Ein Beitrag zur Berechnung und Konstruktion der Pendel.

Von C. H. Schneider in Furtwangen.

(Fortsetzung.)

B.) Das zusammengesetzte Pendel und seine Beziehung zum einfachen Pendel.

Begriff. Ist ein Körper um eine horizontale Achse drehbar und befindet er sich in der stabilen Gleichgewichtslage, liegt also sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Drehpunkte, so haben wir ein zusammengesetztes Pendel vor uns. Verschiebt man diesen Körper aus seiner Gleichgewichtslage und überlässt ihn dem Einflusse der Schwere, so nimmt er eine schwingende Bewegung an, wie das im vorigen Abschnitt betrachtete einfache Pendel.

Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment.

Für das folgende sind einige mechanische Begriffe von Wichtigkeit, die wir zunächst feststellen wollen.

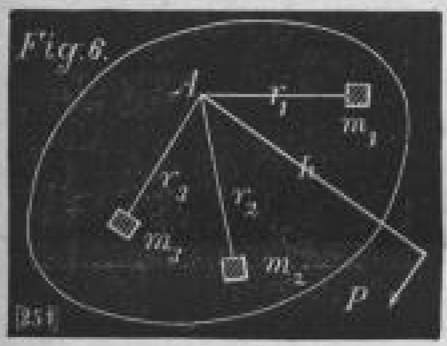
Unter der Masse M eines Körpers wollen wir das Verhältnis seines Gewichtes G zu der Beschleunigung g des freien Falles verstehen, also setzen

$$M = \frac{G}{g}$$

Eine konstante Kraft P, welche auf die Masse M wirkt, ertheilt derselben eine gewisse Beschleunigung p und zwar ist die Kraft P gleich dem Produkte aus Masse und Beschleunigung, also

16. $$P = Mp$$

Dreht sich ein Körper unter dem Einflusse einer konstanten Kraft P, welche am Hebelarm h angreift, um eine Achse A, siehe Fig. 6, so beschreiben alle Punkte derselben Kreise, deren Ebenen senkrecht zu dieser Achse stehen und deren Mittelpunkte in dieser Achse liegen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung welche ein Punkt auf seinem Kreise hat, nennt man Umfangsgeschwindigkeit und Umfangsbeschleunigung, bezieht man diese auf einen Punkt in der Entfernung 1 von der Drehachse, so nennt man sie Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung. Kennt man nun für einen Körper die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, so kann man für jeden beliebigen Punkt die Umfangsgeschwindigkeit und Umfangsbeschleunigung sofort angeben, indem man die Entfernung dieses Punktes von der Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit, resp. Winkelbeschleunigung vervielfacht. Die Kraft P am Hebelarme h in Fig. 6, ertheile nun dem Körper eine gewisse Winkelbeschleunigung q. Man hat dann für die Massenelemente



m_1 $\quad$ m_2 $\quad$ $m_3 \ldots.$

in der Entfernung

r_1 $\quad$ r_2 $\quad$ $r_3 \ldots.$

von der Drehachse A die Umfangsbeschleunigungen

$r_1 q$ $\quad$ $r_2 q$ $\quad$ $r_3 q \ldots.$

welchen nach Gl. 16 die Kräfte

$P_1 = r_1 q m_1$ $\quad$ $P_2 = r_2 q m_2$ $\quad$ $P_3 = r_3 q m_3 \ldots.$

entsprechen. Soll nun die Wirkung dieser in den einzelnen Massenelementen angreifenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots.$ hervorgebracht werden durch die Kraft P am Hebelarme h, so muss sein

$$Ph = P_1 r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3 + \ldots. \text{ oder}$$
$$Ph = q(r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + r_3^2 m_3 + \ldots.)$$

Man nennt nun das Produkt

$$r_1^2 m_1$$

d. i. Massenelement mal dem Quadrate seines Abstandes von der Drehachse, das Trägheitsmoment des Massenelementes inbezug auf die Drehachse und die Summe der Trägheitsmomente aller einzelnen Massenelemente, also die Summe

$$r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + r_3^2 m_3 + \ldots.$$

nennt man das Trägheitsmoment des ganzes Körpers; bezeichnen wir dasselbe mit W, so ist

$$Ph = qW \text{ oder}$$

17. $$q = \frac{Ph}{W}$$

d. i. dreht eine Kraft P am Hebelarme h einen Körper um eine Achse und hat der Körper inbezug auf diese Achse das Trägheitsmoment W, so ist die Winkelbeschleunigung des Körpers gleich dem Moment der Kraft dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers.

Werthe einiger Trägheitsmomente.

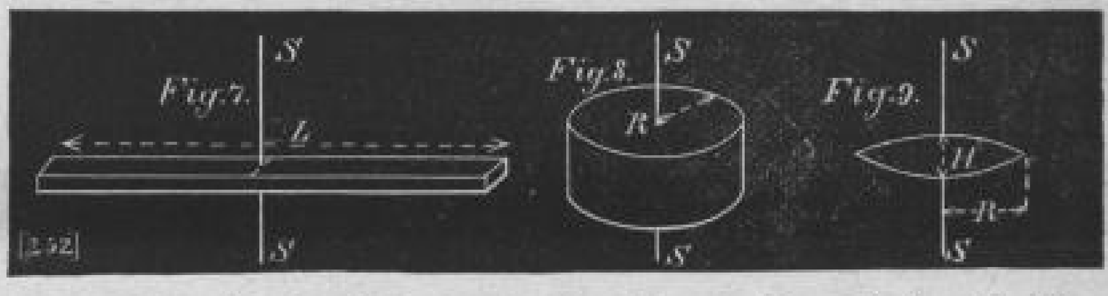
Die Bestimmung des Trägheitsmomentes der Körper ist im allgemeinen nur mit Hilfe höherer Mathematik möglich; es lassen sich jedoch auch einige Trägheitsmomente auf elementarem Wege berechnen. Wir wollen hier von derartigen Berechnungen absehen und uns darauf beschränken, die Werthe der Trägheitsmomente solcher Körper, die wir im folgenden brauchen, anzugeben.

1. Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt des Körpers.

a) Ein stabförmiger Körper von beliebigem Querschnitte, dessen Querschnittsdimensionen im Vergleich zur Länge des Stabes gering sind, drehe sich um eine durch seinen Schwerpunkt gehende und rechtwinklig auf der Längsrichtung stehenden Achse SS; sein Trägheitsmoment inbezug auf diese Achse beträgt dann angenähert

18. $$W_0 = \frac{M}{12} L^2$$

sofern M die Masse und L die Länge des Stabes (Fig. 7) ist.



b) Ein Kreiscylinder von der Masse M und dem Radius R drehe sich um seine geometrische Achse, Fig. 8 so beträgt das Trägheitsmoment inbezug auf diese Achse

19. $$W_0 = \frac{MR^2}{2}$$

Angenähert hat eine Linse, Fig. 9, von der Masse M und dem Radius R, wenn sie um ihre geometrische Achse rotirt, dasselbe Trägheitsmoment wie der Cylinder, sofern die Höhe H der Linse im Vergleich zum Radius derselben gering ist.

2. Die Drehachse geht parallel zu einer Achse durch den Schwerpunkt.

Ist W_0 das Trägheitsmoment eines Körpers, inbezug auf eine Achse SS durch seinen Schwerpunkt, ist M die Masse des Körpers und c die Entfernung der zur Achse durch den Schwerpunkt parallelen Drehachse AA, so ist das Trägheitsmoment inbezug auf diese Drehachse AA

$$W = W_0 + Mc^2$$

Machen wir hiervon Anwendung auf die unter 1. aufgestellten Trägheitsmomente, so ergibt sich folgendes;

a) Das Trägheitsmoment für einen Pendelstab, Fig. 10, von der Länge L und Masse M, der um eine senkrecht zu seiner Längsrichtung stehende und durch das Ende des Stabes gehende Achse A schwingt, ist

20. $$W = \frac{ML^2}{3}$$

b) Das Trägheitsmoment für eine Pendellinse von der Masse M und dem Radius R, Fig 11, die um eine Achse schwingt, die parallel zu ihrer geometrischen Achse läuft und von derselben um c entfernt ist, beträgt

21. $$W = M\left(\frac{R^2}{2} + c^2\right)$$