Man hat:

$$\frac{N_I}{Z_I} = \frac{1}{q_1} \quad \frac{Z_{II}}{N_{II}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1},$$

daher $Z_I N_{II} - Z_{II} N_I (q_1 q_2 + 1) - q_1 q_2 = 1.$

Ebenso findet man, indem man in gleicher Art vorgeht:

$$Z_{II} N_{III} - Z_{III} N_{II} = -1 \text{ u. s. w.}$$

oder allgemein $Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n = \pm 1.$

Indem wir uns nun erinnern, dass die Näherungsbrüche abwechselnd kleiner und grösser als der Ergänzungsbruch sind, je nachdem sie aus einer ungeraden oder geraden Anzahl von Gliedern gebildet werden, haben wir, wenn $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ zwei auf einander folgende Näherungsbrüche sind und $\frac{a}{b}$ der Ergänzungsbruch ist:

$$\frac{Z_n}{N_n} > \frac{a}{b} > \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_n}{N_n} \text{ und } \frac{a}{b} > \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}.$$

Zieht man von gleichen Grössen ungleiche ab, so bleibt dort ein kleinerer Rest, wo die grössere Zahl abgezogen wird, also:

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}},$$

und wenn man die Subtraktion auf der rechten Seite ausführt:

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{Z_n \cdot N_{n+1} - Z_{n+1} \cdot N_n}{N_n \cdot N_{n+1}}.$$

Nach dem oben Gesagten ist aber

$$Z_n \cdot N_{n+1} - Z_{n+1} N_n = \pm 1,$$

daher $$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n \cdot N_{n+1}}.$$

Es geht aber ferner aus dem Bildungsgesetze der Näherungsbrüche noch hervor, dass der Nenner eines jeden folgenden Näherungsbruches grösser sein muss als der Nenner des vorangehenden, daher:

$$N_{n+1} > N_n$$

und folglich $N_{n+1} \cdot N_n > N_n{}^2$

und daher $$\frac{1}{N_{n+1} N_n} < \frac{1}{N_n{}^2}.$$

Letzteres, weil ein Bruch um so kleiner wird, je grösser der Nenner ist. Hat man aber

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}$$

und $$\frac{1}{N_n N_{n+1}} < \frac{1}{N_n{}^2},$$

so muss umsomehr sein:

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n{}^2},$$

was zu beweisen war.

Dieser allgemeine Anhaltspunkt dürfte jedoch bei der Berechnung der Räderwerke nicht genügen, und es wird nothwendig, das Verhältniss des Zählers genauer zu ermitteln. Um den dabei zu verfolgenden Vorgang zu illustriren, wählen wir das nachstehende Beispiel aus dem vorerwähnten Werke von Janvier.

In der Beschreibung des Planetariums von Huyghens sagt Janvier, dass die Bewegung des Saturn durch ein Rad von 206 Zähnen bewerkstelligt würde, das in ein Trieb von 7 Zähnen (Erde) eingriff. Das Verhältniss des Saturn zur Erdbewegung war nach den damaligen astronomischen Tafeln mit 77708431 : 2640858 angenommen. Welcher Näherungsbruch war hier gewählt und mit welcher Richtigkeit resultirte die Funktion des Instrumentes in Bezug auf die Bewegung des Saturn?

Wir haben zunächst:

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1123549}{2640858}.$$

Der Rest der Division muss in einen Kettenbruch verwandelt werden und man erhält:

2640858 :	1123549 = 2	Rest	393760	
1123549 :	393760 = 2	„	336029	
393760 :	336029 = 1	„	57731	
336029 :	57731 = 5	„	47374	
57731 :	47374 = 1	„	10357	
47374 :	10357 = 4	„	5946	u. s. w.

$$\text{Daher } \frac{77708431}{2640858} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche wären:

$$\frac{Z_I}{N_I} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$$

$$\frac{Z_{II}}{N_{II}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 29 + \frac{2}{5} = \frac{147}{5}$$

$$\frac{Z_{III}}{N_{III}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = 29 + \frac{3}{7} = \frac{206}{7}.$$

Wir sehen also, dass beim dritten Näherungsbruch stehen geblieben worden war, der Unterschied dieses und des Ergänzungsbruches wäre kleiner als $\frac{1}{49}$.

Den genaueren Fehler erhält man durch folgende Ueberlegung:

Infolge des angenommenen Näherungs-Verhältnisses der Bewegung wird Saturn in 206 Jahren 7 Umdrehungen vollführen. — In Wirklichkeit hat man aber ein anderes Verhältniss, und die wirkliche Bewegung dieses Planeten in 206 Jahren ergiebt sich aus der Proportion:

$$77708431 : 2640858 = 206 : x,$$

woraus folgt: $$x = 7 + \frac{1}{1346}.$$

Also vollführt Saturn in 206 Jahren Umdrehungen $7 + \frac{1}{1346}$; Saturn wird also in 206 Jahren um $\frac{1}{1346}$ retardiren, und das Rad sich in 1346 um einen Zahn verspäten.

Die Zahnzahl des Rades ist 206, daher der Winkelwerth eines Zahnes:

$$360^0 : 206 = 1^0\,45' = 105'.$$

Also in 1346 Jahren wird man Saturn um 105′ verschieben müssen, dies ergiebt für 20 Jahre einen Fehler von

$$1346 : 105 = 20 : x$$
$$x = 1'\,34''.$$

(Fortsetzung folgt.)

A. Lange's Uhr mit konstanter Kraft,

zugleich zur beliebigen Hervorbringung schleichender und springender Sekunde.

Von Richard Lange in Glashütte.

Nachfolgend gebe ich eine kurze Beschreibung des Ganges mit konstanter Kraft, welchen mein Vater mehrfach mit gutem Erfolg für Taschenuhren, und später auch für unsere Hausuhr, angewendet hat. Die hier beigegebene Abbildung stellt diesen Gang dar.

Die Kraft, welche die Unruh in gleichbleibender Schwingung erhält, wird hier von einer, das Gangrad treibenden Spiralfeder übertragen, welch letztere durch das Räderwerk immer aufs neue gespannt wird.

Das Gangrad a ist mit dem damit verbundenen kleinen 6 zähnigen Auslöserad b lose auf der Gangtriebwelle. Unter dem Gangrad ist ein grösseres 6 zähniges Springrad c fest auf das untere Wellenende gepasst, welches zugleich als Verreibung zur Begrenzung für die Höhenluft des Gangrades dient. Auf den Putzen dieses Springrades c ist eine Spiralrolle gesetzt, in welcher die feine Spirale s befestigt ist, während das äussere Spiralende in dem Gangradschenkel l befestigt ist. Die Spirale s wird so stark gespannt (etwa einen Umgang), als es die Kraft zur Erzeugung einer genügend grossen Unruhschwingung erfordert.