Allgemeine Auflösung der Aufgabe:

die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, daſs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.

von

C. F. Gauss.

Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebnen Preisfrage.

„Ab his via sternitur ad maiora."

Der Verfasser dieser Abhandlung hat die zweimalige Wahl der Aufgabe, die ihren Gegenstand ausmacht, als einen Beweis von der Wichtigkeit betrachten zu müssen geglaubt, welche die königliche Societät derselben beilegt, und ist dadurch aufgemuntert worden, dieser seine schon vor längerer Zeit gefundene Auflösung vorzulegen, wovon ihn sonst die späte von der Preisfrage erhaltene Kenntniſs abgehalten haben würde. Er bedauert, daſs der letztere Umstand ihn genöthigt hat, sich fast nur auf das Wesentliche und auf die Andeutung einiger näher liegenden Benutzungen für Kartenprojectionen und für die höhere Geodäsie zu beschränken, da er ohne die Nähe des Schluſstermins gern die Entwicklung einiger Nebenumstände noch weiter verfolgt, und die vielseitigen Anwendungen in der höheren Geodäsie ausführlich bearbeitet haben würde, welches er sich nun für eine andere Zeit und für einen andern Ort vorbehalten muſs.

Im December 1822.

Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dafs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.

1.

Die Natur einer krummen Fläche wird durch eine Gleichung zwischen den sich auf jeden Punkt derselben beziehenden Coordinaten x, y, z bestimmt. Vermöge dieser Gleichung kann jede dieser drei veränderlichen Grössen wie eine Funktion der beiden andern betrachtet werden. Noch allgemeiner ist es, noch zwei neue veränderliche Grössen t, u einzuführen, und jede der x, y, z als eine Function von t und u darzustellen, wodurch, wenigstens allgemein zu reden, bestimmte Werthe von t und u allemal einem bestimmten Punkte der Oberfläche angehören, und umgekehrt.

2.

In Beziehung auf eine zweite krumme Fläche sollen X, Y, Z, T, U ähnliche Bedeutungen haben, wie resp. x, y, z, t, u in Beziehung auf die erstere.

3.

Die erste Fläche auf der zweiten abbilden heifst, ein Gesetz festsetzen, nach welchem einem jeden Punkte der ersten

Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten entsprechen soll. Dieses wird dadurch geschehen, daſs T und U bestimmten Functionen der zwei veränderlichen Grössen t und u gleich gesetzt werden. Insofern die Abbildung gewissen Bedingungen Genüge leisten soll, werden diese Functionen nicht mehr willkürlich seyn dürfen. Indem dadurch auch X, Y, Z zu Functionen von t und u werden, müssen diese Functionen, neben der Bedingung, welche die Natur der zweiten Fläche vorschreibt, auch noch derjenigen Genüge leisten, welche in der Abbildung erfüllt werden soll.

4.

Die Aufgabe der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften schreibt vor, daſs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich seyn soll. Es kommt zuvörderst darauf an, diese Bedingung analytisch auszudrücken.

Aus der Differentiation der Functionen von t, u, durch welche x, y, z, X, Y, Z ausgedrückt werden, mögen folgende Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
dx &= a\,dt + a'\,du \\
dy &= b\,dt + b'\,du \\
dz &= c\,dt + c'\,du \\
dX &= A\,dt + A'\,du \\
dY &= B\,dt + B'\,du \\
dZ &= C\,dt + C'\,du
\end{aligned}$$

Die vorgeschriebene Bedingung erfordert, erstlich, daſs alle von Einem Puncte der ersten Fläche ausgehende und in ihr liegende unendlich kleine Linien den ihnen entsprechenden Linien der zweiten Fläche proportional sind, und zweitens, daſs jene unter sich dieselben Winkel machen, wie diese.

Ein solches Linear-Element auf der ersten Fläche wird

$$= \sqrt{((aa+bb+cc)\,dt^2 + 2(aa'+bb'+cc')\,dt\,.\,du + (a'a'+b'b'+c'c')\,du^2)}$$

und das entsprechende auf der zweiten Fläche

$$= \sqrt{((AA+BB+CC)\,dt^2 + 2(AA'+BB'+CC')\,dt\,du + (A'A'+B'B'+C'C')\,du^2)}$$

Sollen beide, unabhängig von dt und du, in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, so müssen offenbar die drei Grössen

$$aa + bb + cc,\quad aa' + bb' + cc',\quad a'a' + b'b' + c'c'$$

respective den drei folgenden proportional seyn:

$$AA + BB + CC,\quad AA' + BB' + CC',\quad A'A' + B'B' + C'C'$$

Wenn den Endpunkten eines zweiten Elements auf der ersten Fläche die Werthe

$$t, u \text{ und } t + \delta t,\quad u + \delta u$$

entsprechen, so ist der Cosinus des Winkels, welchen dasselbe mit dem ersten Elemente macht,

$$= \frac{(adt + a'du)(a\delta t + a'\delta u) + (bdt + b'du)(b\delta t + b'\delta u) + (cdt + c'du)(c\delta t + c'\delta u)}{\sqrt{((adt + a'du)^2 + (bdt + b'du)^2 + (cdt + c'du)^2)\cdot((a\delta t + a'\delta u)^2 + (b\delta t + b'\delta u)^2 + (c\delta t + c'\delta u)^2)}}$$

und für den Cosinus des Winkels zwischen den correspondirenden Elementen auf der zweiten Fläche ergibt sich ein ganz ähnlicher Ausdruck, wenn nur a, b, c, a', b', c' in A, B, C, A', B', C' verwandelt werden. Offenbar werden beide Ausdrücke einander gleich, wenn die obige Proportionalität Statt findet, und die zweite Bedingung wird daher schon mit in der ersten begriffen, welches auch bei einigem Nachdenken von selbst klar ist.

Der analytische Ausdruck der Bedingung unserer Aufgabe ist demnach, daſs

$$\frac{AA + BB + CC}{aa + bb + cc} = \frac{AA' + BB' + CC'}{aa' + bb' + cc'} = \frac{A'A' + B'B' + C'C'}{a'a' + b'b' + c'c'}$$

werden muſs, welches eine endliche Function von t und u seyn wird, die wir $= mm$ setzen wollen. Es drückt dann m das Verhältniſs aus, in welchem die Lineargrössen auf der ersten Fläche in ihrer Abbildung auf der zweiten vergrössert oder verkleinert werden (je nachdem m gröſser oder kleiner ist als 1). Dieses Verhältniſs wird, allgemein zu reden, nach den Stellen verschieden seyn: in dem speciellen Falle, wo m constant ist, wird eine vollkommene Aehnlichkeit auch in den endlichen Theilen, und wenn überdieſs $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit Statt finden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen.

5.

Indem wir Kürze halber

$$(aa+bb+cc)\,dt^2 + 2(aa'+bb'+cc')\,dt\,.\,du + (a'a'+b'b'+c'c')\,du^2 = \omega$$

setzen, bemerken wir, daſs die Differentialgleichung $\omega = 0$ zwei Integrationen zulassen wird. Indem man nemlich das Trinomium ω in zwei, in Beziehung auf dt und du lineare, Factoren zerlegt, muſs entweder der eine oder der andere Factor $= 0$ werden, welches zwei verschiedene Integrationen geben wird. Die eine Integration wird der Gleichung

$$0 = (aa+bb+cc)\,dt$$
$$+ \left\{aa'+bb'+cc'+i\sqrt{((aa+bb+cc)(a'a'+b'b'+c'c')-(aa'+bb'+cc')^2)}\right\} du$$

entsprechen (wo i Kürze halber für $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, indem man sich leicht überzeugt, daſs der irrationale Theil des Ausdrucks imaginär werden muſs); die andere einer ganz ähnlichen Gleichung, wenn nur i mit $-i$ vertauscht wird. Ist also das Integral der erstern Gleichung dieses:

$$p + iq = Const.$$

wo p und q reelle Functionen von t und u bedeuten, so wird das andere Integral

$$p - iq = Const.$$

und die Natur der Sache wird es mit sich bringen, daſs

$$(dp + i\,dq)\,.\,(dp - i\,dq) \text{ oder } dp^2 + dq^2$$

ein Factor von ω, oder

$$\omega = n\,(dp^2 + dq^2)$$

werden muſs, wo n eine endliche Function von t und u seyn wird.

Wir wollen nun das Trinomium, in welches

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

übergeht, wenn für dX, dY, dZ ihre Werthe durch T, U, dT, dU substituirt werden, durch Ω bezeichnen, und annehmen, daſs auf ähnliche Weise, wie vorher, die beiden Integrale der Gleichung $\Omega = 0$ diese seyn;

$$P + iQ = Const.$$
$$P - iQ = Const.$$
$$\text{und} \quad \Omega = N(dP^2 + dQ^2)$$

wo P, Q, N reelle Functionen von T und U bedeuten werden.

Diese Integrationen lassen sich (die allgemeinen Schwierigkeiten des Integrirens bei Seite gesetzt) offenbar vor der Auflösung unsrer Hauptaufgabe ausführen.

Wenn nun für T, U solche Functionen von t, u substituirt werden, wobei die Bedingung unsrer Hauptaufgabe erfüllt wird, so geht Ω in $mm\omega$ über, und es wird

$$\frac{(dP + idQ) \cdot (dP - idQ)}{(dp + idq) \cdot (dp - idq)} = \frac{mmn}{N}$$

Man sieht aber leicht, daſs der Zähler im ersten Theile dieser Gleichung durch den Nenner nur dann theilbar seyn kann, wenn

entweder $dP + idQ$ durch $dp + idq$, und $dP - idQ$ durch $dp - idq$,
oder $dP + idQ$ durch $dp - idq$, und $dP - idQ$ durch $dp + idq$

theilbar ist. Im ersteren Falle wird demnach $dP + idQ$ verschwinden, wenn $dp + idq = 0$, oder $P + iQ$ wird constant werden, wenn $p + iq$ constant angenommen wird, d. i. $P + iQ$ wird bloſs Function von $p + iq$ seyn, und eben so $P - iQ$ Function von $p - iq$. Im andern Falle wird $P + iQ$ Function von $p - iq$, und $P - iQ$ Function von $p + iq$ seyn. Es ist leicht einzusehen, daſs diese Folgerungen auch umgekehrt gelten, nemlich daſs, wenn für $P + iQ$, $P - iQ$ Functionen von $p + iq$, $p - iq$ (entweder respective, oder verkehrt) angenommen werden, die endliche Theilbarkeit des Ω durch ω, und sonach die oben erforderlich gefundene Proportionalität Statt haben wird.

Man überzeugt sich übrigens leicht, daſs wenn z. B.

$$P + iQ = f(p + iq), \quad P - iQ = f'(p - iq)$$

gesetzt werden, die Beschaffenheit der Function f' schon durch die von f bedingt wird. Wenn nemlich unter den constanten Gröſsen, welche letztere etwa involviren mag, keine andere als reelle befindlich sind, so wird die andere f' mit der f ganz identisch seyn müssen, damit jedesmal reellen Werthen von p, q

reelle Werthe von P, Q entsprechen; im entgegengesetzten Falle wird sich f' von f nur dadurch unterscheiden, daſs in den imaginären Elementen von f statt i überall das entgegengesetzte $-i$ gesetzt werden muſs.

Man hat hiernächst

$$P = \tfrac{1}{2} f(p+iq) + \tfrac{1}{2} f'(p-iq)$$
$$iQ = \tfrac{1}{2} f(p+iq) - \tfrac{1}{2} f'(p-iq)$$

oder, was dasselbe ist, indem die Function f ganz willkürlich angenommen wird (nach Gefallen mit Inbegriff constanter imaginärer Elemente), wird P dem reellen und iQ (bei der zweiten Auflösung $-iQ$) dem imaginären Theile von $f(p+iq)$ gleich gesetzt, und hieraus sodann vermittelst der Elimination T und U in der Gestalt von Functionen von t und u dargestellt werden. Hiedurch ist die vorgegebene Aufgabe ganz allgemein und vollständig aufgelöset.

6.

Wenn $p'+iq'$ eine beliebige bestimmte Function von $p+iq$ vorstellt (indem p', q' reelle Functionen von p, q sind), so sieht man leicht, daſs auch

$$p'+iq' = Const., \text{ und } p'-iq' = Const.$$

die Integrale der Differentialgleichung $\omega = 0$ darstellen; in der That werden jene mit den obigen

$$p+iq = Const. \text{ und } p-iq = Const.$$

resp. ganz gleichbedeutend seyn. Eben so werden die Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$

$$P'+iQ' = Const \text{ und } P'-iQ' = Const.$$

mit den obigen

$$P+iQ = Const. \text{ und } P-iQ = Const.$$

ganz gleichbedeutend seyn, wenn $P'+iQ'$ eine beliebige bestimmte Function von $P+iQ$ vorstellt (indem P', Q' reelle Functionen von P, Q sind). Es erhellet hieraus, daſs in der allgemeinen Auflösung unsrer Aufgabe, welche wir im vorhergehenden Artikel gegeben haben, auch p', q' die Stelle von p, q;

und P', Q' die Stelle von P, Q resp. vertreten können. Wenn gleich die Allgemeinheit der Auflösung durch eine solche Abänderung nichts gewinnt, so kann doch zuweilen für die Anwendung eine Form zu diesem, die andere zu jenem Zweck bequemer seyn.

7.

Wenn die Functionen, welche aus der Differentiation der willkürlichen Functionen f, f' entspringen, durch ϕ und ϕ' resp. bezeichnet werden, so daſs $d.fv = \phi v . dv$, $d.f'v = \phi' v . dv$, so wird in Folge unsrer allgemeinen Auflösung

$$\frac{dP + idQ}{dp + idq} = \phi(p+iq), \quad \frac{dP - idQ}{dp - idq} = \phi'(p-iq)$$

also

$$\frac{mmn}{N} = \phi(p+iq) . \phi'(p-iq)$$

Das Vergrösserungsverhältniſs bestimmt sich daher durch die Formel

$$m = \sqrt{\left\{\frac{dp^2 + dq^2}{\omega} . \frac{\Omega}{dP^2 + dQ^2} . \phi(p+iq) . \phi'(p-iq)\right\}}$$

8.

Wir wollen nun noch unsre allgemeine Auflösung mit einigen Beispielen erläutern, wodurch sowohl die Art der Anwendung, als die Beschaffenheit einiger dabei noch in Betracht kommenden Umstände am besten ins Licht gesetzt werden wird.

Es seyn zuvörderst beide Flächen Ebnen, wo wir

$$x = t, \quad y = u, \quad z = 0$$
$$X = T, \quad Y = U, \quad Z = 0$$

werden setzen können. Die Differentialgleichung

$$\omega = dt^2 + du^2 = 0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$t + iu = Const., \quad t - iu = Const.$$

und eben so sind die beiden Integrale der Gleichung $\Omega = dT^2 + dU^2 = 0$, folgende:

$$T + iU = Const., \quad T - iU = Const.$$

Die beiden allgemeinen Auflösungen der Aufgabe sind demnach:

$$\text{I.}\quad T+iU=f(t+iu),\quad T-iU=f'(t-iu)$$
$$\text{II.}\quad T+iU=f(t-iu),\quad T-iU=f'(t+iu)$$

Dieses Resultat läſst sich auch so ausdrücken: Indem die Charakteristik f eine beliebige Function bedeutet, hat man den reellen Theil von $f(x+iy)$ für X, und den imaginären Theil, mit Weglassung des Factors i, entweder für Y oder für $-Y$ anzunehmen.

Gebraucht man die Charakteristiken ϕ, ϕ' in der Bedeutung des Art. 7 und setzt

$$\phi(x+iy)=\xi+i\eta,\quad \phi'(x-iy)=\xi-i\eta$$

wo offenbar ξ und η reelle Functionen von x und y seyn werden, so hat man, in der ersten Auflösung,

$$dX+idY=(\xi+i\eta)(dx+idy)$$
$$dX-idY=(\xi-i\eta)(dx-idy)$$

und folglich

$$dX=\xi dx-\eta dy$$
$$dY=\eta dx+\xi dy$$

Macht man nun

$$\xi=\sigma.\cos\gamma;\quad \eta=\sigma.\sin\gamma$$
$$dx=ds.\cos g,\quad dy=ds.\sin g$$
$$dX=dS.\cos G,\quad dY=dS.\sin G$$

so das ds ein Linearelement in der ersten Ebne, g dessen Neigung gegen die Abscissenlinie, dS das correspondirende Linearelement in der zweiten Ebne und G dessen Neigung gegen die Abscissenlinie bedeutet, so geben die obigen Gleichungen

$$dS.\cos G=\sigma.ds.\cos(g+\gamma)$$
$$dS.\sin G=\sigma.ds.\sin(g+\gamma)$$

und folglich, wenn man, was erlaubt ist, σ als positiv betrachtet,

$$dS=\sigma.ds,\quad G=g+\gamma$$

Man sieht also (in Uebereinstimmung mit Art. 7), daſs σ das Verhältniſs der Vergrösserung des Elements ds in der Darstellung dS vorstellt, und wie gehörig, von g unabhängig ist; und eben so zeigt die Unabhängigkeit des Winkels γ von g, daſs alle von einem Punkte ausgehende Linearelemente in der ersten Ebne durch Elemente in der zweiten Ebne dargestellt werden, die unter sich und, wie wir hinzufügen können, in demselben Sinn, dieselben Winkel bilden, wie jene.

Wählt man für f eine linearische Function, so dafs $fv = A + Bv$, wo die constanten Coëfficienten von der Form sind

$$A = a + bi, \quad B = c + ei$$

so wird $$\phi v = B = c + ei, \quad \text{also}$$

$$m = \sigma = \sqrt{(cc + ee)}, \quad \gamma = \text{Arc. tang}\,\frac{e}{c}$$

Das Vergrösserungsverhältnifs ist folglich in allen Punkten constant, und die Darstellung dem Dargestellten durchaus ähnlich.

Für jede andere Function f wird (wie man leicht beweisen kann) das Vergrösserungsverhältnifs nicht constant seyn, und die Aehnlichkeit also nur in den kleinsten Theilen Statt finden können.

Sind die Plätze welche einer bestimmten Anzahl von gegebnen Punkten der ersten Ebne in der Darstellung entsprechen sollen, vorgeschrieben, so kann man leicht nach der gemeinen Interpolationsmethode die einfachste algebraische Function f finden, wodurch diese Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man nemlich die Werthe von $x + iy$ für die gegebnen Punkte durch a, b, c u. s. w., und die correspondirenden Werthe von $X + iY$ durch A, B, C u. s. w., so wird man

$$fv = \frac{(v-b)(v-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots}\cdot A + \frac{(v-a)(v-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots}\cdot B + \frac{(v-a)(v-b)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots}\cdot C + \text{etc.}$$

setzen müssen, welches eine algebraische Function von v ist, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der vorgegebnen Punkte. Für zwei Punkte, wo die Function linearisch wird, findet folglich vollkommene Aehnlichkeit Statt.

Man kann von diesem Verfahren in der Geodäsie eine nützliche Anwendung machen, um eine auf mittelmäfsige Messungen gegründete Karte, die im kleinen Detail gut, aber im

Ganzen etwas verzerrt ist, in eine bessere zu verwandeln, wenn man die richtige Lage einer Anzahl von Punkten kennt. Es versteht sich jedoch, daſs man bei einer solchen Umformung nicht viel über die Gegend hinausgehen darf, welche letztere Punkte umfassen.

Wenn man die zweite Auflösung auf dieselbe Art durchführt, so findet man, daſs der ganze Unterschied nur darin besteht, daſs die Aehnlichkeit eine verkehrte ist, indem alle Elemente in der Darstellung zwar eben so groſse Winkel mit einander machen, wie im Dargestellten, aber in verkehrtem Sinn, so daſs dort rechts liegt, was hier links ist. Dieser Unterschied ist aber kein wesentlicher, und verschwindet, wenn man in der einen Ebne diejenige Seite, welche man vorher als obere betrachtete, zur untern macht. Diese letztre Bemerkung läſst sich übrigens allemal in Anwendung bringen, wenn die eine der beiden Flächen eine Ebne ist, daher wir in den folgenden Beispielen dieser Art uns bloſs auf die erste Auflösung beschränken können.

9.

Wir wollen nun (als zweites Beispiel) die Darstellung der Fläche eines geraden Kegels in der Ebne betrachten. Als Gleichung der erstern nehmen wir an

$$xx + yy - kkzz = 0$$

wo wir ferner

$$x = kt \cos u$$
$$y = kt \sin u$$
$$z = t$$

und wie vorhin $X = T$, $Y = U$, $Z = 0$ setzen.

Die Differentialgleichung

$$\omega = (kk + 1)\, dt^2 + kktt\, du^2 = 0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$\log t \pm i \sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u = Const.$$

Wir haben demnach die Auflösung

$$X + iY = f\left(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right)$$

$$X - iY = f'\left(\log t \mp i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right)$$

d. i. es wird, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X der reelle Theil von

$$f\left(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\right)$$

und für Y der imaginäre, nach Weglassung des Factors i, angenommen.

Setzt man für f z. B. eine Exponentialgröfse, nemlich

$$fv = he^v$$

wo h constant ist und e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet, so hat man die einfachste Darstellung

$$X = ht \cos\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u, \quad Y = ht \sin\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u$$

Die Anwendung der Formeln des 7 Art. gibt hier

$$n = (kk+1)\,tt$$
$$N = 1$$

und, da $\varphi v = \varphi' v = he^v$,

$$\varphi\left(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right) . \ \varphi'\left(\log t - i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right) = hhtt$$

folglich

$m = \dfrac{h}{\sqrt{(kk+1)}}$ also constant. Macht man also noch

$h = \sqrt{(kk+1)}$,

so wird die Darstellung eine vollkommne Abwicklung.

10.

Es sey drittens die Kugelfläche, deren Halbmesser $= a$, in der Ebne darzustellen. Wir setzen hier

$$x = a \cos t \,.\, \sin u$$
$$y = a \sin t \,.\, \sin u$$
$$z = a \cos u$$

wodurch wir erhalten

$$\omega = aa \sin u^2 dt^2 + aa\, du^2$$

Die Differentialformel $\omega = 0$ gibt folglich

$$dt \mp i \cdot \frac{du}{\sin u} = 0$$

und deren Integration

$$t \pm i \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u = Const.$$

Es wird daher, wenn wir wiederum durch die Charakteristik f eine willkürliche Funktion andeuten, X dem reellen und iY dem imaginären Theile von

$$f(t + i \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u)$$

gleich gesetzt werden müssen. Wir wollen ein Paar specielle Fälle dieser allgemeinen Auflösung anführen.

Wählt man für f eine lineäre Function, indem man $fv = kv$ setzt, so wird

$$X = kt, \quad Y = k \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u$$

Auf die Erde angewandt, ist dies, wenn man t die geographische Länge, $90° - u$ die Breite bedeuten läſst, offenbar mit Mercators Projection einerlei. Für das Vergrösserungsverhältniſs geben hier die Formeln des 7. Artikels

$$m = \frac{k}{a \sin u.}$$

Nimmt man für f eine imaginäre Exponentialfunction, und zwar zuerst die einfachste $fv = ke^{iv}$, so wird

$$f(t + i \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u) = ke^{\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} u + it} = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u (\cos t + i \sin t)$$

und

$$X = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \,.\, \cos t, \quad Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \,.\, \sin t$$

welches, wie man leicht sieht, die stereographische Polarprojection ist.

Setzt man allgemeiner $fv = ke^{i\lambda v}$, so wird

$$X = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^{\lambda} \,.\, \cos \lambda t, \quad Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u^{\lambda} \,.\, \sin \lambda t$$

Für das Vergrösserungsverhältniſs erhalten wir hier

$$n = aa \sin u^2, \quad N = 1, \quad \varphi v = i\lambda k e^{i\lambda v},$$

und hieraus

$$m = \frac{\lambda k (\operatorname{tang} \frac{1}{2} u)^{\lambda}}{a \sin u}$$

Man sieht, daſs hier die Darstellung aller Punkte, für welche u constant ist, in Einen Kreis, und die Darstellung aller Punkte, für welche t constant ist, in Eine gerade Linie fällt, wie auch, daſs die allen verschiedenen Werthen von u angehörigen Kreise concentrisch sind. Dies gibt eine sehr zweckmäſsige Kartenprojection, wenn nur ein Theil der Kugelfläche darzustellen ist, und man thut dann am besten, λ so zu wählen, daſs das Vergröſserungsverhältniſs für die äussersten Werthe von u gleich groſs wird, wodurch es gegen die Mitte zu seinen kleinsten Werth erhält. Sind diese äussersten Werthe von u diese u° und u', es wird man demnach setzen müssen.

$$\lambda = \frac{\log \sin u' - \log \sin u^\circ}{\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} u' - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} u^\circ}$$

Die Blätter von Herrn Professor *Hardings* Sternkarten Nr. 19-26 sind nach dieser Projection gezeichnet.

II.

Man kann die allgemeine Auflösung für das im vorhergehenden Artikel behandelte Beispiel noch in einer andern Form aufstellen, die wir ihrer Eleganz wegen hier noch beifügen zu müssen glauben.

In Folge des im 6. Art. Vorgetragenen wird, da

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \,(\cos t + i \sin t)$$

eine Function von

$$t + i \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u$$

ist, und

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \,(\cos t + i \sin t) = \frac{\sin u \cos t + i \sin u \sin t}{1 + \cos u} = \frac{x + iy}{a + z}$$

die allgemeine Auflösung auch durch

$$X + iY = f\,\frac{x + iy}{a + z}, \quad X - iY = f'\,\frac{x - iy}{a + z}$$

dargestellt werden können, d. i. X muſs dem reellen und iY dem imaginären Theil von $f\frac{x+iy}{a+z}$ gleich gesetzt werden, indem f eine willkürliche Function bezeichnet. Anstatt $f\frac{x+iy}{a+z}$ kann man, wie man leicht sieht, auch eine willkürliche Function von $\frac{y+iz}{a+x}$, oder von $\frac{z+ix}{a+y}$ nehmen.

12.

Wir wollen viertens die Darstellung der Oberfläche des Revolutions-Ellipsoids in der Ebne betrachten. Es seyn a und b die beiden halben Hauptaxen des Ellipsoids, so daſs

$$x = a \cos t \sin u$$
$$y = a \sin t \sin u$$
$$z = b \cos u$$

gesetzt werden kann. Hier wird also

$$\omega = aa \sin u^2\, dt^2 + (aa \cos u^2 + bb \sin u^2)\, du^2$$

und die Differentialformel $\omega = 0$ gibt, wenn wir Kürze halber $\sqrt{\left(1-\frac{bb}{aa}\right)} = \varepsilon$ setzen (insofern die Revolutionshalbaxe $b < a$),

$$0 = dt \mp i\,du \,.\, \sqrt{(\cotang u^2 + 1 - \varepsilon\varepsilon)}$$

Setzt man hier

$$\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)} \,.\, \tang u = \tang \omega$$

wo, bei der Anwendung auf das Erdsphäroid $90^\circ - \omega$ die geographische Breite und t die Länge vorstellen wird, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$0 = dt \mp i\,d\omega \,.\, \frac{1-\varepsilon\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon \cos \omega^2) \sin \omega}$$

deren Integration

$$Const. = t \pm i \log . \left\{ \cotang \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \left(\frac{1-\varepsilon \cos \omega}{1+\varepsilon \cos \omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}$$

gibt. Man hat daher, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X den reellen und für iY den imaginären Theil von

$$f\left(t + i \log \left\{ cotang \tfrac{1}{2}\omega \cdot \left(\frac{1-\varepsilon \cos\omega}{1+\varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}\right)$$

zu nehmen. — Wählt man für f eine lineäre Function, d. i. $fv = kv$, so wird

$$X = kt,\quad Y = k \log cotang \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}k\varepsilon \log \frac{1+\varepsilon\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega}$$

welches eine der Mercatorschen analoge Projection gibt.

Nimmt man hingegen für f eine imaginäre Exponentialfunction $fv = ke^{i\lambda v}$, so wird

$$X = k \cdot tang \tfrac{1}{2}\omega^{\lambda} \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} \cdot \cos\lambda t,\quad Y = k\, tang \tfrac{1}{2}\omega^{\lambda} \left(\frac{1+\varepsilon\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} \sin\lambda t,$$

welches, wenn man $\lambda = 1$ setzt, eine der stereographischen Polarprojection analoge, und allgemein, eine zur Darstellung eines Theils der Erdoberfläche, insofern man auf die Abplattung Rücksicht nehmen soll, sehr zweckmäſsige Projection gibt.

Was über den andern Fall, wo $b > a$ ist, zu sagen ist, läſst sich zwar leicht aus dem vorhergehenden unmittelbar ableiten, wo, wenn man dieselben Bezeichnungen beibehält, ε imaginär, aber $\left(\frac{1+\varepsilon\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$ doch wieder reell wird. Der Vollständigkeit wegen wollen wir jedoch die Formeln für diesen Fall noch besonders beifügen, und gleich Anfangs $\sqrt{\left(\frac{bb}{aa} - 1\right)} = \eta$ setzen. Man hat dann ω durch die Gleichung

$$\sqrt{(1+\eta\eta)} \cdot tang\, u = tang\, \omega$$

zu bestimmen, und die Differentialgleichung

$$0 = dt \mp i d\omega \cdot \frac{1+\eta\eta}{(1+\eta\eta\cos\omega^2)\sin\omega}$$

wird das Integral

$$Const. = t \pm i\, (\log cotang \tfrac{1}{2}\omega + \eta\, Arc.\, tang\, \eta \cos\omega)$$

geben, so dafs X für den reellen und iY für den imaginären Theil von

$$f(t + i(\log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\omega + \eta\, \operatorname{Arc.tang} \eta \cos\omega))$$

wird genommen werden müssen. Die Gegenstücke der beiden obigen speciellen Anwendungen ergeben sich hieraus von selbst. Nach der erstern wird

$$X = kt, \quad Y = k \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\omega + \eta k\, \operatorname{Arc.tang} \eta \cos\omega,$$

nach der andern

$$X = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega^{\lambda} \,.\, e^{-\eta\lambda\, \operatorname{Arc.tang} \eta \cos\omega} \,.\, \cos\lambda t$$

$$Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega^{\lambda} \,.\, e^{-\eta\lambda\, \operatorname{Arc.tang} \eta \cos\omega} \,.\, \sin\lambda t$$

gesetzt werden müssen.

13.

Als letztes Beispiel wollen wir die allgemeine Darstellung der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoids auf der Kugelfläche betrachten. Für jenes wollen wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Artikels beibehalten, den Halbmesser der Kugelfläche $= A$, und

$$\begin{aligned} X &= A \cos T \sin U \\ Y &= A \sin T \sin U \\ Z &= A \cos U \end{aligned}$$

setzen. Wenn man hier die allgemeine Auflösung des 5. Artikels zur Anwendung bringt, so findet man, dafs, indem f eine willkürliche Function bedeutet, T dem reellen und $i \log \operatorname{cotang} \frac{1}{2} U$ dem imaginären Theile von

$$f\left(t + i \log\left\{\operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\omega \,.\, \left(\frac{1 - \varepsilon\cos\omega}{1 + \varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}\right)$$

gleich gesetzt werden mufs *).

*) Wir übergehen hier theils die zweite Auflösung des 5 Artikels, die sich von der obigen nur durch Vertauschung von $-T$ gegen $+T$ unterscheiden und einer verkehrten Darstellung entsprechen würde, theils den Fall eines länglichten Ellipsoids, dessen Behandlung nach dem, was im vorigen Art. vorgekommen, sich aus der des abgeplatteten von selbst ergibt.

Die einfachste Auflösung wird seyn, $fv = v$ zu setzen, wodurch

$$T = t, \quad tang \tfrac{1}{2} U = tang \tfrac{1}{2} \omega \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \cos \omega}{1 - \varepsilon \cos \omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

wird. Dies bietet eine für die höhere Geodäsie überaus brauchbare Transformation dar, von welcher Benutzung wir jedoch hier nur einiges und nur kurz andeuten können. Wenn nemlich auf der Oberfläche des Ellipsoids und der Kugel diejenigen Punkte als einander correspondirend angesehen werden, die einerlei Länge haben, und deren Breiten resp. $90^\circ - U$, $90^\circ - \omega$, vermöge der angeführten Gleichung zusammenhangen, so entspricht einem System von, verhältnifsmäfsig, kleinen Dreiecken (und das werden diejenigen immer seyn, die zur wirklichen Messung dienen können), die auf der Oberfläche des Sphäroids durch kürzeste Linien gebildet werden, auf der Kugelfläche ein System von Dreiecken, deren Winkel den correspondirenden auf dem Sphäroid genau gleich sind, und deren Seiten von gröfsten Kreisbogen so wenig abweichen, dafs sie in den meisten Fällen, wo nicht die alleräusserste Schärfe verlangt wird, als damit zusammenfallend betrachtet werden können, so wie auch da, wo die gröfste Genauigkeit gefordert wird, die Abweichung vom gröfsten Kreise leicht mit aller nöthigen Schärfe durch einfache Formeln sich berechnen läfst. Man kann daher das ganze System, nachdem man zuerst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertragen hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification; für alle Punkte des Systems die Werthe von T und U bestimmen, und von letztern auf die correspondirenden Werthe von ω (am einfachsten vermittelst einer äusserst leicht zu construirenden Hülfstafel) zurückgehen.

Insofern ein Dreiecksnetz sich doch immer nur über einen sehr mäfsigen Theil der Erdoberfläche erstreckt, läfst sich der erwähnte Zweck noch vollkommner erreichen, wenn man die allgemeine Auflösung noch etwas generalisirt, und nicht $fv = v$

sondern $fv = v + Const.$ annimmt. Offenbar würde hiedurch gar nichts gewonnen, wenn man dieser Constante einen reellen Werth beilegte, weil dadurch lediglich T und t um diese Constante verschieden, also nur die Anfangspunkte der Längen ungleich werden würden. Allein ganz anders verhält es sich, wenn man der Constante einen imaginären Werth beilegt. Setzt man dieselbe $= i \log k$, so wird

$$T = t,\quad \tang \tfrac{1}{2} U = k \tang \tfrac{1}{2}\omega \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\cos\omega}{1-\varepsilon\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Um hier über den zweckmäſsigsten Werth von k entscheiden zu können, müssen wir vor allen Dingen das Vergrösserungsverhältniſs bestimmen.

Es wird hier, in den Zeichen des 5 und ~~6~~ 7. Artikels

$$\begin{aligned} n &= aa \sin u^2 \\ N &= AA \sin U^2 \\ \varphi v &= 1 \end{aligned}$$

Also $$m = \frac{A \sin U}{a \sin u} = \frac{A \sin U}{a \sin \omega} \cdot \sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega^2)}$$

$$= \frac{A}{a} \cdot \frac{k\,(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}{\cos\tfrac{1}{2}\omega^2\,(1-\varepsilon\cos\omega)^{\varepsilon} + kk\sin\tfrac{1}{2}\omega^2\,(1+\varepsilon\cos\omega)^{\varepsilon}}$$

welches Verhältniſs also bloſs von der Breite abhängt. Die möglich geringste Abweichung von vollkommner Aehnlichkeit erhält man, wenn man k so bestimmt, daſs m für die äussersten Breiten gleich groſse Werthe erhält, wodurch von selbst m bei der mittlern Breite seinem gröſsten oder kleinsten Werthe sehr nahe seyn wird. Bezeichnet man die äussersten Werthe von ω durch ω° und ω', so erhält man auf diese Weise

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}\omega^{\circ 2}\,(1-\varepsilon\cos\omega^\circ)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega^{\circ 2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}} - \dfrac{\cos\frac{1}{2}\omega'^2\,(1-\varepsilon\cos\omega')^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega'^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega'^2\,(1+\varepsilon\cos\omega')^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega'^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}} - \dfrac{\sin\frac{1}{2}\omega^{\circ 2}\,(1+\varepsilon\cos\omega^\circ)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos\omega^{\circ 2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}}}$$

Um zu erfahren, bei welcher Breite m seinen gröfsten oder kleinsten Werth erhält, haben wir

$$\frac{dm}{m} = cotang\, U \,.\, dU - cotang\, \omega \,.\, d\omega + \frac{\varepsilon\varepsilon \cos \omega \,.\, \sin \omega \,.\, d\omega}{1 - \varepsilon\varepsilon \cos \omega^2}$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{d\omega}{\sin \omega} - \frac{\varepsilon\varepsilon \sin \omega \,.\, d\omega}{1 - \varepsilon\varepsilon \cos \omega^2} = \frac{(1 - \varepsilon\varepsilon)\, d\omega}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos \omega^2) \sin \omega}$$

und hieraus

$$\frac{dm}{m} = \frac{(1 - \varepsilon\varepsilon)\, d\omega}{\sin \omega (1 - \varepsilon\varepsilon \cos \omega^2)} \,.\, (\cos U - \cos \omega)$$

Hieraus erhellet, dafs m da seinen gröfsten oder kleinsten Werth erhält, wo $U = \omega$ wird; bezeichnet man den Werth von ω an dieser Stelle durch W, so wird

$$k = \left(\frac{1 - \varepsilon \cos W}{1 + \varepsilon \cos W}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \text{ oder } \cos W = \frac{1 - k^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon (1 + k^{\frac{2}{\varepsilon}})}$$

woraus man W bestimmen kann, wenn k nach der obigen Formel berechnet ist. Für die Ausübung wird inzwischen auf die ganz genaue Gleichheit der Werthe von m an den äussersten Breiten wenig ankommen, und man kann sich begnügen, für $90^\circ - W$ ungefähr die mittlere Breite zu wählen, und daraus k abzuleiten. Den allgemeinen Zusammenhang zwischen U und ω gibt dann die Formel

$$tang\, \tfrac{1}{2} U = tang\, \tfrac{1}{2} \omega \left\{\frac{(1 - \varepsilon \cos W)(1 + \varepsilon \cos \omega)}{(1 + \varepsilon \cos W)(1 - \varepsilon \cos \omega)}\right\}^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Zur wirklichen numerischen Berechnung ist es jedoch vortheilhafter, Reihen anzuwenden, denen man verschiedene Formen geben kann, bei deren Entwicklung wir uns aber hier nicht aufhalten.

Da man übrigens leicht sieht, dafs für $\omega < W$, $U > \omega$, also $\cos U - \cos \omega$ und mithin auch $\frac{dm}{d\omega}$ negativ; und für $\omega > W$, $U < \omega$, mithin $\frac{dm}{d\omega}$ positiv wird, so ist klar, dafs für $\omega = U = W$ der Werth von m allemal ein Minimum wird, und zwar

$$= \frac{A}{a} \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos W^2)}$$

Wählt man also den Halbmesser der Kugel $A = \frac{a}{\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos W^2)}}$, so ist die Darstellung unendlich kleiner Theile des Ellipsoids bei der Breite $90° - W$ dem Urbilde nicht bloſs ähnlich, sondern gleich, bei andern Breiten aber gröſser.

Man kann den Logarithmen von m mit Vortheil in eine nach den Potenzen von $\cos U - \cos W$ fortlaufende Reihe entwickeln, deren erste für die Ausübung zureichende Glieder diese sind

$$\log hyp. m = \log \left\{ \frac{A}{a} \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos W^2)} \right\} + \frac{\varepsilon\varepsilon}{2(1-\varepsilon\varepsilon)} \cdot (\cos U - \cos W)^2$$
$$- \frac{2\varepsilon^4 \cos W}{3(1-\varepsilon\varepsilon)^2} \cdot (\cos U - \cos W)^3 \ldots.$$

Wenn also z. B. die Dänische Monarchie innerhalb der Grenzen der Breite 53° und 58° auf diese Weise auf die Kugelfläche übertragen und $W = 34° 30'$ gesetzt wird, so wird bei der Abplattung $\frac{1}{303}$ die Darstellung an den Grenzen, linearisch gerechnet, nur um $\frac{1}{530000}$ vergröſsert.

Wir müssen uns hier damit begnügen, nur eine kurze Andeutung von einer Benutzungsart des Uebertragens der Figuren in der höhern Geodäsie gegeben zu haben, und eine angemessenere Ausführung für einen andern Ort versparen.

14.

Es bleibt uns noch übrig, einen in unsrer allgemeinen Auflösung vorkommenden Umstand hier etwas ausführlicher zu betrachten. Wir haben im 5. Artikel gezeigt, daſs allemal zwei Auflösungen Statt finden, indem entweder $P + iQ$ einer Function von $p + iq$, und $P - iQ$ einer Function von $p - iq$ gleich werden muſs; oder $P + iQ$ einer Function von $p - iq$, und $P - iQ$ einer Function von $p + iq$. Wir wollen nun noch zeigen, daſs allemal bei der einen Auflösung die Theile in der Darstellung zugleich eine ähnliche Lage haben, wie im Dargestellten; bei der andern Auflösung hingegen verkehrt liegen; zugleich wollen wir das Criterium angeben, nach welchem dieses a priori unterschieden werden kann.

Zuvörderst bemerken wir, daſs von vollkommner oder verkehrter Aehnlichkeit nur insofern die Rede seyn kann, als an jeder der beiden Flächen zwei Seiten unterschieden werden, wovon die eine als die obere, die andere als die untere betrachtet wird. Da dieses an sich etwas willkürliches ist, so sind beide Auflösungen gar nicht wesentlich verschieden, und eine verkehrte Aehnlichkeit wird zur vollkommnen, sobald man bei der einen Fläche die vorher als obere betrachtete Seite zur untern macht. Bei unsrer Auflösung konnte daher diese Unterscheidung gar nicht vorkommen, da die Flächen bloſs durch die Coordinaten ihrer Punkte bestimmt wurden. Will man auf diesen Unterschied eingehen, so muſs zuvor die Natur der Flächen auf eine andere Art festgelegt werden, welche ihn mit in sich faſst. Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, daſs die Natur der ersten Fläche durch die Gleichung $\psi = 0$ bestimmt werde, wo ψ eine gegebne einförmige Function von x, y, z ist. In allen Punkten der Fläche wird also der Werth von ψ verschwinden, und in allen Punkten des Raumes, welche der Fläche nicht angehören, wird er nicht verschwinden. Bei einem Durchgange durch die Fläche wird also, wenigstens allgemein zu reden, der Werth von ψ aus dem Positiven ins Negative, bei dem entgegengesetzten aus dem Negativen ins Positive übergehen, oder auf der einen Seite der Fläche wird der Werth von ψ positiv, auf der andern negativ seyn: die erstere wollen wir als die obere, die andere als die untere betrachten. Ganz eben so soll es bei der zweiten Fläche gehalten werden, indem ihre Natur durch die Gleichung $\Psi = 0$ bestimmt wird, wo Ψ eine gegebne einförmige Function der Coordinaten X, Y, Z ist. Es gebe ferner die Differentiation

$$d\psi = e\,dx + g\,dy + h\,dz$$
$$d\Psi = E\,dX + G\,dY + H\,dZ$$

wo e, g, h Functionen von x, y, z, und E, G, H Functionen von X, Y, Z seyn werden.

Da die Betrachtungen, durch welche wir zu dem vorgesetzten Ziele gelangen müssen, obwohl an sich nicht schwierig, doch etwas ungewöhnlicher Art sind, so wollen wir uns bemühen, ihnen die gröſste Klarheit zu geben. Wir wollen zwischen den beiden einander entsprechenden Darstellungen auf den Flächen, deren Gleichungen $\psi = 0$ und $\Psi = 0$ sind, sechs Zwischen-Darstellungen in der Ebne annehmen, so daſs acht verschiedene Darstellungen in Betracht kommen, nemlich

	indem als correspondirend betrachtet werden die Punkte, deren Coordinaten resp. =
1s das Urbild in der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$	x, y, z
2s Darstellung in der Ebne	$x, y, 0$
3s ——— — — ———	$t, u, 0$
4s ——— — — ———	$p, q, 0$
5s ——— — — ———	$P, Q, 0$
6s ——— — — ———	$T, U, 0$
7s ——— — — ———	$X, Y, 0$
8s Abbildung in der Fläche, deren Gleichung $\Psi = 0$	X, Y, Z

Wir wollen nun diese verschiednen Darstellungen unter einander lediglich in Beziehung auf die gegenseitige Lage der unendlich kleinen Linearelemente vergleichen, indem wir das Gröſsenverhältniſs ganz bei Seite setzen; als ähnlichliegend werden also zwei Darstellungen betrachtet, wenn von zwei aus Einem Punkte ausgehenden Linearelementen dem in der einen Darstellung rechts liegenden auch in der andern das rechts liegende entspricht; im entgegengesetzten Falle werden sie verkehrtliegende heiſsen. Bei der Ebne, von Nro. 2–7 wird immer die Seite, wo die positiven Werthe der dritten Coordinate liegen, als die obere betrachtet; bei der ersten und letzten Fläche hingegen ist die Unterscheidung der obern und untern Seite bloſs von dem positiven oder negativen Werthe von ψ und Ψ abhängig, wie schon oben festgesetzt ist.

Hier ist nun zuvörderst klar, dafs für jede Stelle der ersten Fläche, wo man bei ungeändertem x und y durch ein positives Increment von z auf deren obere Seite kommt, die Darstellung in 2 mit der in 1 ähnlichliegend seyn wird; dies wird also offenbar überall zutreffen, wo h positiv ist; und das Gegentheil wird bei einem negativen h eintreten, wo die Darstellungen verkehrt liegend seyn werden.

Auf dieselbe Weise werden die Darstellungen in 7 und 8 ähnlich liegend oder verkehrt liegend seyn, jenachdem H positiv oder negativ ist.

Um die Darstellungen in 2 und 3 unter sich zu vergleichen, sei in der erstern ds die Länge einer unendlich kleinen Linie von dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, zu einem andern, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ sind, und l dessen Neigung gegen die Abscissenlinie wachsend in dem Sinn, in welchem man von der Axe der x zu der Axe der y übergeht, also $dx = ds \cdot \cos l$, $dy = ds \cdot \sin l$. In der Darstellung 3 sei $d\sigma$ die Gröfse der Linie, welche der ds entspricht, und ihre Neigung zur Abscissenlinie, wie vorhin verstanden, λ, so dafs $dt = d\sigma \cdot \cos\lambda$, $du = d\sigma \cdot \sin\lambda$. Man hat also, in den Bezeichnungen des 4. Artikels

$$ds \cdot \cos l = d\sigma\,(a \cos\lambda + a' \sin\lambda)$$
$$ds \cdot \sin l = d\sigma\,(b \cos\lambda + b' \sin\lambda)$$

folglich

$$\operatorname{tang} l = \frac{b \cos\lambda + b' \sin\lambda}{a \cos\lambda + a' \sin\lambda}$$

Betrachtet man nun x und y als constant, und l, λ als veränderlich, so gibt die Differentiation

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{ab' - ba'}{(a \cos\lambda + a' \sin\lambda)^2 + (b \cos\lambda + b' \sin\lambda)^2} = (ab' - ba') \cdot \frac{d\sigma^2}{ds^2}$$

Man sieht also, dafs jenachdem $ab' - ba'$ positiv oder negativ ist, l und λ immer zugleich wachsen, oder sich entgegengesetzt ändern, und also im erstern Fall die Darstellungen 2 und 3 ähnlich liegend, im andern verkehrt liegend sind.

Aus der Verbindung dieses Resultats mit dem vorhingefundenen ergibt sich, daſs die Darstellungen in 1 und 3 ähnlichliegend oder verkehrt liegend sind, je nachdem $\frac{ab' - ba'}{h}$ positiv oder negativ ist.

Da auf der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ ist,

$$edx + gdy + hdz = 0 \quad \text{also auch}$$
$$(ea + gb + hc)\,dt + (ea' + gb' + hc')\,du = 0$$

wird, wie auch immer das Verhältniſs von dt und du gewählt wird, so muſs offenbar identisch

$$ea + gb + hc = 0, \quad ea' + gb' + hc' = 0$$

werden, woraus folgt, daſs e, g, h resp. den Gröſsen $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ proportional sind, also

$$\frac{bc' - cb'}{e} = \frac{ca' - ac'}{g} = \frac{ab' - ba'}{h}$$

Man kann also, welchen dieser drei Ausdrücke man will, oder wenn man mit der ihrer Natur nach positiven Gröſse $ee + gg + hh$ multiplicirt, die sich ergebende symmetrische Gröſse

$$ebc' + gca' + hab' - ecb' - gac' - hba'$$

als Criterium der ähnlichen oder verkehrten Lage der Theile in den Darstellungen 1 und 3 anwenden.

Ganz eben so wird ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 6 und 8 von dem positiven oder negativen Werthe der Gröſse

$$\frac{BC' - CB'}{E} = \frac{CA' - AC'}{G} = \frac{AB' - BA'}{H}$$

oder wenn man lieber will, der symmetrischen

$$EBC' + GCA' + HAB' - ECB' - GAC' - HBA'$$

abhangen.

Die Vergleichung der Darstellungen in 3 und 4 beruhet auf ganz ähnlichen Gründen, wie die von 2 und 3, und die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile hängt von dem positiven oder negativen Zeichen der Gröſse

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right)\cdot\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

ab; und eben so bestimmt das positive oder negative Zeichen von

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dT}\right)$$

die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 5 und 6.

Was endlich die Vergleichung der Darstellungen 4 und 5 unter sich betrifft, so können wir uns auf die Analyse des 8. Artikels beziehen, aus welcher erhellet, daſs jene in den kleinsten Theilen ähnlich, oder verkehrt liegend sind, je nachdem man die erste oder zweite Auflösung gewählt, d. i. entweder

$P+iQ=f(p+iq)$ und $P-iQ=f'(p-iq)$, oder
$P+iQ=f(p-iq)$ und $P-iQ=f'(p+iq)$ gesetzt hat.

Aus diesem allen ziehen wir nunmehro den Schluſs, daſs man, wenn die Darstellung auf der Fläche, deren Gleichung $\Psi=0$ ist, dem Urbilde auf der Fläche, deren Gleichung $\psi=0$ ist, in den kleinsten Theilen nicht bloſs ähnlich, sondern auch ähnlichliegend seyn soll, auf die Anzahl der negativen Gröſsen, welche unter diesen vier Grössen vorkommen,

$$\frac{ab'-ba'}{h},\ \left(\frac{dp}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right)\cdot\left(\frac{dq}{dt}\right),\ \left(\frac{dP}{dT}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right)\cdot\left(\frac{dQ}{dT}\right),\ \frac{AB'-BA'}{H}$$

Rücksicht nehmen muſs; ist gar keine oder eine gerade Anzahl darunter, so wird die erste; ist eine oder drei negative unter ihnen, so wird die zweite Auflösung gewählt werden müssen. Bei entgegengesetzter Wahl findet allemahl eine verkehrte Aehnlichkeit Statt.

Uebrigens läſst sich noch zeigen, daſs, wenn obige vier Gröſsen resp. mit r, s, S. R bezeichnet werden, allemahl

$$\frac{r\sqrt{(ee+gg+hh)}}{s} = \pm n,\quad \frac{R\sqrt{(EE+GG+HH)}}{S} = \pm N$$

wird, n und N in der Bedeutnng des 5. Art. genommen; wir übergehen jedoch hier den nicht schwer zu findenden Beweis dieses Theorems, da dieses für unsern Zweck nicht weiter nöthig ist.