarde les Jets d'eau en eux-mêmes; & quoiqu'on le fasse en peu de mots, on ne laisse cependant rien à desirer. L'on finit enfin par des régles que l'on donne & qu'on démontre pour déterminer les différentes épaisseurs que doivent avoir les tuyaux des Aqueducs, suivant les différens diametres de ces tuyaux, & les différentes hauteurs des Fontaines.

Aprés tout ce qui vient d'être dit, l'on doit être convaincu que ce petit Traité ne cede en rien à ceux que nous avons ſur la même matiere : il eſt vrai que quelques-uns de ceux-ci entrent plus dans le détail de certaines pratiques, & paroiſſent par là plus étendus ; mais auſſi notre Traité donnant des regles generales qui comprennent tout ce qu'il y a de particulier dans ces Auteurs, & même qui menent au de là ; il eſt clair qu'il eſt beaucoup plus univerſel, & qu'il leur eſt en cela préferable, &c.

Enfin il me ſemble que ce ſeroit faire tort à la Republique des Lettres, de la priver d'un Ouvrage qui vient originairement d'un des plus grands Mathematiciens de Paris, dont on regrette encore la mort, & dont j'ai eu le bonheur d'être le diſciple. Je croirois même manquer à la reconnoiſſance que je lui dois, ſi je ne faiſois part au Public ſçavant, d'un Ecrit où je n'ai fait que ſuivre les principes & les régles de Calcul d'un ſi grand Maître. Ce qui doit le rendre bien plus recommandable, & c'eſt pour cela que j'ai crû devoir mettre ſon nom à la tête.

On ſera peut-être bien-aiſe de voir en François & dans un ſeul Corps, pluſieurs Propoſitions curieuſes & importantes ſur les Eaux, qui étoient en

Latin, & dispersées de côté & d'autres dans divers M. nuscrits de M. Varignon, & même dans quelques Memoires que ce grand homme a donné à l'Academie des Sciences, ausquels on a eu recours quelquefois. En un mot, on n'a rien negligé pour rendre cet Ouvrage facile & complet ; c'est pour cela qu'on a été obligé d'ajoûter bien des choses, & de mettre un certain ordre dans les matieres, comme on a averti plus haut ; de sorte que dans l'état où est presentement le Traité, on espere qu'on le trouvera clair & trés-methodique, & que la Jeunesse en retirera un grand profit, ou du moins qu'il donnera occasion à quelque Sçavant d'en faire un plus parfait.

APPROBATION.

J'AY lû par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, un Manuscrit intitulé : *Traité du Mouvement des Eaux coulantes & jaillissantes* : cet Ouvrage m'a paru démontré par une methode courte & facile, qui me fait croire qu'il sera utile au Public. A Paris le 18. Janvier 1725.

MAHIEU.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civil, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut : Notre bien amé NOEL PISSOT, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui auroit été mis en main, *un Traité du Mouvement & de la Mesure des Eaux coulantes & jaillissantes*, par M. Varignon, & *Clovis, Poëme* ; qu'il souhaitteroit faire imprimer & donner au Public, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires. A ces causes voulant traitter favorablement ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Presentes de faire imprimer lesdits Livres en tels Volumes, forme, marge, caractere, conjointement ou séparement, & autant de fois que bon lui semblera ; & de le vendre, faire vendre & debiter par tout notre Royaume pendant le tems de *huit années* consécutives, à compter du jour de la datte desdites Presentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, ni débiter, contrefaire lesd. Livres en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts ; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impression de ces Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou l'Imprimé qui aura servi de copie à l'impression desdits Livres, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur Fleuriau d'Armenonville, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Gardes des Sceaux de France le sieur Fleuriau d'Armenonville ; le tout à peine de nullité des Presentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Livres, soit tenue pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conseillers-Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autres permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt deuxiéme jour du mois de Mars l'an de grace mil sept cens vingt-cinq, & de notre Regne le dixiéme. Par le Roy en son Conseil.

DE SAINT-HILAIRE.

Registré sur le Registre VI. de la Chambre Royale des Imprimeurs & Libraires de Paris No 214. fol. 176. conformement aux anciens Reglemens, confirmez par celui du 28. Février 1723. A Paris le 26. Mars 1725.

BRUNET, Syndic.

TRAITE'

TRAITÉ PRELIMINAIRE DU MOUVEMENT.

SECTION PREMIERE.

Du Mouvement uniforme.

L'On conçoit assez ce que c'est que le Mouvement; mais il n'est pas si aisé d'en donner une définition exacte. C'est pourquoi sans vouloir l'entreprendre, il nous suffira de remarquer que tout le monde convient qu'il y a réellement du Mouvement, lorsque la distance qui est entre deux ou plusieurs corps, change, soit que ce Mouvement appartienne à un seul de ces corps, ou qu'il appartienne à tous.

DEFINITION I.

La diſtance qui ſe trouve entre ces corps, eſt appellée *eſpace*.

AXIOME I.

Pour que la diſtance entre deux ou pluſieurs corps vienne à changer, il eſt évident qu'il ne ſuffit pas que ces corps exiſtent ſimplement, mais qu'il faut encore qu'il leur ſurvienne quelque autre choſe.

DEFINITION II.

C'eſt cette autre choſe, quelle qu'elle ſoit, que j'appelle *force motrice*, ou *cauſe* du Mouvement qui eſt ſon *effet*.

DEFINITION III.

L'application de la force motrice au corps mû, étant conſiderée par rapport à la force motrice elle-même, eſt appellée *action*; mais conſiderée par rapport au corps mû, ou au changement que la force motrice y fait, elle eſt nommée *impreſſion*.

AXIOME II.

Les effets ſont proportionnels à leurs cauſes, puiſqu'elles ne ſont cauſes qu'autant qu'elles produiſent des effets.

COROLLAIRE I.

Donc tant que la force motrice n'eſt point appliquée aux corps, ou qu'elle n'agit ſur aucun de deux corps qui paroiſſoient s'approcher ou s'éloigner l'un de l'autre, cette force ſera par rapport à ces corps, comme ſi elle n'étoit pas.

COROLLAIRE II.

Donc la force motrice doit toûjours être appliquée à l'un ou à l'autre corps, ou bien à tous les deux, pour que la diſtance qui eſt entr'eux vienne à changer.

DEFINITION IV.

Ce changement de diſtance conſideré par rapport au corps ſur lequel agit la force motrice, eſt appellé *Mouvement*.

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit que de deux corps dont la diſtance change entr'eux, le Mouvement appartient à celui auquel eſt appliquée la force motrice.

COROLLAIRE II.

Mais comme un ſeul & même corps peut changer de diſtance par rapport à certains corps, ſans en changer par rapport à d'autres; il ſuit auſſi que ce corps peut être en même tems en mouvement par rapport aux uns, & en repos par rapport aux autres.

DEFINITION V.

Un *inſtant* eſt pris ici pour la plus petite portion de tems poſſible, & par conſequent doit être regardé comme un point indiviſible d'une durée quelconque.

AXIOME III.

Il n'eſt de l'eſſence d'aucun corps d'être ou toûjours en repos, ou toûjours en mouvement; car ſi cela étoit, ou il ſe remuëroit toûjours, ou toûjours il ſe reposeroit, quoi qu'il arrivât: ce qui eſt faux par l'experience.

COROLLAIRE I.

Donc tout corps eſt indifferent par lui-même pour le repos ou pour le mouvement.

COROLLAIRE II.

Il n'y a donc aucun corps qui puiſſe ſe procurer lui-même le moindre mouvement.

AXIOME IV.

Dans le même instant qu'il y a un effet, il y a aussi une cause efficiente qui le produit; puisque celle-ci ne sçauroit produire un effet, qu'en même tems l'effet ne soit produit.

COROLLAIRE.

Donc la cause & l'effet doivent coëxister, du moins pendant quelque tems.

AXIOME V.

Le mouvement est de sa nature essentiellement successif; car il a une si grande liaison avec le tems pendant lequel il se fait, que l'on ne sçauroit concevoir qu'un mouvement puisse se faire sans qu'il s'écoule du tems.

COROLLAIRE.

Donc, puisque les parties du tems ne sçauroient coëxister, les parties du mouvement auront necessairement le même sort.

AXIOME VI.

Un corps mis une fois en mouvement, ou bien y perseveré par lui-même, ou le mouvement imprimé au premier instant devient cause de celui qu'a le corps au 2e. 3e. instant, &c. ou la force motrice qui a mis d'abord le corps en mouvement, a communiqué à ce corps dès le premier instant tous les mouvemens qu'il doit avoir dans les instans suivans, pour être transporté dans les differentes parties de l'espace qu'il doit parcourir; ou enfin la force motrice qui a mis le corps en mouvement dans le premier instant, ou quelqu'autre force que ce soit, agissant toûjours sur le même corps dans le 2e. 3e. instant, &c. de la même maniere que dans le premier, fournit continuellement au corps mû de nouveaux mouvemens, pour remplacer les précedens qui s'évanoüissent.

AXIOME VII.

Lorsqu'un corps est continuellement poussé avec une vîtesse toûjours égale dans tous les instans de son mouvement, c'est-à-dire, quand il parcourt toûjours un espace égal en tems égal; il est évident qu'il est mû de la même façon, soit qu'il commence à se mouvoir, soit qu'il persevere dans son mouvement.

THEOREME I.

Il ne peut y avoir du mouvement en aucun tems sans une application actuelle de quelque force motrice au corps mû, c'est-à-dire, sans une action de la force motrice sur le corps mû, toûjours presente à tous les instans du mouvement.

DEMONSTRATION.

Lorsqu'un corps commence à se mouvoir, la force par laquelle il a ce mouvement (*cor.* 2. *ax.* 2. *& déf.* 4.) au premier instant A, n'a pas encore produit (*cor. ax.* 4.) le mouvement qu'il aura au second instant B, ou au troisiéme C, &c. car si cela étoit, le corps mû se trouveroit en un même instant dans toutes les parties differentes de l'espace, lesquelles cependant il ne doit parcourir (*ax.* 5.) que successivement.

L'on ne peut pas dire aussi (*ax.* 4.) que le mouvement qu'a le corps mû dans l'instant A, puisse être la cause d'un mouvement pareil qu'il doit avoir au second instant B; car (*cor. ax.* 5.) lorsque le mouvement du premier instant A existe, celui du second instant B n'existe pas encore; de même quand le mouvement du second instant B existe, celui du premier instant A est déja évanoüi: en un mot (*cor. ax.* 5.) l'un de ces mouvemens existant, il faut que l'autre ait disparu. Donc (*cor. ax.* 4.) aucun d'eux ne peut être la cause de l'autre.

L'on ne sçauroit dire encore (*cor.* 2. *ax.* 3.) que le corps mis en mouvement, y persevere de lui-même, de maniere qu'il se donne les mouvemens subsequens.

Donc (*ax.* 6.) de la même maniere que la force motrice a dû agir sur le corps au premier instant A (*cor.* 2. *axiome* 2. *& déf.* 4.) pour qu'il ait commencé à se mouvoir, de la même maniere aussi cette force motrice ou une autre quelconque, doit agir au second instant B sur le même corps, pour qu'il continuë de se mouvoir dans ce même instant B. L'on doit dire la même chose d'un troisiéme instant, & de tous les autres, pendant lesquels le corps sera mû. Donc il ne peut y avoir de mouvement en quelque petit espace de tems que ce soit, sans une application actuelle & presente à chaque instant de quelque force motrice au corps mû. *C. Q. F. D.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Qu'un corps continuë de se mouvoir dans un second instant B, ce mouvement continué est le même (*ax.* 7.) que si le corps n'avoit point été mû dans un premier instant A, mais qu'il commençât à se mouvoir seulement au second instant B avec une vîtesse égale à celle qu'il a en continuant son mouvement. Pareillement lorsque le même corps continuë de se mouvoir au troisiéme instant C, il est mû comme s'il commençoit à se mouvoir à cet instant C avec la vîtesse qu'il a en perseverant dans son mouvement, & qu'il n'eût point été mû auparavant dans les instans A & B. Il en est de même de tous les autres instans jusqu'au dernier. Donc quand un corps se meut, il est mû à chaque instant de la durée de son mouvement, comme s'il commençoit à se mouvoir à chacun de ces instans. Mais pour qu'un corps commence à se mouvoir au premier instant A, il faut (*cor.* 2. *ax.* 2. *& déf.* 4.) que quelque force motrice lui soit actuellement appliquée. Donc une pareille action de la force motrice sur ce corps lui est necessaire à chacun des instans B, C, D, &c. pour qu'il continuë de se mouvoir dans ces mêmes instans B, C, D, &c. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Puiſque le tems pendant lequel ſe fait un mouvement entier, eſt compoſé de pluſieurs petits tems ou inſtans; il faut donc que ce mouvement total ſoit auſſi compoſé d'autant de petits mouvemens. Et par conſequent la force motrice totale qui eſt neceſſaire pour produire la ſomme de tous ces petits mouvemens, doit être compoſée d'autant de forces partielles correſpondantes.

COROLLAIRE II.

L'on doit donc dire en general que la force motrice entiere requiſe pour produire le mouvement total d'un corps, eſt la ſomme des forces partielles correſpondantes à chaque inſtant de ce mouvement.

COROLLAIRE III.

D'où il ſuit que ſi un corps eſt pouſſé avec des forces toûjours égales, ou avec la même repetée à chaque inſtant du mouvement, la force totale qui meut le corps pendant tout le tems du mouvement, ſera égale au produit de la force motrice *initiale*, ou qui a mû le corps au premier inſtant, multipliée par tout le tems ou toute la durée du mouvement.

COROLLAIRE IV.

D'où il ſuit encore que les *momens* ou forces totales qui réſultent du degré des forces partielles égales, & de la durée de ces forces partielles, ſont entr'elles comme les produits des forces de l'application par les tems, ou, comme on l'a dit, ſont en raiſon compoſée des raiſons des tems & des forces premieres, c'eſt-à-dire, qu'une force F double d'une autre *f*, agiſſant pendant un tems T, double de celui *t*, pendant lequel agit l'autre *f*, la force totale de F ſera quadruple de celle de *f*: ſi la même force F eſt triple, & qu'elle agiſſe pendant un eſpace de tems triple, la force qui en réſultera ſera noncuple, &c.

DEFINITION VI.

Comme on prend plusieurs instans ou plusieurs parties indéfinies du tems pour un seul tems, de même plusieurs petits mouvemens seront considerez comme n'en faisant qu'un seul, à cause de leur succession non interrompuë : par la même raison aussi plusieurs petites forces motrices partielles seront prises toutes ensemble pour une seule force. Ces mots donc de *mouvement* & de *force motrice*, seront ici des noms collectifs, comme celui de *tems* ; de maniere que la somme de tous ces petits mouvemens qui se suivent pendant un certain tems sans interruption, sera appellée *mouvement total*, ou *mouvement* simplement. Pareillement nous appellerons *force motrice totale* l'assemblage des forces partielles qui répondent à chacun de ces petits mouvemens.

DEFINITION VII.

Lorsqu'un corps parcourt des espaces égaux en tems égaux, j'appelle le mouvement de ce corps un mouvement *égal* ou *uniforme*.

COROLLAIRE.

Donc les differens espaces partiels que parcourt un corps avec un mouvement uniforme, sont proportionnels aux tems employez à les parcourir.

THEOREME II.

La somme des produits de chacun des points ou parties infiniment petites du corps mû, multipliées par leurs propres voyes, c'est-à-dire, par les longueurs ou les lignes que ces points parcourent, est la mesure de tout le mouvement de ce corps, ou bien (ce qui est la même chose) ce mouvement total est toûjours proportionnel à la somme de ces produits.

DEMONSTRATION.

Il est évident (*déf.* 4.) que le mouvement est un pas-

sage

ſage d'un point à un autre point de l'eſpace à parcourir : Donc plus il y aura de ces paſſages d'un point à un autre point, & plus il y aura de quantité de mouvement. Mais il doit neceſſairement y avoir autant de ces paſſages ſucceſſifs, qu'il y a dans l'eſpace de points moins un à parcourir ; puiſqu'il faut qu'il y ait paſſage d'un chacun de ces points à celui qui le ſuit immédiatement. Donc plus il y aura de points à parcourir dans une longueur, & plus il y aura de quantité de mouvement dans chaque point du corps mû : ou bien il y aura autant de petits mouvemens qui ſe ſuccederont en chaque point du corps, qu'il y a dans cette même longueur de points moins un. Mais comme un n'eſt rien par rapport à l'infini, & qu'il y a dans quelque longueur finie que ce ſoit une infinité de points ; il ſuit que la quantité du mouvement qui ſe fera ſucceſſivement en chaque point du corps mû, ſera d'autant plus grande, qu'il y aura plus de points à parcourir dans la longueur, ou que cette longueur ſera plus grande. Donc la quantité du mouvement de chaque point du corps mû, eſt proportionnelle à la longueur ou au chemin que ce point parcourt, ou bien (ce qui revient au même) eſt proportionnelle au produit de ce même point par ſa propre voïe. Donc le mouvement total de tout le corps eſt proportionnel à la ſomme des produits de chacun de ces points, multipliez par les voïes qu'ils parcourent. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Si un corps eſt mû en ligne droite, non pas en roulant, mais en gliſſant ſur un plan, puiſqu'alors tous les points de ce corps parcourent des chemins égaux, & que par conſequent la ſomme des produits de chacun de ces points par leurs propres voïes, eſt alors égale au produit de la ſomme des mêmes points, ou de la maſſe entiere du corps, par la longueur qu'il parcourt : il ſuit que la quantité de tout le mouvement ou le mouvement total de ce corps doit être proportionnel à ce même produit de la masse entiere du corps, par la longueur du chemin qu'il décrit.

COROLLAIRE II.

Mais si le corps est mû en roulant sur une surface; puisqu'alors chacun de ses points parcourt des voïes d'autant plus longues, qu'ils sont plus éloignez du centre de la rotation: Il est clair que non-seulement les produits de ces points, multipliez chacun par leur propre voïe sont inégaux entre eux, mais encore que ces produits sont ensemble beaucoup plus grands que ne seroient les produits des mêmes points, multipliez chacun par la voïe du centre de rotation, ou par la voïe que le corps parcourt. Donc la somme de ces produits sera bien plus grande que le produit de la masse entiere du corps par la voïe du centre. Donc (*Corol.* 1.) ce corps mû en roulant, a une quantité de mouvement bien plus grande qu'il n'auroit eû, s'il eut fait le même chemin en glissant sur un plan.

SCHOLIE.

Comme nous avons supposé que tous les points ou parties infiniment petites du corps mû sont égales; il est évident que la somme des produits de tous ces points multipliez par les voïes qu'ils parcourent (pourvû que ces voïes soient aussi toutes égales) est la même chose que le produit de la somme de ces voïes, multipliée par quelque point du corps que ce soit, tous ces points étant égaux: car puisqu'il n'y a aucun point dans le corps mû qui n'ait parcouru toute la longueur de l'espace où le corps a été mû, il est clair que la somme des voïes ou longueurs parcouruës est égale à la somme des points du corps en mouvement. Mais comme les voïes de tous ces points sont égales, il faut que la voïe de l'un soit commune à tous les autres. D'où l'on voit encore que le produit de la somme de tous les points du corps, ou autrement le produit de la masse du corps, multipliée par la longueur ou voïe commune, eſt égal au produit de la ſomme de toutes les voïes, multipliée par un point du corps quel qu'il ſoit.

THEOREME III.

La ſomme des produits de tous les points du corps mû, multipliez chacun par leur propre voïe, eſt toûjours proportionnelle à la ſomme des forces partielles qui répondent à chaque inſtant du mouvement.

DEMONSTRATION.

Les effets (*ax.* 2.) ſont proportionnels à leurs cauſes; mais (*ax.* 1. *def.* 2. & *cor.* 2. *ax.* 2.) le mouvement total eſt l'effet de la force motrice totale. Donc le mouvement total eſt toûjours proportionnel à la force motrice totale. Mais (*Théor.* 2.) la meſure du mouvement total, eſt la ſomme des produits de tous les points du corps mû, multipliez chacun par leur propre voïe, & la meſure de la force motrice totale eſt (*cor.* 2. *Théor.* 1.) la ſomme des forces partielles qui répondent à chaque inſtant du mouvement entier. Donc la ſomme des produits de tous les points du corps, multipliez chacun par leur propre voïe, eſt toûjours proportionnelle à la ſomme des forces partielles qui répondent à chaque inſtant du mouvement. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

On a déja vû (*corol.* 2. *Théor.* 2.) que la ſomme des produits de tous les points d'un corps qui parcourt une longueur en roulant, multipliez chacun par leur propre voïe, eſt de beaucoup plus grande que ſi le même corps parcouroit la même longueur en gliſſant ſur un plan. Donc il faut auſſi à ce corps, qui ſe meut en roulant une ſomme de forces partielles beaucoup plus grande qu'il ne lui faudroit s'il parcouroit la même longueur en gliſſant ſur un plan.

COROLLAIRE II.

Donc un corps même spherique parcoureroit bien plus difficilement une même longueur, en roulant qu'en glissant sur un plan, si ce n'étoit que l'inégalité de la surface du plan & de celle du corps, empêche celui-ci de glisser comme il faut, & que sa pesanteur le porte plûtôt à rouler qu'à glisser simplement.

COROLLAIRE III.

A cause des points ou particules infiniment petites du corps supposées égales, la somme des produits de tous les points du corps mû, multipliez chacun par leur propre voïe, est la même chose que le produit de la somme de toutes ces voïes, multipliée par quelque point du corps que ce soit. D'où & du Théoreme troisiéme, il suit que la somme des forces qui répondent à chaque instant du mouvement, est toûjours proportionnelle au produit d'un des points du corps mû quel qu'il soit, multiplié par la somme des voyes décrites par tous ces points, ou (ce qui est la même chose) est proportionnelle à la somme de toutes ces voyes. D'où l'on déduit ce principe.

PRINCIPE GENERAL

de tous les Mouvemens possibles.

Quelques soient les mouvemens d'un corps, soit qu'ils se fassent en ligne droite ou en ligne courbe quelconque, soit qu'ils soient uniformes ou bien accelerez, ou retardez en quelque proportion que l'on voudra, soit que le corps se meuve en roulant ou en glissant; en un mot de quelque maniere qu'ils soient variez, *la somme des forces partielles qui répondent à chaque instant du mouvement, est toûjours proportionnelle à la somme des voïes décrites par chaque point du corps mû.*

THEOREME IV.

Si un corps se meut en glissant sur un plan, avec une force qui soit toûjours la même ou toujours égale, le produit de la force initiale, c'est-à-dire, qui commence le mouvement, multipliée par la durée du même mouvement, est toûjours preportionnel au produit de la masse du corps mû, multipliée par la longueur parcouruë.

Demonstration.

Puisque (*hyp.*) le corps est mû avec une force toûjours égale; toute la force motrice necessaire pour produire ce mouvement, ou autrement (*corol.* 2, *Théor.* 1.) la somme des forces partielles qui répondent à chaque instant du mouvement, est égale (*cor.* 3. *Théor.* 1.) au produit de la force initiale, multipliée par le tems ou la durée de tout le mouvement. Outre cela, puisque (*hyp.*) le corps est mû en glissant sur un plan, la somme des produits de tous ses points, multipliée par leurs propres voïes, est égale (*cor.* 1. *Théor.* 2.) au produit de la masse entiere du corps, multipliée par la longueur qu'il parcourt. Mais la somme des forces partielles, correspondantes à chaque instant du mouvement, est proportionnelle (*théor.* 3.) à la somme des produits de chacun des points du corps mû, multipliez par leurs propres voïes. Donc si un corps est mû en glissant sur un plan avec une force toûjours égale, le produit de la force initiale multipliée par la durée du mouvement, est toûjours proportionnel au produit de la masse du corps mû, multipliée par la longueur parcouruë.

Corollaaire I.

Donc si deux corps C, K, dont les masses sont m, μ, sont mûs par des forces f, φ, dans des tems t & θ, suivant les longueurs e & ε; on aura cette proportion $ft . \varphi\theta :: me . \mu\varepsilon$. D'où l'on aura $ft\mu\varepsilon = \varphi\theta me$. Ce qui donne la regle generale qui suit.

Corps,	C, K.
Masses,	m, μ.
Espaces parcourus,	e, ε.
Tems employé à les parcourir,	t, θ.
Forces,	f, ϕ.

REGLE GENERALE

des Mouvemens uniformes ou égaux.

$$ft\mu\varepsilon = \phi\theta me.$$

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $f = \phi$, la regle generale deviendra celle-ci $t\mu\varepsilon = \theta me$, en divisant $ft\mu\varepsilon$ par f, & $\phi\theta me$ par ϕ, & l'on aura par conséquent, 1° $t.\ \theta :: me.\ \mu\varepsilon$. 2°. $m.\ \mu :: te.\ \theta\varepsilon$. 3°. $e.\ \varepsilon :: t\mu.\ \theta m$. c'est-à-dire, lorsque les forces motrices des corps C & K sont égales. 1°. Les tems sont toûjours comme les produits des masses par les espaces parcourus. 2°. Les masses sont comme les produits des tems pris directement par les espaces reciproquement pris. 3°. Les espaces sont comme les produits des tems pris directement par les masses reciproquement prises.

COROLLAIRE. III.

Si l'on suppose $t = \theta$, la regle generale deviendra celle-ci $f\mu\varepsilon = \phi me$, en divisant $ft\mu\varepsilon$ par t, & $\phi\theta me$ par θ. D'où l'on tire, 1°. $f.\ \phi :: me.\ \mu\varepsilon$. 2°. $m.\ \mu :: f\varepsilon.\ \phi e$. 3°. $e.\ \varepsilon :: f\mu.\ \phi m$. c'est-à-dire, lorsque les tems du mouvement sont égaux; 1°. les forces sont toûjours comme les produits des masses par les espaces, ou (*cor.* 1. *Théor.* 2.) comme les quantitez du mouvement; 2°. les masses sont comme les produits des forces prises directement par les espaces reciproquement pris. 3°. Les espaces sont comme les produits des forces prises directement par les masses reciproquement prises.

COROLLAIRE IV.

Si l'on ſuppoſe $m = \mu$, la regle generale deviendra celle-ci $ft\varepsilon = \varphi\theta e$, en diviſant de la même maniere les deux membres, le premier par μ, le ſecond par m : d'où l'on tire, 1°. $f.\ \varphi :: \theta e.\ t\varepsilon$. 2°. $e.\ \varepsilon :: ft.\ \varphi\theta$. 3°. $t.\ \theta :: \varphi e.\ f\varepsilon$. c'eſt-à-dire, lorſque les maſſes ſont égales. 1°. Les forces ſont comme les produits des eſpaces pris directement par les tems réciproquement pris. 2° Les eſpaces ſont comme les produits des forces & des tems. 3°. Les tems ſont comme les produits des eſpaces pris directement par les forces réciproquement priſes.

COROLLAIRE V.

Si l'on ſuppoſe $e = \varepsilon$ la regle generale deviendra celle-ci $ft\mu = \varphi\theta m$, en diviſant pareillement le premier membre par ε, & le ſecond par e ; d'où l'on tire, 1°. $f.\ \varphi :: \theta m.\ t\mu$. 2°. $m.\ \mu :: ft.\ \varphi\theta$. 3°. $t.\ \theta :: \varphi m.\ f\mu$. c'eſt-àdire, lorſque les eſpaces parcourus ſont égaux. 1°. Les forces ſont comme les produits des maſſes priſes directement par les tems réciproquement pris. 2°. Les maſſes ſont comme les produits des forces par les tems. 3°. Les tems ſont comme les produits des maſſes directement priſes par les forces réciproquement priſes.

COROLLAIRE VI.

Si l'on ſuppoſe $f.\ \varphi :: m.\ \mu$, ou $f\mu = \varphi m$, la regle generale deviendra celle-ci $t\varepsilon = \theta e$, en diviſant $ft\mu\varepsilon$ par $f\varepsilon$, & $\varphi\theta m e$ par φe ; d'où l'on tire $t.\ \theta :: e.\ \varepsilon$; c'eſt-à-dire, lorſque les forces ſont comme les maſſes, les tems ſont proportionnels aux eſpaces parcourus.

D'où il ſuit, 1°. qu'un eſpace parcouru en un tems plus long, par un mouvement toûjours égal, doit être plus grand que l'eſpace parcouru en un tems plus court ; 2°. que le tems pendant lequel un plus grand eſpace eſt parcouru par un mouvement toûjours égal, eſt plus long que le tems auquel un plus petit eſpace eſt parcouru.

Ces deux conſequences ſont les axiomes 1er & 2e du mouvement uniforme de Galilée.

COROLLAIRE VII.

Si l'on ſuppoſe $f.\ \varphi :: e.\ \varepsilon.$ ou $f\varepsilon = \varphi e$, la regle generale deviendra celle-ci $t\mu = \theta m$, en diviſant $ft\mu\varepsilon$ par $f\varepsilon$, & $\varphi\theta me$ par φe; d'où l'on tire $t.\ \theta :: m.\ \mu.$ c'eſt-à-dire, lorſque les forces ſont comme les eſpaces parcourus, les tems du mouvement ſont toûjours comme les maſſes; ainſi ſi les maſſes ſont égales, les tems ſeront égaux.

COROLLAIRE VIII.

Si l'on ſuppoſe $t.\ \theta :: e.\ \varepsilon$, ou $t\varepsilon = \theta e$, la regle generale deviendra celle-ci $f\mu = \varphi m$; d'où l'on tire $f.\ \varphi :: m.\ \mu.$ c'eſt-à-dire, lorſque les tems ſont comme les eſpaces, les forces ſont toûjours comme les maſſes.

COROLLAIRE IX.

Si l'on ſuppoſe $t.\ \theta :: m.\ \mu.$ ou $t\mu = \theta m$, la regle generale deviendra celle-ci $f\varepsilon = \varphi e$; d'où l'on tire $f.\ \varphi :: e.\ \varepsilon.$ c'eſt-à-dire, lorſque les tems du mouvement ſont comme les maſſes, les forces ſont toûjours comme les eſpaces parcourus.

COROLLAIRE X.

Si l'on ſupppoſe $f.\ \varphi :: t.\ \theta$, ou $f\theta = \varphi t$, la regle generale deviendra celle-ci $f\varphi\mu\varepsilon tt = f\varphi me\theta\theta$, ou $\mu\varepsilon tt = me\theta\theta$, en multipliant chaque membre de la regle generale, le premier par φt, le ſecond par $f\theta$, & en diviſant enſuite l'un & l'autre produit par $f\varphi$; d'où l'on tire; 1°. $e.\ \varepsilon :: \mu tt.\ m\theta\theta.$ 2°. $m.\ \mu :: \varepsilon tt.\ e\theta\theta.$ 3°. $tt.\ \theta\theta :: me.\ \mu\varepsilon.$ ou $t.\ \theta :: \sqrt{me}.\ \sqrt{\mu\varepsilon}.$

C'eſt-à-dire, lorſque les forces ſont en raiſon des tems; 1°. Les eſpaces ſont comme les produits des quarrez des tems pris directement par les maſſes réciproquement priſes, & par conſequent ſont en raiſon des quarrez des tems ſi les maſſes ſont égales; 2°. Les maſſes ſont comme les quarrez des tems pris directement par les espaces reciproquement pris ; & consequemment sont comme les quarrez des tems si les espaces sont égaux ; 3°. les quarrez des tems sont en raison composée des masses & des espaces, ou les tems sont comme les racines des produits des masses par les espaces.

COROLLAIRE XI.

Si l'on suppose $m. \mu :: \varepsilon. e.$ ou $me = \mu\varepsilon$, la regle generale deviendra celle-ci $ft = \varphi\theta$; d'où l'on tire $f. \varphi :: \theta. t.$ c'est-à-dire, lorsque les masses sont en raison réciproque des espaces, les forces sont toûjours en raison réciproque des tems, par consequent si les tems du mouvement sont égaux, comme cela est dans les machines, les forces seront égales, & il y aura équilibre dans ces machines. *C'est-là le premier principe des machines qu'a supposé Descartes sans le démontrer.*

REMARQUE.

1°. L'on pourroit tirer pareillement une infinité d'autres regles particulieres de la generale $ft\mu\varepsilon = \varphi\theta me$, selon les differens rapports que l'on supposeroit entre les grandeurs dont cette regle generale est composée, en voici la méthode. Si la chose supposée ou donnée n'est pas en équation, il faut l'y mettre ; ensuite il faut ou diviser ou multiplier l'equation generale $ft\mu\varepsilon = \varphi\theta me$ par l'équation donnée ; les équations nouvelles qui en résulteront donneront autant de regles particulieres que l'on en pourra tirer d'analogies : c'est cette pratique qu'on a mise en usage dans les corollaires précedens.

2°. Nous n'avons consideré jusques ici dans le mouvement que la masse du corps mû, la force motrice, le tems du mouvement & l'espace parcouru, sans avoir encore rien dit des vîtesses dont nous allons parler après avoir défini ce terme.

DEFINITION VIII.

J'appelle *vîtesse* le rapport de l'espace parcouru au tems emploïé à le parcourir ; de maniere que plus ce rapport est grand, c'est-à-dire, plus l'espace parcouru est grand, & plus le tems employé à le parcourir est court plus aussi la vîtesse est grande ; la *lenteur* par consequent peut être appellée une *moindre vitesse* ; ou (ce qui revient au même) une moindre raison de l'espace parcouru au tems employé à le parcourir.

COROLLAIRE I.

D'où il suit par la nature des rapports ou raisons, que si la quantité qui exprime l'espace parcouru, est divisée par une quantité qui lui soit homogêne, & qui exprime la durée du mouvement, ou le tems emploïé à parcourir l'espace ; le quotient ou la fraction donnera la vîtesse du corps mû.

Corps,	C, K.
Masses,	m, μ.
Espaces parcourus,	e, ε.
Tems employez à les parcourir,	t, θ.
Forces,	f, φ.
Vîtesses,	u, υ.

COROLLAIRE II.

Donc si outre les lettres prises dans le corollaire premier du Théor. 4. on prend encore u qui exprime la vîtesse du corps C & υ qui exprime la vîtesse du corps K ; l'on aura $u = \frac{e}{t}$, & $\upsilon = \frac{\varepsilon}{\theta}$; & ainsi $u . \upsilon :: \frac{e}{t} . \frac{\varepsilon}{\theta}$, ou (en multipliant les deux derniers termes par $t\theta$) $u . \upsilon :: e\theta . \varepsilon t$. Donc $u\varepsilon t = \upsilon e\theta$. Mais la premiere regle generale $ft\mu\varepsilon = \varphi\theta m e$, donne $e\theta\ \varepsilon t :: f\mu . \varphi m$. Donc l'on a aussi $u . \upsilon :: f\mu . \varphi m$. ou $u\varphi m = \upsilon f\mu$.

DEUX REGLES GENERALES

Pour les Vîtesses uniformes.

1re. $u\varepsilon t = \upsilon e\theta$.

2e. $u\varphi m = \upsilon f\mu$.

COROLLAIRE I.

D'où il suit en general que ; 1°. $u.\ \upsilon :: e\theta.\ \varepsilon t$. 2° $t.\ \theta :: \upsilon e.\ u\varepsilon$. 3°. $e.\ \varepsilon :: ut.\ \varepsilon\theta$. 4°. $u.\ \upsilon :: f\mu.\ \varphi m$. 5°. $f.\ \varphi :: um.\ \upsilon\mu$. 6°. $m.\ \mu :: f\upsilon.\ \varphi u$.

C'est-à-dire qu'en quelque hypothese que ce soit des vîtesses uniformes. 1°. Les vîtesses sont toûjours comme les produits des espaces pris directement par les tems reciproquement pris. 2°. Les tems sont comme les produits des espaces directement pris par ces vîtesses reciproquement prises. *C'est-là le cinquiéme Théoréme de Galilée du mouvement uniforme.* 3°. Les espaces sont comme les produits des vîtesses & de tems ; *& c'est le quatriéme Théoréme de Galilée du mouvement uniforme.* 4°. Les vîtesses sont comme les produits des forces prises directement par les masses réciproquement prises. 5°. Les forces sont comme les produits des masses & des vîtesses. 6°. Les masses sont comme les produits des forces directement prises par les espaces reciproquement pris.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $f = \varphi$, la deuxiéme regle generale deviendra celle-ci $um = \upsilon\mu$; d'où l'on tire $u.\ \upsilon :: \mu.\ m$. c'est-à-dire, lorsque les forces sont égales, les vîtesses sont toûjours en raison réciproque des masses.

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose $m = \mu$, cette même deuxiéme regle generale deviendra celle-ci $u\varphi = \upsilon f$; d'où l'on tire $u.\ \upsilon :: f.\ \varphi$.

c'est-à-dire, lorsque les masses sont égales, les vîtesses sont toûjours comme les forces.

COROLLAIRE IV.

Si l'on suppose $t = \theta$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $u\varepsilon = ve$; d'où l'on tire $u.\, v :: e.\, \varepsilon$. c'est-à-dire, lorsque les tems du mouvement sont égaux, les vîtesses sont toûjours en raison des espaces parcourus, *c'est-là le second Théoreme de Galilée du mouvement uniforme*. Par consequent; 1°. l'espace qui est parcouru avec plus de vîtesse, est plus grand que l'espace parcouru en tems égal avec une moindre vîtesse; 2°. la vîtesse avec laquelle un plus grand espace est parcouru, est plus grande que la vîtesse avec laquelle un moindre espace est parcouru en tems égal. *Ces deux consequences sont les deux autres axiomes de Galilée du mouvement uniforme, c'est-à-dire le 3 & le 4.*

COROLLAIRE V.

Si l'on suppose $e = \varepsilon$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $ut = v\theta$; d'où l'on tire $u.\, v :: \theta.\, t$. c'est-à-dire, lorsque les espaces parcourus sont égaux, les vîtesses sont en raison réciproque des tems: *C'est le troisiéme Théoreme de Galilée du mouvement uniforme.*

COROLLAIRE VI.

Si l'on suppose $u = v$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $\varepsilon t = e\theta$, & la deuxiéme regle generale deviendra celle-ci $\varphi m = f\mu$; d'où l'on tire 1°. $t.\, \theta :: e.\, \varepsilon$. 2°. $f.\, \varphi :: m.\, \mu$. c'est-à-dire, lorsque les vîtesses sont égales; 1°. les tems du mouvement sont toûjours comme les espaces parcourus; 2°. les forces sont toûjours comme les masses.

AVERTISSEMENT.

Il est bon de faire remarquer que le traité de Galilée, du mouvement uniforme, est contenu tout entier dans les précedens Corollaires 1, 4, 5 & 6, & dans le Corollaire 6. du Théorême 4, & même que les axiomes de cet Auteur s'y trouvent démontrez.

COROLLAIRE VII.

Si l'on suppose $t.\theta::e.\varepsilon.$ ou $t\varepsilon = \theta e$, la premiere regle generale deviendra celle-ci, $u = \upsilon$, c'est-à-dire, lorsque les tems du mouvement sont comme les espaces parcourus, les vîtesses sont toûjours égales.

COROLLAIRE VIII.

Pareillement si l'on suppose $f.\varphi::m.\mu$ ou $\varphi m = f\mu$. la deuxiéme regle generale deviendra celle-ci $u = \upsilon$, c'est-à-dire, lorsque les forces motrices sont comme les masses, les vîtesses sont encore égales.

REMARQUE.

On peut de la même maniere démontrer fort aisément toutes les converses des Corollaires précedens, & même tirer de ces deux regles generales une infinité d'autres regles particulieres pour les mouvemens uniformes, en employant la méthode enseignée dans la remarque qui suit le Corollaire 11. du Théoreme 4. c'est pourquoi il seroit inutile de nous y arrêter davantage: Cependant nous jugeons à propos de démontrer encore le premier principe des machines, supposé par Galilée, aussi bien que le rapport des espaces parcourus par un corps tombant selon son hypothese.

COROLLAIRE IX.

Si l'on suppose $m.\mu::\upsilon.u.$ ou $mu = \mu\upsilon$. la seconde équation generale deviendra celle-ci $f = \varphi$, c'est-à-dire, lorsque les masses ou les poids sont en raison réciproque des vîtesses, les forces sont toûjours égales, & par consequent il y aura alors dans les machines, équilibre entre les poids. *C'est-là le premier principe de statique de Galilée.*

COROLLAIRE X.

Si l'on ſuppoſe $u . v :: t . \theta$. ou $vt = u\theta$. en multipliant la premiere regle generale $uet = v\varepsilon\theta$ à ſçavoir, ſon premier membre uet par vt, ſon deuxiéme membre $v\varepsilon\theta$ par $u\theta$, & en diviſant enſuite l'un & l'autre par uv, elle deviendra celle-ci $ett = \varepsilon\theta\theta$; d'où l'on tire $e . \varepsilon :: tt . \theta\theta$. c'eſt-à-dire, lorſque les vîteſſes ſont comme les tems, les eſpaces parcourus ſont toûjours comme les quarrez des tems, & par conſequent auſſi comme les quarrez des vîteſſes.

DEFINITION IX.

Comme un corps en mouvement a une certaine quantité de vîteſſe à chaque inſtant de ſon mouvement, je diviſe ſa vîteſſe entiere en autant de petites vîteſſes partielles, qu'il y a d'inſtans qui leur répondent dans tous les tems du mouvement, & j'appelle ces vîteſſes partielles *inſtantanées*, tandis que leur ſomme eſt appellée vîteſſe totale; ſi ces vîteſſes partielles ſont toutes égales entre elles, la vîteſſe totale ſera *uniforme*; ſi elles ſont inégales, elle ſera appellée *vîteſſe variée*, c'eſt-à-dire, viteſſe accelerée, lorſque les vîteſſes vont en augmentant, & *retardée* lorſqu'elles vont en décroiſſant.

REMARQUE.

Quoique la ſomme des vîteſſes inſtantanées inégales entre elles, compoſe une vîteſſe totale, inégale & variée; cependant chaque vîteſſe inſtantanée eſt égale & uniforme en elle-même, parce qu'en ſuppoſant qu'elle répond à un inſtant infiniment petit, elle ne peut avoir pendant cet inſtant infiniment petit, qu'une variation infiniment petite; & par conſequent nulle, par rapport à la variation qui arrive dans un tems fini.

Cette remarque eſt neceſſaire dans la ſuite, pour faire uſage dans les mouvemens variez des regles précedentes, où l'on a ſuppoſé des vîteſſes & des mouvemens uniformes ; ce qu'on trouve toûjours, comme on vient de voir, dans un instant infiniment petit, d'un mouvement même varié quel qu'il soit.

THEOREME.

Dans tout mouvement soit uniforme, soit varié de quelque maniere que ce soit, la somme des vîtesses instantanées, ou la vîtesse totale du corps mû est toûjours proportionnelle à tout l'espace parcouru pendant tout le tems du mouvement.

DEMONSTRATION.

Dans un mouvement même continuellement varié, c'est-à-dire, retardé ou acceleré ; si l'on y considere les vîtesses partielles, par rapport à des instans infiniment petits, chaque vîtesse partielle sera uniforme ou égale en elle même. (*remarque préced.*) Donc (*cor. 4. regl. des vîtes. unif.*) les petits espaces parcourus par chacune de ces vîtesses partielles en des instans égaux, sont comme ces mêmes vîtesses, & par consequent la somme de ces petits espaces, est proportionnelle à la somme de ces vîtesses instantanées, avec lesquels ils sont parcourus à chaque instant du mouvement ; mais il est évident que la somme de tous ces petits espaces parcourus à chaque instant du mouvement, est l'espace total parcouru avec toutes ces vîtesses pendant tout le tems du mouvement ; & pareillement (*def. 9.*) la somme de toutes ces vîtesses partielles, est la vîtesse totale avec laquelle tout l'espace a été parcouru. Donc en quelque mouvement que ce soit, même varié, la vîtesse totale est toûjours proportionnelle à l'espace parcouru par toute cette vîtesse, pendant tout le tems du mouvement.

COROLLAIRE.

Donc en quelque mouvement que ce soit, même varié, les vîtesses totales sont entre elles comme les espaces parcourus par ces vîtesses totales pendant tout le tems du mouvement.

SECTION II.

Du Mouvement des Corps graves.

IL eſt de toute évidence que le mouvement des corps graves qui tombent, n'eſt point uniforme, mais eſt acceleré, c'eſt-à-dire, qu'un corps tombant augmente ſa vîteſſe à chaque inſtant de ſa chute ; car l'on ſçait par l'experience qu'un corps grave en tombant, eſt pouſſé vers la terre avec d'autant plus d'impetuoſité, qu'il en approche davantage, il n'y a donc aucune difficulté ſur ce point ; mais il eſt très-difficile de déterminer au juſte en quelle raiſon ou rapport ſe fait cette augmentation de vîteſſe.

Galilée en regardant la peſanteur comme une force toûjours la même, & continuellement appliquée ou inherente au corps mû ; & faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, a aſſûré le premier, & avec raiſon, que les eſpaces parcourus par un corps grave qui tombe, ſont entre eux comme les quarrez des tems emploïez à les parcourir depuis le premier inſtant de la chute, c'eſt-à-dire, que ſi le corps tombant a parcouru une toiſe dans le premier inſtant, il en aura parcouru quatre dans les deux premiers inſtans, neuf dans les trois premiers, &c. Par conſequent les eſpaces parcourus à chacun des inſtans égaux, croiſſent ſucceſſivement ſelon la progreſſion arithmétique des nombres impairs, pris depuis l'unité 1. 3. 5. 7. 9. &c. c'eſt-à-dire, par exemple, que ſi le corps a parcouru une toiſe dans le premier inſtant, il en parcourera trois dans le ſecond, cinq dans le troiſiéme, &c.

C'eſt aux phyſiciens à éxaminer cette hypotheſe de la peſanteur, qui pouſſe continuellement le corps avec une même force ; & c'eſt à nous à en démontrer les conſequences qu'on en peut tirer.

DEMANDES.

I. Qu'il ſoit permis de ſuppoſer avec preſque tous les Philoſophes, que la peſanteur, quelle qu'en ſoit la cauſe, pouſſe continuellement, & avec une force toûjours égale, les corps graves vers la terre.

II. Que les corps graves ſoient ſuppoſez tomber dans un eſpace vuide, c'eſt-à-dire, comme ſi l'air ne réſiſtoit point à leur chûte.

III. Un corps mis une fois en mouvement, ne changera jamais de lui-même la détermination ou la vîteſſe qu'il vient de recevoir; mais il conſervera cette détermination ou cette vîteſſe, tant qu'il ne ſera point ou détourné, ou acceleré, ou retardé par un autre corps, ou par une autre cauſe quelconque. Cela ſuit de ce que tout corps eſt de ſa nature indifferent pour quelque vîteſſe ou détermination de mouvement que ce ſoit, par l'axiome 3. & ſes Corollaires.

THEOREME VI.

Un corps qui tombe, acquiert en tems égaux des degrez de vîteſſe égaux; c'eſt-à-dire, que le corps a au ſecond inſtant une viteſſe double de celle qu'il avoit au premier; au troiſiéme inſtant, il a le triple de celle qu'il avoit au premier; au quatriéme inſtant, le quadruple, &c.

DEMONSTRATION.

Le corps tombant (*demand.* 1.) eſt continuellement pouſſé par une action toûjours égale de la peſanteur. Il faut donc (*ax.* 2. *& cor.* 3. *regl. des vît. unif.*) que cette peſanteur lui fourniſſe à chaque inſtant des degrez de vîteſſe égaux; mais (*dem.* 3.) les degrez de vîteſſe que le corps a acquis dans les premiers inſtans de ſa chûte, ſe conſervent entiers dans les inſtans ſuivans, pendant leſquels ce corps en acquiert toûjours de nouveaux. Donc un corps tombant recevra de ſa peſanteur autant de degrez égaux de vîteſſe, qu'il y aura d'inſtans égaux écoulez depuis le commencement de ſa chûte juſqu'au tems de la ſupputation. Donc le corps tombant aura à la fin du ſecond inſtant une vîteſſe double de celle qu'il avoit au premier inſtant ; à la fin du troiſiéme, une vîteſſe triple de celle qu'il avoit au premier ; à la fin du quatriéme, une vîteſſe quadruple, &c. & par conſequent en general un corps qui tombe acquiert des degrez de vîteſſe égaux en tems égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc les vîteſſes d'un corps tombant, ſont comme les tems écoulez depuis le commencement de la chûte.

COROLLAIRE II.

Donc (*cor.* 10. *regl. gener. des vîteſ. unif.*) les eſpaces parcourus ſeront comme les quarrez des tems, ou les quarrez des vîteſſes.

COROLLAIRE III.

FIG. 1. 2. D'où il eſt évident que ſi un corps grave tombant de R, parcourt les eſpaces RS, ST, TX, XZ, en tems égaux pris ſucceſſivement depuis le premier inſtant de la chûte ; de maniere qu'il parcourt au premier inſtant l'eſpace RS ; au ſecond inſtant, l'eſpace ST, &c. Ces eſpaces ſeront entr'eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. c'eſt-à-dire, que ſi l'eſpace RS parcouru au premier inſtant eſt égal à un pied, l'eſpace ST parcouru au ſecond, ſera égal à 3 pieds, TX à 5 pieds, &c. Car c'eſt-là le rapport des differences dont ſe ſurpaſſent continuellement les quarrez des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. à commencer par l'unité. Donc tandis que les degrez de vîteſſe d'un corps tombant, croiſſent à chacun des inſtans égaux, ſelon la ſuite des nombres naturels, les eſpaces parcourus dans chacun de ces inſtans égaux, croiſſent ſelon la ſuite des nombres impairs depuis l'unité.

AVERTISSEMENT.

Nous allons démontrer d'une autre maniere le Corollaire 2. de ce Théoreme pour ne rien laisser à desirer sur cette proposition fondamentale.

THEOREME VII.

Les espaces parcourus par un corps grave qui tombe librement, sont entr'eux comme les quarrez des tems employez à les parcourir, en prenant les tems depuis le commencement de la chûte.

DEMONSTRATION.

Que les tems des chûtes d'un même corps soient representez par deux parties AB, AC, de la même ligne AC; que le tems AB soit divisé en une infinité de parties égales AF, FH, HL, &c. que la vîtesse acquise à la fin du premier instant AF, soit exprimée par la droite FG perpendiculaire à AF. Tirez la ligne AG, qui étant prolongée du côté de G, soit rencontrée par autant de lignes HK, LM, NO, &c. paralleles à FG, qu'il y a de points K, L, N, ou de divisions dans le tems AB. Fig. 3.

Cela posé, il est évident (*par les Elem, de Géom.*) qu'il y aura autant de triangles semblables AFG, AHK, ALM, ANO, &c. qu'il y aura de bases paralleles entr'elles, ou (*hyp.*) qu'il y a de divisions de tems. Donc comme le tems AF est aux tems AH, AL, &c. de même la vîtesse FG est aux paralleles HK, LM, lesquelles paralleles exprimeront par consequent (*cor.* 1. *théor.* 6.) les vîtesses exstantes à chaque instant. Donc la somme des paralleles qui remplissent l'aire du triangle ABE, ou autrement l'aire entier ABE exprimera la vîtesse totale que le corps tombant a euë pendant le tems AB. Pareillement l'aire du triangle ADC exprimera la vîtesse totale, ou la somme des vîtesses partielles, que le même corps tombant a euë pendant le tems AC. Donc les vîtesses totales d'un même corps pendant le tems AB & AC, sont entr'elles comme les triangles ABE & ACD.

Mais il est démontré en Géométrie, que ces triangles étant semblables, sont entr'eux comme les quarrez de leurs côtez homologues AB & AC. Donc les vîtesses totales du corps qui parcourt en tombant differens espaces pendant les tems AB & AC, sont entr'elles comme les quarrez de ces côtez, ou (*hyp.*) des tems AB & AC. Mais les vîtesses totales sont entr'elles (*corol. théor.* 5.) comme les espaces entiers parcourus par ces mêmes vîtesses. Donc ces mêmes espaces sont entr'eux, comme les quarrez des tems AB & AC employez à les parcourir. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME VIII.

L'espace parcouru dans un certain tems par un corps grave depuis le commencement de sa chûte, est la moitié de l'espace que le même corps auroit parcouru en tems égal par un mouvement uniforme avec la vîtesse qu'il a acquise au dernier instant de sa chûte.

DEMONSTRATION.

FIG. 4. Qu'un corps tombe par sa propre pesanteur pendant le tems AB; de maniere que sa vîtesse acquise au dernier instant de sa chûte, soit exprimée par BC: je dis que l'espace que le même corps parcourroit dans un tems égal AB avec la derniere vîtesse BC, toûjours uniforme & égale dans tous les instans de son mouvement, est le double de l'espace qu'a parcouru le corps tombant par son propre poids dans le même tems AB. Car l'on a vû (*démonst. du théor. préced.*) que la somme des vîtesses partielles, ou la vîtesse totale du corps grave qui tombe pendant le tems AB, est exprimée par l'aire triangulaire ABC. Donc si le même corps pendant le même tems AB, est mû par une vîtesse BC, toûjours uniforme dans tous les instans de son mouvement, il est évident, par une démonstration semblable, que sa vîtesse totale sera alors exprimée par tout le parallelogramme ABCD. Mais les espaces parcourus sont (*cor. théor.* 5.) comme les vî-

tesses totales avec lesquelles ils sont parcourus. Donc l'espace que parcourra le corps dans le tems AB, avec une vîtesse toûjours uniforme BC, sera à l'espace que le même corps parcourroit par son propre poids en tombant dans le même tems AB, jusqu'à la vîtesse BC, comme le parallelogramme ABCD est au triangle ABC; c'est-à-dire (*Elem. de Géom.*) comme 2 est à 1. Donc l'espace qu'un corps tombant a parcouru depuis le commencement de sa chûte, est égal à la moitié de l'espace que le même corps auroit parcouru en tems égal par un mouvement uniforme avec la vîtesse qu'il a acquise au dernier instant de sa chûte.

COROLLAIRE.

Donc (*cor. 4. regl. gen. des vîtes. unif.*) l'espace parcouru par un corps grave depuis l'origine de sa chûte, est égal à celui que le même corps auroit parcouru en tems égal avec une vîtesse uniforme égale à la moitié de celle qu'il a acquise en tombant au dernier instant de sa chûte.

THEOREME IX.

Si un corps grave après être tombé, est repoussé en haut par la même voye, avec une vîtesse égale à celle qu'il avoit au dernier instant de sa chûte, il perdra en tems égaux des degrez de vîtesse égaux. D'où il suit qu'en montant il parcourra en tems égaux les mêmes espaces qu'il avoit parcourus en tombant, & qu'il montera par consequent à la même hauteur d'où il est descendu.

DEMONSTRATION.

Qu'un corps grave en tombant ait parcouru l'espace AE pendant le tems FL, de telle sorte qu'à la fin du premier tems FG il ait eu la vîtesse GM; à la fin du second tems GH, la vîtesse HO; à la fin du troisiéme tems HK, la vîtesse KQ; & que pendant le premier tems FG il ait parcouru l'espace AB; pendant le second tems GH, FIG. 5. 6. & 7.

l'espace BC; pendant le troisiéme HK, l'espace CD; & l'espace DE pendant le dernier tems KL; à la fin duquel tems KL il ait acquis la vîtesse LS. Je dis que ce même corps, s'il est repoussé en haut par le même chemin avec la même vîtesse LS, acquise à la fin du dernier tems, montera de E jusqu'en A; de maniere qu'au premier instant il ira jusqu'en D, au second jusqu'en C, au troisiéme jusqu'en B, & au quatriéme enfin jusqu'en A.

Car ayant mené les droites QR, OP, MN, paralleles à FL, puisque la pesanteur a autant de force pour resister au corps montant, qu'elle en avoit pour le pousser en bas, lorsqu'il descendoit; il est évident qu'elle doit ôter au corps qui monte pendant le premier tems LK, autant de vîtesse qu'elle lui en avoit imprimée, lorsqu'en tombant il parcouroit l'espace DE pendant le même tems LK. Donc la pesanteur dans le premier tems LK employé à monter, doit ôter RS de la vîtesse LS: & ainsi ce corps montant n'aura à la fin du premier tems LK que la vîtesse KQ. Par une raison toute semblable, le corps montant aura à la fin du second tems KH la vîtesse HO; à la fin du troisiéme tems HG, il aura la vîtesse GM; à la fin du quatriéme GF, il n'en aura aucune. Ce qui répond parfaitement aux vîtesses qu'a euës le corps en tombant, qui (*cor.* 1. *théor.* 6. *& démonst. du théor.* 7.) au commencement du premier tems FG, n'a eu aucune vîtesse; à la fin du même tems FG, ou (ce qui revient au même) au commencement du tems OH, a eu la vîtesse GM; au commencement du tems HK, a eu la vîtesse HO; & au commencement enfin du dernier tems KL, a eu la vîtesse KQ. D'où l'on voit qu'il faut que les vîtesses d'un corps qui monte, décroissent comme les tems qui doivent s'écouler jusqu'à la fin du mouvement, de la même maniere que les vîtesses d'un corps tombant croissent (*théor.* 6.) comme les tems écoulez depuis l'origine de la chûte.

Donc puisque (*démonst. théor.* 7.) l'aire triangulaire FLS exprime la vîtesse totale d'un corps tombant pendant le tems FL, & que par conſequent le trapeze ou l'aire KLSQ exprime la vîteſſe totale du même corps tombant pendant tout le tems KL : il faut auſſi que le même KLSQ exprime la vîteſſe totale du même corps montant pendant le même tems KL. Donc la vîteſſe totale du corps qui monte de E vers A pendant le tems KL, eſt égale à la vîteſſe totale du même corps tombant de A vers E pendant le même tems KL. Mais les vîteſſes étant égales, les eſpaces parcourus (*cor. théor.* 5.) doivent être égaux. Donc le corps en montant avec la vîteſſe LS doit parcourir pendant le premier tems KL l'eſpace ED, comme le même eſpace ED a été parcouru par le même corps tombant pendant le dernier tems KL. Par une raiſon toute ſemblable, la vîteſſe totale du corps montant pendant le tems KH, & celle du même corps tombant pendant le même tems KH, ſeront exprimées l'une & l'autre par le trapeze HKQO ; donc le corps montant pendant le ſecond tems KH, parcourra le même eſpace DC qu'il avoit déja parcouru en tombant pendant le même tems KH. Pareillement auſſi la vîteſſe totale du corps montant pendant le troiſiéme tems HG, ſera exprimée par le trapeze GHOM, qui exprimoit déja la vîteſſe totale du même corps tombant de B en C pendant le même tems HG. Donc le corps montera de C juſqu'à B pendant ce troiſiéme tems HG. De la même maniere enfin la vîteſſe totale du corps montant pendant le quatriéme tems FG, ſera repreſentée par le triangle FGM, qui repreſentoit déja la vîteſſe totale du même corps tombant de A en B pendant le même tems FG. Donc avec cette derniere vîteſſe le corps montera de B juſqu'en A, & non au-delà, puiſque toute ſa vîteſſe eſt éteinte en A.

D'où il ſuit manifeſtement que ſi un corps remonte par la même voye au point dont il eſt deſcendu avec la même vîteſſe LS qu'il avoit acquiſe à la fin de ſa chûte, il perdra dans des inſtans égaux des degrez de vîteſſe égaux, & parcourra en montant les mêmes eſpaces DE, CD, BC, AB, qu'il avoit parcouru auparavant dans un ordre renversé, lorsqu'il descendoit; c'est-à-dire, qu'il montera à la même hauteur EA d'où il étoit tombé. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

L'on auroit pû démontrer ainsi ce Théoreme. Un corps qui après être tombé de quelque hauteur pendant un certain espace de tems, est repoussé en haut avec la vîtesse qu'il avoit à la fin de sa chûte, devroit en tems égal (si sa pesanteur ne l'en empêchoit) monter (*théor.* 8.) à une hauteur double de celle qu'il a parcouruë en tombant. Mais la même pesanteur doit en tems égaux produire des effets égaux, & par consequent faire descendre au corps montant une longueur égale à celle qu'il a décrite en tombant. Il ne reste donc pour le corps montant que la moitié de la hauteur qu'il auroit parcouruë sans sa pesanteur, avec la vîtesse qu'il avoit. D'où il suit que la hauteur à laquelle ce corps montera, sera la même que celle d'où il est descendu.

LEMME I.

Si deux corps quelconques se meuvent en glissant sur un plan avec des mouvemens accelerez dans la raison de ceux des corps graves; les sommes des forces correspondantes à chaque instant de leur mouvement, seront comme les produits des premieres forces ou des forces initiales par les quarrez des tems.

Corps,	C, K.
Masses,	m, μ.
Espaces,	e, ε.
Tems,	t, θ.
Forces initiales,	f, φ.
Vitesses dernieres,	u, υ.

DEMONSTRATION.

DEMONSTRATION.

Soient deux corps C, K, pouſſez par des mouvemens accelerez dans la raiſon de ceux des corps graves ; je dis que la ſomme des forces du corps C ſera à la ſomme des forces du corps K, comme *ftt* eſt à φθθ ; car quelque variées que ſoient entr'elles les vîteſſes partielles d'un de ces corps, elles ſeront uniformes chacune en elle-même (*remarq. déf.* 9.) ſi on les conſidere comme inſtantanées. D'où il ſuit (*cor.* 4. *regl. gen. des vîteſ. unif.*) que dans un même corps les forces motrices ſeront toûjours comme les vîteſſes ; ce qui eſt clair encore par l'axiome 2. puiſque les vîteſſes dans un même corps ſont les effets des forces. **Fig. 8.**

Mais (*hyp.*) les vîteſſes croiſſent comme celles des corps graves, c'eſt-à-dire (*cor.* 1. *théor* 6.) dans la raiſon des tems. Donc les forces motrices croîtront de même dans la raiſon des tems ; de telle ſorte que ſi la force du corps C mû pendant tout le tems AB eſt au premier inſtant AF égale à FG, la plus grande & la derniere des forces partielles de ce même corps, ſera exprimée par BO, parallele à FG, & rencontrant AG prolongée en O : car les triangles ſemblables FAG & BAO donnent AF. AB :: FG. BO. Par la même raiſon les autres forces partielles intermediaires ſont exprimées par les autres paralleles intermediaires. D'où il eſt clair que la ſomme de toutes ces forces eſt exprimée par la ſomme de ces paralleles ou par l'aire triangulaire ABO.

Donc ſi l'on ſuppoſe le premier inſtant AF$=1$, tout le tems AB$=t$, & que le corps C ait ſa force motrice initiale FG$=f$, l'on aura $1 . t :: f .$ BO. & par conſequent la derniere & la plus grande des forces partielles du corps C ſera $ft=$BO, & la ſomme de toutes ces forces ſera (*élem. de Géom.*) $\frac{AB \times BO}{2} = \frac{ftt}{2}$.

Pareillement ſi le tems du mouvement entier du corps K eſt égal à θ, & ſa premiere force motrice $= \varphi$, la plus grande & la derniere de toutes ses forces partielles sera $=\varphi\theta$, & leur somme $=\frac{\varphi\theta\theta}{2}$.

Donc la somme des forces du corps C sera à la somme des forces du corps K, comme $\frac{ftt}{2} = \frac{\varphi\theta\theta}{2}$.

COROLLAIRE I.

Par le principe general de tous les mouvemens possibles, les sommes des forces partielles sont comme les sommes des voyes décrites par chaque point des corps mûs; mais les sommes de ces voyes (parce qu'on suppose que les corps C & K se meuvent en glissant sur un plan ou en tombant, & non pas en roulant) sont ici (*cor.* 1. *th.* 2.) comme les produits des masses entieres des corps C & K, multipliées par la longueur des espaces qu'ils parcourent. Donc ces mêmes produits seront comme ftt à $\varphi\theta\theta$; d'où il suit que si les masses des corps C & K sont m & μ, les voyes ou espaces qu'ils parcourent e & ϵ, on aura $me.\mu\epsilon :: ftt.\ \varphi\theta\theta$. ce qui donne $ftt\mu\epsilon = \varphi\theta\theta me$.

COROLLAIRE II.

On a vû sur la fin de la démonstration de ce Lemme, que les dernieres forces des corps C & K sont ft & $\varphi\theta$; mais leurs vîtesses dernieres étant instantanées, & par consequent (*remarq. déf.* 9.) uniformes, seront (par la troisiéme regle gen. $f\mu v = \varphi mu$, qui donne $u.\ v :: f\mu.\ \varphi m.$) comme les produits de ces forces dernieres prises directement par les masses reciproquement; c'est-à-dire (en appellant ces vîtesses u & v) $u.\ v :: ft\mu.\ \varphi\theta m.$ d'où l'on a $ft\mu v = \varphi\theta mu$.

Si l'on vouloit employer la méthode enseignée dans la remarque après le Corollaire 11. du Théoreme 4. on pourroit tirer de ces deux regles generales pour les mouvemens accelerez dans la raison de ceux des corps graves, un grand nombres de regles particulieres, suivant les differentes suppositions que l'on feroit.

LEMME II.

Un corps mû par deux forces agissant ensemble suivant deux directions differentes, parcourt la diagonale du parallelogramme formé par ces deux directions, dans le même tems que chacune de ces deux forces lui en auroient fait parcourir les côtez, qu'on leur suppose proportionnels.

DEMONSTRATION.

Si le corps M poussé par la seule force P, va de M jusqu'à B, & qu'en un tems pareil il aille de M à C, étant poussé par la force Q, on n'a qu'à achever le parallelogramme MCDB: je dis que si les deux forces P & Q agissent ensemble, le corps M parcourra la diagonale MD dans le même tems qu'il parcourroit un des côtez avec une seule de ces forces. FIG. 9.

Car puisqu'on suppose que la seule force P porteroit ce corps de M jusqu'à B dans le même tems que la seule force Q le porteroit de M jusqu'à C; la premiere force P sera (*cor. 9. théor. 4.*) à l'autre Q, comme MB est à MC; ou (ayant décrit un parallelogramme semblable MEFG quelqu'il soit) comme MG est à ME. Donc (*corol. 7. théor. 4.*) la force P porteroit le corps de M jusqu'à G dans le même tems que la force Q le porteroit de M jusqu'à E. Mais puisque la force Q agit suivant la ligne MC parallele à BD ou à FG, cette force Q ne changera en rien la vîtesse que l'autre force P imprime au corps, pour le faire approcher de la ligne GF. Il ne faudra donc ni plus ni moins de tems pour que le corps approche de cette ligne GF, soit que la force Q lui soit imprimée, ou non; & ainsi à la fin du tems requis il se trouvera quelque part dans la ligne GF. Par la même raison à la fin du même tems, le même corps se trouvera quelque part dans la ligne FE. Donc il se trouvera alors dans le point F, où concourt l'une & l'autre ligne. Ce qu'on a démontré du point F pris à discrétion dans la diagonale MD, doit s'entendre pareillement de chacun des points de cette diagonale. Donc le corps mû par les deux forces P & Q jointes ensemble, ira jusqu'à D suivant la diagonale MD, dans le même tems qu'avec ces forces separées il parcourroit MC ou MB. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Donc le corps M poussé par ces deux forces P & Q, jointes ensemble de la maniere qu'on le vient de dire, parcourt la diagonale MD, comme s'il étoit poussé de M vers D par une seule force avec la même vîtesse & dans le même tems ; & reciproquement un même corps poussé par une seule force suivant une ligne droite, est mû comme s'il étoit poussé avec la même vîtesse suivant cette même ligne, par deux forces jointes ensemble, de la maniere qu'il a été dit.

COROLLAIRE II.

Donc si une seule force pousse le corps M suivant la droite MD (ayant décrit le parallelogramme MCDB) il sera mû comme si deux forces le poussoient en même tems, l'une suivant MB, & l'autre suivant la droite MC; & que ces deux forces fussent telles, que chacune separée lui pût faire parcourir le côté correspondant du parallelogramme dans un tems égal à celui auquel la force unique l'a transporté de M à D, ou que ces deux forces (*cor. 9. regl. des mouv. unif.*) fussent chacune à la premiere force unique, comme chaque côté correspondant du parallelogramme est à sa diagonale.

COROLLAIRE. III.

Donc un corps qui par sa propre pesanteur parcourt la diagonale MD perpendiculaire à l'horison, fait autant d'effort pour descendre suivant la direction MB, que si en place de sa pesanteur deux autres forces jointes ensemble le poussoient suivant cette même verticale MD,

& que ces forces fussent à sa pesanteur, dont on fait abstraction, comme les côtez MC, MB, sont à la diagonale MD du parallelogramme MCDB.

COROLLAIRE IV.

D'où il suit que le corps M posé sur un plan incliné EG, fait autant effort par son propre poids pour descendre suivant la direction de ce plan, ou suivant MB parallele au plan; que si ce corps n'ayant aucune pesanteur, étoit poussé en même tems par deux forces dont les directions seroient MB & MC, & qui seroient elles-mêmes à la pesanteur ôtée comme ces côtez MB & MC du parallelogramme MCDB, sont à sa diagonale MD perpendiculaire à l'horison. Mais puisque (à cause de MC (*hyp.*) perpendiculaire au plan EG) ce même plan soûtient toute la force dont la direction est MC, le corps M en ce cas seroit poussé seulement suivant la direction MB par l'autre force, qui est à la pesanteur ôtée comme MB est à MD. Donc aussi, en remettant la pesanteur en place de ces forces supposées, le corps posé sur le plan EG sera poussé suivant MB parallele (*hyp.*) au plan par une force qui est à la pesanteur du corps comme MB est à MD. FIG. 10.

COROLLAIRE V.

Mais ayant fait EF perpendiculaire à l'horisontale GF, & parallele à la direction MD de la pesanteur du corps M, les triangles GEF & DMB seront semblables, d'où l'on tire EF. EG : : MB. MD. Donc le corps M posé sur un plan incliné EG, fait effort pour descendre suivant la direction de ce plan, ou suivant MB parallele au plan, avec une force qui sera à sa pesanteur comme EF est à EG, c'est-à-dire, comme la hauteur du plan est à sa longueur.

COROLLAIRE VI.

Donc si l'on suppose e=EG longueur du plan l=EF sa hauteur ; & que p soit égal à la pesanteur du corps C, & f à son effort ou à sa force suivant la direction EG ; on aura $f.\ p :: l.\ e.$ d'où l'on tire $fe = lp$, ou $f = \frac{lp}{e}$.

Soient *les corps*,	C, K.
Leurs masses,	m, μ.
Leurs pesanteurs absoluës,	p, π.
Les espaces parcourus, ou les longueurs des plans suivant lesquels tombent les corps,	e, ε.
Les hauteurs de ces plans,	l, λ.
Les efforts ou forces premieres suivant la longueur de ces plans,	f, φ.
Les tems employez à descendre le long des plans,	t, θ.
Les vîtesses dernieres suivant la direction des plans,	u, υ.

COROLLAIRE VII.

FIG. 11. Il est évident par la même raison que la force premiere ou l'effort du corps K, suivant la direction du plan AR, est à sa pesanteur, comme la hauteur AS du plan est à sa longueur AR ; c'est-à-dire, que si la longueur du plan AR $= \varepsilon$, sa hauteur AS $= \lambda$, la pesanteur du corps K $= \pi$, son effort suivant la direction AR $= \varphi$, l'on aura $\varphi.\ \pi :: \lambda.\ \varepsilon.$ d'où l'on tire $\varphi\varepsilon = \lambda\pi$, ou $\varphi = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon}$.

COROLLAIRE VIII.

Mais puisque (*cor.* 6. & 7.) $f = \frac{lp}{e}$, & $\varphi = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon}$, si l'on substituë ces valeurs $\frac{lp}{e}$, $\frac{\lambda\pi}{\varepsilon}$, des forces premieres f, φ ; en place de f, φ dans les équations $ftt\mu\varepsilon = \varphi\theta\theta me$, & $ft\mu\upsilon = \varphi\theta mu$, démontrées dans les Corollaires 1. & 2. du Lem. 1. l'on aura ces nouvelles équations $\frac{lptt\mu\varepsilon}{e} = \frac{\lambda\pi\theta\theta me}{\varepsilon}$ & $\frac{lpt\mu\upsilon}{e} = \frac{\lambda\pi\theta mu}{\varepsilon}$, qui étant multipliées l'une & l'autre par $e\varepsilon$, donnent ces deux regles generales.

REGLES GENERALES

Pour les corps graves tombant le long des plans quelconques.

1re.	2^{e}.
$lpttμεε = λϖθθmee.$	$lptμυε = λϖθmue.$

AVERTISSEMENT.

Comme ces deux regles comprennent tous les rapports possibles entre les pesanteurs & les masses, elles sont plus generales (défaut certainement bien précieux) qu'il ne faut pour l'hypothese vulgaire, où l'on suppose que les masses des corps sont proportionnelles à leurs pesanteurs; c'est-à-dire, que $m.μ::p.ϖ.$ ou $mϖ=μp$. Pour déterminer donc ces deux regles à cette hypothese, il faut diviser le premier membre de chacune par $μp$, & le second par $mπ$, & elles seront par-là réduites aux équations suivantes, ausquelles la difference des poids n'apporte aucun changement.

REGLES SELON L'HYPOTHESE COMMUNE,

Pour les corps graves tombant le long des plans quelconques.

1re.	2^{e}.
$lttεε = λθθee.$	$ltυε = λθue.$

COROLLAIRE I.

Il suit en general de la premiere de ces regles, 1°. que $l.λ::θθee.ttεε.$ $\sqrt{l}.\sqrt{λ}::θe.tε.$ d'où l'on tire $tε.\sqrt{l}=θe\sqrt{λ}.$ ce qui donne, 2°. $e.ε::t\sqrt{l}.θ\sqrt{λ}.$ & 3°. $t.θ::e\sqrt{λ}.ε\sqrt{l}.$ c'est-à-dire, qu'en general dans les chûtes des corps graves quels qu'ils soient le long des plans quelconques, 1°. Les hauteurs des plans sont toûjours comme les produits de leurs quarrez, ou des quarrez de leurs longueurs prises directement par les quarrez des tems pris reciproquement (le mot de *plan* signifiera dans la suite la longueur d'un plan.) 2°. Les longueurs des plans sont toûjours comme les produits des racines de leurs hauteurs par les tems employez à tomber. 3°. Ces tems sont toûjours comme les produits des longueurs des plans pris directement par les racines de leurs hauteurs reciproquement prises. *Cette derniere consequence contient les propositions 5. & 6. de Galilée du mouvement des graves.*

COROLLAIRE II.

Il suit en general de la seconde de ces regles, 1°. que $t.\theta :: \lambda u e . l \upsilon \varepsilon$. 2°. $e.\varepsilon :: l t \upsilon . \lambda \theta u$. 3°. $l.\lambda :: \theta u e . t \upsilon \varepsilon$. 4°. $u.\upsilon :: l t \varepsilon . \lambda \theta e$. c'est-à-dire, 1°. que les tems des chutes sont toûjours comme les solides faits des plans & des vîtesses dernieres pris directement, & des hauteurs des plans pris reciproquement. (Le mot de *vîtesse* sera pris dans la suite pour la derniere vîtesse de toutes celles qui ont été acquises suivant la direction du plan.) 2°. Les espaces parcouruës sur les plans sont toujours comme les solides faits des tems & des hauteurs des plans pris directement, & des vîtesses dernieres reciproquement prises. 3°. Les hauteurs des plans sont toûjours comme les solides faits des vîtesses & des plans pris directement par les tems reciproquement pris. 4°. Les vîtesses dernieres sont toujours comme les solides des hauteurs des plans & des tems pris directement par les longueurs reciproquement prises.

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose $t=\theta$, ou $tt=\theta\theta$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $l\varepsilon\varepsilon=\lambda ee$; d'ou l'on tire $l.\lambda :: ee.\varepsilon\varepsilon$. ou $e.\varepsilon :: \sqrt{l}.\sqrt{\lambda}$. c'est-à-dire, lorsque les tems des chûtes sont égaux, les hauteurs des plans sont comme les quarrez de leurs longueurs, ou les plans sont comme les racines de leurs hauteurs.

COROLLAIRE IV.

Dans cette même hypothese de $t=\theta$, la seconde regle generale

generale deviendra celle-ci $lv\varepsilon = \lambda ue$; d'où $ue . v\varepsilon :: l . \lambda$. (*cor.* 3.) $ee . \varepsilon\varepsilon$. ou $u . v :: e . \varepsilon$. c'eſt-à-dire, lorſque les tems ſont égaux, les vîteſſes ſont en raiſon des longueurs parcouruës.

COROLLAIRE V.

Si l'on ſuppoſe $l = \lambda$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $tt\varepsilon\varepsilon = \theta\theta ee$, ou $t\varepsilon = \theta e$; d'où l'on tire $e . \varepsilon :: t . \theta$. c'eſt à-dire, lorſque les plans ſont de même hauteur, les tems ſont comme les longueurs.

COROLLAIRE VI.

Dans la même hypotheſe de $l = \lambda$, la ſeconde regle generale deviendra celle-ci $tv\varepsilon = \theta ue$, que l'on reduit (*cor.* 5.) à cette autre $u = v$; c'eſt-à-dire, lorſque les hauteurs des plans ſont égales, les vîteſſes dernieres le ſont auſſi.

COROLLAIRE VII.

Si l'on ſuppoſe $e = \varepsilon$, ou $ee = \varepsilon\varepsilon$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $ltt = \lambda\theta\theta$; d'où l'on tire $l . \lambda :: \theta\theta . tt$. ou $t . \theta :: \sqrt{\lambda} . \sqrt{l}$. c'eſt-à-dire, lorſque les longueurs parcouruës ſont égales, les hauteurs des plans ſont en raiſon reciproque des quarrez des tems, ou les tems ſont en raiſon reciproque des racines des hauteurs de ces plans. *C'eſt-là la quatriéme propoſition de Galilée du mouvement des graves.*

COROLLAIRE VIII.

Dans cette même hypotheſe de $e = \varepsilon$, la ſeconde regle generale deviendra celle-ci $ltv = \lambda\theta u$; d'où l'on tire $u\theta . vt :: l . \lambda ::$ (*cor.* 7.) $\theta\theta . tt$. ou $u . v :: \theta . t$. c'eſt-à-dire, lorſque les plans parcourus ſont égaux, les vîteſſes dernieres ſont toujours en raiſon reciproque des tems.

COROLLAIRE IX.

Si l'on ſuppoſe $u = v$, la ſeconde regle generale deviendra celle-ci $lt\varepsilon = \lambda\theta e$; d'où l'on tire, 1°. $t . \theta :: \lambda e . l\varepsilon$.

2°. $e.\ \varepsilon :: lt.\ \lambda\theta.$ 3°. $l.\ \lambda :: \theta e.\ t\varepsilon.$ c'est-à-dire, lorsque les vîtesses dernieres sont égales. 1°. Les tems sont toûjours comme les produits des plans pris directement par leurs hauteurs reciproquement prises, & par consequent sont comme les longueurs des plans d'égale hauteur, ou bien sont en raison reciproque des hauteurs, si les plans sont égaux. 2°. Les plans sont comme les produits de leurs hauteurs par les tems, & par consequent comme les tems, si les plans sont de même hauteur, ou comme les hauteurs, si les tems des chûtes sont égaux. 3°. Les hauteurs des plans sont comme les produits de leurs longueurs prises directement par les tems reciproquement, & par consequent comme les longueurs des plans, si les tems sont égaux, ou en raison reciproque des tems, si les plans sont les mêmes.

COROLLAIRE X.

Si l'on suppose $e.\ \varepsilon :: l.\ \lambda.$ ou $e\lambda = \varepsilon l$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $\theta\theta e = tt\varepsilon$; d'où l'on tire $e.\ \varepsilon :: tt.\ \theta\theta.$ selon la même hypothese, la seconde regle generale deviendra celle-ci $u\theta = vt$; d'où l'on tire $t.\ \theta :: u.\ v.$ ou $tt.\ \theta\theta :: uu.\ vv.$ ou $e.\ \varepsilon :: uu.\ vv.$ c'est-à-dire, lorsque les longueurs des plans sont comme leurs hauteurs (soit que ces plans soient inclinez à angles égaux sur l'horison, soit qu'ils soient tous les deux verticaux ou perpendiculaires à une ligne horisontale) les espaces ou longueurs parcouruës sont toûjours comme les quarrez des tems ou des dernieres vîtesses; ce qui a déja été démontré, Cor. 2. Théor. 6. & Théor. 7. *Ce Corollaire comprend les propositions 1. & 2. de Galilée du mouvement acceleré.*

COROLLAAIRE XI.

Si $l.\ \lambda :: ee.\ \varepsilon\varepsilon.$ ou $l\varepsilon\varepsilon = \lambda ee$, la premiere regle generale deviendra celle-ci $tt = \theta\theta$, ou $t = \theta$, c'est-à-dire, lorsque les hauteurs des plans sont comme les quarrez de leurs longueurs, les tems employez à parcourir ces differens plans sont égaux.

COROLLAIRE XII.

Si l'on suppose encore $l . \lambda :: ee . \varepsilon\varepsilon$. ou $l\varepsilon\varepsilon = \lambda ee$, en multipliant le membre $\lambda\theta ue$ de la seconde regle generale par $l\varepsilon\varepsilon$, & l'autre membre $ltv\varepsilon$ par λee, en divisant ensuite l'un & l'autre membre par $e\varepsilon l\lambda$, l'on aura $u\theta\varepsilon = vte$; d'où l'on tire $u . v :: te . \theta\varepsilon$. Donc puisque (*Corol.* 11.) $t = \theta$, l'on aura enfin $u . v :: e . \varepsilon$. c'est-à-dire, lorsque les hauteurs des plans sont comme les quarrez de leurs longueurs, les vîtesses dernieres sont comme les longueurs parcouruës.

AVERTISSEMENT.

Rien n'est si aisé que de tirer de ces deux regles generales une infinité d'autres particulieres, en employant la méthode enseignée dans la remarque après le Cor. 11. du Théor. 4. C'est pourquoi nous finirions ici cette matiere, si nous ne jugions à propos de démontrer quelques-unes de ces regles par les figures, après avoir établi par maniere de Lemme les propositions suivantes.

I. Soit $\div a . b . c$. je dis que l'on a $a . c :: a^2 . b^2 :: b^2 . c^2$. Car puisque (*hyp.*) $a . b :: b . c$. l'on a $ac = b^2$, & par consequent $a^2 . b^2 :: a^2 . ac :: a . c$. & $b^2 . c^2 :: ac . c^2 :: a . c$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

II. Mais puisque $a^2 . b^2 :: a . c$. & $b^2 \; c^2 :: a . c$. l'on aura $a . b :: \sqrt{a} . \sqrt{c}$. & $b . c . \sqrt{a} . \sqrt{c}$.

III. Il est évident aussi que l'on aura $\ddot{\div} a . b . c$. si l'on a $a^2 . b^2 :: a . c$. ou $b^2 . c^2 :: a . c$. Car alors $a^2 c = ab^2$, & $b^2 c = ac^2$, ou $ac = b^2$, & $b^2 = ac$; d'où l'on tire $a . b :: b . c$. *C. Q. F. D.*

IV. Donc $a . b :: b . c$. lorsque l'on a $a . b :: \sqrt{a} . \sqrt{c}$. ou $b \; c :: \sqrt{a} . \sqrt{c}$. Car l'on a pour lors $a^2 . b^2 :: a . c$. & $b^2 . c^2 :: a . c$.

COROLLAIRE XIII.

Si l'on fait EP moyenne proportionnelle entre ER & EG, & qu'un corps commence à tomber de E suivant les di- FIG. 12.

rections ER & EG, il ſuit du Corollaire 10. que les tems employez à parcourir ER & EG ſont entr'eux comme ER eſt à EP, ou comme EP eſt à EG; car (*n.* 1.*avert. préced.*) ER eſt à EG comme le quarré de ER eſt au quarré de EP, ou comme le quarré de EP eſt au quarré de EG. Mais encore (*Corol.* 10.) ER & EG ſont entre-eux comme les quarrez des tems employez à parcourir les mêmes ER & EG. Donc ces tems ſont entr'eux comme ER & EP, ou comme EP & EG.

COROLLAIRE XIV.

FIG. 13. D'où & du Corollaire 5. il ſuit en general que les tems des chûtes ſuivant les plans EF & ER, ſont entr'eux comme EF eſt à EP moyenne proportionnelle entre ER & ſa partie EG compriſe depuis l'origine E de la chûte juſqu'à l'horiſontale FG. Car (*Corol.* 5.) le tems de la chûte ſuivant EF eſt au tems de la chûte ſuivant EG comme EF eſt à EG. Mais (*Corol.* 13.) le tems de la chûte par EG eſt au tems de la chûte par ER comme EG eſt à EP. Donc (*par les regles des proportions*) le tems de la chûte ſuivant EF eſt au tems de la chûte ſuivant ER comme EF eſt à EP. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XV.

Si EF étoit égal à EP, ou (ce qui eſt la même choſe, à cauſe de EP moyenne proportionnelle entre ER & EG, par le Corol. 14.) ſi l'on avoit EG. EF :: EF. ER; les tems des chûtes depuis le point E ſuivant les plans EF & ER ſeroient égaux.

COROLLAIRE XVI.

D'où il ſuit que les eſpaces ou plans EF, ER, parcourus en tems égal, ſeront en raiſon reciproque de leurs longueurs EF, EG, compriſes entre le point commun E, & la ligne horiſontale FG; c'eſt-à-dire, que EF. ER :: EG. EF. ou EP; ce qui ſera encore démontré autrement dans le Corollaire ſuivant.

COROLLAIRE XVII.

Si un corps (c'est la même chose de deux corps differens) tombant d'une même hauteur E suivant les plans EF & EG, parcourt en tems égaux les espaces EF & ER; il suit du Corollaire 3. que ces espaces ou plans EF, ER, sont en raison reciproque de leurs longueurs EF, EG, comprises entre le point commun E & l'horisontale FG; c'est-à-dire, que EF. ER : : EG. EF. Fig. 14. & 15.

Car ayant mené EQ perpendiculaire à l'horison, QE & SE seront les hauteurs des plans EF, ER, parcourus (*hyp.*) en tems égaux: mais (*Corol.* 3.) $EF^2 . ER^2$: : QE. SE : : (*élem. géom.*) EG. ER. Donc (*n.* 3. *avert. preced.*) ∺ EG. EF. ER. ou EF. ER : : EG. EF. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE XVIII.

Donc puisque les côtez EG & EF du triangle GEF sont entr'eux (*élem. de géom*) comme les sinus des angles F & G qui leur sont opposez, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus de leurs hauteurs ou angles qu'ils forment avec la ligne horisontale FG; il est clair qu'un corps tombant suivant les differens plans EG & EF en tems égaux (si l'on compte les tems depuis le premier instant de la chûte) parcourt des espaces qui sont entr'eux comme les sinus des hauteurs des plans, le long desquels il tombe.

COROLLAIRE XIX.

Si l'on tire la droite FR, on aura les triangles REF & FEG, dont les côtez qui aboutissent à l'angle commun E, seront (*Corol.* 17.) proportionnels; & par consequent ces triangles seront (*élem. géom.*) semblables entr'eux. Donc ayant coupé les plans EF & EG par la même horisontale FG, si l'on fait l'angle EFR égal à l'angle EGF, les mêmes triangles REF & FEG seront (*élem. géom.*) semblables; & l'on aura RE. EF : : EF. EG. Donc alors

(*Cor.* 17.) les espaces EF & ER seront parcourus en tems égaux.

COROLLAIRE XX.

La même chose arrivera, si ayant tiré la ligne horisontale EX, on fait l'angle EFR égal à l'angle REX; car cet angle REX (*élem. géom.*) étant alors égal à son alterne EGF, l'angle ERF sera necessairement égal à l'angle EFG; puisque des trois angles de chaque triangle EFR, EFG, l'angle en E étant commun, & les deux angles EFR, EGF, étant démontrez égaux, il faut que ceux-ci ERF & EFG soient aussi égaux: mais cet angle EFG est encore égal à son alterne FEL. D'où il suit clairement que si au point commun E pris sur l'horisontale LX, commencent deux plans EF, EG, inclinez d'une maniere quelconque, & coupez par la ligne FR, de telle sorte qu'elle fasse avec ces plans des angles alternativement égaux à ceux que les mêmes plans forment avec l'horisontale LX; les parties EF & ER des plans coupez par la ligne FR seront parcouruës par le corps tombant en tems égaux: *ou autrement*, les chûtes par EF & ER parties des plans coupez par la ligne FR, se feront en tems égaux. *Ce qui est la neuviéme proposition de Galilée du mouvement des graves.*

COROLLAIRE XXI.

FIG. 16. L'on tire des Corollaires précedens cette belle proprieté du cercle; à sçavoir, si de l'une & de l'autre extrêmité d'un diametre circulaire EH perpendiculaire à l'horison GH, l'on mene tant de plans qu'on voudra EO, HO, jusqu'à la circonference du cercle EOHOE, les tems des chûtes de E en O, ou de O en H, suivant tous ces plans, seront tous égaux.

Car, 1°. ayant prolongé quelque ligne EO que ce soit, jusqu'à ce qu'elle ait rencontré en G l'horisontale HG; & ayant mené la ligne HO, les triangles EHO & EGH seront (*élem. géom.*) semblables, puisque les angles EOH

& EHG sont (*élem. géom.*) droits, & que l'angle en E est commun aux deux triangles. Donc on a EG. EH :: EH. EO. Donc (*Cor.* 15. *& suiv.*) les chûtes commencées du point E suivant les plans EH & EO, & par consequent suivant tous les plans EO, se feront en tems égaux.

2°. Les tems qu'employe un corps à tomber de O suivant tous les plans OH, sont aussi égaux entr'eux, & égaux aux tems employez à parcourir les plans EO. Car ayant mené par E les lignes ou cordes EO paralleles chacune à une ligne OH, il est évident que les paralleles EO & OH correspondantes sont de même longueur, & inclinées pareillement sur l'horison : donc les tems des chûtes suivant chaque EO, & suivant la parallele OH correspondante seront égaux; mais on a déja vû (*n.* 1.) que les tems des chûtes suivant chaque EO sont égaux chacun au tems de la chûte suivant EH. Donc les plans EH, EO, OH, seront parcourus en tems égaux par un corps tombant de E ou de O suivant la direction de ces plans.

COROLLAIRE XXII.

Donc on ne peut assigner un plan si petit, ou si grand qu'il soit, qu'on ne puisse en trouver encore un plus petit ou plus grand, qui soit parcouru en tems égal par un corps grave quel qu'il soit, qui tombe suivant la direction du plan.

COROLLAIRE XXIII.

L'on peut, par ce qui vient d'être dit, faire voir assez clairement quels sont les endroits sur plusieurs plans differemment inclinez, où se trouveront en même tems autant de corps graves quels qu'ils soient, qui tombent suivant la direction de ces plans. Car soient plusieurs plans AD inclinez comme on voudra sur l'horison, & coupez par tant de cercles qu'on souhaitera ABB, ACC, ADD, &c. qui touchent tous la ligne horisontale AG au point A, où aboutissent tous ces plans; que de ce FIG. 17.

point touchant A plusieurs corps graves commencent en même tems à tomber suivant les plans AC. Il est clair (*Corol.* 21.) que les corps tombant se trouveront tous en même tems dans les points B de leurs plans, c'est-à-dire, chacun dans le point B du plan qu'il parcourt; ils se trouveront aussi en même tems dans les points C; enfin ils se trouveront encore en même tems dans les points D, &c.

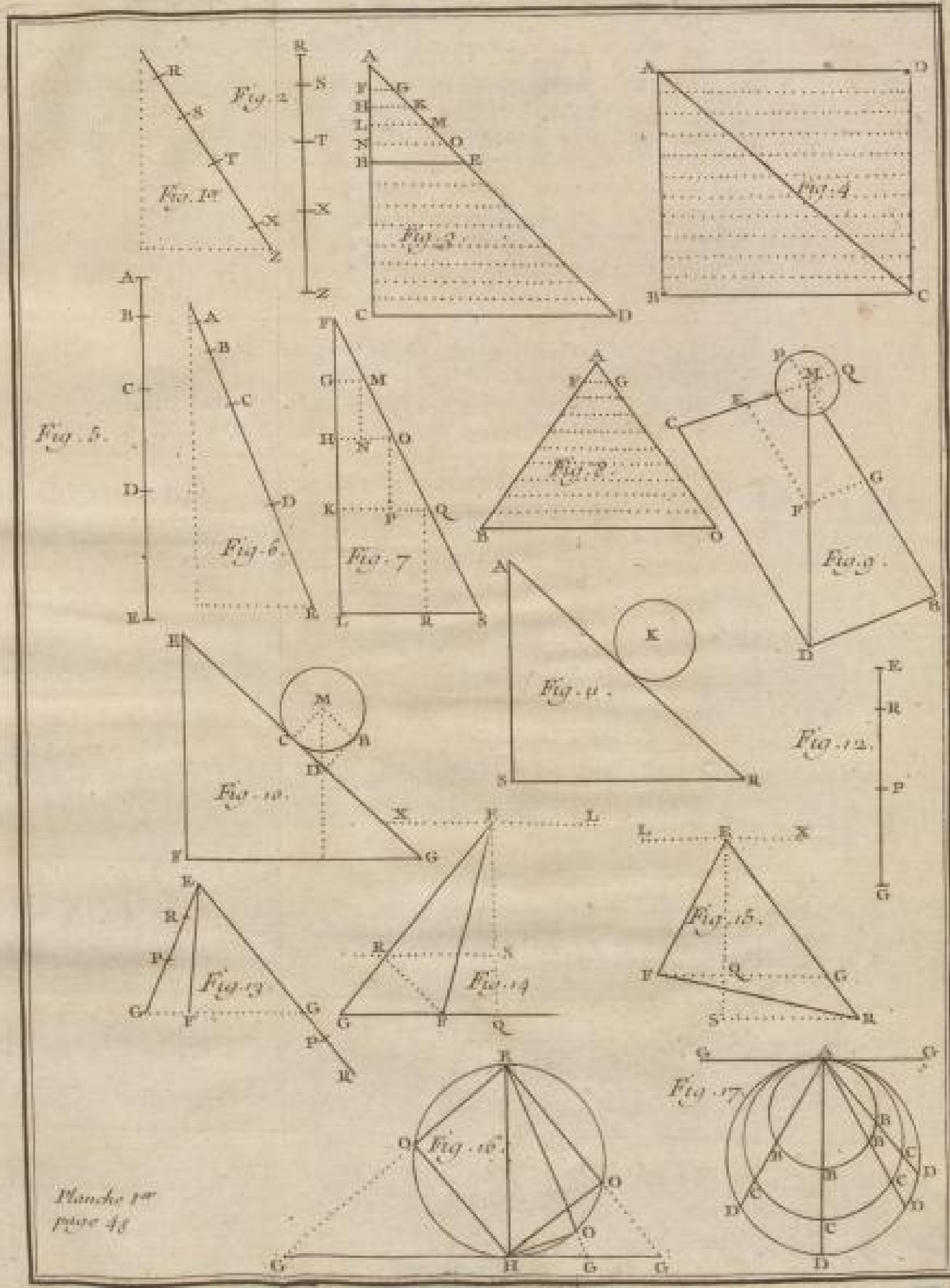

Planche 1re
page 43

TRAITÉ

DU MOUVEMENT ET DE LA MESURE *des Eaux coulantes & jailliſſantes.*

DEFINITION X.

SOient décrits ſur une ligne diamétrale AB autant de cercles qu'on voudra, qui paſſent tous par le même point A, & qui ayent leurs centres en differens points de la ligne AB. Sur une des extrêmitez de chaque diamétre AK, AL, AM, &c. élevez les perpendiculaires KQ, LR, MS, &c. tangentes (*élem. géom.*) des cercles qui leur répondent. Sur l'extrêmité B de la ligne AB élevez auſſi la perpendiculaire BC : faites les perpendiculaires KQ, LR, MS, &c. égales aux parties BD, BE, BF, déterminées par les points où la ligne BC coupe les cercles. FIG. 18.

1°. La ligne BQRS menée par les points B, Q, R, S, &c. eſt appellée *Parabole*. 2°. BM eſt le *diamétre* ou l'*axe* de la parabole. 3°. AB eſt ſon *parametre*. 4°. Les lignes KQ, LR, MS, &c. ſont appellées les *ordonnées* ou les *appliquées* à l'axe MB. 5°. Le point B eſt le *ſommet* de la parabole. 6°. Les parties de l'axe compriſes entre le ſommet B & les ordonnées, telles que ſont BK, BL, BM, &c. ſont nommées *abciſſes*.

COROLLAIRE I.

De la generation de la parabole, il ſuit que les quarrez des ordonnées, telles, par exemple, que LR, MS, ſont entr'eux comme les abciſſes correſpondantes BL, BM. Car (par la proprieté du cercle) $BE^2 = BL \times AB$, & $BF^2 = BM \times AB$: donc $BE^2 . BF^2 :: BL \times AB . BM \times AB$ ::

(par les regles des proportions) BL. BM. Mais (*hyp.*) $BE^2 = LR^2$, & $BF^2 = MS^2$. Donc $LR^2 . MS^2 :: BL . BM$. c'est-à-dire, que les quarrez des ordonnées sont entre-eux comme les abcisses correspondantes. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE II.

Donc LR. MS : : $\sqrt{BL}$. $\sqrt{BM}$. c'est-à-dire, que les ordonnées quelconques LR, MS, sont entr'elles comme les racines des abcisses correspondantes BL, BM.

THEOREME X.

FIG. 19. *Soit un tuyau AC rempli d'eau & ouvert par l'un & l'autre bout. La force avec laquelle la lame inferieure BC est poussée en bas suivant la longueur du tuyau, à l'instant qu'on en ôte le fond, est à la pesanteur de toute la colonne d'eau AC comme la hauteur AE de cette colonne ou du tuyau, est à sa longueur AB.*

DEMONSTRATION.

Que l'on suppose la colonne d'eau ABCD divisée en une infinité de petites lames; il est évident que la pression de la colonne entiere d'eau, suivant la longueur AB du tuyau AC, est la cause ou la force qui au premier instant que l'eau commence à sortir, pousse la lame inferieure BC par l'orifice BC du tuyau AC. Donc la force motrice agissante au premier instant que l'eau commence à sortir, est cette pression ou effort de la colonne d'eau suivant toute la longueur AB du tuyau; & le corps mû par cette force, est la lame inferieure BC: mais (*Corol.* 5. *Lem.* 2.) la force avec laquelle la colonne d'eau AC fait effort suivant la longueur AB du tuyau, est à la pesanteur de la colonne AC comme la hauteur AE du tuyau est à sa longueur AB. Donc la force avec laquelle la lame inferieure BC est poussée dehors suivant la longueur du tuyau au premier instant que l'eau commence à sortir, est à la pesanteur de toute la colonne d'eau AC comme la hauteur AE du tuyau est à sa longueur AB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si en place de l'orifice BC, il n'y avoit que l'orifice GH dans le fond BC, ayant imaginé une colonne interieure FGHK parallele au cylindre total ABCD; il suit clairement que la force avec laquelle la lame inferieure GH au premier instant qu'elle sort, est poussée en bas suivant la longueur AB ou FG du tuyau, est à la pesanteur de la colonne FGHK comme sa hauteur FL est à sa longueur FG. Car puisque toute l'eau contenuë dans le tuyau imaginé FGHK, & dans le tuyau réel ABCD, est soûtenuë par le fond BC, l'eau contenuë dans le tuyau imaginé FGHK, doit être considerée comme s'il n'y en avoit pas d'autre qui l'environnât, & que son tuyau FGHK fût solide & réel. Donc (*par le present Théor.*) l'effort que fait suivant la longueur FG la lame inferieure GH au premier instant qu'elle commence à sortir par l'orifice GH, sera à la pesanteur de la colonne d'eau FGHK, comme sa hauteur FL est à sa longueur FG, ou comme la hauteur AE du tuyau réel AC est à sa longueur AB.

THEOREME XI.

Soit le tuyau ABCD ouvert par les deux bouts, & élevé comme on voudra sur l'horison : qu'il soit continuellement rempli d'eau, de maniere qu'il reste toûjours plein à la même hauteur. Je dis que la vîtesse non seulement de l'eau qui sort par l'orifice BC, mais encore de toutes les lames d'eau qui coulent dans toute la longueur du tuyau, est toûjours égale & uniforme.

DEMONSTRATION.

Soit imaginée la colonne d'eau entiere ABCD ou FGHK divisée en une infinité de lames paralleles à la base; il est évident que ces petites lames d'eau descendent vers l'orifice BC ou GH, & en sortent toutes avec une même & égale vîtesse, puisque pendant tout le tems de cet écoulement elles restent toûjours contiguës les unes aux autres. Donc toutes ces lames ont toûjours une vîtesse égale & uniforme dans toute la longueur du tuyau, & à la sortie de ce même tuyau. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Donc en remplissant continuellement le tuyau, de maniere qu'il soit toûjours également plein, toutes les lames d'eau qui se succedent sans cesse, sortiront par l'orifice BC ou GH avec une force & une vîtesse égale à celle qu'avoit la premiere lame au premier instant que l'eau a commencé à sortir : mais cette force (*Théor.* 10.) est à la pesanteur de la colonne d'eau ABCD ou FGHK, comme la hauteur du tuyau plein est à sa longueur. Donc la force avec laquelle chaque lame coulera par l'orifice BC ou GH est à la pesanteur de la colonne d'eau entiere ABCD ou FGHK, comme AE est à AB, ou FL est à FG.

THEOREME XII.

Les vîtesses des eaux à leur sortie du tuyau, sont comme les racines de leurs propres hauteurs.

DEMONSTRATION.

FIG. 20. Soit le tuyau AEFB d'abord plein d'eau jusqu'en AB, ensuite jusqu'en DC seulement : je dis que la vîtesse de l'eau qui sort par l'orifice G, tandis que le tuyau est encore rempli jusqu'en AB, est à la vîtesse de l'eau qui s'écoule par le même orifice G, lorsque le tuyau n'est plus rempli que jusqu'en DC, comme la racine de la hauteur AK est à la racine de la hauteur CH. Car l'effort que fait la masse d'eau AF suivant AE est (*Cor.* 5. *Lem.* 2.) à sa pesanteur comme AK est à AE, & l'effort de l'eau CF suivant la même direction CE est à sa pesanteur comme CH est à CE. Mais à cause de AK & de CH (*hyp.*)

perpendiculaires à l'horisontale KE, & par-là paralleles entr'elles, on a (*élem. géom.*) AK. AE : : CH. CE. Donc les efforts que font les masses d'eau AF & CF suivant les directions AE & CE, sont comme leurs pesanteurs, & par consequent comme ces masses elles-mêmes, puisque les pesanteurs des corps d'une même espece sont proportionnelles à leurs masses.

Mais à cause de la base commune EF les masses AF & CF sont entr'elles comme AE & CE, ou comme AK & CH. Donc les efforts des masses AF & CF suivant AE & CE sont comme leurs propres hauteurs AK & CH : d'où il suit que si l'on appelle ces efforts f & ϕ, l'on aura $f. \phi : :$ AK. CH. De plus, puisque les masses des eaux qui s'écoulent en tems égaux par l'orifice G, sont comme leurs vîtesses; si l'on nomme ces masses m & μ, & les vîtesses u & υ, l'on aura $m. \mu : : u. \upsilon.$ d'où l'on tire $m\upsilon = \mu u$, laquelle équation étant multipliée par $u\upsilon$, donne $mu\upsilon\upsilon = \mu\upsilon uu$, d'où l'on a $mu. \mu\upsilon : : uu. \upsilon\upsilon$. Mais puisque le mouvement, soit que l'eau tombe de AB ou de DC, est uniforme pendant la durée de chaque instant, il suit (*n.* 5. *Cor.* 1. *des vîtes. unif.*) que $mu. \mu\upsilon : : f. \phi$. Donc on aura aussi $uu. \upsilon\upsilon : : f. \phi$. Mais on vient de voir que $f. \phi : :$ AK. CH. Donc $uu. \upsilon\upsilon : :$ AK. CH. ou $u. \upsilon : : \sqrt{AK}. \sqrt{CH}$. c'est-à-dire, que les vîtesses u & υ des eaux coulantes des hauteurs AK, CH, sont entr'elles comme les racines de ces hauteurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puisque AK & CH (*hyp.*) paralleles entr'elles donnent AK. CH : : AE. CE. ou $\sqrt{AK}. \sqrt{CH} : : \sqrt{AE}. \sqrt{CE}$. on aura $u. \upsilon : : \sqrt{AE}. \sqrt{CE} : : \sqrt{BF}. \sqrt{DF}$.

COROLLAIRE II.

D'où il suit que si du sommet F on décrit sur l'axe FB une parabole FBQ ayant un parametre quelconque, les ordonnées BP & DQ perpendiculaires à l'axe FB de la parabole, seront entr'elles comme les vîtesses correspondantes de l'eau tombante de AB & de CD par l'orifice G. Car (*Corol. 2. déf.* 10.) BP. DQ : : $\sqrt{BF}$. $\sqrt{DF}$. Donc si BP exprime la vîtesse de l'eau à l'orifice G, lorsque sa surface esten AB; l'ordonnée DQ exprimera sa vîtesse au même orifice G, quand sa surface sera en CD : il en est de même de toutes les autres hauteurs. Ainsi à quelque hauteur que soit l'eau dans le tuyau AF, les ordonnées de la parabole qui passent par les points de l'axe BF, où se trouve alors la surface superieure de l'eau, exprimeront les differentes vîtesses de cette même eau à l'orifice G; c'est-à-dire, que si l'eau contenuë dans le tuyau AF, vient à s'écouler entierement de A à E par l'orifice G, ses differentes vîtesses au même orifice G pendant tout le tems de l'écoulement, seront exprimées par les ordonnées correspondantes de la parabole dont l'axe est BF, & le sommet F; & par consequent ces vîtesses décroîtront en raison de ces ordonnées depuis BP jusqu'à F.

REMARQUES.

I. Que l'orifice par où sort le liquide soit placé aux côtez du tuyau, qu'il soit dans le fond, tel qu'est l'orifice G, qu'il soit même en haut, tels que sont les orifices des eaux jaillissantes; il est clair que cela n'apporte aucun changement (puisque les liquides par leur pesanteur sont également pressez de tous côtez) pourvû cependant que dans ces differens cas la hauteur du liquide au dessus de l'orifice par où il coule soit toûjours la même.

II. Plusieurs Auteurs, comme Castelli, Borelli, Guillelmini, &c. & sur tout M. Mariotte, ont confirmé par plusieurs experiences la verité de ce douziéme Théoreme : mais aucun d'eux ne l'avoit encore démontré par la raison seule; car la démonstration même qu'en donne Toricelli, dépend de l'experience par laquelle on a trouvé que les eaux jaillissantes remontent à peu près à la même hauteur d'où elles étoient descenduës. Mais comme ce n'est qu'une experience, qui par consequent ne parle qu'aux ſens, & ne ſçauroit fournir une démonſtration géométrique. Toricelli lui-même fait ſi peu de cas de la démonſtration qu'il en a tirée, qu'il l'abandonne de bonne foi à la diſcrétion du Lecteur, comme on peut le voir dans ſon Traité Latin du Mouvement des Eaux, qu'il a mis à la fin de celui qui a pour titre : *De Motu Projectorum.* Voyez le Livre, *pag.* 192. *&* 193. *lib.* 2. Ce peu de confiance de Toricelli en ſa démonſtration, nous donne occaſion de remarquer en paſſant, que les experiences pouvant toutes en impoſer aux ſens, ne doivent ſervir dans une ſaine Phyſique, qu'à faire conjecturer une verité, lorſqu'elle eſt déja connuë, mais ne doivent jamais tenir lieu de démonſtration exacte ou géométrique.

III. Il eſt clair (*par ce Théor.* 12. *& Cor.* 2. *Théor.* 6.) que les vîteſſes des eaux qui s'écoulent par l'orifice d'un tuyau, ont la même proprieté que les vîteſſes des corps graves qui tombent librement, c'eſt-à-dire, que les unes & les autres ſont comme les racines de leurs hauteurs. Ce ſeroit très-mal conclure de cette proprieté commune, que de dire (comme ont fait quelques-uns) que les vîteſſes d'un corps grave tombant étant produites (*Th.* 6.) par des mouvemens accelerez, celles des eaux coulantes le doivent être auſſi ; puiſqu'au contraire (*Théor.* 11.) les vîteſſes des eaux qui coulent ſont toutes uniformes dans toute la longueur du tuyau. Il eſt bon de remarquer à cette occaſion une regle aſſez commune de raiſonner, qui peut quelquefois induire à erreur ; à ſçavoir, que *dès que les effets ſont ſemblables, ils doivent avoir une même cauſe.* C'eſt pourquoi il ne faut point être ſurpris ſi pluſieurs Auteurs s'appuyant ſur ce principe, n'ont pû trouver une démonſtration exacte du Théoreme 12. tandis que nous le démontrerons encore de nouveau par maniere de Corollaire, que l'on tirera d'un Théoreme plus univerſel.

DEFINITION XI.

La grandeur d'un corps, ou autrement l'eſpace qu'il occupe, s'appelle le *volume* de ce corps. L'alliage ou la liaison des particules dont le corps est composé, est appellée sa *densité*. Et la totalité, ou la somme de toutes ces particules, est nommée *masse*.

COROLLAIRE I.

D'où il suit que les volumes étant égaux, les masses sont comme les densitez.

COROLLAIRE II.

Que les densitez étant égales, les masses sont comme les volumes.

LEMME III.

Les masses des corps sont entr'elles comme les produits des volumes par les densitez.

DEMONSTRATION.

Soient deux corps C, K, dont les masses soient m, μ; les volumes, g, γ; & les densitez, d, δ. Je dis que l'on a toûjours $m . \mu :: gd . \gamma\delta$. Car ayant imaginé un troisiéme corps P, dont la masse soit g, le volume M le même que celui du corps C, la densité δ la même que celle du corps n; on aura (*Corol.* 1. *défin.* 11.) m. M :: $d . \delta$. & (*Corol.* 2. *défin.* 11.) M. $\mu :: g . \gamma$. Donc en multipliant ces deux analogies l'une par l'autre, on aura mM. μM :: $gd . \gamma\delta$. c'est-à-dire, que les masses m, μ, des corps C, K, sont entr'elles comme les produits de leurs volumes g, γ, par leurs densitez d, δ. *C. Q. F. D.*

DEFINITION XII.

FIG. 21. 22. & 23. Si l'on suppose qu'un plan BFC d'une figure quelconque, coule parallelement à lui-même de B en A le long d'une droite BA, il formera un solide ou un corps AC. Ce solide ainsi formé, porte en general le nom de *prisme*, qui, selon ses differentes bases, porte encore ses differens noms; car on le nomme *parallelepipede* ou *cylindre*,

cylindre, ſelon que ſa baſe ou figure generatrice eſt un parallelogramme ou un cercle. Le priſme parallelepipede & le cylindrique ſont appellez *rectangles*, lorſque la ligne directrice AB eſt perpendiculaire à la baſe ; & *obliquangles*, lorſque AB n'eſt pas perpendiculaire.]

COROLLAIRE I.

De cette generation des priſmes rectangles, ſoit parallelepipedes ou cylindres, il ſuit que ces corps, ou (*déf.* 11.) leurs volumes, ſont produits par la baſe repetée autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur AB, & par conſequent que chaque corps eſt égal au produit de la baſe BFC multipliée par la hauteur AB.

COROLLAIRE II.

FIG. 24.

D'où il ſuit auſſi que les priſmes même obliquangles, ſont égaux aux produits de leurs baſes par leurs hauteurs. Car ſoit un priſme quelconque obliquangle EBCF (exprimé par le cylindre dont nous avons ſur tout beſoin dans la ſuite) ſur la baſe duquel ſoit imaginé un autre priſme rectangle ABCD, dont la hauteur AB ou EN ſoit égale à celle du premier ; de maniere que ces deux priſmes ſoient entre deux plans paralleles ED, BC. Que l'on ſuppoſe ces deux priſmes diviſez en une infinité de lames déliées KH, LM, par une infinité de plans LK paralleles à la baſe BC : il eſt évident qu'il y aura autant de lames HK dans le priſme ABCD, qu'il y a de lames LM dans le priſme EBCF, & que chaque HK eſt égale à chaque LM correſpondante, étant l'une & l'autre égales à la baſe BC. Par conſequent la ſomme de toutes les lames HK qui compoſent le rectangle ABCD, eſt égale à la ſomme de toutes les lames LM qui compoſent l'obliquangle EBCF, ou bien le priſme EBCF eſt égal au priſme ABCD de même baſe & de même hauteur (*hyp.*) que lui. Mais (*Corol.* 1.) le rectangle ABCD $= AB \times BC = EN \times BC$. Donc auſſi l'obliquangle EBCF $=$

$AB \times BC = EN \times BC$, c'est-à-dire, est égal au produit de la base BC, multipliée par la hauteur EN.

COROLLAIRE III.

FIG. 25. Il suit encore que le cylindre oblique EBCF est égal au produit de sa longueur EB multipliée par la section BP perpendiculaire à cette longueur. Car si le cylindre prolongé est terminé par l'autre section EQ parallele à BP, on aura, à cause des portions égales BPC & EQF, le cylindre rectangle EBPQ égal à l'oblique donné EBCF. Mais (*Cor.* 1.) le cylindre rectangle EBPQ est égal au produit de sa base BP multipliée par sa hauteur EB qui est la longueur de l'oblique EBCF. Donc aussi ce cylindre oblique EBCF est égal au produit de sa longueur EB multipliée par la section BP perpendiculaire à cette longueur, c'est-à-dire, que $EBCF = EB \times BP$.

COROLLAIRE IV.

Puisque (*Cor.* 2.) le même cylindre oblique $EBCF = EN \times BC$. Donc $EN \times BC = EB \times BP$. Donc en divisant le tout par EB, $BP = \frac{EN \times BC}{EB}$.

COROLLAIRE V.

FIG. 26. & 27. Que les cylindres ABCD, MOPQ, soient des tuyaux inclinez comme on voudra sur l'horison, dont les hauteurs soient AE, MN: que ces tuyaux soient remplis de liqueur qui coule par les orifices horisontaux GH & RS, qui sont les bases des colonnes liquides FGHK & VRST paralleles aux tuyaux: que les sections GL, RY, de ces colonnes soient faites perpendiculaires à leurs longueurs. Il suit du Corollaire 4. que $GL = \frac{AE \times GH}{AB}$, & que $RY = \frac{MN \times RS}{MQ}$.

THEOREME XIII.

Ayant ſuppoſé les mêmes choſes que dans le Corollaire 5. de la définition 12. je dis que les volumes des liqueurs qui coulent au même inſtant par les orifices GH, RS, ſont entre-eux comme les produits des vîteſſes multipliées par les ſections GL, RY, des cylindres liquides FGHK, VRST, faites paralleles aux longueurs de ces cylindres, ou aux directions des écoulemens. Fig. 26. & 27.

Demonstration.

Il eſt clair (*Théor.* 11.) que les liqueurs qui compoſent les priſmes ou cylindres FGHK, VRST, ſont müës avec une vîteſſe égale & uniforme dans toute la longueur de chaque cylindre ; & par conſequent qu'il paſſe dans un même inſtant par les ſections GL, GH, des volumes égaux de liqueurs : pareillement les volumes de liqueur qui paſſeront dans un même inſtant par les ſections RY, RS, ſeront égaux entr'eux. Mais il eſt évident par la generation des priſmes (*défin.* 12.) que les hauteurs des petits priſmes liquides qui paſſent dans un même inſtant par les ſections GL, RY, perpendiculaires (*hyp.*) aux directions des écoulemens, ſont entr'elles comme les vîteſſes de ces écoulemens. D'où il ſuit que les volumes de ces petits priſmes inſtantanés ſont entr'eux comme les produits des baſes GL, RY, multipliées par les vîteſſes des écoulemens. Donc les volumes des liqueurs qui paſſent dans un même inſtant par les orifices GH, RS, ſont entr'eux comme les produits des vîteſſes des écoulemens multipliées par les ſections GL, RY, perpendiculaires aux directions de ces écoulemens. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire I.

Donc ſi ces volumes des liqueurs qui paſſent dans un même inſtant par les orifices GH, RS, ſont appellez g, γ, & leurs vîteſſes u, υ ; l'on aura (*Théor.* 13.) $g = GL \times u$,

& $\gamma = RY \times v$. Mais (*Corol.* 5. *défin.* 12.) $GL = \frac{AE \times GH}{AB}$; & $RY = \frac{MN \times RS}{MO}$. Donc si l'on nomme les longueurs AB & MO des tuyaux e, ε; leurs hauteurs AE, MN, l, λ, & leurs orifices GH, RS, o, ω: les volumes des liqueurs qui coulent dans un même instant par les orifices GH, RS, seront $g = \frac{lou}{e}$, & $\gamma = \frac{\lambda \omega u}{\varepsilon}$.

COROLLAIRE II.

Mais ayant appellé les masses de ces volumes instantanées m & μ; leurs densitez, d, δ; on aura (*Lem.* 3.) $m . \mu :: gd . \gamma\delta$. Donc après avoir substitué dans cette analogie les valeurs trouvées (*Cor.* 1.) des volumes $g = \frac{lou}{e}$, & $\gamma = \frac{\lambda \omega v}{\varepsilon}$, on aura $m . \mu :: \frac{loud}{e} . \frac{\lambda \omega v \delta}{\varepsilon} ::$ (*regl. des proport.*) $\varepsilon loud . e \lambda \omega v \delta$. & par consequent aussi $mu . \mu v :: \varepsilon louud . e \lambda \omega v v \delta$. en multipliant les antecedens par u, & les consequens par v.

COROLLAIRE. III.

Si l'on appelle f, φ, les forces ou efforts que font par leurs pesanteurs absoluës les colonnes liquides FGHK, VRST, suivant les directions de leurs longueurs FG, VR, ou AB, MO, pour pousser dans un même instant quelconque toutes les parties dont elles sont composées, avec des vîtesses (*Théor.* 11.) égales & uniformes; l'on aura (*art.* 5. *Corol.* 1. *regl. gener. des vîtes. unif.*) $f . \varphi :: mu . \mu v$. d'où l'on a (*Corol.* 2.) $f . \varphi :: loduu\varepsilon . \lambda \omega \delta v v e$.

COROLLAIRE IV.

Ayant appellé p & Π, les pesanteurs absoluës des colonnes liquides FGHK, VRST, on aura (*Corol.* 6. & *Lem.* 2.) $f = \frac{pl}{e}$, & $\varphi = \frac{\Pi\lambda}{\varepsilon}$. Donc (*Corol.* 3.) $\frac{pl}{e} . \frac{\Pi\lambda}{\varepsilon} ::$

$loduue . \lambda\omega\delta\upsilon\upsilon\epsilon$; ce qui donne $pl\lambda\omega\delta\upsilon\upsilon$, $\Pi\lambda loduu$, ou bien (en divisant toute l'équation par $l\lambda$) $p\omega\delta\upsilon\upsilon$ $\Pi ouud$; d'où l'on tire $p . \Pi :: ouud . \omega\upsilon\upsilon\delta$.

TABLE

Des valeurs des lettres.

Les volumes des lames d'eau qui coulent dans un même instant par les orifices GH, RS, soient appellées	g, γ.
Les densitez de ces lames soient nommées	d, δ.
Leurs masses,	m, μ.
Leurs vîtesses,	u, υ.
Les orifices GH, RS, par où s'écoulent les liquides,	o, ω.
Les pesanteurs absoluës des colonnes FGHK, VRST,	p, Π.
Leurs pesanteurs specifiques,	p, ϖ.
Leurs hauteurs AE, MN,	l, λ.
Leurs longueurs AB, MO,	e, ϵ.
Leurs efforts suivant les directions de ces longueurs,	f, ϕ.

DEFINITION XIII.

Les poids des corps égaux en volume sont appellez *pesanteurs specifiques*, ou pesanteurs propres aux especes de ces corps. Ainsi, par exemple, une masse quelconque de mercure étant quatorze fois plus pesante qu'une masse d'eau d'égal volume, l'on dit que la pesanteur specifique du mercure est à la pesanteur specifique de l'eau comme 14 est à 1, & ainsi des autres corps.

COROLLAIRE I.

D'où il suit que si de la plus grande colonne liquide VRST, l'on prend la partie XRSZ égale en volume à l'autre colonne liquide FGHK, les pesanteurs specifiques des liquides ABCD, MOPQ, seront entr'elles comme les poids absolus des colonnes FGHK, XRSZ, égales en volume ; c'est pourquoi ayant appellé p le poids absolu FIG. 26. & 27.

de la colonne FGHK, & ϖ la pesanteur absoluë de la colonne XRSZ, les pesanteurs specifiques des liquides ABCD, MOPQ, seront entr'elles comme p est à ϖ.

COROLLAIRE II.

Mais les colonnes liquides VRST & XRSZ étant (*hyp.*) homogenes dans toute leur longueur, il est évident que la pesanteur absoluë Π de la colonne VRST, est à la pesanteur absoluë π de sa partie XRSZ comme le volume de cette même colonne VRST est au volume de sa partie XRSZ, ou (*hyp.*) au volume de la colonne FGHK; que $\Pi . \pi :: VRST . FGHK ::$ (*Corol.* 2. *défin.* 12.) $MN \times RS . AE \times GH ::$ (en se servant des lettres désignées dans la Table précedente) $\lambda\omega . lo$. D'où l'on tire $\Pi lo = \varpi\lambda\omega$; laquelle équation étant divisée par lo, donne $\Pi = \frac{\pi\lambda\omega}{lo}$;

& l'on a par consequent $p . \Pi :: p . \frac{\varpi\lambda\omega}{lo} :: plo . \varpi\lambda\omega$.

THEOREME XIV.

FIG. 26. 27. *En general, quelles que soient les liqueurs qui s'écoulent des tuyaux inclinez comme on voudra ABCD, MOPQ, par les orifices horisontaux quelconques GH, RS: je dis que les vîtesses des liqueurs à ces orifices seront à chaque instant comme les racines des produits faits des gravitez specifiques des liqueurs & de leurs hauteurs au dessus des orifices directement, & de leurs densitez reciproquement.*

DEMONSTRATION.

En conservant les lettres marquées dans la Table précedente, on a (*Corol.* 4. *Théor.* 13.) $p . \Pi :: ouud . \omega\upsilon\upsilon\delta$. mais (*Corol.* 2. *déf.* 13.) $p . \Pi :: plo . \varpi\lambda\omega$. Donc on aura $ouud . \omega\upsilon\upsilon\delta :: plo . \varpi\lambda\omega$. d'où l'on a $\varpi\lambda\omega ouud = plo\omega\upsilon\upsilon\delta$. laquelle équation étant divisée par $o\omega$, donne $\varpi\lambda uud = pl\upsilon\upsilon\delta$; d'où l'on tire $uu . \upsilon\upsilon :: pl\delta . \varpi\lambda d$. ou (en extrayant les racines quarrées) $u . \upsilon :: \sqrt{pl\delta} . \sqrt{\varpi\lambda d}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Il ſuit de ce rapport general des vîteſſes qu'ont des liqueurs quelconques aux orifices horiſontaux des canaux par où elles coulent.

1°. Si les denſitez des liqueurs ſont égales, c'eſt-à-dire, ſi $d = \delta$, l'on aura $u . \upsilon :: \sqrt{pl} . \sqrt{\varpi\lambda}$. c'eſt-à-dire, que les vîteſſes des liqueurs aux ſorties des orifices ſeront alors comme les racines des produits des peſanteurs ſpecifiques des liquides multipliées par leurs hauteurs.

2°. Si les peſanteurs ſpecifiques ſont égales, ou ſi $p = \varpi$, on aura $u . \upsilon :: \sqrt{l\delta} . \sqrt{\lambda d}$. c'eſt-à-dire, que les vîteſſes ſeront alors comme les racines des produits faits des hauteurs des liqueurs directement, & de leurs denſitez reciproquement.

3°. Si les hauteurs des liquides ſont égales, ſi $l = \lambda$, on aura $u . \upsilon :: \sqrt{p\delta} . \sqrt{\varpi d}$. c'eſt-à-dire, que les vîteſſes ſeront alors comme les racines des produits faits des gravitez ſpecifiques directement, & des denſitez reciproquement.

4°. Les hauteurs étant égales, ſi les peſanteurs ſpecifiques le ſont auſſi; ou ſi les hauteurs ſont en raiſon reciproque des peſanteurs ſpecifiques, c'eſt-à-dire, ſi $l . \lambda :: \pi . p$. ou $lp = \lambda\varpi$. on aura $u . \upsilon :: \sqrt{\delta} . \sqrt{d}$. c'eſt-à-dire, qu'alors les vîteſſes ſont en raiſon reciproque des racines des denſitez.

5°. Si les hauteurs ſont entr'elles comme les denſitez, ou ſi $l . \lambda :: d . \delta$. ou bien $l\delta = \lambda d$. on aura $u . \upsilon :: \sqrt{p} . \sqrt{\varpi}$. c'eſt-à-dire, que les vîteſſes ſeront alors comme les racines des peſanteurs ſpecifiques des liquides.

6°. Enfin ſi les gravitez ſpecifiques ſont en raiſon des denſitez, à ſçavoir, $p . \varpi :: d . \delta$. ſoit que ce ſoit une raiſon d'inégalité ou bien d'égalité, comme cela ſe trouve dans les liqueurs de même eſpece, telles que ſont les eaux: puiſque cette analogie donne $p\delta = \varpi d$, celle du précedent Théoreme 14. deviendra celle-ci $u . \upsilon :: \sqrt{l} . \sqrt{\lambda}$. c'eſt-à-dire, que les vîteſſes ſeront comme les racines des hauteurs. C'eſt-là la propoſition que nous avons déja autrement démontrée (*Théor.* 12.) & d'où dépend le second Livre entier de Guillelmini sur la mesure des Eaux coulantes, & même les propositions 1. & 2. du Liv. 4. du même Auteur s'en déduisent.

COROLLAIRE II.

Il suit de cet art. 6. Cor. 1. & du Théor. 12. que l'eau ou une autre liqueur quelle qu'elle soit, a par tout une même vîtesse dans chaque point de l'orifice horisontal par où elle coule (l'on neglige les frottemens du liquide aux côtez du tuyau) parce que cette liqueur est par tout d'une même hauteur au dessus de chaque point de l'orifice horisontal.

COROLLAIRE III.

FIG. 28. & 29. Mais si l'orifice est vertical ou oblique, comme est l'orifice PSQ, plus l'eau qui coule par cet orifice est proche du fond du vaisseau, & plus elle a de vîtesse : de maniere que la plus grande des vîtesses est celle qui est à la base inferieure PQ. Car si l'on suppose tout l'orifice PSQ divisé en une infinité de petits filets paralleles à l'horison, la vîtesse sera la même (*Corol.* 2.) dans tous les points d'un même filet, puisque tous ces points sont également distans (*hyp.*) de la surface de l'eau. Mais les filets eux-mêmes étant les uns plus les autres moins éloignez (*hyp.*) de cette surface horisontale de l'eau, il faut que les hauteurs de l'eau correspondante à chaque filet, soient d'autant plus grandes, que les filets sont plus proches du fond du vaisseau. D'où il suit qu'ayant comparé ensemble tous ces filets horisontaux de l'eau qui coule par un même orifice, les vîtesses (*art.* 6. *Corol.* 1. & *Théor.* 12.) doivent être d'autant plus grandes, que les filets sont plus près du fond du canal.

COROLLAIRE IV.

Ayant mené la verticale KS par le sommet S de l'orifice PSQ jusqu'à la surface de l'eau en V ; si du sommet

met V sur l'axe VK l'on décrit (*déf.* 10.) une parabole quelconque VGL; & qu'en prolongeant les filets horisontaux jusqu'à la rencontre de la parabole, on éleve par ce moyen autant d'ordonnées perpendiculaires à l'axe VK, qu'il y a de filets: que la premiere & la derniere de ces ordonnées soient KL & SG. Il est clair (*Corol.* 2. *Théor.* 12.) que toutes ces ordonnées seront entr'elles comme sont à l'orifice PSQ les vîtesses des filets d'eau correspondans. Car (*Corol.* 2. *déf.* 10.) les ordonnées à l'axe de la parabole VGL, sont entr'elles comme les racines des hauteurs VS, VH, VK, &c. & (*art.* 6. *Cor.* 1.) les vîtesses des filets correspondans de l'orifice PSQ, sont encore entr'elles comme les racines de ces mêmes hauteurs.

COROLLAIRE V.

Donc de la même maniere que parmi les ordonnées du segment parabolique KSGL, il y en a toûjours une HO d'une telle grandeur, qu'en lui rendant égales toutes les autres, on peut faire de la somme de toutes ces ordonnées renduës égales à HO un rectangle SXOZK, dont l'aire sera égal à celle du segment parabolique KSGL formé par la somme des ordonnées telles qu'elles sont: de même aussi parmi toutes les differentes vîtesses des filets d'eau à l'orifice PSQ, il doit y avoir quelque filet MN, dont la vîtesse tienne le milieu entre les plus grandes & les plus petites; de telle sorte que si tous les autres filets de l'eau à l'orifice PSQ étoient mûs avec cette vîtesse moyenne, la somme de toutes ces vîtesses égales seroit semblable à celle des vîtesses inégales, telles qu'elles le sont (*Corol.* 3.) naturellement; & par consequent cette vîtesse moyenne étant supposée la même dans tous les filets de l'eau qui coule par l'orifice PSQ, il passeroit par cet orifice une quantité d'eau égale à celle qui sort en tems pareil avec les vîtesses naturellement inégales.

COROLLAIRE VI.

Si l'on suppose que le plan de l'orifice PSQ tourne autour du filet MN, jusqu'à ce que ce plan ou orifice devienne horisontal; il est évident que la hauteur de l'eau au dessus de tous les filets de l'eau qui est à l'orifice PSQ sera la même alors que sur le filet MN. Donc tous ces filets couleront chacun avec une vîtesse égale à celle du filet MN. Donc aussi (*Corol.* 5.) il passera en tems égaux par cet orifice horisontal une quantité d'eau égale à celle qui en sortoit lorsqu'il étoit oblique ou vertical.

DEFINITION XIV.

Cette vîtesse du filet MN avec laquelle il coule la même quantité d'eau qui s'écouleroit avec les vîtesses naturellement inégales, est appellée *vîtesse moyenne*, parce qu'elle surpasse autant la vîtesse des filets superieurs, qu'elle est surpassée par celle des filets inferieurs. Nous appellons aussi *filet moyen* le filet d'eau MN qui coule, & est mû réellement par cette vîtesse moyenne. Un point quelconque pris sur ce filet MN, est appellé *le centre de la vîtesse*. Nous appellons encore *hauteurs moyennes* les hauteurs des liquides au dessus des filets moyens dans differens canaux.

COROLLAIRE.

Donc en general (*Théor.* 4.) les vîtesses moyennes seront entr'elles comme les racines des produits faits des pesanteurs specifiques & des hauteurs moyennes des liquides au dessus des filets moyens directement par les densitez des liqueurs reciproquement; & par consequent les pesanteurs specifiques & les densitez étant égales dans une même espece de liqueurs, telles que sont les eaux, ces vîtesses moyennes seront entr'elles comme les racines des hauteurs de l'eau au dessus des filets moyens.

REMARQUE.

Quoique nous n'ayons parlé dans les Théoremes précedens que des orifices horisontaux, c'est-à-dire, horisontalement linéaires, en faisant abstraction des hauteurs de ces orifices au dessus de l'horison, lorsqu'ils sont ou obliques ou verticaux : cependant comme nous avons réduit (*Cor. 5. & suivans*) toutes les vîtesses de l'eau qui coule actuellement par un orifice ainsi élevé au dessus de l'horison à une seule & même vîtesse, que nous avons appellée moyenne, & que de tous les filets de l'eau qui passe par l'orifice, nous n'avons consideré qu'un seul filet linéaire appellé moyen ; il est évident que tout ce que nous avons dit dans ces Théoremes précedens des vîtesses des eaux aux orifices des tuyaux & des hauteurs des liquides au dessus de ces ouvertures, doit s'entendre aussi des vîtesses & des hauteurs moyennes.

DEFINITION XV.

Les differentes vîtesses avec lesquelles differentes parties d'eau poussée par une même pesanteur, s'écoulent d'un orifice quelconque, sont appellées *les vîtesses naturelles*, ou d'un nom collectif, *la vîtesse naturelle de l'eau.*

DEFINITION XVI.

La somme des vîtesses n'est autre chose que toutes les vîtesses exstantes en chacune des parties de l'eau à l'orifice d'où elle s'écoule.

COROLLAIRE.

Puisque (*Corol. 6. Théor.* 14.) il sort à chaque instant par un orifice quelconque une masse égale d'eau, soit qu'elle soit poussée avec sa vîtesse naturelle, ou bien avec une vîtesse moyenne, & qu'outre cela la masse d'eau qui s'écoule à chaque instant est comme la somme de toutes les vîtesses de chacun des points de cette eau coulante : la somme des vîtesses moyennes dans tous ces points sera égale à la somme des vîtesses naturelles. Donc la somme des vîtesses moyennes n'étant qu'une seule vîtesse moyenne repetée autant de fois qu'il y a de filet dans l'eau qui sort actuellement par l'orifice ; ou (ce qui revient au même) multipliée par l'aire de l'orifice ; la somme des vîtesses naturelles de l'eau à l'orifice par lequel elle s'écoule, est égale au produit de la vîtesse moyenne multipliée par l'aire du même orifice.

DEFINITION XVII.

L'on appelle *section naturelle* d'un fleuve, la section commune faite dans une eau coulante, par un plan qui coupe perpendiculairement le fond du fleuve & ses deux bords.

DEFINITION XVIII.

La section artificielle est celle qu'on imagine dans un fleuve dont le fond transversal est consideré comme horisontal, & les rives supposées paralleles entr'elles, & perpendiculaires au fond; de maniere que cette section est un parallelogramme rectangle égal à la section naturelle. Sa hauteur prise depuis le plus profond des points de l'eau coulante jusqu'à sa surface, est appellée *la hauteur vive* de l'eau, ou en un seul mot *la perpendiculaire*.

DEFINITION XIX.

Les sections à vîtesses égales sont celles où les vîtesses moyennes sont égales, ou bien sont celles par où l'eau s'écoule avec une vîtesse moyenne égale.

COROLLAIRE.

D'où & du Corollaire de la Définition 16. il suit que les sections à vîtesses égales, sont entr'elles comme les sommes des vîtesses naturelles.

DEFINITION XX.

On appelle *sections à vîtesses inégales*, celles dont les vîtesses moyennes sont inégales.

DEFINITION XXI.

Nous appellons *canal* ou *fleuve horisontal*, un fleuve dont la surface & le fond sont paralleles à l'horison.

LEMME IV.

$$u . \upsilon :: \sqrt{pl\varrho} . \sqrt{\Pi f}.$$

Ce Lemme eſt évident par le Théoreme 14.

THEOREME XV.

Soient deux canaux ou tuyaux,	T, Θ.
Leurs orifices,	o, ω.
Les hauteurs moyennes des liqueurs,	l, λ.
Les gravitez ſpecifiques des liqueurs,	p, ϖ.
Les denſitez des liquides,	d, δ.
Les tems des écoulemens,	t, θ.
Les quantitez de liqueurs écoulées pendant ces tems,	g, γ.
Les vîteſſes moyennes.	u, υ.

Je dis que dans ces canaux ou fleuves on aura toûjours les deux Regles generales ſuivantes:

1°. $g\omega\theta\sqrt{d\varpi\lambda} = \gamma o t\sqrt{\delta p l}$.

2°. $g\omega\upsilon\theta = \gamma o u t$.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE REGLE.

Que les lames liquides qui s'écoulent à chaque inſtant, quelque ſoient les liqueurs, ſoient appellées o & ω, comme les orifices par leſquels elles coulent, & auſquels elles ſont par conſequent égales; que e & ε expriment les longueurs que parcourroient pendant les tems t & θ, ces lames pouſſées perpendiculairement avec les vîteſſes moyennes u & υ, on aura (*regl. 1. viteſ. unif.*) $u . \upsilon :: e\theta . \varepsilon t$. De plus ayant pris l & λ pour exprimer les hauteurs moyennes des liqueurs qui s'écoulent, p & ϖ pour leurs peſanteurs ſpecifiques, & d, δ, pour leurs densitez, on aura (*Lem.* 4.) $u . v :: \sqrt{pl\delta} . \sqrt{\pi\lambda d}$. Donc $e\theta . \varepsilon t :: \sqrt{pl\delta} . \sqrt{\pi\lambda d}$. d'où l'on a $e\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \varepsilon t\sqrt{pl\delta}$, ou $o\omega e\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = o\omega\varepsilon t\sqrt{pl\delta}$; d'où l'on tire encore $oe . \omega\varepsilon :: ot\sqrt{pl\delta} . \omega\theta\sqrt{\pi\lambda d}$. Mais il est évident (*Corol.* 1. *déf.* 12.) que les quantitez de liqueurs écoulées dans les tems t & θ, sont égales aux prismes ou produits oe & $\omega\varepsilon$, faits des lames o & ω, multipliées par les longueurs perpendiculaires que décriroient ces lames dans les mêmes tems t & θ, avec les vîtesses moyennes u & v. Donc si les quantitez de liqueurs écoulées, ou autrement leurs volumes, sont appellez g & γ, l'on aura $g . \gamma :: oe . \omega\varepsilon$. Donc $g . \gamma :: ot\sqrt{pl\delta} . \omega\theta\sqrt{\varpi\lambda d}$. d'où l'on tire la premiere regle generale $g\omega\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \gamma ot\sqrt{pl\delta}$. C. Q. F. D.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE REGLE.

Puisque $g\omega\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \gamma ot\sqrt{pl\delta}$, l'on aura cette analogie: $g\omega\theta . \gamma ot :: \sqrt{pl\delta} . \sqrt{\varpi\lambda d}$. Mais (*Lem.* 4.) $u . v :: \sqrt{pl\delta} . \sqrt{\varpi\lambda d}$. Donc $g\omega\theta . \gamma ot :: u . v$. d'où l'on tire la seconde regle generale $g\omega\theta v = \gamma otu$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

L'on va voir que toute la science du mouvement & de la mesure des Eaux, est renfermée dans ces deux regles generales; puisque nous en déduirons le Traité de Guillelmini du Mouvement & de la Mesure des Eaux coulantes (nous parlerons ensuite des Eaux jaillissantes) & pour le faire avec plus d'exactitude, nous emprunterons la maniere de parler de cet illustre Auteur, dans les Corollaires que nous allons tirer de ces regles.

COROLLAIRE I.

Si les sommes des vîtesses naturelles aux orifices o, ω, sont appellées s, ς, on aura (*Cor. déf.* 16.) $s = ou$, $\varsigma = \omega v$; d'où l'on tirera non seulement cette troisiéme regle generale $s\omega v = \varsigma ou$, mais même encore (en substituant les valeurs s, ς, des quantitez ou, ωv dans la seconde regle generale) celle-ci $g\theta\varsigma = \gamma t \int$, qui sera la quatriéme regle generale.

COROLLAIRE II.

De plus si les sections naturelles o, ω, sont transformées en sections artificielles, dont les hauteurs soient a & α, les bases b & β, on aura (*déf.* 17.) $o = ab$ & $\omega = \alpha\beta$; & & ayant substitué ces valeurs en place de o & ω dans les deux premieres regles generales de ce Théoreme, on aura ces deux-ci $g\alpha\beta\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \gamma abt\sqrt{pl\delta}$, & $g\alpha\beta\upsilon\theta = \gamma abut$, qui sont aussi generales que les autres.

TABLE DES VALEURS DES LETTRES.

Les tuyaux ou canaux sont appellez	T, Θ.
Leurs orifices ou sections naturelles,	o, ω.
Les hauteurs moyennes des liquides,	l, λ.
Leurs gravitez specifiques,	p, ϖ.
Leurs densitez,	d, δ.
Les tems des écoulemens,	t, θ.
Les quantitez de liqueurs écoulées,	g, γ.
Les vîtesses moyennes,	u, υ.
Les sommes des vîtesses,	$\int$, ς.
Les hauteurs de l'eau vive ou des sections artificielles,	a, α.
Les bases ou largeurs de ces sections,	b, β.

REGLES GENERALES

du Mouvement & de la Mesure des Liqueurs.

1re $g\omega\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \gamma ot\sqrt{pl\delta}$.

2e $g\omega\upsilon\theta = \gamma out$.

3e $\int\omega\upsilon = \varsigma ou$.

4e $g\theta\varsigma = \gamma t\int$.

5e $g\alpha\beta\theta\sqrt{\varpi\lambda d} = \gamma abt\sqrt{pl\delta}$.

6e $g\alpha\beta\upsilon\theta = \gamma abut$.

Corollaires generaux de ces Regles.

COROLLAIRE I.

La premiere regle donne, 1°. $g . \gamma :: ot\sqrt{pl\delta} . \omega\theta\sqrt{\pi\lambda d}$. 2°. $o . \omega :: g\theta\sqrt{\varpi\lambda d} . \gamma t\sqrt{pl\delta}$. 3°. $t . \theta :: g\omega\sqrt{\varpi\lambda d} . \gamma o\sqrt{pl\delta}$. En quarrant cette même premiere regle l'on a $g^2\omega^2\theta^2\varpi\lambda d = \gamma^2 o^2 t^2 p l \delta$; d'où l'on tire, 4°. $l . \lambda :: g^2\omega^2\theta^2\varpi d . \gamma^2 o^2 t^2 p\delta$. 5°. $p . \varpi :: g^2\omega^2\theta^2\lambda d . \gamma^2 o^2 t^2 l\delta$. 6°. $d . \delta :: \gamma^2 o^2 t^2 pl . g^2\omega^2\theta^2\varpi\lambda$.

C'eſt-à-dire, que, 1°. les quantitez de liqueurs écoulées ſont entr'elles comme les produits faits des ſections naturelles multipliées par les tems des écoulemens, & & par les racines des produits faits des hauteurs moyennes des liqueurs & de leurs peſanteurs ſpecifiques directement priſes par leurs denſitez reciproquement. 2°. Les ſections naturelles ou orifices des canaux, ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes par les racines précedentes, & les tems des écoulemens directement. 3°. Les tems des écoulemens ſont entr'eux comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes par les racines précedentes, & les ſections naturelles reciproquement. 4°. Les hauteurs moyennes des liquides ſont entr'elles comme les produits faits des denſitez & des quarrez de liqueurs écoulées directement par les quarrez des tems & des orifices, & par les peſanteurs ſpecifiques reciproquement. 5°. Les gravitez ſpecifiques des liquides ſont comme les produits faits des denſitez & des quarrez des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les quarrez des orifices & des tems, & par les hauteurs moyennes des liquides reciproquement. 6°. Les denſitez ſont entr'elles comme les produits faits des hauteurs moyennes, des peſanteurs ſpecifiques, des quarrez des tems, & des quarrez des ſections naturelles directement, par les quarrez des quantitez de liqueurs qui s'écoulent reciproquement,

COROL.

COROLLAIRE II.

La seconde regle donne, 1°. $g.\gamma :: out.\omega\upsilon\theta$. 2°. $o.\omega :: g\theta\upsilon.\gamma tu$. 3°. $t.\theta :: g\omega\upsilon.\gamma ou$. 4°. $u.\upsilon :: g\omega\theta.\gamma ot$.

C'eſt-à-dire, 1°. les quantitez de liqueurs qui s'écoulent ſont comme les produits faits des orifices ou ſections naturelles, des vîteſſes moyennes, & des tems des écoulemens. *C'eſt-là la ſeconde propoſition du Livre de Guillelmini.* 2°. Les ſections des canaux ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les tems des écoulemens, & les vîteſſes moyennes reciproquement. 3°. Les tems des écoulemens ſont entr'eux comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes, par les vîteſſes moyennes & les orifices des canaux reciproquement. 4°. Les vîteſſes moyennes ſont entr'elles comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les tems des écoulemens & les orifices des canaux reciproquement.

COROLLAIRE III.

La troiſiéme regle donne, 1°. $\int.\varsigma :: ou.\omega\upsilon$. 2°. $o.\omega :: \int\upsilon.\varsigma u$. 3°. $u.\upsilon :: \int\omega.\varsigma o$.

C'eſt-à-dire, que, 1°. les ſommes des vîteſſes naturelles ſont toûjours comme les produits des orifices par les vîteſſes moyennes. 2°. Les orifices des canaux ſont comme les produits faits des ſommes des vîteſſes naturelles directement priſes par les vîteſſes moyennes reciproquement. 3°. Les vîteſſes moyennes ſont comme les produits faits des ſommes des vîteſſes naturelles directement priſes par les orifices des canaux reciproquement. *Ces trois articles contiennent la propoſition 12. avec ſon Corollaire, & la propoſition 15. du Livre 1. de Guillelmini.*

COROLLAIRE IV.

La quatriéme regle donne, 1°. $g.\gamma :: t\int.\theta\varsigma$. 2°. $t.\theta :: g\varsigma.\gamma\int$. 3°. $\int.\varsigma :: g\theta.\gamma t$.

C'eſt-à-dire, que, 1°. les quantitez de liqueurs écoulées ſont toûjours comme les produits des tems des écoulemens, par les ſommes des vîteſſes naturelles. 2°. Les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes, & des ſommes des vîteſſes naturelles reciproquement. 3°. Les ſommes des vîteſſes naturelles ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantitez de liqueurs écoulées, & de la raiſon reciproque des tems des écoulemens. *On a dans ce Corollaire les propoſitions 13. & 14. avec le Corollaire de la propoſition 15. du Livre 1. de Guillelmini.*

COROLLAIRE V.

La cinquéme regle donne, 1°. $g . \gamma :: abt\sqrt{pl\delta} . \alpha\beta\theta\sqrt{\pi\lambda d}$. 2°. $a . \alpha :: g\beta\theta\sqrt{\pi\lambda d} . \gamma bt\sqrt{pl\delta}$. 3°. $b . \beta :: g\alpha\theta\sqrt{\pi\lambda d} . \gamma at\sqrt{pl\delta}$. 4°. $t . \theta :: g\alpha\beta\sqrt{\pi\lambda d} . \gamma ab\sqrt{pl\delta}$. Si l'on quarre cette même regle, on aura $g^2\alpha^2\beta^2\theta^2\varpi\lambda d = \gamma^2a^2b^2t^2pl\delta$; d'où l'on tire 5°. $p . \varpi :: g^2\alpha^2\beta^2\theta^2\lambda d = \gamma^2a^2b^2t^2l\delta$. 6°. $l . \lambda :: g^2\alpha^2\beta^2\theta^2\varpi d . \gamma^2a^2b^2t^2p\delta$. 7°. $d . \delta :: \gamma^2a^2b^2t^2pl . g^2\alpha^2\beta^2\theta^2\pi\lambda$.

C'eſt-à-dire, que, 1°. les quantitez de liqueurs écoulées ſont toûjours entr'elles comme les produits faits des hauteurs des ſections artificielles, de leurs baſes & des tems des écoulemens, par les racines des produits formez des hauteurs moyennes des liqueurs & de leurs gravitez ſpecifiques directement, par leurs denſitez reciproquement. 2°. Les hauteurs des ſections artificielles ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes, par les tems des écoulemens, les baſes de ces ſections, & les racines précedentes reciproquement. 3°. Les baſes des ſections artificielles ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement priſes, par les tems des écoulemens, les hauteurs des ſections artificielles & les racines ſuſdites reciproquement. 4°. Les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les hauteurs des ſections artificielles, leurs largeurs ou bases, & les racines superieures reciproquement. 5°. Les gravitez specifiques des liqueurs sont comme les produits faits de leurs densitez & des quarrez des quantitez écoulées directement, par les hauteurs moyennes des liquides, & les quarrez des tems des écoulemens, des hauteurs & des bases des sections artificielles reciproquement. 6°. Les hauteurs moyennes des liquides sont comme les produits faits de leurs densitez, & des quarrez des quantitez écoulées directement, par leurs pesanteurs specifiques, & les quarrez des tems des écoulemens, des hauteurs & des bases des sections artificielles reciproquement. 7°. Les densitez des liqueurs sont comme les produits faits de leurs pesanteurs specifiques, de leurs hauteurs moyennes, des quarrez des tems des écoulemens, & des quarrez des hauteurs & des bases des sections artificielles directement, par les quarrez des quantitez de liqueurs écoulées reciproquement.

COROLLAIRE VI.

La sixiéme regle donne, 1°. $g . \gamma :: abut . \alpha\beta\upsilon\theta$. 2°. $a . \alpha :: g\beta\upsilon\theta . \gamma but$. 3°. $b . \beta :: g\alpha\theta\upsilon . \gamma atu$. 4°. $t . \theta :: g\alpha\beta\upsilon . \gamma abu$. 5°. $u . \upsilon :: g\alpha\beta\theta . \gamma abt$.

C'est-à-dire que, 1°. les quantitez de liqueurs écoulées sont toûjours comme les produits faits des tems des écoulemens, des vîtesses moyennes, des hauteurs & des bases des sections artificielles. 2°. Les hauteurs des sections artificielles sont comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement prises, par les bases de ces sections, les tems des écoulemens & les vîtesses moyennes reciproquement. 3°. Les bases des sections artificielles sont entr'elles comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les hauteurs de ces sections, les tems des écoulemens & les vîtesses moyennes reciproquement. 4°. Les tems des écoulemens sont entr'eux comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement prises, par les côtez des sections artificielles & les vîtesses moyennes reciproquement. 5°. Les vîtesses moyennes sont entr'elles comme les produits faits des quantitez de liqueurs écoulées directement, par les tems des écoulemens & les côtez des sections artificielles reciproquement.

REMARQUE.

En comparant ces Corollaires les uns avec les autres, on en pourroit encore tirer un grand nombre d'autres aussi generaux que ceux-là. Mais comme les Corollaires particuliers ont plus de rapport à la pratique & aux observations, nous allons passer à ces derniers, que nous bornerons pourtant aux hypotheses de Guillelmini, pour montrer avec plus d'évidence que les propositions de cet illustre Auteur sont renfermées dans nos regles generales.

Corollaires particuliers des Regles précedentes.

COROLLAIRE I.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, l'on suppose encore que $g . \gamma :: t . \theta$. ou $g\theta = \gamma t$, les regles generales seront ainsi réduites. La premiere deviendra celle-ci, $\omega\sqrt{\lambda} = o\sqrt{l}$. La seconde sera $\omega\upsilon = ou$. La quatriéme sera $s = \varsigma$. La cinquiéme sera $\alpha\beta\sqrt{\lambda} = ab\sqrt{l}$; & la sixiéme enfin $\alpha\beta\upsilon = abu$. D'où l'on tire, 1°. $o . \omega :: \sqrt{\lambda} . \sqrt{l}$. 2°. $u . \upsilon :: \omega . o$. 3°. $s = \varsigma$. 4°. $a . \alpha :: \beta\sqrt{\lambda} . b\sqrt{l}$. 5°. $b . \beta :: \alpha\sqrt{\lambda} . a\sqrt{l}$. 6°. $l . \lambda :: \alpha^2\beta^2 . a^2b^2$. 7°. $a . \alpha :: \beta\upsilon . bu$. 8°. $b . \beta :: \alpha\upsilon . au$. 9°. $u . \upsilon :: \alpha\beta . ab$.

C'est-à-dire, que si les quantitez des eaux écoulées sont en raison des tems des écoulemens (comme cela se trouve dans les sections d'un même fleuve.) 1°. Les sections naturelles seront en raison reciproque des racines des hauteurs moyennes, ou bien ces racines sont en raison reciproque de ces sections. 2°. Les vîtesses moyennes sont en raison reciproque des sections naturelles. 3°. Les sommes des vîtesses sont égales. 4°. Les hauteurs vives ou des sections artificielles, sont en raison reciproque des produits faits des bases de ces sections & des racines des hauteurs moyennes. 5°. Ces bases sont en raison reciproque des produits faits des hauteurs vives & des racines des hauteurs moyennes. 6°. Les hauteurs moyennes sont en raison reciproque des produits faits des quarrez des côtez des sections artificielles, ou (ce qui revient au même) en raison reciproque des quarrez de ces sections. 7°. Les hauteurs des sections artificielles sont en raison reciproque des produits formez des bases de ces sections & des vîtesses moyennes. 8°. Ces bases sont aussi en raison reciproque des produits de ces hauteurs par les vîtesses moyennes. 9°. Les vîtesses moyennes sont en raison reciproque des produits formez des côtez des sections artificielles, ou (ce qui est la même chose) en raison reciproque de ces sections.

REMARQUE.

Il y a des articles de ce Corollaire qui rentrent l'un dans l'autre, comme le second & le neuviéme; cependant nous ne laissons pas de les repeter ainsi en differens termes, & nous le ferons encore dans la suite, pour nous accommoder aux diverses manieres de parler de Guillelmini; & c'est ce qui nous a déja engagé à faire six regles de nos deux premieres, pour en tirer en termes formels les propositions de cet Auteur.

COROLLAIRE II.

Si outre $p = \varpi$, on suppose encore que $u . \upsilon :: \bar{\omega} . o$. ou $\omega\upsilon = ou$., la seconde regle generale deviendra celle-ci, $g\theta = \gamma t$; & la troisiéme sera $s = \varsigma$: d'où l'on tire, 1°. $g . \gamma :: t . \theta$. & si $t = \theta$, on aura $g = \gamma$. 2°. $s = \varsigma$.

C'est-à-dire, que si les sections naturelles & les vîtesses moyennes sont en raison reciproque, & que d'ailleurs les pesanteurs specifiques soient égales (telles sont celles des liqueurs d'une même espece comme des eaux.) Alors, 1°. les quantitez des eaux écoulées sont comme les tems des écoulemens, & par consequent sont égales en tems égaux. 2°. Les sommes des vîtesses sont égales. *Et c'est-là le Corollaire de la proposition 3. du Livre 1. de Guillelmini.*

COROLLAIRE III.

Si outre $p = \varpi$, l'on ſuppoſe encore que $u = \upsilon$, la ſeconde regle generale deviendra celle-ci, $g\omega\theta = \gamma o t$; la troiſiéme ſera $s\omega = \sigma o$; & la ſixiéme ſera $g\alpha\theta\beta = \gamma a t b$. D'ou l'on tire, 1°. $g.\gamma :: ot.\omega\theta$. 2°. $o.\omega :: g\theta.\gamma t$. 3°. $t.\theta$ $g\omega.\gamma o$. 4°. $s.\sigma :: o.\omega$. 5°. $g.\gamma :: abt.\alpha\beta\theta$. 6°. $a.\alpha :: g\beta\theta.\gamma bt$. 7°. $b.\beta :: g\alpha\theta.\gamma at$. 8°. $t.\theta :: g\alpha\beta.\gamma ab$.

C'eſt-à-dire, lorſque des liqueurs d'une même eſpece (comme les eaux) s'écoulent par des ſections à vîteſſes égales, 1°. les quantitez d'eaux écoulées ſont entr'elles comme les produits des ſections naturelles par les tems des écoulemens, & par conſequent comme les ſections, ſi les tems ſont égaux. *Et c'eſt-là la propoſition 4. du Liv. 1. de Guillelmini.* 2°. Ces ſections ſont comme les produits des quantitez des eaux écoulées directement priſes, par les tems reciproquement. 3°. Les tems des écoulemens ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantitez d'eaux écoulées, & de la raiſon reciproque des ſections naturelles. 4°. Les ſommes des vîteſſes ſont comme les ſections. 5°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont encore comme les produits faits des hauteurs & des baſes des ſections artificielles par les tems des écoulemens; & par conſequent comme les baſes de ces ſections, ſi leurs hauteurs ſont pareilles, & les tems des écoulemens égaux. (*Ce qui renferme les Corollaires 2. & 3. de la propoſition 4. du premier Livre de Guillelmini.*) Ou bien comme les hauteurs de ces ſections, ſi les baſes & les tems ſont égaux. 6°. Les hauteurs vives ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantitez d'eaux écoulées & des raiſons reciproques des tems des écoulemens & des baſes de ces ſections. 7°. Ces baſes ſont pareillement comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement priſes, par les tems des écoulemens, & les hauteurs vives reciproquement. 8°. Enfin les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement par les hauteurs & les baſes des ſections artificielles reciproquement.

COROLLAIRE IV.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, l'on ſuppoſe encore que $o = \omega$, la premiere regle generale deviendra celle-ci, $g\theta\sqrt{\lambda} = \gamma t\sqrt{l}$; la ſeconde ſera $g\theta\upsilon = \gamma tu$; & la troiſiéme, $f\upsilon = \varsigma u$. D'où l'on tire, 1°. $g.\gamma :: t\sqrt{l}.\ \theta\sqrt{\lambda}$. 2°. $t.\ \theta :: g\sqrt{\lambda}.\ \gamma\sqrt{l}$. 3°. $l.\ \lambda :: gg\theta\theta.\ \gamma\gamma tt$. 4°. $g.\ \gamma :: tu.\ \theta\upsilon$. 5°. $t.\ \theta :: g\upsilon.\ \gamma u$. 6°. $u.\ \upsilon :: g\theta.\ \gamma t$. 7°. $f.\ \varsigma :: u.\ \upsilon$.

C'eſt-à-dire, lorſque des liqueurs d'une même eſpece (comme les eaux) s'écoulent par des ſections égales; 1°. les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les produits des tems des écoulemens, par les racines des hauteurs moyennes. 2°. Les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement priſes, par les racines des hauteurs moyennes reciproquement. 3°. Ces hauteurs moyennes ſont comme les produits faits des quarrez des quantitez d'eaux écoulées directement, par les quarrez des tems reciproquement. 4°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les produits des tems des écoulemens par les vîteſſes moyennes, & par conſequent comme ces vîteſſes, ſi les tems ſont égaux. *Ce qui eſt la propoſition 5. du Livre 1. de Guillelmini.* 5°. Les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les vîteſſes moyennes reciproquement; & par conſequent ſi l'on ſuppoſe les tems égaux & pareilles quantitez d'eaux écoulées, les vîteſſes moyennes ſeront égales. D'où il eſt évident que les ſections o & ω ſeroient alors non ſeulement égales, mais encore à vîteſſes égales. *Ce qui contient le Corollaire 2. de la propoſition 5. du Livre 1. de Guillelmini.* 7°. Les vîteſſes moyennes ſont entr'elles comme les ſommes des vîteſſes.

COROLLAIRE V.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, comme cela eſt dans les liqueurs d'une même eſpece, telles que ſont les eaux, l'on ſuppoſe encore que $g.\ \gamma :: u.\ \upsilon$. ou que $g\upsilon = \gamma u$, la ſeconde regle generale deviendra celle-ci $\omega\theta = ot$, & la ſixiéme ſera $\alpha\beta\theta = abt$; d'où l'on tire, 1°. $o . \omega :: \theta . t$. 2°. $t . \theta :: \alpha\beta . ab$. 3°. $a . \alpha :: \beta\theta . bt$. 4°. $b . \beta :: \alpha\theta . at$.

C'eſt-à-dire, lorſque les quantitez des eaux ſont comme les vîteſſes moyennes; 1°. les ſections naturelles ſont en raiſon reciproque des tems des écoulemens, & par conſequent ces ſections ſeront égales, ſi les tems ſont égaux, c'eſt-à-dire, ſi les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux ſont comme les vîteſſes moyennes. 2°. Les tems des écoulemens ſont en raiſon reciproque des produits des hauteurs des ſections artificielles par leurs baſes. 3°. Ces mêmes hauteurs ſont en raiſon reciproque des produits des baſes par les tems des écoulemens. 4°. Les baſes de ces ſections ſont en raiſon reciproque des produits faits de leurs hauteurs & des tems des écoulemens.

COROLLAIRE VI.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, comme cela êſt dans les liqueurs d'une même eſpece, telles que ſont les eaux, l'on ſuppoſe encore que $t = \theta$, la premiere regle generale deviendra celle-ci, $g\omega\sqrt{\lambda} = \gamma o\sqrt{l}$; la ſeconde ſera $g\omega v = \gamma ou$; la quatriéme, $g\varsigma = \gamma s$; la cinquiéme, $g\alpha\beta\sqrt{\lambda} = \gamma ab\sqrt{l}$; & la ſixiéme enfin ſera $g\alpha\beta v = \gamma abu$.

D'où l'on tire, 1°. $g . \gamma :: o\sqrt{l} . \omega\sqrt{\lambda}$. 2°. $o . \omega :: g\sqrt{\lambda} . \gamma\sqrt{l}$. 3°. $l . \lambda :: g^2\omega^2 . \gamma^2 o^2$. 4° $g . \gamma :: ou . \omega v$. 5°. $o . \omega :: gv . \gamma u$. 6°. $u . v :: g\omega . \gamma o$. 7°. $g . \gamma :: s . \varsigma$. 8°. $g . \gamma :: ab\sqrt{l} . \alpha\beta\sqrt{\lambda}$. 9°. $a . \alpha :: g\beta\sqrt{\lambda} . \gamma b\sqrt{l}$. 10°. $b . \beta :: g\alpha\sqrt{\lambda} . \gamma a\sqrt{l}$. 11°. $l . \lambda$ $g^2\alpha^2\beta^2 . \gamma^2 a^2 b^2$. 12°. $g . \gamma :: abu . \alpha\beta v$. 13° $a . \alpha :: g\beta v . \gamma bu$. 14°. $b . \beta :: g\alpha v . \gamma au$. 15°. $u . v :: g\alpha\beta . \gamma ab$.

C'eſt-à-dire, lorſque les tems des écoulemens ſont égaux. 1°. Les quantitez d'eaux écoulées par les ſections d'un même ou de differens fleuves ſont entr'elles comme les produits faits de ces ſections naturelles & des racines des hauteurt moyennes. 2°. Ces ſections ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement priſes par les racines des hauteurs moyennes reciproquement

reciproquement. 3°. Les hauteurs moyennes ſont en raiſon composée de la raiſon directe des quarrez des quantitez d'eaux écoulées, & de la raiſon reciproque des quarrez des ſections naturelles. 4°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les produits des ſections naturelles par les vîteſſes moyennes des eaux à ces ſections; ou bien (pour ſe ſervir des termes de Guillelmini) » les quantitez d'eaux qui s'écoulent par les ſections d'un même ou « de differens fleuves, ſont entr'elles en raiſon composée « des proportions d'une ſection à l'autre ſection, & de la « vîteſſe moyenne de la premiere ſection à la vîteſſe « moyenne de la ſeconde. « *Et c'eſt-là la ſixiéme propoſition du Livre 5. de cet Auteur.*

5°. Les ſections naturelles d'un ou de pluſieurs fleuves, ſont entr'elles comme les produits des quantitez d'eaux écoulées directement priſes, par les vîteſſes moyennes reciproquement. 6°. Ces vîteſſes moyennes ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement & des ſections naturelles reciproquement. 7°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les ſommes des vîteſſes. 8°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont encore comme les produits faits des hauteurs moyennes & des baſes des ſections artificielles, par les racines des hauteurs moyennes. 9°. Les hauteurs des ſections artificielles ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement priſes, par les baſes de ces ſections, & les racines des hauteurs moyennes reciproquement. 10°. Les baſes de ces ſections ſont pareillement en raiſon composée de la raiſon directe des quantitez d'eaux écoulées, & des raiſons reciproques des hauteurs vives, & des hauteurs moyennes. 11°. Les hauteurs moyennes ſont entr'elles comme les produits faits des quarrez des quantitez d'eaux écoulées directement, par les quarrez des hauteurs, & des baſes des ſections artificielles reciproquement.

12°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les ſolides des hauteurs & des baſes des ſections artificielles, & des vîtesses moyennes; ou bien (ce qui revient au même) » la quantité d'eau qui s'écoule par la premiere » section, est à la quantité qui coule en tems égal par la » seconde section, en raison composée des raisons de la » hauteur de la premiere section à la hauteur de la se» conde, de la largeur de la premiere section à la lar» geur de la seconde, & de la vîtesse moyenne de l'eau » coulante par la premiere section à la vîtesse moyenne » de celle qui s'écoule par la seconde. *Ce qui est le Corollaire de la proposition 6. de Guillelmini.*

» Mais si l'on suppose qu'un fleuve vienne à croître par » une augmentation d'eau nouvelle, en prenant les sec» tions artificielles de ce fleuve dans ses differens états, » pour une seule & même section, dont la hauteur est » tantôt plus grande, & tantôt plus petite, selon que le » fleuve croît ou décroît; mais dont la base est toûjours » la même: il est évident (par ce n°. 12.) que la quan» tité de l'eau qui coule avant que le fleuve ait crû est à » la quantité de celle qui s'écoule en tems égal lorsqu'il » a crû, en raison composée des raisons de la vîtesse » moyenne de l'eau avant l'accroissement du fleuve à la » vîtesse moyenne dans l'accroissement, & de la hauteur » de la section avant l'accroissement, à sa hauteur dans » l'accroissement. *C'est-là la proposition 7. du Livre 1. de Guillelmini.*

13°. Les hauteurs des sections artificielles sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement prises, par les bases de ces sections & les vîtesses moyennes reciproquement. D'où il suit que » si les quan» titez d'eaux écoulées sont égales, comme cela est en » effet dans un même fleuve, la hauteur vive d'une sec» tion sera à la hauteur vive d'une autre section, en rai» son composée des raisons de la largeur de la seconde » section à la largeur de la premiere, & de la vîtesse » moyenne de la seconde section à la vîtesse moyenne de » la premiere. *Ce qui est la proposition 9. du Livre 1. de Guillelmini.* Ou bien, ce qui revient au même, » si l'eau d'un fleuve entre dans un autre fleuve, la hauteur que « l'eau du premier fleuve a dans son propre lit, est à la « hauteur que la même eau, ou une autre qui lui est éga- « le en volume a dans le second fleuve, en raison compo- « sée des raisons de la vîtesse de l'eau dans le second fleu- « ve à la vîtesse qu'elle a dans son propre lit, & de la lar- « geur du second fleuve à la largeur du premier. *Ce qui est la proposition* 10. *du Livre* 1. *du même Auteur.*

14°. Les largeurs des sections artificielles sont pareillement entr'elles comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les hauteurs de ces sections & les vîtesses moyennes reciproquement. D'où il suit » que si les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux « sont égales (comme cela arrive par toutes les sections « d'un même fleuve qui reste toûjours dans un même « état) les largeurs des sections artificielles seront en rai- « son reciproque des produits faits des hauteurs de ces « sections & des vîtesses moyennes. *Ce qui est le Corollaire* 1. *de la proposition* 9. *de Guillelmini.*

15°. Les vîtesses moyennes sont entr'elles comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les hauteurs & les largeurs des sections artificielles reciproquement; & par consequent si les quantitez d'eaux écoulées dans un même tems sont égales (comme cela est dans toutes les sections d'un même fleuve qui demeure toûjours dans le même état) la vîtesse moyenne d'une section sera à la vîtesse moyenne de l'autre, en raison composée des raisons de la hauteur vive de la seconde section à la hauteur vive de la premiere & de la largeur de la seconde section à la largeur de la premiere.

AVERTISSEMENT.

Les Corollaires précedens comprennent le premier Livre tout entier de Guillelmini sur la mesure des Eaux; & nous avons indiqué de tems en tems quelques propositions de ce Livre, laissant aux Lecteurs le soin de comparer les autres avec nos Corollaires, s'ils le jugent à propos. Le second Livre du même Auteur sera pareillement contenu dans les Corollaires suivans; mais pour éviter la longueur, nous nous exempterons la peine des citations.

COROLLAIRE VII.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, comme cela est dans les liqueurs d'une même espece, telles que sont les eaux, l'on suppose encore que $b = \beta$, la cinquiéme regle generale deviendra celle-ci $g\alpha\theta\sqrt{\lambda} = \gamma at\sqrt{l}$, & la sixiéme sera $g\alpha\theta v = \gamma atu$; d'où l'on tire, 1°. $g . \gamma :: at\sqrt{l} . \alpha\theta\sqrt{\lambda}$. 2°. $a . \alpha :: g\theta\sqrt{\lambda} . \gamma t\sqrt{l}$. 3°. $t . \theta :: g\alpha\sqrt{\lambda} . \gamma a\sqrt{l}$. 4°. $l . \lambda :: g^2\alpha^2\theta^2 . \gamma^2a^2t^2$. 5°. $g . \gamma :: atu . \alpha\theta v$. 6°. $a . \alpha :: g\theta v . \gamma tu$. 7°. $t . \theta :: g\alpha v . \gamma au$. 8°. $u . v :: g\alpha\theta . \gamma at$.

C'est-à-dire, qu'en supposant que la largeur des sections artificielles des fleuves est la même; 1°. les quantitez d'eaux écoulées sont entr'elles comme les produits des hauteurs vives & des tems des écoulemens par les racines des hauteurs moyennes. 2°. Les hauteurs des sections artificielles sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement prises, par le tems des écoulemens & les racines des hauteurs moïennes reciproquement. 3°. Les tems des écoulemens sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les hauteurs des sections artificielles, & les racines des hauteurs moyennes reciproquement. 4°. Les hauteurs moyennes sont comme les produits faits des quarrez des quantitez d'eaux écoulées directement, par les quarrez des tems des écoulemens & des hauteurs vives reciproquement. 5°. Les quantitez d'eaux écoulées sont en raison des produits des hauteurs vives & des tems des écoulemens par les vîtesses moyennes. 6°. Les hauteurs vives ou des sections artificielles sont entr'elles comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement prises, par les tems des écoulemens & les vîtesses moyennes reciproquement. 7°. Les tems des écoulemens sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les hauteurs vives & les vîtesses moyennes reciproquement.

8°. Les vîtesses moyennes sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les hauteurs vives des sections, & les tems des écoulemens reciproquement.

COROLLAIRE VIII.

L'on vient de voir (*n.* 5. *Corol.* 7.) que dans les sections artificielles d'une même largeur, les quantitez d'eaux écoulées sont comme les produits faits des tems des écoulemens & des hauteurs vives des eaux, par les vîtesses moyennes. D'où il suit que les quantitez d'eaux qui s'écoulent en tems égal par les sections ausquelles ces vîtesses moyennes appartiennent, sont comme les produits des mêmes vîtesses moyennes par les hauteurs vives. Mais il est clair que les hauteurs vives des eaux sont comme les hauteurs moyennes, lorsque les canaux sont horisontaux, c'est-à-dire, ont leurs fonds & leurs surfaces paralleles à l'horison. Donc si les sections artificielles de ces canaux sont d'une égale largeur, les quantitez des eaux qui s'écoulent par ces sections, seront comme les produits des vîtesses moyennes par les hauteurs moyennes. Mais (*Cor. déf.* 14.) les hauteurs moyennes sont comme les quarrez des vîtesses moyennes. Donc les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux, sont alors comme les produits des vîtesses moyennes par les quarrez des mêmes vîtesses moyennes, c'est-à-dire, comme les cubes de ces vîtesses moyennes. Donc encore, puisque les vîtesses des eaux au fond des canaux, c'est-à-dire (*Corol.* 3. *Théor.* 14.) les plus grandes vîtesses sont comme les vîtesses moyennes, « les quantitez d'eaux qui s'écoulent par les sections des « canaux horisontaux d'une égale largeur, seront en- « tr'elles comme les cubes ; ou bien (ce qui revient au « même) en raison triplée des plus grandes vîtesses. «

COROLLAIRE IX.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, comme cela est dans les eaux, l'on suppose encore dans les sections artificielles des fleuves horisontaux que $a=\alpha$, on aura en ce cas $l=\lambda$, parce que dans ces sortes de sections les hauteurs vives sont comme les hauteurs moyennes; & la seconde regle generale deviendra alors celle-ci, $g\beta\theta=\gamma bt$; d'où l'on tire, 1°. $g.\gamma :: bt.\beta\theta$. 2°. $b.\beta :: g\theta.\gamma t$. 3°. $t.\theta :: g\beta.\gamma b$.

C'est-à-dire, lorsque les sections artificielles des fleuves horisontaux sont d'une même hauteur, 1°. les quantitez d'eaux écoulées par ces sections sont comme les produits des tems des écoulemens par les largeurs de ces sections, & par consequent comme ces largeurs, si les tems sont égaux. 2°. Les largeurs ou bases des sections sont en raison composée de la raison directe des quantitez d'eaux écoulées, & de la raison reciproque des tems des écoulemens. 3°. Ces tems des écoulemens sont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement prises, par les bases des sections artificielles reciproquement.

COROLLAIRE X.

Si outre $p=\varpi$ & $d=\delta$, comme cela est dans les eaux; l'on suppose encore que $o.\omega :: \sqrt{\lambda}.\sqrt{l}$, ou $\omega\sqrt{\lambda}=o\sqrt{l}$; ou bien (*Théor.* 13.) $o.\omega :: u.v$. les deux premieres regles generales se réduiront à celle ci, $g\theta=\gamma t$; d'où l'on tire $g.\gamma :: t.\theta$. c'est-à-dire, que si les sections des canaux sont en raison reciproque des racines des hauteurs moyennes, ou bien en raison reciproque des vîtesses moyennes, les quantitez d'eaux écoulées seront alors comme les tems des écoulemens; & par consequent seront égales en tems égaux.

COROLLAIRE XI.

Si outre $p=\varpi$ & $d=\delta$, comme cela est dans les eaux; l'on suppose encore que $t.\theta :: \omega.o$ ou $ot=\omega\theta$; la premiere regle generale deviendra $g\sqrt{\lambda}=\gamma\sqrt{l}$, ou $g^2\lambda=\gamma^2 l$, & la seconde sera $gv=\gamma u$; d'où l'on tire, 1°. $l.\lambda :: g^2.\gamma^2$. 2°. $g.\gamma :: u.v$.

C'est-à-dire, que si les tems des écoulemens sont en raison reciproque des sections, 1°. les hauteurs moyennes ſont comme les quarrez des quantitez d'eaux écoulées. 2°. Les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les vîteſſes moyennes.

COROLLAIRE XII.

Si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, comme cela eſt dans les eaux, l'on ſuppoſe encore que $l.\lambda :: \alpha^2.a^2$. ou $\sqrt{l}.\sqrt{\lambda} :: \alpha.a$. ou $a\sqrt{\lambda} = \alpha\sqrt{l}$. La ſeconde regle generale deviendra celle-ci, $g\beta\theta = \gamma bt$; d'où l'on tire, 1°. $g.\gamma :: bt.\beta\theta$. 2°. $b.\beta :: g\theta.\gamma t$. 3°. $t.\theta :: g\beta.\gamma b$.

C'eſt-à-dire, que ſi les hauteurs moyennes ſont en raiſon reciproque des quarrez des hauteurs vives, 1°. les quantitez d'eaux écoulées ſont comme les produits des tems des écoulemens par les baſes des ſections artificielles. 2°. Ces baſes ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les tems des écoulemens reciproquement. 3°. Les tems des écoulemens ſont comme les produits faits des quantitez d'eaux écoulées directement, par les baſes des ſections artificielles reciproquement.

REMARQUE.

Nous avons juſqu'ici conſideré les eaux en tant que coulantes avec la vîteſſe qu'elles tirent de leur propre hauteur, ſans faire attention aux obſtacles qui peuvent retarder cette vîteſſe. C'eſt pourquoi ce que nous avons dit ſur cette matiere ne ſçauroit être entierement vrai dans la pratique, puiſque la vîteſſe des eaux coulantes eſt réellement retardée par leur frottement contre les côtez du fleuve, ou même par les joncs & les plantes dont les rivieres ſont remplies. C'eſt ce que nous allons examiner en ſuivant le ſçavant Guillelmini.

DEFINITION XXII.

L'on appelle *vîteſſe entiere* de l'eau coulante, la vîteſſe qu'auroit cette eau dans quelque point du canal par où elle coule, ſi elle avoit coulé depuis le commencement du canal jusqu'à ce point, sans avoir trouvé de résistance.

DEFINITION XXIII.

La vîtesse retardée ou *la vîtesse restante* est celle qui reste réellement à l'eau qui s'écoule, après en avoir ôté la vîtesse qu'elle perd par les obstacles qui se trouvent dans son écoulement.

DEFINITION XXIV.

La vîtesse perduë est la difference qui se trouve entre la vîtesse entiere & la vîtesse retardée, ou bien c'est cette portion de vîtesse ôtée par les obstacles qui se rencontrent.

COROLLAIRE.

Donc la somme des vîtesses perduës & retardées est égale à la vîtesse entiere, parce que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

DEFINITION XXV.

Comme on suppose un canal parallele à l'horison, & sa section par consequent verticale, il est clair (*Corol.* 3. *Théor.* 4.) que ces trois especes de vîtesse à cette section verticale, sont variées chacune dans leurs differentes parties. On peut donc de chacune de ces vîtesses en composer une moyenne dans le sens de la Définition 14. ainsi l'on dira *vîtesse moyenne entiere*, *vîtesse moyenne retardée*, & *vîtesse moyenne perduë*. L'on dira aussi dans le même sens *hauteur moyenne entiere*, *hauteur moyenne restante*, *hauteur moyenne perduë*. Et l'on pourra dire encore dans le sens de la Définition 16. *la somme des vîtesses entieres*, *la somme des vîtesses retardées*, & enfin *la somme des vîtesses perduës*.

COROLLAIRE I.

Donc si l'on prend u pour exprimer la vîtesse moyenne entiere, il faut que l exprime la hauteur moyenne entiere, & f la somme des vîtesses entieres dans la section o.

COROL.

COROLLAIRE II.

Pareillement si υ exprime la vîtesse moyenne retardée, λ exprimera la hauteur moyenne restante, & ς la somme des vîtesses retardées dans la section ω.

TABLE DES VALEURS DES LETTRES.

Hauteurs moyennes	*entiere,*	l.
	restante,	λ.
Vitesses moyennes	*entiere,*	u.
	restante,	υ.
Sommes des vîtesses	*entieres,*	$\int$.
	retardées,	ς.
Les quantitez d'eaux écoulées	*avec les vîtesses entieres,*	g.
	avec les vitesses retardées,	γ.
Les tems des écoulemens	*avec les vîtesses entieres,*	t.
	avec les vitesses restantes	θ.

COROLLAIRE III.

Il est clair que ces nouvelles valeurs des lettres υ, λ, ς, &c. ne changeront rien aux regles superieures. D'où il suit que tout ce qu'on a dit ci-dessus des raisons de u à υ, doit s'entendre des raisons de la vîtesse entiere à la vîtesse retardée : par consequent s'il s'agit des vîtesses entiere & retardée d'une même section, c'est-à-dire, que si outre $p = \varpi$ & $d = \delta$, l'on suppose encore que o & ω ne sont qu'une seule & même section, les regles précedentes se réduiront à celles qui suivent.

REGLES GENERALES

Pour les vîtesses entieres & retardées dans une même section d'un fleuve.

1re. $g\theta\sqrt{\lambda} = \gamma t\sqrt{l}$. 3e. $\int \upsilon = \varsigma u$.

2e. $g\theta\upsilon = \gamma t u$. 4e. $g\theta\varsigma = \gamma t \int$.

COROLLAIRE I.

La premiere de ces regles donne en general, 1°. $g . \gamma :: t\sqrt{l} . \theta\sqrt{\lambda}$. 2°. $t . \theta :: g\sqrt{\lambda} . \gamma\sqrt{l}$. 3°. $l . \lambda :: g^2\theta^2 . \gamma^2 t^2$.

C'est-à-dire, que dans une même section d'un fleuve, 1°. la quantité d'eau écoulée par la vîtesse moyenne entiere, est à la quantité écoulée par la vîtesse moyenne retardée, comme le produit fait de la racine de la hauteur moyenne entiere par le tems du premier écoulement, est au produit fait de la racine de la hauteur moyenne restante par le tems du second écoulement. 2°. Le tems de l'écoulement avec la vîtesse entiere est au tems de l'écoulement avec la vîtesse retardée, comme le produit fait de la racine de la hauteur moyenne restante par la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse entiere, est au produit fait de la racine de la hauteur moyenne entiere & de la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse retardée. 3°. La hauteur moyenne entiere est à la hauteur restante, comme le quarré du produit fait du tems de l'écoulement avec la vîtesse retardée, & de la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse entiere, est au quarré du produit fait du tems de l'écoulement avec la vîtesse entiere & de la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse retardée.

COROLLAIRE II.

La seconde regle donne en general, 1°. $g . \gamma :: tu . \theta v$. 2°. $t . \theta :: gv . \gamma u$. 3°. $u . v :: g\theta . \gamma t$.

C'est-à-dire, que dans la même section d'un fleuve, 1°. la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse moyenne entiere, est à la quantité écoulée avec la vîtesse moyenne retardée, comme le produit formé de la vîtesse moyenne entiere & du tems de l'écoulement fait avec cette vîtesse entiere, est au produit formé de la vîtesse moyenne retardée & du tems de l'écoulement fait avec cette vîtesse restante. 2°. Le tems de l'écoulement fait avec cette vîtesse entiere est au tems de l'écoulement avec la vîtesse

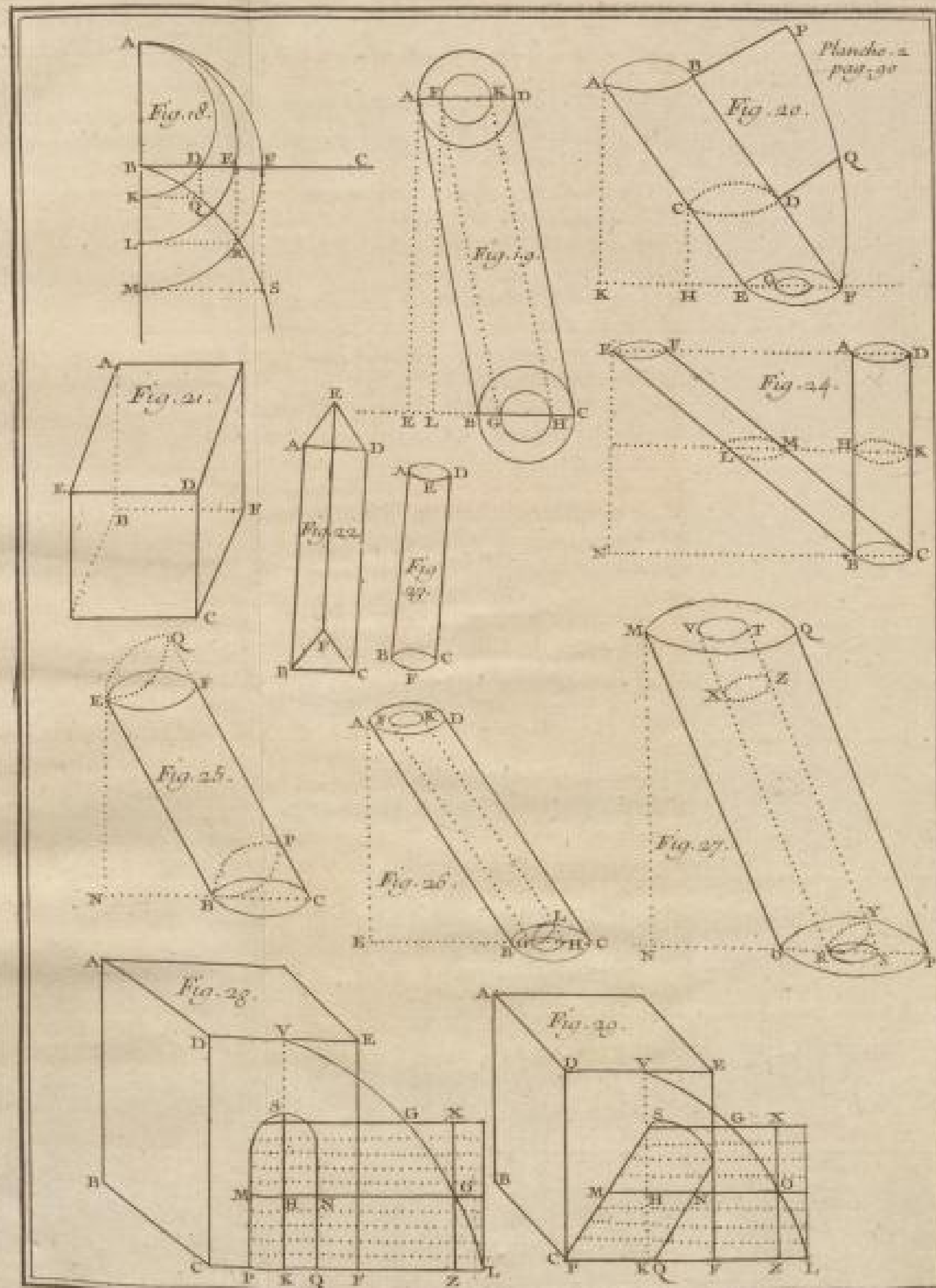
Planche. 2
pag. 90
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.

retardée, comme le produit fait de la vîteſſe moyenne retardée & de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe entiere, eſt au produit fait de cette vîteſſe entiere & de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe retardée. 3°. La vîteſſe moyenne entiere, eſt à la vîteſſe moyenne retardée, comme le produit fait du tems de l'écoulement avec la vîteſſe retardée & de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe entiere, eſt au produit fait du tems de l'écoulement avec la vîteſſe entiere & de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe reſtante.

COROLLAIRE III.

La troiſiéme regle donne en general $u . \upsilon :: ſ . s$. c'eſt-à-dire, que dans la même ſection d'un fleuve, la vîteſſe moyenne entiere eſt à la vîteſſe moyenne retardée, comme la ſomme des vîteſſes entieres eſt à la ſomme des vîteſſes retardées.

COROLLAIRE IV.

La quatriéme regle enfin donne en general, 1°. $g . \gamma :: tſ . \theta \varsigma$. 2°. $t . \theta :: g\varsigma . \gammaſ$. 3°. $ſ . \varsigma :: g\theta . \gamma t$.

C'eſt-à-dire, que dans la même ſection d'un fleuve, 1°. la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe moyenne entiere, eſt à la quantité écoulée avec la vîteſſe moyenne retardée, comme le produit fait de la ſomme des vîteſſes entieres & du tems du premier écoulement, eſt au produit fait de la ſomme des vîteſſes retardées & du tems du ſecond écoulement. 2°. Le tems de l'écoulement fait avec la vîteſſe moyenne entiere, eſt au tems de l'écoulement fait avec la vîteſſe retardée, comme le produit fait de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe entiere & de la ſomme des vîteſſes retardées, eſt au produit de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe retardée & de la ſomme des vîteſſes entieres. 3°. La ſomme des vîteſſes entieres eſt à la ſomme des vîteſſes retardées, comme le produit formé de la quantité d'eau écoulée avec la vîteſſe moyenne entiere & du tems de l'écoulement fait avec la vîtesse retardée, est au produit formé de la quantité d'eau écoulée avec la vîtesse moyenne retardée & du tems de l'écoulement fait avec la vîtesse entiere.

C'en est assez sur la fecondité des regles précedentes. On pourroit encore en tirer une infinité d'autres Corollaires: mais il est tems de passer aux principaux Problêmes qui concernent cette matiere. L'on suit toûjours Guillelmini.

PROBLEME I.

Trouver mécaniquement le rapport des vîtesses.

SOLUTION.

FIG. 30. Soit un quart de cercle ACO, dont le côté AC est posé perpendiculairement à l'horison, par le moyen du perpendicule AD, qui soûtient le poids D. Soit outre cela le pendule AH, que la vîtesse de l'eau dont il suit le courant MH, fait éloigner de la perpendiculaire AD. Il est clair que la vitesse de l'eau agit sur le poids H, comme si ce poids étoit tiré de H vers I par quelque puissance I, telle, par exemple, que la corde HI; & par consequent le poids H peut être consideré comme suspendu par deux cordes AH & HI. Mais ayant tiré la ligne verticale HK, c'est-à-dire, parallele à AD; & du point K pris à volonté sur cette ligne, ayant mené les droites KL & KI paralleles à HI & à HL, le poids qui équivaut à la force produite par le concours des deux puissance A & I, sera égal à la force suivant la verticale HK: mais (*Cor.* 3. *Lem.* 2.) cette même force suivant HK est à la puissance I comme HK est à HI. Donc le poids H sera aussi à la puissance I, ou à la force de la vîtesse de l'eau suivant HI, comme HK est à HI, ou comme le sinus de l'angle I est au sinus de l'angle HKI. Mais la direction MI de l'eau étant donnée, l'angle M formé par cette ligne, & la verticale AD est aussi donné. D'ailleurs l'angle MAH devient connu par l'arc intercepté CQ du quart de cercle ACO. Donc dans le triangle HMA le troisiéme angle AHM ou KIH,

ſera auſſi connu. Mais l'on connoît encore (*par la Géom.*) l'angle HKI=KHL=HAM. Donc on connoîtra auſſi le rapport du poids H à la force de la vîteſſe de l'eau ſuivant HI.

Donc pour avoir le rapport des differentes vîteſſes dans les differentes profondeurs H & B de l'eau, il faut chercher de la même maniere la raiſon de la vîteſſe en B ſuivant BX au poids B, que je ſuppoſe le même que le poids H. Or ſuivant le raiſonnement précedent (ayant fait, comme ci-deſſus, le parallelogramme FX, dont la diagonale BE ſoit parallele à AD ou à HK) ce rapport de la vîteſſe en B au poids B, eſt le même que le rapport du ſinus de l'angle BEX au ſinus de l'angle X.

Cela ſuppoſé, le ſinus de l'angle HKI ſoit appellé k; le ſinus de l'angle I, i; celui de l'angle BEX, e; & celui de l'angle X, x: que le poids (qu'on ſuppoſe le même en H & en B) ſoit nommé p; la vîteſſe en H ſoit appellée u; & la vîteſſe en B, v. La vîteſſe (u) de l'eau en H ſuivant HI, ſera au poids (p) en H, comme le ſinus (k) de l'angle HKI eſt au ſinus (i) de l'angle I; & le même poids (p) en B ſera à la vîteſſe (v) de l'eau en B ſuivant BX, comme le ſinus (x) de l'angle X, eſt au ſinus (e) de l'angle BEX, c'eſt-à-dire, en termes algebriques ſeuls $u.p::k.i.$ & $p.v::x.e.$ Donc $up.vp::kx.ie.$ ou $u.v::kx.ie.$ c'eſt-à-dire, qu'en general la vîteſſe de l'eau en H eſt à la vîteſſe de l'eau en B, comme le produit du ſinus de l'angle HKI & du ſinus de l'angle X, eſt au produit du ſinus de l'angle BEX & du ſinus de l'angle I.

Mais ſi l'on ſuppoſe que les vîteſſes ſont horiſontales, c'eſt-à-dire, que HI, BX ſont paralleles à AO, l'angle I ſera (*élem. de Géom.*) égal à l'angle AHM=OAH=l'arc OQ; & l'angle X ſera égal à l'angle OAB, ou à l'arc OP. Outre cela (*élem. de Géom.*) l'angle HKI=KHA=HAM =l'arc CQ, & l'angle BEX=BAM=l'arc CP. Donc dans cette ſuppoſition, la vîteſſe de l'eau en H ſera à la vîteſſe de l'eau en B, comme le produit du ſinus de l'angle HAM ou de l'arc CQ, par le ſinus de l'angle OAB, ou de l'arc OP, eſt au produit du ſinus de l'angle BAM, ou de l'arc CP par le ſinus de l'angle OAH ou de l'arc OQ; & par conſequent les vîteſſes en H & en B ſeront en raiſon compoſée de la raiſon directe des ſinus des arcs inferieurs CQ & CP, & de la raiſon reciproque des ſinus des arcs ſuperieurs OQ & OP qui reſtent ſur le quart de cercle ACO. Cette regle eſt generale pour toutes les vîteſſes dans les differentes profondeurs de l'eau.

Le ſçavant Guillelmini donne une autre regle pour ce cas des vîteſſes horiſontales; c'eſt par le moyen des tangentes. La voici. Rendez égales les lignes diagonales BE & HK; je dis que la force de la vîteſſe en H ſuivant HI eſt (*Cor.* 3. *Lem.* 2.) au poids en H, comme HI eſt à HK, ou (*hyp.*) à BE. Par la même raiſon auſſi la force de la vîteſſe de l'eau en B ſuivant BX, eſt au même poids en B, comme BX eſt à BE: ce qui donne ces deux analogies, *u*. *p*:: HI. BE. & *v*. *p*:: BX. BE. ou bien *u*. HI. *p*. BE. & *v*. BX. *p*. BE. Donc *u*. HI:: *v*. BX. ou *u*. *v*:: HI. BX. C'eſt-à-dire, que la force de la vîteſſe de l'eau en H ſuivant HI, eſt à la force de ſa vîteſſe en B ſuivant BX, comme HI eſt BX. Mais à cauſe des angles (*hyp.*) droits KHI & EBX, & des rayons HK & BE (*hyp.*) égaux; HI & BX ſeront (*élem. de Trigon. rectil.*) tangentes des angles HKI & BEX. Donc la vîteſſe horiſontale de l'eau en H ſera à ſa vîteſſe horiſontale en B, comme la tangente de l'angle HKI ou HAD, ou de l'arc CQ eſt à la tangente de l'angle BEX ou BAD, ou de l'arc CP. » Donc » les vîteſſes horiſontales de l'eau ſont comme les tangen» tes des arcs ou des angles compris entre le perpendi» cule AD & le filet qui ſoûtient le poids plongé dans » l'eau. « Cette regle paroît plus ſimple que la précedente; mais auſſi elle eſt moins univerſelle, puiſque l'autre convient à toutes les vîteſſes, ſoit inclinées, ſoit horiſontales.

Cela ſuppoſé, venons à la pratique de Guillelmini. Pour avoir, dit-il, le rapport cherché des vîteſſes, adaptez un pendule à un quart de cercle diviſé exactement en degrez & en minutes; qu'un des côtez du quart de cercle soit posé verticalement, plongez ensuite le poids H ou B pendule dans l'eau du canal : il est évident que la vîtesse de l'eau fera écarter le pendule de la direction de la verticale. Que l'on observe donc avec exactitude l'angle d'inclinaison. Plongez ensuite le même pendule plus avant dans l'eau (en laissant aller la corde à laquelle il est attaché) de maniere pourtant qu'il ne soit point arrêté par le fond du canal, & observez de nouveau l'angle d'inclinaison.

Puisque la puissance qui retient le pendule dans l'angle d'inclinaison, n'est autre chose que la vîtesse de l'eau coulante dans ses differentes profondeurs ; (car dans l'eau dormante le pendule reste perpendiculaire) » La raison « de ces puissances sera la même que celle des vîtesses. « C'est pourquoi si la surface de l'eau ne décline point, « on ne décline qu'insensiblement de l'horison, le rapport « des vîtesses entr'elles sera le même que celui des tangen « tes des angles d'inclinaison. « Mais si la surface de l'eau décline sensiblement de l'horison, il faut mesurer cette déclinaison, & l'ajoûter à l'angle droit ; l'on aura par-là l'angle d'inclinaison cherchée : ce qui étant fait, on trouvera le rapport des vîtesses par le moyen de la premiere regle, qui dit qu'*en general les vîtesses sont en raison composée de la raison directe des sinus des angles d'inclinaison, & de la raison reciproque des sinus des angles de complemens sur le quart du cercle.*

REMARQUES.

1°. En comparant le pendule plongé dans l'eau avec la vîtesse de l'eau à l'endroit où il est plongé, il ne faut pas prendre la pesanteur entiere du plomb, mais seulement la difference dont il surpasse un volume d'eau qui lui est égal ; car le poids du pendule étant soûtenu par un égal volume d'eau, il est clair que l'on doit ôter de la pesanteur entiere de ce poids la pesanteur de ce volume d'eau qui lui est égal ; & par consequent ce même poids ne doit agir & sur le fil auquel il est suspendu, & sur la vîtesse de l'eau ; que suivant cette pesanteur restante dont il surpasse un égal volume d'eau.

2°. Cette précaution n'est cependant necessaire que lorsqu'on compare le poids du pendule plongé dans l'eau avec la vîtesse de l'eau qui le fait écarter de la verticale. Mais lorsqu'on compare les differentes vîtesses de l'eau entr'elles dans les differens points de sa profondeur, il n'importe pas de sçavoir au juste la pesanteur du poids plongé, pourvû qu'on la suppose toûjours la même dans les differens points de profondeur, puisque la pesanteur du poids ne se trouve point dans la regle précedente de ce rapport

3°. Le fil qui soûtient le pendule plongé dans l'eau, est toûjours un peu courbé par l'action de l'eau sur lui ; il ne sçauroit donc se trouver exactement dans la partie du quart de cercle qui doit indiquer sa déclinaison. Mais comme l'on n'a encore pû trouver pour cette observation un instrument plus propre que celui-là, il faut passer sur cette petite erreur, qui sera encore bien plus legere, si l'on suspend le pendule par un fil très-fin, tel, par exemple, qu'un fil de soye ; car à peine l'eau aura-t'elle quelque prise sur un fil de cette finesse. Il est bon d'observer enfin que dans cette experience il faut prendre garde que le vent ne fasse aussi courber la partie exterieure du fil.

PROBLEME II.

Ayant observé par le Problême précedent les vîtesses de l'eau dans deux points H & B de sa profondeur, trouver la difference des profondeurs de ces deux points.

SOLUTION.

Fig. 31.

Soient HG & BX les directions des vîtesses de l'eau ; soient menées jusqu'à la surface de l'eau MN les droites BN & HV paralleles à la verticale AD. Il s'agit de trouver la longueur ou la profondeur BG.

1°. Il faut mesurer la porcion AR du fil qui est hors de l'eau l'eau, avec la distance AM du centre de l'instrument à la surface de l'eau; dire ensuite: comme AR est à AM, de même BR est à BN: les trois premiers termes de cette analogie étant connus, on connoîtra le dernier BN par la Regle de trois.

2°. Il faut de la même maniere mesurer la portion de fil AS qui est hors de l'eau, & dire pareillement: comme AS est à AM, de même SH est à HV. L'on connoîtra encore par la Regle de trois le terme cherché HV.

3°. Les profondeurs BN & HV étant connuës, il n'y a qu'à soustraire la derniere HV de la premiere BN; il restera BG pour la difference cherchée des profondeurs de l'eau dans les deux points H & B.

Demonstration.

Toute cette pratique sera évidente, si l'on démontre que les analogies précedentes AR. AM :: RB. BN. & AS. AM :: SH. HV. sont exactes. Mais les lignes AM, HV, & NB étant (*hyp.*) paralleles, il est clair (*élem. de Géom.*) que les triangles AMR & BNR sont semblables, aussi-bien que les triangles AMS & HVS; & par consequent que AR. AM :. RB. BN. & AS. AM :: SH. HV. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Corollaire.

Si l'on nomme AR, a; AM, b; RB, c; BN, d; AS, e; SH, f; & HV, g: on aura $a. b :: c. d.$ & $e. b :: f. g.$ ce qui donne $ad = bc$, & $eg = bf$; d'où l'on tire $ad. eg :: bc. bf. :: c. f.$ donc en divisant les antecedens par a & les consequens par e, on aura $d. g :: \frac{c}{a}. \frac{f}{e}$. Ou en restituant les valeurs de ces lettres, BN. HV :: $\frac{RB}{AR}. \frac{SH}{AS}$. C'est-à-dire, que « les profondeurs des vîtesses de l'eau en B & en H, sont comme les quotiens des parties du fil enfoncées « dans l'eau, divisées par les parties qui sont hors de « l'eau entre sa surface & le quart de cercle. »

PROBLEME III.

Trouver l'origine d'un fleuve, ou la hauteur de sa source.

SOLUTION.

FIG. 32. Soit le fleuve ND, dont l'origine est N; sa profondeur verticale CD prise perpendiculairement à l'horison depuis la surface C du fleuve jusqu'à son fond D: l'on cherche la hauteur suprême PN de ce fleuve sur l'horison PD. Ayant pris à volonté deux points E & F sur la profondeur CD; qu'on observe (*Probl. 1. & 2.*) les vîtesses de l'eau dans ces deux differens points de profondeur, avec la difference EF de leurs hauteurs: tirez les droites EH & FK paralleles à l'horison, & d'une telle longueur qu'elles soient entr'elles comme les vîtesses observées dans ces deux points. Sur la plus grande EH comme diametre, tracez le demi-cercle EGH, dans lequel soit inscrit un angle formé par la droite HG égale à FK & par la ligne EG. Du point L milieu de la ligne EH, élevez sur cette ligne la perpendiculaire LM qui rencontre EG prolongée en M. Enfin ayant décrit du centre M & du rayon ME le demi-cercle EHB qui rencontre la même EG prolongée en B; & ayant mené la ligne FG, tirez la droite BA parallele à cette FG, & qui rencontre la verticale DC prolongée en A. Je dis que DA est la hauteur cherchée, c'est-à-dire, que DA est égale à la ligne cherchée PN.

DEMONSTRATION.

A cause du demi-cercle EGH, l'angle inscrit EGH est droit; d'où l'on a $EH^2 = EG^2 + GH^2$, ou $EG^2 = EH^2 - GH^2$. Outre cela ML étant (*hyp.*) perpendiculaire sur le milieu de EH, & par consequent (*élem. de Géom.*) EM étant égal à MH, le cercle décrit du centre M & du rayon ME passera par H; ce qui donne (*Geom.*) $EG . GH :: GH . GB$ ou $EG \times GB = GH^2$. Donc EG^2.

$GH^2 :: EG^2 . EG \times GB :: EG . GB$. & *componendo* $EG^2 + GH^2 . GH^2 :: EG + GB . GB$. ou $EH^2 . GH^2 :: EB . GB$. Mais à cauſe des lignes FG & AB (*hyp.*) paralleles entr'elles, on aura (*Géom.*) $EB . GB :: EA . FA$. Donc $EH^2 . GH^2 :: EA . FA$. ou $EH . GH :: \sqrt{EA} . \sqrt{FA}$. mais encore (*Cor.* 1. *Th.* 4.) les vîteſſes en E & en F ſont comme les racines des hauteurs de la ſurface ſuprême N au deſſus de ces points ; ou ayant mené les lignes horiſontales EO & FQ, comme les racines des hauteurs ON & QN. Donc on aura $\sqrt{ON} . \sqrt{QN} :: \sqrt{EA} . \sqrt{FA}$. ou $ON . QN :: EA . FA$. ou *dividendo* $ON - QN$ (OQ). $QN :: EA - FA$ (EF). FA. ou bien *alternando* $OQ . EF :: QN . FA$. mais les lignes OQ & EF étant paralleles (puiſqu'elles ſont (*hyp.*) toutes les deux verticales) & entre paralleles, elles ſont (*Géom.*) égales entr'elles, c'eſt-à-dire, que $OQ = EF$: donc $QN = FA$; mais encore par la même raiſon des paralleles, $OP = ED$. Donc en ajoûtant, l'on a $OP + OQ + QN = ED + EF + FA$, ou bien $PN = DA$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

ANALYSE.

Voici la méthode de trouver la même choſe par le calcul. Ayant ſuppoſé que $DA = PN$, ou que AN eſt parallele à l'horiſon, les vîteſſes obſervées (*Probl.* 1.) de l'eau en E & en F ſoient nommées e & f ; la difference EF des profondeurs obſervée (*Probl.* 2.) ſoit nommée g ; & la ligne cherchée ou inconnuë FA, x ; EA ſera $g + x$. Mais (*Cor.* 1. *Th.* 14.) les vîteſſes e & f obſervées en E & en F, ſont comme les racines des hauteurs EA, AF. Donc $e . f :: \sqrt{g+x} . \sqrt{x}$. ou bien $e^2 . f^2 :: g + x . x$. D'où l'on tire $e^2 x - x f^2 = f^2 g$; ce qui donne (en diviſant l'un & l'autre membre par $e^2 - f^2$) $x = \frac{gf^2}{e^2 - f^2}$, ou $e^2 f^2 . f^2 :: g . x$. Mais les trois premiers termes de cette analogie étant (*hyp.*) connus, le quatriéme x ou FA ſera auſſi connu par la regle de trois. Donc puiſqu'on connoîtra auſſi (*Probl.* 2.) la profondeur FD, la hauteur ſuprême

DA ou PN sera enfin connuë. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE.

La vîtesse observée en E soit à la vîtesse en F comme 10 est à 9, ou bien soit $e=10$, & $f=9$; la difference EF des profondeurs soit égale à huit pieds; ou soit $g=8$, & $ED=6$ pieds, ou bien $FD=14$ pieds. Dans l'équation trouvée $x=\frac{gf^2}{e^2-f^2}$, en place des lettres e, f, g, substituez leurs valeurs, & vous aurez $x=\frac{gf^2}{e^2-f^2}=\frac{648}{19}=34\frac{2}{19}=AF$; ajoûtez à cette somme $FD=14$ pieds, & vous aurez enfin la hauteur entiere AD ou $PN=48\frac{2}{19}$ pieds. Il en sera de même de toutes les autres vîtesses en E & en F, & des differences EF des profondeurs.

SCHOLIE.

La solution géométrique précedente suit clairement de cette analyse; car ayant remis en place des lettres e, f, g, x, les lignes EH, FK, EF, FA, cette analogie $e^2-f^2 . f^2 :: g . x$. deviendra celle-ci, $EH^2-FK^2 . FK^2 :: EF . FA$; ou (en supposant $GH=FK$) $EH^2-GH^2 . GH^2 :: EF . FA$; ou bien (en supposant les lignes FG & AB paralleles entr'elles) $EH^2-GH^2 . GH^2 :: EG . GB$. C'est ce qu'on a vû dans la construction précedente.

REMARQUE.

L'on a remarqué sur la fin du Problême 1. que les vîtesses trouvées en F & en E, ne sont pas vrayes dans la derniere exactitude, mais qu'elles sont très-approchantes des vrayes. Il faut donc que la hauteur trouvée AD soit aussi seulement approchante de la veritable hauteur.

Il est bon d'observer encore que si les hauteurs suprêmes AD ou NP étoient très-grandes par rapport aux profondeurs CD, à peine pourroit-on trouver quelque difference entre les vîtesses des points E & F: d'où il suit clairement qu'en ce cas on trouveroit à peine quelque hauteur suprême des eaux.

LEMME V.

Lorsque plusieurs raisons sont égales, la somme des antecedens est à la somme des consequens, comme un des antecedens quelconque est à son consequent.

DEMONSTRATION.

Soit $a.b :: c.d :: e.f :: g.h.$ &c. je dis que $a.b :: a+c+e+g.\ b+d+f+h.$

Car ayant (*hyp.*) $a.b :: c.d.$ on a *alternando* $a.c :: b.d.$ & *componendo* $a+c.\ c :: b+d.\ d.$ & encore *alternando* $a+c.\ b+d :: c.d.$ Mais (*hyp.*) $c.d :: e.f.$ Donc $a+c.\ b+d :: e.f.$ *alternando* $a+c.\ e :: b+d.\ f.$ *componendo* $a+c+e.\ e :: b+d+f.\ f.$ *alternando* $a+c+e.\ b+d+f :: e.f.$ Mais encore (*hyp.*) $e.f :: g.h.$ Donc $a+c+e.\ b+d+f :: g.h.$ *alternando* $a+c+e.\ g :: b+d+f.\ h.$ *componendo* $a+c+e+g.\ g :: b+d+f+h.\ h.$ *alternando* $a+c+e+g.\ b+d+f+h :: g.h.$ & ainsi des autres. Mais (*hyp.*) $g.h :: a.b.$ Donc $a.b :: a+c+e+g.\ b+d+f+h.$ *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc en toute progression géometrique $\div$ $a.b.c.d.e.$ &c. l'on aura $a.b :: a+b+c+d.\ b+c+d+e.$ c'est-à-dire, que le premier terme sera au second terme comme la somme de tous les termes de la progression, excepté le dernier, est à la somme de tous les termes, excepté le premier. Donc ayant appellé la somme de tous les termes s, on aura $a.b :: s-e.\ s-a.$

COROLLAIRE II.

D'où il suit qu'on trouvera aisément la somme de tous les termes d'une progression géometrique quelconque $\div$ $a.b.c.d.e.$ &c. dont on connoît seulement les deux premiers termes & le dernier : car puisque $a.b :: s-e.\ s-a.$ l'on aura $as-aa=bs-be.$ Donc, 1°. En ôtant de part & d'autre $bſ$, & ajoûtant a^2 (ſi $a > b$, c'eſt-à-dire, ſi la progreſſion va en décroiſſant de a à e) on aura $aſ - bſ = a^2 - be$; & en diviſant le tout par $a - b$, $ſ = \frac{a^2 - be}{a-b}$.

2°. En ôtant de part & d'autre $aſ$, & ajoûtant be (ſi $a < b$, c'eſt-à-dire, ſi la progreſſion va en augmentant de a vers e) l'on aura $be - aa = bſ - aſ$; & en diviſant par $b - a$, $ſ = \frac{be - aa}{b-a}$.

COROLLAIRE III.

Puiſque toute progreſſion géométrique qui va en décroiſſant, $ſ = \frac{aa - be}{a-b}$; ſi cette progreſſion décroiſſante eſt continuée juſqu'à l'infini, de maniere que le dernier terme, qui eſt ici e, s'évanoüiſſe, & que $e = o$, alors on aura $ſ = \frac{aa - bo}{a-b} = \frac{a^2}{a-b}$.

SCHOLIE.

Donc ſi cette progreſſion géométrique étoit, par exemple, $\div\!\div\ 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}.\frac{1}{64}.$ &c. juſqu'à l'infini; c'eſt-à-dire, ſi le premier terme de cette ſuite infinie eſt $a = 1$; le ſecond terme $b = \frac{1}{2}$: la ſomme de tous ces termes (quoique continuez juſques à l'infini) ſera toûjours $\frac{a^2}{a-b} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Pareillement ſi cette progreſſion géométrique qui décroît à l'infini, étoit $1.\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}.$ &c. la ſomme de toute cette progreſſion ſeroit $\frac{a^2}{a-b} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Il en eſt ainſi de toutes les autres progreſſions géométriques qui vont en décroiſſant à l'infini. D'où l'on voit de quelle maniere des termes quoiqu'infinis en nombre, ou une ſuite infinie de parties, peut former cependant une ſomme finie. Ceux-là donc ſe trompent bien lourdement qui, de peur d'admettre une quantité infinie, ne veulent point convenir de la diviſibilité de la matiere à l'infini.

DEFINITION XXVI.

La *Pyramide* est une figure solide qui est terminée par une base plane quelconque, & par autant de triangles qu'il y a de côtez dans la base. Telle est la pyramide RSTV, dont un angle quel qu'il soit, par exemple, l'angle V est appellé le *sommet*, & la face RST opposée à cet angle, est appellée la *base* de la Pyramide. Fig. 33.

REMARQUE.

Il est démontré dans les plus simples élemens de Géométre que les parallelogrammes de même base & de même hauteur sont égaux : la démonstration est la même pour prouver que les pyramides de même base & de même hauteur, sont aussi égales ; & il n'y a pour la trouver, qu'à diviser par la pensée les pyramides en une infinité de lames paralleleles aux bases, comme on divise les parallelogrammes en une infinité de lignes paralleles.

LEMME VI.

Un prisme triangulaire est triple d'une pyramide qui a même base & même hauteur que lui.

DEMONSTRATION.

Soit le prisme triangulaire ABCDFE divisé par deux plans ECD, ACD en trois pyramides EFDC, EADC, ABCD ; je dis que ces trois pyramides sont égales. Car (*remarq. préced.*) les pyramides ABCD & EFDC sont égales, puisque leurs bases EDF, ABC, sont égales, & que leur hauteur est commune. Par la même raison les pyramides EFDC & EACD sont aussi égales, ayant leurs bases ECF, ECA égales, & leur hauteur commune. Donc ces trois pyramides sont égales. Donc chacune d'entr'elles est la troisiéme partie du prisme proposé. Fig. 34.

COROLLAIRE.

Quelques pyramides & quelques prismes que ce soient étant toûjours composées de pyramides & de prismes triangulaires ajustez ensemble ; il suit en general que toute pyramide est la troisiéme partie d'un prisme de même base & de même hauteur.

LEMME VII.

L'espace parabolique, c'est-à-dire, l'espace compris entre la parabole, son axe & son ordonnée, est au parallelogramme circonscrit, comme 2 est à 3, ou bien est $= \frac{2}{3}$ de ce parallelogramme.

DEMONSTRATION.

FIG. 35. Soit la parabole APD, dont le sommet est A, l'axe AC, & l'ordonnée CD ; achevez le parallelogramme CM. Je dis que l'espace APDC $= \frac{2}{3}$ du parallelogramme circonscrit CM. Ayant mené la droite AD, tirez une infinité de droites ON qui remplissent l'espace CM, & qui soient paralleles à AC, elles rencontreront la parabole en P, & la droite AD en Q : tirez autant d'ordonnées PR.

L'on a déja (*Cor. 1. déf.* 10.) $CD^2 . RP^2 :: AC . AR$. Mais à cause des parallelogrammes CM & RN, la ligne $CD = AM$, $RP = AN$, $AC = DM$, & $AR = NP$. Donc $AM^2 . AN^2 :: DM . NP$. Mais à cause des paralleles MD & NP, $MD^2 . NQ^2 :: AM^2 . AN^2$. Donc aussi $MD^2 . NQ^2 :: MD . NP$. ou bien $ON^2 . NQ^2 :: ON . NP$. ou *alternando* $ON^2 . ON :: NQ^2 . NP$. (l'on suppose les deux consequens ON & OP multipliez par une ligne prise pour l'unité, pour garder la loi des homogenes) donc la raison des ON^2 aux ON étant toujours & par tout la même, celle des NQ^2 aux NP, doit aussi être toûjours la même. Donc (*Lem.* 5.) la somme de toutes les NQ^2 est à la somme de toutes les NP, comme une NQ^2 quelconque est à sa correspondante NP ; & la somme de toutes les ON^2 est à la somme de toutes les ON, comme une ON^2 est à une ON.

Mais l'on a vû tout à l'heure que ON^2 est toûjours à ON comme une NQ^2 quelconque à sa correspondante NP, NP. Donc la somme de toutes les ON^2 est à la somme de toutes les ON, comme la somme de toutes les NQ^2 est à la somme de toutes les NP; & *alternando* la somme de toutes les ON^2 est à la somme de toutes les NQ^2, comme la somme de toutes les ON est à la somme de toutes les NP. Mais il est évident, 1°. que la somme de toutes les ON^2 forme un parallelepipede, dont la hauteur est AM, & la base le quarré de DM. 2°. Que la somme de toutes les NQ^2 forme une pyramide, dont la hauteur est la même AM, & la base le même quarré de DM. 3°. Que la somme de toutes les ON remplit l'aire du parallelogramme CM. 4°. Enfin que la somme de toutes les NP remplit le triligne AMDPA.

Donc le parallelepipede, dont la hauteur est AM, & la base le quarré de DM, est à la pyramide de même base & de même hauteur, comme le parallelogramme CM est au triligne AMDPA. Mais (*Cor. Lem.* 6.) ce parallelepipede est le triple de cette pyramide: donc aussi le parallelogramme CM sera le triple du triligne AMDPA, ou ce triligne est le tiers du parallelogramme. Donc l'espace parabolique restant APDCA est égal aux deux tiers du même parallelogramme CM; ou, ce qui est la même chose, cet espace parabolique est au parallelogramme circonscrit, comme 2 est à 3. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc si la base CD de la parabole est divisée en trois parties égales, desquelles deux soient égales ensemble à CO, on aura le parallelogramme AONC égal à l'espace parabolique APDC; car (*élem. de Géom.*) CN. CM :: CO. CD :: 2. 3 :: APDC. CM. c'est-à-dire, que les espaces CN & APDC ont une même raison à CM. Donc ces mêmes espaces, à sçavoir, le parabolique APDC & le parallelogramme CN, sont égaux. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

L'on peut aussi par-là quarrer aisément l'espace para- FIG. 37.

O

bolique RPDC compris entre les deux ordonnées CD & RP : car si l'on fait CO. CD : : 2. 3 : : RL. RP. & ayant mené par le sommet A la ligne AN parallele à CD ; si l'on acheve les parallelogrammes CN & RQ, on aura (*Cor.* 1.) CN=APDC & RQ=APR. Donc CN—RQ =APDC—APR. Mais CN—RQ=CE+EQ, & APDC —APR=RPDC. Donc CE+EQ=RPDC. Faites que LE soit à EF, comme OE est EN, c'est-à-dire, que LE×EN=EF×EO ; menez la ligne FH parallele à OE, vous aurez le parallelogramme EH=EQ. Donc l'espace parabolique RPDC=CE+EH=CF, ou bien cet espace parabolique RPDC est égal au parallelogramme CF. On pourroit trouver de la même maniere la quadrature de l'espace parabolique entier APDC, & même encore de sa portion RPDC comprise entre des ordonnées obliques RP & CD ; mais cela est inutile à la matiere que nous traitons.

PROBLEME IV.

Trouver la vîtesse moyenne, ou la hauteur moyenne d'une section quelconque.

SOLUTION.

FIG. 38. Soit un vaisseau ou canal SC, dont la section est PRQ, la base horisontale de cette section soit PQ, & sa hauteur RC qui soit prolongée indéfiniment jusqu'en A. Ayant trouvé (*Probl.* 3.) l'origine du canal ou la hauteur suprême AC de l'eau : du sommet A & sur l'axe AC avec un parametre quelconque soit décrite (*déf.* 10.) la parabole ABD ; entre ses ordonnées horisontales RB, CD, qu'on en imagine une infinité d'autres EG qui remplissent tout l'espace RBDC, & qui rencontrent la section PRQ en autant de lignes aussi horisontales MN, que chaque EG soit imaginée multipliée par sa correspondante MN, il en naîtra autant de parallelogrammes rectangles qu'il y a de EG ou de MN, & la somme de tous ces parallelogrammes rectangles, formera un corps ou so-

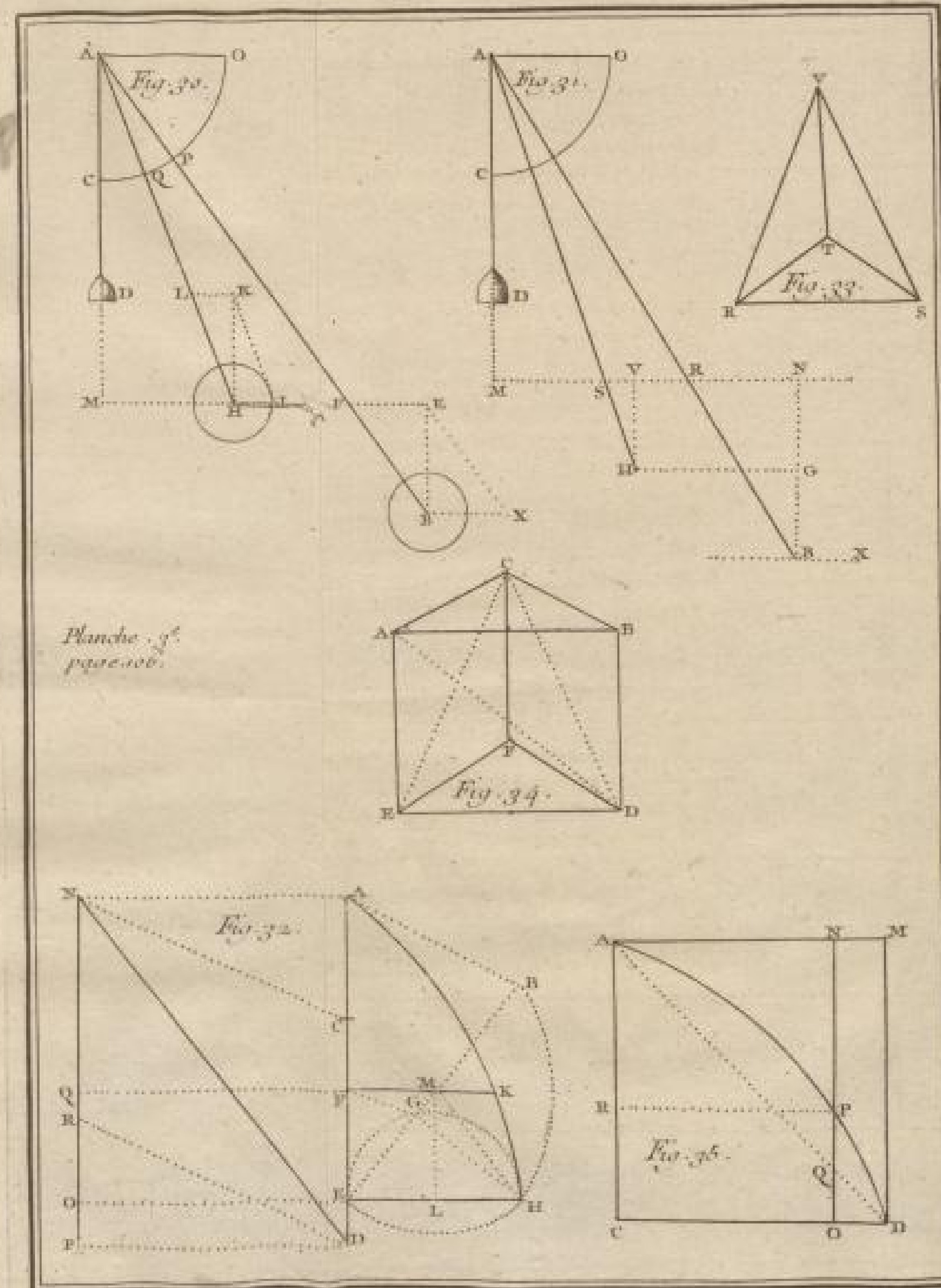
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 33.
Planche. 3e.
page. 106.
Fig. 34.
Fig. 32.
Fig. 35.

lide, que l'on divisera par la section PRQ : je dis que la ligne qui viendra en quotient de cette division, exprimera la vîtesse moyenne cherchée ; c'est-à-dire, que si on supose CO égale à ce quotient, & si l'on tire la ligne OK parallele à AC, & rencontrant la parabole en K, je dis que l'ordonnée KH exprimera cette vîtesse moyenne ; ou bien chaque EG sera à HK comme la vîtesse au point correspondant E est à la vîtesse moyenne ; & AC sera à AH comme la hauteur suprême de l'eau est à sa hauteur moyenne ; ou enfin la quantité de l'eau qui s'écoule par la section PRQ, sera la même que si cette section étoit horisontale en H, & que la hauteur de l'eau fût AH.

DEMONSTRATION.

Puisque (*constr.*) ABD est une parabole, dont le sommet est A, & l'axe AC, les vîtesses de l'eau en C, E, R, seront (*Cor. 2. Théor.* 13.) comme les ordonnées CD, EG, RB. C'est pourquoi si l'on prend CD pour la vîtesse en C ou du filet d'eau PQ, toutes les EG exprimeront les vîtesses des filets correspondans MN. Mais (*art.* 4. *Cor. 6. regl. partic. du mouv. & mes. des Eaux coul.*) les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux par les petites ouvertures correspondantes aux filets d'eau, sont comme les produits de ces ouvertures linéaires par les vîtesses de l'eau à ces mêmes ouvertures. Donc les quantitez d'eaux écoulées en même tems par les ouvertures linéaires MN, sont comme les produits faits de ces ouvertures ou des filets MN par les correspondantes EG. Donc toute l'eau qui s'écoule dans un même tems quelconque par la somme des ouvertures linéaires, ou par la section totale PRQ sera comme la somme des produits de chaque filet MN par l'ordonnée correspondante EG de la parabole, c'est-à-dire, comme le solide qui résulte de la somme de ces parallelogrammes ou de ces produits.

L'on démontrera pareillement (*art.* 4. *Cor.* 6. *regl. part.*) que les quantitez d'eaux qui s'écouleroient en même tems avec une vîtesse moyenne par châcune de ces ouvertures MN, ſont comme les produits de chaque ouverture linéaire par cette vîteſſe moyenne: & par conſequent que toute la quantité d'eau qui s'écouleroit en même tems par toutes ces ouvertures, ou par l'orifice PRQ, eſt comme la ſomme des produits de tous les filets MN par la vîteſſe moyenne, c'eſt-à-dire, comme le produit de toute la ſection PRQ par la vîteſſe moyenne, ou comme le cylindre ou priſme dont la baſe ſeroit PRQ, & la hauteur la ligne qui exprime la vîteſſe moyenne.

Donc la quantité de l'eau qui s'écoule avec les vîteſſes naturelles par la ſection PRQ, eſt à la quantité d'eau écoulée dans un même tems avec une vîteſſe moyenne par la même ſection PRQ, comme le ſolide qui réſulte de la ſomme des produits de chaque MN par ſa correſpondante EG, eſt au priſme ou cylindre, dont la baſe ſeroit PRQ, & la hauteur la ligne qui exprime la vîteſſe moyenne. Mais (*déf.* 14.) la quantité d'eau écoulée ſera la même de part & d'autre: donc auſſi ces deux corps ou ſolides ſeront égaux entr'eux. C'eſt pourquoi ſi le premier, c'eſt-à-dire, celui qui eſt formé de la ſomme des produits de toutes les MN multipliées chacune par ſa correſpondante EG, eſt appellé c; la ſection PRQ, o; & la vîteſſe moyenne, u; l'on aura $c = ou$: & en diviſant l'un & l'autre ſolide par la ſection o, l'on aura $\frac{c}{o} = u$, ou bien la vîteſſe moyenne cherchée de la ſection PQR ſera égale au quotient du premier (à ſçavoir, qui eſt formé par la ſomme des produits de chaque MN par les correſpondantes EG) diviſé par la ſection PQR.

Donc ſi l'on fait $CO = \frac{c}{o}$, KH ſera égale à ce quotient, & par conſequent ſera la meſure de la vîteſſe moyenne; ou bien chaque EG ſera à HK comme la vîteſſe dans le point correſpondant E eſt à la vîteſſe en H; & par conſequent encore (*déf.* 14.) AH ſera à la hauteur moyenne de l'eau. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REGLE GENERALE

Pour trouver les vîtesses moyennes.

Il est donc constant que si le corps ou solide qui résulte de la somme des rectangles formez de chaque MN & de sa correspondante EG, est appellé c; & la section PRQ, o, on aura toûjours dans tout canal pour vîtesse moyenne cherchée $\frac{c}{o}$, & la racine de la hauteur moyenne sera à la racine de la hauteur suprême de l'eau au dessus d'un filet d'eau quelconque, comme la vîtesse moyenne est à la vîtesse de ce filet d'eau.

D'où il suit que pour trouver une vîtesse ou une hauteur moyenne, il faut avoir non seulement la quadrature de la section PRQ, mais encore la dimension du solide qui résulte de la somme des produits faits de chacun des filets horisontaux qui remplissent l'aire de la section, multipliez par les ordonnées correspondantes de la parabole, dont le sommet est sur l'horisontale tirée à l'origine du canal. Mais ces recherches dans ces sortes de sections terminées par des courbes, dépendant de la plus haute Géométrie, passent les bornes que nous nous sommes prescrites de traiter l'Hydraulique d'une maniere élementaire, & à la portée des Commençans : c'est pourquoi nous n'apporterons pour exemple de notre regle que la seule section parallelogrammique, dont la base est horisontale ; & nous donnerons la maniere de transformer les sections ordinaires des fleuves en celle-ci, où il ne se trouve aucune difficulté.

EXEMPLE.

Soit un vaisseau ou canal SC, dont la section soit un parallelogramme quelconque PXZQ, ayant pour base l'horisontale PQ. Que cette PQ & sa parallele étant prolongées, s'il est necessaire, rencontrent en C & en R la ligne AC, qui exprime la hauteur suprême de l'eau. FIG. 39.

Sur cette AC comme axe ſoit décrite avec un parametre quelconque la parabole ABD, dont le ſommet ſoit A, les ordonnées CD & RB. Tracez (*Cor.* 2. *Lem.* 7.) le parallelogramme RFOC égal à l'eſpace parabolique RBDC, & dont un des côtez OF parallele à AC, rencontre la parabole en K. Je dis que l'ordonnée HK eſt la meſure de la vîteſſe moyenne, & que la hauteur moyenne eſt AH.

DEMONSTRATION.

Qu'on imagine la ſection PXZQ diviſée en une infinité de lignes horiſontales MN, qui rencontrent en autant de points E la hauteur ſuprême AC de l'eau; de ces points E ſoient imaginées autant d'ordonnées EG à la parabole ABD.

Il eſt évident que toutes les MN étant égales chacune à PQ ou XZ, les produits de toutes les MN, multipliées chacune par ſa correſpondante EG, ſont égaux aux produits de toutes les EG par la même PQ. Donc la ſomme des produits de chaque MN par ſa correſpondante EG eſt égal à la ſomme des produits de toutes les EG par la même PQ, c'eſt-à-dire, au produit du ſegment parabolique RBDC par la baſe PQ de la ſection. Mais (*conſtr.*) le parallelogramme rectangle RFDC eſt égal à ce ſegment parabolique RBDC. Donc la ſomme des produits de chaque MN par ſa correſpondante EG eſt égal au produit du parallelogramme rectangle RFDC par la baſe PQ de la ſection; c'eſt-à-dire, que (*hyp.*) $c = CR \times KH \times PQ$; mais la ſection parallelogrammique, dont la baſe eſt PQ, & la hauteur RC eſt égale à $CR \times PQ$. Donc en conſervant à o ſa valeur (*Probl.* 4. & *regl. préc.*) $\frac{c}{o}$ ſera $= \frac{CR \times KH \times PQ}{PQ \times CR} = KH$. Donc (*regl. préc.*) KH ſera la meſure de la vîteſſe moyenne de l'eau dans cette ſection, & AH (*def.* 13.) ſa hauteur moyenne. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

L'on aura le calcul de cet exemple, en trouvant, 1°. comme dans l'exemple du Problême 3. les hauteurs AC & AR; d'où l'on connoîtra la valeur de CR. 2°. (*Cor.* 2. *Lem.* 7.) l'on trouvera l'espace parabolique RBDC, ou le parallelogramme CF$=$RC$\times$HK égal à cet espace RBDC. 3°. Que l'on divise enfin RC$\times$HK par RC, le quotient HK sera la vîtesse moyenne cherchée. Il en est ainsi de toutes les autres questions parallelogrammiques à bases horisontales, desquelles seules nous parlons ici pour les raisons que nous avons dites plus haut.

Maintenant pour rendre les sections des fleuves parallelogrammiques & à bases horisontales, si elles ne le sont pas déja, il faut, selon l'illustre Guillelmini, avec des pierres ou des briques, ou bien (ce qui est encore plus aisé) avec des piquets, faire à ces sortes de fleuves une section artificielle, dont la base AB soit exactement horisontale, & les côtez AC, BD, perpendiculaires à cette base : que sur un de ces côtez, par exemple, BD, l'on marque des mesures connuës, comme de pieds ou de toises, &c. & qu'à la partie superieure de cette section artificielle l'on adapte une vanne OEFG, que l'on puisse abaisser de maniere que sa base EF soit toujours dans une situation horisontale. Cela fait, il n'y a qu'à faire passer toute l'eau du fleuve par cette section ; & l'on trouvera aisément par les regles précedentes quelle doit être la vîtesse moyenne de l'eau, ou sa hauteur moyenne. FIG. 40.

REMARQUE.

Il suit clairement, de la maniere que nous avons enseignée (*Probl.* 4.) de trouver les vîtesses moyennes, que (en negligeant même les frottemens) les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux par des orifices semblables & à une même profondeur d'eau, ne sçauroient jamais être proportionnelles à ces orifices, s'ils ne sont horisontaux:

car puiſque (*art.* 4. *Cor.* 6. *regl. partic.*) les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux, ſont comme les produits des vîteſſes moyennes par les ſections, ces mêmes quantitez ne ſeront comme les ſections, que lorſque les vîteſſes moyennes, ou (*art.* 1. *Cor.* 6. *regl. partic.*) les hauteurs moyennes ſeront égales; ce qui ne ſe trouve point dans des orifices même ſemblables, & placez à une même profondeur d'eau, s'ils ne ſont encore horiſontaux. Donc des orifices même circulaires poſez en toute autre ſituation que l'horiſontale, quoique leurs centres fuſſent tous à une égale profondeur d'eau, ne donneront jamais de l'eau en raiſon de leur aire ou ſurface; puiſque les hauteurs moyennes de ces ſections étant au deſſous de leurs centres, peuvent varier dans des ſections circulaires d'inégale grandeur.

PROBLEME V.

Trouver les quantitez de l'eau qui s'écoule par les ſections des fleuves.

SOLUTION.

FIG. 41. & 42. Il faut avoir pour cela un vaiſſeau SD, dont l'orifice XQ ſoit parallelogrammique & à baſe horiſontale PQ, & verſer continuellement de l'eau dans ce vaiſſeau, de maniere qu'elle ſurpaſſe toûjours ſes bords, ou que le vaſe ſoit toûjours rempli à une même hauteur, pendant que l'on amaſſe l'eau qui s'écoule par cet orifice PZ dans un certain tems, & qu'on meſure exactement cette eau écoulée: enſuite il faut chercher (*Probl.* 4) la vîteſſe ou la hauteur moyenne tant de l'orifice XQ que de la ſection du fleuve dont on veut meſurer l'eau coulante, en réduiſant cette ſection à la parallelogrammique, par le moyen de l'inſtrument décrit plus haut. après quoi il faut trouver, par les élemens de la Géométrie, les aires tant de cette ſection renduë parallelogrammique, que de l'orifice PZ.

Cela fait, la quantité d'eau écoulée en deux minutes de tems

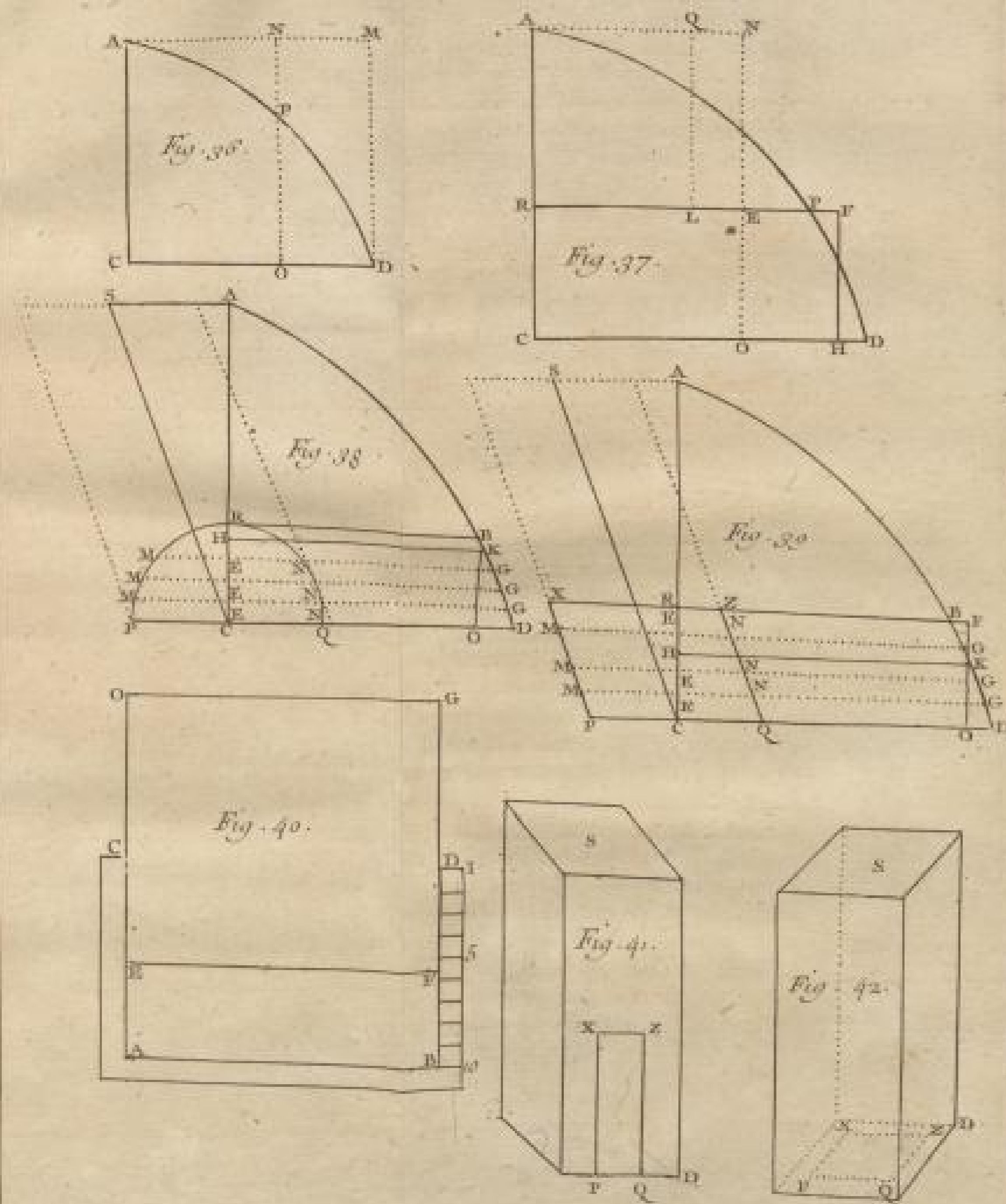

Planche 4
pag. 112.

tems par l'orifice PZ, soit appellée m; sa vîtesse moyenne trouvée, u; l'aire de cet orifice, o; l'aire de la section du fleuve soit nommée ω; sa vîtesse moyenne, v; & enfin la quantité d'eau cherchée qui s'écoule en tems égal, c'est-à-dire, en deux minutes par cette section parallelogrammique du fleuve, soit appellée μ: l'on aura (*art. 4. Cor. 6. regl. partic. mouv. & mes. des Eaux*) $m . \mu :: ou . \omega v$. d'où l'on tire $\mu ou = m \omega v$; ce qui donne (en divisant par ou) $\mu = \frac{m \omega v}{ou}$ pour la quantité cherchée de l'eau qui s'écoule en deux minutes de tems par la section construite du fleuve dont il s'agit.

D'où s'ensuit regle suivante.

REGLE GENERALE

Pour mesurer les Eaux coulantes des fleuves quelconques.

1°. Pour que la vîtesse de l'eau soit par tout la même, il faut choisir dans le fleuve une section située de maniere que le lit de la riviere au dessus & au dessous de cette section, soit droit autant qu'il est possible; ce qui est facile à trouver dans les grands fleuves, & n'est pas fort difficile dans les petits.

2°. Ayant choisi la section convenable du fleuve, pour ôter l'irregularité de cette section naturelle, s'il s'y en trouve, il faut y adapter la section artificielle dont on a parlé plus haut.

3°. Lorsque le fleuve demeure dans une même situation, c'est-à-dire, lorsque sa surface ne s'éleve ni ne s'abaisse, il faut abaisser la vanne jusqu'à la surface KL de l'eau que l'on suppose stable. FIG. 43.

4°. Que l'on observe sur le côté BD la hauteur BK de la surface de l'eau au dessus du fond BA de la section artificielle; cette hauteur BK ne sera pas fort differente de la hauteur superieure de l'eau, tant à cause du peu de penchant qu'ont ordinairement les lits des fleuves, qui le plus souvent font un angle insensible avec l'horisontale, qu'à cause de plusieurs obstacles qui retardent la vîtesse de l'eau : tels sont, par exemple, les inégalitez du fond & des bords du fleuve, un lit tortueux, des sections tantôt larges, tantôt étroites, & autres de cette espece, qui contribuënt beaucoup à diminuer l'acceleration du mouvement. Que s'il étoit à craindre que l'eau par sa trop grande abondance ne surpassât les rives du fleuve, il est clair qu'il faudroit les élever selon le besoin.

Cela présupposé, soit imaginée la parabole KNH décrite (*déf.* 10.) sur l'axe BK, hauteur naturelle de l'eau, l'on trouvera (*Probl.* 4.) la hauteur moyenne KM & la vîtesse moyenne MN. Après quoi il n'y a qu'à faire ce qui est enseigné dans le Problême 5. & l'on aura aisément la quantité d'eau cherchée.

Que si le lit de la riviere étoit sensiblement incliné sur l'horison, il faudroit d'abord chercher (*par le Probl.* 3.) la hauteur suprême de l'eau, ensuite operer ainsi qu'il vient d'être dit. Mais comme la hauteur suprême trouvée par le moyen du pendule & du quart de cercle n'est pas entierement juste, comme il a déja été remarqué, il vaut mieux la chercher par le nivellement, qui étant fait avec exactitude, fera connoître au juste quelle est la distance du fond de la section à la ligne horisontale menée par l'origine du fleuve ; cette distance sera la hauteur suprême cherchée : de-là ou aura (*Probl.* 4.) la hauteur moyenne, &c.

SCHOLIE.

1°. Si une vanne ne suffit pas, il faut en mettre plusieurs ; car il est très-indifferent de mesurer l'eau d'un fleuve à une seule fois ou à plusieurs.

FIG. 44. 2°. L'on peut trouver avec beaucoup de facilité quelle est l'inclinaison d'un canal par le moyen de plusieurs instrumens d'usage, & sur tout de celui-ci. Soient deux regles ABD, CB, jointes ensemble à angles droits au point B ; qu'une autre regle EBG soit attachée à celles-ci à l'endroit B de leur union ; de maniere pourtant que cette

troisiéme soit mobile autour du sommet B des angles droits que font les deux autres : il faut aussi que cette regle EBG ait à sa partie inferieure BG une pointe G, pour pouvoir être fichée en terre, & que son autre partie BE soit égale à BC. Soient divisées BE & BC en parties égales prises à volonté. Soit encore une quatriéme regle EC attachée seulement au point E, & divisée en parties égales à celles des lignes BE & BC.

Maintenant pour trouver de combien un fleuve est incliné sur l'horison, il faut enfoncer la regle EBG dans le fond du fleuve jusqu'en B, de maniere que ABD soit couchée parallelement à ce fond ; l'on doit observer que cette regle EBG soit exactement perpendiculaire à l'horison ; ce qu'on peut connoître aisément par le moyen d'un pendule. Cela fait, l'autre regle EC qui tient par un bout au point E de la regle EG, soit appliquée par son autre bout à l'extrêmité C de la regle BC. Que l'on mesure ensuite les angles en E & en C ; ces angles connus, l'on connoîtra (*élem. de Géom.*) l'angle EBC qui sera l'inclinaison cherchée du canal : car ayant mené par B l'horisontale HI, puisque (*hyp.*) les angles EBI, CBD, sont droits, si l'on ôte l'angle CBI qui leur est commun, restera l'angle EBC égal à l'angle IBD, qui est l'angle d'inclinaison du canal.

On peut opposer contre cette méthode de mesurer les Eaux coulantes, qu'il s'y rencontre de grands obstacles, tels, par exemple, que la difficulté de construire les machines qui doivent y servir. Mais on doit répondre à cette objection ce que dit Castelli sur cette matiere : *Pour la mesure des grands fleuves*, dit cet Auteur, *il faut des ordres de grands Princes ; ainsi l'on ne doit le plus souvent réduire ses idées à l'acte, que dans une extrême necessité, & dans la vûë d'un avantage si considerable, qu'il surpasseroit tous les frais d'une telle entreprise.* D'ailleurs on trouve dans la plûpart des fleuves des machines à peu près semblables à celles dont nous avons parlé, ce sont les écluses ordinaires Mais s'il ne se trouvoit point de machine pareille dans un grand fleuve dont on voulût mesurer les Eaux coulantes, & qu'il fût fort difficile d'y en construire; il faudroit recourir à des fleuves plus petits, dont les mesures prises en particulier, & ensuite ajoûtées ensemble, composeroient la mesure entiere du grand fleuve.

REMARQUE.

Tous les autres Problêmes qui concernent cette matiere se déduisent avec une facilité merveilleuse des regles précedentes du mouvement & de la mesure des Eaux; c'est ce dont un chacun peut s'assurer en se donnant la peine de voir ces Problêmes dans les Méchaniciens, ausquels nous jugeons à propos de renvoyer le Lecteur, pour qu'il ait le plaisir de trouver lui-même les usages immenses de nos regles, dont il aura sujet d'admirer la fecondité.

Il faut remarquer encore que ce que nous avons dit jusqu'ici des Eaux coulantes, doit s'entendre aussi des Eaux jaillissantes, & qu'ainsi l'on a déja satisfait amplement aux questions que l'on pourroit proposer sur les ouvertures par où sortent les jets d'eau sur les quantitez d'eau écoulée par ces orifices, & sur les vîtesses de l'eau à ces mêmes ouvertures. C'est pourquoi pour ne point faire ici une repetition inutile, nous nous contenterons de traiter seulement ce qui regarde les jets d'eau en eux-mêmes.

PROBLEME VI.

La hauteur des jets d'eau verticaux est égale en elle-même au perpendicule de l'eau.

DEMONSTRATION.

FIG. 45. Soit l'eau jaillissante AB; je dis que sa hauteur est égale en elle-même au perpendicule de l'eau, c'est-à-dire, qu'ayant mené par la fontaine C l'horisontale CB, la hauteur du jet d'eau peut parvenir jusqu'à cette ligne,

ou du moins ne s'en pas éloigner beaucoup. Car (*Th.* 12. *& Cor.* 2. *Th.* 8.) l'eau qui est au fond A du tuyau acquiert par la pression de l'eau superieure CA une impetuosité ou vîtesse aussi grande qu'auroit cette même partie inferieure d'eau, si elle étoit tombée du sommet du perpendicule : mais (*Théor.* 9.) tout corps grave tombant de quelque hauteur que ce soit acquiert à la fin de sa chûte un effort suffisant pour remonter à la même hauteur d'où il étoit descendu. Donc s'il ne se trouvoit des obstacles, l'eau remonteroit précisément à la même hauteur d'où elle étoit descenduë. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je démontre en second lieu, que l'eau CA doit être en équilibre avec l'eau AB; car supposé que la pression de l'eau CA ne fût pas en équilibre avec l'eau jailissante AB, cette pression auroit ou plus ou moins de force; mais de l'une & l'autre maniere l'on auroit le mouvement perpetuel : ce qui est absurde. Car, 1°. soit l'effort ou moment de la pression de l'eau CA plus grand que celui de l'eau AB qui resiste au mouvement par lequel elle est poussée de A vers B; il est évident qu'en ce cas le poids ou l'effort de l'eau CA pourroit élever l'eau jaillissante AB plus haut que n'est l'horisontale CB : mais si cela étoit, il est clair qu'on auroit le mouvement perpetuel. Car ayant construit au dessus de B quelque vaisseau qui reçût l'eau jaillissante, & ayant adapté à ce vaisseau un tuyau qui allât en C, l'eau retourneroit par ce moyen à la fontaine, d'où elle remonteroit une seconde fois au dessus de CB; & ainsi jusqu'à l'infini.

2°. L'effort ou moment de la pression de l'eau CA ne peut être moindre que celui de l'eau AB, qui resiste à cette pression; car il faut à l'eau pour monter de A jusqu'à B une vîtesse ou impetuosité égale à celle qu'elle acquiert en tombant de B en A (en faisant abstraction de la résistance de l'air) mais l'eau qui tombe de B en A n'a pas plus de force que l'eau CA; car si l'eau en tombant de cette maniere acqueroit une impetuosité plus grande que celle de l'eau CA, l'eau tombant de B en A pourroit élever l'eau CA à une hauteur plus grande que celle d'où la même CA est tombée : mais cela posé, le mouvement perpetuel s'ensuit encore, puisqu'alors, comme dans l'art. 1. l'on pourroit par le moyen d'un tuyau faire passer l'eau de C à B, d'où elle se précipiteroit toûjours en A, d'où elle éleveroit toute l'eau AC: l'on voit par-là que la même eau reviendroit toûjours; ce qui donneroit le mouvement perpetuel.

REMARQUE.

Sur ce principe tombent la plûpart des moyens tentez pour la découverte du mouvement perpetuel; car l'on y a presque toûjours mal comparé l'impetuosité acquise par la chûte avec la résistance du corps montant. C'est pour cela aussi que le P. Deschales ne craint point de dire (*propos.* 36. *des Fontaines naturelles*) que perdre son tems, & chercher le mouvement perpetuel, sont, à son sens, une seule & même chose; qu'ainsi il se voit obligé d'avertir que l'on ne doit jamais ajoûter foi à ceux qui diront avoir trouvé ce mouvement, & qu'à peine en croiroit-il à lui-même, s'il l'avoit vû.

PROBLEME VI.

Désigner les obstacles qui empêchent que la hauteur des jets d'eau verticaux ne soit égale au perpendicule de l'eau.

SOLUTION.

Le premier obstacle est tiré de la résistance de l'air. C'est par cette cause que les corps graves ne remontent point à la même hauteur d'où ils étoient descendus: un pendule, par exemple, devroit par lui-même monter à la hauteur d'où il est tombé; mais parce que l'air resiste à sa division, le pendule n'acquiert pas une impetuosité aussi grande qu'il acquereroit dans le vuide; par la même raison aussi l'air resiste encore au mouvement que fait le même pendule pour remonter: & c'est pour cela que ſes oſcillations vont toûjours en décroiſſant.

Le ſecond obſtacle eſt tiré de la diviſion de l'eau ; car dans les jets d'eau les plus gros, l'eau monte avec une ſi grande impetuoſité, qu'en heurtant avec force contre l'air, elle ſe diviſe en une infinité de petites goutes ; ce qui multipliant davantage les ſurfaces de l'eau, doit en retarder la vîteſſe, puiſqu'y ayant plus de ſurfaces dans les goutes d'eau, la réſiſtance de l'air doit avoir plus d'action ſur elles. C'eſt un principe de Phyſique connu de tout le monde.

Le troiſiéme obſtacle ſe tire de ce que les goutes inferieures heurtent contre les ſuperieures ; car il eſt certain que l'eau qui jaillit verticalement, eſt pouſſée avec plus de vîteſſe au commencement qu'à la fin, ou au ſommet du jet d'eau, parce que l'impetuoſité de l'eau qui monte eſt diminuée petit à petit par un effort contraire de celle qui deſcend.

Le quatriéme obſtacle ſe tire du peu d'abondance de l'eau ; car ſi l'orifice du jet d'eau eſt trop large, pour que la fontaine puiſſe fournir l'eau avec toute la vîteſſe & l'impetuoſité neceſſaire, l'eau jailliſſante ne montera point dans la raiſon de la hauteur de la fontaine, parce que le tuyau n'étant pas aſſez rempli, la preſſion de l'eau eſt très-petite, & ne ſçauroit faire l'effort convenable : c'eſt ce défaut qui fait que ſouvent l'eau jailliſſante s'éleve à peine au deſſus de l'eau dormante où elle tombe.

Le cinquiéme obſtacle vient de ce que le tuyau eſt raboteux ou trop étroit ; car il eſt clair que la vîteſſe de l'eau doit être retardée par ſes frottemens contre le parois du vaiſſeau : mais plus les tuyaux ſeront étroits & inégaux, & plus il y aura de frottemens.

Le ſixiéme obſtacle peut venir de la figure des tuyaux ; & premierement, ſi le tuyau va en ſe retréciſſant en quelques endroits, car il vaut mieux qu'il ſoit plus étroit dans toute ſa longueur, que d'être tantôt large, tantôt étroit. En second lieu, il faut que le tuyau soit plûtôt circulaire que quarré, en ce que dans la premiere forme il a une surface plus petite sous une même capacité. Troisiémement, s'il est necessaire que le tuyau soit coudé, il vaut mieux qu'il soit courbé en s'arondissant qu'en faisant un angle; car ces sortes d'angles brisent l'impetuosité de l'eau. En quatriéme lieu, il faut que le tuyau se termine à son orifice en entonnoir. Enfin cet orifice doit être très-lisse & uni, pour que l'eau ne se divise point.

C'est de ces obstacles que vient l'irregularité des Eaux jaillissantes. L'on a observé que les jets d'eau les plus petits sont ceux qui montent le plus haut en raison de la hauteur du perpendicule, parce que les jets d'eau plus grands se divisent davantage, & par-là donnent plus de prise à l'action de l'air. Quoiqu'il en soit, on a remarqué par l'experience qu'un perpendicule d'eau de 4 pieds fait monter l'eau jaillissante à la hauteur de $3\frac{1}{3}$ pieds; & par consequent que le perpendicule est à l'eau jaillissante comme 6 & à 5. L'ingenieux M. Mariotte a fait beaucoup d'observations là-dessus dans son Traité du mouvement des Eaux, dont on a tiré la Table suivante.

TABLE

Pour les hauteurs des Eaux jailliſſantes.

Jets d'eau.	*haut. des fontain.*		*Jets d'eau.*	*haut. des fontain.*	
5 *pieds*	5 *pieds*	1 *pouce.*	55 *pieds*	65 *pieds*	1 *pouce.*
10	10	4	60	72	0
15	15	9	65	79	1
20	21	4	70	85	4
25	26	1	75	93	9
30	33	0	80	101	4
35	39	1	85	109	1
40	45	4	90	117	0
45	51	9	95	125	1
50	58	4	100	135	4

PROBLEME VII.

Déterminer le poids & la quantité de la ligne d'eau que les Fonteniers tirent des reſervoirs.

SOLUTION.

La difficulté qu'il y a de définir cette ligne d'eau eſt trop grande, pour qu'on puiſſe la diſſimuler ; car toutes les fois que l'eau coulera par un orifice linéaire, ce ſera toûjours une ligne d'eau, ſoit qu'elle s'écoule lentement, ou avec une vîteſſe quelconque : cependant elle peut couler avec une ſi grande vîteſſe, qu'elle donnera par un même orifice linéaire une quantité d'eau cent fois plus grande. Avec quelle vîteſſe doit donc couler l'eau linéaire que les Fonteniers diſtribuënt ? ou, puiſqu'ils ne font aucune attention à la vîteſſe, quel doit être le perpendicule, pour que l'on ſoit cenſé avoir une ligne d'eau ?

Quelques-uns croyent qu'il faut que l'eau soit élevée d'un demi-pouce ou de six lignes au dessus de l'orifice, pour que l'on puisse assurer qu'il s'écoulera une ligne d'eau, ce qu'ils appellent couler à plein orifice : d'autres prétendent que la hauteur du perpendicule ne doit avoir que quatre lignes.

Mais sans s'arrêter à tous les differens sentimens sur cette matiere, l'on doit tenir pour constant que l'on ne sçauroit déterminer précisément la quantité de cette ligne d'eau que distribuënt les Fonteniers, qu'auparavant le perpendicule de l'eau coulante ne soit donné ou connu. Supposons donc que la hauteur du perpendicule linéaire est de 4 ou 6 lignes. Puisque l'on sçait (*art. 1. Cor. 6. regl. partic. du mouv. &c.*) que les quantitez d'eaux écoulées en tems égaux par des orifices égaux, sont comme les racines des hauteurs, ou que (ce qui revient au même) les hauteurs sont comme les quarrez de ces quantitez d'eaux écoulées. D'ailleurs puisqu'on a connu par l'observation qu'il s'écoule dans une seconde de tems 20 grains d'eau par un orifice linéaire, au dessus duquel l'eau est tant soit peu élevée ; il est clair que dans le même espace de tems il s'écoulera 40 grains d'eau, si la hauteur de l'eau au dessus de l'orifice est de 4 lignes, qu'il s'en écoulera 80 grains, si le perpendicule est de 16 lignes, & 160 grains, si le perpendicule est de 64 lignes ; & ainsi de suite.

Voici une autre maniere de faire ce calcul, c'est par le moyen d'une observation faite sur un tuyau d'un pied. L'on a trouvé que dans l'espace de 13 secondes il s'écoule une demi-livre d'eau par l'orifice linéaire de ce tuyau ; il doit donc s'en écouler $354\frac{6}{13}$ grains pendant une seconde. Si le perpendicule n'est supposé que de trois pouces, il doit s'écouler pendant le même tems d'une seconde la moitié seulement de l'eau qui s'écouloit lorsqu'il étoit d'un pied, c'est-à-dire, qu'il s'écoulera pour lors $177\frac{3}{13}$ grains d'eau. Si le perpendicule n'est que de 9 lignes, il ne s'écoulera que la moitié de ce poids, c'est-à-dire, $88\frac{1}{2}$ grains d'eau, & un peu davantage : & enfin si le perpendicule est de deux lignes seulement, il s'écoulera presque 44 grains d'eau dans le même espace d'une seconde. Cependant par l'observation précedente un perpendicule de 4 lignes ne donne que 40 grains d'eau.

L'on a appris par observation qu'un pouce cubique d'eau renfermé dans un vaisseau d'airain, pese une demi-once, demi-dragme & 8 grains; & l'on n'a pû trouver par aucune mesure que le vaisseau de cuivre dont on se servoit pour cette experience, eût plus d'un pouce cubique en capacité : (cependant nous ne voulons pas déterminer ici quel est le poids d'un pied cubique d'eau, que nous trouverions être plus pesant qu'on ne le dit ordinairement) mais un pouce cubique d'eau réduit en lignes, contient 1728 lignes cubiques, & son poids qui est de demi-once, demi-dragme & 8 grains, étant réduit en grains, en contient 396. D'où il suit qu'une ligne d'eau cubique pese moins d'un grain; car ayant divisé 1728 par 396, le quotient fait voir qu'un grain contient $4\frac{4}{11}$ lignes cubiques. Donc $354\frac{6}{11}$ grains d'eau, que l'on a dit plus haut s'écouler dans l'espace d'une seconde, font à peu près 1418 lignes cubiques d'eau. Que si ces 1418 lignes d'eau composent un cylindre d'eau linéaire, l'on trouvera que d'un tuyau de la longueur d'un pied il s'est écoulé par un orifice linéaire dans l'espace d'une seconde un cylindre d'eau de la longueur de 9 pieds $10\frac{1}{6}$ pouces; & par consequent qu'il s'écouleroit dans le même tems un cylindre d'eau linéaire de la longueur de 18 pieds $20\frac{1}{3}$ pouces, si le tuyau étoit de 4 pieds.

COROLLAIRE I.

D'où il suit qu'une ligne cubique d'eau pese $\frac{1}{4} + \frac{1}{11}$ grains, ou $\frac{15}{44}$ grains; & ainsi qu'une goute d'eau ne pese pas un grain, puisque pour ce poids d'un grain il faut au moins trois goutes d'eau assez grandes, c'est-à-dire, qui ayent chacune une ligne cubique de solidité

COROLLAIRE II.

Après ce qui vient d'être dit, il est si aisé de déterminer combien il s'écoulera de lignes d'eau cubiques par un orifice donné quelconque, dont on connoîtra le perpendicule, que cela n'a pas besoin d'explication.

COROLLAIRE III.

Mais aussi l'on ne sçauroit déterminer au juste la ligne ou la quantité d'eau que les Fonteniers font écouler de leurs reservoirs, que l'on ne sçache auparavant combien de pieds, de pouces ou de lignes a le perpendicule de l'eau au dessus de l'orifice. Sur quoi il faut observer que ce perpendicule est d'autant plus court, que la sécheresse de l'année a été plus grande; car la sécheresse diminuë considerablement l'eau tant dans les Lacs que dans les Aqueducs, de maniere qu'il arrive quelquefois qu'on ne peut tirer une seule goute d'eau d'un reservoir qui avoit coûtume d'en fournir beaucoup; & l'on ne sçauroit remedier à cet inconvenient, puisque les fleuves eux-mêmes n'en sont pas exempts.

AVERTISSEMENT.

Pour rendre ce Traité complet, nous ajoûterons quelque chose sur les differentes épaisseurs & forces necessaires aux tuyaux des Aqueducs suivant les differentes hauteurs des Fontaines & les differens diamétres des canaux. Ce que nous allons dire sur cette matiere, est tiré de l'Ecrit que M. Romer a inseré à la fin des Memoires de l'Académie des Sciences de l'année 1693.

Lorsque l'eau tombe d'une haute Fontaine, & qu'elle coule par des canaux fort larges, il faut à ces canaux des parois bien plus forts que s'ils étoient plus étroits, & que l'eau ne tombât que d'un endroit peu élevé. Il s'agit donc d'expliquer en quelle proportion il faut changer l'épaisseur du métal pour conserver au tuyau la même force dans quelques hauteurs & quelques diametres que ce soient. Les regles que l'on donnera pour trouver cette proportion, seront fondez sur les Théoremes suivans, où l'on suppose un tuyau continu ABC courbé à angle droit en B. Dans la partie AB perpendiculaire à l'horison, & d'une largeur indéfinie, j'y considere la hauteur de l'eau qui presse par sa propre pesanteur ; & dans la partie horisontale BC d'une longueur indéfinie, j'y considere la largeur des canaux. FIG. 46.

THEOREME XVII.

Des eaux qui tombent de differentes hauteurs AB, DB, dans un même tuyau ABC fermé en C, font effort contre le tuyau en raison de ces hauteurs AB, DB.

DEMONSTRATION.

Il est clair (*démonstr. du Théor.* 12.) que les eaux qui s'écoulent par le même orifice d'un tuyau quelconque, font effort à cet orifice en raison de leurs hauteurs. Donc l'orifice étant bouché, les eaux feront effort contre le tuyau dans la même raison de leurs hauteurs. *C. Q. F. D.*

THEOREME XVIII.

Une eau qui tombe d'une même hauteur dans des tuyaux de differens diametres, fait effort contre ces tuyaux en raison de leurs diametres.

DEMONSTRATION.

Il est évident que les forces des eaux qui tombent d'une même hauteur, sont comme les surfaces sur lesquelles elles pesent ; mais (*élem. de Géom.*) les surfaces cylindriques sont comme les diametres des tuyaux qu'elles forment. Donc les forces avec lesquelles les eaux tombant d'une même hauteur, font effort contre des tuyaux de differens diametres, sont comme les diametres de ces tuyaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XIX.

Les forces que doivent avoir les tuyaux pour resister à leur rupture, sont comme les quarrez de leurs epaisseurs.

DEMONSTRATION.

FIG. 47. & 48. Pour démontrer cette proposition, soit imaginé un tuyau divisé en plusieurs anneaux, dont les largeurs soient comme les épaisseurs. Que ces anneaux soient representez par un seul anneau AB, qui ayant été coupé en C, & ensuité *rectifié*, devienne le prisme HF; de maniere que l'épaisseur de l'anneau soit FG, & sa largeur EF. Il est évident que les anneaux AB ne resisteront pas autrement à l'effort ou impulsion de l'eau, que les prismes HF qui leur sont égaux resisteroient à des poids R égaux chacun à l'effort que fait l'eau sur chaque anneau AB. Il est encore évident que la resistance du prisme FH ne vient point de sa longueur (puisqu'on le suppose sans pesanteur) mais uniquement du nombre des fibres ou filamens EI dont il est composé, comme cela est dans les cordes qui n'ont point de pesanteur. Les resistances de ces prismes sont donc comme les bases EG. Donc les resistances des anneaux AB seront aussi comme les bases EG. Mais parce que les largeurs EF de ces bases parallelogrammiques & à angles égaux, sont comme les épaisseurs FG, ces bases sont semblables, & par consequent sont (*élem. géom.*) comme les quarrez des côtez homologues FG, c'est-à-dire, des épaisseurs. Donc ces prismes étant rétablis en anneaux, ou plutôt les anneaux eux-mêmes AB, resisteront en raison des quarrez de leurs épaisseurs. Mais la resistance & l'épaisseur du tuyau n'est autre chose que la resistance & l'épaisseur des anneaux AB qui le composent. Donc les forces avec lesquelles les tuyaux resistent à l'impulsion

de l'eau, sont comme les quarrez de leurs épaisseurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'où l'on tire les trois regles suivantes, qui servent à déterminer les differentes épaisseurs que doivent avoir les tuyaux pour resister à leur rupture.

REGLE I.

La hauteur de l'eau restant toûjours la même, si l'on veut changer le diametre du tuyau, il faut pour lui conserver sa même force, changer l'épaisseur du métal de telle sorte qu'elle soit en raison des racines des diametres. C'est une suite des Théoremes 18. & 19.

REGLE II.

Si l'on change la hauteur en conservant le diametre, l'on doit pareillement changer l'épaisseur de maniere qu'elle soit en raison des racines des hauteurs. C'est une consequence des Théoremes 17. & 19.

REGLE III.

Après avoir changé la hauteur de l'eau & le diametre du tuyau par où elle coule, l'on trouvera l'épaisseur que doit avoir le métal, si l'on fait, comme le produit d'une hauteur par le diametre d'un tuyau est au produit de l'autre hauteur par le diametre de l'autre tuyau, de même le quarré de l'épaisseur du premier tuyau est au quarré de l'épaisseur du second. Cette analogie suit clairement, en comparant ensemble les Théoremes 17. 18. & 19.

EXEMPLE.

Soit un tuyau de plomb de 16 pouces de diametre, la hauteur de l'eau qui y coule soit de 50 pieds. L'on a trouvé * qu'en donnant à ce tuyau $6\frac{1}{3}$ lignes d'épaisseur, il avoit assez d'e force pour resister à sa rupture:

* *Dans la Machine de Marly.*

l'on demande là-dessus quelle doit être l'épaisseur d'un autre tuyau de plomb qui auroit 10 pouces de diametre, & qui recevroit l'eau d'une hauteur de 40 pieds.

Le produit de 16 par 50 est 800.

Le produit de 10 par 40 est 400.

Le quarré de l'épaisseur donnée est 40, & quelque chose de plus.

Donc comme 800 est à 400, de même 40 est à 20, dont la racine est presque $4\frac{1}{2}$, qui sera l'épaisseur cherchée que doit avoir ce second tuyau, pour qu'il ait autant de force que le premier dont on a parlé.

FIN.

Planche 5e. et derniere
page . 129 .