ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ERSTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1852.

ABHANDLUNGEN

ERSTER BAND.

INHALT.

P. A. HANSEN

I.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG

EINES

BELIEBIGEN SYSTEMS

VON

LINEARISCHEN GLEICHUNGEN.

II.

ÜBER DIE

ENTWICKELUNG DER GRÖSSE

$(1 - 2\,\alpha\,H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$

NACH DEN POTENZEN VON α.

I.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG EINES BELIEBIGEN SYSTEMS VON LINEARISCHEN GLEICHUNGEN.

Die Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen ist längst gegeben und wird in fast allen Lehrbüchern vorgetragen; allein das Verfahren, welches man dafür entwickelt, wird unübersichtlich, sobald die Zahl der Unbekannten etwas gross ist, und verliert fast schon bei drei, und vielmehr noch bei vier oder mehr Unbekannten seine Anwendbarkeit; dies Verfahren verlangt überdies für jede grössere Anzahl von Unbekannten die besondere Construction der anzuwendenden Formeln.

Bezeichnet man die gegebenen Gleichungen, wie folgt:

$$\begin{aligned} ax + bx' + \text{etc.} + q &= 0 \\ a'x + b'x' + \text{etc.} + q' &= 0 \\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich für zwei Unbekannte und eben so viele Gleichungen der Nenner der Ausdrücke der Unbekannten =

$$ab' - ba'$$

und hieraus kann man nicht unmittelbar den Nenner der Unbekannten berechnen, wenn man deren drei und eben so viele Gleichungen hat, sondern man muss im Voraus die Coefficienten der dritten Unbekannten und die der ersten und zweiten Unbekannten in der dritten Gleichung vermittelst gewisser Versetzungen in den obigen Ausdruck einführen, und dadurch die folgende Form construieren:

$$ab'c'' - ba'c'' + ac'b'' - bc'a'' + ca'b'' - cb'a''$$

welche nun der Nenner ist. Diese Formel kann man eben so wenig unmittelbar anwenden, wenn vier oder mehr Unbekannte durch eben so viele Gleichungen gegeben sind, sondern muss immer von Neuem die anzuwendende Formel aus der nächst vorhergehenden, für die um Eins geringere Anzahl von Unbekannten geltenden, ableiten.

Dieser Umstand, so wie die oben erwähnte Unübersichtlichkeit dieser Formeln für eine grössere Anzahl von Unbekannten hat veranlasst, dass man sich in der Praxis selten oder nie derselben bedient, sondern, wenn das gegebene System von Gleichungen nicht etwa näherungsweise aufgelöst werden kann, auf mechanische Weise eine Unbekannte nach der andern eliminiert.

Es schien mir daher nützlich ein Verfahren zu suchen, welches grössere Uebersicht gewährt wie jenes, und nicht für jede Anzahl von Unbekannten erst die besondere Construction der anzuwendenden Formeln verlangt, sondern die für einige wenige Unbekannte vollständig ausgeschriebenen Formeln ohne Weiteres auf jede grössere Anzahl derselben anzuwenden gestattet. Ich fand bald die Auflösung, die in den folgenden Blättern enthalten ist, und die die Eigenschaften besitzt, die ich so eben als wünschenswerth angeführt habe. Diese Auflösung ist derjenigen analog, welche GAUSS schon vor Jahren für das specielle System von linearischen Gleichungen gegeben hat, auf welches man bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hingeführt wird, und die sich nun als ein specieller Fall dieser für jedes System von linearischen Gleichungen gültigen darstellt. Diese Auflösung zerfällt durch eine Aenderung die man mit einigen der Hülfsgrössen vornehmen kann, in zwei, die in der Anwendung sich merklich von einander unterscheiden. Die erste derselben ist die allgemeinere, indem sie nicht nur die Werthe der Unbekannten, sondern auch die Coefficienten der unbestimmten Auflösung explicite giebt. Die zweite empfiehlt sich durch kürzere Rechnung wie die erste, wenn es sich bloss um die Ermittelung der Werthe der Unbekannten handelt, giebt jedoch auch die Coefficienten der unbestimmten Auflösung durch eine Rechnung, die nicht länger ist wie die, welche die erste Auflösung hiefür verlangt, wenn man alle auszuführenden Rechnungen in Betracht zieht.

Nach der Ableitung dieser beiden Auflösungen berücksichtige ich den Fall, wo alle Gleichungen des gegebenen Systems von Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, und wo man also die Werthe der Unbekannten nicht berechnen kann. Ich gebe das Kennzeichen hiefür an, und zeige, wie man die Bedingungsgleichung selbst, die dann zwischen den gegebenen Gleichungen nothwendig statt finden muss, auf eine einfache Art direct erhalten kann. Hiefür zeigt sich die erste Auflösung etwas einfacher wie die zweite, indem gewisse darin ohnehin vorkommende Hülfsgrössen zugleich die Coefficienten dieser Bedingungsgleichung sind.

Endlich habe ich die Anwendung der Auflösung und die bemerkenswerthen Einzelheiten, die dabei vorkommen, durch Beispiele erläutert.

1.

Seien

$$\left.\begin{aligned}(aa)\,x + (ab)\,x' + (ac)\,x'' + (ad)\,x''' + \text{etc.} + q &= 0\\ (ba)\,x + (bb)\,x' + (bc)\,x'' + (bd)\,x''' + \text{etc.} + q' &= 0\\ (ca)\,x + (cb)\,x' + (cc)\,x'' + (cd)\,x''' + \text{etc.} + q'' &= 0\\ (da)\,x + (db)\,x' + (dc)\,x'' + (dd)\,x''' + \text{etc.} + q''' &= 0\\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ein beliebiges System von linearischen Gleichungen, in welchen x, x', etc die unbekannten Grössen bedeuten, und die Coefficienten (aa), (ab), (ba), etc. von einander unabhängig sind. Man multipliciere die erste Gleichung mit der unbestimmten Grösse α, und addiere sie hierauf zur zweiten. Hierdurch entsteht

$$[(aa)\,\alpha + (ba)]\,x + [(ab)\,\alpha + (bb)]\,x' + [(ac)\,\alpha + (bc)]\,x'' + [(ad)\,\alpha + (bd)\,x'''] + \text{etc.}$$
$$+ [q\alpha + q'] = 0.$$

Setzen wir nun

$$\left.\begin{aligned}(aa)\,\alpha + (ba) &= 0\\ (ab)\,\alpha + (bb) &= (bb,1)\\ (ac)\,\alpha + (bc) &= (bc,1)\\ (ad)\,\alpha + (bd) &= (bd,1)\\ \text{etc.}&\\ q\alpha + q' &= Q'\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

so ergiebt sich

$$(bb,1)\,x' + (bc,1)\,x'' + (bd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q' = 0,$$

in welcher x eliminiert ist.

Multiplicieren wir ferner die erste Gleichung mit α', die zweite mit β', und addieren beide hierauf zur dritten, so bekommen wir, wenn wir

$$\left.\begin{aligned}(aa)\,\alpha' + (ba)\,\beta' + (ca) &= 0\\ (ba)\,\alpha' + (bb)\,\beta' + (cb) &= 0\\ (ca)\,\alpha' + (bc)\,\beta' + (ce) &= (cc,2)\\ (da)\,\alpha' + (bd)\,\beta' + (ed) &= (cd,2)\\ \text{etc.}&\\ q\alpha' + q'\beta' \;\; q'' &= Q''\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

setzen,

$$(cc,2)\,x'' + (cd,2)\,x''' + \text{etc.} + Q'' = 0,$$

wo x und x' eliminiert sind. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich ferner

$$
(4)\quad \begin{cases}
(aa)\,\alpha'' + (ba)\,\beta'' + (ca)\,\gamma'' + (da) = 0 \\
(ab)\,\alpha'' + (bb)\,\beta'' + (cb)\,\gamma'' + (db) = 0 \\
(ac)\,\alpha'' + (bc)\,\beta'' + (cc)\,\gamma'' + (dc) = 0 \\
(ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma'' + (dd) = (dd,3) \\
\qquad\qquad \text{etc.} \\
q\alpha'' + q'\beta'' + q''\gamma'' + q''' = Q''' \\
(dd,3)\,x''' + \text{etc.} + Q''' = 0
\end{cases}
$$

und so fort, bis alle vorgegebenen Gleichungen erschöpft sind. Das ursprüngliche System von linearischen Gleichungen wird also durch dieses Verfahren in folgendes verwandelt:

$$
\begin{aligned}
(aa)\,x + (ab)\,x' + (ac)\,x'' + (ad)\,x''' + \text{etc.} + q &= 0 \\
(bb,1)\,x' + (bc,1)\,x'' + (bd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q' &= 0 \\
(cc,2)\,x'' + (cd,2)\,x''' + \text{etc.} + Q'' &= 0 \\
(dd,3)\,x''' + \text{etc.} + Q''' &= 0 \\
\text{etc.} &
\end{aligned}
$$

wo in jeder nachfolgenden Gleichung immer eine unbekannte Grösse weniger vorkommt, wie in der vorhergehenden, so dass die letzte derselben nur Eine Unbekannte enthält.

Diese Gleichungen haben demnach dieselbe Form, welche Gauss zuerst dem speciellen System von linearischen Gleichungen, auf welches die Methode der kleinsten Quadrate hinführt, gegeben hat. Gleichwie in diesem Falle kann man in dem hier behandelten allgemeineren die vorstehenden Gleichungen weiter entwickeln und vollständig auflösen.

Die eben entwickelten Gleichungen zeigen, dass man jedenfalls setzen kann:

$$
(5)\quad \begin{cases}
-x = \frac{q}{(aa)} + \frac{Q'}{(bb,1)}\,A + \frac{Q''}{(cc,2)}\,A' + \frac{Q'''}{(dd,3)}\,A'' + \text{etc.} \\
-x' = \frac{Q'}{(bb,1)} + \frac{Q''}{(cc,2)}\,B' + \frac{Q'''}{(dd,3)}\,B'' + \text{etc.} \\
-x'' = \frac{Q''}{(cc,2)} + \frac{Q'''}{(dd,3)}\,C'' + \text{etc.} \\
-x''' = \frac{Q'''}{(dd,3)} + \text{etc.} \\
\qquad\qquad \text{etc.}
\end{cases}
$$

wo A, A', etc., B', etc. unbestimmte Grössen sind. Substituieren wir nun diese Werthe der Unbekannten in die vorhergehenden Gleichungen, so bekommen wir identische Gleichungen, die in eben so viele zerfallen, wie unbestimmte Grössen vorhanden sind, und also diese bestimmen. Wir erhalten dadurch die folgenden Gleichungen, aus welchen A, A', etc., B', etc. bestimmt werden müssen.

$$(aa)\,A + (ab) = 0$$

$$(aa)\,A' + (ab)\,B' + (ac) = 0$$
$$(bb,1)\,B' + (bc,1) = 0$$

$$(aa)\,A'' + (ab)\,B'' + (ac)\,C'' + (ad) = 0$$
$$(bb,1)\,B'' + (bc,1)\,C'' + (bd,1) = 0$$
$$(cc,2)\,C'' + (cd,2) = 0$$

etc.

Diese Gleichungen sind denen, von welchen wir ausgegangen sind, ähnlich, und die Unbekannten haben dieselben Coefficienten, nur ist die Zahl aller Unbekannten hier successive von unten an gerechnet, immer um Eins kleiner, und die bekannten Glieder sind die Coefficienten der zuletzt weggefallenen Unbekannten. Wir können hier ebenfalls setzen:

$$-A'' = \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,G + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,G'$$
$$-B'' = \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,H'$$
$$-C'' = \frac{(cd,2)}{(cc,2)}$$

und ebenso für die andern der vorstehenden Systeme von Gleichungen. Die Substitution dieser Gleichungen giebt zur Bestimmung von G, G', H' die folgenden Gleichungen:

$$(aa)\,G + (ab) = 0$$

$$(aa)\,G' + (ab)\,H' + (ac) = 0$$
$$(bb,1)\,H' + (bc,1) = 0$$

welche mit den, dem System für A'', B'', C'', vorangehenden obigen Systemen identisch sind. Hierdurch wird also offenbar, dass

$$G = A,\ G' = A',\ H' = B',\ \text{etc.}$$

und wir haben daher sofort zur Bestimmung von A, A', etc., B', die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
-A &= \frac{(ab)}{(aa)}\\
-A' &= \frac{(ac)}{(aa)} + \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\,A\\
-B' &= \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\\
-A'' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\,A + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,A'\\
-B'' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\,B'\\
-C'' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

welche wiederum den Ausdrücken (5) zur Bestimmung der Unbekannten selbst analog sind.

2.

Um durch Anwendung der Ausdrücke (6) und (5) die Werthe der Unbekannten berechnen zu können, müssen durch Hülfe der Ausdrücke (2), (3), (4), etc. die Coefficienten $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. $(cc,2)$, etc. Q', Q'', etc. berechnet werden. Hier zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der vorliegenden Aufgabe und der Auflösung des speciellen Systems von Gleichungen, worauf die Methode der kleinsten Quadrate führt. Wir haben hier, zufolge der Ausdrücke (2), (3), (4), etc. die folgenden Systeme von linearischen Gleichungen aufzulösen:

$$(aa)\ \alpha + (ba) = 0$$

$$\begin{aligned}(aa)\ \alpha' + (ba)\ \beta' + (ca) &= 0\\ (ab)\ \alpha' + (bb)\ \beta' + (cb) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aa)\ \alpha'' + (ba)\ \beta'' + (ca)\ \gamma'' + (da) &= 0\\ (ab)\ \alpha'' + (bb)\ \beta'' + (cb)\ \gamma'' + (db) &= 0\\ (ac)\ \alpha'' + (bc)\ \beta'' + (cc)\ \gamma'' + (dc) &= 0\end{aligned}$$

etc.

die sich von dem ursprünglichen System darin unterscheiden, dass die Coefficienten, die dort in horizontaler Reihe stehen, sich hier in verticaler befinden, und umgekehrt. Bei der Auflösung der Gleichungen, die die Methode der kleinsten Quadrate giebt, haben im Gegentheil die den vorstehenden correspondirenden Hülfsgleichungen die nämliche Form wie die gegebenen, welches man leicht erkennt, wenn man $(ba) = (ab)$, etc. macht.

3.

Um die Auflösung der eben angeführten Gleichungen zu bewerkstelligen, wollen wir im Allgemeinen ein System von Gleichungen betrachten, in welchem die Coefficienten der horizontalen Reihen denen der verticalen im ursprünglichen System, und umgekehrt, gleich sind, und dieses System in Bezug auf das ursprüngliche das reciproke System nennen. Sei daher das reciproke System das folgende:

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned}(aa)\ y + (ba)\ y' + (ca)\ y'' + (da)\ y''' + \text{etc.} + r &= 0\\ (ab)\ y + (bb)\ y' + (cb)\ y'' + (db)\ y''' + \text{etc.} + r' &= 0\\ (ac)\ y + (bc)\ y' + (cc)\ y'' + (dc)\ y''' + \text{etc.} + r'' &= 0\\ (ad)\ y + (bd)\ y' + (cd)\ y'' + (dd)\ y''' + \text{etc.} + r''' &= 0\\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad &\ \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Zur Auflösung dieses Systems haben wir dem Vorhergehenden zu Folge, wenn wir die betreffenden Verwandlungen vornehmen, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha_1 + (ab) = 0\\
&(ba)\,\alpha_1 + (bb) = (bb,1)\\
&(ca)\,\alpha_1 + (cb) = (cb,1)\\
&(da)\,\alpha_1 + (db) = (db,1)\\
&\qquad\text{etc.}\\
&r\alpha_1 + r' = R'
\end{aligned}\right\}\quad(2')$$

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha_1' + (ab)\,\beta_1' + (ac) = 0\\
&(ba)\,\alpha_1' + (bb)\,\beta_1' + (bc) = 0\\
&(ca)\,\alpha_1' + (cb)\,\beta_1' + (cc) = (cc,2)\\
&(da)\,\alpha_1' + (db)\,\beta_1' + (dc) = (dc,2)\\
&\qquad\text{etc.}\\
&r\alpha_1' + r'\beta_1' + r'' = R''
\end{aligned}\right\}\quad(3')$$

$$\left.\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha_1'' + (ab)\,\beta_1'' + (ac)\,\gamma_1'' + (ad) = 0\\
&(ba)\,\alpha_1'' + (bb)\,\beta_1'' + (bc)\,\gamma_1'' + (bd) = 0\\
&(ca)\,\alpha_1'' + (cb)\,\beta_1'' + (cc)\,\gamma_1'' + (cd) = 0\\
&(da)\,\alpha_1'' + (db)\,\beta_1'' + (dc)\,\gamma_1'' + (dd) = (dd,3)\\
&\qquad\text{etc.}\\
&r\alpha_1'' + r'\beta_1'' + r''\gamma_1'' + r''' = R'''.
\end{aligned}\right\}\quad(4')$$

u. s. w. Ferner

$$\left.\begin{aligned}
-A_1 &= \frac{(ba)}{(aa)}\\
-A_1' &= \frac{(ca)}{(aa)} + \frac{(cb,1)}{(bb,1)}\,A_1\\
-B_1' &= \frac{(cb,1)}{(bb,1)}\\
-A_1'' &= \frac{(da)}{(aa)} + \frac{(db,1)}{(bb,1)}\,A_1 + \frac{(dc,2)}{(cc,2)}\,A_1'\\
-B_1'' &= \frac{(db,1)}{(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{(cc,2)}\,B_1'\\
-C_1'' &= \frac{(dc,2)}{(cc,2)}\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(6')$$

$$\left.\begin{aligned}
-y &= \frac{r}{(aa)} + \frac{R'}{(bb,1)}\,A_1 + \frac{R''}{(cc,2)}\,A_1' + \frac{R'''}{(dd,3)}\,A_1'' + \text{etc.}\\
-y' &= \frac{R'}{(bb,1)} + \frac{R''}{(cc,2)}\,B_1' + \frac{R'''}{(dd,3)}\,B_1'' + \text{etc.}\\
-y'' &= \frac{R''}{(cc,2)} + \frac{R'''}{(dd,3)}\,C_1'' + \text{etc.}\\
-y''' &= \frac{R'''}{(dd,3)} + \text{etc.}\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(5')$$

4.

Bevor ich weiter gehe, mache ich darauf aufmerksam, dass ich im vorhergehenden Artikel Gruppen von Grössen, die äusserlich von den correspondirenden in Art. 1. verschieden sind, dieselben abkürzenden Bezeichnungen $(bb,1)$, $(cc,2)$, $(dd,3)$, etc. gegeben habe. Es ist daher zu beweisen, dass diese in der That identisch sind. Nehmen wir die beiden Ausdrücke für $(dd,3)$ vor; diese erfordern, dass

$$(da)\,\alpha''_1 + (db)\,\beta''_1 + (dc)\,\gamma''_1 = (ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma''$$

sei. Um zu zeigen, dass diese Gleichung in der That in allen Fällen statt findet, substituiere ich die Werthe von (da), (db), (dc), welche sich aus den drei ersten Gleichungen (4), so wie die von (ad), (bd), $cd)$, welche sich aus den drei ersten Gleichungen (4′) ergeben.

Hierdurch entsteht ohne Weiteres:

$$\begin{aligned}
&(aa)\,\alpha''\,\alpha''_1 + (ba)\,\beta''\,\alpha''_1 + (ca)\,\gamma''\,\alpha''_1 \\
&+ (ab)\,\alpha''\,\beta''_1 + (bb)\,\beta''\,\beta''_1 + (cb)\,\gamma''\,\beta''_1 \\
&+ (ac)\,\alpha''\,\gamma''_1 + (bc)\,\beta''\,\gamma''_1 + (cc)\,\gamma''\,\gamma''_1 = \\
&(aa)\,\alpha''_1\,\alpha'' + (ab)\,\beta''_1\,\alpha'' + (ac)\,\gamma''_1\,\alpha'' \\
&+ (ba)\,\alpha''_1\,\beta'' + (bb)\,\beta''_1\,\beta'' + (bc)\,\gamma''_1\,\beta'' \\
&+ (ca)\,\alpha''_1\,\gamma'' + (cb)\,\beta''_1\,\gamma'' + (cc)\,\gamma''_1\,\gamma''
\end{aligned}$$

welches $0 = 0$ ist. Eben so beweist man die Identität der übrigen Ausdrücke, welche mit demselben Zeichen bezeichnet worden sind.

5.

Aus den Vorhergehenden ergiebt sich nun, dass man, um zur Auflösung des ursprünglichen Systems von n Unbekannten zu gelangen, eine Reihe von reciproken Systemen auflösen muss, von welchen das ausgedehnteste $n - 1$ Unbekannte enthält. Um diese aufzulösen, muss man eine Reihe von ursprünglichen Systemen auflösen, von welchen das ausgedehnteste $n - 2$ Unbekannte enthält. Dann wieder eine Reihe von reciproken Systemen, von welchen das ausgedehnteste $n - 3$ Unbekannte enthält, und so fort, bis man endlich auf Eine ursprüngliche und Eine reciproke Gleichung kommt, nämlich auf die beiden Gleichungen

$$(aa)\,\alpha + (ba) = 0 \text{ und } (aa)\,\alpha_1 + (ab) = 0.$$

Man kann daher mit diesen anfangen und successive zu den ausgedehnteren Systemen aufsteigen, wodurch man endlich die vollständig ausgeführte Auflösung des vorgegebenen Systems erhält. Vermöge der Relationen, die zwischen den Unbekannten der aufzulösenden Systeme statt finden, reduciert sich diese Arbeit sehr, und führt darauf hin, dass man erst die beiden vorstehenden Systeme von Einer Unbekannten, dann zwei Systeme von zwei Unbekannten, und so fort, bis endlich zwei Systeme von $n - 1$ Unbekannten aufzulösen hat, welche letztere alsdann unmittelbar die Auflösung des vorgegebenen Systems geben. Es enthalten ferner in diesen Reihen von Systemen immer die vorhergehenden die Vorbereitungen zur Auflösung der beiden zunächst folgenden.

6.

Gehen wir, um dieses zu zeigen, zu den Gleichungen (2) zurück. Die erste dieser giebt

$$\alpha = \frac{(ba)}{-(aa)}$$

und wenn α hieraus berechnet worden ist, geben die übrigen Gleichungen (2) die Coefficienten

$$(bb,1),\ (bc,1),\ (bd,1),\ \text{etc. } Q',$$

die Gleichungen (6') geben ferner zu erkennen, dass

$$A_1 = \alpha$$

ist. Wir kommen nun zu den Gleichungen (3). Hier haben wir zuvörderst ein reciprokes System von zwei Unbekannten aufzulösen. Wir müssen also in der im Art. 3. gegebenen allgemeinen Auflösung eines reciproken Systems die Unbekannten und die Zahl der Gleichungen auf die beiden ersten beschränken, und diese sowohl wie die bekannten Glieder den Gleichungen (3) gemäss abändern. Wir müssen daher in (5')

$$\alpha',\ \beta',\ (ca),\ (cb)$$

resp. für $y,\ y',\ r,\ r'$

setzen. Hierdurch und durch Zuziehung der Gleichungen (2') erhalten wir

$$\alpha_1 = \frac{(ab)}{-(aa)}$$

$$(ba)\,\alpha_1 + (bb) = (bb,1)$$

$$R' = (ca)\,\alpha_1 + (cb) = (cb,1)$$

und endlich, wegen $A_1 = \alpha$,

$$\alpha' = \frac{(ca)}{-(aa)} + \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}\,\alpha$$

$$\beta' = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}$$

worauf die übrigen Gleichungen (3)

$$(cc,2),\ (cd,2),\ \text{etc. } Q''$$

geben. Durch die Gleichungen (6') und (6) erkennt man ferner, dass

$$A_1' = \alpha'\,;\ B_1' = \beta'\,;\ A = \alpha_1$$

ist. Wir gehen jetzt zu den Gleichungen (4) über. Um das in diesen enthaltene reciproke System von drei Unbekannten aufzulösen, setzen wir in die allgemeine Auflösung des Art. 3.

$$\alpha'', \beta'', \gamma'', (da), (db), (dc)$$
$$\text{resp. für } y, y', y'', r, r', r''.$$

Hierdurch bekommen wir aus (2′) und (3′)

$$R' = (da)\,\alpha_1 + (db) \qquad = (db,1)$$
$$R'' = (da)\,\alpha_1' + (db)\,\beta_1' + (dc) = (dc,2)$$

und hiermit aus (5′)

$$\alpha'' = \frac{(da)}{-(aa)} + \frac{(db,1)}{-(bb,1)}\,\alpha + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\alpha'$$
$$\beta'' = \qquad \frac{(db,1)}{-(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\beta'$$
$$\gamma'' = \qquad \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,.$$

Um die Ausdrücke für α_1' und β_1', die hier gebraucht werden, zu finden, müssen wir uns an das ursprüngliche System halten, und darin nur x und x', so wie die beiden ersten Gleichungen beibehalten. Wir müssen also in diesem System, in Folge der beiden ersten Gleichungen

(3′) $\qquad x, x', q, q'$
$\qquad$ resp. in $\alpha_1', \beta_1', (ac), (bc)$

verwandeln. Hiermit ergiebt sich

$$Q' = (ac)\,\alpha + (bc) = (bc,1)$$

und

$$\alpha_1' = \frac{(ac)}{-(aa)} + \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1$$
$$\beta_1' = \qquad \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,.$$

Wir erkennen ferner durch die Gleichungen (6) und (6′), dass

$$A_1' = \alpha''; \; B_1'' = \beta''; \; C_1'' = \gamma''; \; A' = \alpha_1'; \; B' = \beta_1$$

ist. Diese Identificierungen können ohne Grenze fortgesetzt werden, und wir gelangen dadurch zur ausgeführten Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. Die bereits abgeleiteten Ausdrücke geben durch ihre regelmässige Form schon zu erkennen, wie alle folgenden zusammengesetzt sein müssen, und wir können daher jetzt schon, wenn wir sie in der Folge, wie sie zur Anwendung kommen, hinschreiben, daraus die für jede beliebige Anzahl von Unbekannten erforderlichen Ausdrücke ableiten.

7.

Es ergiebt sich somit durch die vorhergehenden Ableitungen, dass man, um das unter (1) aufgestellte beliebige System von linearischen

Gleichungen vollständig aufzulösen, die Berechnung der folgenden Ausdrücke auszuführen hat:

$$\alpha = \frac{(ba)}{-(aa)}$$

$$\begin{aligned}(ab)\,\alpha + (bb) &= (bb,1)\\ (ac)\,\alpha + (bc) &= (bc,1)\\ (ad)\,\alpha + (bd) &= (bd,1)\\ &\text{etc.}\\ q\alpha + q' &= Q'\end{aligned}$$

$$\alpha' = \frac{(ca)}{-(aa)} + \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}\,\alpha$$

$$\beta' = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}$$

$$\begin{aligned}(ac)\,\alpha' + (bc)\,\beta' + (cc) &= (cc,2)\\ (ad)\,\alpha' + (bd)\,\beta' + (cd) &= (cd,2)\\ &\text{etc.}\\ q\alpha' + q'\beta' + q'' &= Q''\end{aligned}$$

$$\alpha'' = \frac{(da)}{-(aa)} + \frac{(db,1)}{-(bb,1)}\,\alpha + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\alpha'$$

$$\beta'' = \frac{(db,1)}{-(bb,1)} + \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,\beta'$$

$$\gamma'' = \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}$$

$$\begin{aligned}(ad)\,\alpha'' + (bd)\,\beta'' + (cd)\,\gamma'' + (dd) &= (dd,3)\\ &\text{etc.}\\ q\alpha'' + q'\beta'' + q'\gamma'' + q''' &= Q'''\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{(ab)}{-(aa)}$$

$$\begin{aligned}(ba)\,\alpha_1 + (bb) &= (bb,1)\\ (ca)\,\alpha_1 + (cb) &= (cb,1)\\ (da)\,\alpha_1 + (db) &= (db,1)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

$$\alpha_1' = \frac{(ac)}{-(aa)} + \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1$$

$$\beta_1' = \frac{bc,(1)}{-(bb,1)}$$

$$\begin{aligned}(ca)\,\alpha_1' + (cb)\,\beta_1' + (cc) &= (cc,2)\\ (da)\,\alpha_1' + (db)\,\beta_1' + (dc) &= (dc,2)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

$$\alpha_1'' = \frac{(ad)}{-(aa)} + \frac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,\alpha_1'$$

$$\beta_1'' = \frac{(bd,1)}{-(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,\beta_1'$$

$$\gamma_1'' = \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}$$

$$\begin{aligned}(da)\,\alpha_1'' + (db)\,\beta_1'' + (dc)\,\gamma'' + (dd) &= (dd,3)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

u. s. w. bis zur Abtheilung, in welcher der Index der Grössen rechter Hand $= n - 1$ ist, wenn die Zahl der Unbekannten n genannt wird. Hierauf hat man

$$\begin{aligned}x &= \frac{q}{-(aa)} + \frac{Q'}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{Q''}{-(cc,2)}\,\alpha_1' + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\alpha_1'' + \text{etc.}\\ x' &= \frac{Q'}{-(bb,1)} + \frac{Q''}{-(cc,2)}\,\beta_1' + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\beta_1'' + \text{etc.}\\ x'' &= \frac{Q''}{-(cc,2)} + \frac{Q'''}{-(dd,3)}\,\gamma_1'' + \text{etc.}\\ x''' &= \frac{Q'''}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass die Endformeln für die Unbekannten denen für die Hülfsgrössen α_1, α_1', β_1', etc. analog sind, und dass diese letzteren endlich in die Unbekannten selbst übergehen.

Hat man nämlich nur zwei Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten, so erhält man die Werthe dieser, wenn man

$$\alpha'_1 = x$$
$$\beta'_1 = x'$$

macht, und in den obigen Ausdrücken für diese Hülfsgrössen

$$q \text{ für } (ac)$$
$$\text{und } Q' \text{ für } (bc,1)$$

substituiert. Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so wird

$$\alpha''_1 = x$$
$$\beta''_1 = x'$$
$$\gamma''_1 = x''$$

wenn man in die betreffenden Ausdrücke

$$q \text{ für } (ad)$$
$$Q' \text{ für } (bd,1)$$
$$Q'' \text{ für } (cd,2)$$

substituiert, u. s. f. für mehr Gleichungen und Unbekannte.

Für die Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. enthält die vorstehende Auflösung doppelte Ausdrücke, von welchen man, strenge genommen, nur die einen anzuwenden braucht, berechnet man aber beide Ausdrücke einer jeden dieser Grössen, so erhält man eine schätzbare Controlle über die Richtigkeit der vorhergehenden Rechnung.

Ich bemerke ferner, dass in der vorstehenden Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die Gaussische Auflösung des in der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden Systems von linearischen Gleichungen als specieller Fall enthalten ist. Macht man nämlich $(ba) = (ab)$, etc., so sieht man ohne Weiteres, dass die Grössen der zweiten Columne mit denen der ersten identisch werden, und diese werden alsdann mit den Hülfsgrössen identisch, welche in der genannten Gaussischen Auflösung vorkommen, obgleich in der äusseren Form eine kleine Verschiedenheit statt findet, die darin besteht, dass Gauss die Grössen $(cc2)$, $(cd,2)$, etc. $(dd,3)$, etc. von den Grössen $(bc,1)$, $(bd,1)$, etc. $(cd,2)$, etc. abhängig gemacht hat, während statt dessen hier diese Grössen in Function der Coëfficienten (bc), (bd), etc. (cd), etc. der gegebenen Gleichungen dargestellt sind.

8.

Es trifft sich zuweilen, dass man ein vorgegebenes System von linearischen Gleichungen unbestimmt auflösen muss, sei es, um den

Einfluss der einzelnen bekannten Glieder auf die Werthe der Unbekannten zu ermessen, oder aus andern Ursachen. Die unbestimmte Auflösung ergiebt sich fast unmittelbar aus der vorstehenden bestimmten, indem die darin vorkommenden Hülfsgrössen α, α', β', etc. α_1, α'_1, β'_1, etc. die Coefficienten der unbestimmten Auflösung auf eine einfache Weise bilden helfen. Die Berechnung der Q', Q'', etc. genannten Grössen wird nun überflüssig und braucht also nicht ausgeführt zu werden. Die Substitution der vorstehenden Ausdrücke dieser Grössen in die Ausdrücke für x, x', etc. giebt sogleich

$$\begin{aligned}
x &= (AA)\,q + (AB)\,q' + (AC)\,q'' + (AD)\,q''' + \text{etc.}\\
x' &= (BA)\,q + (BB)\,q' + (BC)\,q'' + (BD)\,q''' + \text{etc.}\\
x'' &= (CA)\,q + (CB)\,q' + (CC)\,q'' + (CD)\,q''' + \text{etc.}\\
x''' &= (DA)\,q + (DB)\,q' + (DC)\,q'' + (DD)\,q''' + \text{etc.}\\
&\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
(AA) &= \frac{1}{-(aa)} + \frac{\alpha}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{\alpha'}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BA) &= \frac{\alpha}{-(bb,1)} + \frac{\alpha'}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CA) &= \frac{\alpha'}{-(cc,2)} + \frac{\alpha''}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DA) &= \frac{\alpha''}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AB) &= \frac{1}{-(bb,1)}\,\alpha_1 + \frac{\beta}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\beta'}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BB) &= \frac{1}{-(bb,1)} + \frac{\beta}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\beta'}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CB) &= \frac{\beta}{-(cc,2)} + \frac{\beta'}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DB) &= \frac{\beta'}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AC) &= \frac{1}{-(cc,2)}\,\alpha'_1 + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\alpha''_1 + \text{etc.}\\
(BC) &= \frac{1}{-(cc,2)}\,\beta'_1 + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\beta''_1 + \text{etc.}\\
(CC) &= \frac{1}{-(cc,2)} + \frac{\gamma''}{-(dd,3)}\,\gamma''_1 + \text{etc.}\\
(DC) &= \frac{1}{-(dd,3)} + \text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$(AD) = \frac{1}{-(dd,3)}\,\alpha_1'' + \text{etc.}$$
$$(BD) = \frac{1}{-(dd,3)}\,\beta_1'' + \text{etc.}$$
$$(CD) = \frac{1}{-(dd,3)}\,\gamma_1'' + \text{etc.}$$
$$(DD) = \frac{1}{-(dd,3)} \quad + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

wodurch die unbestimmte Auflösung ausgeführt ist. Wenn man in diesen Ausdrücken die Bedingungen

$$\alpha = \alpha_1\,;\;\; \alpha' = \alpha_1'\,;\;\; \beta = \beta_1\,;\;\; \text{etc.}$$

einführt, die, wie man gesehen hat, unmittelbare Folge der Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. sind, so ergeben sich sofort die Gaussischen Ausdrücke für die Gewichte der Unbekannten, bei Anwendung auf die Methode der kleinsten Quadrate.

9.

Die in Vorhergehenden enthaltene Auflösung unserer Aufgabe ist so allgemein wie möglich, indem sie die ausgeführte unbestimmte Auflösung des gegebenen Systems von Gleichungen enthält. Will man aber von dieser letzteren absehen, und nur die bestimmte Auflösung haben, dann lassen sich die Ausdrücke des Art. 7. noch vereinfachen. Man kann nämlich alsdann statt der Hülfsgrössen α, α', β', etc. α_1'', α_1', β_1', etc., deren Ausdrücke zum grösseren Theil aus mehreren Gliedern bestehen, andere einführen, die durch eingliederige Ausdrücke gegeben werden, und deren logarithmische Berechnung daher wenige Mühe erfordert.

Wir könnten die nun zu entwickelnden Ausdrücke mit wenig Mühe aus denen des Art. 7. erhalten, allein da ihre directe Ableitung aus den gegebenen Gleichungen auch wenig Arbeit verursacht, und kürzer ist wie die obige Ableitung der allgemeineren Ausdrücke des Art. 7., so will ich wieder von dem gegebenen System von Gleichungen ausgehen, und diese hier zu mehrerer Deutlichkeit wiederholen.

$$(aa)\,x + (ab)\,x' + (ac)\,x'' + (ad)\,x''' + \text{etc.} + q = 0$$
$$(ba)\,x + (bb)\,x' + (bc)\,x'' + (bd)\,x''' + \text{etc.} + q' = 0$$
$$(ca)\,x + (cb)\,x' + (cc)\,x'' + (cd)\,x''' + \text{etc.} + q'' = 0$$
$$(da)\,x + (db)\,x' + (dc)\,x'' + (dd)\,x''' + \text{etc.} + q''' = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Multiplicieren wir hier die erste Gleichung mit β, und addieren sie zur zweiten; multiplicieren wir ferner die erste mit γ, und addieren sie zur dritten; multiplicieren wir ferner die erste mit δ, und addieren sie zur vierten, u. s. f., bis alle gegebenen Gleichungen erschöpft sind. Setzen wir nun in jeder der so erhaltenen Gleichungen den Coefficienten von x gleich Null, so ergeben sich zur Bestimmung der unbestimmten Factoren β, γ, δ etc. folgende Gleichungen:

$$(aa)\,\beta + (ba) = 0$$
$$(aa)\,\gamma + (ca) = 0$$
$$(aa)\,\delta + (da) = 0$$
$$\text{etc.}$$

Führen wir ausserdem die folgenden Hülfsgrössen ein:

$$(ab)\,\beta + (bb) = (bb,1);\ (ab)\,\gamma + (cb) = (cb,1);\ (ab)\,\delta + (db) = (db,1);$$
$$(ac)\,\beta + (bc) = (bc,1);\ (ac)\,\gamma + (cc) = (cc,1);\ (ac)\,\delta + (dc) = (dc,1);\ \text{etc.}$$
$$(ad)\,\beta + (bd) = (bd,1);\ (ad)\,\gamma + (cd) = (cd,1);\ (ad)\,\delta + (dd) = (dd,1);$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$q\beta + q' = Q'\ ;\ q\gamma + q'' = Q'_1\ ;\ q\delta + q''' = Q'_{11},$$

so erhalten wir folgende Gleichungen ohne x:

$$(bb,1)\,x' + (bc,1)\,x'' + (bd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q' = 0$$
$$(cb,1)\,x' + (cc,1)\,x'' + (cd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q'_1 = 0$$
$$(db,1)\,x' + (dc,1)\,x'' + (dd,1)\,x''' + \text{etc.} + Q'_{11} = 0$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

deren Anzahl $n - 1$ ist, wenn das gegebene System aus n Gleichungen besteht.

Multiplicieren wir nun die erste dieser Gleichungen mit der unbestimmten Grösse $(\gamma,1)$, und addieren sie zur zweiten; multiplicieren wir ferner die erste mit $(\delta,1)$, und addieren sie zur dritten; u. s. w., so ergeben sich, nachdem man

$$(bb,1)\,(\gamma,1) + (cb,1) = 0$$
$$(bb,1)\,(\delta,1) + (db,1) = 0$$
$$\text{etc.}$$

gemacht, und

$$(bc,1)\,(\gamma,1) + (cc,1) = (cc,2);\ (bc,1)\,(\delta,1) + (dc,1) = (dc,2);\ \text{etc.}$$
$$(bd,1)\,(\gamma,1) + (cd,1) = (cd,2);\ (bd,1)\,(\delta,1) + (dd,1) = (dd,2);$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$Q'\,(\gamma,1) + Q'_1 = Q''\ ;\ Q'\,(\delta,1) + Q'_{11} = Q''_1\ ;$$

gesetzt hat,

$$(cc,2)\, x'' + (cd,2)\, x''' + \text{etc.} + Q'' = 0$$
$$(dc,2)\, x'' + (dd,2)\, x''' + \text{etc.} + Q''_1 = 0$$
$$\text{etc.}$$

die weder x noch x' enthalten, und deren Anzahl $n - 2$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man ferner

$$(cc,2)\,(\delta,2) + (dc,2) = 0$$
$$\text{etc.}$$
$$(cc,2)\,(\delta,2) + (dd,2) = (dd,3);$$
$$\text{etc.}$$
$$Q''\,(\delta,2) + Q''_1 = Q''';$$
$$(dd,3)\, x''' + \text{etc.} + Q''' = 0$$
$$\text{etc.}$$

u. s. w., bis man zuletzt auf Eine Gleichung mit Einer Unbekannten kommt. Hermit haben wir die verlangte Auflösung schon erhalten.

10.

Durch einfache Substitution der Werthe von $(cc,1)$, $(cd,1)$, etc. $(dc,1)$, $(dd,1)$, etc. etc. in die betreffenden Ausdrücke können wir diese Grössen eliminieren und dadurch die Zahl der ähnlich bezeichneten Grössen auf die möglichst geringe reducieren. Es ergeben sich somit für die bestimmte Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen folgende zu berechnende Formeln, die die zweite Auflösung ausmachen.

$$\beta = \frac{(ba)}{-(aa)}\,;\quad \gamma = \frac{(ca)}{-(aa)}\,;\quad \delta = \frac{(da)}{-(aa)}\,;\ \text{etc.}$$

$$(ab)\,\beta + (bb) = (bb,1)$$
$$(ac)\,\beta + (bc) = (bc,1)\,;\qquad (ab)\,\gamma + (cb) = (cb,1)$$
$$(ad)\,\beta + (bd) = (bd,1)\,;\qquad (ab)\,\delta + (db) = (db,1)$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$q\beta + q' = Q'$$

$$(\gamma,1) = \frac{(cb,1)}{-(bb,1)}\,;\ (\delta,1) = \frac{(db,1)}{-(bb,1)}\,;\ \text{etc.}$$

$$(ac)\,\gamma + (bc,1)\,(\gamma,1) + (cc) = (cc,2)$$
$$(ad)\,\gamma + (bd,1)\,(\gamma,1) + (cd) = (cd,2)\,;\ (ac)\,\delta + (bc,1)\,(\delta,1) + (dc) = (dc,2)$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$q\gamma + Q'\,(\gamma,1) + q'' = Q''$$

$$(\delta,2) = \frac{(dc,2)}{-(cc,2)}\,;\ \text{etc.}$$

$$(ad)\,\delta + (bd,1)\,(\delta,1) + (cd,2)\,(\delta,2) + (dd) = (dd,3)$$
$$\text{etc.}$$
$$q\delta + Q'\,(\delta,1) + Q''\,(\delta,2) + q''' = Q'''$$

$$\text{etc.}$$

$$x = \frac{(ab)}{-(aa)}\, x' + \frac{(ac)}{-(aa)}\, x'' + \frac{(ad)}{-(aa)}\, x''' + \text{etc.} + \frac{q}{-(aa)}$$

$$x' = \frac{(bc,1)}{-(bb,1)}\, x'' + \frac{(bd,1)}{-(bb,1)}\, x''' + \text{etc.} + \frac{Q'}{-(bb,1)}$$

$$x'' = \frac{(cd,2)}{-(cc,2)}\, x''' + \text{etc.} + \frac{Q''}{-(cc,2)}$$

$$x''' = \text{etc.} + \frac{Q'''}{-(dd,3)}$$

$$\text{etc.}$$

Man erkennt leicht, dass alle mit zwei Buchstaben und einer angehängten Zahl, so wie Q', Q'', etc. bezeichneten Grössen mit den gleichbezeichneten Grössen der ersten Auflösung identisch sind. Man sieht ferner, wie im Art. 9. angezeigt wurde, dass die in der ersten Auflösung mit α, α', β', etc. α_1, α'_1, β'_1, etc. bezeichneten Hülfsgrössen, hier durch β, γ, etc. $(\gamma,1)$, etc. ersetzt sind, die durch lauter eingliedrige Ausdrücke gegeben sind. Wenn man in den Formeln der vorstehenden Auflösung die Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. einführt, so werden diese mit der oft erwähnten Gaussischen Auflösung völlig identisch.

11.

Obgleich in der eben abgeleiteten zweiten Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die unbestimmte Auflösung nicht ausdrücklich enthalten ist, so können die Coefficienten derselben doch daraus berechnet werden, ohne dass man die Hülfsgrössen α_1, α'_1, β'_1, etc. zu berechnen nöthig hat. Dieses werde ich jetzt zeigen.

Es ist an sich klar, dass man die Coefficienten von q der unbestimmten Auflösung, d. i. in Zeichen des Art. 8. (AA), (BA), (CA), etc. durch die bestimmte Auflösung bekommen muss, wenn man in dieser $q = 1$, $q' = 0$, $q'' = 0$, etc. macht. Ferner muss man die Coefficienten von q', d. i. (AB), (BB), (CB), etc. bekommen, wenn man in der bestimmten Auflösung $q = 0$, $q' = 1$, $q'' = 0$, etc. macht, u. s. w. Wenden wir diesen Satz auf die Auflösung des vor. Art. an, so sieht man, dass bloss q, Q', Q'', etc. andere Werthe, wie die dort angegebenen, annehmen, während alle anderen Hülfsgrössen unverändert bleiben. Setzen wir daher nach und nach $q = 1$, $q' = 1$, $q'' = 1$, etc. und zugleich alle anderen q gleich Null, so bekommen wir für die unbestimmte Auflösung folgende zu berechnende Ausdrücke:

$$R = \beta$$
$$R' = \gamma + (\gamma,1)\, R$$
$$R'' = \delta + (\delta,1)\, R + (\delta,2)\, R'$$
$$\text{etc.}$$

$$(A)\begin{cases} (AA) = \dfrac{(ab)}{-(aa)}\,(BA) + \dfrac{(ac)}{-(aa)}\,(CA) + \dfrac{(ad)}{-(aa)}\,(DA) + \text{etc.} + \dfrac{1}{-(aa)} \\ (BA) = \dfrac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,(CA) + \dfrac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,(DA) + \text{etc.} + \dfrac{R}{-(bb,1)} \\ (CA) = \dfrac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,(DA) + \text{etc.} + \dfrac{R'}{-(cc,2)} \\ (DA) = \text{etc.} + \dfrac{R''}{-(dd,3)} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ferner

$$S = (\gamma,1)$$
$$S' = (\delta,1) + (\delta,2)\, S$$
$$\text{etc.}$$

$$(B)\begin{cases} (AB) = \dfrac{(ab)}{-(aa)}\,(BB) + \dfrac{(ac)}{-(aa)}\,(CB) + \dfrac{(ad)}{-(aa)}\,(DB) + \text{etc.} \\ (BB) = \dfrac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,(CB) + \dfrac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,(DB) + \text{etc.} + \dfrac{1}{-(bb,1)} \\ (CB) = \dfrac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,(DB) + \text{etc.} + \dfrac{S}{-(cc,2)} \\ (DB) = \text{etc.} + \dfrac{S'}{-(dd,3)} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ferner

$$T = (\delta,2)$$

$$(C)\begin{cases} (AC) = \dfrac{(ab)}{-(aa)}\,(BC) + \dfrac{(ac)}{-(aa)}\,(CC) + \dfrac{(ad)}{-(aa)}\,(DC) + \text{etc.} \\ (BC) = \dfrac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,(CC) + \dfrac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,(DC) + \text{etc.} \\ (CC) = \dfrac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,(DC) + \text{etc.} + \dfrac{1}{-(cc,2)} \\ (DC) = \text{etc.} + \dfrac{T}{-(dd,3)} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ferner

$$U = \text{etc.}$$

$$(D)\begin{cases} (AD) = \dfrac{(ab)}{-(aa)}\,(BD) + \dfrac{(ac)}{-(aa)}\,(CD) + \dfrac{(ad)}{-(aa)}\,(DD) + \text{etc.} \\ (BD) = \dfrac{(bc,1)}{-(bb,1)}\,(CD) + \dfrac{(bd,1)}{-(bb,1)}\,(DD) + \text{etc.} \\ (CD) = \dfrac{(cd,2)}{-(cc,2)}\,(DD) + \text{etc.} \\ (DD) = \text{etc.} + \dfrac{1}{-(dd,3)} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die hier eingeführten Grössen R, R', R'', etc. resp. mit α, α', α'', etc. S, S', etc. resp. mit β', β'', etc. T, etc. resp. mit γ'', etc. identisch sind.

Führt man hier die Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. ein, so wird man auf das Verfahren hingeführt, welches ich in Nr. 192. der Astron. Nachr. zur Berechnung der Gewichte gegeben habe. In diesem Falle wird die Berechnung, wie ich am angef. Orte gezeigt habe, bedeutend einfacher, wie in dem hier behandelten allgemeinen Falle, Es wird nämlich die Berechnung der Hülfsgrössen R, R', R'', etc. S, S' etc., T, etc. überflüssig. Um dieses hier zu zeigen, werden wir annehmen, dass die Zahl der Unbekannten vier sei; die Folgerungen, die wir hieraus ziehen, gelten, wie leicht einzusehen ist, für jede beliebige Anzahl von Unbekannten.

Nehmen wir nun das vorstehende System von Gleichungen (D) zuerst vor. Dieses giebt uns ungeändert die Werthe der Grössen

$$(DD),\ (CD),\ (BD) \text{ und } (AD).$$

Da aber nun, wie die Ausdrücke des Art. 8. nach Einführung der Bedingungen $(ba) = (ab)$, etc. zeigen, $(DC) = (CD)$ ist, so brauchen wir die letzte Gleichung des Systems (C) nicht zu berücksichtigen, sondern können sogleich den eben gefundenen Werth von (CD) für (DC) in die drei ersten Gleichungen (C) substituieren. Diese geben somit unabhängig von den Hülfsgrössen T, etc. die Coefficienten

$$(CC),\ (BC) \text{ und } (AC).$$

Da nun aber $(CB) = (BC)$ und $(DB) = (BD)$ ist, so können wir diese, deren Werthe wir schon erhalten haben, resp. für (CB) und (DB) in die beiden ersten Gleichungen (B) substituieren, welche uns nun, ohne dass wir S, S', etc. zu kennen brauchen, die Coefficienten

$$(BB) \text{ und } (AB)$$

geben werden. Endlich giebt die Substitution von den schon gefundenen Werthen von (AB), (AC) und (AD) resp. für (BA), (CA) und (DA) in die erste der Gleichungen (A) den Werth des Coefficienten

$$(AA)$$

ohne die Kenntniss von R, R', R'', etc. vorauszusetzen.

Das Verhalten dieser beiden Auflösungen zu einander bei der Anwendung derselben wird man am sichersten aus dem dieser Abhandlung zuzufügenden ausführlichen numerischen Beispiel erkennen.

12.

Es ist noch der Fall zu erörtern übrig, wo in dem gegebenen System von Gleichungen Eine Gleichung oder mehrere in den übrigen enthalten ist, oder diesen widerspricht, und es also unmöglich ist, die Unbekannten aus diesem System von Gleichungen zu bestimmen. Es kommt darauf an, die Kennzeichen anzugeben, wodurch dieses in den beiden vorstehenden Auflösungen sich ausspricht, so wie die Bedingungsgleichungen selbst zu finden.

Bezeichnen wir die n Gleichungen (1) zur Abkürzung mit $v = 0$; $v' = 0$; $v'' = 0$; $v''' = 0$, etc. und n von den Unbekannten unabhängige Factoren mit f; f'; f''; f'''; etc., so besteht bekanntlich das analytische Kriterion des Umstandes, dass eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, darin, dass sich für die Factoren f; f'; etc. ein System von Werthen finden lässt, wodurch

$$fv + f'v' + f''v'' + f'''v''' + \text{etc.} = 0 \text{ oder } = \text{constante} \ldots \quad (F)$$

wird, und wenn keine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, so ist eine Gleichung wie (F) unmöglich. Wenn zwei oder mehrere der gegebenen Gleichungen in den übrigen erthalten sind, oder ihnen widersprechen, so lassen sich eben so viele Systeme von Werthen von f; f'; etc. finden, deren jedes eine Bedingungsgleichung wie (F) bildet.

Da das Vorhandensein von mehreren Bedingungsgleichungen (F) die Sache in Bezug auf die Unauflösbarkeit der gegebenen Gleichungen nicht ändert, so brauchen wir im Folgenden nur den Fall zu betrachten, wo e i n e Bedingungsgleichung vorhanden ist.

Nehmen wir zuerst an, dass von den Factoren f; f'; etc. keiner $= 0$ ist; substituieren wir für v; v'; etc. die Gleichungen (1) in (F) und setzen die Coefficienten einer jeden Unbekannten, wie für das Erfülltsein von (F) nothwendig ist, gleich Null. Dadurch erhalten wir die folgenden n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
(aa)\, f + (ba)\, f' + (ca)\, f'' + (da)\, f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ab)\, f + (bb)\, f' + (cb)\, f'' + (db)\, f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ac)\, f + (bc)\, f' + (cc)\, f'' + (dc)\, f''' + \text{etc.} = 0 \\
(ad)\, f + (bd)\, f' + (cd)\, f'' + (dd)\, f''' + \text{etc.} = 0 \\
\qquad\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\quad \text{etc.}
\end{array}\right\} (G)$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (2), (3), (4), etc., so sehen wir, dass die ersten $n-1$ derselben mit dem $(n-1)^{\text{ten}}$ oder letzten System von Hülfsgleichungen identisch sind, die in der ersten obigen Auflösung der Gleichungen (1) vorkommen. Die Verhältnisse $\frac{f}{f^{n-1}}$, $\frac{f'}{f^{n-1}}$, etc. sind daher identisch mit den Hülfsgrössen $\alpha^{(n-2)}$, $\beta^{(n-2)}$, etc. und werden durch den Gang der Auflösung unzweideutig bestimmt. Die linke Seite der vorstehenden n^{ten} oder letzten Gleichung wird aber nun mit der linken Seite des Ausdrucks für $(qq, n-1)$ identisch, wenn wir hiermit die letzte der Grössen $(bb,1)$; $(cc,2)$; $(dd,3)$; etc. bezeichnen. Wir erhalten also $(qq, n-1) = 0$, und da die so bezeichneten Grössen in beiden obigen Auflösungen identisch sind, so ist die Gleichung

$$(qq, n-1) = 0$$

in beiden Auflösungen das Kennzeichen des Falles, den wir hier betrachten.

Wenn aber einer oder mehrere der Factoren f; f'; etc. gleich Null sind, so kann sich ereignen, dass nicht $(qq, n-1)$, sondern irgend eine der vorhergehenden Grössen dieser Gattung, ja selbst die erste derselben $(bb,1) = 0$ wird.

Seien z. B. ausser f und f' alle f gleich Null, dann gehen die Gleichungen (G) in folgende über:

$$(aa)\, f + (ba)\, f' = 0$$
$$(ab)\, f + (bb)\, f' = 0$$
$$(ac)\, f + (bc)\, f' = 0$$
$$(ad)\, f + (bd)\, f' = 0$$
$$\text{etc.}$$

durch deren Vergleichung mit den Gleichungen (2) man erkennt, dass

$$\alpha = \frac{f}{f'},\ (bb,1) = 0,\ (bc,1) = 0,\ (bd,1) = 0,\ \text{etc.}$$

Wären statt dessen f, f', f'' die einzigen Factoren, die nicht Null sind, so würde man eben so finden, dass die vorstehenden nicht statt finden, dagegen aber

$$\alpha' = \frac{f}{f''},\ \beta' = \frac{f'}{f''},\ (cc,2) = 0,\ (cd,2) = 0,\ \text{etc.}$$

wäre, u. s. w., wenn von einem gewissen f an alle folgenden f Null sind.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo in der Reihe f; f'; etc. einer oder mehrere Null sind, ohne dass alle folgenden auch Null sind.

Seien alle auf $f^{(i)}$ folgenden f gleich Null, und ausserdem ein beliebiger Factor, z. B. $f'' = 0$, dann gehen die Gleichungen (G) in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,f+(ba)\,f'+(da)\,f'''+\text{etc.}+(ka)\,f^{(i)}=0\\(ab)\,f+(bb)\,f'+(db)\,f'''+\text{etc.}+(kb)\,f^{(i)}=0\\(ac)\,f+(bc)\,f'+(dc)\,f'''+\text{etc.}+(kc)\,f^{(i)}=0\\(ad)\,f+(bd)\,f'+(dd)\,f'''+\text{etc.}+(kd)\,f^{(i)}=0\\\quad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}(K)$$

deren Anzahl wie immer n ist. Die Hülfsgleichungen der ersten Auflösung, mit welchen die obigen Gleichungen verglichen werden müssen, sind nun die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\,\alpha^{(i-1)}+(ba)\,\beta^{(i-1)}+(ca)\,\gamma^{(i-1)}+(da)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(ka)=0\\(ab)\,\alpha^{(i-1)}+(bb)\,\beta^{(i-1)}+(cb)\,\gamma^{(i-1)}+(db)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(kb)=0\\(ac)\,\alpha^{(i-1)}+(bc)\,\beta^{(i-1)}+(cc)\,\gamma^{(i-1)}+(dc)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(kc)=0\\(ad)\,\alpha^{(i-1)}+(bd)\,\beta^{(i-1)}+(cd)\,\gamma^{(i-1)}+(dd)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(kd)=0\\\quad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\\\text{deren Anzahl } i \text{ ist, wozu noch die folgenden kommen:}\\(ak)\,\alpha^{(i-1)}+(bk)\,\beta^{(i-1)}+(ck)\,\gamma^{(i-1)}+(dk)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(kk)=(kk,i)\\(al)\,\alpha^{(i-1)}+(bl)\,\beta^{(i-1)}+(cl)\,\gamma^{(i-1)}+(dl)\,\delta^{(i-1)}+\text{etc.}+(kl)=(kl,i)\\\quad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}(L)$$

deren Anzahl $n-i$ ist.

Da diese beiden Systeme von Gleichungen (K) und (L) neben einander statt finden müssen, so dividiere ich die Gleichungen (K) durch $f^{(i)}$ und ziehe sie einzeln genommen von den Gleichungen (L) ab; hierdurch ergeben sich folgende:

$$\begin{array}{l}(aa)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(ba)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(ca)\,\gamma^{(i-1)}+(da)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=0\\(ab)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(bb)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(cb)\,\gamma^{(i-1)}+(db)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=0\\(ac)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(bc)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(cc)\,\gamma^{(i-1)}+(dc)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=0\\(ad)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(bd)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(cd)\,\gamma^{(i-1)}+(dd)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=0\\\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\\(ak)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(bk)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(ck)\,\gamma^{(i-1)}+(dk)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=(kk,i)\\(al)\left\{\alpha^{(i-1)}-\frac{f}{f^{(i)}}\right\}+(bl)\left\{\beta^{(i-1)}-\frac{f'}{f^{(i)}}\right\}+(cl)\,\gamma^{(i-1)}+(dl)\left\{\delta^{(i-1)}-\frac{f'''}{f^{(i)}}\right\}+\text{etc.}=(kl,i)\\\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}$$

welche sogleich zu erkennen geben, dass gleichwie in den vorher betrachteten Fällen

$$\alpha^{(i-1)}=\frac{f}{f^{(i)}};\ \beta^{(i-1)}=\frac{f'}{f^{(i)}};\ \gamma^{(i-1)}=0=\frac{f''}{f^{(i)}};\ \delta^{(i-1)}=\frac{f'''}{f^{(i)}};\ \text{etc.}$$

$$(kk,i)=0;\ (kl,i)=0;\ \text{etc.}$$

und es ist aus dieser Analyse zugleich ersichtlich, dass wir auf dasselbe Resultat kommen müssen, wie viele, und welche der Factoren f auch vor $f^{(i)}$ gleich Null seien.

13.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Art. erschöpfen alle möglichen Fälle, die die Bedingungsgleichung (F) darbieten kann, und enthalten somit den Beweis der folgenden drei Sätze.

1ster Satz.

«Wenn man bei der Auflösung irgend eines Systems von linearischen «Gleichungen nach einer der beiden hier vorgetragenen Methoden findet, «dass in irgend einer der folgenden Gruppen

$$(bb,1),\ (bc,1),\ (bd,1),\ \text{etc.}$$

oder

$$(cc,2),\ (cd,2),\ \text{etc.}$$

oder

$$(dd,3),\ \text{etc.}$$

oder

$$\text{etc.}$$

«alle vorhandenen Grössen gleich Null werden, so ist eine der Glei- «chungen des gegebenen Systems von Gleichungen in den übrigen ent- «halten, oder widerspricht ihnen, und die Ermittelung der Unbekannten «aus diesem System daher unmöglich.»

2ter Satz.

«Wenn in der Bedingungsgleichung

$$fv + f'v' + \cdots + f^{(n-1)}v^{(n-1)} = 0 \text{ oder } = \text{constante},$$

«wo die gegebenen Gleichungen $v = 0$, $v' = 0$, etc. in derselben Reihen- «folge aufgestellt sind, wie bei der Anwendung der Auflösung, alle auf «$f^{(p)}$ folgenden f gleich Null sind, so ist es immer die p^{te} der Gruppen

$$(bb,1),\ (bc,1),\ \text{etc.}$$
$$(cc,2)\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

«welche verschwindet, es mögen vor $f^{(p)}$ einer oder mehrere dieser «Factoren Null sein oder nicht.»

3ter Satz.

«Wenn es die q^{te} Gruppe ist, in welcher alle Grössen gleich Null «werden, so ist immer

$$f = f^{(q)}\,\alpha^{(q-1)};\ f' = f^{(q)}\,\beta^{(q-1)};\ \text{etc.}$$

«wodurch man also alle f bis auf einen derselben erhält, welcher der «Natur der Sache nach willkührlich bleibt.»

Es kann zuweilen Interesse haben, die Bedingungsgleichung, wenn solche statt findet, kennen zu lernen, um eine der darin concurrirenden Gleichungen auszuschliessen, und, wo möglich, durch eine andere, unabhängige zu ersetzen. Durch den dritten Satz kann man die Bedingungsgleichung ohne Weiteres aufstellen, wenn man sich der ersten Auflösung bedient hat; hat man aber die zweite angewandt, so muss man die Hülfsgrössen $\alpha^{(q-1)}, \beta^{(q-1)}$, etc. nach den betreffenden Formeln der ersten Auflösung besonders berechnen.

14.

Durch die in dem gegebenen System von Gleichungen grade statt findenden numerischen Werthe der Coefficienten kann sich ereignen, dass eine oder mehrere der Grössen $(bc,1)$, $(bd,1)$, etc. $(cd,2)$, etc. Null werden. Dieses hindert den Fortgang der Auflösung nicht im Geringsten. Es kann sich aber auch ereignen, dass eine der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, $(dd,3)$, etc. Null wird, ohne dass alle übrigen Grössen derselben Gruppe Null werden. Da in diesem Falle der eben bewiesene 1ste Satz nicht erfüllt ist, so bleibt vor der Hand unentschieden, ob eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten ist, oder nicht. Das Verschwinden von einer der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. wirkt aber hemmend auf die Fortführung der Auflösung, weil diese Grössen in den Nennern vorkommen. Es ist in diesem Falle nichts weiter zu thun, wie die angenommene Reihenfolge der Unbekannten zu verändern. Die einfachste Versetzung die man vornehmen kann, ist die, dass man die Unbekannte, welcher irgend eine der in der betreffenden Gruppe **nicht** verschwindenden Hülfsgrössen angehört, in allen Gleichungen an die Stelle der Unbekannten setzt, welcher die erste verschwindende Hülfsgrösse zukommt, und diese Unbekannte an den Platz jener. Dadurch braucht in der bereits ausgeführten Rechnung nichts geändert zu werden, sondern bloss die Bezeichnung der vorher berechneten Hülfsgrössen und ihre Reihenfolge wird analog geändert. Z. B. wenn man gefunden hat

$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = 0$$
$$(ce,2) = k$$
$$(cf,2) = l$$

wo k und l numerische Werthe bedeuten, die von Null verschieden sind, so kann man entweder e an den Platz von c und umgekehrt, und also auch x^{IV} an den Platz von x'' und umgekehrt rücken, oder man kann diese Versetzung mit f und c, sowie mit x^{V} und x'' vornehmen. Es müssen ferner die analogen Versetzungen mit $(bc,1)$ und $(be,1)$ oder resp. $(bf,1)$, so wie mit (ac) und (ae) und resp. (af) vorgenommen werden.

Trifft man im weiteren Verlaufe der Rechnung wieder auf denselben Umstand, so nimmt man wieder die eben erklärte Versetzung vor, und so ferner. Gelangt man nun durch diese Verwechselung der zuerst angenommenen Reihenfolge der Unbekannten dahin, dass keine der betreffenden Hülfsgrössen verschwinden, so ist keine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten, und man bekommt die Werthe der unbekannten Grössen. Findet sich aber nach diesen Versetzungen, dass endlich alle Hülfsgrössen Einer Gruppe verschwinden, dann ist dem im vorigen Art. abgeleiteten 1sten Satze gemäss wenigstens eine der gegebenen Gleichungen in den übrigen enthalten, und es wäre vergebliche Mühe, die Auflösung durch die Vornahme anderer Versetzungen der Unbekannten weiter fortführen zu wollen. Man muss im Gegentheil die Bedingungsgleichung dem 3ten Satze gemäss suchen, eine der darin vorkommenden Gleichungen ausschliessen, und durch eine andere, unabhängige zu ersetzen suchen.

Schliesslich bemerke ich, dass es sich von selbst versteht, dass auch (aa) nicht gleich Null sein darf. Wenn man daher ein System von Gleichungen aufzulösen hat, in welchem Ein Coefficient oder mehrere derselben gleich Null sind, so darf man die Reihenfolge der Gleichungen oder der Unbekannten nicht so wählen, dass die erste Unbekannte in der ersten Gleichung nicht vorhanden ist, denn dadurch wäre $(aa) = 0$.

15.

Es scheint mir dienlich, die in den beiden zunächst vorhergehenden Artt. vorgetragenen Umstände durch einige Beispiele zu erläutern.

Seien als erstes Beispiel die gegebenen Gleichungen folgende:

$$\begin{aligned} x + x' + x'' + x''' - 4 &= 0 \\ x + x' - x'' + x''' - 2 &= 0 \\ x + x' + x'' - x''' - 2 &= 0 \\ x - x' - x'' + x''' &= 0 \end{aligned}$$

auf welches ich die zweite Auflösung, d. i. die Formeln des Art. 10. anwenden werde.

Wir bekommen hier

$$\beta = -1;\ \gamma = -1;\ \delta = -1;$$

und hiermit ergiebt sich

$$(bb,1) = 0$$
$$(bc,1) = -2$$
$$(bd,1) = 0$$

Da nicht alle Grössen dieser Gruppe gleich Null geworden sind, so ist noch unentschieden, ob alle gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sind, oder nicht. Versetzen wir nun, den Vorschriften des vorigen Art. gemäss, die zweite und dritte Unbekannte nebst den dazu gehörigen Hülfsgrössen, so haben wir:

$$x + x'' + x' + x''' - 4 = 0$$
$$x - x'' + x' + x''' - 2 = 0$$
$$x + x'' + x' - x''' - 2 = 0$$
$$x - x'' - x' + x''' = 0$$
$$\beta = -1;\quad \gamma = -1;\ \delta = -1$$
$$(bb,1) = -2;$$
$$(bc,1) = 0;\ (cb,1) = 0;$$
$$(bd,1) = 0;\ (db,1) = 2$$
$$Q' = 2$$

Hiemit findet sich

$$(\gamma,1) = 0;\ (\delta,1) = -1$$
$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = -2$$

Wir müssen also jetzt die dritte und vierte Unbekannte nebst den darauf sich beziehenden, bereits berechneten Hülfsgrössen in der Columne linker Hand verwechseln. (Die Hülfsgrössen in der Columne rechter Hand bleiben, wie leicht einzusehen ist, unverändert, wenn nicht die Reihenfolge der Gleichungen verändert wird.) Wir haben also jetzt

$$x + x'' + x''' + x' - 4 = 0$$
$$x - x'' + x''' + x' - 2 = 0$$
$$x + x'' - x''' + x' - 2 = 0$$
$$x - x'' + x''' - x' = 0$$

ferner

$$\beta = -1;\quad \gamma = -1;\ \delta = -1$$
$$(bb,1) = -2;$$
$$(bc,1) = 0;\ (cb,1) = 0;$$
$$(bd,1) = 0;\ (db,1) = -2;$$
$$Q' = 2$$

$$(\gamma,1) = 0;\quad (\delta,1) = -1$$
$$(cc,2) = -2;$$
$$(cd,2) = 0;\quad (dc,2) = 0$$
$$Q'' = 2;$$

die mit den schon berechneten Hülfsgrössen, abgesehen von der Verwechselung der Bezeichnungen, identisch sind. Ferner ergiebt sich

$$(\delta,2) = 0$$
$$(dd,3) = -2$$
$$Q''' = 2$$

und hiemit

$$x = -x'' - x''' - x' + 4$$
$$x'' = 0x''' + 0x' + 1$$
$$x''' = 0x' + 1$$
$$x' = 1$$

also

$$x' = 1$$
$$x''' = 1$$
$$x'' = 1$$
$$x = 1$$

Als zweites Beispiel seien die gegebenen Gleichungen folgende:

$$x + 4x' + x'' + 2x''' - 8 = 0$$
$$x + 4x' + 2x'' - 2x''' - 5 = 0$$
$$-x + 10x' + x'' - 10x''' = 0$$
$$2x + 4x' - 2x'' + x''' - 5 = 0$$

die ich durch die erste Auflösung, oder die Formeln des Art. 7. behandeln werde.

Hier bekommen wir zuerst

$$\alpha = -1$$
$$(bb,1) = 0$$
$$(bc,1) = 1$$
$$(bd,1) = -4$$

Hier sind zwei Versetzungen möglich, weil zwei Grössen dieser Gruppe nicht gleich Null sind.

Versetzen wir die zweite und vierte Unbekannte, weil dadurch, abgesehen vom algebraischen Zeichen, $(bb,1)$ möglichst gross wird *). Wir bekommen somit:

$$\begin{aligned}
x + 2\,x''' + x'' + 4x' - 6 &= 0\\
x - 2\,x''' + 2x'' + 4x' - 5 &= 0\\
-x - 10\,x''' + x'' + 10x' \quad &= 0\\
2\,x + x''' - 2x'' + 4x' - 5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha = -1 & & \alpha_1 = -2 \\
(bb,1) = -4 & & (bb,1) = -4 \\
(bc,1) = 1 & & (cb,1) = -8 \\
(bd,1) = 0 & & (db,1) = -3 \\
Q' = 3 & & & \\
\alpha' = 3 & & \alpha'_1 = -\tfrac{3}{2} \\
\beta' = -2 & & \beta_1 = +\tfrac{1}{4} \\
(cc,2) = 0 & & & \\
(cd,2) = 14 & & &
\end{array}$$

Wir müssen also nochmals die dritte und vierte Unbekannte nebst den dazu gehörigen Hülfsgrössen versetzen, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}
x + 2\,x''' + 4\,x' + x - 8 &= 0\\
x - 2\,x''' + 4\,x' + 2\,x - 5 &= 0\\
-x - 10\,x''' + 10\,x' + x \quad &= 0\\
2\,x + x''' + 4\,x' - 2\,x - 5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha = -1 & & \alpha_1 = -2 \\
(bb,1) = -4 & & (bb,1) = -4 \\
(bc,1) = 0 & & (cb,1) = -8 \\
(bd,1) = 1 & & (db,1) = -3 \\
Q' = 3 & & & \\
\alpha = 3 & & \alpha_1 = -4 \\
\beta' = -2 & & \beta_1 = 0 \\
(cc,2) = 14 & & (cc,2) = 14 \\
(cd,2) = 0 & & (dc,2) = -4 \\
Q'' = -14 & & &
\end{array}$$

*) Die Divisoren $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. möglichst gross zu machen, ist, wenn auch nicht in diesem Beispiel, doch in den am häufigsten vorkommenden Fällen, wo die Coefficienten der gegebenen Gleichungen durch Decimalbrüche ausgedrückte Irrationalzahlen sind, von wesentlichem Vortheil für die sichere Ausführung der Rechnung. Man kann diesen Vortheil immer durch Versetzung der Unbekannten während der Rechnung erlangen, ohne diese dadurch zu verlängern.

$$\alpha'' = -\tfrac{11}{28} \qquad \alpha''_1 = -\tfrac{3}{2}$$
$$\beta'' = -\tfrac{37}{28} \qquad \beta''_1 = +\tfrac{1}{4}$$
$$\gamma'' = +\tfrac{2}{7} \qquad \gamma''_1 = 0$$
$$(dd,3) = +\tfrac{19}{4} \qquad (dd,3) = -\tfrac{19}{4}$$
$$Q''' = +\tfrac{19}{4}$$

und hieraus
$$x = 8 - \tfrac{3}{2} - 4 - \tfrac{3}{2} = 1$$
$$x''' = \tfrac{3}{4} + 0 + \tfrac{1}{4} = 1$$
$$x' = 1 + 0 = 1$$
$$x'' = 1 = 1$$

Die Ursache, weshalb in diesen und ähnlichen Fällen eine oder mehrere der Grössen $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc. verschwinden muss, obgleich alle gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sind, ist leicht einzusehen, und liegt darin, dass im Verlaufe der Auflösung die gegebenen Gleichungen abgekürzt werden, und partielle Systeme von Gleichungen bilden, die aufgelöst werden müssen. Nun kann es sich aber immerhin ereignen, dass diese abgekürzten Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, wenngleich dieses in Bezug auf die vollständigen Gleichungen statt findet. Durch Versetzung der Unbekannten verändert man aber diese partiellen Systeme, und muss nothwendig auf unabhängige kommen, wenn die gegebenen Gleichungen selbst alle von einander unabhängig sind.

Ich werde dieses am nächst vorhergehenden Beispiel näher erläutern. Bei der zuerst gewählten Reihenfolge der Unbekannten hatten wir zu Folge der Gleichungen (3) das folgende partielle System aufzulösen:

$$\alpha' + \beta' - 1 = 0$$
$$4\,\alpha' + 4\,\beta' + 10 = 0$$

aber man sieht ohne Weiteres, dass diese beiden Gleichungen einander widersprechen, daher musste nothwendig $(bb,1) = 0$ werden. Durch die vorgenommene Versetzung der Unbekannten wurde die zweite dieser Gleichungen in folgende umgewandelt:

$$2\,\alpha' - 2\,\beta' - 10 = 0$$

die von der ersten unabhängig ist, und daher den Fortgang der Auflösung nicht hemmte. Weiterhin hatten wir nun aber zu Folge der Gleichungen (4) das folgende partielle System aufzulösen:

$$\alpha'' + \beta'' - \gamma'' + 2 = 0 = v$$
$$2\,\alpha'' - 2\,\beta'' - 10\,\gamma'' + 1 = 0 = v'$$
$$\alpha'' + 2\,\beta'' + \gamma'' - 2 = 0 = v''$$

und fanden $\alpha'_1 = -\tfrac{3}{2}$, $\beta'_1 = +\tfrac{1}{4}$, $(cc,2) = 0$.

Setzen wir nun*) $\alpha'_1 = \frac{f}{f'''}$, $\beta'_1 = \frac{f'}{f'''}$, wodurch

$$f = -6;\ f' = +1;\ f'' = 4$$

wird, da wir f'' willkührlich annehmen können, so ergiebt sich

$$-6v + v' + 4v'' = -19$$

welcher in der That die vorstehenden drei Gleichungen genügen, weshalb nothwendig $(cc,2) = 0$ werden musste. Durch nochmalige Versetzung der Unbekannten erhielten wir statt der obigen Gleichung $v'' = 0$ die folgende:

$$4\alpha'' + 4\beta'' + 10\gamma'' + 4 = 0$$

welche von v und v' unabhängig ist, weshalb nun die Auflösung ohne Weiteres zu Ende geführt werden konnte.

Nehmen wir mit diesem Beispiel die Veränderung vor, dass wir in der dritten Gleichung $-4x'$ statt $+10x'$ schreiben. Behalten wir nun die zuerst aufgestellte Reihenfolge der Unbekannten bei, so finden wir α, $(bb,1)$, $(bc,1)$, $(bd,1)$ wie vorher. Versetzen wir daher wieder die zweite und vierte Unbekannte. Hiermit bekommen wir nun

$$\begin{aligned} x + 2x''' + x'' + 4x' - 8 &= 0 \\ x - 2x''' + 2x'' + 4x' - 5 &= 0 \\ -x - 10x''' + x'' - 4x' &= 0 \\ 2x + x''' - 2x'' + 4x' - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \alpha &= -1 & \alpha'_1 &= -2 \\ (bb,1) &= -4 & (bb,1) &= -4 \\ (bc,1) &= +1 & (cb,1) &= -8 \\ (bd,1) &= 0 & (db,1) &= -3 \\ Q' &= 3 \\ \alpha' &+ 3 \\ \beta' &= -2 \end{aligned}$$

wie vorher, aber jetzt ergiebt sich

$$(cc,2) = 0$$
$$(cd,2) = 0$$

Alle Grössen dieser Gruppe sind verschwunden, und wir sehen hieraus, dass die drei ersten unserer Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, und folglich die Unbekannten nicht daraus bestimmt

---

*) Da wir hier mit reciproken Gleichungen zu thun haben, so sind es nicht α' und β', die den Quotienten aus den Factoren der Bedingungsgleichung gleich werden, sondern α'_1 und β'_1.

werden können. Um die Bedingungsgleichung zu finden, die zwischen ihnen statt hat, bezeichne ich sie mit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, und setze zu Folge des 3ten Satzes des Art. 13.

$$f = \alpha' f''; \; f' = \beta' f''$$

woraus wir

$$f = 3, \; f' = -2, \; f'' = 1$$

erhalten. Durch die Substitution dieser Werthe ergiebt sich

$$3\,v - 2\,v' + v'' = 0 \text{ oder } = \text{constante},$$

welcher in der That die ersten drei der gegebenen Gleichungen Gnüge leisten, da sie für die rechte Seite dieser Gleichung -19 geben.

Da die vierte Gleichung nicht in dieser Bedingungsgleichung vorkommt, so wurden schon $(cc,2)$ und $(cd,2) = 0$. Hätte aber die vierte Gleichung Theil an der Bedingungsgleichung, dann wären, dem Art. 13. zu Folge, $(cc,2)$ und $(cd,2)$ nicht Null geworden, sondern statt dessen $(dd,3)$, und dieses würde unabhängig von der Anzahl der vorhergehenden Gleichungen statt gefunden haben, die zur Bedingungsgleichung concurrieren. Um dieses auch an einem Beispiele zu zeigen, will ich die obige vierte und dritte Gleichung mit einander verwechseln. Also

$$\begin{aligned}
x + 2\,x''' + x'' + 4\,x' - 8 &= 0\\
x - 2\,x''' + 2\,x'' + 4\,x' - 5 &= 0\\
2\,x + x''' - 2\,x'' + 4\,x' - 5 &= 0\\
-x - 10\,x''' + x'' - 4\,x' &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\alpha &= -1 & \alpha_1 &= -2\\
(bb,1) &= -4 & (bb,1) &= -4\\
(bc,1) &= +1 & (cb,1) &= -3\\
(bd,1) &= 0 & (db,1) &= -8\\
\alpha' &= -\frac{5}{4} & \alpha_1' &= -\frac{3}{2}\\
\beta' &= -\frac{3}{4} & \beta_1' &= +\frac{1}{4}\\
(cc,2) &= -\frac{19}{4} & (cc,2) &= -\frac{19}{4}\\
(cd,2) &= -4 & (dc,2) &= 0\\
\alpha'' &= +3 & \alpha_1'' &= -\frac{52}{19}\\
\beta'' &= -2 & \beta_1'' &= -\frac{4}{19}\\
\gamma'' &= 0 & \gamma_1'' &= -\frac{16}{19}\\
(dd,3) &= 0 & (dd,3) &= 0
\end{array}$$

Setzen wir nun $f = \alpha'' f'''$, $f' = \beta'' f'''$, $f'' = \gamma'' f'''$, so bekommen wir

$$f = 3, \; f' = -2, \; f'' = 0, \; f''' = 1$$

und hiermit

$$3\,v - 2\,v' + v''' = \text{constante},$$

wie vorher.

16.

Um durch die hier gegebenen Auflösungen in zusammengesetzteren Fällen, wie die eben behandelten, ein System von linearischen Gleichungen mit möglichst wenigem Zeitaufwand aufzulösen, muss man sich an ein festes Rechnungsschema halten. Es wird sich zwar jeder leicht ein solches entwerfen können, aber ich glaube dennoch, diesem oder jenem einen Gefallen zu erzeigen, wenn ich das Schema, wornach ich die Auflösung bewerkstellige, hier an einem Beispiel ausführlich darlege. Ich wähle dazu das folgende:

$$
\begin{aligned}
3x + 4x' - 3x'' + 5x''' + 2x^{\text{IV}} - 2 &= 0 \\
-5x + 2x' + 6x'' - 7x''' - 2x^{\text{IV}} + 10 &= 0 \\
2x + 3x' + 8x'' + 7x''' + 3x^{\text{IV}} - 27 &= 0 \\
2x - 3x' - 7x'' - 4x''' - 3x^{\text{IV}} + 12 &= 0 \\
5x + 8x' + 2x'' - x''' + 5x^{\text{IV}} + 17 &= 0
\end{aligned}
$$

Behandeln wir dieses System von Gleichungen zuerst nach der ersten Auflösung, so erhalten wir

$\log \alpha = 0{,}22185$	$\log \alpha_1 = 0{,}12494\,n$
$(bb,1) = +8{,}6667$	$(bb,1) = +8{,}6667$
$(bc,1) = +1.$	$(cb,1) = +0{,}3333$
$(bd,1) = +1{,}3333$	$(db,1) = -5{,}6667$
$(be,1) = +1{,}3333$	$(eb,1) = +1{,}3333$
$Q' = +6{,}6667$	
$\alpha' = -0{,}73077$	$\alpha_1' = +1{,}15385$
$\log \beta' = 8{,}58503\,n$	$\log \beta_1' = 9{,}06215\,n$
$(cc,2) = +9{,}9615$	$(cc,2) = +9{,}9615$
$(cd,2) = +3{,}6154$	$(dc,2) = -4{,}3461$
$(ce,2) = +1{,}6154$	$(ec,2) = +6{,}8462$
$Q'' = -25{,}9231$	
$\alpha'' = +0{,}10426$	$\alpha_1'' = -1{,}88031$
$\beta'' = +0{,}63708$	$\beta_1'' = -0{,}11197$
$\log \gamma'' = 9{,}63977$	$\log \gamma_1'' = 9{,}55983\,n$
$(dd,3) = -4{,}8843$	$(dd,3) = -4{,}8841$
$(de,3) = -2{,}7568$	$(ed,3) = -12{,}0233$
$Q''' = +6{,}3829$	
$\alpha''' = -1{,}67751$	$\alpha_1''' = +0{,}41265$
$\beta''' = -1{,}69568$	$\beta_1''' = -0{,}07194$
$\gamma''' = -1{,}76123$	$\gamma_1''' = +0{,}04269$
$\log \delta''' = 0{,}39122\,n$	$\log \delta_1''' = 9{,}75161\,n$
$(ee,4) = +7{,}1373$	$(ee,4) = +7{,}1375$
$Q^{\text{IV}} = +21{,}413$	

Anmerkung. Die Unterschiede in der letzten Stelle der doppelten Werthe von $(dd,3)$ und $(ee,4)$ sind unvermeidlich, und rühren von dem Fehler der letzten Stelle der angewandten Logarithmen her.

$$\left.\begin{aligned} x &= +0{,}9997 \\ x' &= -1{,}0000 \\ x'' &= +1{,}9999 \\ x''' &= +3{,}0001 \\ x^{\text{iv}} &= -3{,}0001 \end{aligned}\right\} \text{ Die strengen Werthe sind: } \left\{\begin{aligned} &= +1 \\ &= -1 \\ &= +2 \\ &= +3 \\ &= -3 \end{aligned}\right.$$

und diese Grössen sind durch die, wie folgt, gestellte Rechnung erhalten worden.

	(ab)	(ac)	(ad)	(ae)	q	(ba)	(ca)	(da)	(ea)
	0,60206	0,47712 n	0,69897	0,30103	0,30103 n	0,69897 n	0,30103	0,30103	0,69897
$-(aa)$..	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n
	0,82391	0,69897 n	0,92082	0,52288	0,52288 n	0,82391	0,42597 n	0,42597 n	0,82391 n
	+ 6,6667	− 5,0000	+ 8,3333	+ 3,3333	− 3,3333	+ 6,6667	− 2,6667	− 2,6667	− 6,6667
	+ 2,	+ 6,	− 7,	− 2,	+ 10,	+ 2,	+ 3,	+ 3,	+ 8,
	+ 8,6667	+ 1,0000	+ 1,3333	+ 1,3333	+ 6,6667	+ 8,6667	+ 0,3333	− 5,6667	+ 1,3333
		$(bc,1)$	$(bd,1)$	$(be,1)$	Q'		$(cb,1)$	$(db,1)$	$(eb,1)$
		0,00000	0,12494	0,12494	0,82391		9,52288	0,75333 n	0,12494
	$-(bb,1)$	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	. . . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n
	(ac)	$-(bc,1)$				(ca)	$(cb,1)$		
	$-(aa)$	$(bb,1)$				$-(aa)$	$-(bb,1)$		
	0,00000	9,06215 n				9,82391 n	8,58503 n		
		9,18709	. . . $\times \alpha_1$				8,80688 n	. . . $\times \alpha$	
	+ 1,00000					− 0,66667			
	+ 0,15385					− 0,06410			
	+ 1,15385	$= \alpha'_1$				− 0,73077	$= \alpha'$		
		(bc)	(bd)	(be)	q'		(cb)	(db)	(eb)
		0,77815	0,84510 n	0,30103 n	1,00000		0,47712 n	0,47712 n	0,90309
	$(ac)\,\alpha'$, etc.	0,34090	0,56275 n	0,16481 n	0,16481 n	$(ca)\,\alpha'_1$, etc.	0,36318	0,36318	0,76112
	$(bc)\,\beta'$, etc.	9,36318 n	9,43013	8,88606	9,58503 n	$(cb)\,\beta'_1$, etc.	9,53927 n	9,53927	9,96524 n
		+ 2,1923	− 3,6538	− 1,4615	+ 1,4615		+ 2,3077	+ 2,3077	+ 5,7693
		− 0,2308	+ 0,2692	+ 0,0769	− 0,3846		− 0,3462	+ 0,3462	− 0,9231
		+ 8,	+ 7,	+ 3,	− 27,		+ 8,	− 7,	+ 2,
		+ 9,9615	+ 3,6154	+ 1,6154	− 25,9231		+ 9,9615	− 4,3461	+ 6,8462
			$(cd,2)$	$(ce,2)$	Q''			$(dc,2)$	$(ec,2)$
			0,55816	0,20828	1,41368 n			0,63810 n	0,83545
		$-(cc,2)$..	0,99833 n	0,99833 n	0,99833 n	. . . .	. . . .	0,99833 n	0,99833 n
	(ad)	$(bd,1)$	$(cd,2)$			(da)	$(db,1)$	$(dc,2)$	
	$-(aa)$	$-(bb,1)$	$-(cc,2)$			$-(aa)$	$-(bb,1)$	$-(cc,2)$	
	0,22185 n	9,18709 n	9,55983 n			9,82391 n	9,81548	9,63977	
		9,31203	9,62198 n	$\times \alpha_1,\ \alpha'_1$			0,03733	9,50355 n	$\times \alpha,\ \alpha'$
			8,62198	$\times \beta'_1$				8,22480 n	$\times \beta'$
	− 1,66667					− 0,66667			
	+ 0,20513	− 0,15385				+ 1,08975	+ 0,65386		
	− 0,41877	+ 0,04188				− 0,31882	− 0,01678		
	− 1,88031	− 0,11197	$= \alpha''_1,\ \beta''_1$			+ 0,10426	+ 0,63708	$= \alpha'',\ \beta''$	

		(cd)	(ce)	q''			(dc)	(ec)	
		0,84510	0,47712	1,43136 n			0,84510 n	0,30103	
	$(ad)\ \alpha''$, etc.	9,71709	9,31915	9,31915 n		$(da)\ \alpha''_1$, etc.	0,57526 n	0,97320 n	
	$(bd)\ \beta''$, etc.	0,64930 n	0,10523 n	0,80420		$(db)\ \beta''_1$, etc.	9,52622	9,95219 n	
	$(cd)\ \gamma''$, etc.	0,48487	0,11689	1,07113 n		$(dc)\ \gamma''_1$, etc.	0,40493	9,86086 n	
		+ 0,5213	+ 0,2085	− 0,2085			− 3,7606	− 9,4016	
		− 4,4596	− 1,2742	+ 6,3709			+ 0,3359	− 0,8958	
		+ 3,0540	+ 1,3089	− 11,7795			+ 2,5406	− 0,7259	
		− 4,	− 3,	+ 12,			− 4,	− 1,	
		− 4,8843	− 2,7568	+ 6,3829			− 4,8841	− 12,0233	
			$(de,3)$	Q'''				$(ed,3)$	
			0,44041 n	0,80501				1,08002 n	
		$-(dd,3)$ ..	0,68880	0,68880	. . .	. . .	. . .	0,68880	
(ae)	$(be,1)$	$(ce,2)$	$(de,3)$		(ea)	$(eb,1)$	$(ec,2)$	$(ed,3)$	
$-(aa)$	$-(bb,1)$	$-(cc,2)$	$-(dd,3)$		$-(aa)$	$-(bb,1)$	$-(cc,2)$	$-(dd,3)$	
9,82391 n	9,18709 n	9,20995 n	9,75161 n		0,22185 n	9,18709 n	9,83712 n	0,39122 n	
	9,31203	9,27210 n	0,02584	$\times \alpha_1, \alpha'_1, \alpha_1'''$		9,40894 n	9,70090	9,40934 n	$\times \alpha, \alpha', \alpha''$
		8,27210	8,80071	$\times \beta'_1, \beta_1''$			8,42215	0,19542 n	$\times \beta', \beta''$
			9,31144	$\times \gamma''_1$				0,03099 n	$\times \gamma''$
− 0,66667					− 1,66667				
+ 0,20513	− 0,15385				− 0,25641	− 0,15385			
− 0,18711	+ 0,01871	− 0,16216			+ 0,50222	+ 0,02643	− 0,68726		
+ 1,06130	+ 0,06320	+ 0,20485			− 0,25665	− 1,56826	− 1,07397		
+ 0,41265	− 0,07194	+ 0,04269	$= \alpha'''_1, \beta'''_1,$	γ'''_1	− 1,67751	− 1,69568	− 1,76123	$= \alpha''', \beta''',$	γ'''
			(de)	q'''				(ed)	
			0,47712 n	1,07918				0,00000 n	
		$(ae)\ \alpha'''$, etc.	0,52569 n	0,52569			$(ea)\ \alpha'''_1$, etc.	0,31455	
		$(be)\ \beta'''$, etc.	0,53037	1,22934 n			$(eb)\ \beta'''_1$, etc.	9,76006 n	
		$(ce)\ \gamma'''$, etc.	0,72294 n	1,67718			$(ec)\ \gamma'''_1$, etc.	8,93136	
		$(de)\ \delta'''$, etc.	0,86834	1,47040 n			$(ed)\ \delta'''_1$, etc.	9,75161	
			− 3,3550	+ 3,355				+ 2,0632	
			+ 3,3913	− 16,956				− 0,5755	
			− 5,2838	+ 47,553				+ 0,0854	
			+ 7,3848	− 29,539				+ 0,5644	
			+ 5,	+ 17				+ 5,	
			+ 7,1373	+ 21,413				+ 7,1375	
				Q^{IV}					
				1,33068					
			$-(ee,4)$	0,85355 n					
q	Q'	Q''	Q'''	Q^{IV}					
$-(aa)$	$-(bb,1)$	$-(cc,2)$	$-(dd,3)$	$-(ee,4)$					
9,82391	9,88606 n	0,41535	0,11621	0,47713 n					
	0,01100	0,47750	0,39044 n	0,09271 n	$\times \alpha_1, \alpha'_1,$	$\alpha_1'', \alpha_1''',$			
		9,47750 n	9,16531 n	9,33410	$\times \beta_1, \beta''_1,$	β'''_1			
			9,67604 n	9,10746 n	$\times \gamma''_1, \gamma'''_1$				
				0,22874	$\times \delta'''_1$				
+ 0,6667									
+ 1,0256	− 0,7692								
+ 3,0026	− 0,3003	+ 2,6023							
− 2,4572	− 0,1463	− 0,4743	+ 1,3068						
+ 1,2380	+ 0,2158	− 0,1281	+ 1,6933	− 3,0001					
+ 0,9997	− 1,0000	+ 1,9999	+ 3,0001	− 3,0001	$= x, x',$	etc.			

Hierzu kommen noch die folgenden Logarithmen der Factoren α, α', etc.

α	α'	β'	α''	β''	γ''
0,22185	9,86378 *n*	8,58503 *n*	9,01812	9,80420	9,63977
α'''	β'''	γ'''	δ'''		
0,22466 *n*	0,22934 *n*	0,24582 *n*	0,39122 *n*		
α_1	α'_1	β'_1	α''_1	β''_1	γ''_1
0,12494 *n*	0,06215	9,06215 *n*	0,27423 *n*	9,04910 *n*	9,55983 *n*
α_1'''	β_1'''	γ_1'''	δ_1'''		
9,61558	8,85697 *n*	8,63033	9,75161 *n*		

die nach und nach, so wie die Rechnung sie ergeben hatte, auf den untern Rand eines Streifens Papier geschrieben wurden, um durch Darüberhalten desselben die erforderlichen Additionen der Logarithmen ausführen zu können.

Um auch die unbestimmte Auflösung zu zeigen, werde ich die Formeln des Art. 8. auf dasselbe Beispiel anwenden.

$\frac{1}{-(aa)}$	$\frac{\alpha}{-(bb,1)}$	$\frac{\alpha'}{-(cc,2)}$	$\frac{\alpha''}{-(dd,3)}$	$\frac{\alpha'''}{-(ee,4)}$	
9,52288 *n*	9,28400 *n*	8,86545	8,32932	9,37444	
	9,40894	8,92760	8,60355 *n*	8,98669	$\times\ \alpha_1, \alpha_1'$, etc.
		7,92760 *n*	7,37842 *n*	8,22808 *n*	$\times\times\ \beta_1'', \beta_1'''$, etc.
			7,88915 *n*	8,00144	$\times\times\ \gamma_1''', \gamma_1$
				9,12272 *n*	$\times\ \delta_1'''$
− 0,33333					
+ 0,25641	− 0,19231				
+ 0,08464	− 0,00846	+ 0,07336			
− 0,04014	− 0,00239	− 0,00775	+ 0,02135		
+ 0,09698	− 0,01691	+ 0,01003	− 0,13265	+ 0,23502	
+ 0,06456	− 0,22007	+ 0,07564	− 0,11130	+ 0,23502	= (*AA*), (*BA*), etc.
	$\frac{1}{-(bb,1)}$	$\frac{\beta'}{-(cc,2)}$	$\frac{\beta''}{-(dd,3)}$	$\frac{\beta'''}{-(ee,4)}$	
	9,06215 *n*	7,58670	9,11540	9,37579	
	9,18709	7,64885	9,38963 *n*	8,99137	$\times\ \alpha_1, \alpha_1'$, etc.
		6,64885 *n*	8,16450 *n*	8,23276 *n*	$\times\times\ \beta_1', \beta_1''$, etc.
			8,67523 *n*	8,00612	$\times\times\ \gamma_1'', \gamma_1'''$
				9,12740 *n*	$\times\ \delta_1'''$
+ 0,15384	− 0,11538				
+ 0,00446	− 0,00045	+ 0,00386			
− 0,24526	− 0,01461	− 0,04734	+ 0,13044		
+ 0,80903	− 0,01709	+ 0,01014	− 0,13409	+ 0,23757	
+ 0,01107	− 0,14753	− 0,03334	− 0,00365	+ 0,23757	= (*AB*), (*BB*), etc.
		$\frac{1}{-(cc,2)}$	$\frac{\gamma''}{-(dd,3)}$	$\frac{\gamma'''}{-(ee,4)}$	
		9,00167 *n*	8,75097	9,39227	
		9,06382 *n*	9,22520 *n*	9,00785	$\times\ \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''$
		8,06382	8,00007 *n*	8,24924 *n*	$\times\times\ \beta_1', \beta_1'', \beta_1'''$
			8,51080 *n*	8,02260	$\times\times\ \gamma_1'', \gamma_1'''$
				9,14388 *n*	$\times\ \delta_1'''$
− 0,11583	+ 0,01158	− 0,10038			
− 0,16796	− 0,01000	− 0,03242	+ 0,08932		
+ 0,10182	− 0,04775	+ 0,01058	− 0,13928	+ 0,24676	
− 0,18197	− 0,01617	− 0,12227	− 0,04996	+ 0,24676	= (*AC*), (*BC*), etc.
			$\frac{1}{-(dd,3)}$	$\frac{\delta'''}{-(ee,4)}$	
			9,31120	9,53767	
			9,58543 *n*	9,15325	$\times\ \alpha_1'', \alpha_1'''$
			8,36030 *n*	8,39464 *n*	$\times\times\ \beta_1'', \beta_1'''$
			8,87103 *n*	8,16800	$\times\times\ \gamma_1'', \gamma_1'''$
				9,28928 *n*	$\times\ \delta_1'''$
− 0,38497	− 0,02292	− 0,07431	+ 0,20473		
+ 0,14232	− 0,02481	+ 0,01472	− 0,19466	+ 0,34488	
− 0,24265	− 0,04773	− 0,05959	+ 0,01007	+ 0,34488	= (*AD*), (*BD*), etc.

				$\dfrac{1}{-(ee,4)}$	
				9,14645 n	
				8,76203 n	$\times\, \alpha'''_1$
				8,00342	$\times\, \beta'''_1$
				7,77678 n	$\times\, \gamma'''_1$
				8,89806	$\times\, \delta'''_1$
— 0,05781	+ 0,01008	— 0,00598	+ 0,07908	— 0,14010	= (AE), (BE), etc.

Wir haben also hierdurch erhalten:

$$x = +0{,}06456\,q + 0{,}01107\,q' - 0{,}18197\,q'' - 0{,}24265\,q''' - 0{,}05781\,q^{\text{IV}}$$
$$x' = -0{,}22007\,q - 0{,}14753\,q' - 0{,}01617\,q'' - 0{,}04773\,q''' + 0{,}01008\,q^{\text{IV}}$$
$$x'' = +0{,}07564\,q - 0{,}03334\,q' - 0{,}12227\,q'' - 0{,}05959\,q''' - 0{,}00598\,q^{\text{IV}}$$
$$x''' = -0{,}11130\,q - 0{,}00365\,q' - 0{,}04996\,q'' + 0{,}01007\,q''' + 0{,}07908\,q^{\text{IV}}$$
$$x^{\text{IV}} = +0{,}23502\,q + 0{,}23757\,q' + 0{,}24676\,q'' + 0{,}34488\,q''' - 0{,}14010\,q^{\text{IV}}$$

Führen wir nun die Auflösung derselben Gleichungen nach dem zweiten Verfahren, d. i. nach den Formeln des Art. 10., aus, so steht die Rechnung, wie folgt:

(ab)	(ac)	(ad)	(ae)	(q)	(ba)	(ca)	(da)	(ea)
0,60206	0,47712 n	0,69897	0,30103	0,30103 n	0,69897	0,30103	0,30103	0,69897
0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n	0,47712 n
0,82391	0,69897 n	0,92082	0,52288	0,52288 n		0,42597	0,42597 n	0,82391 n
+ 6,6667	— 5,0000	+ 8,3333	+ 3,3333	— 3,3333		— 2,6667	— 2,6667	— 6,6667
+ 2,	+ 6,	— 7,	— 2,	+ 10,		+ 3,	— 3,	+ 8,
+ 8,6667	+ 1,0000	+ 1,3333	+ 1,3333	+ 6,6667		+ 0,3333	— 5,6667	+ 1,3333
(bb,1)	(bc,1)	(bd,1)	(be,1)	Q'		(cb,1)	(db,1)	(eb,1)
	0,00000	0,12494	0,12494	0,82391		0,52288	0,75333 n	0,12494
— (bb,1) . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n	. . . . . .	0,93785 n	0,93785 n	0,93785 n
(ac) γ, etc.	0,30103	0,52288 n	0,12494 n	0,12494		(ac), δ, etc.	0,30103	0,69897
$(bc,1)(\gamma_1,1)$, etc.	8,58503 n	8,70997	8,70997 n	9,40894 n		(bc,1) (δ,1), etc.	9,81548	9,18709 n
	+ 2,0000	— 3,3333	— 1,3333	+ 1,3333			+ 2,0000	+ 5,0000
	— 0,0385	— 0,0513	— 0,0513	— 0,2564			+ 0,6539	— 0,1538
	+ 8,	+ 7,	+ 3,	— 27,			— 7,	+ 2,
	+ 9,9615	+ 3,6154	+ 1,6154	— 25,9231			— 4,3461	+ 6,8462
	(cc,2)	(cd,2)	(ce,2)	Q''			(dc,2)	(ec,2)
		0,55816	0,20828	0,41368 n			0,63810 n	0,83545
	— (cc,2) . .	0,99833 n	0,99833 n	0,99833 n	. . . .	. . . . . .	0,99833 n	0,99833 n
	(ad) δ, etc.	0,52288 n	0,12494	0,12494			(ad) ε,	0,92082 n
	(bd,1) (δ,1), etc.	9,94042	9,94042	0,63939			(bd,1) (ε,1)	9,31203 n
	(cd,2) (δ,2), etc.	0,19793	9,84805	1,05345 n			(cd,2) (ε,2)	0,39528 n
		— 3,3333	— 1,3333	+ 1,3333				— 8,3333
		+ 0,8718	+ 0,8718	+ 4,3590				— 0,2051
		+ 1,5774	+ 0,7048	— 11,3097				— 2,4847
		— 4,	— 3,	+ 2,				— 1,
		— 4,8841	— 2,7567	+ 6,3826				— 12,0231
		(dd,3)	(de,3)	Q'''				(ed,3)
			0,44039 n	0,80496				1,08001 n
		— (dd,3)	0,68879	0,68879	. . . .	. . . . . .	. . . .	0,68879
	(ae) ε,	etc.	0,52288 n	0,52288				
	(be,1) (ε,1)	etc.	9,31203 n	0,01100 n				
	(ce,2) (ε,2)	etc.	0,04540 n	1,25080				
	(de,3) (ε,3)	etc.	0,83161	1,19618 n				
			— 3,3333	+ 3,3333				
			— 0,2051	— 1,026				
			— 1,1102	+ 17,816				
			+ 6,7860	— 15,740				
			+ 5,	+ 17,				
			+ 7,1374	+ 21,443				
			(ee,4)	Q^{IV}				
				1,33068				
			— (ee,4) . .	0,85354 n				

$\frac{(ab)}{-(aa)}$	$\frac{(ac)}{-(aa)}$ $\frac{(bc,1)}{-(bb,1)}$	$\frac{(ad)}{-(aa)}$ $\frac{(bd,1)}{-(bb,1)}$ etc.	$\frac{(ae)}{-(aa)}$ $\frac{(be,1)}{-(bb,1)}$ etc.	$\frac{q}{-(aa)}$	$\frac{Q'}{-(bb,1)}$	$\frac{Q''}{-(cc,2)}$	$\frac{Q'''}{-(dd,3)}$	$\frac{Q^{IV}}{-(ee,4)}$
0,12494 *n*	0,00000	0,22185 *n*	9,82391 *n*	9,82391	9,88606	0,41535	0,11617	0,47714 *n*
	0,06215 *n*	9,18709 *n*	9,18709 *n*	+ 0,6667	− 0,7693	+ 2,6022	+ 1,3067	− 3,0001
		9,55983 *n*	9,20995 *n*	+ 2,0001	+ 0,4616	+ 0,4865	+ 1,6933	x^{IV}
			9,75160 *n*	− 5,0000	− ,04615	− 1,0888	+ 3,0000	
0,12494	0,30101	0,69897 *n*	0,30105	+ 1,9999	− 0,2308	+ 1,9999	x'''	
	9,36316 *n*	9,66421 *n*	9,66423	+ 1,3333	− 1,0000	x''		
		0,03695 *n*	9,69709	+ 1,0000	x'			
			0,22874	x				

wozu noch die folgenden Logarithmen der Hülfsgrössen β, γ, etc. kommen, die, so wie in der vorigen Auflösung, auf den untern Rand eines Streifens Papier geschrieben wurden.

β	γ	δ	ε	$(\gamma,1)$	$(\delta,1)$	$(\varepsilon,1)$
0,22185	9,82391 *n*	9,82391 *n*	0,22185 *n*	8,58503 *n*	9,81548 *n*	9,18709 *n*

$(\delta,2)$	$(\varepsilon,2)$	$(\varepsilon,3)$
9,63977	9,83712 *n*	0,39122 *n*

Wenn man diese Rechnung mit der nach der ersten Auflösung vergleicht, so wird man gewahr, dass wenigstens für die **b e s t i m m t e** Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen die zweite Auflösung auf eine merklich kürzere Rechnung führt wie die erste. Doch ist hierbei auch zu bedenken, dass man bei dieser kürzeren Rechnung die Controllen entbehrt, die die erste Auflösung im Laufe derselben darbietet.

Führen wir jetzt, um eine Vergleichung machen zu können, die unbestimmte Auflösung nach der zweiten Methode, oder den Formeln des Art. 11., durch. Rechnen wir zuerst alle erforderlichen Hülfsgrössen R, R', etc. S, etc.

$(\gamma,1)$								
$(\delta,1)$	$(\delta,2)$		γ	δ	ε			
$(\varepsilon,1)$	$(\varepsilon,2)$	$(\varepsilon,3)$	− 0,66667	− 0,66667	− 1,6667			
8,58503 *n*			− 0,06410	+ 1,08975	− 0,2564			
9,81548	9,63977		− 0,73077	− 0,31882	+ 0,5022			
9,18709 *n*	9,83712 *n*	0,39122 *n*	R'	+ 0,10426	− 0,2566			
8,80688 *n*				R''	− 1,6775			
					R'''			
0,03733	9,50355 *n*							
9,40894 *n*	9,70090	9,40934 *n*	9,86378 *n*	9,01812	0,22466 *n*			
			0,99833 *n*	0,68879	0,85354 *n*	$(\delta,1)$	$(\varepsilon,1)$	
	8,22480 *n*					+ 0,65386	− 0,15385	
	8,42215	0,19542 *n*				− 0,01678	+ 0,02643	
						+ 0,63708	− 1,56826	
						S'	− 1,69568	
							S'	
						9,80420	0,22934 *n*	$(\varepsilon,2)$
						0,68879	0,85354 *n*	− 0,6873
		0,03099 *n*						− 1,0740
								− 1,7613
								T'
								0,24583 *n*
								0,85354 *n*

$\frac{(ab)}{-(aa)}$	$\frac{(ac)}{-(aa)}$ $\frac{(bc,1)}{-(bb,1)}$	$\frac{(ad)}{-(aa)}$ etc.	$\frac{(ae)}{-(aa)}$ etc.	$\frac{1}{-(aa)}$	$\frac{R}{-(bb,1)}$	$\frac{R'}{-(cc,2)}$	$\frac{R''}{-(dd,3)}$	$\frac{R'''}{-(ee,4)}$
0,12494 n	0,00000 9,06215 n	0,22185 n 9,18709 n 9,55983 n	9,82394 n 9,18709 n 9,20995 n 9,75160 n	9,52288 n — 0,33333 — 0,15669 + 0,18550	9,28400 n — 0,49231 — 0,03646 + 0,01712	8,86545 + 0,07336 — 0,03811 + 0,04040	8,32933 + 0,02135 — 0,13265 — 0,11130	9,37112 + 0,23503 (EA)
9,46752	8,78881 7,94096 n	9,26835 8,23359 8,60633	9,19503 n 8,55821 n 8,58107 n 9,12272 n	+ 0,07565 + 0,29344 + 0,06457 (AA)	— 0,00873 — 0,22008 (BA)	+ 0,07565 (CA)	(DA)	
9,29379	8,52310 n 7,58525	7,87444 6,74938 7,12212	9,19971 n 8,56289 n 8,58575 n 9,12740 n		$\frac{1}{-(bb,1)}$ 9,06215	$\frac{S}{-(cc,2)}$ 7,58670	$\frac{S'}{-(dd,3)}$ 9,11541	$\frac{S''}{-(ee,4)}$ 9,37580
				— 0,15838 + 0,00608 — 0,03335 + 0,19670 + 0,01105 (AB)	— 0,11538 — 0,03655 + 0,00056 + 0,00385 — 0,14752 (BB)	+ 0,00386 — 0,03853 + 0,00132 — 0,03335 (CB)	+ 0,13044 — 0,13409 — 0,00365 (DB)	+ 0,23757 (EB)
8,33365	9,08736 n 8,14951	8,92039 7,88563 8,25837	9,21620 n 8,57938 n 8,60224 n 9,14389 n			$\frac{1}{-(cc,2)}$ 9,00167 n	$\frac{T}{-(dd,3)}$ 8,95098	$\frac{T'}{-(ee,4)}$ 9,39229
				— 0,16451 + 0,08325 — 0,12228 + 0,02156 — 0,18198 (AC)	— 0,03796 + 0,00768 + 0,01411 — 0,01617 (BC)	— 0,10039 — 0,04002 + 0,01813 — 0,12228 (CC)	+ 0,08933 — 0,13928 — 0,04995 (DC)	+ 0,24677 (EC)
8,80373	8,77517 n 7,83732	8,22531 n 7,19055 n 7,56329 n	9,36159 n 8,72477 n 8,74763 n 9,28928 n				$\frac{1}{-(dd,3)}$ 9,31121	$\frac{U}{-(ee,4)}$ 9,53768
				— 0,22993 — 0,01680 — 0,05959 + 0,06364 — 0,24268 (AD)	— 0,05306 — 0,00155 + 0,00688 — 0,04773 (BD)	— 0,05593 — 0,00366 — 0,05959 (CD)	+ 0,20474 — 0,19466 + 0,01008 (DD)	+ 0,34489 (ED)
8,12883 n	7,77670 n 6,83885	9,11991 n 8,08515 n 8,45789 n	8,97037 8,33355 8,35641 8,89806					$\frac{1}{-(ee,4)}$ 9,14646 n
				+ 0,09431 — 0,13180 — 0,00598 — 0,01345 — 0,05782 (AE)	+ 0,02156 — 0,01216 + 0,00069 + 0,01009 (BE)	+ 0,02272 — 0,02870 — 0,00598 (CE)	+ 0,07908 (DE)	— 0,14011 (EE)

Vergleicht man diese Berechnung der Coefficienten der unbestimmten Auflösung mit der nach der ersten Methode, so sieht man, dass sie, für sich betrachtet, mehr Arbeit verursacht wie jene. Zählt man aber in beiden Methoden den Theil der bestimmten Auflösung hinzu, der nothwendig für die Ausführung der unbestimmten vorangehen muss, so scheint mir, dass beide Methoden sehr nahe dieselbe Arbeit verlangen.

II.

ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER GRÖSSE $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ NACH DEN POTENZEN VON α.

1.

Die allgemeinste Form, in welcher in der Attractionstheorie die in der Ueberschrift genannte Wurzelgrösse vorkommt, ist die, wo

$$H = \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \cos(\theta-\theta')$$

ist, und also den Cosinus der Seite eines sphärischen Dreiecks bezeichnet, in welchem der gegenüberliegende Winkel $\theta-\theta'$ ist, und die beiden andern Seiten ω und ψ sind. Die Entwickelung dieser Wurzelgrösse ist schon von Legendre in den Memoiren der Pariser Academie, und von Laplace in der «Mecanique celeste» ausgeführt und gezeigt worden, dass der Coefficient irgend einer Potenz von α aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, deren jedes aus 4 Factoren zusammengesetzt ist. Der erste dieser Factoren ist von ω, ψ und $\theta-\theta'$ unabhängig, der zweite hängt blos von ω ab, der dritte hat dieselbe Form wie der zweite, hängt aber von ψ statt von ω ab, der vierte endlich ist der Cosinus eines Vielfachen von $\theta-\theta'$.

Legendre hat später gezeigt, dass der zweite, und daher auch der dritte dieser Factoren bis auf einen von $\sin\omega$ und resp. $\sin\psi$ abhängigen Factor dieselbe Form hat wie die Entwickelungscoefficienten und ihre Differentialquotienten, die sich ergeben, wenn man dieselbe Wurzelgrösse, ohne H in mehrere Grössen zu zerlegen, entwickelt. Dieses merkwürdige Resultat findet man im zweiten Bande der «Exercices de calcul integral» abgeleitet, und man hat lange Zeit hindurch keine andere wesentlich von dieser verschiedene Ableitung gehabt, bis Jacobi in Crelle's Journal eine Ableitung gab, die von jener durchaus verschieden, sich durch Kürze und Eleganz auszeichnet. Ich habe noch eine andere Ableitung gefunden, die von jenen beiden gänzlich verschieden ist, und vermittelst einer kurzen Rechnung aus einer neuen Eigenschaft dieser Entwickelungscoefficienten folgt, die darin besteht, dass man, wenn man den Coefficienten von α^n mit $U_n(H)$ bezeichnet, das Product der m^{ten} Differentialquotienten von $U_n(x)$ und $U_n(y)$ durch einen endlichen, von den Differentialquotienten der Function $U_n(xy)$ abhängenden Ausdruck darstellen kann. Dass man mit andern Worten das Product zweier resp. von den Argumenten x und y abhängigen Functionen durch die vom Product xy abhängige Function und ihre Differentialquotienten vermittelst eines endlichen Ausdruckes darstellen kann.

2.

Um diesen Satz abzuleiten, sei

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha U_1(x)+\alpha^2 U_2(x)+\alpha^3 U_3(x)+\text{etc.}$$

Man weiss, dass $U_n(x)$ eine ganze und rationale Function von x von der n^{ten} Ordnung ist, deren Ausdruck nach den Potenzen von x geordnet der folgende ist:

$$U_n(x)=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ n}\left\{x^n-\frac{n.\ n-1}{2.2n-1}x^{n-2}+\frac{n.n-1.n-2\ .\ n-3}{2.4\ .\ 2\ n-1.2n-3}x^{n-4}\mp\text{etc.}\right\}$$

Der m^{te} Differentialquotient dieser Function ist dem zu Folge eine ganze und rationale Function von x von der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung, und es ist leicht zu sehen, dass man diese auf folgende Form bringen kann:

$$\frac{d^m\,Un(x)}{dx^m}=A\{x^{n-m}+B(x^2-1)x^{n-m-2}+C(x^2-1)^2x^{-n-m-4}+\text{etc.}\}$$

Wenn man in diesem Ausdruck die Potenzen von x^2-1 entwickelt, jenen $m$mal differentiirt, und dann die gleichartigen Glieder mit einander vergleicht, so ergeben sich die Werthe der unbestimmten Coefficienten A, B, C, etc. Dieser Weg ist aber umständlich, und man gelangt einfacher und direct zur Kenntniss dieser Coefficienten, wenn man ein Theorem von Jacobi zu Hülfe nimmt. Diesem zu Folge ist

$$\frac{d^m\,Un(x)}{dx^m}=\frac{1}{2^n\,(x^2-1)^m}\,\frac{n-m+1\ldots n+m}{1.2\ \ .\ \ .\ \ .\ \ n}\,\frac{d^{n-m}\,(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}$$

Den angedeuteten Differentialquotienten findet man leicht, wenn man in $(x^2-1)^n$, x in $x+dx$ verwandelt und durch den Binomischen Satz den Coefficienten von dx^{n-m} sucht. Es ist erstlich

$$((x+dx)^2-1)^n=(x^2-1+2\,x\,dx+dx^2)^n=$$

$$(x^2-1+2x\,dx)^n+\frac{n}{1}(x^2-1+2x\,dx)^{n-1}dx^2+\frac{n.n-1}{1.2}(x^2-1+2x\,dx)^{n-2}dx^4+\ldots$$

und wir brauchen daher ferner noch

das mit dx^{n-m} multiplicierte Glied in $(x^2-1+2\,xdx)^n$

" " dx^{n-m-2} " " " $(x^2-1+2\,xdx)^{n-1}$

" " dx^{n-m-4} " " " $(x^2-1+2\,xdx)^{n-2}$

etc.

Diese Glieder sind beziehungsweise

$$2^{n-m}\frac{n.n-1.\ldots m+1}{1.2.\ldots\ldots n-m}(x^2-1)^m x^{n-m}\,dx^{n-m}$$

$$2^{n-m-2}\frac{n-1.n-2\ldots m+2}{1.2\ldots n-m-2}(x^2-1)^{m+1}x^{n-m-2}\,dx^{n-m-2}$$

$$2^{n-m-4}\frac{n-2.n-3\ldots m+3}{1.2\ldots n-m-4}(x^2-1)^{m+2}x^{n-m-4}\,dx^{n-m-4}$$

etc.

deren Substitution in den vorstehenden Ausdruck sogleich giebt

$$\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{1.2..n-m.dx^{n-m}}=2^n(x^2-1)^m\frac{1}{2^m}\frac{n.n-1..m+1}{1.2.\ldots n-m}\Big\{x^{n-m}$$
$$+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)x^{n-m-2}+\frac{n-m\ldots n-m-3}{2.4.2m+2.2m+4}(x^2-1)^2x^{n-m-4}+\text{etc.}\Big\}$$

also

$$\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}=\frac{n-m+1\ldots n+m}{2.4.\ldots 2m}\Big\{x^{n-m}+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)\,x^{n-m-2}$$
$$+\frac{n-m\,.\,.\,n-m-3}{2.4.2m+2.2m+4}(x^2-1)^2x^{n-m-4}+\text{etc.}\Big\}$$

Es ist klar, dass $\frac{d^n\,Un\,(x)}{dx^n}$ constant ist, also

$$\frac{d^n\,Un\,(x)}{dx^n}=\frac{d^n\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^n}$$

Hieraus folgt

$$(A)\ldots\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^n\,Un\,(y)}{dy^n}\,dy^{n-m}=$$
$$\frac{n-m+1\ldots n+m}{2.4\ldots 2m}\Big\{x^{n-m}+\frac{n-m.n-m-1}{2.2m+2}(x^2-1)\,x^{n-m-2}+\text{etc.}\Big\}\frac{d^nUn\,(xy)}{d\,(xy)^n}\,dy^{n-m}$$

in welcher Gleichung x und y von einander unabhängige Grössen sind. Diese Gleichung können wir $n-m$mal integrieren, wodurch die linke Seite ohne Weiteres in

$$\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m}$$

übergeht. Für die rechte Seite haben wir sogleich

$$\int^{n-m}\frac{d^n\,Un\,(xy)}{d\,(xy)}\,dy^{n-m}=\frac{1}{x^{n-m}}\,\frac{d^m\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^m}$$
$$+fx+yf_1x+y^2f_2x+\ldots y^{n-m-1}f_{n-m-1}x\ldots(A^*)$$

wo fx, f_1x, etc. die den Integrationen zugefügten willkührlichen Constanten (hier möglicher Weise Functionen von x) sind. Dieses Integral kann aber auch eine Reihe von andern Formen annehmen. Da $\frac{d^n\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^n}$ eine Constante ist, die ich K nennen will, so ist in der That das obige Integral $=$

$$\frac{K}{1.2\ldots n-m}y^{n-m}+c_{n-m-1}y^{n-m-1}+c_{n-m-2}y^{n-m-2}+\ldots c_1y+c$$

wo c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. die willkührlichen Constanten sind. Das erste Glied dieses Ausdrucks können wir auch so schreiben:

$$\frac{K}{1.2\ldots n-m.x^{n-m}}(xy)^{n-m}$$

ja wir können auch statt des Factors $(xy)^{n-m}$ jede beliebige ganze und rationale Function der Ordnung $n-m$ von xy substituieren, wenn wir nur den Factor $\frac{K}{1.2..n-m}$ dem Coefficienten von $(xy)^{n-m}$ in der angewandten Function gemäss abändern, und unter den willkührlichen Grössen c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. Functionen von x verstehen. Der oben abgeleitete Ausdruck unsers Integrals ist ein specieller Fall dieses allgemeineren, indem $\frac{d^m Un(xy)}{d(xy)^m}$ eine ganze und rationale Function der Ordnung $n-m$ von xy ist. Wir können aber noch weiter gehen. Bezeichnen wir allgemein durch $Fp(xy)$ eine ganze und rationale Function der Ordnung p von xy, so können wir mit gehöriger Abänderung des constanten Coefficienten des ersten Gliedes, und indem wir für c_{n-m-1}, c_{n-m-2}, etc. willkührliche Functionen von x annehmen, für y^{n-m} nach einander schreiben:

$$\frac{y+a}{x^{n-m-1}}F_{n-m-1}(xy);\ \frac{y^2+a'y+b'}{x^{n-m-2}}F_{n-m-2}(xy);\ \frac{y^3+a''y^2+b''y+c}{x^{n-m-3}}F_{n-m-3}(xy);\ \text{etc.}$$

wo a, a', b', a'', etc. willkührlich gewählte Constanten sind. Es geht hieraus hervor, dass, ausser der obigen direct erhaltenen Form (A^*), unser Integral unter andern auch, wie folgt, dargestellt werden kann:

$$\int^{n-m}\frac{d^n Un(xy)}{d(xy)^n}dy^{n-m}=\frac{y^2-1}{k.x^{n-m-2}}\,\frac{d^{m+2}Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}+\varphi x+y\varphi x+..y^{n-m-1}\varphi_{n-m-1}x$$
$$=\frac{(y^2-1)^2}{k'.x^{n-m-4}}\,\frac{d^{m+4}Un(xy)}{d(xy)^{m+4}}+\text{etc.}$$
$$=\text{etc.}$$

wo noch die Constanten k, k', etc. zu bestimmen sind. Dieses geschieht am einfachsten durch Rückdifferentiieren, und wir wenden zu dem Ende den folgenden Satz aus der Differentialrechnung an:

$$d^{n-m}.uv=ud^{n-m}v+\frac{n-m}{1}du.\,d^{n-m-1}v+\frac{n-m.n-m-1}{1.2}d^2u.\,d^{n-m-2}v+\text{etc.}$$

wo u und v irgend zwei veränderliche Grössen bedeuten.

Setzt man nun successive

$$u=y^2-1=(y^2-1)^2=\text{etc.}$$
$$v=\frac{d^{m+2}\,Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}=\frac{d^{m+4}\,Un(xy)}{d(xy)^{m+4}}=\text{etc.}$$

und erwägt, dass

$$\frac{d^{n+1}\,Un(xy)}{d(xy)^{n+1}}=\frac{d^{n+2}\,Un(xy)}{d(xy)^{n+2}}=\text{etc.}=0$$

ist, so bekommt man sogleich

$$\frac{d^{n-m}.(y^2-1)\frac{d^{m+2}Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}}{dy^{n-m}} = (n-m)(n-m-1)x^{n-m-2}\frac{d^n Un(xy)}{d(xy)^n}$$

$$\frac{d^{n-m}.(y^2-1)^2\frac{d^{m+4}Un(xy)}{d(xy)^{m+4}}}{dy^{n-m}} = (n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)x^{n-m-4}\frac{d^n Un(xy)}{d(xy)^n}$$

etc. etc.

Hiermit ergiebt sich

$$k = n-m.n-m-1$$

$$k' = n-m.n-m-1.n-m-2.n-m-3$$

etc. etc.

und wir erhalten somit durch die Substitution der im Vorhergehenden entwickelten Integrale in die Differentialgleichung (A)

$$\frac{d^m Un(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m Un(y)}{dy^m} + fx + yf_1x + \ldots + y^{n-m-1}f_{n-m-1}x =$$

$$\frac{n-m-1\ldots n+m}{2.4\ldots 2m}\left\{\frac{d^m Un(xy)}{d(xy)^m} + \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{2.2m+2}\frac{d^{m+2}Un(xy)}{d(xy)^{m+2}}\right.$$

$$\left. + \frac{(x^2-1)^2(y^2-1)^2}{2.4.2m+2.2m+4}\frac{d^{m+4}Un(xy)}{d(xy)^{m+4}} + \text{etc.}\right\}$$

wo noch die willkührlichen Functionen fx, f_1x, etc. zu bestimmen sind.

Setzen wir $y=1$, so bekommen wir, da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{d^m Un(y)}{dy^m} = \frac{n-m+1..n+m}{2.4.....2m}$$

ist,

$$\frac{d^m Un(x)}{dx^m} + fx + f_1x + f_2x + \text{etc.} = \frac{d^m Un(x)}{dx^m}$$

woraus folgt, dass

$$fx + f_1x + f_2x + \text{etc.} = 0 \qquad (a)$$

Differentiiren wir unser Integral nach y, und setzen nach der Differentation $y=1$, so ergiebt sich

$$\frac{(n-m)(n+m+1)}{2m+2}\frac{d^m Un(x)}{dx^m} + f_1x + 2f_2x + \ldots =$$

$$x\frac{d^{m+1}Un(x)}{dx^{m+1}} + \frac{x^2-1}{2m+2}\frac{d^{m+2}Un(x)}{dx^{m+2}}$$

aber es ist bekannt, dass zwischen den Differentialquotienten von $Un(x)$ die folgende Relation statt findet:

$$0 = (x^2-1)\frac{d^{m+2}Un(x)}{dx^{m+2}} + (2m+2)x\frac{d^{m+1}Un(x)}{dx^{m+1}} - (n-m)(n+m+1)\frac{d^m Un(x)}{dx^n}$$

also

$$f_1x + 2f_2x + \text{etc.} = 0 \qquad (b)$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet man

$$2f_2x + \text{etc.} = 0 \qquad (c)$$

u. s. w. Das System der Gleichungen (a), (b), (c), etc. giebt ohne Weiteres zu erkennen, dass jede einzelne der durch die Integrationen eingeführten willkührlichen Functionen fx, f_1x, f_2x, etc. gleich Null ist, und wir haben daher endlich

$$(B)\quad \frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m} = \frac{n-m+1\,..\,n+m}{2\,.\,4\,...\,2m}\left\{\frac{d^m\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^m} + \frac{(1-x^2)\,(1-y^2)}{2\,.\,2m+2}\,\frac{d^{m+2}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+2}} + \frac{(1-x^2)^2\,(1-y^2)^2}{2\,.\,4\,.\,2m+2\,.\,2m+4}\,\frac{d^{m+4}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+4}} + \text{etc.}\right\}$$

wodurch sich zeigt, dass das Product der m^{ten} Differentialquotienten zweier beziehungsweise von x und y abhängenden Un Functionen durch einen endlichen Ausdruck des m^{ten} und der höheren Differentialquotienten der vom Product xy abhängigen U_n Function ausgedrückt werden kann. Der Satz giebt, um mich noch anders auszudrücken, das Product der Functionen durch dieselbe, dem Product der Argumente zugehörige Function und ihre Differentialquotienten.

Ich füge hinzu, dass man auch einen entgegengesetzten Ausdruck geben kann. Nämlich:

$$\frac{d^m\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^m} = 2^m\,\frac{1\,.\,2\,...\,m}{n-m+1\,.\,.\,n+m}\,\frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m}\cdot\frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m}$$
$$-\frac{2^m}{1}\cdot\frac{1\,.\,2\,..\,m\,(m+2)}{n-m-1\,..\,n+m+2}\,(1-x^2)\,(1-y^2)\,\frac{d^{m+2}\,Un\,(x)}{dx^{m+2}}\cdot\frac{d^{m+2}\,Un\,(y)}{dy^{m+2}}$$
$$+\frac{2^m}{1.2}\cdot\frac{1.2\,...\,m+1\,(m+4)}{n-m-3\,..\,n+m+4}\,(1-x^2)^2\,(1-y^2)^2\,\frac{d^{m+4}\,Un\,(x)}{dx^{m+4}}\cdot\frac{d^{m+4}\,Un\,(y)}{dy^{m+4}} \mp \text{etc.}$$

welcher die dem Producte der Argumente zugehörige Function durch das Product der Functionen und ihrer Differentialquotienten giebt. Von diesem Satze werde ich indess hier keine Anwendung machen, weshalb ich den Beweis desselben übergehe.

3.

Gehen wir nun zur Entwickelung unserer Wurzelgrösse über. Wir haben

$$(1-2\,H\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + aU_1\,(H) + \alpha^2\,U_2\,(H) + \text{etc.}$$

wo

$$H = \cos\omega\,\cos\psi + \sin\omega\,\sin\psi\,\cos\,(\theta-\theta')$$

ist. Da $U_n\,(H)$ eine ganze und rationale Function der Ordnung n von H ist, so ist ohne Weiteres klar, dass wir sie in eine endliche, nach den Cosinussen der Vielfachen von $\theta-\theta'$ fortschreitende Reihe verwandeln können. Wir können also annehmen, dass

$$U_n\,(H) = \Sigma_{-n}^{+n}\,\alpha_m\,\cos m\,(\theta-\theta') \qquad (\alpha)$$

sei, und haben einem bekannten Theorem zu Folge für die Bestimmung der Coefficienten α_m den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Un\,(H) \cos m\,(\theta - \theta')\, d\,(\theta - \theta') \tag{β}$$

Um dieses Integral zu ermitteln, setze ich

$$\cos\omega = x,\ \cos\psi = y$$

woraus

$$H = xy + \sin\omega \sin\psi \cos(\theta - \theta')$$

hervorgeht. Setzen wir nun erstlich $H = xy$, und sehen das zweite Glied des vollständigen Ausdrucks von H als einen Zuwachs des ersten an, so können wir diesen strenge durch das Taylorsche Theorem ermitteln, welches in diesem Falle auf eine endliche Anzahl von Gliedern führen muss. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} U_n\,(H) &= U_n\,(xy) + \frac{d\,Un\,(xy)}{d\,(xy)} \sin\omega \sin\psi \cos(\theta - \theta') \\ &+ \tfrac{1}{2} \frac{d^2\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^2} \sin^2\omega \sin^2\psi \cos^2(\theta - \theta') \\ &+ \ldots + \frac{1}{1.2..n} \frac{d^n\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^n} \sin^n\omega \sin^n\psi \cos^n(\theta - \theta') \end{aligned} \tag{γ}$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in (β) führt auf Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \cos^q(\theta - \theta') \cos m\,(\theta - \theta')\, d\,(\theta - \theta')$$

Aber es ist allgemein

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^q z \cos mz dz = \frac{1}{2^q} \cdot \frac{q \,.\, q-1 \ldots \frac{q+m}{2} + 1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots \frac{q-m}{2}}$$

wenn $q \geqq m$, und q und m zugleich entweder gerade oder ungerade sind. In allen andern Fällen ist das Integral $= 0$. Die Substitution von (γ) in (β) giebt daher vermittelst dieses Satzes sogleich

$$\begin{aligned} \alpha_m = &\quad \frac{\sin^m\omega \,.\, \sin^m\psi}{2.4..2m} \frac{d^m\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^m} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sin^{m+2}\omega \,.\, \sin^{m+2}\psi}{2.4...2m+2} \frac{d^{m+2}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+2}} \\ &+ \frac{1}{2.4} \frac{\sin^{m+4}\omega \,.\, \sin^{m+4}\psi}{2.4...2m+4} \frac{d^{m+4}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+4}} \\ &+ \frac{1}{2.4.6} \frac{\sin^{m+6}\omega \,.\, \sin^{m+6}\psi}{2.4...2m+6} \frac{d^{m+6}\,Un\,(xy)}{d\,(xy)^{m+6}} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Erwägt man nun, dass

$$1 - x^2 = \sin^2\omega,\ 1 - y^2 = \sin^2\psi$$

und vergleicht man diesen Ausdruck von α_m mit der Gleichung (B), so ergiebt sich auf den ersten Anblick, dass

$$\alpha_m = \frac{\sin^m\omega \,.\, \sin^m\psi}{n-m+1..n+m} \cdot \frac{d^m\,Un\,(x)}{dx^m} \cdot \frac{d^m\,Un\,(y)}{dy^m}$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Substituiren wir zum Ueberfluss diesen Werth von α_m in den obigen Ausdruck (α) für $U_n(H)$, schreiben einige der in der Summation inbegriffenen Glieder aus, und vereinigen die negativen Vielfachen von $\theta - \theta'$ mit den gleichen positiven, so bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
U_n(H) &= U_n(x) \, . \, U_n(y) \\
&+ \frac{2 \sin \omega \sin \psi}{n \, . \, n+1} \, \frac{d\, Un\,(x)}{dx} \, . \, \frac{d\, Un\,(y)}{dy} \cos(\theta - \theta') \\
&+ \frac{2 \sin^2 \omega \, . \, \sin^2 \psi}{n-1 \, . \, n \, . \, n+1 \, . \, n+2} \, \frac{d^2\, Un\,(x)}{dx^2} \, . \, \frac{d^2\, Un\,(y)}{dy^2} \cos 2(\theta - \theta') \\
&+ \frac{2 \sin^3 \omega \, . \, \sin^3 \psi}{n-2 \, . \, . \, . \, n+3} \, \frac{d^3\, Un\,(x)}{dx^3} \, . \, \frac{d^3\, Un\,(y)}{dy^3} \cos 3(\theta - \theta') \\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{2 \sin^n \omega \, . \, \sin^n \psi}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, 2n} \, \frac{d^n\, Un\,(x)}{dx^n} \, . \, \frac{d^n\, Un\,(y)}{dy^n} \cos n(\theta - \theta')
\end{aligned}
$$

welches der bekannte Ausdruck dieses Coefficienten ist.
