besetzt, auf (Fig. 70 bis 73), alle in runder Form, aber merklich flacher, manchmal in Wellenlinien schliessend (Fig. 74), ferner Goldemailuhren mit eingelegten Blumen aus Halbedelsteinen (Neuber-Arbeit). Rokoko-Satteluhren s. Fig. 77.

(Schluss folgt.)

Vorschule des Uhrmachers.

Von F. Rosenkranz. [Nachdruck verboten.]

Die Geometrie der Ebene.

(Schluss aus Nr. 13.)

Pythagoräischer Lehrsatz.

Schon die griechischen Philosophen des Altertums sahen die Mathematik, die vollkommenste aller Wissenschaften, als einen Grundpfeiler der gesamten Weltweisheit an. Sie beschäftigten sich mit den Raum- und Zahlengrössen in hervorragender Weise und gaben auch schon scharfsinnige Beweise zu den geometrischen Lehrsätzen.

Die griechischen Gelehrten hatten ihre Vorgänger in den Priestern der Aegypter. Dieses älteste bekannte Kulturvolk lebte über drei Jahrtausende in einem völlig geordneten Staatswesen, und die Bedürfnisse ihres bürgerlichen, staatlichen und religiösen Lebens forderten die Entstehung und Ausbildung arithmetischer, geometrischer und astronomischer Kenntnisse. Dass die Aegypter bereits in theoretischer und praktischer Mathematik recht erfahren sein mussten, beweisen die Bauten der Pyramiden, die nicht nur als Begräbnisstätten der Könige dienten, sondern auch zu astronomischen Zwecken. Ferner geben die Tempel- und Palastbauten, die imposanten Kanal- und Schleusenwerke, die noch heute Staunen und Bewunderung erregen, Zeugnis von dem Wissen und Können dieses alten Kulturvolkes.

Die Aegypter waren frühzeitig gute Feldmesser, weil durch die jährlichen Ueberschwemmungen des Nils die Grenzen der Besitzungen leicht verloren gehen konnten, und die Geometer dann berufen wurden, Grenzstreitigkeiten durch Messung der Fluren wieder zu beseitigen. So wurde die Feldmessung der Aegypter die Grundlage zur Geometrie. Die Bauten und Feldmessarbeiten wurden in Aegypten von erblichen Zünften, den sogen. Kasten, betrieben, die unter der Oberleitung der Priester arbeitend, ihre Kunstgriffe und handwerksmässigen Operationen von Geschlecht zu Geschlecht sammelten und fortpflanzten. Im Laufe der Jahrhunderte sammelte sich viel geometrisches Material, das die Priester ordneten, sichteten und in praktische Form brachten. Wenn auch die ägyptischen Priester ihre Kenntnisse in Geometrie und Astronomie durch Eintragung in die heiligen Bücher geheim hielten, so bleibt doch diesem Volke der Ruhm, die logische Gliederung der geometrischen Wahrheiten in Lehrsätze und Aufgaben eingeteilt und die Trennung von Konstruktion und Beweis zuerst angebahnt zu haben. Es fehlte ihnen jedoch der strenge folgerichtige Aufbau der Wissenschaft aus einer geringen Zahl von Grundsätzen, und ganz besonders mangelte ihnen das Zusammenfassen aller speziellen Fälle unter allgemeinen Gesichtspunkten. Diese Lücken auszufüllen, blieb den Griechen vorbehalten.

Die ägyptischen Feldmesser besassen grosses Geschick im Ausmessen und Verwandeln von Flächenräumen geradliniger Figuren. Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck benutzten sie bei der Höhenmessung von Gegenständen. Es kam, wie dies meist zu gehen pflegt, zuerst die Praxis, dann die Theorie zur Entwicklung. Durch die geschickte Benutzung des rechtwinkligen Dreiecks lösten die Aegypter sogar trigonometrische Aufgaben.

Bereits Herodot, der um 460 v. Chr. Aegypten bereiste, bezeugt, dass sich die Aegypter mit der Rechenkunst beschäftigten, später berichteten hierüber Isokrates, Plato, Aristoteles, Diodorus (70 v. Chr.) und andere.

Der Pythagoräische Lehrsatz ist einer der wichtigsten und fruchtbarsten in der gesamten Geometrie und mit Hilfe desselben lassen sich die mannigfaltigsten Aufgaben lösen. Der genannte Lehrsatz lautet: „In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.“ Der Entdecker dieses berühmten Satzes ist der griechische Philosoph Pythagoras, der im Jahre 584 v. Chr. auf der Insel Samos geboren wurde. Es gibt über 100 Beweise zu diesem Lehrsatz, von denen viele nur ganz geringe Abweichungen voneinander besitzen.

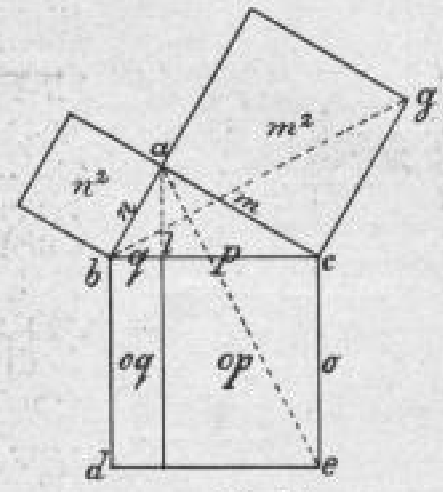

Fig. 97.

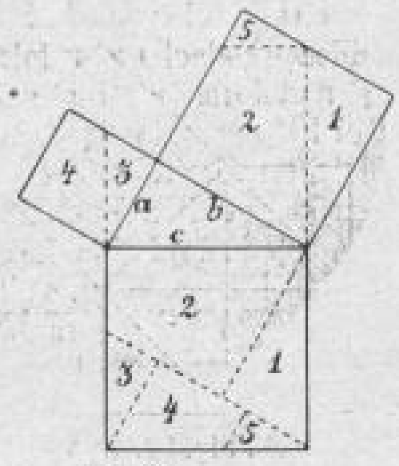

Fig. 98.

Am bekanntesten ist der von Euklides in Alexandria, 300 v. Chr., gegebene Beweis, siehe Fig. 97. Der Euklidische Beweis[1]) zerlegt das Quadrat über der Hypotenuse bc in zwei

---

1) Nachfolgend ist für diejenigen Kollegen, die sich für die Beweisführung interessieren, diese gegeben. Unter der Voraussetzung, dass im Dreieck abc (Fig. 97) der Winkel bac ein rechter ist, wird die Behauptung aufgestellt, dass $bc^2 = ab^2 + ac^2$ oder $o^2 = m^2 + n^2$ ist, was bewiesen worden soll: Man fälle von a die Senkrechte auf bc und verlängere sie bis zum Durchschnitt mit de. Die Hypotenusenabschnitte, die dadurch entstehen, seien p (an m anliegend) und q (an n anliegend). Verbindet man b mit g und a mit e, so ist

$$\begin{array}{c} bc = ec \\ cg = ca \\ \underline{\measuredangle\, bcg = \measuredangle\, eca}, \text{ folglich} \\ \Delta\, bcg \cong \Delta\, eca. \end{array}$$

Nun ist $\Delta\, bcg = \frac{1}{2} m^2$ (Grundlinie cg u. Höhe ac).
$\Delta\, eca = \frac{1}{2} o \cdot p$ (Grundlinie ce u. Höhe cl).
Folglich $\frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{2} o \cdot p$
oder $m^2 = o \cdot p$
desgl. $n^2 = o \cdot q$

$$\begin{array}{c} m^2 + n^2 = o \cdot p + o \cdot q. \\ m^2 + n^2 = o^2. \end{array}$$

2) Nähere Erklärung zur Fig. 102. Es sei abc das rechtwinklige Dreieck, über dessen Hypotenuse bc das Quadrat $bcde$ konstruiert ist; klappt man das Dreieck abc um, so dass es in die Lage mbc kommt, so zerfällt der rechte Winkel bcd in zwei Winkel bcm und mcd oder $\measuredangle\, bcm + \measuredangle\, mcd = R$; ausserdem ist aber auch $\measuredangle\, bcm + \measuredangle\, cbm = R$; durch Vergleichung und beiderseitige Subtraktion von Winkel bcm folgt hieraus, dass $\measuredangle\, mcd = \measuredangle\, cbm$. Man gewinnt also Platz, um das Dreieck abc zum zweiten Male in das Quadrat $bcde$ zu legen, und zwar so, dass die Hypotenuse auf cd und die längere Kathete an cm zu liegen kommt und demnach cdn das zweite zu abc kongruente Dreieck ist. Man übersieht auf der Stelle, wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt und dass hierbei das Quadrat $bcde$ in fünf Stücke zerfällt, in die vier zu abc kongruenten Dreiecke bcm, cdn dep, ebq und in das Quadrat $mnpq$, dessen Seite nichts anderes als der Unterschied unter den Katheten des ursprünglichen Dreiecks ist (man hat $mn = cn - cm = ab - ac$, ebenso $np = dp - dn = ab - ac$ usw.). Diese fünf Bestandteile lassen sich nun aber auch auf andere Weise anordnen, wenn man nämlich die vier Dreiecke nicht mit den Katheten, wie es in Fig. 102a der Fall ist, sondern mit den Hypotenusen aneinander legt. Dies geschieht auf folgende Weise. Stellt man zuerst in Fig. 102b das Dreieck bcm auf und lehnt daran das zweite Dreieck (cdn in Fig. 102a) so, dass die Hypotenusen zusammenfallen und ein Rechteck $bmcf$ entsteht. Daneben legt man das dritte Dreieck ghc (in Fig. 102a dep) und an dieses das vierte, ähnlich wie vorher, so dass beide zusammen das Rechteck $ghic$ ausmachen. In den Winkel fih bringen wir endlich noch das fünfte Stück (in Fig. 102a $mnpq$), so dass jetzt ein Sechseck $ghlkbm$ entstanden ist, das dieselbe Fläche wie das frühere Quadrat $bcde$ besitzt. Verlängert man die Gerade kl, bis sie mg in s schneidet, so zerfällt das Sechseck (Fig. 102b) in zwei Rechtecke $ksmb$ und $hgsl$, über die folgendes zu bemerken ist. Es war $il = cs$ der Unterschied beider Katheten und cm die kleinere Kathete; beides zusammen gibt die grössere Kathete, mithin ist $ms = bm$, folglich das Rechteck $ksmb$ ein Quadrat, und zwar das über der grösseren Kathete konstruierte Quadrat; ferner war cg die grössere Kathete, der Unterschied beider Katheten cs davon abgezogen, gibt die kleinere Kathete, mithin ist $gs = gh$, folglich das Rechteck $ghls$ ein Quadrat, und zwar das Quadrat der kleineren Kathete. Die beiden Quadrate $ghls$ und $ksmb$ füllen zusammen das Sechseck $ghlkbm$ und dieses kommt dem Quadrat $bcde$ (Fig. 102a) gleich. Es ist also in der Tat das Hypotenusenquadrat aus denselben Stücken zusammengesetzt, wie die Summe der Kathetenquadrate. — Das hier Ausgeführte findet auch auf Fig. 101 Anwendung.