The image shows the front cover of an antique book. The cover is made of marbled paper with a dark brown background and a pattern of lighter brown, irregular, cell-like shapes. A vertical strip of plain white paper runs down the left side of the cover. In the bottom-left corner of this white strip, there is a small, rectangular, off-white label with black ink. The label contains the text "Math." on the first line and "1032^m" on the second line.

Math.
1032^m

1660
1660
Prof. Schonae, Joh.

ALGO- RITHMVS DE- MONSTRATVS.

Habes in hoc libello, studiose lector, Mathematicas demonstrationes, in eam calculandi artem, quam uulgiis Algorithmum uotat, quibus fons & origo, item caussæ & certitudo eius, clarissime (ut in Mathematicis omnibus fieri solet) tibi ob oculos ponuntur. Et quamuis etiam citra hanc cognitione, & disci & exerceri possit, tamen, quantum interest inter cæcum, aliena trepide & cunctanter uestigia sequentem, & inter occultum, secure & expedite incedentem, tantū interest inter harum demonstrationum rudem & peritū calculatorem. Quare eme, lege, & iuuaberis.

M. D. XXXIIII.



Mathem.

293,20

СОДЛЯ
СОВУМНЯ
СУТАЛЖОК

Издано в 1900 году
в Ташкенте
в типографии
Г. А. Григорьевича
и К°

IOANNES SCH
NERVS DISCIPLINARVM MA
THEMATICARVM PROFESSOR D. GEOR
GIO VOLCAMERO S. D.



Ensisse quosdam è sapientib, priscis com-
perio, aptiss. esse discrimē quo à reliquis
animantib, homo discerneretur, numero,
rum intellectū & scientiā, necq; enim alia
quæ ingenij bona sunt, non etiam in bestijs uel inesse
uel relucere. Quæ cum considero non temere neq; ab
horrentia à uero dicta existimo. Nam ut ab exili ani-
malculo ordiamur formica, quos illi sensus quantum
cordis inesse cognitum est, ut Cleanthē cui nō place-
ret ratiōis participes esse bestias, hoc ipsum admiran-
tem spectatorē retinuerit, dum cernit precio oblato
unum quasi agmen illarū, mortuū suum ab aduerso
redimere. Sed in apicula, quid solertiae, curæ, studij,
pietatis, mundiciae requirere possis: quo illæ gnauita
te cellulas extruunt, qua colunt disciplinæ sanctimo-
nia, augent sedulitate: Quanta religione ducē obser-
uant, quibus modis tuentur suos, arcent exagitantq;
hostes: ut mihi Virgilio horum omnium admiratio
expressisse hæc uideatur.

Magnanimosq; duces totiusq; ex ordine gentis
Mores & studia & populos & prælia. Et.
Ipsæ Regem paruosq; Quirites
Sufficiunt, aulasq; & cerea regna resignant.

A ñ Transea-

Transeamus hinc ad max. beluam & densiss. tectam
corio Elephantū. Quid ego quæ tradita de his legun-
tur memorē, facile constituet de intelligentia, qui cre-
diderit literas etiam illos discere solere, quis autē nō
credat tot tamq; probatis autorib. Iam Leonis fortia
pectorā & parcentia prostratis, Excelsosq; equorum
animos, ut omittamus, quā calliditatis, & si fas est ita
appellare prudentiæ, uulpecula, quā fidelitatis sagaci-
tatisq; canes laudem relinquūt integrum homini. Ille
autē Homericus uersutus & fraudib. dolisq; omnib.
instructus erro, nonne cum perdicib. cōmunem ha-
bet famā, à quib. etiā natū est prouerbiū, ut qui admi-
rabilib. artib. alicunde se explicuerint, ἐκπρᾶσικῶν di-
cantur. ut Erinacei quoq; peritia celebratur, nam uul-
pem multa, hunc unū singulare nosse aiunt, quæ ipsa
ad cœlestia quoq; erigitur, certiss. enim præsentiant
uentorū flatus, qua è parte cœli uenturi sint, & cauer-
nulas suas aduersus illos obstruunt, qua obseruatiōe
quendā Cizycenū diu multumq; olim in admiratiōe
hominū fuisse prōditū est. Adimere aut̄ possit ne ali-
quis rationē, quib. amores concesserit? Sermōis etiā
usum uendicant, nō pittaci modo, sed corui quoq; &
picæ. Numeros quod sciret quodq; intelligeret præ-
ter hominē nihil est inuentū animatis. Quare ijs quæ
plures pullos peperere, cū ablatis uniuersis unum mo-
do cōcesseris, nullos amisisse sentiūt. Quid quod in-
ter hoīes qni minime hac parte ualent tardiss. sunt, ita
q; barbaræ aliquæ gentes cum ad decē peruenere pri-
mum numerorū limitē, consistūt & ulterius nesciunt
progre-

progredi, animi inertia quasi in ignota via hæsitāte.
Nec est alia tam Græcis & Latinis uox intelligētiæ
animi, atq; numerationis, nā & λόγον illi & λογισμὸν &
λόγον σύναυ, hi rationē & rationes tabulas, & rationes re-
ferre dixere. Hæc mihi facile persuadere sum passus,
recte ueteres uerecū quod initio aiebam sensisse, & mi-
hi idem statuendū uidetur. Sed si ita res se habet, con-
sequens fuerit, eū qui numerorū scientiā planiss. exa-
Etissimeq; teneat, nō minus præstantē reliquis homi-
nib. q; hoīes bestijs putandū, cū hos ea re uincat, qua
potiss. hi ab illis separant. Igitur te uir humaniss. Ge-
orgi Volcamere, & sum tuo merito semp admiratus
feciq; plurimi, & animaduerti de instructo uera intel-
ligentia animo tuo pulcerrimas uirtutes procedere.
Nec te facile ulli concedere pietatis, sanctitatisq; mo-
rum ac uitæ, comitatis'ue aut benignitatis priores.
Quid dicam quanta attentione diuina cognoscas &
uenereris? Quantū consilij rectitudine & acie mentis
ualeas? Quid multarū linguarū cognitionē, uariarū
rerum usum, plurimarū gentiū non inspectionē urbi-
um modo, sed morū etiam noticiā. Itaq; in quib. uer-
satus es, quæq; didicisti, in ijs facile principē locū ob-
tines, reliquorū studio tuo curaç; consequeris, quan-
tum unq; cōcupiuisti. Hæc mihi cogitanti prouoca-
to etiā officio tuo indignū est uisum, nō & priuatā &
publicā referre gratiā tibi, non tam operis q; testimoniū
nostrī, quod iam à nobis alijs quibusdā datum es-
set. Quaerentib. autē occasionem, nulla quidē offeren-
te se nostrarū rerum, quas, ut uerum fatear, te mino-

A ij res iu

res iudicabam, in eidi nuper in libellum quendam, ut
 mihi tum est uisus probandū, ut postea cognoui exi-
 mium, de Numerorum ratione, exaratum Maxi-
 mi & doctiss. uiri Regiomontani diuina manu, quē
 in Vienensi quapiā bibliotheca audio asseruari hoc
 titulo, Algorithmus Demonstratus incerti autoris,
 unde suspicor hoc exemplum fuisse descriptum: Al-
 gorithmos autem barbare uocat nunc Rationum pu-
 tationes, id est ἀριθμούς, corrupta uoce à Saracenis,
 qui in græcas quondam artes derelictas & solas inua-
 sere, itaq; ab illis ad nos manarunt magna ex parte lu-
 tulentæ. Idem autem quod Algorithmo etiam alijs
 quibusdā accidit, ut τὸ μέγιστον almaiestum, & τὸ χρυσόν
 Alchemiam dicerent. Demonstrantur autem in hoc
 libello omnia secundum Euclidis ἀποδεξ, unde & no-
 men inditum. Hunc tibi deberi iudicauī, quare sub
 tuo nomine in lucem emittere placuit, quo etiam alijs
 probaremus uoluntatem erga te nostram, & tuo qua-
 si ære, studiosiss. publicorum cōmodorum, q̄ pluri-
 mis utilis doctrinæ copiam faceremus. Vale huma-
 niss, uir, Pr. Cl. Sextil.

L I M E S

I	II	III	III	V
1	10	100	1000	10000
3	20	200	2000	20000
3	30	300	3000	30000
4	40	400	4000	40000
5	50	500	5000	50000
6	60	600	6000	60000
7	70	700	7000	70000
8	80	800	8000	80000
9	90	900	9000	90000
21		ii	iii	iii

fincu.
li.

ALGORITHMVS DEMONSTRATVS.

DESCRIPTIONES.



Igitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, & sic in infinitum. Separantur autem digiti & articuli in limites. Limes est collectio nouem numerorū, qui aut digiti sunt, aut digitorum æque multiplices, quilibet sui relatiui. Limes itaq; primus digitorū. Secundus primorum articulorū. Tertius est secundorum articulorū. Et sic in infinitum. Numerus compositus est qui constat ex numeris diuersorū līmitū. Item numerus compositus est qui pluribus figuris significatiuis repræsentatur. Additio numeri ad numerum est eorum in unam summā coniunctio. Operatio additionis est figurarū unius datorum numerorū in figurās totam summā repræsentantes artificiosa mutatio. Subtractio numeri à numero est unius secundum alterum diminutio. Operatio eius est residui secundum artem repræsentatio. Duplare numerum est ipsum bis sumere. Dimidiare est totius dimidiū relinquere. Operari in his est figurās hinc dupli, hinc dimidiij, significatiuas, prout præcipit ars, inuenire. Numerus per numerū multiplicat, quando alterutrū eorū toties sumit, quoties in reliquo est unitas. Perfecta erit huius rei operatio, cum pro eo qui multiplicatur numerus, qui ex multiplicatione prouenire dicitur, secundum artis præceptum fuerit figuratus. Numerus per numerū dividitur, quando unus ab altero quoties fieri potest diminuit. Operatio huius speciei maxime consistit in artificiosa numeri notantis quoties alter in altero sit inuentione. Hic autem numerus exiens uocatur. Numerus quadratus est quem producit numerus quilibet in se ipsum semel multiplicatus. Numerus uero per se semel multiplicatus radix quadrati dicitur. Numerus quilibet in se uel in alium bis multiplicari dicitur, quando in eum multiplicatus multiplicatur etiam in producendum. Cubicus numerus est, qui fit, numero in se bis multiplicato. Radix cubici est numerus qui bis in se multiplicatur. Extractio radicum est secundum artificialem operandi modū earum inuentio. Cū quatuor līmitū numeri minimi ita se habent, q; primus à secundo continetur totiens, quoties tertius à quarto, dicitur primi numeri limes tantum distare à limite secundi, quantum limes tertij à limite quarti.

CONCEPTIONES.

Omnis limitis numeri decuplantur à numeris proximi superioris līmitis, quilibet à suo relatiuo. Omnis numerus līmitis totiens continet primū

Articulus
quid.

LIMES.

1.

2. 3.

Numerus compo-
situs quid.

Subtractio.

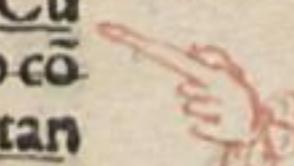
Dimidiatio.

Multiplicatio.

Divisio.

Numerus quadratus.
Radix quadrati.

Cubicus numerus
Extractio radicū.



primum sui limitis quotus ipse est in limite.

P E T I T I O N E S .

1. Omnem figuram significatiuam significare totum numerum limitis
2. quota ipsa est in ordine figurarum. Omnem figuram significatiuam
3. quo loco ponitur, toti numerum limitis significare. Cifram nihil si-
4. gnificare, sed ideo præponi figuræ significanti, ut ipsa toto loco ponat,
quo ponit debet. Figuram præponi quæcunq; dexterior est. Sunt
igitur inuentæ nouem figuræ ad significandos nouem numeros limi-
tum. Et sunt hæ, 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Quarum prima est quæ dextima
est. Ad loca autem limitū occupanda, inuenta est talis figura o, quæ ci-
fra, siue circulus, siue figura nihili.

I.

Ex maximo & minimo cuiuslibet limitis numero
constat primus numerus limitis proximo loco su-
perioris.

Sit a minimus, b maximus, componentes c. Tunc ex secunda concep-
tione b nonies continet a, igitur a & b decies continent a, & per conse-
quens c decies continet a, igitur ex prima conceptione c est primus pro-
ximi limitis superioris.

II.

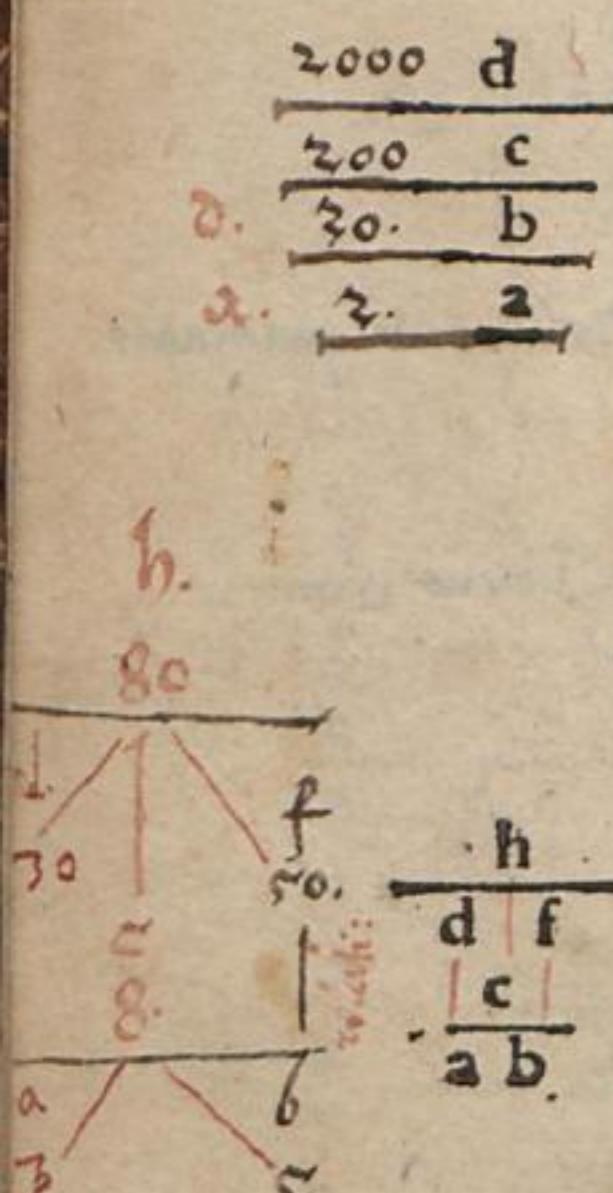
Omnis numerus limitis cuiuslibet sui relativi numeri in quocunq; alio limite sumpti, aut multiplex,
aut submultiplex.

Numeros diuersorum limitum relativos uoco, quando unus est to-
ius in suo limite, quotus est alter in suo. Sit a minoris limitis, d maioris
eius relativus. Aut d est de proxime superiori limite, tunc d continebit
a decies. Aut si non sint duo intermedij limites, quorum numeri duo b
minor, c maior, duorū a & d relativi, ergo ex prima conceptione b con-
tinet a decies, & b in c decies, & c decies in a, igitur a in d millies.

III.

Si ex additione digitii ad digitum digitus excreue-
rit, necesse est, ut quilibet duo articuli eiusdem limi-
tis digitorū, qui tertium componunt relativi, sua ag-
gregatione componant numerū sui limitis illius digi-
ti relativi, qui ex duorum coniunctione componi-
tur digitorum.

A & b digitii componant c digitum, d & f articuli relativi a & b com-
ponant h numerum. Dico h relativū esse c digitii, & de limite articulorū
d & f



Numeri
diuersorum
limitum
relativi.

d & f. Nam ex descriptione limitis a totiens est in d quotiens h in f, igitur ex quinta septimi Euclidis totiens a in d quotiens c in h. Resumpta limitis descriptione patet propositum.

III.

Si duo digiti aggregati componunt articulū, necesse est cuiuscōm limitis duos articulos illorum relativos minimum proximi superioris limitis numerum sua compositione componere.

Componant a & b digiti decem. Non enim possunt duo digiti aliū articulum componere. Sintq̄ in quoq̄ alio limite duo articuli d relativus a, f relativus b, & coniuncti faciant h. Dico h esse numerū proximi limitis superioris. Sit k minimus in limite articulorū d & f, tunc secundum progressum præcedentis probationis, h totiens continet decē, quotiens d continet a. Sed & k totiens continet unitatē, ex quid limitis, ergo k quotiens unitatē, totiens h continet decem, ergo ex nona septimi Euclidis permutatim quotiens h continet k, totiens decem continent unum, tunc ex prædicta conceptione patet propositum.

V.

Si duo articuli ex eodem limite relativi duorum digitorum numerum compositū componentiū aggregati fiunt, excrescit numerus compositus, cuius una pars erit numerus limitis eiusdē digiti relativus, qui nominatur in nominatione numeri cōpositi constantis ex duobus datis digitis, & alia pars erit minimus proximi superioris limitis numerus.

Digiti a & b componant numerū compositum, hic necessario ex decē & digito constabit, digitus sit c, articuli autem d relativus a, & f relativus b, componant numerum kh. Dico kh compositū constare ex duabus numeris, quorum unus est de limite articulorū d & f, & est relativus c digiti, reliquus est primus in limite proxime superiori supra limitem articulorū d & f. Nam kh continet decem, & c digitum totiens quotiens d continet a, ergo aliqua pars numeri kh totiens continet decem, sit illa k, & aliqua pars totiens continet c sit illa h. Qui igitur præmissi probationem considerauit, sciet probare, q̄ k est minimus limitis proxime supra limite articulorū d & f. Et ex limitis descriptione h patet esse limite articulorum df, & esse relativum c.

VI.

Qualiter in additione numeri ad numerum operari

			h
			1000.
d	f	j	f
k		700.	300
a	b	k	100.
		10.	6
a	b	7	3

			k . b.
			1 40.
σο.		d.	80.
			f.
		c.	
		1 4.	
σ.			80.

k	h
d	f
decē	c
a	b

ADDITIO

B rari

rari contingat ostendere.

*Medusope
randi in Ad
ditione.*

Scribo itaque utruncque datorum numerorum per suas differentias, ita, ut prima unius sit sub prima alterius, secunda sub secunda, & sic deinceps, donec alter numerus deficiat. Ab alterutra igitur parte incipiens digitum figurae inferioris addo digito figurae superioris. Digitum autem figurae uoco quem ipsa significat cum primo loco ponitur. Ex illa additione, si ex crescit digitus, scribo eius figuram in loco superioris figurae, ea prius deleta. Si articulus uel numerus compositus, deleo nihilominus superiorē figuram, & in loco eius scribo cifram quantū ad articulum, aut digitū si excreuit numerus compositus, & unitatem secundum loco eius cui fit additione. i. si est articulus, cifram, si numerus compositus, digitum scribo in loco figurae cui fit additione, & utrolibet facto, unitate pro articulo addo sequentis figurae digito, et scribo, ut nunc dixi, quod ex crescere ex additione. Si autem facta additione ad digitum ultimae figurae, ex crescere articulus uel numerus compositus, cum in loco eiusdem ultimae scriptero cifram quantum ad articulū aut digitum quantū ad numerum compositum, post figuram ultimo scriptam ponam figurā unitatis pro articulo. Cum autem ad hunc modū operatus fuero in quibuslibet alijs figuris, quarum una est supra alteram, completa erit operatio, & tunc apparet in ordine superiori figurae numerū repræsentantes, qui ex duobus datis componitur.

quid vocet
digiti him
figuræ.

Ratio operatiōis. Sint dati duo sibi aggregandi, in quorum utriusque descriptione cifras præscribi oporteat, & deinde figuras significatiuas. **Sintque superioris figurarum significatiuarū nominata a b c d, inferioris f g h k, sit prima sub prima, & sic deinceps. Quia ergo cifra figurae addita, nulla mutatio ueniat ad figuras significatiuas, addam digitum k figurae ad digitum a figurae, & cum a & k figurae ibi non significant digitos, sed numeros quarti limitis, hoc est tertios articulos, proueniat itaque ex additione digitorum digitus utputa sextus, igitur ex tertia huius numeri, quos a & k quarto loco significant aggregati, componunt sextum quarti limitis numerū. **Radam ergo a, & loco eius ponā figuram sextam, quae est e. ergo ex prima & secunda petitione ipsa significat sextum numerū quarti limitis, ipse autem scribendus erat. Item iungam digitum h ad digitum b, & ponatur q̄ ex crescere articulus, ergo ex crescunt i o, auferam ergo b, & pro eo pono cifram, unitate uero addam digito c pro articulo. Ponatur autem q̄ etiam inde ex crescere articulus, delebo igitur c, & ponam cifram, pro articulo dabo unitatem digito d, proueniat inde digitus uerbi gratia quintus, ponam igitur pro d delecta figuram quintā. Quia ergo digitū h & b componunt articulum, sequitur ex quarta, ut numeri quinti limitis, quos nunc significant h & b, componant minimū numerum sexti limitis. **Huius autem numeri digitus, qui est unitas, addebatur digito c figurae significanti hiç numerum sexti limitis, & excreuit articulus, ergo ex eadem quarta minimus numerus sexti limitis iunctus est numero eiusdem limitis significato per c, facit minimum septimi limitis, sed & eius digitus, qui est unitas, iunctus cum di-******

8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Numerus limitum.

gito

Exempli

VM.

1' 4 5 0 6 0 0 0

Sinistra.

**5 0
4 9 7 2 0 0 0
5 0 6 0
9 5 3 4 0 0 0**

Numeri addendi.

gito numeri quē d nunc significat, facit quintū digiti, igitur ex tertia idem minimus numerus septimi limitis cum numero quē d nunc significat, facit quintū numerū septimi limitis, ergo figura quinta in septimo loco posita eum significat, ut autem ipla sit septima, deletis b & c cifras posui, ne loca vacarec, uides igitur q̄ bene fecerimus. Veniam posthac ad figuram g supra quā inuenio cifram, pro cifra ergo ponam g figuram, quae tantum significabit supraposita, quantum supposita. Deinde digitum f componam digito figuræ, quæ tunc erit supra ipsam, scilicet quinta. Sit autem q̄ proueniat numerus compositus, utpote 14. constabit autem necessario ex digito & denario, scribam ergo pro figura superiori quartā, & quia nulla sequitur in ordine superiori, ponam figurā unitatis, hoc est primam iuxta quartam post ipsam. Quia ergo digitii figurarum septimi loci composuerūt numerum compositū constantem ex 4. & 10. Sequitur ex quinta, ut numeri quos eadem figuræ in septimo loco significant, componant numerū compositū constantem ex quarto numero septimi limitis & primo octauo. Ex prima ergo & secunda petitione apparet q̄ representans est hic numerus per quartam figuram in septimo loco positam, & primam octauo loco scriptam. Bene ergo fit operatio cum sic fit.

VII.

1. Si numerus numero superscribitur, ille mi 100000 primū. Quid mū
2. nor est, cuius figuræ prius deficiunt. Si uero 99999
tot figuras habet unusquisq; quot reliquus, 200000 secundū. minor ex qd
3. tunc si alterius ultima maiore digitum signifi- 199999
ficit, ipse maior est. Qd si nō ultima eius, sed 98765 tertium.
aliqua ante ultimam maiorem digitum signifi- 98732
ficit q; sua relatiua, tunc si nulla sequentiū ma-
iore digitum significat q; sua relatiua, ipse
nihilominus maior existit.

Primam partem habes ex primā huius, totiēs repetita quo-
sint figuræ in inferiori. Significat enim ultima superioris to-
tum numerum toti limitis, totum numerum quota ipsa est in
ordine digitorum, & toti limitis quota est in ordine figurarū,
ex petitionibus, quo ablato minimo limitis proxime mino-
ris, manebit maximus eiusdem limitis proxime minoris etc.
Secundū Similiter patet etiam secunda pars, tertia uero pars patet ex se-
cunda huius.

PRECEDENTIA. AD SUBTRACTI-

onem.

Demonstratio pri-
mæ partis.

Tertie

B ij Si du

VIII.

Si duorum articulorū eiusdem limitis mi-
nor à maiore semel subtrahitur, remanet arti-
culus eiusdem limitis relatiuus digiti, qui su-
perest, si minoris datorum articulorum digi-
tus à digito maioris articuli semel detrahāt.



Ex digito b digitus a excipiatur, & relinquatur c. Articuli eiusdem limitis, d relatiuus a, & f relatiuus b, auferatur d ab f, remaneat h. Dico h esse de limite articulorum d & f, & relatiuum c. Nam ex additione c ad a fit b, igitur ex tertia f fit ex ad ditione d ad articulum eiusdem limitis relatiuum digitu c, sed addendo d ad h, fit f, igitur h est numerus quem quæris.

IX.

Modum subtrahendi demonstrare sit pro
positum.

Sint duo numeri, quorum maior superscribens significetur figuris post aliquot cifras positis, quorum nomina a b o d. Minoris uero figuræ similiter post aliquot cifras positæ, sint f g h k, & scribam minorem sub maiore. Sit autem digitus f minor digito a figuræ, & facta subtractione, maneat digitus figuræ t. Est ergo articulus a maior articulo f, & facta sub-
tractione unius ab altero, manet articulus eiusdem limi-
tis relatiuus digiti t, habes hoc ex proxima. Cum ergo po-
suero figuram t pro figura a, benefecero quod debui. Sit item
digitus g maior digito b, minuo ergo ex digito d unitatem, &
remaneat digitus figuræ c, quam pono pro d, cifram autem in-
terpositam, muto in figuram nouenarij, deinde à decem & di-
gitio b subtraho digitum g, remaneat uero figuræ y digitus,
hanc pono pro b. Bene autem facio, figura enim c in loco d po-
sita, significat articulum eiusdem limitis minorem q̄ sit d arti-
culus, minimo eiusdem limitis numero, ex prima, hic ergo mi-
nimus constat ex maximo numero, & minimo penultiimi li-
mitis. Pono autem maximum, cum scribo figuram nonam
pro cifra tenente locum illius limitis. Reseruo ergo adhuc mi-
nimum numerum penultiimi limitis, sit ille p. Item à decem &
digito b aufero g, & remanet digitus figuræ y, quē scribo pro
b, ergo digito figuræ g addito ad digitum figuræ y, excrescunt
decem & figuræ b digitus, igitur ex quinta ex additione articu-
li, quem nunc g significat, ad articulum quem significat y, cum
ei sup

$$\begin{array}{r} 116 \\ - 8000 \\ \hline 114000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8000 \\ - 6000 \\ \hline 2000 \end{array}$$

$$8 \quad y$$

Exem//

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

Subtrac//

tionis.

 $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{array}$

plim

ei supponitur, sit numerus compositus, constans ex articulo, quem nunc b significat, & articulo p, qui minimus est sequentis limitis, ergo subtractio g articulo ab articulis p & b, superest articulus y figuræ, quem pro figura b scripsi, hinc igitur patet huius operationis ratio.

X.

Quomodo duplatio numeri facienda sit docere.

Quia duplatio est quædam eiusdem ad se additio, rationem eorum quæ hic fuerit, ex his, quæ in ostensione additionis sunt dicta, patere putans, ad dimidiationis operationem procedo.

XI.

Datum numerum, si fieri potest, dimidiatore sit intentio.

Ratio operis. Si in aliqua figura imparis digitii non primo loco posita, subtraho unitatem à digito figuræ, subtraho reuestra minimum numerum limitis, cuius locum tenet figura, & dando tunc quinarium digito præcedentis figuræ, dimidium eiusdem minimi numeri addo articulo præcedenti, quia sicut consideranti patet cuiuslibet limitis quintus numerus, qui uidelicet est quinarius, aut eius relativus est medietas minimi numeri in sequenti limite. Hoc est, uide q̄ semper ex additione quinarij ad digitum præcedentis figuræ excrescit in hac operatione digitus, quia semper figura præcedens est significativa medietatis digitii, aut est cifra, maximi autem digitii medietas sit figura est 4. addito q̄ eis quinario, fiunt nouem, plus autem excrescere non potest. Vnde etiam addita medietate minimi numeri unius limitis ad quicunq; numerum præcedentis limitis, qui sit medietas alicuius articuli in eodem limite, oportet excrescere numerum eiusdem limitis. Et sic tota operatio ex his quæ in additione & subtractione præcesserunt, patere potest.

XII.

Additio & subtractio se in uicem probant, duplatio quoq; & dimidiatio se uicissim demonstrant.

Si enim ex additione a ad b excrescat c, c constabit ex a & b, igitur altero eorum ex c detracto, remanebit reliquum. Similiter si ex numero c excipis a, & remanet b, oportet c ex a & b constitutum esse. Item si duplato a, excrescit b, tunc b dimidiatore, reuertetur a. Et si b dimidiato, uenit a, a duplato, nisi redeat b, malefactū erit.

Proba dupl. &
Mediationis

$$a - \frac{b}{2}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

B in Si di-

DUPLA/
TIO.

MEDIA/
TIO.

Nota.

Ratio.

Exemplum.

$$\begin{array}{r} 5 & 9 & 2 \\ \underline{-} & 2 & 9 \\ & 9 & 6 \end{array}$$

PROBATIO
operationum.

Proba Addit. &
subtractionis

$$\begin{array}{c} c \\ \diagdown \\ a & b \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

MULTIPLICA^{II}

fia.
R
24

a
3
9
50.
9
24

b
8
6
5
2

$$\begin{array}{r} f \\ \hline 24 \\ g \ 80. \\ \hline d \ h \ 24 \\ 50. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \\ \hline 3 \\ b \ 8 \\ c \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e \ 20. \\ \hline b \ 5 \\ a \ 4. \\ \hline f \ 200. \\ \hline d \ 50. \end{array}$$

a
2.
c
8.
R
80.
d
4.

qua. 7 mi. 2 m.

Regimur hanc de multiplicatione unius

digiti in alium.

XIII. *minimes in avicula*

I Si digitus aliquis à suo decuplo detraha-
tur totiens, quot sunt unitates in differentia al-
terius digiti ad decem, relinquitur numerus
qui ex illorum digitorum alterius in alterum
multiplicatione producitur.

Multiplicantur enim a & b digiti unus in alterum, & proue-
niat f. Sit autem numerus g decuplus a, c excessus denarij su-
per b. Subtrahatur ex g d, totiens continens a quotiens c uni-
tatem, tunc enim subtraxero a totiens à suo decuplo, quot sunt
unitates in differentia b ad decem, remaneat autem h. Dico q̄
h numerus est æqualis f numero. Nam g decies continet a, igi-
tur g totiens continet a, quotiens h c unum, d autem totiens cō-
tinet a, quotiens c unitatem, igitur h totiens continet a, quotie-
ens b unitatem, sed & f totiens continet a, igitur h est æquale f.

XIII.

Si ex multiplicatione duorum digitorum
alterius in alterum digitus producitur, neceſ-
ſe est ex multiplicatione alterius digitorum
producentium in quemlibet reliqui digiti ar-
ticulum, procedere articulum eiusdem limitis,
estq; idem productus articulus relativus digi-
ti, qui ex digiti in digitum multiplicatione
processit.

A digitus in b digitum ductus, faciat digitum c. Item a digi-
tus in d articulum digiti b producat f. Dico f & d sunt articuli
eiusdem limitis, & f relativus c digiti. Nam c totiens b conti-
net quotiens a unitatem. Similiter f totiens d quotiens a conti-
net unitatem, igitur ex nona septimi Euclidis f totiens conti-
net c, quotiens d continet b. Ex descriptione igitur limitis col-
lige propositum.

XV.

**Si ex multiplicatione digiti in digitum pro-
cedit digitus, quibuslibet duorum producen-
tium digitorum articulis uno in alterum mul-
tiplie**

triplicatis, procedit articulus relatius digitum producti. Estq; idem articulus de limite tantum distante ab unius duorum articulorum producentium limite, quantum reliqui articuli limes à digitorum limite recedit.

A digitus in b digitum producat c digitum. Item g articulus relatius a in h articulum relatiuum b digito multiplicatus producat k numerum. Dico k esse articulum relatiū c dīgito, & esse de limite tantum recedente à limite articuli g, quantum limes articuli h distat à limite digitorum. Sit enim d minimus in limite in quo est g, e minimus in limite in quo est h, & f sit minimus limitis distantis tantū à limite numeri e, quantum limes numeri d distat à limite digitorū, cuius minor nūmerus est unitas. Multiplicetur autem a in h, & procedat z ex proxima, z est de limite numerorū h & e, & relatius c dīgiti. Sic igitur a in h facit z, & g in h facit k, igitur ex decima septima uel decima octava septimi Euclidis k ad z est ut g ad a, sed g ad a sicut d ad unitatem. Sed quotiens unitas in d, totiēs e in f ex ultima descriptione, igitur quotiens e in f, quotiens z in k, sed e numerat z, igitur ex nona septimi Euclidis quotiens e in z, quotiens f in k, sed e in z quotiens, quotiens unitas in c, quotiens f in k, quotiens unitas in c, igitur permutatim quotiens unitas in f, quotiens c in k. Ex hoc patet propositum.

XVI.

Si digitus digitum multiplicans procreat articulum, quilibet eorundum digitorum in quemlibet alterius articulum multiplicatus, producit articulū totum in limite proximo supra limitem articuli multiplicati, quotus est articulus ex digitorū multiplicatione proueniens in suo limite.

Digitus a in digitum b multiplicatus producat c articulū, & a in d articulum dīgiti b producat f. Dico f esse articulū de limite proximo supra limitem articuli d, & totum in eo quotus est c articulus in suo limite, hoc est, in secundo limite. Nam impossibile est ex dīgito in digitum plus fieri articulo secundi limitis. Ponam autē t pro minimo numero limitis, in quo est d, &

$$\begin{array}{r} c \quad f \quad k \\ 8 \quad 1000 \quad 8000 \\ \hline 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b \quad e \quad h \\ 4 \quad 100 \quad 400 \\ \hline 400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \quad d \quad g \\ 2 \quad 10 \quad 20 \\ \hline 20 \end{array}$$

18.17. 7. vii. Euclidi:

g. 7. vii. Euclidis.

$$\begin{array}{r} z \quad e \\ 100 \quad 300 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f \\ 300 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b \quad t \quad d \\ 6 \quad 10 \quad 60 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \\ 5 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \quad 200 \\ 5 \quad 50 \\ 4 \quad 40 \\ \hline 40 \end{array}$$



Nota.

d, & ponam & pro minimo numero proxime superioris limitis, cuius quidem limitis e sit totus, quotus est c articulus in secundo limite. Cum itaque in b faciat c, & in d faciat f, ex decimae septima uel decima octaua septimi Euclidis f erit ad c ut d ad b, sed ex secunda d ad b est multiplex. Quotiens igitur f continet c, totiens d continet b, sed quotiens d continet b, totiens t continet unum, quotiens igitur t continet unum, totiens f continet c, sed quotiens t continet unum, totiens & continet decem, & totiens etiam f continet c. Sed quotiens & continet decem, totiens continet & t ex limitum ordine, igitur quotiens e continet t, totiens etiam f continet eundem t, igitur e est f, quod probari debuit.

XVII.

Si in digitum digito multiplicato procedit articulus, quilibet duo eorundem digitorum articuli alter in alterum multiplicati, producunt articulum totum in suo limite, quotus est in suo articulus ex digitorum multiplicazione productus. Limes autem articuli ex articulorum ductu producti proximus est supra limitem, tantum distantem ab alterius articulo rum producentium limite, quantum reliqui limes ab limite digitorum.

A digitus in b digitum faciat c articulum. Item k articulus a in m articulum b producat n. Dico qd n est articulus limitis proximi supra limitem tantum distantem à limite articuli m, quantum limes articuli k à limite digitorum, & est totus in eo quotus est c in suo limite. Probatur ex præmissa & decimae septima uel decima octaua septimi Euclidis.

XVIII.

Si duorum digitorum qui alter in alterum multiplicati producunt numerum compositum, alter in alterius articulum multiplicatur, procedit numerus compositus, cuius minor pars est de limite articuli, & est numerus relativus

tiuus digiti, qui cum aliquo primorum articulorum componit numerum compositū ex digitorum ductu productum. Maior uero pars de limite proximo supra limitem articuli multiplicati, & est numerus relatiuus articuli, qui unus ex primis cum digito iam dicto numerum compositum componit, quem digitorū in se multiplicatio producit.

Digitus a multiplicatus in b digitum producit c d numerū compositum, in quo sint c digitus, & aliquis primorum articulorum, ita enim oportet. Item a in f articulum digitī b faciat k. Dico q̄ est numerus compositus constans ex duobus numeris, quorum alter est de eodem limite cum f articulo & relativus digitī c, reliquus de limite proximo super līmitē articuli f, & relativus d. Ex decimaseptima septimi Euclidis patet propositum.

$$\begin{array}{r} \text{d} \\ \times \text{c} \\ \hline \text{b} \\ \text{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{f} \\ \times \text{k} \\ \hline \text{f} \\ \text{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d} & \text{c} & \text{k} \\ \hline \text{b} & & \text{f} \\ \text{a} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 7 \\ \hline 42 \\ 7 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 6 \\ \hline 24 \\ 6 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 9 \\ \hline 36 \\ 9 \\ \hline 324 \end{array}$$

XIX.

Si uero eorum digitorum quilibet duo articuli alter in alterum multiplicātur, procedit numerus compositus, cuius minor pars est de limite, tantum distante ab alterius articulorū producentium limite, quantum reliqui limes à limite digitorum. Maior uero pars est de limite proximo supra. Item q̄ minor pars est numerus relatiuus digiti, qui est in numero composto, ex digitorum ductu procreato. Maior autem numerus est relatiuus articuli, qui eundem compositū cum eodem digito cōstituit.

Secundum modum decimaseptimi probatur intentio.

XX.

Operationem multiplicandi demōstrare.

Sit numerus a b c multiplicandus per numerum g h k multiplicantem, scribo primam inferioris sub ultima superioris.

C Multi-

OPERATIO
Multiplicationis.

Multiplico itaque digitum figuræ c in digitum figuræ k, & pro-
ueniat digitus cuius figura sit e, eam pono super figuram k. Si
gnificabit autem super k posita non digitum, sed articulum li-
mitis tantum distantis à limite articuli c, quantum distat limes
articuli k à limite digitorum in quo est g, & est totus in eo, quotus
digitus figuræ e est in suo. Habes utrūq; ex decima quinta. Be-
ne igitur scribitur per figuram e super figuram k. Sed quia de
singulis mutationibus non est facile breuiter exempla subin- r
re, cautus multiplicator ad ea quæ præcesserunt consideratio-
nem referens, per singula sibi exemplum inueniat.

Probat

DIVISIONIS
Regula.

Si trium dⁱgitorum p^rimus à secundo to-
tiens subtractus quotiens est unitas in tertio,
eundem secundū totum consumit , idem pri-
mus à q̄libet articulo secundi subtractus, quo-
tiens est unitas in articulo tertij, totum consu-
mit eum, si sunt illi duo articuli unius & eius-
dem limitis. Si uero non totum consumit digi-
tum, nec totum consumit articulum , remanet
enim hinc digitus, illinc articulus eiusdem di-
giti in eodem limite cum articulis dⁱgitorum
secundi scilicet & tertij constitutus .

A digitus de b digito subtrahatur totiens, quotiens est unitas in c digito, & nihil remaneat. Item sit d articulus digiti b, cuius limitis f articulus digiti c in eodem limite. Dico q̄ a digitus si totiens subtrahitur de articulo d, quotiens est unitas in f, etiam nihil supererit. Nam a in c facit b, igitur a in f facit d, ex quartadecima. Ergo quotiens est unitas in a, totiens f in d, & totiens etiam c in b. Infer ex hoc quod quæreris. Præterea subtracto a de b secundum numerum c, superfit digitus z. Dico q̄ a subtracto de d secundum numerum f, remanens erit de limite articulorum d & f, & relatiuus digiti z. Quod fit ex a in c sit t, quod erit minus b, cuius articulus de limite articulorum d & f sit e, per quartamdecimam, igitur a in f facit e, quod est minus c̄ d, & sit eorum differentia n, ergo addendo t ad z fit b, & e ad n fit d. Cum itaq̄ e & d articuli eiusdem limitis sint relatiui t & b digitorum, oportet ex tertia, q̄ n sit articulus de limite articulorum e & d & f, & relatiuus z digiti, quod fuit probandum.

Si digi

Si digitus aliquis ab aliquo articulorum è primis distractus, secundum alium digitum nihil ex eo relinquit, idem digitus à quolibet maiore articulo prioris articuli relativus secundum alterius digitus articulum distractus, nihil de ipso relinquit, si sit ille articulus, secundum quem sit secunda distractio, de limite proximo sub limite articuli à quo fit distractio. Si uero in prima distractione relinquitur digitus, in secunda relinquitur eius articulus de limite articuli secundum quem fit distractio.

Nam a in c producit b, igitur ex decimasexta a in f producit d, ex hoc patet propositi prima pars. Item digitus a subtractus ex articulo b secundum c, relinquit digitum 2, cuius relativus articulus in limite articuli f sit n. Ab articulo autem d subtracto a secundum f, relinquantur m. Igitur a in c fit minus q; sit b, & sit illud g, & a in f multiplicato, fit minus q; sit d, & sit illud q, igitur f ad c sicut q ad g, sed & ea est proportio d ad b, igitur adiuuante proxima, ea est m ad 2. Eadem est autem n ad 2 ex positione, igitur m est n, & patet secundum propositum.

Datis duobus numeris compositis, quorum unus ex digito & aliquo primorum articulo componatur, alter ex quorumlibet duorum instantium limitum duodus articulis, quorum minor ad minorem, maior uero ad maiorem prioris compositi numeri partem referatur, quicunq; digitus à minori compósito numero totiens distractus, quotiens in quodam alio digito est unitas, eum totum consumit. Idem C ij digitus

Demonstratio prima pars
ex decimasexta.

$$\begin{array}{r} 30 \cdot b \\ - a \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \cdot d \\ - 60 \cdot f \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \cdot d \\ - 60 \cdot f \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g \frac{45}{2} \quad q \frac{450}{n} \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b \frac{50}{2} \quad d \frac{500}{m} \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g \cdot c \quad l \frac{90}{a} \\ - \quad \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \quad 8 \quad 80 \\ 7 \quad 500 \\ \hline 6 \quad 70 \end{array}$$

Demonstratio
prima pars pro.
.18. huius.

$$\begin{array}{r} 2 \frac{4}{c} \cdot b \\ - d \frac{8}{a} \\ \hline 2 \frac{4}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \frac{4}{g} \cdot f \\ - h \frac{80}{a} \\ \hline 2 \frac{4}{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \frac{8}{c} \cdot g \quad 2 \frac{800}{700} \\ - 3 \quad 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

digitus à maiori datorū **compositorum** exce
 ptus, quotiens est unitas in articulo digitī se-
 cundum quē sit prior **detractio**, totum etiam
 ipsum consumit, si articulus secundum quem
 sit hæc secūda **detractio**, sit de limite minoris
 articuli, qui est in compositione maioris com-
 positi ex datis. Si uero post priorem **detracti-**
onem supererit digitus, in secunda superfluet
 ei articulus, eritq; ipse de limite articuli secun-
 dum quem sit secunda **detractio**.

Prima patet, quia a in d facit cb, igitur per decimam octa-
 uam a in h faciet gf, igitur patet propositum. Item post abla-
 tionem a secundum d ex cb, maneat digitus 2, cuius articulus
 de limite articulorum h & f sit n. Dico q; a secundum h ex g f
detracto, remanet n. Nam a in d multiplicatū, facit minus nu-
 mero cb, sit illud e. Item a in h ductū, facit minus cf g f, sit hoc
 q. Tunc tota positione huius secunda scita, & ex undecima se-
 pumi, eadem est m ad 2, quæ n ad 2, ergo m est n.

XXIII.

Si trium digitorum primus à secundo de-
 tractus secundū tertium, nihil ex eo relinquunt,
 quilibet articulus primi digitī à toto articulo
 secundi secundum eundem tertium detractus
 digitum, nihil reliquit. Quod si in priori de-
 tractione digitus relinquitur, in secunda relin-
 quitur & eius articulus de limite priorum du-
 orum digitorum.

Probatur ex uicesima prima conuersis terminis. Tantundē
 enim ualet c subtrahere de b secundum a, & a subtrahere de b
 secundum c. Item f subtrahere de d secundum a, & a subtrahere
 de d secundum f.

XXV.

Cum ab aliquo primorum articulorum di-
 gitus

Denuo gra	e 24.	2409
ho se.	3 2	m 30.
enim vob	2 7 b	270
par	d 8	h 80
ris.	2 3	a 3
	4 .	400
28	2800	6000
4	4	4
underi. Septimi.		
Proba	b 9.	d 90.
hūr hæc	c 3.	a 3.
g. con	8	30
intr fam	4	4
nipel simo	2	20
(edam		
de pri	3	2
me pro	3	80
positio	2	3
nis.	2	20

gitus quidā secundū alium digitū subtractus,
totum consumit articulū, quilibet articulus di-
giti subtracti secundum eundem digitum sub-
tractus ab articulo prius sumptī articuli, nihil
ex ipso relinquit, si articulus à quo fit secunda
detractio, est de limite proximo supra limitē
articuli qui subtrahitur. Si uero in prima de-
tractione relinquitur digitus, in secunda relin-
quitur eius articulus de limite articuli qui sub-
trahitur in secunda subtractione.

Facile est in conuersis terminis probare per 22. Idem n. producere c. m. a. quod a m. c.
XXVI. quod igitur uenit ex dñfī f m. a. æqualē tñbi
quod ex dñfī a. m. f pro-
uenit p. conuersam i. b.

Cum dati fuerint duo numeri compositi,
quorum unus ex digito & aliquo primorum
articulo componatur, reliquus ex quorum li-
bet duorum indstantium limitum duobus ar-
ticulis, quorum minor ad minorem, maior ue-
ro ad maiorem prioris compositi numeri par-
tem referatur. Si digitus aliquis à minori com-
posito numero subtractus, secundum aliū quen-
dam digitum totum consumit eum, eius arti-
culus secundum eundem alium digitum à ma-
iori numero composito subtractus, totum etiā
consumit, si sit ille articulus de limite minoris
articuli, qui est in maiori composito numero.
Si uero post priorem subtractionē supererit
digitus, in secūda superfluet eius articulus de
limite illius articuli, qui secūdum digitum in
secunda subtractione subtrahitur.

Pater ex 23. terminis conuersis. Idem Princij in Datis

pars huius patet, 2ma s. m. a. facit. c. b. igitur
p. dñmam o. tñmam b. m. a. facit e. f. huius igitur
conversis patet propositum. Alteram partem
facile demonstrabis ex conuersa . 23. propositionis.

<u>b</u>	<u>30.</u>	<u>d</u>	<u>300.</u>
<u>c</u>	<u>25.</u>	<u>e</u>	<u>25.</u>
<u>40</u>	<u>8</u>	<u>4000</u>	<u>8</u>
<u>5</u>	<u>500</u>	<u>d</u>	<u>500</u>
	<u>8</u>	<u>800</u>	
<u>50</u>	<u>5000</u>		
<u>6</u>	<u>600</u>	<u>7</u>	<u>7</u>
<u>56</u>	<u>5600</u>		
<u>8</u>	<u>800</u>	<u>7</u>	
<u>59</u>	<u>3</u>	<u>300</u>	
<u>7</u>	<u>5900</u>		
<u>8</u>	<u>600</u>	<u>7</u>	

Altera pars huius
propositionis.

XXVII.

Datis tribus digitis, quorum unus ab alio secundum tertium subtractus, totum consumat eum, articulus digitii subtractus ab articulo digitii, cui fit detractio secundum articulum tertij digitii, nihil ex ipso relinquit, si limes articuli, cui fit subtractio, tantum distat à limite articuli subtracti, quantum limes articuli secundum quem fit detractio, recedit à limite digitorum. **S**i uero in prima subtractione remanet digitus, necesse est in secunda remanere eius articulum de limite articuli à quo fit secunda detractio.

Nam a in c facit b, igitur ex quindecima d in g facit f, hinc
habes primam partem. Item a de b subtracto secundum c, su-
perfit h digitus, cuius relatius in limite f sit k. Dico qd sub-
tracto ex f secundum g superfit k. Si enim non k, remaneat m.
Multiplico igitur a in c, fit illius b, sit hoc z. Multiplico etiam
d in g, fit illius f, sit hoc x, igitur ex quindecima x est relati-
us z digiti, & est de limite articuli f, f igitur ad b sicut k ad h,
sic etiam x ad z, sed x & m sunt f, & z & h sunt b, igitur x & m
ad z, & h sicut x ad z. igitur ex undecima septimi, sic etiam m ad
h, sed & eadem est k ad h, igitur k est m.

XXVIII.

Datis duobus digitis, quorum unus ab ali
quo primorum articulorum secundum alium
subtractus, totum consumat eum, articulus di-
giti subtracti detractus ab articulo articuli se-
cundum reliqui digiti articulum, nihil ex eo
relinquit, si limes articuli à quo fit secunda de-
tractio proximus sit supra limitem, qui tantū
distant à limite articuli subtracti, quantum li-

mes articuli, secundum quem fit secunda, distat à limite digitorum. Si uero in priori substantiōe relinquitur digitus, oportet in secunda remanere eius articulum de limite proximo sub limite articuli, cui fit secūda detractio.

b c a 4 40 8 5 7 8 d f g 50 800 4000 50 800 4000 60000 70 800	$\underline{20.}$ $\underline{5.}$ $\underline{4.}$ $\underline{40000}$ $\underline{50}$ $\underline{800}$ $\underline{4000}$ $\underline{60000}$ $\underline{70}$ $\underline{800}$	f y p mam mam mam
---	---	--

Prima pars patet adiuuante decimaseptima, y sit nomen limitis toti supra limitem d articuli, quotus est limes articuli g supra limitem digitorum. In limite autem proximo supra limitem y sit f articulus articuli b. Item a secūdum c consumat 2 de b, & relinquat h digitum, cuius articulus relativus in limite y sit k. Dico k superesse post subtractionē d ab h secundū g. Consumatur enim x, & superfit m, si non k. Scies ergo secundum præcedentem probationem probare m esse k.

XXIX.

Si duorum digitorum alter secundum alterum subtractus à numero composito, constante ex digito & aliquo primorum articulorum totum consumat eum, articulus digitī subtrahit. Eti secundum reliqui digitī articuli, consumit etiam totum quendam numerum compositum, cuius minor ad minorem, & maior pars ad maiorem prioris compositi numeri partem refertur. Oportet autē, ut major huius secundi compositi sit in quodam limite, & minor eius pars in limite proximo inferiori, & tantum distet à limite unius duorum articulorum, quorum unus secundū alterum subtrahit, quantum reliqui limes à limite digitorum.

Sit b digitus q ex primis articulis, d articulus a digitī, g articulus c digitī, k articulus b digitī, & distet f articuli limes tantum à limite articuli d, quantum limes articuli g à limite digitorum. t sit articulus relativus q de limite proximo supra limitem ar-

Demonstratio fin
 & deinceps nonā.

4 $8.$ q b c $8.$ a $6.$	$\underline{8.}$ \underline{f} \underline{g} $\underline{60.}$	48000 t $g800.$
---	---	---------------------------

42 6 7	$\underline{2000}$ $\underline{60.}$ $\underline{700}$	
--------------------	--	--

tem articuli f. Dico, si a secundum c ex q b subtractus totū consumit d secundum g, ex t f subtractus etiam totum cōsumet, qd facile est probare per 19. consideranti positionem. Item a de q b subtractus secundū c, relinquet h digitum, & consumat 2. Relatiuus digitū h in limite articuli f sit k. Dico qd subtracto d ex numero t f secundum g, relinquitur k. Consumatur enim x & supersit m, si non k. Sciet igitur probare propositum, qui probationem secundae partis in ea quæ p̄misiæ p̄mittitur, diligenter considerauit.

XXX.

Qualiter diuidentem operari oporteat aperire.

Sit numerus diuidendus f g h k per digitum a, pono a sub f, & video quotiens possim eum subtrahere ex dīto f, ita, qd nihil aut minus qd a remaneat, fiat autem hoc quotiens, quoties est unitas in b dīto. Ronam igitur b supra f, & faciam subtractionem, & scribam quod remanet. Cumq; hoc fecero sub g h & k, & posuero ante b numeros notantes quotiens fiat subtraction, erit b tota figura in suo ordine, quota est f in sua, sunt igitur f & b articuli de eodē limite, & est f articulus dīti, à quo iussi a dītum subtrahi, et est b articulus dīti, secundū quem iussi fieri subtractionem. Respice igitur 21. 22. & 23. ut ex aliqua earum proba benefieri. Item si tot sunt figuræ in diuisore quot in diuidendo, tunc fiet subtraction secundum aliquē dītum, igitur ex 24. 25. uel 26. proba benefieri. Si autem & diuidendus & diuisor habeat aliquot figuræ, & diuidendus plures, tunc ex 27. uel 29. probabitur operatio. Exempla ideo nō posui, ut neq; scribentem ponendorum copia lassaret, nec legentem positorum turba fatigaret.

XXXI.

Mutuo se probat multiplicandi & diuidendi operationes.

Si enim a in b facit c, necesse est, ut c contineat alterum eoru totiens quotiens reliquus unitatem, igitur c diuisus per alterum, exhibet reliquus. Ex hoc igitur scire potes, an bene multiplicaueris. Similiter si c diuiso per b, exit a, totiens erat b in c, qd unitas in a, ergo multiplicato a in b, redit c, nisi erramus.

XXXII.

Si numerus cōpositus in se multiplicatur, producitur quadratus, constans ex quadratis numeroz

$$\begin{array}{r}
 & 6 & 6 & 6 \\
 & \bar{2} & 2 & 2 \\
 2 & 2 & 2 & \\
 \hline
 4 & 4 & 4 & \\
 4 & 4 & 4 & \\
 \hline
 4 & 4 & 4 &
 \end{array}$$

**MODVS Operandi
in Divisione.**

$$\begin{array}{r}
 b \\
 \bar{f} \\
 a
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 g \\
 \bar{h} \\
 b
 \end{array}$$

**Proba
ho Mil
hipha
tions,
& Divi-
sionis.**

$$\begin{array}{r}
 c \\
 \bar{b} \\
 c
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 a \\
 \bar{b} \\
 a
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \bar{c} \\
 \bar{b} \\
 a
 \end{array}$$

**REGULÆ
Extractionis
Radicis qnātrata.**

**Exem.
plum.**

*Ex propositione hac patet ratio
duplicationis vigorum in radi-
cum extrahente minorem.*

Altius exemplum.

**numerorum componentium radicem, & nu-
meris qui sunt ex multiplicatione omniū prae-
cedentium in omnium sequentium duplos, si-
ue econtrario omnium sequentium in omniū
præcedentium duplos.**

*Sit c b a numerus in se multiplicandus, erit c per primo a sub c
& multiplicatur c per c & b & a, & exit quadratum c, & duo
alij numeri, deinde anterierando, ueniet a sub b, & ibi multi-
plicatur b numerus per c & per b & per a. Post iterum antero-
rando ueniet a sub a, & ibi multiplicatura per c & per b & per
a. Multiplicasti igitur primo c per c & per b & per a, secundo
b per c & per b & per a, tertio a per c & per b & per a. Tantum
autem ualeat multiplicare c in duplum b, uel b in duplum c,
quantum c in b & b in c Similiter c in duplum a, uel a in du-
plum c, quantum c in a & a in c. Etiam b in duplū a, uel a in du-
plum b, quantum b in a & a in b. Ex quo apparet quadratum
c b a radicis fieri ex quadratis numerorū c & b & a, & num-
erus quorum unus fit ex ductu c in duplum b, uel econuerso
ex ductu b in duplum c, alter ex ductu c in duplum a, uel econ-
uerso, tertius ex ductu b in duplum a, uel econuerso. Quod fu-
it probandum.*

XXXIII.

Radix. B.

**Impossibile est numerum figurarum quæ
scribuntur in designatione quadrati, excedere
numerum, cuius medietas est numerus figura-
rum radicis.**

*Verbi gratia. Sit data radix numerus c b a, cuius figurae
tres. Dico, q̄ eius quadratus non pluribus figuris est scriben-
dus q̄ sex. Ponatur enim in uno ordine c b a, & superponat
sibi aliis, sicut fieri solet in multiplicatione, tunc multiplican-
do c in se, fiat, si placet, numerus g f, ponam f super c, g post f,
tunc reuera erunt sex figuræ in ordine superiori. Sed uide q̄ si
multiplicatio c in c facit numerum compositū, utputa 8 1. quo
maior produci non potest, impossibile est numerum sexto lo-
co designandū esse maximum in sexto limite, quia omnis di-
gitus in se multiplicatus minus facit 8 2. Sit igitur g octauus
sui limitis, erit q̄ f minimus sui limitis. Cum igitur multipli-
cabo b in c, non poterit aliquid prouenire, cuius additio ad f
faciat plus articulo quinti limitis, unde circa g nulla fieri muta-*

D *tio.*

c b a
3 6 9
c b a
3 6 9

9. 3 6. 8 1. quadrati minus
10 8 - numeri ex radicem
54 - numerus ex a in duplum b pro-
prium c productus.
3 6 - numerus ex b in duplum a.

1 3 6 1 6 1 Numerus qui
dividens ex multipli-
catione productis

c b a
c b a
c b a
c b a

*Ex hoc exemplo
patet propositionalis.*

c - 6 - a
3 6 9 Numerus co-
- 6 - a positivus in se
3 6 9 multiplicandi.

8 - 1 Radice. a.

5 4
2 7 additio fit duplū &
5 4 a in 8. vel contra
3 6 additio fit duplū ex a
m. c. vel. contra

1 8
2 7 additio fit duplū quod est
1 8 ex ductu b in duplū a. vel
contra.

Radix. c b a
c b a

1 3 6 1 6 1 Numerus qua-
dratus.

8 1 9 9 9 8 0 0 0 1
9 9 9 8-1
8-1

Demonstratio 8-1
nō in hoc 8-1
exemplo 8-1
habens. 8-1

8-1 5 6 a
8-1 9 9 9
8-1 8 a
9 9 9
c 6 a
c 6 a

tio. Vel etiam si daretur hoc impossibile, quod fieret plus articulo quinti limitis, non tamen contingere plus addi numero g, q̄ minime numerum sexti limitis, quo adiecto, non excederet aliquid pertinens ad septimum limitem. Impossibile est autem postea ex additione aliqua ad f plus fieri q̄ numerum quinti limitis. Ex ijs uides propositum.

XXXIII.

Cum secundum prædictum modum operandi factum fuerit in multiplicatione numeri compositi in seipsum, necesse est, ut descripto numero quadrato, sub qualibet eius impari figura facta fuerit alicuius numeri ex numeris diuersorum limitum radicem componentibus in seipsum multiplicatio.

Cum enim radix posita fuerit in duobus ordinibus, ut in multiplicatione fieri solet, necesse est, ut ultima inferioris fieret sub aliqua tenente locum imparem in ordine superiori. Nam si par est numerus figurarum radicis, ut 4. tunc ultima fieret septima ordinis superioris, si impar, ut tres, tunc ultima fieret sub quinta superioris ordinis. Sit itaq̄ datus numerus c b a, multiplicabo c in c, & procedat si placet g f, ponam f super c, eritq; unus locus uacuus inter f & c in ordine superiori, in quo ponetur quod fit ex b in c, & tunc erit f quinta figura sub qua multiplicatus est c in se. In prima igitur translatione figurarū inferioris, b figura, quae nunc fuit sub quarta, ponetur sub tercia, & sic post multiplicationē b in c, multiplicabitur b in b, igitur sub tertio loco ordinis superioris multiplicabitur aliquis numerus in se. Deinde in alia translatione a quae nunc fuit sub b, fiet sub prima, & ibi multiplicabitur in se. Ex hoc uides propositum, nisi quis mentiri uellet, q̄ c b a in se multiplicato procedere posset numerus septem figurarum, & ita sub septima, quae impar esset, nulla fieret alicuius in se multiplicatio, sed hoc negat proxima præcedens.

XXXV.

Dato numero radicē quadrati extrahere.

Non doceberis hic cuiuslibet numeri radicem querere, cū non habeat eam in numeris, sed doceberis inuenire numerū qui aut sit dati numeri radix, si ipse est quadratus, aut sit radix maximi eius quadrati, scilicet ipse non est quadratus. Sit itaq̄ datus

*Ex paro positione
hac paro ratio
quare sub in
pari figura hoc
in locis centenari
orum, querendus si
digitis qm in se
dicitur totum depon
marū supra positu
vel quantum viciniss
potest.*

Exemplum.

	g.	4.
g	g.	c
b.	6.	g
4	4	3
3	3	2
4	3	2
c	8	6
4	3	2

*Modus
Operandi
in aff
ratio
ne Ra
dicis quadratae.*

k h g f d
— c c — b b —
— c — b — a —

Datus numerus khgfd, incipiā sub ultima impari, sub omnī enim impari digitum aliquem in se multiplicandū inueniam ex 34. Sit digitus figuræ c sub k inuentus, & duplicauerim ipsum sub h. Item inuenerim digitum figuræ b sub g, & dupli cauerim sub f. Tertio inuenerim digitū figuræ a sub d, & post subtractionem nihil remanserit. Dico, q̄ cba sit radix numeri khgfd. Nam ex 32. quadratus numeri cba constat ex quadratis c & b & a numerorū, & numerus quorum unus fit ex ductu b in duplum c, & alijs ex ductu a in duplum c, & tertius ex ductu a in duplum b. Sed primo cum c, qui est reuera tertij limitis articulus, qualis digitum sub quinti limitis loco positum in se multiplico, & productum subtraho à supraposito, recte facio. Quod enim ex articulo tertij limitis in se multiplicato procedit, ad quintum limitem pertinet, sicut patet ex 15. uel 17. uel 19. Deinde cum duplo c, & excrescens pono sub h, & præpono b, quæ signat articulum secundi limitis, nonne hoc qd est b in duplū c multiplicat, recte subtrabit à numero incipiente à numero quarti limitis. Reuera nā & hoc ex ppositiōnibus quas pnoī aui cōstare potest. Deinde b in se multiplicato, recte quod prouenit subtraho ex numero tertij limitis, sicut per easdem propositiones patet. Post hoc duplo b, & pono excrescens sub f, & præpono a sub d, & pono duplum c sub g & multiplico a in duplum c, & excipio productū ex g, & ex eo quod sequitur, si opus est, & multiplico a in duplum b, & excipio procedēs ex f, facio autem recte, quod patet ex 14. uel 15. uel 18. Post multiplico a in se, & quod excrescit subtraho ex d, & eo quod sequitur, si opus est. Excepti ergo ex numero khgfd numeros sufficenter componentes quadratum numerum cba, & nihil remanet, igitur numerus khgfd est quadratus numeri cba. Si uero aliquid remanet, scis nihilominus probare propositum si quid scis.

XXXVI.

Sí dato numero non quadrato per præcedens artificium extracta fuerit radix aliqua quadrati, necesse est ipsam esse radicem quadrati maximi, qui in dato numero potest inueniri.

Sit datus numerus non quadratus khgfd, sitq̄ reperta radix cba, & remansit z, & cōsumptus est numerus 2. Dico, q̄ 2 est maximus quadratus in dato numero. Si enim esset maior sit ille p, igitur radix p numeri est ad minus unitate maior ra-

D ij dice

$$\begin{array}{r}
 5 \ 4 \ 7 \ 5 \ 6 \\
 k \ g \ f \ d \\
 z \ \bar{b} \ \bar{a} \ \bar{y} \quad \text{Radix.} \\
 \hline
 cc. cc \ 88 \\
 4 \ 2 \ 9 \\
 1 \ 2 \ 4 \\
 \hline
 1 \ 6 \ 1 \ 6 \quad \text{Add. facit}
 \end{array}$$

5 4 7 5 6 Hoc ex
minimo proposito sig.
tractum nihil relinquit.
Numerus igitur supra
positus ē quadratus.

$$\begin{array}{r}
 k \ h \ g \ f \ d \\
 \underline{c} \ \underline{b} \ \underline{a} \\
 \underline{\underline{y}}
 \end{array}$$

ognales.

d. 96. c. 96.
e. 24. f. 16. *quadrat. min. a.*
a. 4. b. 6.

d
c
k f
a 4

36
4 12
3 9

h
g
2
d
b
1
5
3
60
15
4
5

Additi - 2 + 0.
equales
12. 0. 8 12. 0.
2 + 9. 20. 9.
4. 4. 5. 5. 6. 6.

dice cb a. Sit igitur digitus unitate maior q̄ a, igitur cb y est radix numeri p quadrati in numero k h g f d, igitur digitus multiplicatus in duplum b & duplum c & in se, aufert aliquid à dato numero post præcedentes exceptiones, & non totū consumit eum, igitur non erat a maximus digitus, qui ad hoc faciendum poterat inueniri. Aut ergo nunc mentitur, qui negat propositum, aut non bene fecit, qui radicem debuit extrahere. Sumpsit enim a digitum cum debuit maiorem sumere, eo q̄ maiorem inuenire potuerit.

XXXVII.

Si duorum numerorum alter in alterū multiplicatur, & in productum, quod ex secunda multiplicatione producitur, æquum est ei ex reliquo in alterius quadratum multiplicato.

Ex a in b fiat c, & ex a in c fiat d. Item a in se faciat f, b in f faciat g, dico d & g esse æquales. Nam d ad c est sicut a ad unum, sed a ad unum sicut f ad a, igitur d ad c sicut f ad a, & permutatim d ad f sicut c ad a, sed c ad a sicut g ad f, igitur d ad f sicut g ad f, igitur d est æquale g.

XXXVIII.

Si trium numerorum duo quilibet alter in alterum multiplicantur, & tertius in productum, & idem tertius in alterum priorum duorum & eorundem reliquus in productum, sunt ultimæ productiones sibi inuicem æquales. Aggregatae autem faciunt numerum, qui fit ex aliquo datorum trium numerorum in duplum alterius, & tertio in productū multiplicato.

Sint tres a b c, a in b faciat d, & c in d faciat f. Item a in c faciat g, in quē b faciat h, dico h esse f. Nam f ad d sicut c ad unū, c ad unū sicut g ad a, igitur f ad d sicut g ad a, & permutatim f ad g sicut d ad a, sed d ad a sicut b ad unū, igitur f ad g sicut b ad unū, sed b ad unū sicut h ad g, igitur f ad g sicut h ad g, & per consequens f est h. Dico etiam, q̄ a multiplicato in duplum b, & c in productum, fieri quiddam æquale f & h congratis

*Exemplum
secunde
partis.*

q. 240.

f. 40.
t. 4. 66. 30. c. 6.

gatis, siat enim lex a in duplum b, igitur duplus est ad d. Item
ex c in l procedat q, igitur q est duplus ad f.

XXXIX.

Omnis numerus cubicus, cuius radix est
numerus compositus, constat ex numeris cu-
bicis radicem componentium, & numeris pro-
cedentibus ex quolibet præcedente in omniū
sequentium triples, & deinde cū ipsis sequen-
tibus in productum multiplicatis.

Sit data radix c b a. Dico q̄ eius cubus constat ex cubis c &
b & a numerorū, & numerus qui fit b & c multiplicatus in id
quod fit ex b ducto in triplū c, & tota radice ducta in id quod
fit ex a ducto in tripulum b & c numerorū. Fit enim idem cu-
bus ex c b a in suum quadratū, quadratus autem eius constat
ex quadratis numerorum c & b & a, & numerus qui fuerit ex
multiplicationibus b in duplū c, & a in duplum b & c, habes
enim hoc ex 32. Cubicum ergo radicis componunt numerū c
& b & a, quolibet in suum quadratū multiplicatis, & numeri
qui fiunt, multiplicato b in quadratū c, & c in quadratū b, & b
in quadratū a, & a in quadratū b, & a in quadratū c, & c in qua-
dratum a. Item q̄ numeri qui fiunt, multiplicatis c & b & a in
id qd fit ex ductu b in duplum c, & id qd fit ex ductu a in du-
plum b & c. Numeri autem qui fiunt ex c b & a, quolibet in su-
um quadratum sunt cubi numerorū c b & a. Probabo autē
q̄ multiplicato b in tripulum c, & deinde c & b in productum,
probabo in q̄ q̄ numerus secundo productus sit æqualis, nu-
merus quorū unus fit ex b in quadratū c, alias ex c in quadra-
tum b, tertius ex c & b in id quod fit ex b in duplū c. Sit enim
d triplus ad c, & ex b in d procedat f, deinde c & b in f, faciant
z. Multiplicando ergo b in d, multiplicauit b in duplū c, & in
c. Cum ergo duxi c & b in f, duxi c & b in id quod fit ex ductu
b in duplū c, & in id quod fit ex b in c. Sed ducēdo b in id qd
fit ex b in c ex 37. per æquivalens duco c in quadratū b, & du-
cēdo c in id quod fit ex b in c, per æquipollens duco b in qua-
dratum c. Fit igitur numerus z ex numeris, quorū unus fit ex c
& b in id quod fit ex b in duplū c, & alias ex b in quadratū c,
& tertius ex c in quadratum b numeri. Adhuc restant numeri,
quorū unus fit ex a in id quod fit ex b in duplum c, alias fit ex
multiplicatione c b a in id quod fit ex a in duplum b & c. Re-
stant quoq̄ numeri, qui fiunt a in quadratis numerorū c & b.

D in Item q̄

Ex hac proposizio
ne potest ratio
triplationis @ ligi
formū in extracti
one radicis cū bū
singulis in b "gnar tōs locis
inventorū.

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 9 \cdot 64 \cdot \underline{\text{cub}} \\ - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \\ \hline \underline{\text{c}} \quad \underline{\text{b}} \quad \underline{\text{a}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\text{c}} \quad \underline{\text{b}} \quad \underline{\text{a}} \\ \underline{\text{d}} \\ \hline \underline{\text{f}} \\ \hline \underline{\text{z}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\text{c}} \quad \underline{\text{b}} \quad \underline{\text{a}} \\ \underline{\text{q}} \quad \underline{\text{k}} \quad \underline{\text{—}} \end{array}$$

Iem'q; c & b in quadratum a multiplicatis. Toti huic summae probabo æquari summam quæ sit a in triplum c & b, & deinde de c b a in productis multiplicatis. Sit enim q; triplus ad c, & k triplus ad b, multiplicabo igitur q; k per a, deinde c b a in productum. Multiplicando ergo a per triplum c, & deinde c & a in productum multiplicato per c & a, hoc quod fit ex a in duplum c, & quod fit ex a in c, semel igitur per æquipollens multiplico tunc in id quod fit ex a in duplum c, & a in id quod fit ex a in duplum c, & a in quadratum c, & c in quadratum a. Cum uero multiplico per b id quod fit ex a, hoc referua, scilicet, quod fit multiplicando per b id quod fit ex a in c in triplum c, multiplico per b id quod fit ex a in duplum c, & in c. Item cu per b & a multiplico id quod fit ex a in triplum b, multiplico per b & a id quod fit ex a in duplum b, & quod ex a in b semel, & per cōsequēs quadratum b per a, & quadratum a per b. Cū uero per c multiplico quod fit ex a in triplum b, multiplico per c id quod fit ex a in duplum b, & præterea id quod fit ex a in b. Multiplicaui ergo modo quod fit ex a in b per c, prius autem per b quod fit ex a in c, ergo ex proxima multiplicauit per æquipollens per a id quod fit ex ductu b in duplum c, habes ex hjs propositum.

X L.

Impossibile est numerum figurarum quæ scribuntur ad significandum cubicum habundare super triplum numeri figurarum radicis eiusdem cubici.

Sit data radix c b a scripta tribus figuris. Dico q; non potest eius cubicus plus nouem figuris habere. Cum enim ipsam in se multiplicauero, ex 33. patet, q; in quadrato suo nō possunt plures q; sex esse figuræ, tunc multiplicando tres figuras in sex, erit c sub figura octaua limitis. Multiplicando igitur c in id cuius subscribitur a, si consurget numerus duarum figurarum, posterior erit in nono loco, nulla tamen additione poterit excrescere aliquis numerus decimi limitis. Quod manifestum est sci enti tricesimam tertiam.

X L I.

Cum secundum prædictum modum operandi factum fuerit in multiplicatione numeri compositi in suum quadratum, necesse est, ut cuiuslibet numeri ex numeris componentibus

numerus limitum.
9 8 7 6 5 4 3 2 1
8 1 9 9 8 0 0 1 qua
c 6 a drahm
9 9 9. etiam numeri.

bus radicem multiplicatio in suum quadratum perfecta fuerit sub aliqua figurarum cubici, quae aut est prima, aut aliqua quartarum secundum computationem quae à prima figurarum incipiens, terminatur in quarta, ibi quod reincepta, finitur iterum in quarta, & ita deinceps, ut ultra quatuor non procedat computatio, ibi sequens incipiat ubi terminatur praecedens.

Sit data radix c b a, cuius quadratus necessario figurabitur. Quinque aut sex figuris, sic quod sex, & sit k h g f e d. Numerus ergo habet quadratum suum in k h ex 34. Sed multiplicando radicem in quadratum, ponam a sub k, & fieri c sub octavo loco, & multiplicabo c per k, sed nondum multiplicauero totum quadratum c per c, sed tunc cum c stabit sub figura septima, at sextima quarta est quarta. Item patet ex 34. quod quadratus numeri b, aut est f, aut ibi incipiet. Unde multiplicando b in f, perfecta erit multiplicatio b in suum quadratum, sed tunc erit b sub g locata, quae quarta est. Similiter quia quadratus numeri a incepit in d, uel est in d, ideo cum a multiplicabitur in d, perficitur multiplicatio a in suum quadratum, sed tunc erit a sub d, quae prima est. Ex hoc patet ppositum. Nisi dicat aliquis ex multiplicatione c b a in suum quadratum procedere numerum 10. figuram, sed hoc proxima non patitur.

XLII.

Dato quolibet numero radicem cubicam extrahere.

Non doceberis hic cuiuslibet numeri radicem cubicam extrahere, sed dato numero ostendetur quomodo querenda sit radix, quae aut est dati numeri radix, si ipse est cubus, aut maximus cubi in eo contenti. Modus est communis, sicut alibi dicitur, nisi quod hic in secundi digiti inuentione & aliorum post, dicitur, quod debet esse talis, ut ductus primo se solo in triplum sibi præscriptum, & deinde una cum subtriplo in productum consumat de superiori ipsius tripli, & deinde in secubice ductus, consumat de superiori, ita, ut per alium non plus auferetur.

Ratio operationis: Sub qualibet quartarum figurarum superpositarum inuenio numerum in secubice multiplicandum, quare autem hoc patere patet ex 41. Net te moueat, quod iubeo digitum

Ex hac propositione demonstratur quare sub tocius millesimi ordinis vel qualibet figura in ordine quinque digitis invenientur qui in se cubicat sunt totum lebas numerum supra positum et maximam eius partem.

10
15
16 17
18
19
17
16
15
14

Modus operandi in extractione Radicis cubicae.

digitum inueniri, nam talis in quarto loco vel septimo articulo est, ut ex dictis in multiplicatione & diuisione apparuit. Quare autem numerum sub quarta figurarū inuentum multiplicem in triplum præinventi, & deinde cum subtriplo in productum, patet ex 39. & eis quæ in eius probatione dicta sunt. Qd' autem figuræ tripli sub figura tertia scribo, ante illam cui subscriptur subtriplus, ideo est, ut continuetur hic numerus in scribendo illi numero, qui inueniendus est sub quarta ab illa, sub qua inuentus est numerus iam triplatus.

XLIII.

Cum dato numero non cubico per præcedens artificiū extracta fuerit radix cubi, oportet eam esse radicem maximi cubi, qui in dato numero potest inueniri.

Id hic probari non oportet, cum sit luce clarius consideranti probationem 36. in qua dicitur de radice quadrata, quod hic de radice cubi.



ACTENVS ergo dictum sit, qualiter in integris operandum sit. Deinceps ad minutias procedat negotium. Et erit. Cū minor quantitas secundū aliquem numerum multiplicata maiorem perficit, dicitur quantitas minor maioris pars multiplicatiua, siue pars aliquota, siue pars simpliciter nomine restricto. Numerus autem secundū quem minor quantitas multiplicata maiorem componit, est denominatio partis ad totum. Est ergo numerus denominans, in quo totiens est unitas, quotiens pars denominata in suo toto. Denominatio totius est unitas. Minutia siue fractio est quantitas numerata & denominata. Est autem tū pars ut una quinta, tum partes, ut tres quartæ. Est etiam quandoque toti æqualis, ut duæ medietates. Numerus numerans est, in quo totiens est unitas, quotiens est pars in minutia. Minutiam per minutiam multiplicare, est inuenire per operationē numerum & denominationem quantitatis ita se habentis ad alterā producentium, sicut reliqua se habet ad integrum. Diuidere minutiam per minutiam, est inuenire per operationē numeri & denominationē quantitatis, cuius proportio ad integrum sit sicut diuisæ fractionis ad diuidentem. Quadrata minutia est quā & numerat & denominat quadrat⁹. Vel sic, est quā aliqua minutia in se multiplicata producit. Cum autem hoc sit

Zadom ē probatio quæ in 36.
de radice quæ
drata.

fit, producens est radix productæ. Cubica est minutia quæ à cubicis numeris numeratur & denominatur, siue quam aliqua minutia bis in se ducta producit, quod cum fit, productæ producens radix dicetur. Cum diuisum fuerit quodlibet totum in 60. minuta, quodlibet minutū in 60. secunda, & sic deinceps secunda in tertia, ita, quantumlibet minutæ sis sumptæ, dicuntur philosophicæ, talibus enim maxime utuntur philosophi. Aliæ uero vulgares dicuntur. Differunt autem vulgares à phisicis in modo scribendi. Scribuntur enim vulgares ita, ut numerus numerans ponatur supra, & denominans sub eius. In minutis autem phisicis nunc scribitur numerus denominans, eo q̄ certum sit eas denominari à 60. Vnde opus est distinctione locorum in earum figure. Primus enim locus est integrorum, secundus minutorum, tertius secundorum & ita deinceps.

I.

Quæ est proportio numeri numerantis ad denominantem, eadem minutæ ad integrum.

Vt minutia $\frac{1}{4}$, quæ est proportio trium ad quatuor, ea est $\frac{3}{4}$ rum ad integrum. Nam unius quartæ ad unam quartam est sicut unitatis ad unitatem, & quæ ternarij ad unitatē, ea $\frac{1}{4}$ ad unam quartam, & quæ unitatis ad quaternarium, ea unius quartæ ad quatuor quartas, hoc est integrum, per descriptionem numeri denominantis, igitur ex quinto Euclidis, quæ ternarij ad quaternarium, ea $\frac{1}{4}$ ad integrum.

II.

Si fuerint duæ minutæ eiusdem denominantis, proportio minutæ ad minutiam sicut numeri numerantis ad numerantem.

Sint a:c & b:c minutæ, habentes c cōmunem denominatiōnem. Tunc quæ est a ad c, ea est a:c ad integrum ex præmissa, sed quæ est c ad b, ea ratione conuersionis præmissæ est integrum ad minutiam b:c, igitur quæ est a ad b, ea est minutæ a ad minutiam b:c.

a b
— —
c

III.

Si numerus numerans unius minutæ ducentur in denominantem secundæ, & numerans secundæ in denominantem prioris, erit proportio prioris minutæ ad secundam, si-

E: cut: nū

cut numeri producti primi ad numerum producti secundi.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

$$\underline{f} \qquad \underline{h} \qquad \underline{g}$$

Vt a b & c d minutiae, a in d faciat f, c in b faciat g. Item b in d fiat h. Cum igitur a in d fiat f, & b in d fiat h, erit ex 15. quinta Euclidis a ad b sicut f ad h, ergo ex prima huius, minutiae a b ad integrum est sicut f ad h. Item quia d in b facit h, & c in b facit g, eadem via, erit c ad d sicut g ad h, & conuersim h ad g sicut d ad c. Vnde quæ est h ad g, ea est integri ad minutiam c d, igitur quæ est f ad g, ea est minutiae a b ad minutiam c d.

III.

Vnius integri ad duas fractiones proportionatio, est sicut numeri producti ex denominacionibus fractionum altera in alteram multiplicatis ad duos numeros, quorum alter producitur in numerante numero unius minutiae in denominantē alterius ducto, reliquus ex multiplicatione reliqui denominantis in reliquū numerantem.

Maneat prior positio & dispositio. Dico q̄ proportio integrī ad minutias a b & c d est sicut h ad f & g. Ex proxima enim quæ est f ad g, ea est a b ad c d, igitur coniunctim f g ad g sicut a b & c d ad c d, sed quæ g ad h, ea est c d ad integrum, igitur e contrario quæ est h ad f & g, ea est integri ad minutias a b & c d.

V.

Cum duas fractiōes numerat unus & idem numerus, proportio prioris ad secundam est sicut proportio numeri denominantis secundā ad eum qui prioris est denominatio

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a}{c}$$

$$\underline{f} \qquad \underline{g}$$

Vt a b & a c minutiae, a in c faciat f, & a in b faciat g, ex 16. quinti, c ad b sicut f ad g, sed f ad g ex tertia huius est sicut minutiae a b ad minutiam a c, igitur.

VI.

Datis duabus minutijs, si quæ est proportio numerantis priorem ad numerantem alteram

ram

ram, ea sit denominant̄is priorē ad eum à quo
denominatur secunda, minutiae sunt æquales,
& conuertitur.

Nam si a ad c sit sicut b ad d, tunc permutatim erit a ad b si
cūt c ad d. Ex prima igitur huius & i o. quinti Euclidis conclusio
de propositum.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$

VII.

Duas dissimilium denominationum fra
ctiones ad totidem minutias similiūm deno
minationum reducere.

Vt a b & c d. A in d faciat f, & c in b faciat g, atq; b in d faci
at h. Dico, q; minutia f h est æqualis minutiae a b, & minutia g
h æqualis minutiae c d. Oportet enim, ut a ad b sit sicut f ab h,
& permutatim a ad f sit sicut b ad h. Ex proxima igitur conclusio
de, q; minutia a b & minutia f h sint æquales. Similiter de alijs.

$$\begin{array}{r} a \\ b \\ \hline f \end{array} \quad \begin{array}{r} c \\ d \\ \hline g \end{array}$$

VIII.

Integra quocunq; in datæ denominationis
minutias reducere.

Si datur unum, fac numerum datum pro denominatione
facienda. Fac, dico eum numerantem & denominantē, & pro
ba ex prima huius. Si plura. Sit datus denominans d, nume
rus integrorum a, duc a in d, & fiat c, tunc dico, q; minutia c d
est æqualis datis integris. Nam c add sicut a ad unitatem, sed
a ad unitatem est sicut numerus datorum integrorum ad unū,
igitur c ad d sicut numerus integrorum ad unum, sed c ad d si
cut minutia c d ad integrum ex prima huius, igitur ex decima
quinti Euclidis datis integris est æqualis minutia c d.

$$\begin{array}{r} a \\ \hline c \end{array} \quad \begin{array}{r} c \\ d \end{array}$$

IX.

Qualiter in additione uulgarium minutia
rum operandum sit ostendere.

Si una uni est addenda, si diuersæ sint denominationis, re
duce eas ad minutias eiusdem per proximam, & iunge nume
ratores seruata denominatore cōmuni. Ratio patet ex secunda
huius. Si plures uni sint addendæ, primo iunge duas ex eis, ut
iam dictum est, deinde illis coniunctis, iunge tertiam tertij. Si
uero minutia integris, aut integra & minutias minutij ue
lis addere, reduc integra ad minutias eiusdem denominationis,
& post facile erit.

E n Opus

Opus additionis in phisicis minutis demonstrare.

Facile est cum eas quæ sunt eiusdem generis addideris, ut in
tegra integris, minuta minutis, secunda secundis & tertiijs.

X.

Datis minutis siue uulgaribus siue phisicis, qualiter quædam ab alijs substrahendæ sint exponere.

In uulgaribus patet ratio ex secunda, cum sint ad minutias eiusdem denominationis reductæ. In phisicis ex se manifestū est.

XI.

Duplationem & deduplationem in minutis tam uulgaribus & phisicis edocere.

Vulgarem duplasti duplato eius numeratore per secundā huius. Vel deduplato eius denominante, si par est, ut patet ex quinta huius. Minutiam autem uulgarem deduplasti, duplato eius denominante, ut patet ex quinta huius, aut deduplato numerante, si par est, patet ex secunda. In phisicis apertū est satis, & ratio nulli dubia.

XII.

Qualiter in uulgaribus minutis multiplicandum sit expedire. Eritque patens, quod minutia numerata à numero producto ex numerante unius minutiae in numerantem alterius, & denominata ab eo, qui producitur ex denominante ducto in denominantem, sic se habet ad alterā minutiarū sicut reliqua ad integrū.

Vt minutiae ac & df, a in d faciat b, c in f faciat h. Dico ex a in df minutiam bh produci. Nam b in f producat g, & d in h procedat k. Ex tertia patebit, quod minutia bh ad minutiam df se habet sicut g ad k. Item, quia a in d facit b, & h in d facit k, igitur a ad h sicut b ad k, & permutatim a ad b sicut h ad k. Item b in f facit g, & c in f facit h, igitur b ad c sicut g ad h. Sit igitur a primum, b secundū, c tertium. Item in alio ordine g primum, h secundum, k tertium. Vides igitur, quia a ad b primi ad secundū in primo ordine, est sicut h ad k secundi ad tertii in alio ordine.

$$\frac{a}{c} \frac{d}{f} \quad \frac{b}{h} \frac{g}{k}$$

Ordine, & b ad c secundi ad tertium in uno, sicut g ad h primi
ad secundum in alio ordine, igitur ex antepenultima quinti
Euclidis a ad c sicut g ad k, igitur minutia b ad minutiam d
sicut a ad c, sed a ad c sicut minutia a c ad integrum ex prima
huius, igitur habes propositum. Nota tamen, q̄ minutia per
minutiam non est uulgariter multiplicanda, nisi utrāq; sumā-
tur portio eiusdē integrī i. nisi utrāq; numeret & denominē-
tur portio eiusdē integrī. Qd' si dantur minutiae diuersorū in
tegrorū, fac de uno integrō minutā reliq; tūc habes minutā
integrī iam factam, & minutiam huius minutiae. Qualiter au-
tem minutia numeret & denominet portio primi integrī, do-
cer propoſitio quæ ſequitur.

XIII.

Pars partis est pars totius numerata à nu-
mero q̄ fit ex ductu numeratis ad in numeran-
tem, & denominata à numero qui producitur
ex denomināte in denominantē multiplicato.

Sit integrum 2, cuius quandam quantitatem numeret a, &
denominet b. Huius autem quantitatis integrī ſit alia porcio,
quam numeret c & denoīet d, porcio ab minutiae. A in c faciat
f, ex a in c pcedat f, & ex b in d fiat, ueniet g. Dico q̄ quantita-
tem cd numerat f, & denoīat g portio 2 integrī. Si enim non e-
st d, ſumatur quantitas maior uel minor, quæ ſic numeretur &
denominet portio 2 integrī, & ſit ipsa quātitas q. A in d faciat
h, ex pofitione igitur & prima huius, propoſtio minutiae ab
ab minutiam quæ est integrum ſuum, eſt ſicut cd ad 2 integrum.
Similiter cd minutiae ad ab minutiam quæ est integrum ſuum, eſt ſicut cd ad 2 integrum, ſed c ad
d ſicut f ad h, quia multiplies & æquemultiplies, igitur quæ
eſt cd minutiae ad ab minutiam, ea eſt f ad h. Quæ eſt autem a
ad b, ea eſt h ad g, igitur quæ eſt ab minutiae ad 2 integrum, ea
eſt h ad g, ergo quæ eſt f ad g, eadem eſt cd quantitatis ad 2 in-
tegrum, ſed poſitum eſt, q̄ q̄ quantitatē numerent & denominē-
nt f & g portio g integrī, ergo ex pria huius quæ eſt f ad g, ea
dem eſt q̄ quantitatis ad 2 integrum, ſed eadem eſt cd quanti-
tatis ad 2 integrum, igitur q̄ quantitas æqualis eſt cd quanti-
tati. Non igitur minor uel maior. Oportet igitur, ut cd minu-
tiam minutiae ab, numeret f & denoīet g portio 2 integrī, qd'
fuit demonſtrandum:

XIV.

Si numerus numerās phisicāe minutiae mul-
tiplicetur in ſe, & de producto fiat numerans
E iij minutiae

$$\begin{array}{r} \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} \\ \hline f \\ \hline h \quad g \end{array}$$

LXXXII

minutiæ phisicæ tantum distantis à priore,
quantum eadem prior ab integro , necesse est
minutiam integro propiorem inter ulteriorē
& integrū medio loco esse proportionalem.

Integr.
Minu.

$\frac{2}{2} \frac{3}{3} \frac{4}{4} \frac{5}{5} \frac{6}{6}$

$\frac{a}{b}$

$\frac{c}{d}$

$\frac{d}{d}$
 $\frac{b}{b}$
 $\frac{d}{d}$
 $\frac{b}{b}$

Verbi gratia: Sumatur data minutia in tertijs, & sit eius numerans a, quo in se multiplicato, fiat c, qui numeret aliam minutiam phisicam in sextis. Locus enim sextorum tantum reddit à tertijs, quantum locus tertiorum ab integris. Dico q̄ portio c sextorū ad a tertia sicut a tertiorum ad integrum. Inueniam enim per proximā denominationem a tertiorū quam habent portio primorū integrorū, de ijs enim sermo est, sit autē hæc denominatio b. Sed sicut denominant tertia portio integrorum, ita etiam sexta portio tertiorū propter æqualem distantiam, igitur per proximam multiplicato b in se, procedet denominatio sextorum ad integrum. Sit illa d, ergo sexta sunt minutia c d. Patet autem ex operatione multiplicatiōis in vulgaribus, q̄ ex minutia a b in se multiplicata producta 8 minutia c d, igitur minutia c d ad minutiam a b, sicut ipsa minutia a b ad integrum, ex hoc patet propositum. Vel sic: c est quadratum a radicis, & d quadratus b radicis, igitur ex 11. octauī proportio c ad d est duplicata ad proportionē a ad b, sed quæ c ad d, ea est minutiae c d ad integrum, & quæ est a ad b, ea est minutiae a b ad integrū, ex prima huius, igitur proportio minutiae c d ad integrum, est proportio a b minutiae ad idem duplicata, igitur quæ est c d ad a b, eadem est a b ad integrum, ex hoc licet inferre propositum.

XV.

Datis duabus minutijis phisicis, si numerās alterius in numerantem reliquū ducatur, procedit numerus numerās minutiae phisicæ tantum distantis ab una datarum, quantum reliqua ab integris, & habentis se in proportionē ad alteram datarum sicut reliqua ad integrū.

Integra
minut:

$\frac{2}{2} \frac{3}{3} \frac{4}{4} \frac{5}{5} \frac{6}{6}$

$\frac{b}{d}$

$\frac{a}{f}$

Siue sint eiusdem loci siue diuersorum nihil differt quantū ad demonstrationem Sint datae minutiae b tertia & a quarta, ex a in b fiat c. Dico q̄ proportio c septimorum ad a quarta est sicut tertiorum ad integrum. Sit enim d denominatio tertiorū ad integrum, f denominatio quartorum ad integrum. Patet

autē

in 3

autem, q̄ ita denominantur septima portio quartorū ut tertia
portio integrorum propter eandem distantiam. Est igitur dēno-
minatio septimorum portio quartorum, igitur ex multiplicatiōe
finē procedit denominatio septimorum ad integrum per p-
ximam proximā, sit illa numerus g, igitur septima sunt c g mi-
nutia, sed ex ductu b d in a f, procedit minutia c g, patet ex ope-
ratione multiplicationis uulgarium, igitur quae est proportio
c g minutiae ad a f minutiam, ea est etiam b d minutiae ad inte-
grum. Infer ex hoc quod proponitur.

XVI.

Qualiter in multiplicatione phisicarū mi-
nutiarum faciendum sit, notificare est propo-
situm.

Ratio operis. Velim per a quarta & b minuta multiplicarē
quarta & g tertia, & h minuta & k integra. Ponam autē lo-
cum integrorum odinī a & b sub f, & scribam scribenda hinc
inde nullo loco omisso, qui ante a uel ante f esse debeat. Dein
de multiplico a in f, & procedat c, ponā enim super a, sic enim
tantum distabit c ab f, quantum a ab integris. Apparet ergo
per proximam uel ei proximam, q̄ minutia phisica quam in
tali loco numerat c, procedit ex ductu minutiae phisicæ, quam
in suo loco numerat a, in minutiam phisicam quam in suo lo-
co numerat f. Qd̄ si loca uacua intermissem, & posuissem a
iuxta b, & g iuxta h, & f contineo, cōtigisset c octaua scribi in
loco sextorum. Cum autem ex multiplicatiōe numerantis in
numerantem producitur, plusq; 60. non scribo totum nume-
rantem in locū suā minutiae, sed pro quilibet 60. unitatem scri-
bo in proximo loco uersus integra. Item ducto ordine inferiō-
ri in ultimam superiorē, anteriorandus erit ordo inferior sub
proximo loco uersus integra etc. omnia de se patent. Como-
dius tamen fiet, si tam summa multiplicans q̄ summa multi-
plicanda, congregetur unaquæq; per se in unum locum, tunc
patebit ratio per præcedentem.

XVII.

Quomodo minutia uulgaris per aliam di-
uidenda sit, manifestum facere. Erit autem pa-
tens, q̄ quantitas numerata à numero exeunte
in diuisione numerantium, & denominata à
numero qui exit in diuisione denominantiū,
ita

quarta
f g 3 : 2 : h minu : k integr:

a . . b .
4 3 : 2 : min : integr:

ita se habet ad integrum, sicut diuisa minutia
ad diuidentem.

e a f
d b g

Verbi gratia. Sit cd minutia diuidenda per minutiam a b,
& possint diuidi sufficienter c per a & d per b. C per a diuisum,
exeat f, & d per b, exeat g. Dico minutiam f g sic se habere ad
integrum, sicut minutia cd ad minutiam a b. Si enim c diuiso
per f a, exit f, oportet ut ex ductu f in a sit c. Similiter d diuiso
per b, exit g, oportet ut g in b faciat d. Igitur ex ductu minutiae
f g in minutiam a b, procedat minutia cd, igitur ex correlario
12. proportio minutiae cd ad minutiam a b est sicut propor-
tio minutiae f g ad integrum, igitur minutia f g exit ex diuisio-
ne minutiae cd per minutiam a b. Ex descriptione diuisonis
habes ergo propositum. Nota tamen, quod illo modo omnis mi-
nutia per quamlibet aliam sufficienter est diuisibilis, non tamē
semp in numeris propriis. Sæpe enim numerus per numerū di-
uidi nō potest sufficienter, quia aliquid habundat, aut quia di-
uidendus est minor, tunc igitur reducendae sunt minutiae ad ta-
les numeros, in quibus fieri potest diuisio. Vt autem hoc face-
re scias, sequentem considera..

XVIII.

Datas minutias sic numerare & denomina-
re, ut numeri diuidendæ minutiae per nume-
ros alterius sine superfluitate diuidantur. Ap-
parebit autem minutiam, quæ exit in diuisio-
ne unius minutiae per alteram numerari à nu-
mero, quem producit numerans diuidendæ
ductus in denominantē reliquæ, & denomi-
nari à numero qui fit denominante diuisæ in
numerantem alterius multiplicato.

g c a k
h d f m

Sint datæ minutiae ab & cd, cd quidem diuidenda per ab,
nec possim diuidere c per a, nec d per b. Ducam ergo numeros
minutiae diuidentis in se, hoc est a in b, & fiat f, & ducam f in c,
& procedat g, & etiam f in d, & ueniat h. Dico quod minutia gh
est minutia cp, & quod g sufficienter diuiditur per a, & h sufficien-
ter per b. Et diuidendo g per a, exit numerus qui fit ex c in b,
& diuidendo h per b, exit numerus qui fit ex a in d, exeat autem
k ex multiplicatione c in b, & m ex d in a multiplicato. Quia
enim ex a in b fit f, oportet ut a sit pars f denominata à numero
b. Si

b. Similiter f est pars g denominata à numero c, igitur ex 13. a est pars g denominata à numero k, igitur ex ductu a in k fit g, igitur g sufficienter diuiditur per a, & exit k. Simili modo proba, q̄ h diuiditur sufficienter per b, & exit m, ergo ex diuisiōe minutiae cd siue gh per minutiam ab, exit minutia km, hinc patet propositum. Quotienscunq; ergo diuidenda est una minutia per altetam, duc numerantē diuidendo in denominantē alterius, & productum fac numeratorem. Duc etiam denominantem diuidendo in numerantem alterius, & qd exit, fac denominantem.

XIX.

Datis duabus minutījs, si una per alteram sufficienter diuiditur in numeris propositis ita se habet diuisa ad diuidentem, sicut exiens numerantium ad exeuntēm denominationū. Quod si inæquales sunt datæ minutiae, superfluitas earum est minutia totius denominata à denominatiōe diuisa & numerata à numero qui fit numerante diuisore multiplicato per differentiam duorum exeuntium.

Prima pars aperta est ex primā huius. Sint præterea minutiae a b & c d inæquales, a diuisus per c faciat f, & d diuisus per b faciat g. Cum itaq; minutiae datæ sunt inæquales, sequitur f & g numeros esse inæquales, & si maior est f, maior est minutia c d, si ille minor & minutia c d. Ponamus ego h differentiam esse f & g, igitur minutia hg est differentia minutiae f & integri, igitur hg minutia sumpta portio minutiae ab, est differentia minutiarū cd & ab. Sed ex positione & 13. huius patet, q̄ h g minutia minutiae ab numerat̄ respectu integri p numerū qui fit ex ductu h in a, & denōiat̄ à nūero qui fit ex ductu g in b, sed ex g in b fit d, quia diuisio d per b, exit g. Habet ergo propositū differentiā minutiarū ab & cd esse minutias totius denominatā à numero d, & numeratā à numero qui fit ex ductu h in a, & hoc habes, habes ergo quod habere debes.

XX.

Si uero totus consumit̄ denominans, & non totus numerās, tūc si exeentes sunt æquales,

F les, mi

$$\begin{array}{r} \frac{6}{12} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \\ \underline{-} \quad \underline{-} \quad \underline{-} \\ \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} - \frac{f}{g} \quad h \end{array}$$

les, minutia diuisa superat alteram, parte integræ denominata à denominatione diuisa & numerata à superfluo diuisionis numerantium. Quod si minor est exiens numerantium, minutia diuidens excedit diuisam parte totius, denominata à denominatione diuisa, & numerata à numero qui est differentia numeri in diuisione relictæ, & numeri quem producit exeuntium differentia in numerantem minutiae diuidentis multiplicata. Si uero maior est exiens numerantium, excessus diuise super alteram est minutia totius quam denominat diuisa denominatio, & numerat numerus congregatus ex additione numeri in diuisione superflui ad eum, qui fit differentia exeuntium in numerantem minutiae diuidentis multiplicata.

$$\begin{array}{r} \frac{9}{8} \\ - \frac{7}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{3}{3} \\ - \frac{20}{20} \quad 4 \quad \frac{5}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{4}{29} \quad \frac{5}{18} \quad \frac{5}{6} \quad 2 \\ - \frac{18}{18} \quad 6 \quad 3 \\ \hline \end{array}$$

Consumat b diuidendo totum d, & exeat g, diuiso autem c per a, exeat f æqualis numero g, relinquatur in diuisione numerus h. Dico q̄ c d est maior a b in minutia h d. Si enim a diuidendo non consumpsit totum c, consumpsit partem numeri c, quæ sit 2, igitur minutia 2 d diuiditur sufficienter per a b, & exit f g, igitur minutia 2 d & minutia a b sunt æquales ex prima parte præsentis. Sed minutia cd excedit minutiam 2 d in minutia h d, igitur etiam minutia c d uincit minutiam a b in minutia h d, quod prima pars secundæ partis proposuit. Item sit f minor g numero, differentia eorum sit k, quo in a multiplicato fiat q, differentia q & h sit t. Dico q̄ a b minutia excedit minutiam c d in minutia t d. Nam numero c diuiso per a, consumptus est 2, & remansit h, & exiuit f minor numero g, igitur minutia 2 d minor est q̄d minutia a b, & exceditur a b a fractione q d ex secunda parte primæ partis præsentis propositionis, igitur 2 d & q d minutiae ualent minutiam a b. Item h numerus est minora numero, quia post diuisionem remālit ergo & numerus quem per multiplicationem producit a in k, maior est h numero

numero, igitur minutia $\frac{h}{d}$ minor est fractione $\frac{q}{d}$, igitur maior est minutia $\frac{a}{b}$ quam minutia $\frac{c}{d}$, quia c/d ualeat $2/d$, & h/d minores minutis $2/d$ & q/d , quas ualeat minutia a/b . Sed minutia q/d excedit minutiam h/d minutia t/d , igitur addita cōmūniter $2/d$, tunc minutiae $2/d$ & q/d ualent minutiam a/b , addunt t/d minutiam super minutiam $2/d$ & h/d , quae ualent minutiam c/d . Ex hoc habetur secūda pars huius secūdæ partis. Itē sit f maior numero g , dico q minutia c/d addit super minutiam a/b minutiam quam denominat d , & numerat numerus aggregatus ex h & q . Nam maior est f quam g , igitur fractio $2/d$ maior est minutia a/b , & addit super eam minutiam q/d , ex secunda parte primæ partis præsentis propositionis, igitur minutiae a/b & q/d ualent minutiam $2/d$, sed minutiae $2/d$ & h/d ualent minutiam c/d , igitur minutiam c/d ualent tres minutiae, scilicet a/b & q/d & h/d . Ex hoc patet, qd' proponit tertia secundæ partis huius 20. Si autem uis scire de minutis, quarū denominans unius denominantem alterius non totum consumit, siue numerans numerantem sufficienter diuidat siue non. Si inquā de talibus minutis scire uis quid una super alteram addat, comodissime hoc scies, quantum ad præsens artificium, reducendo minutias ad eandem denominationem, tunc enim siue numerans sufficienter numeret siue nō numerantem, inuenies quod quæreris per aliquam partium præsentis propositionis.

XXI.

Integra integris minutialiter diuidere.

Sit numerus integrorum diuidendorū b , diuisor a . Si sunt æquales, non est operationis opus. Si inæquales, sit primo b minor, faciam igitur minutiam quam numeret b , & denominet a . Dico ergo, qd' in hac operatione exit minutia b/a unius integri. Hic enim solum agitur de integris unius manerici ualoris & quantitatis, hæc enim ita se habet ad integrum sicut b ad a , ex prima huius. Si uero b sit maior, tunc si est multiplex, patet ex regula integrorum. Si uero quid remanserit, cum illo facias ut docet prima pars huius præsentis probationis. Ex ijs iam scis quotūq; datos panes quotlibet pauperibus ex æquo diuidere.

XXII.

Subtiliores minutias in grossiores reducere.

Quanto denominatio maior, tanto minutia subtilior & minor. Sit data minutia a/b . Si numeria a & b sunt cōtra se primi, data minutia non numeratur & denominatur à minoribus.

F ij Naso

2	h		
c		a	f
d		b	g
b			
2	h	q	
c		a	f
b			k

Nam si id fieri posset, denominet eam d minor b, & numeret
 eam c minor a. Igitur a b & minutia c d, & mediante prima a
 $\frac{a}{b}$ ad b sicut c ad d, igitur a & b non sunt in sua proportione mi-
 nimi, sed ipsi sunt ad numerū primi ex positione, igitur ex 22.
 septimi Euclidis sunt in sua proportione minimi, contrariū au-
 $\frac{a}{b}$ tem prius intuli. Si uero sunt communicantes, fieri potest qđ
 debet. Scies autem per primam septimi an sint communican-
 tes uel primi. Inuenies igitur per primā septimi maximū am-
 bos numerantem qui sit c. Diuiso a per c exeat d, & b per c exe-
 at f. Dico qđ minutia df est minutia a b, patet ex sexta huius.

XXIII.

Datam minutiam à dato numero denominare cum fieri poterit.

Sit data minutia a b, numerus datus d, duc a in d, si produc-
 tum sufficienter diuiditur per b, exeat c, quem pono pro nu-
 merante minutiam c d. Dico qđ minutia cd est minutia a b, pa-
 tet ex 19. septimi Euclidis & sexta huius. Si uero productū ex
 $\frac{a}{b}$ a in d non sufficienter diuiditur per b, impossibile est a b mi-
 nutiam reduci ad denominationem d numeri. Fiat enim si po-
 test, & sit k d æqualis a b minutiae datæ, igitur a ad b sicut k ad
 $\frac{a}{b}$ d, igitur quod sit ex a in d est multiplex ad b, & sic sufficienter
 diuidi potest per b cuius contrarium erat positum. Habes igi-
 tur propositum si habere potest.

XXIII.

Si numero numerante datam minutiam du-
 cito in datam denominationem, numerus pro-
 cedens maior quidem est qđ denominatio da-
 $\frac{2}{3} \frac{4}{7} 3 14$ tæ minutiae, sed non est sufficienter per eam
 diuissibilis, data minutia æqualis est duabus
 habentibus datam denominationē, si una ea-
 rum denominetur portio primi integri, & nu-
 meretur à numero exeunte in diuisione, reli-
 qua numeretur à numero in diuisione super-
 fluo, & denominetur portio partis primæ in-
 tegri denominatæ à numero, qui datam minu-
 tiam denominat.

Sic

Sit data minutia a b, data denominatio d, ducto a in d faciat h maior b, quo diuiso per b, exeat c, & remaneat z. Dico, q̄ minutia a b ualent minutiam cd portio integri, & minutiam zd portio unius b sumptā. Ex a enim in b fiat k, igitur kh minutia & hd minutia sunt æquales. Sed si b integris diuidere in hd minutiam secundum modum operandi, qui ostenditur in 20. præsentis, cuilibet unitati b cederet cd & zd unius b, eo q̄ h diuiso per b, exit c, & remanet z. Si uero kb minutiam secundum eundem modum diuidere in b integris, cuilibet unitati b cederet ab, quia k diuiso per b, exit a, igitur sic se habent cd & zd unius b ad hd, sicut ab ad kb, igitur cum hd & kb sunt æquales, sequitur ut ab ualeat cd, & zd unius b minutias.

XXV.

Si autem numerus ex multiplicatione productus minor est denominazione datæ fracti onis, data minutia æqualis est minutiae numeratae à numero per multiplicationem produceto, & à numero denominante datam minutiam denominatae portio unius partis, quā data denominatio portio unius integri denoīat.

Data minutia sit ab, denominatio data sit d, ex a in d fiat zd minor b. Dico, q̄ minutia ab unius integri ualeat minutiam zd b unius d. Ducatur enim d in b & fiat q, igitur ex 13. huius zd b unius d est zd q unius integri, sed d in a facit z, & d in b facit q, igitur ex sexta, ab est æqualis ab unius d.

XXVI.

Modum philosophice diuidendi per tra ētare.

Reduc primo tam summam diuidendam q̄ diuisuram ad ultimas generis sui minutias. Et si diuidenda propinquior es set integro q̄ diuisor, facut ad minus tantum distet ab integro sicut diuidens, uel q̄ diuidens propinquior sit integro q̄ diuidenda, tunc diuide numerantem diuidendæ per numerantē diuisoris. Et si primo, q̄ totum eum consumat, exiens ergo erit numerator minutiarum phisicæ tantum distantis ab integro, quantum diuisa à diuidente. Si uero superfluit aliquid, deducatur ante diuisionem ad minutiam subtiliorem, ut uidelicet numerans diuidendæ tam multus fiat, ut per numerantem diuisoris sufficienter diuidi possit. Et si tunc aliquid remanet, non

F iij cure

$$\frac{k}{\frac{a}{b} \frac{c}{d} \frac{z}{h}}$$

$$\frac{3}{10} \frac{z}{5}$$

$$\frac{a}{b} \frac{z}{q}$$

curetur propter minutiae exilitatem, insensibilē enim facit errorē omisso paucorum decimorum. Ratio est in euidentiā contrario multiplicationis, ut per a minuta dividendo c quarta, exeat b. Dico, q̄ in diuisione exeunt b tertia, locus enim tertiorum distat ab integris per duo loca interposita, sicut locus quartorum à minutis. Si enim multiplicarem a minuta per b tertia, procedet c quarta, sicut patet ex operatione multiplicationis, igitur quae est proportio c quartorum ad a minuta, ea est b tertiorum ad integrum, igitur ex diuisione c quartorū per a minuta, exeunt b tertia, quod uolui probare.

XXVII.

Si fuerint minutiae ab integro continue proportionales, tertia ab integro quadrata erit, & deinceps quaelibet sequens una intermissa. Itemq; quarta ab integro cubica erit, & quaelibet sequens duabus intermissis.

Integrum

a
b
c
d
g
h

f

Sit ut quae est proportio integri ad a minutiam, ea sit a minutiae ad b minutiam, & huius ad c, item cuius c add d. Dico q̄ tam b tertia ab integro q̄d quinta ab ipso quadrata est. Duatur enim a in se, & fiat f, quae quadrata erit, & oportet integri ad a proportio sit ut a ad f, igitur f est b, & per consequēs b quadrata. Item quae integri ad a, ea b ad c, & quae a ad b, ea c add, igitur integri ad b, ea b ad d. Ex hoc sequitur, ut modo d quadratum esse, & si habes primam propositi partem. Item dico minutiam c cubicam esse. Et si adiunxero adhuc duas g & h minutias in continua proportionē, dico h esse cubicam. Nam c ad b sicut a ad integrū, igitur quod sit ex integro in c, est aequale ei quod sit ex a in b, radicis in suam quadratum, utrobicq; autem sit c, igitur c cubicā est. Item quae integri ad b, ea d ad h, igitur ex ductu b in d sit h, sed b est radix minutiae d. Ex hoc habes utrancq; propositi partem.

XXVIII.

Datam minutiam quadrare, & quom fieri hoc non possit ostendere. Itemq; datam minutiam ad cubicos numeros reducere, uel quom possibile non sit, hoc fieri demonstrare.

Quadrare minutiam, est assignare ei numeros quadratos, quibus numeretur & denominetur. Sit autem data minutia c d, uide si inter numerantem & denominatē cadat numerus

medio

in medio loco proportionalis, scilicet multiplicando c in d, & producti extrahendo radicem. Sit itaque productum numerus quadratus, eius radix f, faciam igitur minutiam quam numeret f, & denominet d, igitur ex secunda c ad f sicut minutia c d ad minutiam f d, & item f ad d, sicut minutia f d ad integrum ex prima huius, igitur minutia f d est radix minutiae c d. Ducam igitur f in se & fiat h, & d in se & fiat x, igitur minutia h x se habet ad minutiam f d, sicut ipsa minutia f d se habet ad integrum, igitur c d est h x, & sic habes propositum. Vel sic comodius inueni per 33. septimi, tres numeros minimos in proportione c f & d, & sint h 2 & q, ergo ex correlario secundo 8. per quam est hoc inueniendum, h q sunt quadrati, igitur minutia c d quadratur in numeris h q, est enim eorum eadem proportio. Si uero inter numerantem & denominantem datae minutiae nullus cadit numerus medio loco proportionalis, dico datam minutiam quadrari non posse. Sit enim ut inter c & d nullus sit numerus medio loco proportionalis, & dicatur ab aduersario c d minutiam quadrari posse, sit igitur h numerus quadratus numerans, & uero quadratus denominans. Patet autem ex correlario 2. noni Euclidis, quod h in 2 multiplicatus quadratum producit, erit igitur inter h & 2 numerus medio loco proportionalis, sed minutia h 2 est minutia c d, igitur iuxta conuersam sextae huius c ad d sicut h ad 2, & quia inter h & 2 cadit medio loco proportionalis, necesse erit per 8. octauum etiam inter c & d numerum medio loco proportionalem intercidere. At iam erat propositum contrarium. Item si uis ad formam cubicam reducere datam minutiam. Si inter numerantem & denominantem datae minutiae sint duo numeri in proportionalitate continua, minutia cubicatur in primo & quarto numerorum illius proportionatis minimorum. Si non duo, minutia non est cubica, nec potest cubicari. An autem duo sint, sic scies. Sit data minutia a d, per 33. septimi, minimi eiusdem proportionis numeri sint f & g. Si igitur f & g non sunt ambo cubicæ, non cadent inter eos duo numeri continue proportionales, ut dicit correlarius 2. octauus Euclidis. Si uero sint ambo cubici, necesse est inter eos duos medio loco proportionales reperiri, & sic ex 8. octauo etiam inter a & d rotidem cadent. Eos autem qui cadent inter f & g, sic inuenies. Radix f sit t, cuius quadratus sit 2. Radix g sit s, cuius quadratus sit q, s in 2 faciat h, t in q faciat x, dico f h x g esse continuo proportionales. Nam t in 2 facit f, & s in 2 facit h, igitur f ad h sicut t ad s. Item t in q facit x, & s in q g, igitur x ad g sicut t ad s, igitur f ad h sicut x ad g. Item t in 2 facit f, t in q facit x, igitur 2 ad q sicut f ad x, sed 2 ad q est sicut proportio t ad s duplicata, igitur f ad x est sicut t ad s duplicata, & per consequens

c f h
d x

c h
d h

f h x g
2 q
t s
a d

f h x g
k
a b c d

sequens sicut f ad h duplicita, igitur f ad h sicut h ad x. Eos autem qui cadunt inter a & d inuenies, ut dicam, propter 20. secundum primi Euclidis, quia f & g minimi sunt in sua proportione, & in eadem sunt a & d, oportet ut f numeret a & g, d, secundum eundem numerum, qui sit k, k itaque in h faciat b, & in x faciat c eritque f ad h sicut a ad b, & h ad x ut b ad c, x ad g ut cad d, quae etiam multiplicantium & submultiplicantium eadem est proportio. Habet ergo hoc, sed eo fortasse non multum indiges, ut igitur ad propositum ueniam. Si uis minutiam datam ad cubicos numeros reducere, uide secundum artificium, qd prima septimi ponit, utrum a & d sint contra se primi, si sic, tunc ex 21. septimi, erunt in sua proportione minimi, tunc si uterque est cubus, habes propositum, si alter non, laboras in uanum. Si uero non sint minimi in sua proportione eisdem inuentis, si uterque est cubicus, fac unum numerantem, alterum denominantem, & habes propositum ex sexta huius. Si autem alter non est cubicus, nihil proficis, non est enim cubica, nec potest ad cubicam reduci. Aut si potest, reducatur & numeret eam h, & de nominet q, ambo cubici, sed inter h & q sunt duo in continua proportionate, igitur etiam inter a & d, igitur inuentis minimis huius propositi, erunt extremitati cubici, cuius contrarium iam positum est.

XXIX.

Si minutia phisica imparis loci numeratur a quadrato numero, ipsa est quadrata. Quod si minutia quarti loci, vel cuiuslibet sequentis duobus deinceps locis semper omissis numerantem habet cubicum, cubica est. Procreatis enim per multiplicationem vulgaribus denominatiōibus ex phisica, necesse est in locis imparibus quadratas in quartis denominatiōes cubicas inueniri.

Sit minutia phisica imparis loci quam numeret a numerus quadratus, dico eam esse quadratā. Radix enim numeria sit b, & ponatur, qd b numeret minutiam intermedium inter locum a & integrum, ergo cum ex ductu b in se fiat a, oportet propter 14. huius, ut minutia phisica quam numerat b, sit medio loco proportionalis inter minutiam phisicam quam numerat a & integrū, ergo ex ductu minutiae phisicæ quam numerat b in se

$$\frac{a}{d} \quad \frac{h}{q}$$

In seipsum, sit minutia phisica quam numerat a, ergo minutia phisica quam numerata, quadrata est. Item sit ut f numeret minutiam phisicam in quarto loco ab integris, g numeret minutiam phisicam in quarto loco à quarto, hoc est septimo ab integris, & h numeret minutiam phisicam in decimo loco ab integris, qui erit quartus à loco septimo, & sint f g h numeri cubicci. Dico ipsas minutias physicas esse cubicas. Nam ex 13. patet q̄ denominatio quarti loci respectu integrorum est numerus bis in se multiplicatus, & sic erit cubicus, & cū numerator etiā sit cubicus, habetur propositum. q̄ minutia phisica quam numerat f cubus & denominat quartus locus ab integro, est cubica. Item propter æqualem distantiam minutia phisica quā numerat g, & denominat locus sextus denominabitur respectu integrī numero cubico. Nā unū sextum ad unū tertium sicut unū tertium ad integrum. Et sic denominatio unius tertij respectu integrī in se ducta facit denominationē unius sexti respectu integrī. Cubus autē in se facit cubū. Item denominatio unius noni respectu integrī prouenit ex denominatione unius tertij respectu integrī in denominationē unius sexti respectu integrī. & nisi illi sint cubici numeri, sequit q̄ etiā ipsa erit cubica. Et sic probatur totum propositum.

XXX.

Datam minutiam siue ad quadratā siue ad cubicam malueris denominationē reducere.

Data minutia sit a b, cui uelut primo inuenire quadratam denominationē. Ducā b in se & fiat d, ducam quoq; a in b, & fiat c d, patet propositū ex sexta huius. Cubicam autē sic, b in se facit d, deinde b in d faciat 2, & a in d faciat t, & sic habes iterū propositum ex sexta huius.

XXXI.

Radicem minutiae uulgaris extrahere.

Primo de quadrata. Vide primū, si minutia data quadrabilis sit, si sic, reduc ergo ad quadratū secundū artificiū 25. & inuenias radicē tam numeratoris q̄ denominatoris, & factū est. Si uero nō est quadrabilis, ergo nō est quadrata, nō potes igitur habere radicē ueram. Sed facies ut sit in numeris inueniendo radicem cuiusdā minoris minutiae quadratae. Sic reducē do datā minutia ad denominationē quadratā, & eius denominationis radicē fac denominationē radicis, & radicem quadrati sub numeratore maximi, fac numeratorē radicis. Fac igitur semper, q̄ denominatio si nō est quadrata, reducetur ad quadratam, alias si uelles in numeris ambobus nō quadratis

G quæ

Integrum
Minu:
2:
3
4:
5:
6:
7:
8:
9:
10:

a	c
b	d
a	e
b	z

quærere, peccares contra id, scilicet, q̄ radix in se ducto cū su-
perfluo iuncta nō constitueret suū quadratum siue numerum
pri no datum, ut si de 8 duodecimis quæreres radicē, & inue-
nires duas tertias, & superfluent aut 4. 1 2 mæ, aut 4. tertiae, quæ
iunctæ cū duabus tertījs, in se multiplicatis nō constituunt 8.
1 2 mas, sed plus. De cubica similiter est agendū. Si enim cubi-
cos numeros potest reduci fiat, & facile est. Si nō, nō est cubi-
ca. Detur tamen ei denominatio cubica, & post inuenietur ra-
dix cubica, minutiae minoris in proposita contenta, cui si ad-
detur illud residuum, probabis operationem bene uel male
factam esse.

XXXII.

Philosophicarum minutiarum radicem in uestigare.

In quadrata reduce eas primum ad locum imparem, & tū
radicem numerantis uel uicinioris sub eo pone in locū medi-
um inter minutiam & integrum. Ut sint a quarta radicem nu-
meri a reperio, & sit b. & sit primototus a consumptus. Dico
b secundā esse radicem a quartorum. Denominet enim 2 nu-
merus b secunda respectu integrorum, ergo idem denominabit
a quarta respectu 20R, igitur 2 in se ductus producit, igitur 2
numerus est radix denominationis quadratæ quam habent a
quarta respectu integrorum, sed b est radix a numerantis, igitur
b 2 minutia est radix a 4tor. Sit modo ut a nō totus consum-
ptus sit, sic b nō erit uera radix a, cōsummat itaq; q de a, & re-
linquat s. Dico q b secunda est radix q quartorum. hoc de se pa-
tet. Si supersunt s quarta, quæ addita q quartis, prouenient a
quarta. In cubica uero radice reperienda. postq; eas reduxeris
ad aliquem 4tor locorum, ut ad 3, uel 6 uel nona &c. quære radi-
cem cubicam numerantis, ubi autem postea sit radix cognosces
ex ante præmissa. Inter quælibet enim quartorum locorum &
integra, duo sunt loca sic se habentia in positione, q ab integro
rum loco ad alterum illorum & ab eo ad reliquum, & ab
illo item ad datum locum una & eadem est distantia. In eo er-
go illorum duorum qui integris propior est ponas radicem. Ratio
patens est ex præmissis.

XXXIII.

Omnium duorum quadratorū proximo- rum maior supra minorem addit numerum q ex ambo rū radicibus aggregatis cōponit.

Sint a & b duo proximi, 2 radix a, x radix b, oportet ut x
maior

maior sit $\sqrt{2}$ unitate. Ex x igitur in se, tantum est sicut $\sqrt{2}$ in se & unitate in se & unitate in $\sqrt{2}$ bis. Sed ex $\sqrt{2}$ in se prouenit a, b igitur est maius a in eo quod prouenit ex unitate in se & unitate in $\sqrt{2}$ bis, & hoc est æqualiter $\sqrt{2}$ & x, igitur b excedit a in $\sqrt{2}$ & x.

XXXIII.

Omnis cubus addit super proximum minorem cubum numerū congregatum ex quadratis amborū & numero facto ex ductu radicis unius in radicem alterius.

Sint cubi maior x, eius radix b, & quadratus c minor $\sqrt{2}$, eius radix a, quadratus d, a in b producat s, dico x esse æqualem $\sqrt{2}$ d scilicet c. Nam x prouenit ex a & unitate in c, unitas autem in c facit c, sed a in c facit $\sqrt{2}$ d & s. Quia a in c ex 37. præceptis tantum facit sicut b in a, & in productum, sed b in a facit s, igitur a in c tantum facit sicut b in s, b autem in s sicut a & unitas in s, unitas autem in s facit s. Sed a in s tantum sicut a in b & in productū, hoc est tantum sicut a in a & unitatem, & in productum, sed ducendo a in unitatem & in productum, prouenit d, & ducendo a in a & in productum, exit $\sqrt{2}$. Collige omnia, & habebis propositum.

$\sqrt{2}$
d - s c
a b

XXXV.

Si quadratus in non quadratum ducatur, & addat non quadratus super maximum suum quadratum non minus radice ipsius, producitur ex multiplicatione numerus non quadratus, habens quadratum maiorem eo quadrato, qui fit ex primo quadrato in maximū prioris non quadrati quadratum multiplicato. Si uero non quadratus addit super maximum suum quadratum minus radice ipsius, tunc si quidam quadratus in non quadratum ducatur, & deinde in productum, itemque in productum, & huiusmodi multiplicationes totiens fiant, quotiens excessus non quadrati super suum

G ij maximū

maximum quadratum continet radicem eius,
 & adhuc semel necesse est, ut ad minus in ultima multiplicatione producatur non quadratus, cuius maximus quadratus maior sit eo, qui fit ex ductu primi quadrati in maximum quadratum non quadrati ex penultima multiplicatione producti.

<u>a</u>	<u>s</u>	<u>h</u>	<u>k</u>	<u>q</u>
<u>m</u>		<u>t</u>	<u>c</u>	
			<u>2</u>	
<u>v</u>				
<u>l</u>	<u>w</u>	<u>o</u>		
<u>r</u>	<u>y</u>			
<u>p</u>	<u>g</u>	<u>o</u>		
<u>n</u>	<u>f</u>	<u>e</u>		
<u>l</u>	<u>q</u>	<u>d</u>		
<u>a</u>	<u>b</u>	<u>s</u>		
<u>m</u>		<u>t</u>	<u>c</u>	<u>2</u>

Pars prior instantiam habet tantum in quaternario. In omnibus enim maioribus quadratis ad huiusmodi multiplicacionem assumptis, necessarium est quod dicitur. Verbi gratia. Sit a datus quadratus, b numerus non quadratus, in quo maximus quadratus sit c, habens radicem 2, b autem excedat c in t non minori q̄ 2. Ex ductu a in b fiat q, ex a in t pars q, quae sit h, ex a in c necesse erit reliquam partē q produci quae sit k, qui quadratus erit. Dico igitur, q̄ in q numero maior est quadratus q̄ numerus k, si saltem a non est quaternarius. Sit enim m radix ipsius a, radix ipsius k sit s, quam necesse est produci ex m in 2, & esse medio loco proportionalem inter a & c. Fit igitur ex m in 2 s numerus, sed ex a in t fit h, cum ergo t nō sit minus numero 2, & a sit ad min⁹ triplus ad m, oportet ut h sit ad minus triplus ad s, igitur q addit super k plus numero qui colligitur ex radice s, & radice proximo maiori, habet itaq; q numerus maiorem quadratum numero k ex 30. Habet itaq; propositum, si a non est quaternarius, unde si a esset quaternarius, & t æqualis 2, tunc ex a in t fit duplum ad s, unde q non addet supra k numerū duplū s, sed quadratus proximo maior k, addit supra eum duplū s & unitatem. Si ergo a est quaternarius, & t æqualis 2, tunc multiplicato a in q, procedet numerus non quadratus, habent k maiorem quadratum. Si autem t sit una unitate maius 2, proueniet propositum, siue a sit quadratus quaternarius, siue major, ut patet attendenti. Hæc est ergo prior pars propositionis huius. Sit uero ut t numerus minor sit numero 2, sit autem ad t numerum 2 sextuplus. Ducatur a in t c, & fiat h k, in hunc ductus a, producat f g, in hunc etiam ducatur, & fiat θ e. Item in hunc & procedat ♂ o, in quā etiā ductus a, faciat l w o, & in hūc multiplicatus procreet Q. Sit uero g quadratus productus ex a in k, e ex a in g, o ex a in e, o ex a in o, & autem sit quadratus ex a in o, oportet igitur ut ex a in t producatur h, ex a in h fiat f, ex a in f fiat θ, ex a in θ fiat ♂, & ex a in ♂ fiat l w, & ex a in l w fiat Q. Dico era go, q̄

go; qd ad minus in numero Q A est quadratus maior quadra-
to A, imo ante occurret quod quero. Quia enim ex a in c fit k,
necessum est ex m in 2 fieri s, fiat autem ex a in 2, erit ad a m sicut l
ad s, sed a ad m duplus est ad minus, igitur l ad s ad minus du-
plus erit. Item a in 2 facit l, & a in t facit h, erit 2 ad t sicut l ad h,
sed 2 ad t est sextuplus, igitur l ad h erit sextuplus. Est itaque l ad
h sextuplus, & ad minus duplus ad s, igitur s ad h est ad maius
triplus. Item ex a in k fit g, igitur ex ductu m radicis a, in s radi-
cem k, surgit radix g, quae sit d. Ex a in s fiat n, unde a in s facit n
& m in s facit d, ergo n ad d sicut a ad m, ergo erit n ad d du-
plus ad min. Et quia a in s facit n, & a in h facit f, ergo s ad h si-
cut n ad f, ideo n ad f erit ad maius triplus, & ipse est ad d ad
minus duplus, ergo d ad f erit ad maius sesqualter. Ad hunc
modum uideri potest p, quod fit ex a in d, duplum sit ad x ra-
dicem quadratice, & qd idem numerus p est ad maius sesquals-
ter ad b numerum, quare sequitur, qd b numerus numero x
fit maior, quia b ad x est sesquitertius. Iuxta prorūc igitur hu-
ius partem numerus b e maiorem habet quadratum quadra-
to e. Habet igitur in tertia multiplicatione, quod id tardius in
sexta futurum promiseram. Unde uidere potes, qd quamuis t
contineatur a numero non omnino sexies, sed quinquies, & ali-
quantulum plus, proueniet tamen ad tardius in quinta multipli-
catione, ut numerus productus habeat quadratum maiorem
quadrato, qui fit ex a in maximum quadratum numeri ex 4.
multiplicatione procreati. Si uero, quod tamen non credo, in
quinta multiplicatione hoc non occurreret, ultra sextam pro-
positum morari non posset, transfer ergo ad numeros quod
in literis dicitur, & uidebis quod dico rectum esse.

XXXVI.

Si duo proximi quadrati & numerus fa-
ctus ex ductu radicis in radicem congregen-
tur in unum numerum, numerus totalis una
unitate habudabit super triplum numeri pro-
ducti ex radice in radicem multiplicata.

Sint a & b duæ proximæ radices, b maior in unitate qd a, c
quadratus numeri a, d quadratus numeri b, a in b faciat h. di-
co c d & h in unum aggregati esse triplo h maius in unitate. Na-
ex 30. d constat ex c a & b, ergo constat ex c & a bis & unitate,
adiecto ergo utrinque c, d c constabunt ex c bis & a bis & unita-
te, sed c bis prouenit ex duplo a in a, & a bis prouenit ex du-
plo a in unitatem, ergo c bis & a bis prouenit ex duplo a in b,

G ij fed a

c d
h b

sed a in b facit h, igitur c bis & a bis est duplum ad h, ergo c bis & a bis et h est triplum ad h, sed d & c ualēt c bis & a bis & unitatē, igitur d & c & h habundant super triplo ad h in unitate.

XXXVII.

Si duorum numerorum alter in alterū multiplicetur, & quidam tertius in productum, fit et numerus æqualis ei qui producitur, altero duorum multiplicato in totum multiplicantē reliqui quot sunt unitates in tertio.

$$\begin{array}{r} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{4} \\ \frac{c}{5} \\ \hline \frac{h}{15} \end{array}$$

Sint tres numeri a b et c, et ex a in b fiat d, c in d faciat h. Sicut q̄ 2 multiplex ad a, ita q̄ a numeret 2 secundum c numerum. Dico q̄ etiam b in 2 producat h. Nam h ad d sicut c ad unitatem, et c ad unitatem ita 2 ad a, unde 2 ad a sicut h ad d, a autem ad unitatem sicut d ad b, igitur sicut 2 ad unitatem ita h ad b, igitur quod fit ex b in 2 est æquale ei quod fit ex unitate in h, ergo b in 2 producit h.

XXXVIII.

Oportet ut una radice in alteram multiplicata, procedat radix cubi, qui producitur cubis illarum radicum altero in alterum multiplicatis.

$$\begin{array}{r} \frac{a}{b} \\ \frac{c}{\overline{\text{Unitas}}} \\ \hline \frac{q}{x} \end{array}$$

Ex a cubo in 2 cubum procedat q, qui cubus erit ex 3 . et 4. noni Euclidis. Ex c radice a cubi in t radicem 2 cubi proueniat x, dico q̄ x est radix cubi q. Si em̄ nō det ei⁹ radix et sit h, b uero sit quadrat⁹ c radicis cubi a. Est igit̄ q ad 2 sicut a ad unitatē & b ad c sicut cad unū, & a ad b, sicut c ad unū. Ideo pportio q ad 2 est sicut c ad unitatē triplicata, sed c ad unū sicut x ad c, igit̄ tur pportio q ad 2 est pportio x ad t triplicata, sed eadem est pportio h ad t triplicata, ex 11. Octauī Euclidis, igit̄ h est x.

XXXIX.

Si trium cuborum primus non est octonarius, & ductus in secundum producit tertium, tunc si quadratus primi cubi non est minor radice tertij, idem primus ductus in numerum constantem ex cubo secundo & quodam numero habundante super radicem tertij ad minus bi

nus binario, producit numerū in quo est maior cubus eo, qui ex primo in secundum producitur.

Sit ut c cubus cuius quadratus b, radix a ducatur in q cubū cuius radix x, & exeat g cubus, cuius radix k, fit igitur k ex a in x. Sit etiā ut 2 numerus excedat k ad minus binario, & b quadratus primi non sit minor k numero, tunc ex c in 2 q fiat f g. Dico in numero f g maiorem numerū cubicum esse q̄ sit cubicus g. Ponam enim ut h sit triplus k, & proxima radix post k sit m. Cum itaq; c cubus sit maior octonario, erit a non minus ternario, sed b non est minus k, igitur c non est minus h. Si autem ei quod fit k multiplico in m, & ternario in productū addatur unitas, fiet summa qua g cubi exceditur à proximo maiori cubo, sicut patet ex 31. & 33. huius, ergo per 34. huius, si ei quod fit ex h in m addatur unitas, fiet summa qua idem g cubus superatur à proximo superiori cubo. Sed 2 ad minus una unitate excedit m, & c nō est minus h, igit̄ plusq; illa summa fit ex c in 2, igitur f est plusq; illa summa, igitur in numero f g est maior cubus q̄ sit cubus g, hoc aut̄ fuit ostendendū.

X L.

Si uero quomodo libet aliter res se habuerint, necesse est, ut nihilominus cubo in cubū & aliquid multiplicato, & deinde in productum, & si calquatiens, necesse est inquā, ut in numero ex ultima multiplicatione producto ad minus sit cubus maior eo, qui fit ex primo cubo in cubum maximum illius numeri, qui ex penultima multiplicatione procreatur.

Sit primo, ut maneant omnia praedicta, hoc solo dempto, quod dictum est, scilicet c non esse octonarius. Sit autem c octonarius. Contingere ergo potest, q̄ f g non contineat maiorem cubum q̄ g, ut si b sit æqualis k, & numerus 2 tantum unitate excedat numerum m, tunc namq; c duplum erit ad b, sic etiam duplum ad k, h autem triplum ad k, c igitur minus est h tertia sui parte, sed sola unitate 2 uincit m, ergo c in 2 facit minus q̄ h in m, ex quo sequitur inf g, g esse maximum cubum, sed tūc si ex

$$\begin{array}{r} \frac{2}{c} \frac{q}{b} \\ \frac{q}{a} \frac{g}{x} \\ \hline \frac{f}{h} \frac{g}{m} \end{array}$$

<u>p</u>	<u>s</u>	<u>y</u>
<u>1</u>	<u>t</u>	<u>d</u>
<u>2</u>	<u>q</u>	<u>f</u>
<u>c</u>	<u>q</u>	<u>g</u>
<u>b</u>	<u>h</u>	
<u>a</u>	<u>x</u>	<u>k</u>
		<u>m</u>

<u>w</u>	<u>X</u>	<u>Δ</u>
<u>φ</u>		<u>μ</u>
<u>y</u>	<u>ω</u>	
<u>δ</u>	<u>x</u>	<u>γ</u>
<u>r</u>	<u>w</u>	<u>n</u>
<u>e</u>	<u>p</u>	<u>m</u>
<u>d</u>	<u>s</u>	<u>β</u>

<u>8</u>	<u>c</u>	<u>b</u>	<u>q</u>	<u>f</u>	<u>g</u>	<u>t</u>
<u>4</u>	<u>b</u>			<u>h</u>		
<u>2</u>	<u>a</u>	<u>x</u>		<u>k</u>		

si ex c in f fiat p, & ex c in g fiat s, necesse est in numero p s esse maiorem cubum cubo s. Sit enim t radix cubi s, triplus t sit l, proxima maior radix sit d, sit igitur t ex a m k, igitur t est duplum ad k, eo qd a est binarius, ergo etiam ad b, igitur t est aequalis c, ergo l est triplus ad c, sed ex c in 2 sit f, ergo f est octuplus ad 2, eo qd c est 8, igitur f est plusq; octoplus ad k, igitur plus qd quadruplus ad t, ergo plusq; quadruplus ad c, sed c in f producit p, est ergo p octuplus ad f, & f est plusq; quadruplus ad c, ergo p continet c plusq; tricesies bis, sed sola unitate excedit c numerus à numero d, igitur d continetur a p plusq; uigesies octies. Item l est triplum ad t, t autem octuplum ad unitatem, unde l uigesies quater continet unitatem, sed ex ductu l in d fiat y, igitur y continet 24. d numerum, igitur maior est p numerus numero y, & addit super ipsum plus unitate, ergo in numero p s est maior cubus numero s, & hoc uolui ostendere.

Sit autem ut k radix sit quadrupla ad numerum b, & sit pro libito sedecupla ad numerum 2, & fiat ex c in f numerus d, ex c in g numerus s, cuius radix t. Item ex c in d procedat x, ex c in s fiat p, cuius radix β. sic ergo ad b duplus est ad minus c. Sit uero duplus, hoc est, sit c octonarius, igitur a est binarius, sed ex a in k sit t, eo qd ex c in g fiat s, ergo t est duplus ad k, ergo est quadruplus ad f, qd sic infertur, quia k est sedecuplus ad 2, & f ex c in 2 factus est octuplus ad 2, igitur k est duplus ad f, ergo t qui est duplus ad k, est quadruplus ad f, sed ex c in f fiat d, ergo d est octuplus ad f, igitur d est duplus ad t. Sed β fit ex a in t, igitur β est duplus ad t, ergo d & β sunt aequales. Fiat ade huic ex c in e numerus r, & ex c in p numerus w, cuius radix sit m. Est igitur e ad d octuplus, igitur etiam ad β, sed m est duplus ad β, igitur e est quadruplus ad m, igitur r, qui est octuplus ad e, erit trigintaplusduplus ad m. Multiplicetur iterum c in r, & fiat δ, & in w, & fiat x, cuius radix sit n. Est ergo n duplus ad m, igitur r continet n sedecies, sed δ est octuplus ad r, igitur δ continet n centies uigesies octies, quia ex s in 15 fiunt 128. Tene ergo hoc. Item k est duplum ad c, quia quadruplum ad b, ergo t quater continet c, igitur β octies, m sedecies & per consequens n continet c tricesies bis. Procedam iterum ex c in δ fiat y, & ex c in x fiat ω, cuius radix sit γ, igitur y continet δ octies, sed ex s in 128. proueniunt 1024. igitur y continet n millies uigesies quater. γ autem duplus est ad n, igitur continetur in γ quingenties duodecies, continet autem numerus γ sexagesies quater ipsum c. Item ex c in y fiat s, & ex c in ω fiat φ, cuius radix i. Continet ergo numerus s numerum γ octies, sed octies s 12 faciunt 4096. Igitur in s est γ numerus secundum 4096. igitur secundum eius dimidium, scilicet

2048.

2048. continet & numerus numerum. . Numerus uero. i. cōtinet c cubum secundum 128. Item ex c in & fiat ω , & ex ω in ϕ fiat X, cuius radix sit ω . Continet igitur & numerus numerū ω milies uigesies quater, quia ω est duplus ad. 1. Cubus uero c continetur in numero ω secundum 256. Sit autem Δ triplus ad ω , igitur & numerus continet Δ plusq; trecenties quadragesies, quia diuidendo 1024 per 3. exeunt 341. & $\frac{1}{4}$. Item sit μ , p̄xima radix post ω , excedens eam unitate, nota itaq; continet μ numerum c ducenties quinquagesies septies, quia excedit ω solum unitate, & ω continet c ducenties quinquagesies sexies. Pluries ergo continet & numerus numerum Δ q̄ numerus μ numerum c. Maior est ergo proportio & ad Δ q̄ sit μ ad c, igitur necesse est ex & in c plus fieri q̄ ex Δ in μ . Similiter necesse est plus fieri ex & in c q̄ ex Δ in ω , qui minor est unitate q̄ μ . Ex hoc infer igitur, q̄ in numero ω X est cubus, maior X cubo, & ita habes quod uoluisti. Vides igitur q̄ posito octonario, qui minimus est cuborum, puenit tandem propositum, multo citius proueniet posito maiori cubo. Ad hunc itaq; modum negocianti necesse est, & si non statim alium tantū quod quærerit occurrere.

XLI.

In minutījs radicem non habentibus, non potest radix non uera tam propinque inueniri, ut propinquius haberī non possit, siue quadratæ siue cubicæ fractionis radicem quarere sit propositum.

Hæc est propter quam præmissæ sunt 30. & eam hucusq; sequentes. Ut ergo primo agam de phisicis minutījs, & primū de radice quadrata. Sit data minutia $\frac{a}{g}$ quæ non possit quadrari, sed sit b eius denominans qua $\frac{b}{b}$ dratus, hoc enim in omni minutia haberī potest, numerus uero a g, qui est nominans, nō sit quadratus. Sit item denominatio phisica 2, ex quo quidem numero 2 multiplicato in se & in productū, & item in illud, & sic deinceps quotiens opus est, productus sit b numerus in aliquo imparium locorum, sicut oportet occurrs. Occurrat autem in quinto, ubi est locus quartorum. Sunt igitur $\frac{a}{g}$ unius integri, $\frac{a}{g}$ unius tertij. Huius minutiae, scilices $\frac{a}{g}$ q̄ra $\frac{b}{b}$ tur radix, & in $\frac{2}{2}$ uenta radice huius numerantis a g $\frac{b}{b}$ quanto uerius fieri potest, sit ipsa numerus s, qui in se ductus, consumat g de a g. Item radix b numeri quadrati sit t numerus, est igitur s $\frac{s}{t}$ uera radix minutiae $\frac{g}{b}$ uere quadratæ. Dico

H. q̄ mi

Locus in
tegrorū.

$\frac{s}{t}$	2
$\frac{p}{q}$	2
$\frac{ag}{b}$	1
	2

$\frac{fc}{d}$	2
	2
	2
	2
	2

q̄ minutiae $\frac{g}{a}$ potest inueniri propinquior radix, hoc est radix propria b quius eam consumens, si in seipsum multiplicatur. Verbi gratia. Transferatur minutia $\frac{a}{g}$ ad ulteriorem locum, ut potest ad septimum, ubi est locus sextorum, nonne autem hoc faciam sic. Multiplicabo per denominationem phisicam scilicet 2 , uidelicet numerum $a g$, & item 2 in productum fiant autem tunc $f c$, eruntque $\frac{a}{g}$ unius integris $f c$ sexta. Si autem uelim habere denominatio b nem sextorum quam habent respectu integrorum. Nonne ducam 2 in b , & dein 2 in productum, fiat autem tunc d , hoc patet attendenti naturam phisicarum minutiarū, & octauam & 13 . huius, est ergo minutia $\frac{a}{g}$ æqualis, imò eadem minutiae $\frac{f c}{c}$. Sed uide q̄ multiplicauit 2 b in $a g$ et in productum, & pro d cessit $f c$, igitur per 37 . prioris ex ductu l , qui sit quadratus numeri 2 , in $a g$, fit $f c$, similiter ex l in b fit d , unde palam est, q̄ minutia $\frac{a}{g}$ est æqualis $\frac{f c}{c}$ minutiae. Ponam autem, ut ex l in a fiat f , & b l quadratum d in g quadratum, faciat c quadratum. Vtrum igitur in numero $f c$ sit maior quadratus c quadrato, sciri potest inspectis numeris, sciri inquā potest ex 32 . huius. Qd̄ si non est, dico q̄ de minutia $\frac{f c}{c}$ non extrahitur maior radix q̄ est radix $\frac{s}{c}$. Sit enim prædix d numeri, d uero numeri radix sit q numerus. Constat autem, q̄ ex minutia $\frac{f c}{c}$ habente hos numeros, non extrahitur maior radix $\frac{p}{c}$, d habeo ergo propositum, probato q̄ minutia $\frac{g}{a}$ est in q minutia $\frac{s}{c}$, ad hoc sic. Ex l in g fit c , & ex l in b fit d , ergo b minutia $\frac{p}{c}$ est t minutia $\frac{s}{c}$. Cum ergo quadrata minutia sit eadem q quadrate, oportet ut radix radici sit eadem. Qd̄ si in $f c$ numero est maior quadratus $\frac{p}{c}$, tūc etiam extrahitur de $f c$ maior radix $\frac{p}{c}$ radix p , & ita sicut patet extrahitur de minutia $\frac{f c}{c}$ maior radix $\frac{p}{c}$ minutia $\frac{p}{c}$, igitur etiā maior $\frac{p}{c}$ minutia $\frac{s}{c}$. d Qd̄ si in numero $f c$ nō q occurrit maior quadratus $\frac{p}{c}$ quadratus c , transferatur minutia $\frac{f c}{c}$ in nonū per multiplicationem numeri l in numerantem & d denominantem, sicut modo facta est translatio de quinto in septimum. Et deinde si opus est, de nono in undecimum, & ita, donec occurrat numerans habens maiorem quadratum eo qui producitur ex l in maximū præcedētis numerantis quadratū ducto, qd̄ autē hic tandem eueniat, patet ex secunda parte 32 . huius. Ex ijs ergo apparet rem diligenter intuenti, q̄ quanto ulterius & remotius ab integris deducitur minutia, tanto propinquius radix inuenitur in extractione radicis quadratæ minutiae. Qd̄ autem idem contingat in cubicarum radicibus extrahendis, ita considera. Sit data minutia phisica in septimo loco, qui est secundus quartus, & est sextorum, & sit eius numerās $a b$, habens b maximum cubicum, cum ipse non sit cubicus, apparet

apparetautem ex 34. q̄ sextorum est denominatio cubica respectu integrī, sit illa c, cuius radix sit s, extrahatur autem cubi ce radix numeri a b, & sit q, erit q̄ quēa radix b cubi extracta, est igitur $\frac{q}{s}$ radix $\frac{ab}{s}$ minutiae quanto propinquius fieri potuit in ijs nu^s meris. Dico habere posse propinquiorē, hoc est maiorem radicem, quanto enim radix non uera maior, tanto propinquior. Traducatur ergo minutia $\frac{ab}{s}$ ad tertium quartorum locum, hoc est ad denominationem $\frac{c}{s}$ ubi est locus nonorum. Faciam autem hoc sic. Multiplicabo per phisicam denominationem, quā sit p, numerum a b, & ducā iterum p in productum, & item in illud productum, fiat uero tunc f g. Dico ergo, q̄ f g nona, quorum locus est in decimo, sunt a b sexta. Et si ducatur p in ccubum & in productum, & item in productū, & fiat h. Dico q̄ f g nona sunt $\frac{f}{g}$ minutia unius integri. Ad hoc sic, Numerus s est radix $\frac{h}{s}$ cubici c. erit ergo ut patet intuitiū denominatio secundorē respectu integri. Et cū c sit denominatio sextorē respectu integri, est ergo s quadratus numeri p. cum p sit denominatio physica & s denominatio secundorē respectu integri, quod patere potest per 13. huius. Fiat autem ex p in s numerus M, igitur M est cubus p numeri. Ostendam autem q̄ ex M in c fiat h. Fiat enim ex p in c numerus n. In hunc ductus p faciat k, igitur ex p in k fit h. Itē in c ducitur p & fit n, in n ducitur p & fit k. Igitur ex ductu s in c fit k ex 37. Nonne ergo s in c multiplicatur & fit k, & p in k & fit h. Sed q̄ ties p continet unitatem, toties M continet s, igitur ex 34. ex M in c fit h. Eadem ratione ex M in a b fit f g, igitur minutia $\frac{ab}{s}$ est minutia $\frac{fg}{s}$. Item ex p in s fit M, igitur M est denominatio c̄ tertiorē, sed $\frac{h}{s}$ ex tertij s in sexta fiunt nona, igitur cum ex M in c fit h, oportet ut nonorē denominatio ad integra sit numerus h. igitur $\frac{fg}{s}$ sunt f g nona. Recte ergo traduxi sexta ad nona, multipli $\frac{h}{s}$ cando numeros physicāe denominationis per M cubum. Ponam autem q̄ ex M in b fiat g. Si ergo in f g est g maximus cubus, tunc radix extracta in his numeris, de minutia $\frac{fg}{s}$ erit uera radix minutiae g h, sed minutia h est minutia b c. igitur radix unius est radix alterius. Non ergo inuenta adhuc est maior radix. Si uero in numero f g est maior cubus numero g, sit ille y, igitur minutia $\frac{y}{s}$ maior est minutia $\frac{b}{s}$, ergo etiam habet maiorem radicem. Sed eius radix ex c̄ trahit de minutia $\frac{fg}{s}$ si y est maximus cubus in numero k g.

Habes ergo $\frac{h}{s}$ ex his uiam rei quam quæris. Si autē in numero f g maximus cubus sit g, multiplica per M numeros minutiae $\frac{fg}{s}$, & redūceris eam ad 13 locum, qui est duodenarius, & est $\frac{h}{s}$ quartus quartorē locorē. Et si ibi inuenies in numero numerantē cubū maiorem illo qui fit ex M in g, inueni-

H ij ros

Locus in
tegrorē.

$\frac{q}{s}$

$\frac{ab}{c}$ M
c p

n

k
y
 $\frac{fg}{h}$

01
02
03
04
05

es ibi maiorem radicem: Siue autem haec sit siue non, si numeros ibi inuentos iterum multiplicaueris per M, & traduxeris minutia ad locum quindecimorum. Qnod autem in aliqua tali traductione inuenies in numerante maiorem cubum eo qui fit ex M in maximum cubum prioris numerantis, patet ex probacione 20. partis proximae. Hoc autem inuento, inuenies maiorem radicem quae in loco precedenti. Siue autem quadratam siue cubicam radicem quæras, ubi uera inueniri non potest, quanto minutiam nec quadratam nec cubicam magis ab integris distare feceris per modum quem dixi, tanto propinquius radicem inuenies & minus in operatione relinques. Non tamē necessarie est in infinitum procedi. Sed cū illuc ueneris, ubi tam modicum aliquid relinquitur, ut illius omissio non faciat errorē sensibilem, procedi ultra superfluit. Si autem vulgaris minutiae nec quadratae, nec cubicae radicem quæras, per quemcunq; libet quadratum si radicem quadratam, uel per cubum quēlibet si cubicam radicem quæras, multiplica numeros minutiae, ad quadratam uel cubicam denominationem reductae. Et quanto saepius multiplicaueris, tanto propinquiorem radicem inuenies, sicut ex præmissis parare potes. Haec sunt quæ de minutis scienda, & ideo colligenda putauit.

Algorithmi demonstrati finis.

De proportionibus appendix.

Datis extremis duobus media inter eos Arithmeticum, Geometricum & Harmonicum constituere. Arithmeticū sic, extremis coniunctis totius medietas erit ipsum mediū. Geometricum, unum extremorum duc in aliud, & producti radix quadrata erit medium. Harmonicum autem, iunge extrema, per quod diuide productum ex differentia eorum in minus extremum, & quotientē adde minori extremo, & fiet mediū.

Quocunq; duobus interpositis medio, cuius ad utruncū sit aliqua proportio, erit primi ad tertium composita ex proportione primi ad secundum, & proportione secundi ad tertium. Sit inter d & f, e medium, dico qd̄ proportio d ad f, constat ex proportione d ad e, & proportione e ad f. Diuidatur enim d per e & exeat h denominatio proportionis d ad e. Item diuidatur e per f et exeat k denominatio proportionis e ad f. Iterum diuidat

10 25 40
10 20 40
10 16 40

32 8
d e
⁴
b .^{16.} k
g

uidatur d per f, & exeat g denominatio proportionis d ad f,
tunc ducatur h in k, et proueniat t. Dico q̄ t est æquale g. Nam
k in h et f, facit t & e, ergo h ad f sicut t ad e, sed h ad f sicut g ad
e, eo q̄ h in e tantum facit sicut f in g, quia utrobicq; d. ergo g ad
e sicut t ad e, igitur g & t sunt æquales, ergo ex ductu h in k con-
stat denominatio proportionis d ad f. Vnde proportio d ad f
componitur ex duabus, scilicet d ad e & e ad f. Similiter si logi-
zabis pluribus interpositis medijs. Ut si inter a & f sint media
b c d. Nam a ad f cōponitur ex a ad b & b ad f. sed b ad f cō-
ponitur ex b ad c & c ad f, c autem ad f ex c ad d & d ad f,
igitur &c.

Ex quadam demonstratione Ptolemæi in Almagesti, posita
tis sex quantitatibus quibuscunq; ubi proportio duarum ex
quatuor constat reliquarum proportionibus, sumi possunt
coniugationes utiles & modi communes ex uno eorum pro-
uenientes, & sunt omnes 18. & sequens semper ex præcedente
procedit ut apparebit.

Primus. Si proportio primi ad secundū constituitur ex pro-
portione tertij ad quartum & quinti ad sextum, fiet quoq; con-
uersem p̄portio secundi ad primū constans ex p̄portionibus
quarti ad tertium & sexti ad quintum. Sit a primū, b secundū
c tertium, d quartū, e quintum, f sextum. Sitq; g ad 2 sicut c ad
d, & 2 ad k sicut e ad f. erit igitur a ad b sicut g ad k, & conuer-
sim b ad a sicut k ad g, sed k ad g ex duabus scilicet k ad 2 &
2 ad g, quæ sunt sicut f ad e & d ad c, igitur b ad a est ex dua
bus, scilicet f ad e & d ad c.

Secundus. Primi ad secundū producitur ex p̄portionibus
tertiij ad sextum, & quinti ad quartum. Sint sex quantitates pri-
ores. Dico q̄ a ad b proportio est composita ex proportioni-
bus c ad f & e ad d. Sit enim proportio g cōposita ex eis quæ
sunt cadf & e ad d. c em̄ ad f aggregatur ex c add & d ad f,
igitur g composita est ex c ad d & d ad f & e ad d. Sed duæ
quæ sunt d ad f & e add faciunt eam quæ aggregatur ex e ad
d & d ad f, & ipsa est e ad f. Igitur duæ c ad d & d ad f com-
ponunt g. sed ipsæ ex hypothesi faciunt eam quæ est a ad b, igi-
tur a ad b componuntur ex duabus c ad f & e ad d.

Tertius. Proportio primi ad tertium componitur ex pro-
portionibus secundi ad quartum & quinti ad sextum. Nam a
ad c est ex duabus a ad b & b ad c. sed a ad b ex duabus est c
ad d & e ad f, igitur a ad c est ex tribus, scilicet b ad c & c ad d
& e ad f. sed b ad c & c ad d componunt eam quæ est b ad d,
igitur duæ b ad d & e ad f constituunt eam quæ est a ad c.

Quartus. Proportio primi ad tertium constat ex propor-
tioni-

a b c d

a c e
b d f
d z k

a c e
b d f

tionibus secundi ad sextum & quinto ad quartum. Repete eundem ordinem. Iam enim in tertio modo ostenditur quod a ad c continetur ex duabus scilicet b ad d & d ad f. Sit igitur nunc a primum, c secundum &c. & ita conclude per modum secundum.

Quintus. Proportio primi ad quintum producitur ex proportionibus secundi ad sextum, & tertii ad quartum. Nam ex tertio modo a ad b est ex duabus c ad f & e ad d. Sit igitur a primum, b secundum, c tertium, f quartum, e quintum, d sextum. Vnde per eundem tertium a ad c ex duabus, est sicut b ad f & e ad d. Erant igitur duas proportiones a ad c & c ad e ponendo c medietate inter a & e, componentes proportionem a ad e constitutam ex tribus, scilicet b ad f, c ad e & e ad d, sed duas c ad e & e ad d componunt eam quae est c ad d, igitur proportio a ad e aggregatur ex duabus b ad f & c ad d.

Sextus. Proportio primi ad quintum aggregatur ex proportionibus secundi ad quartum & tertii ad sextum. Nam ex praecedenti proportio a ad e constat ex duabus b ad f & c ad d. Sit a primum, c secundum, b tertium &c. Itaque secundum hanc dispositionem ex modo secundo argues.

Septimus. Proportio tertii ad quartum constat ex proportionibus primi ad secundum & sexti ad quintum. Ea enim quae producunt a ad b & f ad e sit proportio g, per secundum autem modum a ad b constat ex duabus, scilicet c ad f et e ad d. Igitur tres proportiones quae sunt c ad f, f ad e, & e ad d producunt g. sed ipsae tres componunt eam quae est c ad d, igitur proportio c ad d constat ex duabus a ad b & f ad e.

Octauus. Proportio quinti ad sextum prouenit ex proportionibus primi ad secundum & quarti ad tertium. igitur constituant ex duabus quae sunt a ad b & d ad c, tunc ex modo secundo a ad b est ex duabus c ad f & e ad d. Vnde haec duas cum ea quae est d ad c, faciunt g. sed ipsae constituant eam quae est e ad f. Igitur proportio e ad f aggregatur ex duabus a ad b & d ad c.

Nonus. Proportio secundi ad quartum oritur ex proportionibus primi ad tertium & sexti ad quintum. Ex tertio ostensum est quod a ad c constituitur ex b ad d & e ad f. Sit secundum hoc dispositio. a primum, c secundum, b tertium, d quartum, e quintum, f sextum, et sic ex septimo modo argumentum elice.

Decimus. Proportio secundi ad quartum est ex proportionibus primi ad quintum & sexti ad tertium. In nono enim demonstratur quod b ad d est ex a ad c & f ad e. Sit secundum hoc dispositio, & ex secundo modo conclude propositum.

Vndecimus. Proportio secundi ad sextum producitur ex proportione primi ad tertium & quarti ad quintum. Pater enim ex quarto quod a ad c constat ex b ad f & e ad d. Sit igitur secundum

dum hoc dispositio, & argue ex septimo modo.

Duodecimus. Proportio secundi ad sextum constat ex proportionibus primi ad quintum & quarti ad tertium. In praecedenti ostenditur, quod b ad f consurgit ex a ad c & d ad e. Secundum hanc dispositionem argumentum recipe ex modo secundo.

Tertiusdecimus. Proportio tertij ad quartum producitur ex proportionibus primi ad quintum & sexti ad secundum. Patet ex septimo quod c ad d est ex duabus, scilicet a ad b & f ad e. Secundum hunc ordinem argue ex secundo.

Quartusdecimus. Proportio tertij ad sextum nascitur ex proportionibus primi ad secundum & quarti ad quintum. Nam ex hypothesi c ad d & e ad f componunt a ad b addita utrobique d ad e, & fieri tres quae sunt c ad d, d ad e, & e ad f, constituent duas quae sunt a ad b, & d ad e, sed tres componunt eam quae est c ad f, igitur.

Quintusdecimus. Proportio tertij ad sextum producitur ex proportionibus primi ad quintum & quarti ad secundum. Ex proximo sume dispositionem, & ex secundo argumentum.

Sextusdecimus. Proportio quarti ad quintum fit ex proportionibus secundi ad primum & tertij ad sextum. Nam proportio d ad e oritur ex tribus, scilicet d ad c, & c ad f, & f ad e. Duæ autem earum quae sunt d ad c & f ad e per primum modum constitutae sunt quae est b ad a, ergo b ad a cum reliqua trium quae est c ad f componunt eam quae est d ad e.

Decimus septimus. Proportio quarti ad quintum componitur ex proportionibus secundi ad sextum & tertij ad primum. Ex praemissis sume dispositionem, & ex secundo argumentum.

Decimus octauus. Proportio quinti ad sextum aggregatur ex proportionibus primi ad tertium & quarti ad secundum. Ex octavo dispositionem, & ex secundo argumentum elice.

Constat et g.

Norimbergæ apud Io. Petreium,
Anno M. D. XXXIII.

Albertus Diversus p[ro]fessor L[itterarum] f[acultatis] e[st]
ingeniosus h[abens] sine defensione similis
esse spem[us] impolitis

1711 XXXX 10. 10. 1711

Osc. Köhler
Buchbinderei
Dre. den-N.
Gr. Meissnerstr. 7L

Mathem. 1032 m

