Wird nun der Winkel CDK, welchen die vom Ankermittelpunkt nach der Mitte der Hebefläche gezogene Linie mit der Hebefläche macht, mit u bezeichnet, so lassen sich $\frac{d}{c}$, sowie $\frac{b}{a}$ durch u ausdrücken und es ergiebt sich nach einigen Umformungen und indem man für f den Reibungswinkel v einführt, der Werth:

$$Q = \frac{m}{n} \cdot \frac{\cot (u + v)}{\cot u} P^{*}).$$

Dieser Ausdruck zeigt die Abhängigkeit der übertragenen Kraft Q von dem Winkel u der Hebefläche, dem Reibungswiderstand und dem Bewegungsverhältniss $\frac{m}{n}$ zwischen Rad und Anker.

Der Winkel u kann bei demselben Hebungswinkel je nach der Länge des Ankerarmes sehr verschiedene Werthe haben, wie Fig. 2 zeigt. Der Hebungswinkel ist derselbe für die drei Arme, jedoch ist beim kürzesten Arme: $u = 26$ Grad, beim mittleren $u = 48$ Grad und beim längsten $u = 61$ Grad.

Um nun den Einfluss des Winkels u auf den Werth von Q anschaulich zu machen, soll der Werth von Q nach der gefundenen Formel für verschiedene Werthe von u ermittelt werden, wobei vorläufig der Einfachheit der Rechnung wegen sowohl $P = 1$ als auch $\frac{m}{n} = 1$ gesetzt wird, so dass $Q = \frac{\cot (u + v)}{\cot u}$ wird. Der Reibungskoëffizient f soll dabei gleich 0,14 angenommen werden. Aus der bekannten Beziehung zwischen dem Reibungskoëffizienten f und dem Reibungswinkel v hat man tang $v = 0{,}14$, woraus sich für v der Werth von 8 Grad nahezu ergiebt. Nachstehende Zusammenstellung giebt nun die Werthe von Q für verschiedene Werthe von u.

$u = 10$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 18^0}{\cot 10^0} = 0{,}5427.$

$u = 20$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 28^0}{\cot 20^0} = 0{,}6845.$

$u = 30$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 38^0}{\cot 30^0} = 0{,}7390.$

$u = 40$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 48^0}{\cot 40^0} = 0{,}7555.$

$u = 50$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 58^0}{\cot 50^0} = 0{,}7447.$

$u = 60$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 68^0}{\cot 60^0} = 0{,}6998.$

$u = 70$ Grad $\quad Q = \frac{\cot 78^0}{\cot 70^0} = 0.5840.$

Die vorstehende Zusammenstellung zeigt nicht allein die Abhängigkeit der übertragenen Kraft Q von u, sondern auch welchen grossen Einfluss die Reibung hat. Wäre keine Reibung vorhanden, so müsste Q für jeden Werth von u gleich 1 sein, weil P und $\frac{m}{n}$ gleich 1 gesetzt wurden. Man sieht ferner, dass der Werth von Q bis zum Winkel von 40 Grad zu- und dann wieder abnimmt. Es muss somit zwischen 40 Grad und 50 Grad ein Winkel liegen, für welchen Q den grössten Werth erhält. Ermittelt man nach den Methoden der Differentialrechnung diesen Winkel, so erhält man $u = \frac{90 - v}{2}$ oder da $v = 8$ Grad, $u = 41$ Grad. Für diesen Winkel ergiebt sich für Q als grösster Werth: $Q = \frac{\cot 49^0}{\cot 41^0} = 0{,}7557$. Also im günstigsten Falle ist $Q = 0{,}7557$, während ohne Reibungswiderstand $Q = 1$ sein müsste. Im günstigsten Falle findet somit beim Grahamgang noch ein Kraftverlust durch den Reibungswiderstand von fast 25 Prozent statt.

Nachdem nun derjenige Werth von u ermittelt ist, für welchen Q den grössten Werth erlangt, soll nunmehr auch der Durchgangswinkel der Hemmung bestimmt werden, für welchen $u = 41$ Grad wird. Unter dem Durchgangswinkel versteht man bekanntlich denjenigen Winkel, welcher die vom Anker umfassten Zähne einschliesst. In der ursprünglichen Fig. 1 ist $\sphericalangle CAD = w$, gleich dem halben Durchgangswinkel. Aus der Figur folgt: $\frac{r_1}{r} = \frac{c}{a}$. Nun ist $c = R_1 \cos u$ und $a = R \sin u$, daher $\frac{r_1}{r} = \frac{R_1 \cos u}{R \sin u} = \frac{R_1}{R} \cdot \cot u$. Nach der Figur ist aber $\frac{R_1}{R} = \operatorname{tang} w$. Ferner ist: $\frac{r_1}{r} = \frac{m}{n}$. Daher: $\frac{m}{n} = \operatorname{tang} w \cdot \cot u$, woraus folgt: $\operatorname{tang} w = \frac{m}{n} \operatorname{tang} u$ oder $\operatorname{tang} w = \frac{m}{n} \operatorname{tang} 41^0$.

Ermitteln wir nun mit Hilfe dieser letzten Gleichung den Durchgangswinkel für eine Sekundenpendeluhr. Das Gangrad derselben hat 30 Zähne, folglich entspricht einer Theilung des Gangrades der Winkel von $\frac{360^0}{30} = 12^0$. Das Rad geht bei jeder Pendelschwingung um die Hälfte der Theilung, also um 6 Grad vorwärts; jedoch gehen hiervon $1^1/_2$ für den Fall verloren, so dass für die Hebung $4^1/_2$ Grad bleiben. Der Anker hat einen Hebungswinkel von 1 Grad. Somit ist $m = 4^1/_2$ und $n = 1$, daher $\frac{m}{n} = 4{,}5$. Man hat also: $\operatorname{tang} w = 4{,}5 \operatorname{tang} 41^0$, woraus sich für w der Winkel von 75 Grad nahezu ergiebt.

Um die vollkommenste Kraftwirkung zu erhalten, müsste somit der Durchgangswinkel $2 \cdot 75$ Grad $= 150$ Grad betragen, oder da der Winkel der Theilung 12 Grad beträgt, müsste der Anker über $\frac{150^0}{12^0} = 12^1/_2$ Zähne greifen. Es zeigt sich somit eine völlige Uebereinstimmung mit den eingangs erwähnten Versuchsergebnissen an Sekundenpendeluhren.

Betrachten wir nun auch den Versuch von Saunier. Es darf wohl angenommen werden, dass die im Atlas seines Lehrbuches auf Tafel VI befindliche Figur 1 ein ziemlich getreues Bild des Versuchsapparates darstellt. Aus dieser Zeichnung ist zu entnehmen, dass der Anker einen Hebungswinkel von 7 Grad und der Hebel, der die Stelle des Gangrades vertritt, einen Bewegungswinkel von 9 Grad hat. Somit ist $m = 9$ und $n = 7$.

Der halbe Durchgangswinkel, welchem die grösste Kraftwirkung entspricht, ist daher bestimmt durch die Gleichung: $\operatorname{tang} w = \frac{9}{7} \operatorname{tang} 41^0$ woraus folgt: $w = 48^0$. Werden nun die halben Durchgangswinkel für die drei Ankerarme aus Tafel VI ermittelt, so findet sich, dass der für den kürzesten der drei Arme 45 Grad beträgt, also nahezu dem oben durch Rechnung bestimmten Winkel gleich ist. Daher hat sich auch bei den Versuchen von Saunier für den kürzesten der drei Arme die günstigste Antriebwirkung ergeben.

Die hier entwickelte Theorie und die Versuchsergebnisse bestätigen sich also gegenseitig vollkommen. Wir wissen aber

---

*) Für den mathematikkundigen Leser folgt hier in Kürze die Entwicklung der Formel. Zunächst ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABG und CBH: $\frac{c}{a} = \frac{r_1}{r}$. Nun ist aber, wie bereits ermittelt: $\frac{r_1}{r} = \frac{m}{n}$, also $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$. Ferner folgt aus der Figur: $\frac{d}{c} = \operatorname{tang} u$ und $\frac{b}{a} = \cot u$. Daher: $Q = \frac{c}{a} \cdot \frac{1 - \frac{d}{c} f}{1 + \frac{b}{a} f} P = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - \operatorname{tang} u \cdot f}{1 + \cot u \cdot f} P$. Zwischen dem Reibungskoëffizienten f und dem Reibungswinkel v besteht nun die bekannte Beziehung: $f = \operatorname{tang} v$. Dies eingesetzt, giebt: $Q = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - \operatorname{tang} u \cdot \operatorname{tang} v}{1 + \cot u \operatorname{tang} v} \cdot P$ $= \frac{m}{n} \cdot \frac{\sin u \cdot \cos v}{\cos u \cdot \cos v} \cdot \frac{\cos u \cdot \cos v - \sin u \sin v}{\sin u \cos v + \cos u \sin v} \cdot P = \frac{m}{n} \cdot \operatorname{tang} u \cdot \frac{\cos (u + v)}{\sin (u + v)} \cdot P$ oder $Q = \frac{m}{n} \cdot \frac{\cot (u + v)}{\cot u}$.