6. Es sei $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$. Jeder zwischen diesen beiden eingeschaltete Bruch hat grössere Zahlen als die gegebenen Brüche.

Beweis. Es sei $\frac{m}{n}$ ein eingeschalteter Bruch, derart, dass

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n} > \frac{c}{d}$$

sei. Wegen $\quad \frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ und $\frac{m}{n} > \frac{c}{d}$

wird man haben: $\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} > \frac{a}{b} - \frac{m}{n}$,

aber nach der Annahme ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$, folglich:

$$\frac{1}{bd} > \frac{an - bm}{bn}.$$

Nun muss aber nach dem 2. Lehrsatz sein:

$$bn > bd\,(an - bm)$$

und wenn man durch b dividirt:

$$\alpha)\ n > d\,(an - bm).$$

Es folgt ferner aus der Annahme $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$,

wegen des Lehrsatzes 2 auch:

$$an > bm.$$

In der Gleichung α) muss also $an - bm$ einen Rest geben, der grösser als die Einheit ausfällt, weil an und bm ganze Zahlen sind. Wenn aber d mit einer Zahl multiplizirt wird, welche grösser als 1 ist, und das Produkt noch immer kleiner als n ausfällt, so muss nothwendigerweise sein:

$$n > d.$$

Anderseits ist $\quad \frac{m}{n} > \frac{c}{d}$

und daher: $\quad md > m$

ist nun $\quad d < n$,

so muss sein: $\quad m > c$,

weil sonst das Produkt md nicht grösser als cn ausfallen konnte.

Wir haben somit: $\quad n > d$

$$m > c.$$

In ähnlicher Weise kann man beweisen, dass:

$$n > b$$

$$m > a \text{ ist.}$$

7. Ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$, so differirt $\frac{a+c}{b+d}$ von den gegebenen Brüchen um einen Bruch, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner gleich dem Produkte des neuen und des verglichenen Bruches ist.

Beweis. Bildet man in der That die Differenz etwa mit $\frac{a}{b}$, so hat man:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ab + ad - ab - bc}{b\,(b+d)} = \frac{ad - bc}{b\,(b+d)}.$$

Es ist aber nach Regel 3 und nach der für Regel 7 gemachten Annahme

$$ad - cb = 1,$$

daher: $\quad \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{b\,(b+d)}.$

8. Ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$, so bildet der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ den einfachsten zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ enthaltenen Bruch.

Folgt unmittelbar aus 6.

Nimmt man als gegebene Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$, deren Differenz $\frac{1}{1}$ beträgt, so wird der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ sein: $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ und dieser ist der einfachste zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ enthaltene Bruch.

Der Unterschied zwischen diesem neugebildeten Bruch und den gegeben Brüchen ist:

$$\frac{0}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bildet man nun aus $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ mit $\frac{1}{2}$ einen neuen Bruch von der Form $\frac{a+c}{b+d}$, so erhält man $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, deren Differenz mit $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ gleich der Einheit durch das Produkt der Nenner ist. Geht man so fort, so erhält man immer neue Brüche, deren Differenzen gleich der Einheit durch das genannte Produkt bilden. Brocot hat eine Tabelle solcher Brüche (in Dezimalen ausgedrückt) berechnet, deren Nutzen später gezeigt werden soll.

9. Ein gegebenes Verhältniss wird durch zwei Brüche näherungsweise dargestellt, sind die Zahlen dieser Näherungsbrüche von entgegengesetztem Vorzeichen, so kann man den wirklichen Werth des Verhältnisses daraus wie folgt bilden.

Es seien zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ gegeben, welche das Verhältniss p näherungsweise bestimmen. Der Fehler des ersten Bruches $\left(\frac{a}{b} - p\right)$ sei $+n$, jener des zweiten $\left(\frac{c}{d} - p\right) = -m$. Es ist dann offenbar:

$$\frac{a}{b} - n = p$$

$$\frac{c}{d} + m = p,$$

daher $\quad \frac{a}{b} - n = \frac{c}{d} + m = p,$

und folglich auch $\left(\text{weil } \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b},\ \frac{cb}{db} = \frac{c}{d}\right)$:

$$\frac{ad}{bd} - n = \frac{cb}{db} + m = p,$$

oder $\quad \frac{ad - bdn}{bd} = \frac{cb + mdb}{db} = p.$

Diese Gleichung bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit m, und des zweiten mit n multiplizirt. Man hat dann:

$$\frac{adm \quad bdnm}{bdm} = \frac{cbn + mndb}{dbn} = p.$$

Und endlich nach 4:

$$\frac{adm - bdnm + cbn + mndb}{bdm + dbn} = p,$$

oder nach der Kürzung:

$$\frac{adm + cbn}{bdm + dbn} = p.$$

Folgesatz I. Ist $d = b$ (d. h. die Näherungsbrüche von gleichen Nennern), so vereinfacht sich die Gleichung für p, wie folgt:

$$p = \frac{adm + cdn}{bdm + bdn}$$

und

$$p = \frac{am + cn}{bm + bn}.$$

Folgesatz II. Ist $m = x \cdot n$ (d. h. der eine Fehler ein Vielfaches des anderen), so resultirt:

$$p = \frac{adxn + cbn}{bdxn + bdn}$$

und

$$p = \frac{adx + cb}{bdx + bd}.$$

10. Ein gegebenes Verhältniss $\frac{a}{b}$ ist näherungsweise durch zwei andere Verhältnisse $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ gegeben, und zwar derart, dass $\frac{c}{d} > \frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ ist. Bildet man das Verhältniss $\frac{c+e}{d+f}$, so wird letzteres von dem wahren Verhältniss um einen Bruch abweichen,