Der Durchmesser teilt den Kreis in zwei gleiche Teile (Halbkreise). Der Halbkreis, sowie der Winkel acd (Fig. 8), welcher ein gestreckter Winkel heisst, enthält demnach 180 Grad. Ein Winkel heisst konkav, wenn er kleiner, konvex, wenn er grösser als ein gestreckter Winkel ist.

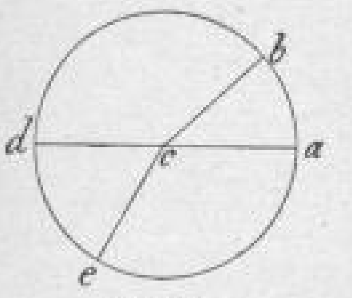

Fig. 8.

Die beiden Winkel hki und lki in Fig. 9, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und deren andere beiden Schenkel eine Gerade bilden, heissen Nebenwinkel.

Sind zwei Nebenwinkel dba und dbc (Fig. 10) einander gleich, so heisst jeder derselben ein rechter Winkel (mit R bezeichnet). Man nennt db lotrecht (senkrecht, vertikal, normal, perpendikular) auf ab oder bc und umgekehrt. Unter den Handwerkern ist es besodners der Maurer als Bauhandwerker, der

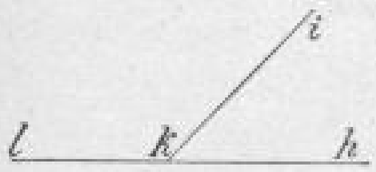

Fig. 9.

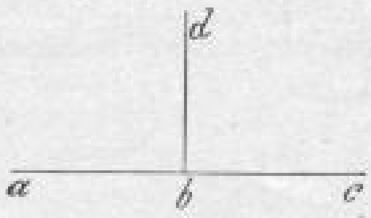

Fig. 10.

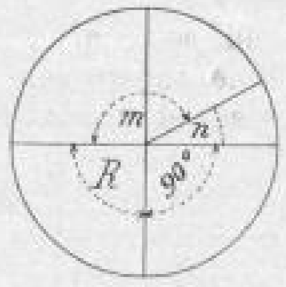

Fig. 11.

seine Steine winkelrecht aufsetzen muss, er erkennt deshalb sehr oft nur den rechten Winkel als einen Winkel an.

Der rechte Winkel R enthält, wie aus Fig. 11 leicht ersichtlich ist, den vierten Teil des Kreises oder 90^0. Ist ein Winkel grösser als ein rechter, so heisst er stumpf, z. B. $\sphericalangle m$ in Fig. 11 ist ein stumpfer Winkel; ist ein Winkel kleiner als ein rechter, z. B. $\sphericalangle n$, so heisst er spitz.

Zwei Nebenwinkel sind zusammen genommen immer $= 2\,R$; in Fig. 11 z. B. $\sphericalangle m + \sphericalangle n = 2\,R$. Alle Winkel um einen Punkt einer Ebene, auf der einen Seite einer Geraden, sind zusammen $= 2\,R$.

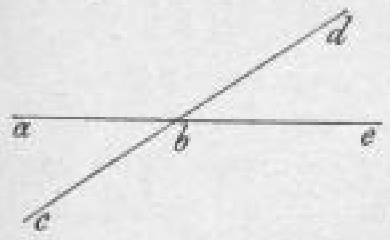

Fig. 12.

Die Summe aller Winkel um einen Punkt einer Ebene beträgt zusammen $4\,R$.

Schneiden sich zwei Gerade ae und cd (Fig. 12). so entstehen vier Winkel, deren Summe $4\,R$ beträgt. Je zwei dieser Winkel, welche einander gegenüberstehen, wie $\sphericalangle abc$ und $\sphericalangle dbe$, heissen Scheitelwinkel.

Scheitelwinkel sind einander gleich, denn es ist:

$$\sphericalangle abc + \sphericalangle abd = 2\,R,$$
$$\sphericalangle abd + \sphericalangle dbe = 2\,R, \text{ also}$$
$$\sphericalangle abc + \sphericalangle abd = \sphericalangle abd + \sphericalangle dbe, \text{ hiervon}$$
$$\sphericalangle abd = \sphericalangle abd \text{ abgezogen, ergibt}$$
$$\sphericalangle abc = \sphericalangle dbe.$$

§ 9. Drei Gerade.

Vergleicht man drei Gerade in einer Ebene hinsichtlich ihrer Richtung, so sind drei Fälle möglich, nämlich entweder sind alle drei parallel oder nur zwei sind parallel und werden von der dritten geschnitten, oder alle drei haben verschiedene Richtung.

Im zweiten Falle, dass zwei parallele Gerade ab und cd von einer dritten ef geschnitten werden, entstehen acht Winkel, von denen je zwei beziehungsweise gewisse Benennungen erhalten. Es heissen:

n und r, sowie p und t u. s. w. Gegenwinkel oder korrespondierende Winkel,
p und q, sowie o und r innere Wechselwinkel,
n und s, sowie m und t äussere Wechselwinkel,
p und r, sowie o und q innere Winkel.

Zwei parallele Gerade ab und cd haben gleiche Richtung (Fig. 13), es muss daher der Unterschied ihrer Richtungen und der Richtung einer dritten Geraden ef, von welcher sie geschnitten werden, gleich sein, nämlich $n = r$.

1. Werden sonach zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so sind die Gegenwinkel einander gleich.

Da ferner $n = o$, als Scheitelwinkel, so folgt, dass $r = o$, sowie $n = s$; oder in Worten:

2. Bei zwei Parallelen, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, sind die Wechselwinkel einander gleich.

Da $t + r = 2\,R$, als Nebenwinkel, und
$t = p$, als Gegenwinkel, so ist auch
$p + r = 2\,R$; das heisst:

3. Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so ist die Summe je zweier inneren oder äusseren Winkel $= 2\,R$.

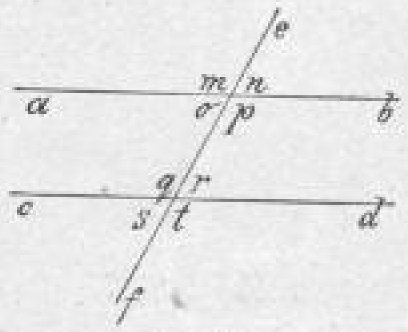

Fig. 13.

Diese drei Sätze gelten auch umgekehrt; denn angenommen, es sei $n = r$, so haben ab und cd mit ef gleiche Richtungsunterschiede, also ab und cd notwendig gleiche Richtung. Das gibt den Satz:

4. Sind bei zweien von einer dritten geschnittenen Geraden die Gegenwinkel einander gleich, so sind die Geraden parallel.

Wenn $o = r$ und ferner $o = n$, so ist auch
$r = n$, daher ab parallel ($\parallel$) cd; nach vorstehendem Satz 4.

5. Wenn demnach bei zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, die Wechselwinkel gleich sind, so sind die beiden Geraden parallel.

Es sei $p + r = 2\,R$, da aber auch

$$p + o = 2\,R, \text{ so ist}$$
$$p + r = p + o, \text{ auf beiden Seiten } p \text{ abgezogen}$$
$$r = o,$$

folglich ab parallel ($\parallel$) cd; nach Satz 5, das heisst:

6. Ist die Summe der inneren oder äusseren Winkel gleich $2\,R$, so sind die beiden Geraden parallel.

Aus den vorhergehenden Sätzen lassen sich auf einfache Weise noch folgende ableiten:

7. Durch einen Punkt c (Fig. 14) ist in einer Ebene zu einer Geraden ab nur eine Parallele de möglich: denn wären auch kl parallel zu ab, so müsste sein:

$$\sphericalangle fcl = \sphericalangle chb; \text{ aber da auch}$$
$$\sphericalangle fce = \sphericalangle chb, \text{ so müsste also}$$
$$\sphericalangle fce = \sphericalangle fcl \text{ sein, was unmöglich ist. In Worten:}$$

8. Schneidet eine Gerade kl (Fig. 14) die eine von zwei Parallelen de, so schneidet sie bei hinreichender Verlängerung

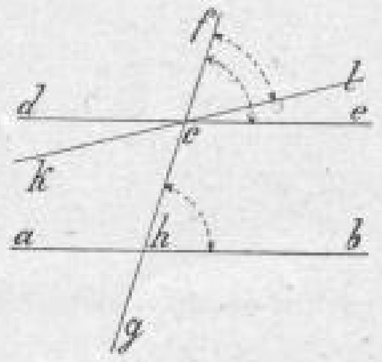

Fig. 14.

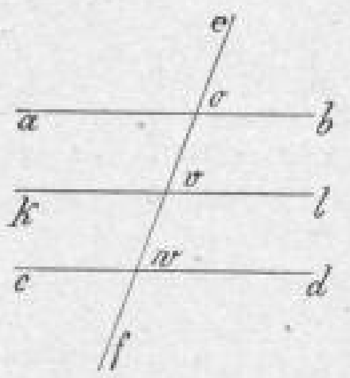

Fig. 15.

auch die andere ab; denn ausserdem hätte man durch einen Punkt c zu einer Geraden ab zwei Parallelen.

Es sei ab parallel kl (Fig. 15) und ebenso cd parallel kl. Zieht man ef, so ist

$$o = v \text{ und}$$
$$w = v, \text{ daher auch}$$
$$o = w, \text{ also}$$

ist ab parallel cd (nach Nr. 4); in Worten:

9. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind die beiden Geraden unter sich parallel.

Angenommen in Fig. 16 ist $o = R$ und $s = R$, so ist, wenn man beide Winkel addiert, $o + s = 2\,R$, also ab parallel cd (nach Satz 6); in Worten: