Die abgekürzte Multiplikation mit unvollständigen Dezimalbrüchen.

Von Prof. E. Gelcich

Wenn wir eine sehr elementare Aufgabe aus der Arithmetik zur Besprechung bringen, so thun wir es nur aus dem Grunde, weil uns eine lange Erfahrung gezeigt hat, dass gerade die abgekürzte Multiplikation mit unvollständigen Dezimalbrüchen in der Praxis sehr häufig angewendet, aber sehr selten richtig ausgeführt wird. — Zuerst aber einige Worte über die Bedeutung der unvollständigen Dezimalbrüche.

Es kommt häufig vor, dass eine Rechnungsgrösse, entweder aus eigenen Messungen, oder aber aus anderen Berechnungen, in den Dezimalstellen nicht genau abgegrenzt oder beziehungsweise bestimmt erscheint, sondern dass man ihre kleinsten Theile nur näherungsweise kennt. Man nennt dann die Dezimaltheile dieser Grösse einen unvollständigen Dezimalbruch. Unsere Leser werden sich den richtigen Begriff eines unvollständigen Dezimalbruches machen, wenn wir einige Beispiele anführen. Eine Grösse, mit welcher Uhrmacher sehr viel zu thun haben, ist die Ludolf'sche Zahl (π), welche das Verhältniss des Durchmessers zum Kreisumfang angiebt. Nun ist diese Zahl $\pi = 3{,}141592653589$ u. s. w.; die Dezimalstellen gehen noch weiter ohne Ende, d. h. die Zahl π enthält einen unvollständigen Dezimalbruch. Man bezeichnet die Unvollständigkeit eines Dezimalbruches in der Mathematik, indem man der letzten geschriebenen Dezimalstelle einige Punkte nachsetzt, man schreibt also z. B.: $\pi = 3{,}14159 \ldots\ldots$ Einen häufigen Fall von unvollständigen Dezimalbrüchen liefern die sogenannten periodischen Dezimalbrüche. Angenommen irgend eine Länge sei als Einheit gegeben, und eine andere Länge soll zwei Drittel von dieser Einheit betragen. Ist die Einheit = 1 m, so sind $^2/_3$ davon $= 0{,}6666 \ldots .$

Bei solchen unvollständigen Dezimalbrüchen handelt es sich nun darum, zu bestimmen, wie viele der Dezimalstellen zu nehmen sind, damit ein gesuchtes Resultat den gewünschten Genauigkeitsgrad ergebe. Wir wollen nun diese Frage mit Rücksicht auf die abgekürzte Multiplikation zuerst theoretisch untersuchen, und dann einige praktische Regeln ableiten, die leicht zu merken und beim Rechnen sehr von Vortheil sind.

Zunächst ist man in der Praxis gewöhnlich verpflichtet eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen zu berücksichtigen, und man vernachlässigt die übrigen, indem man die sogenannte Korrektur noch in Rechnung zieht, d. h. wenn die erste Stelle der vernachlässigten Dezimalen mehr beträgt als 5, so rechnet man in der letzten Stelle der angenommenen Dezimalen um eine Einheit mehr, sonst achtet man auf die zu vernachlässigende Zahl nicht. Sollen z. B. von dem unvollständigen Dezimalbruch $3{,}14159265358 \ldots$ die ersten 4 Dezimalen genommen werden, so hat man 3,1416, weil die erste der zu vernachlässigenden Ziffern grösser als 5 ist. Hätte man aber nur zwei Stellen zu nehmen gehabt, so wäre der Dezimalbruch 3,14. Der Fehler, den man durch diesen Vorgang begeht, ist dann, wie leicht einzusehen, immer kleiner als die Hälfte der halben Einheit an der letzten Stelle.

Des besseren Verständnisses wegen wollen wir diese Thatsache an einigen Beispielen erläutern. Es sei der Dezimalbruch $3{,}14159265 \ldots$ auf 6 Dezimalen abzukürzen, so werden wir schreiben:

$$3{,}141593$$

Der Fehler wird sein

$$\begin{array}{rr} & 3{,}14159265\ldots \\ & 3{,}141593 \\ \hline \text{Differenz-Fehler} = & 0{,}00000035, \end{array}$$

also kleiner als 0,0000005. Um später allgemeine algebraische Zahlen einführen zu können, wollen wir den Dezimalbruch in Form eines gemeinen Bruches schreiben. Bezeichnet man den Fehler mit f, und wendet man die Zeichen $>$ für grösser und $<$ für kleiner an, so ist bei obigem Beispiel

$$f < \frac{5}{10000000}$$

oder weil $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10000 = 10^4$, $100000 = 10^5$ u. s. w. ist

$$f < \frac{5}{10^7},$$

es ist aber $0{,}0000005 = \frac{1}{2}(0{,}000001) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$ also $\frac{5}{10^7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$, daher

$$f < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}.$$

Hätte man den Bruch $3{,}14159265 \ldots$ auf 5 Dezimalstellen zu reduziren, so würde man schreiben 3,14159. Der Fehler wäre dann:

$$\begin{array}{rr} & 3{,}14159265\ldots \\ & 3{,}14159 \\ \hline f = & 0{,}00000265 \end{array}$$

und jedenfalls

$$f < 0{,}000005$$

oder nach obigem:

$$f < \frac{5}{1000000}$$

und

$$f < \frac{5}{10^6}$$

oder

$$f < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5}.$$

Würde man denselben Bruch nur auf zwei Dezimalstellen brauchen, so wäre zu nehmen 3,14. Der Fehler wäre dann:

$$f = 0{,}001597 \ldots < \frac{5}{1000}$$

und

$$f < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2}.$$

Wer diese Beispiele aufmerksam verfolgte, der erkennt also das allgemeine Gesetz, dass, wenn man einen unvollständigen Dezimalbruch auf n Dezimalen abkürzt, und dabei die sogenannte Korrektur nimmt, der dabei begangene Fehler im *mm* kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}$ ist. Also allgemein:

$$f < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Nehmen wir nun an, dass der unvollständige Dezimalbruch $3{,}14159265 \ldots$ auf vier Stellen reduzirt worden sei, dass also 3,1416 gesetzt wurde, so wird der reduzirte Bruch um 0,00005 vermindert kleiner sein, als der unvollständige Bruch; vermehrt man dagegen ersteren um dieselbe Grösse, so wird der reduzirte Bruch grösser. Man hat also übersichtlich:

$$\begin{array}{rcr} 3{,}1416 & & 3{,}1416 \\ -\;0{,}00005 & & +\;0{,}0005 \\ \hline 3{,}14155 & < 3{,}1415726 \ldots < & 3{,}14165, \end{array}$$

da aber $0{,}00005 = \frac{1}{2}(0{,}0001)$ ist, so kann man schreiben:

$$3{,}1416 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} < 3{,}1415926 \ldots < 3{,}1416 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4}.$$

(Fortsetzung folgt).

Unsere Werkzeuge.

Verbesserungen am Zapfenpolirstuhl.

College Engelbrecht in Berlin klagt in der Nr. 2 Ihrer geschätzten Zeitung, neben lobender Erwähnung der deutschen Fabrikate, über schweizer Uhrmacherwerkzeuge und speziell über die Jacot tour. Wie ausserordentlich mangelhaft die Ausführung der weitaus meisten der schweizer Werkzeuge ist, wird wohl jeder der Herren Collegen aus eigener Erfahrung wissen und dieser Klage gewiss im vollsten Maasse beipflichten, und wie sehr dieser ewige Stillstand dieses Zweiges der schweizer Industrie von den Uhrmachern auch empfunden wurde, davon zeugt am allerdeutlichsten der kolossale und rasche Aufschwung der deutschen Fabrikate.