

Die Verzahnungen im allgemeinen und in Beziehung zur Uhrmacherei.

Von C. Dietzschold, Direktor der kais. kön. Uhrmacherschule in Karlstein (Nieder-Oesterreich).

(Fortsetzung aus Nr. 22.)

Die Reibung in den Verzahnungen.

Schon Lahire hat sich mit der Aufgabe befasst, die Zahnkurven so zu konstruiren, dass keine Reibung zwischen den Zähnen erfolgt. Euler behandelte die Aufgabe analytisch.

Jede Reibung zu vermeiden, ist aber unmöglich. Um klar darüber zu werden, müssen wir zunächst die verschiedenen Arten von Reibung besprechen.

Bewegt ein Körper sich derart an einem anderen hin, dass Punkte des ersteren mit stets anderen des zweiten in Berührung kommen, so sagen wir, er gleitet über letzteren weg. Die hierbei entstehende Reibung nennen wir die gleitende Reibung.

Erfolgt die Bewegung so, dass immer dieselben Punkte des einen Körpers in gewisser Regelmässigkeit mit denselben Punkten des zweiten Körpers in Berührung kommen, wie etwa die Oberflächenpunkte eines Zapfens mit den Punkten des Lagers oder Punkte eines Vollprismas mit denen des Hohlprismas oder Punkte einer Vollschraubenfläche mit denen der hohlen Mutterschraubenfläche, so erhalten wir die sogenannte Zapfenreibung.*)

Kommen endlich die Punkte des einen Körpers nur je mit einem Punkte des anderen Körpers in Berührung, wie etwa die Punkte des Wagenradumfangs mit der Strassenoberfläche, so entsteht die rollende Reibung. Die Grösse des abgerollten Umfangstückes ist gleich der des Stückes, auf dem es abgerollt wurde.

Wenn wir annehmen, dass ein Punkt des einen Körpers den Weg n auf dem anderen Körper zurücklegt, so erfolgt auf dieser Strecke gleitende Reibung. Zwei Punkte ab haben die Entfernung $ab = e$ in Richtung der Bewegung, sie kommen auf dem Körper in Berührung mit zwei Punkten $a'b'$ mit Entfernung $a'b' = e'$. Ist die Bewegung der Punkte a und b des ersten Körpers $= s$, so besteht

gleitende Reibung, wenn $e' - e = s$

Zapfen- " " $e' - e = \frac{s}{k}$

(wobei Einschleifen möglich) k stellt eine ganze Zahl dar.

rollende Reibung, wenn $e' - e = 0$.

Es sind nun Uebergänge von der rollenden zur gleitenden Reibung denkbar, wenn $s > e' - e > 0$, was z. B. einem nicht ganz gebremsten Wagenrad entspricht, da dieses, wenn nicht gebremst, rollende, bei vollständiger Bremsung gleitende, und bei theilweiser Bremsung theils gleitende und theils rollende Reibung hat, deren Maass vom Grade der Bremsung abhängig ist.

Auf Zahnkurven kennen wir die Entfernung der Punkte $abcd\dots$ und $a'b'c'd'\dots$, welche nach und nach in Berührung kommen. Rollende Reibung wird erfolgen, wenn $ab = a'b'$, $bc = b'c'$ u. s. w. Ueberhaupt wird die Reibung mehr zur rollenden übergehen, je mehr die Längen der zusammenwirkenden Zahnkurven gleich werden und zwar gleich nicht etwa nur in der ganzen Länge, sondern gleich für die kleinsten nach einander in Berührung kommenden Kurvenstücke.

Der Mathematiker Euler untersuchte das Problem der Verzahnungen und fand, dass allgemein die Reibung über den ganzen Verlauf der Zahnkurven zur rollenden wird, wenn die Beziehungen

$$y = \frac{n}{n+1} E \cdot \sin \varphi \quad x = \frac{n}{n+1} E \cdot \cos \varphi$$

$$y' = \frac{1}{n+1} E \cdot \sin n\varphi \quad x' = \frac{1}{n+1} E \cdot \cos n\varphi$$

worin x und y die Coordinaten der einen, x' und y' die der anderen Kurve sind, je auf deren Drehungsmittelpunkt als Coordinaten-Anfangspunkt bezogen, und n das Uebersetzungsverhält-

*) Die Zapfenreibung findet also nicht nur bei Zapfen und Lager, sondern auch bei der Bewegung in den eben genannten Körperpaaren statt. Letztere bezeichnet die Getriebelehre als „Umschlusspaare“. —

niss der sich drehenden Kurven, die Entfernung von deren Drehungspunkten ist, während φ der Drehungswinkel der einen, $n\varphi$ der anderen Kurve ist.

Quadriert und addirt man die obigen Gleichungen und bildet

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{n}{n+1} \cdot E\right)^2 \text{ und}$$

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{n+1} \cdot E\right)^2$$

so sind dies die Mittelpunkgleichungen von Kreisen, deren Halbmesser $= \frac{n}{n+1} \cdot E$, bezüglich $\frac{1}{n+1} \cdot E$ sind, d. h. der Theilkreise. Und in der That rollen die Theilkreise während der Drehung ohne Gleitung aufeinander. — Ein praktisch verwendbares Resultat liefern diese Gleichungen indess nicht.

Die der Form und Lage nach den Theilkreislinien sich nähernden Zahnkurven werden zwar die geringste Reibung haben, andererseits aber sind dieselben der Kraftübertragung wegen sehr unvortheilhaft, da die gemeinsame Normale im Momente der Berührung statt einen nahezu 90° betragenden, einen sehr spitzen Winkel mit der Centrallinie bildet.

Von praktischem Werthe ist es für uns also keineswegs die Zahnkurve so anzuordnen, dass die gleitende Reibung vollständig ausgeschlossen ist, da die Kraftwirkung sonst ungünstig wird. — Vielmehr ist es wesentlich die Verhältnisse der Gleitung zu untersuchen, für den Fall, wo günstigere Kraftwirkungen vorhanden sind.

Wir finden nun z. B. bei der Cykloidenverzahnung, wenn, wie es in der Uhrmacherei Brauch, der Zahnfuss radial ist, dass in der Nähe des Centralpunktes die beiden Kurven nur sehr wenig gleiten und die relative Grösse der Gleitung vom Centralpunkte ab wächst.

Das Maass des Gleitens ist also an verschiedenen Stellen der zusammenarbeitenden Kurven ein verschiedenes. Da nun in der Nähe des Centralpunktes nur eine sehr geringe Gleitung erfolgt, so leiten wir daraus ab, dass man schon vor der Mittellinie wirken lassen kann und soll, was für die wenigzähligen Triebe wichtig ist. Die Praxis bestätigt dies. Die englische Verzahnungsform entspricht diesen Absichten und legt darauf den Hauptwerth. — Ja die Thatsache, dass Triebe mit spitzer Wälzung allein bei Uhren mit langer Gangdauer (wie sie z. B. in Wien erzeugt werden) Dienst thun, während Uhren mit Trieben, die runde Wälzung haben, nur mit weit schwereren Gewichten gehen, sagt uns, dass man auf möglichsten Ausschluss der Wirkung vor der Mittellinie im allgemeinen viel zu viel Gewicht gelegt hat, da die Wirkung hinter der Mittellinie ebenfalls mit Reibung verbunden ist, welche wächst, je weiter sie hinter der Mittellinie erfolgt.

Der Gedanke, die Führung hinter der Mittellinie mit allen möglichen Hilfsmitteln zu verlängern, ist also falsch. Durch genaue Theilungen und gleichmässige gute Zahnformen ist vielmehr die Führung in der Nähe der Mittellinie zu ermöglichen. Die runde Wälzung ist thunlichst zu meiden. Die mit der Entfernung von der Mittellinie wachsende Gleitung zwischen den Zähnen des Rades und Triebes kann eine so bedeutende Reibung nach sich ziehen, dass ein Stillstehen des Uhrwerkes erfolgt, sofern aus irgend welchen Gründen die Triebkraft etwas gering bemessen ist.

Man ist dann genöthigt mehrzählige Triebe zu verwenden, z. B. 10er statt 8er und muss natürlich Sorge getroffen werden, die Gangdauer der Uhr nicht durch Aenderung im Räderwerke zu verkürzen. Ein wesentlicher Nachtheil wenigzähliger Triebe liegt also auch in der Zunahme der Reibung bei Ausdehnung des Führungswinkels von der Mittellinie weg.

Die Zahnkurven von Schraubenrad und Schraube entsprechen denen von Zahnrad und Zahnstange. Ausser der Reibung, welche nun zwischen den Zahnkurven besteht, tritt hier noch die hinzu, welche die Schraube als schiefe Ebene hat.

Beide Anordnungen: a) treibende Schraube und b) getriebene Schraube kommen vor. Letztere verwendet man erstens, um eine grössere Uebersetzung zu erzielen, als es ein Rad und ein Trieb gestatten, zweitens weil der Eingriff vollständig geräuschlos