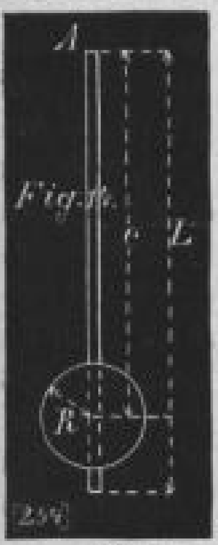
Ein Beitrag zur Berechnung und Konstruktion der Pendel.

Von C. H. Schneider in Furtwangen.
(Fortsetzung aus Nr. 31.)

C.) Berechnung des Einstabpendels mit Scheibe.

Begriff und Voraussetzungen. Wir setzen uns nun das zu einer Uhr verwendbare Pendel zusammen aus einem Stabe von der Länge L und aus einer auf diesen Stab geschobenen Scheibe vom Radius R, deren Mitte von der Drehachse um c entfernt ist. Um auf dieses Pendel die im vorstehenden entwickelten Gleichungen anwenden zu können, müssen



wir noch voraussetzen, dass der Pendelstab vom Aufhängepunkt bis an sein unteres Ende vollkommen homogen und dass eine homogene Pendelscheibe auf den Stab aufgeschoben sei.

Diese Voraussetzung entspricht zwar den speziellen Ausführungsformen eines Pendels nicht, sie muss aber gemacht werden, um für das Rechnen brauchbare Formeln zu erhalten, welche jedoch trotz dieser Voraussetzungen bei ihren Anwendungen zu praktischen Zwecken genügend genaue Resultate liefern.

Die wirksame Pendellänge des Einstabpendels.

Es sei

L die Länge des Pendelstabes,

G_1 das Gewicht des Stabes,

$M_1 = \frac{G_1}{g}$ die Masse des Stabes;

R der Radius der Pendelscheibe,

G_2 das Gewicht der Pendelscheibe,

$M_2 = \frac{G_2}{g}$ die Masse der Pendelscheibe, und

c die Entfernung des Scheibenmittelpunktes vom Aufhängepunkt, welche wir die Centrale des Pendels nennen wollen.

Wir lassen es hier unentschieden, ob die Pendelscheibe die Gestalt eines Cylinders oder die einer Linse hat.

Das Trägheitsmoment des Pendels ist nach Gl. 20 und 21

$$W = \frac{M_1}{3}L^2 + M_2\left(\frac{R^2}{2} + c^2\right)$$

und die Entfernung des Schwerpunktes des Pendels von der Drehachse ist

$$s = \frac{M_1\frac{L}{2} + M_2 c}{M_1 + M_2}$$

Setzt man diese Werthe in Gl. 24 ein, so erhält man die wirksame Pendellänge des Einstabpendels zu

25. $$l = \frac{\frac{M_1}{3}L^2 + M_2\left(\frac{R^2}{2} + c^2\right)}{M_1\frac{L}{2} + M_2 c}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit der Beschleunigung des freien Falles vervielfacht und beachtet, dass nach Gl. 16 das Produkt aus Masse und Beschleunigung des freien Falles gleich dem Gewichte der Masse ist,

$$l = \frac{\frac{G_1}{3}L^2 + G_2\left(\frac{R^2}{2} + c^2\right)}{G_1\frac{L}{2} + G_2 c}$$

Mittels dieser Gleichung kann man schon eine praktische Aufgabe lösen, nämlich die, von einem gegebenen Pendel die wirksame Pendellänge und damit seine Ausschlagszeit zu berechnen; es ist dazu nur der Gebrauch einer Wage und der eines Maasstabes erforderlich: den Pendelstab und die Pendelscheibe kann man wiegen, die Stablänge, den Linsenradius und die Centrale kann man messen. Hat man nach Gl. 25 die wirksame Pendellänge berechnet, so erhält man mit Hilfe der Gl. 14 die Ausschlagszeit zu

26. $$T = \sqrt{\frac{l}{994}}$$

und nach Gl. 15 die Anzahl der Ausschläge des Pendels pro Stunde zu

27. $$n = 3600\sqrt{\frac{994}{l}}$$

Uebrigens ist es selbstverständlich, dass man die Ausschlagszeit T oder die Anzahl der Ausschläge n pro Stunde auch durch direkte Beobachtungen ermitteln kann, indem man das freischwingende Pendel beobachtet, oder es mit irgend einer Uhr in Verbindung bringt; allein das erstere verlangt viel Uebung und Einrichtungen, die bei einem Uhrmacher nicht unmittelbar vorausgesetzt werden können und das andere ist zeitraubend, so dass man unter Umständen durch die Rechnung schneller zum Ziele kommen kann.

Beispiel: Für ein Pendel sei:

$L = 220$ mm gemessen vom Drehpunkt bis zur Spitze der Regulirungsschraube;

$c = 185$ bis 175 mm gemessen vom Drehpunkt bis zur Mitte der Pendelscheibe bei ihrer tiefsten und höchsten Stellung;

$R = 28$ mm der Radius der Pendelscheibe;

$G_1 = 11$ gr das Gewicht des ganzen Pendelstabes (die Aufhängefeder oder den Aufhängfaden kann man dabei vernachlässigen),

$G_2 = 173$ gr das Gewicht der Pendelscheibe nebst Regulirungsmutter.

Diese Werthe in Gl. 25 eingesetzt, liefert für $c = 185$ mm eine wirksame Pendellänge von

$$l = \frac{\frac{11}{3}220^2 + 173\left(\frac{28^2}{2} + 185^2\right)}{\frac{11}{2}220 + 173 \cdot 185} = 185 \text{ mm}$$

nach Gl. 26 eine Ausschlagszeit zu

$$T = \sqrt{\frac{185}{994}} = 0{,}4318 \text{ Sek.}$$

und Gl. 27 die Anzahl der Pendelschläge pro Stunde

$$n = 3600\sqrt{\frac{994}{185}} = 8336;$$

für die Centrale $c = 175$ mm ergeben sich die entsprechenden Werthe zu

$$l = 176 \text{ mm}$$
$$T = 0{,}4205 \text{ Sek.}$$
$$n = 8560$$

Das gegebene Pendel ist also regulirbar innerhalb der Grenzen von 8336 bis 8560 Pendelschläge pro Stunde.

Umformung der Gl. 25 zur Berechnung eines neu zu konstruirenden Pendels.

Für die Praxis wichtiger als das Bisherige ist die Lösung der Aufgabe, für eine bestimmte Ausschlagszeit T bez. für eine bestimmte Anzahl n von Ausschlägen pro Stunde die Dimensionen des Einstabpendels festzustellen. Es ist dann, da T oder n gegeben sind, nach Gl. 14 oder 15, auch die wirksame Pendellänge l als gegeben anzusehen und es kommt nun darauf an, das zugehörige Einstabpendel dazu zu bestimmen. Dass die Lösung dieser Aufgabe auf sehr verschiedene Weise möglich ist, liegt auf der Hand, welche Lösung die praktisch brauchbarste ist, muss in jedem einzelnen Falle unter Würdigung aller Umstände entschieden werden.

Wir machen nun für das Folgende die weitere Voraussetzung, dass der Pendelstab nur bis zum unteren Rande der Linse geht, wir denken uns also die Regulirungsmutter nebst Schraube, soweit sie aus der Linse hervorragt, zu derselben hinzugerechnet; diese Voraussetzung ist ohne Beeinträchtigung der praktischen Brauchbarkeit der Resultate statthaft.

Wir setzen

28. $$L = c + R$$

die Stablänge gleich der Centralen plus den Pendelscheibenradius.

Ferner denken wir uns das Gewicht G_2 der Pendelscheibe als Vielfaches des Gewichtes G_1 des Pendelstabes und setzen