Wollte man beim Verhältniss (tropisches Jahr — synodischer Umlauf des Mondes) $\frac{21038}{1701}$ den sechsten Näherungsbruch bilden, so hätte man die Glieder zu berücksichtigen:

$$12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}.$$

Die Bildung dieses Näherungsbruches und beziehungsweise die Verwandlung irgend eines Kettenbruches in einen gemeinen Bruch ergiebt sich aus folgendem Vorgange:

$$12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}} = 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1\times 6+1}{6}}}}}}$$

$$= 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{7}{6}}}}}} = 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{6}{7}}}}}.$$

Geht man in gleicher Weise fort, so bekommt man nach einander:

$$12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{13}{7}}}}} = 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{7}{13}}}}$$

$$= 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{33}{13}}}} = 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{13}{33}}}$$

$$= 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{46}{33}}} = 12+\cfrac{1}{2+\frac{33}{46}}$$

$$= 12+\cfrac{1}{\frac{125}{46}} = 12+\frac{46}{125} = \frac{1546}{125}.$$

Also der sechste Näherungsbruch von $\frac{21038}{1701} = \frac{1546}{125}$.

Es ist jedoch oft bequemer, den Näherungsbruch vom ersten Gliede an zu bilden, wenn man folgende Regel beachtet, die sich aus der Bildungsweise der Näherungsbrüche ergiebt:

1. Man bildet zuerst die ersten zwei Näherungsbrüche, die man sehr leicht erhält.

2. Der Zähler irgend eines weiteren Näherungsbruches ist gleich dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches mal dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, mehr dem Zähler des vorvorhergehenden Näherungsbruches.

3. Der Nenner irgend eines weiteren Näherungsbruches ist gleich dem Nenner des vorhergehenden mal dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, mehr dem Nenner des vorvorhergehenden Näherungsbruches.

Bezeichnen wir also die Zähler der Näherungsbrüche nach einander mit Z_{I}, Z_{II}, Z_{III} u. s. w., die Nenner mit N_{I}, N_{II}, N_{III} u. s. w., so wird man die Näherungsbrüche des früheren Beispieles wie folgt bilden:

Zuerst hat man leicht:

$$\frac{Z_{\mathrm{I}}}{N_{\mathrm{I}}} = \frac{1}{2} \quad \frac{Z_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{II}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}} = \cfrac{1}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}; \text{ also } \begin{matrix} Z_{\mathrm{I}} = 1 \\ N_{\mathrm{I}} = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} Z_{\mathrm{II}} = 1 \\ N_{\mathrm{II}} = 3. \end{matrix}$$

Hierauf, wenn das Glied $\frac{1}{2}$ dazu kommt:

$$\begin{matrix} Z_{\mathrm{III}} = 1\times 2+1 = 3 \\ N_{\mathrm{III}} = 3\times 2+2 = 8, \end{matrix} \text{ also } \frac{Z_{\mathrm{III}}}{N_{\mathrm{III}}} = \frac{3}{8}.$$

Wenn das Glied $\frac{1}{1}$ hinzukommt:

$$\begin{matrix} Z_{\mathrm{IV}} = 3\times 1+1 = 4 \\ N_{\mathrm{IV}} = 8\times 1+3 = 11, \end{matrix} \text{ also } \frac{Z_{\mathrm{IV}}}{N_{\mathrm{IV}}} = \frac{4}{11}.$$

Ebenso:

$$\frac{Z_{\mathrm{V}}}{N_{\mathrm{V}}} = \frac{4\times 1+3}{11\times 1+8} = \frac{7}{19}.$$

$$\frac{Z_{\mathrm{VI}}}{N_{\mathrm{VI}}} = \frac{7\times 6+4}{19\times 6+11} = \frac{46}{125}.$$

Und da auch 12 Ganze hinzukommen:

$$\frac{Z_{\mathrm{VI}}}{N_{\mathrm{VI}}} = 12+\frac{46}{125} = \frac{1546}{125}.$$

IV.

Der Näherungsbruch ist selbstverständlich nie gleich dem Ergänzungsbruche. Nun wünscht man bei der Bildung der Näherungsbrüche zu wissen, ob der gewählte Näherungsbruch grösser oder kleiner als der Ergänzungsbruch ausfällt. — Dies beurtheilt man in einer sehr einfachen Weise, denn es ist jeder Näherungsbruch grösser als der Ergänzungsbruch, wenn er aus einer ungeraden Anzahl von Gliedern gebildet wird. Dagegen sind die aus einer geraden Anzahl von Gliedern gebildeten Näherungsbrüche kleiner als der Ergänzungsbruch. Man kommt auf diesen Schluss, wenn man sich vor Augen stellt, dass ein Bruch kleiner wird, wenn man seinen Nenner vermehrt, und grösser, wenn man den Zähler vermehrt. Hat man allgemein:

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots \cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}},$$

und nennt man die Summe $\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots}} = x_1$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1+x_1}.$$

Nun ist dem Gesagten zufolge $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1+x_1}$, daher $\frac{1}{q_1} = \frac{Z_{\mathrm{I}}}{N_{\mathrm{I}}} > \frac{a}{b}$.

Macht man $\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\cfrac{1}{q_5+\dots}}} = x_2$,

so ist $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+x}}$.

Nun hat man: $\frac{1}{q_2} > \frac{1}{q_2+x}$,

$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_1}$

daher $\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}} < \cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+x}}$,

oder $\frac{Z_{\mathrm{II}}}{N_{\mathrm{II}}} < \frac{a}{b}$.

Geht man so weiter, so wird man immer finden, dass die geraden Näherungsbrüche kleiner, die ungeraden grösser als der Ergänzungsbruch sind. Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche liefert einen ersten Anhaltspunkt, um zu beurtheilen, ob der für die Berechnung der Räder gewählte Näherungsbruch grösser oder kleiner ausfällt, als der gegebene Ergänzungsbruch, und beziehungsweise als das gegebene Verhältniss.

Man kann den durch den Ersatz eines Näherungsbruches begangenen Fehler durch besondere Berechnungen bestimmen; oft genügt es, diesen Fehler in bestimmte Grenzen einzuschliessen. Die Theorie der Kettenbrüche liefert nun für den letzteren Fall folgenden Lehrsatz:

Der Unterschied zwischen einem Näherungsbruch und dem vollständigen Werthe des gegebenen Ergänzungsbruches ist, absolut genommen, kleiner als die Einheit, dividirt durch das Quadrat des Nenners des gewählten Näherungsbruches.

Um diesen Beweis zu führen, müssen wir zunächst zeigen, dass das Produkt aus dem Zähler eines Näherungsbruches in den Nenner des folgenden Näherungsbruches, weniger dem Produkte aus dem Zähler des zweiten in den Nenner des ersteren, gleich ± 1 ist.