Zieht man die Diagonalen ac, AC, ad und AD, so ist

$\triangle abc \sim \triangle ABC$, daher
$bc : BC = ac : AC$, aber auch
$bc : BC = cd : CD$, also

(I) $ac : AC = cd : CD$.

Ferner ist $\sphericalangle m = \sphericalangle M$, und durch Subtraktion von $\sphericalangle c = \sphericalangle C$ erhält man $\sphericalangle n = \sphericalangle N$, also

$\triangle acd \sim \triangle ACD$, mithin
$cd : CD = ad : AD$, und da
$cd : CD = de : DE$, so folgt

(II) $ad : AD = de : DE$.

Da ferner $\sphericalangle o = \sphericalangle O$, mithin durch Subtraktion von $\sphericalangle d = \sphericalangle D$, erhält man $\sphericalangle p = \sphericalangle P$, also

$\triangle ade \sim \triangle ADE$; in Worten:

1. Aehnliche Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke zerlegt.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt, nämlich:

Wenn zwei Vielecke aus ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken zusammengesetzt sind, so sind die beiden Vielecke einander ähnlich.

Aus den beiden Proportionen I und II ergibt sich der Satz:

2. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die ähnlich liegenden Diagonalen, wie die ähnlich liegenden Seiten.

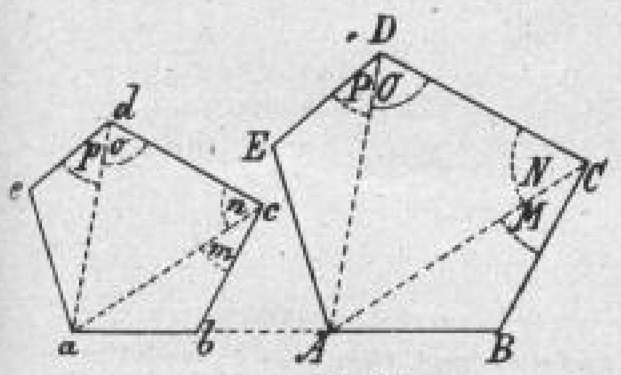

Fig. 91.

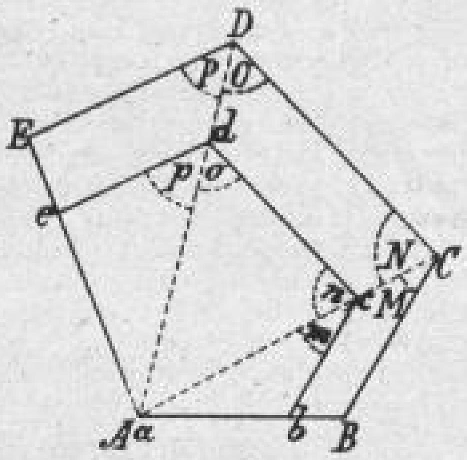

Fig. 92.

Die gleichen Seitenverhältnisse der beiden ähnlichen Vielecke lassen sich offenbar auf folgende Weise ordnen (Fig. 92):

$ab : AB = ab : AB$
$bc : BC = ab : AB$
$cd : CD = ab : AB$
$de : DE = ab : AB$
$ea : EA = ab : AB$, woraus folgt

$$(ab + bc + cd + de + ea) : (AB + BC + CD + DE + EA) = ab : AB = bc : BC = ac : AC \text{ usw.}$$

Man kann daher den Satz aufstellen:

3. Die Umfänge zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich wie ein Paar ähnlich liegender Seiten oder Diagonalen.

§ 27. Linien und Punkte im Dreieck.
(Die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks.)

Im Dreieck abc (Fig. 93) sei $ad = dc$, $be = ec$ und $\sphericalangle ado = \sphericalangle cdo = R$, sowie $\sphericalangle beo = \sphericalangle ceo = R$, so ist

$\triangle ado \cong \triangle cdo$, und
$\triangle beo \cong \triangle ceo$, mithin
$ao = co$,
$bo = co$, daher

$ao = bo = co$.

Das Dreieck aob ist demnach gleichschenklig; errichtet man daher aus dem Halbierungspunkte f der Seite ab auf dieselbe eine Senkrechte fo, so muss dieselbe durch o gehen.

1. **Die Senkrechten zu den Dreiecksseiten, aus deren Mitte errichtet**, schneiden sich demnach in einem Punkte, und dieser ist von den Ecken gleich weit entfernt. (**Punkt o ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.**)

Zieht man im Dreieck abc (Fig. 94) eine Senkrechte von der Spitze c auf die Grundlinie ab, desgleichen bei den Seiten ac und bc, so entstehen die Senkrechten fc, db und ae, die sich in einem Punkte o schneiden. Durch einige Hilfslinien lässt sich

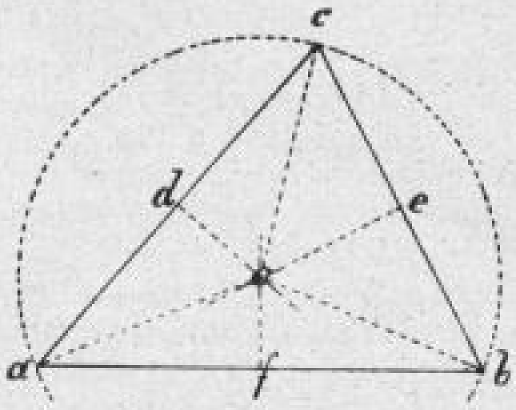

Fig. 93.

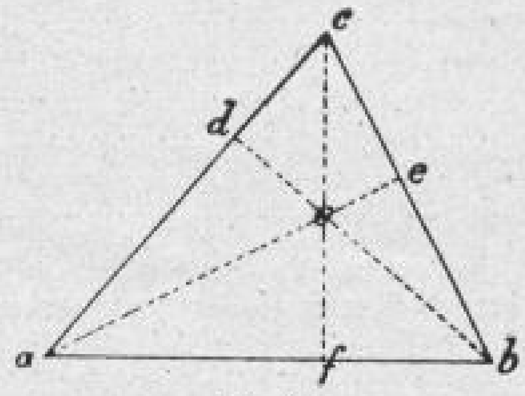

Fig. 94.

der Beweis leicht führen, dass sich die Senkrechten in einem Punkte schneiden müssen; es ergibt sich somit folgender Satz:

2. **Die Senkrechten, aus den Ecken eines Dreiecks** zu den gegenüber stehenden Seiten gefällt, schneiden sich in einem Punkte.

Halbiert man in einem Dreiecke abc (Fig. 95) zwei Winkel m und n mittels der Geraden ao und bo und fällt aus dem Durchschnittspunkte o auf die Seiten die Senkrechten od, oe und of, so hat man

$ao = ao$, $\sphericalangle eao = \sphericalangle dao$, und
$\sphericalangle aeo = \sphericalangle ado = R$, also
$\triangle aeo \cong \triangle ado$, ebenso
$\triangle bfo \cong \triangle bdo$, daher
$oe = od$, und
$of = od$, folglich
$oe = of = od$.

Zieht man nun co, so erhält man

$\triangle ceo \cong \triangle cfo$, mithin
$\sphericalangle eco = \sphericalangle fco = \frac{1}{2} \sphericalangle acb$.

Man erhält hieraus den Satz:

3. **Die Geraden, die die Winkel eines Dreiecks halbieren**, schneiden sich in einem Punkte, dieser ist von den Seiten gleich weit entfernt. (**Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.**)

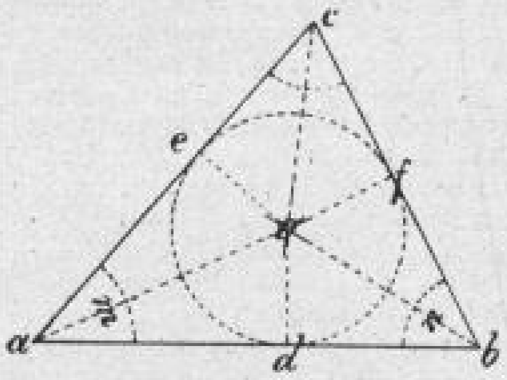

Fig. 95.

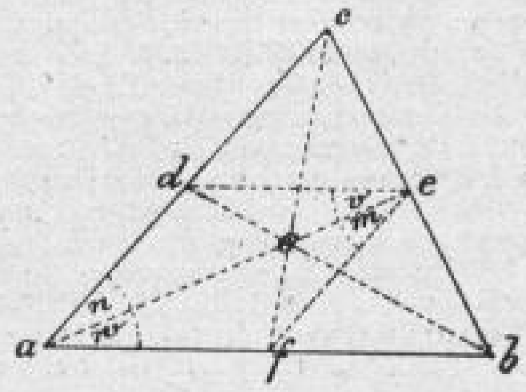

Fig. 96.

Halbiert man ab (Fig. 96) und bc in f, e und zieht ae, cf, ef, so hat man:

$bf : ba = be : bc$, daher
ef parallel ac; $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, und da $\sphericalangle foe = \sphericalangle aoc$,
$\triangle foe \sim \triangle aoc$, mithin
$bf : ba = fe : ac$.

Nun ist $bf = \frac{1}{2} ba$, also $fe = \frac{1}{2} ac$, ferner

$eo : ef = ao : ac$, oder
$eo : ao = ef : ac$, da aber
$ef = \frac{1}{2} ac$, so ist $eo = \frac{1}{2} ao$ oder $2 . eo = ao$.
$2 . eo + eo = ae$ oder $3\, eo = ae$; dies gibt
$eo = \frac{1}{3} ae$, ebenso $of = \frac{1}{2} oc = \frac{1}{3} fc$.

Macht man nun $ad = dc$, zieht do, ob sowie de, so hat man

$cd : ca = ce : cb$, also de parallel ab
$cd : ca = de : ab$, und da
$cd = \frac{1}{2} ca$, so ist $de = \frac{1}{2} ab$, und $oe = \frac{1}{2} ao$, also
$de : oe = \frac{1}{2} ab : \frac{1}{2} ao$,